UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Métodos Matemáticos de la Física

TESIS DOCTORAL

Ecuaciones de Bargmann-Wigner : simetrías de Bispinors y formulación hamiltoniana

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Miguel Ángel Rodríguez González

Madrid, 2015

Miguel Angel Rodríguez González

ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER. SIMETRIAS DE BISPINORS Y FORMULACION HAMILTONIANA

Departamento de Metodos Matemáticos de la Física
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid
1980

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-42308-1980

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER

SIMETRIAS DE BISPINORS Y FORMULACION HAMILTONIANA

MEMORIA, que para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas, presenta MIGUEL ANGEL RODRIGUEZ GONZALEZ.

Madrid, Diciembre 1979

Este trabajo se ha realizado en el Departamento de Métodos Matemáticos de la Física de la Facultad de Ciencias Físicas (UCM) bajo la dirección y con la participación constante del Prof. Dr.D. Miguel Lorente Páramo. Las numerosas discusiones que hemos mantenido y su asesoramiento y aliento en los momentos más difíciles le hacen merecedor de mi más profundo agradecimiento.

Asimismo agradezco al Prof. A. Galindo que me introdujo en el ambiente de trabajo del Departamento y que me otorgó siempre su confianza. Y al Prof. L. Abellanas por su apoyo constante y las facilidades que para la realización de este trabajo me ha dado.

Un agradecimiento especial a M.A. Iglesias por su labor de hacer este trabajo presentable.

A todos los compañeros de los Departamentos de Métodos Matemáticos de la Física y Física Teórica, otros Profesores y alumnos de esta Facultad y a mis amigos, no necesariamente físicos, que me han ayudado en todos los aspectos durante los años de preparación de este trabajo.

El trabajo fue hecho gracias al apoyo económico de una beca de Formación del Personal Investigador del MEC.

INDICE

/

INTRODUCCION

Desde que Dirac estableció en 1928 su ecuación de ondas para partículas de spin 1/2, se han hecho numerosos intentos para generalizar de manera adecuada esta ecuación a spin arbitrario.

Si se supone que el grupo de invariancia del espacio tiempo es el grupo de Poincaré, las ecuaciones de onda que describen partículas elementales deberán ser invariantes bajo la acción de este grupo. La función de ondas pertenecerá a un cierto espacio de funciones en el que se puede definir una representación del grupo de Poincaré.Los dos Casimires del grupo son $P^2 = P^\mu P_\mu$ y $W = -W^2 = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} P^2 - J^{\mu\sigma} J_{\nu\sigma} P_\mu P^\nu$ que nos permiten caracterizar las representaciones irreducibles. Si suponemos que la función de ondas de una partícula elemental se transforma con una representación irreducible unitaria del grupo de Poincaré, con $P^2 = m^2$ y $W = m^2 s(s+1)$ podemos asociar a esa partícula una masa, m, y un spin s, únicos. Wigner (1939) estudió las representaciones unitarias irreducibles de este grupo y las clasificó de acuerdo con los posibles valores de P^2 y W.

En general, si la función de ondas asociada a la partícula no se transforma con una representación irreducible, necesitaremos una ecuación que nos extraiga la parte irreducible que nos interesa. Como señala S. Weinberg (1964a), (ver también Barut, 1963), la ecuación de ondas, indica la existencia de componentes redundantes que es preciso eliminar. Así, escribe funciones de onda de spin s, que se transforman con la representación (s,0) ó (0,s) del grupo de Lorentz, y funciones (s,0) $\oplus$ (0,s) que son invariantes bajo paridad y que precisan de una ecuación de características similares a las de Dirac para spin 1/2. Sin embargo, estas ecuaciones pueden presentar problemas de estabilidad como señala Wightman (1968).

Asi pues, para construir una ecuación de ondas para una partícula de spin s y masa m, necesitamos una representación del grupo de Lorentz que contenga ese spin, y una serie de condiciones invariantes que extraigan solo la parte de la función de ondas que pertenezca solamente a ese spin y que aseguren la unicidad de la masa. De esta forma se pueden construir ecuaciones como las de Bargman-Wigner (1948), Gel'fand-Yaglom (1963), Rarita-Schwinger (1941), Fierz-Pauli (1939), Duffin-Kemmer (1939), etc. En el caso libre, lo único a comprobar, es la transformación correcta bajo el grupo de Lorentz y la condición de spin y masa única (si es eso lo que deseamos). Los problemas aparecen en el caso de interacción.

Las primeras generalizaciones a spin arbitrario se deben al propio Dirac (1936) que escribió una ecuación de ondas para spin 3/2 en las que las funciones eran spinors de tres índices, $\xi^{\{ab\}}{}_{\dot{c}}$, $\chi^{a}{}_{\{\dot{b}\dot{c}\}}$ que se transformaban con las representaciones $(1, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ del grupo de Lorentz, proporcionando así una posibilidad de escribir ecuaciones invariantes bajo paridad. Sin embargo como señalaron Fierz y Pauli (1939), al introducir un campo electromagnético, usando un acoplo mínimo, $p^{\mu} \longrightarrow p^{\mu} - eA^{\mu}$. Las ecuaciones son inconsistentes, al aparecer más condiciones, que restringen el número de componentes independientes. Para evitar esta situación, Fierz y Pauli proponen un formalismo lagrangiano, en el que se introduce la interacción. Así para spin 3/2 necesitan dos campos auxiliares, ψ^{a} y $\varphi_{\dot{a}}$ que se anulan en el caso libre, en el que las ecuaciones se reducen a las de Dirac. En general la situación es similar, y para spin superior a 1 es necesario en la teoría de Fierz-Pauli introducir nuevos campos auxiliares que eviten las inconsistencias que se presentaban en el caso de interacción.

La ecuación de Fierz-Pauli para spin 3/2 puede escribirse y generalizarse a spin semientero cualquiera, usando un procedimiento debido a Rarita y Schwinger (1941). La función de ondas es un objeto con un índice bispinor y n índices tensoriales $\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1 \dots \mu_n\}}$ si el spin es $n + \frac{1}{2}$. La ecuación que verifica es la de Dirac en su índice bispinor y una condición auxiliar, $\gamma^{\mu} \varphi_{\mu\mu_1 \dots \mu_n} = 0$. Si $\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1 \dots \mu_n\}}$ es simétrico y de trazas nulas en sus índices tensoriales, describe una partícula de masa m y spin $n + \frac{1}{2}$. Para n = 1, se obtiene mediante cambios de base y algunas manipulaciones, la ecuación de Fierz-Pauli. Otra forma de escribir esta misma ecuación se debe a Gupta (1954). La función de ondas es la usada por Fierz y Pauli pero escrita como un vector columna con lo que la ecuación adopta la expresión $(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0$

Gel'fand y yaglom (Gel'fand 1963 y referencias allí señaladas), estudiaron ecuaciones lineales invariantes bajo el grupo de Lorentz. La ecuación general era $(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - k)\psi(x) = 0$ donde k era un número real que puede ser cero y β^{μ} matrices cuadradas N x N, siendo N el número de componentes del vector ψ . $\psi(x)$ se transforma con una representación, en general reducible del grupo de Lorentz y las matrices β^{μ} verifican la relación $S(\Lambda)^{-1}\beta^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\beta^{\nu}$ donde $S(\Lambda)$ son los operadores del grupo en la representación que actua sobre ψ . Si $k = 0$, la condición es menos restrictiva (ver Gel'fand 1963). La forma de las matrices β^{μ} viene dada por la representación $S(\Lambda)$ salvo un cierto número de parámetros que quedan indeterminados. Los autovalores de β^{0} estan relacionados con la masa y el spin asociados a la ecuación. (Se han considerado tambien ecuaciones más generales del tipo $(B^{\mu}\partial_{\mu} + C)\psi(x)=0$ donde B^{μ} y C son matrices no necesariamente cuadradas (ver por ejemplo Wightman 1977)). Así las ecuaciones de Dirac para spin 1/2, Duffin-Kemmer para spin 0 y 1 y Fierz-Pauli para spin 3/2 se pueden escribir de esta forma. Los elementos de β^{0} se determinan imponiendo que la ecuación sea invariante bajo paridad, derivable de un lagrangiano invariante y que la densidad de carga o de energía sean definidas positivas.

Bhabha (1945) estudió ecuaciones de este tipo a las que se imponía la condición $[\beta^{\mu},\beta^{\nu}] \sim J^{\mu\nu}$ donde $J^{\mu\nu}$ son los generadores infinitesimales del grupo de Lorentz a la representación con la que se transforma la función de onda ψ . Entonces $\{J^{\mu\nu};\beta^{\mu}\}$ forman el álgebra de Lie del grupo SO(3,2) (o SO(4,1)), pero las ecuaciones excepto para los casos más sencillos de spin 0, 1/2 y 1 no tienen masa ni spin únicos. Krajcik y Nieto (1974) han estudiado estas ecuaciones de forma exhaustiva recientemente.

Las ventajas de una formulación en un grupo pseudoortogonal en cinco dimensiones que permite determinar las matrices β^{μ} de manera única, una vez dada la representación asociada a la función ψ, han hecho que muchos trabajos hayan tratado este tema (ver por ejemplo, Cecchini, 1979).

Otras aproximaciones a la teoría de ecuaciones invariantes relativistas son las tipo hamiltoniano. Así Foldy (1956) y Mathews (1966) escribieron ecuaciones de evolución dadas por $i\partial_t\psi = H\psi$. ψ pertenece a un espacio de funciones en el que existe una representación del grupo de Poincaré. Usando una generalización de la transformación de Foldy-Wouthuysen (1950), Weaver,Hammer y Good (1964) escriben ecuaciones hamiltonianas para spin arbitrario, a partir de las representaciones que aparecen en las ecuaciones de Weinberg (1964a).

Un problema fundamental desde el punto de vista físico es el comportamiento de las soluciones de estas ecuaciones cuando se introduce una interacción. Como ya hemos dicho, Fierz y Pauli evitaron las inconsistencias de las ecuaciones de Dirac para spin 3/2, introduciendo dos nuevos campos. Sin embargo esto no evita otro tipo de problemas. Así Velo y Zwanziger (1969) encuentra que la ecuación de spin 3/2 presenta velocidades de propagación superiores a las de la luz al introducir un campo electromagnético de determinadas características. Este fenómeno se repite en la ecuación de spin 2. Wightman y Capri (1968) estudian el problema de la estabilidad de las soluciones. Según su criterio, la ecuación es estable si en su espectro de masa no hay números imaginarios. En una teoría de campos libre estos valores no son importantes, pero pueden causar problemas al introducir una interacción. Así, las ecuaciones de Weinberg (1964a) para spin 3/2 son inestables mientras que las de Fierz-Pauli son estables (lo que no quiere decir, como hemos señalado antes, que están libres de dificultades).

Por último, señalamos el interés que presenta la equivalencia de distintos formalismos. En el caso libre no es en general difícil de establecer, pero cuando se introduce una interacción, la forma de hacerlo puede depender en gran manera del formalismo adoptado y la equivalencia puede no existir.

Las ecuaciones de Bargmann-Wigner (1948) son una generalización de la ecuación de Dirac, usando como funciones de onda, productos tensoriales simetrizados de bispinors. Si se impone que estas funciones cumplan la ecuación de Dirac en cada índice, representarán partículas de spin y masa únicas. Su equivalencia con las formulaciones de Klein-Gordon para spin 0, Proca para spin 1 y Rarita-Schwinger para spin 3/2 son conocidas. Salam, Delbourgo y Strathdee (1965a) las aplicaron al estudio de funciones de onda en una teoría de interacciones fuertes, introduciendo el caso de productos tensoriales no simetrizados de bispinors. Guralnik y Kibble (1965) trataron de establecer un formalismo lagrangiano usando estas funciones de onda, y Kamefuchi y Takahashi (1966) estudiaron también otros posibles lagrangianos hasta spin 3/2.

Actualmente, el interés por las ecuaciones de onda relativista sigue existiendo, principalmente en el estudio de interacciones en los casos de spin no superior a 2 (ver por ejemplo Wightman, Erice 1977 y otros seminarios desarrollados allí), y en el caso libre para cualquier spin.

Las formulaciones lagrangianas de teorías para spin arbitrario (Singh y Hagen 1974) usan campos tensoriales para spin entero y campos tensor-bispinors para spin semientero, necesitando la introducción de campos auxiliares para poder escribir lagrangianos con derivadas de primer orden solamente.

La teoría de supersimetría necesita estudiar las ecuaciones que verifican los supercampos y para ello, las que cumplen los campos. Así Sokatchev (1975), Ogievetsky y Sokatchev (1977), Nieuwenhuizen (1973), Berends et al. (1979) estudian ecuaciones de spin hasta 5/2 en el marco de la teoría de supersimetría, mediante el uso de proyectores (Behrends y Fronsdal (1957), Fronsdal (1958) y Rivers (1964)) que seleccionan el spin adecuado.

Estos estudios dan cuenta de la necesidad, aún presente, de estudiar en detalle las distintas teorías en el caso libre para poder discutir despues los casos de interacción.

En este trabajo nos hemos limitado a un estudio detenido de las ecuaciones de Bargmann-Wigner (BW) para masa no nula en el caso libre, Despues de un primer capítulo donde se aclaran y determinan conceptos y notaciones, estudiamos las relaciones entre las ecuaciones BW y las formulaciones de Rarita-Schwinger, tensor-bispinor para spin semientero y Fierz-Pauli, tensorial, para spin entero, asi como un estudio detallado de las representaciones asociadas a estos objetos. En el capítulo siguiente se amplian estos trabajos al caso de bispinors de simetría mixtas y su relación con los totalmente simétricos. Por fin en un último capítulo se señala una descripción de estas ecuaciones en forma de ecuaciones de evolución, y como a partir de spin 3/2 se hace necesario el uso de condiciones auxiliares que permitan asegurar la unicidad del spin asociado. En varios apéndices se describen fórmulas y técnicas usadas en los cálculos de los apartados mencionados.

CAPITULO I. BISPINORS EN SL(2,C)

1. Hacemos en este capítulo una breve exposición de las representaciones bispinors en SL(2,C) y del álgebra de Dirac, asi como de las representaciones correspondientes del grupo conforme, para introducir conceptos y notaciones que serán usados más adelante. Básicamente las referencias aquí utilizadas son: Bogoliubov (1975), Weyl (1946), Gel'fand (1963), Itzykson (1966), Corson (1954), Bade (1953), Rühl (1970).

2. En SL(2,C) existen dos representaciones spin no equivalentes, $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$. Llamamos spinors no punteados a los vectores que se transforman con la primera representación ξ^a, $a = 1,2$ y spinors punteados a los que se transforman con la segunda $\chi_{\dot{a}}$, $\dot{a} = 1,2$, en las bases canónicas (operador S^{12} diagonal). $(\xi^a)^*$, donde $*$ es la conjugación compleja, es un spinor que se transforma con $(0, \frac{1}{2})$ y que denotaremos por $\xi^{\dot{a}}$. Podemos definir un tensor antisimétrico $\epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ que nos da una forma bilineal en el espacio de spinors no punteados,

$$(\psi, \phi) = \epsilon_{ab} \psi^a \phi^b$$

De igual forma se define $\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$. (Bade, 1953).

En SL(2,C) se verifica la siguiente relación:

$$(\tfrac{1}{2}, 0) \otimes (0, \tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

(ver por ejemplo Gel'fand, 1963), lo que nos permite establecer una correspondencia entre los vectores x^μ de $\mathbb{R}^4$ y los spinors de dos índices, hermíticos, dada por (Bade, 1953; Corson, 1954):

$$A_{\dot{a}b} = \frac{1}{2}\,\sigma^\mu_{\dot{a}b} A_\mu \quad \text{con} \quad A_{\dot{a}b} = A_{b\dot{a}}$$

y la relación inversa:

$$A^\mu = \sigma^{\mu\,\dot{a}b}\, A_{\dot{a}b}$$

donde $\sigma^\mu_{\dot{a}b}$ son las matrices de Pauli.

Un bispinor es un vector de cuatro componentes que en una base adecuada se puede escribir como $\psi = \begin{pmatrix} \xi^a \\ \chi_{\dot{b}} \end{pmatrix}$ y que en general se transforma con la representación reducible $(\tfrac{1}{2}, 0) \oplus (0, \tfrac{1}{2})$ del grupo SL(2,C). Operando sobre este espacio de bispinors, introducimos las matrices de Dirac γ^μ que verifican las relaciones de anticonmutación:

$$(\gamma^\mu)^\alpha{}_\beta (\gamma^\nu)^\beta{}_\eta + (\gamma^\nu)^\alpha{}_\beta (\gamma^\mu)^\beta{}_\eta = 2g^{\mu\nu}\delta^\alpha{}_\eta$$

en la base en la que $\psi = \begin{pmatrix} \xi^a \\ \chi_{\dot{a}} \end{pmatrix}$, los operadores de SL(2,C) en la representación $(\tfrac{1}{2}, 0) \oplus (0, \tfrac{1}{2})$, son:

$$V(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & [A^+]^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{(Bogoliubov, 1975)}$$

donde $A \in SL(2,C)$ y A^+ es la matriz adjunta de A.

La representación Λ es equivalente a $[\Lambda^t]^{-1}$ (contragradiente) luego $V(\Lambda)$ y $[V(\Lambda)^t]^{-1}$ también lo son. Existe entonces una matriz no singular C, tal que

$$[V^t]^{-1}(\Lambda) = CV(\Lambda)\, C^{-1} \quad \forall \Lambda \in SL(2,\mathbb{C})$$

La matriz C se puede definir por las condiciones:

$$C\,\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu\,t} \qquad C^2 = -1 \qquad C^t = -C = C^{-1} \tag{I.1}$$

teniendo en cuenta que $S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\, i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ son los generadores infinitesimales de la representación $V(\Lambda)$.

Se puede usar C para definir una forma bilineal antisimétrica en el espacio de los bispinors B, dada por

$$(\psi, \phi) = C_{\alpha\beta}\,\psi^\alpha \phi^\beta \quad \text{(Bogoliubov 1975)}$$

siendo $C_{\alpha\beta} = (e_\alpha, e_\beta)$, $\{e_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3,4$, una base de B. Se define entonces $(C^{-1})^{\beta\alpha}$ de forma que

$$C_{\alpha\beta}\,(C^{-1})^{\beta\gamma} = \delta^\gamma{}_\alpha$$

C y C^{-1} se pueden usar para pasar del espacio B a su dual B' y viceversa.

3. Consideremos el álgebra de Dirac, C_4. Las dieciseis matrices 1, γ^μ, $\sigma^{\mu\nu}$, $\gamma^\mu\gamma^5$, γ^5, con $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$ y $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ son linealmente independientes y se pueden considerar como elementos de $B \otimes B'$. Usando C se pueden introducir en B x B en una base

$\{e_\alpha \otimes e_\beta\}$ $\alpha,\beta = 1,2,3,4$

$$(C^{-1})^{\alpha\beta},\ (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta},\ (\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\alpha\beta},\ (\gamma^\mu\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta},\ (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} \qquad (I.2)$$

Es inmediato verificar que C^{-1}, $\gamma^5 C^{-1}$ y $\gamma^\mu\gamma^5 C^{-1}$ son antisimétricas y $\gamma^\mu C^{-1}$ y $\sigma^{\mu\nu}C^{-1}$ son simétricas, usando las relaciones (I.1). Por ejemplo:

$$(\gamma^\mu C^{-1})^t = (C^{-1})^t\ \gamma^{\mu t} = C\gamma^{\mu t} = \gamma^\mu C^{-1}$$

y $\quad (\gamma^5 C^{-1})^t = (C^{-1})^t\ \gamma^{5t} = C\gamma^{5t} = -\gamma^5 C^{-1}$, pues $C\gamma^5 C^{-1} = \gamma^{5t}$.

Sea $\{\Lambda_k\}_{n=1\ldots 16} = \{C^{-1},\ \gamma^5 C^{-1},\ \gamma^\mu\gamma^5 C^{-1},\ \gamma^\mu C^{-1},\ \sigma^{\mu\nu}C^{-1}\}$ $\qquad$ (I.3)

Cada Λ_k es un tensor de $B \otimes B$, y $\{\Lambda_k\}$ forma una base de este espacio; cualquier $\psi \in B \otimes B$ se podrá poner en función de esa base como : $\psi = \psi^k \Lambda_k$ en la base producto tensorial, $\psi = \psi^{\alpha\beta}\ e_\alpha \otimes e_\beta$. Como $\Lambda_k = \Lambda_k^{\alpha\beta}\ e_\alpha \otimes e_\beta$, $\psi^{\alpha\beta} = \psi^k \Lambda_k^{\alpha\beta}$ y desarrollando, renumerando el índice k,

$$\psi^{\alpha\beta} = C^{-1\alpha\beta}\ X + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} X_5 + (\gamma_\mu\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\ X_5^\mu \quad +$$
$$+ (\gamma_\mu C^{-1})^{\alpha\beta}\ X^\mu + (\sigma_{\mu\nu}C^{-1})^{\alpha\beta}\ X^{[\mu\nu]} \qquad (I.4)$$

Las cantidades $X_1 X_5, X_5^\mu, X^\mu, X^{[\mu\nu]}$ son tensores bajo el grupo de Lorentz propio: X, X_5 escalares, X_5^μ, X^μ vectores y $X^{[\mu\nu]}$ un tensor de rango 2 antisimétrico.

Se verifican las relaciones de ortogonalidad:

$$\mathrm{tr}\ (\Lambda_k\ \Lambda_k') = 4\delta_{kk'} \qquad (I.5)$$

si $\Lambda_k' = \{C,\ C\gamma_5,\ C\gamma_5\gamma^\mu,\ C\gamma^\mu,\ C\sigma^{\mu\nu}\}$ con $\gamma^5 = -\gamma_5$.

La expresión (I.4) para bispinors de rango 2 se puede extender a bispinors de rango cualquiera (diremos que un bispinor es de rango n si es un elemento del producto tensorial de B por si mismo n veces.) Si n = 2r, tomaremos la base producto tensorial $\Lambda_{k_1} \otimes \Lambda_{k_2} \otimes \ldots \otimes \Lambda_{k_r}$. Si n es impar, n = 2r+1, la base es $\Lambda_{k_1} \otimes \Lambda_{k_2} \otimes \ldots \otimes \Lambda_{k_r} \otimes e_\alpha$. En el primer caso, los coeficientes son tensores bajo el grupo de Lorentz asociados a representaciones de spin entero. En el segundo, son objetos del tipo $\phi^{\mu_1 \ldots \mu_r \alpha}$ donde $\mu_1 \ldots \mu_r$ son índices tensoriales, $\mu_i = 0,1,2,3$, y α es un índice bispinor, $\alpha = 1,2,3,4$. Por ejemplo, el caso más sencillo es $\phi^{\mu\alpha}$, que aparece en la ecuación de Rarita-Schwinger para spin 3/2.

4. El grupo conforme SU(2,2) contiene como subgrupo al grupo de Lorentz propio SO(3,1), y la representación fundamental de SU(2,2), de peso máximo $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ (en la notación cartesiana de pesos de SU(4), (m_1, m_2, m_3, m_4) con $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$) se reduce al restringirnos a SO(3,1) a $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Podemos considerar a los bispinors como vectores sobre los que actúa la representación fundamental del grupo conforme. Las representaciones irreducibles de dimensión finita, (por tanto no unitarias) del grupo SU(2,2) se pueden obtener a partir de productos de Kronecker de la representación fundamental por sí misma. El peso $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ corresponde como hemos dicho, a la representación fundamental de SU(4), pero a partir de las representaciones irreducibles unitarias (de dimensión finita) de SU(4) podemos obtener las irreducibles no unitaria de dimensión finita de SU(2,2), usando las técnicas de Weyl de prolongación analítica (ver

por ejemplo Weyl 1946; Murnaghan, 1963; Klimyk y Gruber, 1979). Al ser la dimensión del espacio base igual a 4, los diagramas de Young asociados a esas representaciones, no pueden tener más de cuatro filas y al ser el grupo unimodular, los diagramas con cuatro filas son equivalentes a los que resultan de suprimir la columna con cuatro cajas (ver por ejemplo, Itzykson, 1966).

Al ser SU(2,2) localmente isomorfo a SO(4,2), la representación fundamental de SU(2,2), corresponde a una de las dos representaciones spin de SO(4,2) cuyo peso máximo en SO(6) es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La otra representación spin de SO(6) es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ y corresponde en SU(2,2) a la representación conjugada de la anterior (en SU(4), $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$) con peso máximo (en SU(4)) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$. Sin embargo ambas representaciones spin se reducen al pasar a SO(4,1) (ó SO(3,2)) a la única representación spin existente, ($(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de SO(5)) y a $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ al pasar a SO(3,1). En lo que sigue, por tanto, consideramos a $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ como representación fundamental y obtendremos $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ como resultante de algún producto de Kronecker de la fundamental (Para más detalles ver Apéndice 3).

CAPITULO II. LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER PARA BISPINORS DE RANGO N SIMETRICOS

1.1 Desarrollamos aquí la teoría de Bargmann-Wigner (BW), para describir campos de spin s y masa (>0) únicos, usando bispinors de rango n totalmente simétricos. Después de indicar algunos aspectos básicos del artículo original de Bargmann y Wigner estudiamos en casos sencillos, los desarrollos mencionados en el capítulo anterior, párrafo 2, y cómo las ecuaciones BW llevan a condiciones sobre los coeficientes de esos desarrollos. Generalizamos a continuación los resultados obtenidos a cualquier spin finalizando con un análisis detallado de las representaciones asociadas a estos campos.

1.2 Supongamos una función de ondas en la representación de momentos $\psi(p_i, \xi_1 \ldots, \xi_N)$ (BW, 1948), donde p es el momento asociado y $\xi_1, \ldots, \xi_N$, N variables que pueden tomar los valores 1,2,3,4.

ψ verifica la ecuación $\gamma^{\mu}_{(r)} p_{\mu} \psi = m \psi$, $r = 1,2,\ldots,N$ en los índices $\xi_1 \ldots \xi_N$, en los que es simétrica. $\gamma^{\mu}_{(r)}$ son r conjuntos de matrices de Dirac que verifican:

$$\gamma^{\mu}_{(r)} \gamma^{\nu}_{(r)} + \gamma^{\nu}_{(r)} \gamma^{\mu}_{(r)} = 2 g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^{\mu}_{(r)}\gamma^{\nu}_{(s)} = \gamma^{\nu}_{(s)}\gamma^{\mu}_{(r)} \qquad r \neq s$$

Se puede considerar a los $\gamma^{\mu}_{(r)}$ como productos tensoriales de N factores: $1 \otimes \ldots \otimes \gamma^{\mu} \otimes \ldots \otimes 1$ con γ^{μ} en la posición r.

Los generadores infinitesimales asociados a la representación con la que se transforma ψ se pueden escribir como:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\sum_{r}\left\{\gamma^{\mu}_{(r)}\,\gamma^{\nu}_{(r)} - g^{\mu\nu}\right\}$$

La función ψ se transforma con el producto de N representaciones de Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ simetrizado. Es decir, puede considerarse como un producto tensorial de bispinors de rango N totalmente simétrico, y suponer que en cada índice verifica la ecuación de Dirac para spin 1/2.

Veamos como el spin de la función ψ es N/2. Para ello escogemos (BW, 1948) una representación de las matrices de Dirac en la que γ^0 sea diagonal, $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$. En el sistema en reposo, la ecuación de Dirac se reduce a $(\gamma^0 - 1)\psi = 0$ para partículas de energía positiva ($p^0 = m$). Los índices de ψ, $(\xi_1 \ldots \xi_N)$ pueden tomar solo los valores 1 y 2. Las 4^N componentes de ψ se reducen a 2^N y al ser ψ simétrico solo hay $\binom{N+2-1}{N} = N+1$ componentes independientes, que es el número adecuado a spin $S = \frac{N}{2}$. Para calcular los autovalores de S^{12}, escogemos una representación de las γ^{μ} de forma que γ^0 sea diagonal y $\frac{1}{2}\, i\, \gamma^1 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & -1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & -1/2 \end{pmatrix}$. Aplicando S^{12} a una componente de la función ψ con k índices iguales a 1 y N-k igual a 2, ésta aparece multiplicada por $k - \frac{1}{2} N$, con $k = 0, \dots, N$. Luego los autovalores son $-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$. El spin es entonces $\frac{N}{2}$.

Se puede emplear un argumento similar (Lurié, 1968) usando autofunciones explícitas de la ecuación en el sistema en reposo, del tipo $\psi = \delta^{\xi_1}{}_1 \delta^{\xi_2}{}_1 \dots \delta^{\xi_N}{}_1$, $\psi = (\delta^{\xi_1}{}_1 \dots \delta^{\xi_{N-1}}{}_1 \delta^{\xi_N}{}_2)$ simetrizado, etc. (ver §III.1).

Es inmediato también, comprobar que la masa es única a partir de la relación $(\gamma p + m)(\gamma p - m) = p^2 - m^2$.

1.3 Veamos ahora algunos casos concretos.

a) La ecuación de Klein-Gordon, $(p^2 - m^2)\, X(p) = 0$, donde $X(p)$ es un escalar bajo el grupo de Lorentz. Representa partículas de masa m y spin 0.

b) La ecuación de Dirac, $(\gamma p - m)\psi = 0$, escrita en coordenadas, $\{ p_\mu \gamma^{\mu\alpha}_{\beta} - m\, \delta^\alpha_\beta \}\, \psi^\beta(p) = 0$, $\alpha, \beta = 1,2,3,4$ índices bispinors, describe partículas de masa m y spin 1/2.

c) Consideremos ahora un bispinor de rango 2, (ver por ejemplo Lurié 1968, Takahashi, 1969), simétrico, ({ } indica índices simétricos y [ ] antisimétricos), y apliquemos las ecuaciones de BW:

$$(p_\mu \gamma^{\mu\,\alpha}{}_{\alpha'} - m\, \delta^\alpha{}_{\alpha'})\, \psi^{\alpha'\beta}(p) = 0$$

y la misma ecuación en el 2° índice. $\psi^{\{\alpha\beta\}}$ representa partículas de masa m y spin 1.

Al ser ψ un bispinor de rango 2, se puede poner en la base estudiada en el capítulo I (§I.4), y como es simétrico, será combinación de los elementos de la base que son simétricos. Es decir:

$$\psi^{\alpha\beta} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta} X_\mu + (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta} X_{[\mu\nu]} \qquad \text{(II.1)}$$

aplicando la ecuación BW al primer índice en (II.1)

$$\{ p_\rho \gamma^{\rho\alpha}{}_\beta - m\delta^\alpha{}_\beta \} [(\gamma^\mu C^{-1})^{\beta\gamma} X_\mu + (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\beta\gamma} X_{[\mu\nu]}] = 0$$

y usando las relaciones de ortogonalidad de la base (I.4), multiplicando por $C_{\gamma\alpha}$, al ser $\psi^{\{\alpha\beta\}}$ simétrico:

$$\frac{1}{4} p_\rho g^{\mu\rho} X_\mu = 0 \qquad \Rightarrow \quad p_\mu X^\mu = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

por $(C\gamma_\lambda)_{\gamma\alpha}$

$$p_\rho \operatorname{tr}(\gamma^\rho \sigma_{\mu\nu} \gamma_\lambda) X^{[\mu\nu]} - 4m\delta^\mu{}_\lambda X^\mu = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad X^\mu = \frac{2i}{m} p_\nu X^{[\nu\mu]} \qquad \text{(II.3)}$$

por último, operando con $(C\sigma_{\lambda\kappa})_{\gamma\alpha}$

$$4ip_\rho(\delta^\rho{}_\tau \delta^\mu{}_\lambda - \delta^\rho{}_\lambda \delta^\mu{}_\tau) X_\mu - 4m(\delta^\mu{}_\lambda \delta^\nu{}_\tau - \delta^\mu{}_\tau \delta^\nu{}_\lambda) X_{[\mu\nu]} = 0$$

$$\Rightarrow \quad X^{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m}(p^\mu X^\nu - p^\nu X^\mu) \qquad \text{(II.4)}$$

Sustituyendo (II.3) en (II.4)

$$X_\mu = \frac{p^2}{m^2} X_\mu - \frac{p_\mu p^\nu}{m^2} X_\nu$$

que es la ecuación de Proca para spin 1, y aplicando (II.2)

$$(p^2 - m^2)\, X_\mu = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

Es decir el tensor X_μ verifica las ecuaciones:

$$(p^2 - m^2)\, X_\mu = 0 \qquad \text{(II.5)}$$
$$p_\mu X^\mu = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

y el tensor $X^{[\mu\nu]}$ es función de X^μ (II.4).

d) El caso siguiente es $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ bispinor simétrico de rango 3. En función de la base (I.4), se puede escribir (Lurié 1968):

$$\psi^{\alpha\beta\gamma} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta} \varphi_\mu^\gamma + (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta} \varphi_{[\mu\nu]}^\gamma \qquad \text{(II.6)}$$

φ_μ^α tiene un índice tensorial (μ) y otro bispinor (α) y $\varphi_{[\mu\nu]}^\alpha$ es antisimétrico en sus índices tensoriales.

Pero $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ debe ser totalmente simétrico, y la expresión anterior solo nos asegura la simetría en $\alpha\beta$. Para imponer la total, aplicamos bispinors de la base $\{\Lambda_k\}$ (I.4), antisimétricos, e igualamos a o usando las relaciones de ortogonalidad (I.5).

Así $C_{\beta\gamma}$ nos da (no detallamos los índices bispinors):

$$\gamma^\mu \varphi_\mu + \sigma^{\mu\nu} \varphi_{[\mu\nu]} = 0 \qquad \text{(II.7)}$$

y $(C\gamma^5)_{\beta\gamma}$

$$\gamma^\mu \gamma^5 \varphi_\mu + \sigma^{\mu\nu}\gamma^5 \varphi_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (II.8)$$

luego

$$\gamma^\mu \varphi_\mu = 0 \qquad (II.9)$$

$$\sigma^{\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (II.10)$$

y sumando y restando (II.7) y (II.8).

Contrayendo con $(C\gamma^5\gamma^\lambda)_{\beta\gamma}$ obtendríamos:

$$\varphi^\mu = 2i\,\gamma_\nu\,\varphi^{[\nu\mu]} \qquad (II.11)$$

Estas tres condiciones (II.9, 10, 11) no son independientes, pues (II.9) es consecuencia de las otras dos. De esta forma determinamos la expresión de $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$. El número de componentes es el correcto: $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ tiene $\begin{pmatrix} 4+3-1 \\ 3 \end{pmatrix} = 20$, $\varphi^\alpha_{[\mu\nu]}$, 4 x 6 = 24, menos 4 ecuaciones de (II.10), 20.

Se aplican ahora las ecuaciones BW a los índices α ó β, y γ que no es simétrico con los otros dos, mas que cuando se consideran las restricciones anteriores (II.10, 11). Se obtiene, usando los mismos métodos que en el caso anterior (ver (Apéndice 1,3)

$$\varphi^\alpha_{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m}\left(p_\mu \varphi^\alpha_\nu - p_\nu \varphi^\alpha_\mu\right) \qquad (II.12)$$

y

$$(\gamma p - m)\,\varphi^\mu = 0 \qquad (II.13)$$

$$\gamma_\mu \varphi^\mu = 0 \qquad (II.9)$$

que son las ecuaciones de Rarita-Schwinger (Rarita, 1941) para spin 3/2. El campo $\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu]}$ se obtiene a partir de φ^{α}_{μ} con una expresión formalmente idéntica a la de $X_{[\mu\nu]}$ en función de X_{μ} para spin 1 (II.4).

La relación (II.11) es compatible con las demás sustituyendo (II.12):

$$\varphi^{\mu} = \frac{1}{m}(\gamma p)\varphi^{\mu} - \frac{1}{m} p^{\mu}(\gamma\varphi)$$

y por (II.9) llegamos a la ecuación de Dirac para el campo φ^{α}_{μ} (sin necesidad, como era lógico, de aplicar la ecuación BW al tercer índice de $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$).

Resulta interesante estudiar la forma de los bispinors $\psi^{\{\alpha\beta\}}$ y $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ en función de los campos X_{μ} y φ^{α}_{μ} una vez aplicadas las ecuaciones BW (Takahashi, 1969).

i) Para $\psi^{\{\alpha\beta\}} = (\gamma^{\mu}C^{-1})^{\alpha\beta}X_{\mu} + (\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\alpha\beta}X_{[\mu\nu]} =$

$$= [\gamma^{\mu}C^{-1} - \frac{p_{\nu}}{m}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}C^{-1}]^{\alpha\beta}X_{\mu} = [\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^{\mu}C^{-1} - \frac{2}{m}p^{\mu}C^{-1}]^{\alpha\beta}X_{\mu}$$

como $p_{\mu}X^{\mu} = 0$,

$$\psi^{\{\alpha\beta\}} = [\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^{\mu}C^{-1}]^{\alpha\beta}X_{\mu} \tag{II.14}$$

ii) Para $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ se obtiene un resultado similar

$$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}} = [\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^{\mu}C^{-1}]^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma}_{\mu} \tag{II.15}$$

I.4 Intentamos generalizar estos resultados a spin superior 3/2. Para ello, estudiaremos el caso de bispinors de rango 4 totalmente simétricos.

Desarrollamos $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}}$ en la base $\{\Lambda_k \otimes \Lambda_{k'}\}$ (ver §I.3),

$$\begin{aligned}\psi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\nu C^{-1})^{\gamma\delta} X_{\mu\nu} + \\ &+ (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\rho C^{-1})^{\gamma\delta} X_{[\mu\nu]\rho} + (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta} (\sigma^{\nu\rho} C^{-1})^{\gamma\delta} Y_{\mu[\nu\rho]} + \\ &+ (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta} (\sigma^{\rho\lambda} C^{-1})^{\gamma\delta} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} \end{aligned} \tag{II.16}$$

De esta expresión es inmediata la simetría parcial $\psi^{\{\alpha\beta\}\{\gamma\delta\}}$ Para conseguir la total, basta imponer que ψ sea simétrico en los índices β, γ . Contrayendo (II.16) con bispinors de dos índices antisimétricos, $C_{\beta\gamma}$ $(C\gamma^5)_{\beta\gamma}$ y $(C\gamma^5\gamma^\lambda)_{\beta\gamma}$ e igualando a 0, obtendremos las relaciones que aseguran la simetría total del bispinor ψ.

Así, se tiene (Apéndice 1,6)

$$X^{\mu\nu} = X^{\nu\mu} \quad , \quad X^\mu{}_\mu = 0 \tag{II.17}$$

$$X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = X^{[\rho\lambda][\mu\nu]} \quad , \quad X^{[\mu\nu]}{}_{[\mu\nu]} = 0 \quad , \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \tag{II.18}$$

$$X^{\mu\nu}{}_\nu = 0 \quad , \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} X^{[\nu\rho]\lambda} = 0 \tag{II.19}$$

$$X^{\mu\nu} = 4 X^{\mu\rho}{}_\rho{}^\nu \tag{II.20}$$

$$X^{[\mu\nu]\rho} = Y^{\rho[\mu\nu]} \tag{II.21}$$

El tensor $X^{[\mu\nu]\rho}$ tiene 24 componentes, menos cuatro de la condición de traza nula y cuatro de $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} X^{[\nu\rho]\lambda} = 0$ son 16 componentes independientes. $X^{[\mu\nu][\rho\lambda]}$ tiene 21, menos 1 de la condición de traza nula y otra de $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0$ son 19. El número de componentes independientes de $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}}$ es 35 = 16 + 19.

Aplicando ahora las ecuaciones de BW a uno cualquiera de los índices:

$$(\gamma p - m)^{\alpha}{}_{\alpha'} \psi^{\alpha'\beta\gamma\delta} = 0$$

y contrayendo con los elementos de la base del álgebra de Dirac, obtenemos las siguientes ecuaciones (Apéndice 1, 6)

$$(p^2 - m^2) X^{\{\mu\nu\}} = 0 \tag{II.22}$$

$$p_\mu X^{\{\mu\nu\}} = 0 \tag{II.23}$$

$$X^{[\mu\nu]\rho} = -\frac{i}{2m} \left\{ p^\mu X^{\{\nu\rho\}} - p^\nu X^{\{\mu\rho\}} \right\} \tag{II.24}$$

$$X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = \frac{-1}{4m^2} \left\{ p^\mu \left(p^\rho X^{\{\nu\lambda\}} - p^\lambda X^{\{\nu\rho\}} \right) - p^\nu \left(p^\rho X^{\{\mu\lambda\}} - p^\lambda X^{\{\mu\rho\}} \right) \right\} \tag{II.25}$$

(II.22, 23) son ecuaciones que con (II.17) describen un campo de spin 2 y masa m. Si ahora sustituimos estas expresiones en el bispinor $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}}$ (II.16)

$$\begin{aligned}\psi^{\{\alpha\beta,\gamma\delta\}} &= (\gamma_\mu C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma_\nu C^{-1})^{\gamma\delta} X^{\{\mu\nu\}} - \\ &- \frac{1}{4m^2}\Big[(\sigma_{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta}(\sigma_{\rho\lambda} C^{-1})^{\gamma\delta}\{p^\mu(p^\rho X^{\{\nu\lambda\}} - p^\lambda X^{\{\nu\rho\}}) - p^\nu(p^\rho X^{\{\mu\lambda\}} - p^\lambda X^{\{\mu\rho\}})\}\Big] - \\ &- \frac{i}{2m}\Big[(\sigma_{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^\rho C^{-1})^{\gamma\delta} + (\gamma_\rho C^{-1})^{\alpha\beta}(\sigma_{\mu\nu} C^{-1})^{\gamma\delta}\Big]\Big[p^\mu X^{\{\nu\rho\}} - p^\nu X^{\{\mu\rho\}}\Big] = \\ &= \left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma_{\mu_1} C^{-1}\right]^{\alpha\beta}\left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma_{\mu_2} C^{-1}\right]^{\gamma\delta} X^{\{\mu_1\mu_2\}} \qquad \text{(II.26)}\end{aligned}$$

con $$p_\mu X^{\{\mu\nu\}} = 0 \quad , \quad (p^2 - m^2) X^{\{\mu\nu\}} = 0 .$$

1.5 Las expresiones de los párrafos anteriores se pueden generalizar a bispinors totalmente simétricos con un número arbitrario de índices. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1

i) Spin entero r, n = 2r número de índices totalmente simétricos del bispinor ψ.

Si $\psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_{2r}\}}$ verifica las ecuaciones BW, entonces

$$\psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_{2r}\}} = \prod_{i=1}^{r}\left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^{\mu_i} C^{-1}\right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} \cdot X_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}} \qquad \text{(II.27)}$$

donde $X^{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}$ es un tensor bajo el grupo de Lorentz, totalmente simétrico, de trazas nulas que verifica las ecuaciones

$$(p^2 - m^2)\, X^{\{\mu_1 \dots \mu_r\}} = 0 \qquad \text{(II.28)}$$

$$P_{\mu}\, X^{\{\mu\mu_2\ldots\mu_r\}} = 0 \qquad (II.29)$$

ii) Spin semientero: $r + \frac{1}{2}$, $n = 2r+1$, número de índices de ψ , totalmente simétrico.

Si $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r+1}\}}$ verifica las ecuaciones BW, entonces:

$$\psi^{\{\alpha_1\ldots\alpha_{2r+1}\}} = \prod_{i=1}^{r}\left[\frac{\gamma P + m}{m}\,\gamma^{\mu_i} C^{-1}\right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} \varphi^{\alpha_{2r+1}}_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}} \qquad (II.30)$$

donde $\varphi^{\alpha_{2r+1}}_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}$ es un tensor-bispinor bajo el grupo de Lorentz, simé trico y de trazas nulas en sus índices tensoriales que verifica las ecuaciones:

$$(\gamma P - m)^{\alpha}{}_{\beta}\, \varphi^{\beta}_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}} = 0 \qquad (II.31)$$

$$(\gamma^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta}\, \varphi^{\beta}_{\{\mu\mu_2\ldots\mu_r\}} = 0 \qquad (II.32)$$

Demostración

Las comprobaciones de estas fórmulas se hacen facilmente por inducción en el número de índices.

i) Hemos visto (párrafos 3b y 4) que el resultado para r = 1 y 2 era correcto.

En el caso r = 2, se podría haber razonado así:

Sea

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\, \phi_\mu^{\{\alpha_1\alpha_2\}} +$$

$$+ \left(\sigma^{\mu\nu} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4}\, \phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_1\alpha_2\}} \qquad (II.33)$$

$\phi_\mu^{\{\alpha_1\alpha_2\}}$ y $\phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_1\alpha_2\}}$ son, en sus índices $\{\alpha_1\alpha_2\}$, dos bispinors de rango 2, simétricos, que deben cumplir las ecuaciones BW para que $\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$ las cumpla. Aplicando los resultados obtenidos para bispinors de rango 2, a los índices $\{\alpha_3\alpha_4\}$ de ψ, tenemos (II.14)

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}} = \left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^\mu C^{-1}\right]^{\alpha_3\alpha_4} \phi_\mu^{\{\alpha_1\alpha_2\}}$$

con
$$p^\mu\, \phi_\mu^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = 0 \quad \text{de (II.2)}$$

$$(p^2 - m^2)\, \phi_\mu^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = 0 \quad \text{de (II.5)}$$

y de (II.4)

$$\phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = -\frac{i}{2m}\left\{ p_\mu \phi_\nu^{\{\alpha_1\alpha_2\}} - p_\nu \phi_\mu^{\{\alpha_1\alpha_2\}} \right\} \qquad (II.34)$$

Pero $\phi_\mu^{\{\alpha_1\alpha_2\}}$ tiene dos índices bispinor simétrico, y verifica las ecuaciones BW, luego, por (II.14):

$$\phi_\mu^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = \left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^\nu C^{-1}\right]^{\alpha_1\alpha_2} \chi_{\nu\mu}$$

y por lo tanto:

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}} = \left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^{\mu}C^{-1}\right]^{\alpha_1\alpha_2}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^{\nu}C^{-1}\right]^{\alpha_3\alpha_4} X_{\mu\nu} \qquad (II.26)$$

$X_{\mu\nu}$ verifica $p_{\nu}X^{\mu\nu} = 0$ y $(p^2 - m^2)X^{\mu\nu} = 0$, de las ecuaciones que cumple $\Phi_{\mu}^{\{\alpha_1\alpha_2\}}$ y además debe ser simétrico y de traza nula.

En efecto de $\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}} = \psi^{\{\alpha_3\alpha_4\alpha_1\alpha_2\}}$, se deduce $X_{\mu\nu} = X_{\nu\mu}$ o con más detalle:

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}} = (\gamma^{\mu}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,\Phi_{\mu}^{\{\alpha_1\alpha_2\}} + \ldots$$

nos da:

$$\Phi_{\mu}^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = \frac{1}{4}\,(C\gamma_{\mu})_{\alpha_3\alpha_4}\,\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$$

y

$$\Phi_{\mu}^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = (\gamma^{\nu}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\,X_{\nu\mu} + \ldots$$

da

$$X_{\nu\mu} = \frac{1}{4}\,(C\gamma_{\nu})_{\alpha_1\alpha_2}\,\Phi_{\mu}^{\{\alpha_1\alpha_2\}}$$

luego $X_{\mu\nu} = \frac{1}{16}\,(C\gamma_{\mu})_{\alpha_1\alpha_2}\,(C\gamma_{\nu})_{\alpha_3\alpha_4}\,\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$

de donde es inmediata la simetría de $X_{\mu\nu}$.

La condición de traza nula se puede obtener de la simetría de los índices α_2 y α_3 de $\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$

Contrayendo con $(C\gamma^5)_{\alpha_2\alpha_3}\,(C\gamma^5)_{\alpha_4\alpha_1}$:

$$tr\left\{\frac{\gamma p+m}{m}\,\gamma^{\mu}\gamma^{5}\,\frac{\gamma p+m}{m}\,\gamma^{\nu}\gamma^{5}\right\}X_{\mu\nu}=0$$

$$\Rightarrow X^{\mu}{}_{\mu}=0$$

De igual forma, los tensores $X^{[\mu_1\mu_2]\mu_3}$, $Y^{\mu_1[\mu_2\mu_3]}$ y $X^{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]}$ se pueden escribir en función de $X^{\{\mu_1\mu_2\}}$

$$\phi^{\{\alpha_1\alpha_2\}}_{\mu_1}=(\gamma^{\mu_2}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}X_{\mu_2\mu_1}+(\sigma^{\mu_2\mu_3}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}X_{[\mu_2\mu_3]\mu_1}$$

$$\phi^{\{\alpha_1\alpha_2\}}_{[\mu_1\mu_2]}=(\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}Y_{\mu_3[\mu_1\mu_2]}+(\sigma^{\mu_3\mu_4}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}X_{[\mu_3\mu_4][\mu_1\mu_2]}$$

Empleando la expresión (II.34) y la independencia lineal de ($\gamma^{\mu}C^{-1}$) y ($\sigma^{\mu\nu}C^{-1}$) se tiene:

$$(\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}Y_{\mu_3[\mu_1\mu_2]}+(\sigma^{\mu_3\mu_4}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}X_{[\mu_3\mu_4][\mu_1\mu_2]}=$$

$$=-\frac{i}{2m}\Big\{p_{\mu_1}\Big[(\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}X_{\mu_3\mu_2}+(\sigma^{\mu_3\mu_4}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}X_{[\mu_3\mu_4]\mu_2}\Big]-$$

$$-p_{\mu_2}\Big[(\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}X_{\mu_3\mu_1}+(\sigma^{\mu_3\mu_4}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}X_{[\mu_3\mu_4]\mu_1}\Big]\Big\}$$

luego

$$Y_{\mu_3[\mu_1\mu_2]}=-\frac{i}{2m}\left\{p_{\mu_1}X_{\mu_3\mu_2}-p_{\mu_2}X_{\mu_3\mu_1}\right\}$$

$$X_{[\mu_3\mu_4][\mu_1\mu_2]}=-\frac{i}{2m}\left\{p_{\mu_1}X_{[\mu_3\mu_4]\mu_2}-p_{\mu_2}X_{[\mu_3\mu_4]\mu_1}\right\}$$

Además $\quad Y^{\mu_1[\mu_2\mu_3]} = X^{[\mu_2\mu_3]\mu_1}$

pues
$$Y_{\mu_1[\mu_2\mu_3]} = \frac{1}{4}(C\gamma_{\mu_1})_{\alpha_1\alpha_2}\,\phi^{\{\alpha_1\alpha_2\}}_{[\mu_2\mu_3]}$$

y
$$X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3} = \frac{1}{8}(C\sigma_{\mu_1\mu_2})_{\alpha_1\alpha_2}\,\phi^{\{\alpha_1\alpha_2\}}_{\mu_3}$$

sustituyendo las expresiones de $\phi^{\{\alpha_1\alpha_2\}}_{\mu}$ y $\phi^{\{\alpha_1\alpha_2\}}_{[\mu\nu]}$ en función de $\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$, se tiene:

$$Y_{\mu_1[\mu_2\mu_3]} = \frac{1}{32}(C\gamma_{\mu_1})_{\alpha_1\alpha_2}((C\sigma_{\mu_2\mu_3})_{\alpha_3\alpha_4}\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$$

$$X_{[\mu_2\mu_3]\mu_1} = \frac{1}{32}((C\sigma_{\mu_2\mu_3})_{\alpha_1\alpha_2}(C\gamma_{\mu_1})_{\alpha_3\alpha_4}\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$$

ya que $\quad \phi^{\{\alpha_1\alpha_2\}}_{[\mu_1\mu_2]} = \frac{1}{8}(C\sigma_{\mu_1\mu_2})_{\alpha_3\alpha_4}\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$

Al ser $\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}}$ totalmente simétrico, $X_{[\mu_2\mu_3]\mu_1} = Y_{\mu_1[\mu_2\mu_3]}$

Entonces

$$X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]} = -\frac{i}{2m}\Big\{-\frac{i}{2m}p_{\mu_1}p_{\mu_3}X_{\{\mu_2\mu_4\}} + \frac{i}{2m}p_{\mu_3}p_{\mu_2}X_{\{\mu_1\mu_4\}} +$$
$$+\frac{i}{2m}p_{\mu_1}p_{\mu_4}X_{\{\mu_2\mu_3\}} - \frac{i}{2m}p_{\mu_2}p_{\mu_4}X_{\{\mu_1\mu_3\}}\Big\} =$$
$$=\left(-\frac{i}{2m}\right)^2\Big\{p_{\mu_1}(p_{\mu_3}X_{\{\mu_2\mu_4\}} - p_{\mu_4}X_{\{\mu_2\mu_3\}}) - p_{\mu_2}(p_{\mu_3}X_{\{\mu_1\mu_4\}} - p_{\mu_4}X_{\{\mu_1\mu_3\}})\Big\}.$$

Apliquemos este método al caso general:

Supongamos que hemos probado para un bispinor totalmente simétrico de rango 2(r-1), que verifica las ecuaciones BW las siguientes fórmulas:

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2(r-1)}\}} = \prod_{i=1}^{r-1}\left(\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^{\mu_i}C^{-1}\right)^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} X_{\{\mu_1\dots\mu_{r-1}\}} \tag{II.35}$$

con $X_{\{\mu_1\dots\mu_{r-1}\}}$ tensor simétrico de traza nula que verifica

$$p_\mu X^{\{\mu\mu_2\dots\mu_{r-1}\}} = 0$$

$$(p^2 - m^2)\, X^{\{\mu_1\dots\mu_{r-1}\}} = 0$$

Además los tensores que aparecen en el desarrollo de $\psi^{\{\alpha_1\dots\alpha_{2(r-1)}\}}$ en función de la base $\Lambda_{k_1}\otimes\dots\otimes\Lambda_{k_{r-1}}$ son:

$$X^{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\dots\mu_r\}} = -\frac{i}{2m}\left\{p^{\mu_1}X^{\{\mu_2\mu_3\dots\mu_r\}} - p^{\mu_2}X^{\{\mu_1\mu_3\dots\mu_r\}}\right\} \tag{II.36}$$

$$\begin{aligned} X^{\{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\}\{\mu_5\dots\mu_{r+1}\}} = \left(-\frac{i}{2m}\right)^2 \Big\{ & p^{\mu_1}\big(p^{\mu_3}X^{\{\mu_2\mu_4\mu_5\dots\mu_{r+1}\}} - \\ & - p^{\mu_4}X^{\{\mu_2\mu_3\mu_5\dots\mu_{r+1}\}}\big) - p^{\mu_2}\big(p^{\mu_3}X^{\{\mu_1\mu_4\mu_5\dots\mu_{r+1}\}} - \\ & - p^{\mu_4}X^{\{\mu_1\mu_3\mu_5\dots\mu_{r+1}\}}\big)\Big\} \end{aligned} \tag{II.37}$$

y finalmente

$$\chi^{\{[\mu_1\mu_2]\dots[\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}]\}} = \qquad (II.38)$$

$$= \left(-\frac{i}{2m}\right)^{r-1} \left\{ p^{\mu_1} \left(p^{\mu_3} \dots \left(p^{\mu_{2r-3}} \chi^{\{\mu_2\mu_4\dots\mu_{2(r-1)}\}} \dots \right)\right)\right\}$$

Consideremos un bispinor de rango 2r. Según los desarrollos anteriores, tenemos que:

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_{2r}\}} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} \phi_\mu^{\{\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_{2r}\}} +$$

$$+ (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} \phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_3\dots\alpha_{2r}\}}$$

Como los bispinors $\phi_\mu^{\{\alpha_3\dots\alpha_{2r}\}}$ y $\phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_3\dots\alpha_{2r}\}}$ tienen 2r-2 índices y son simétricos en ellos (verifican las ecuaciones BW si $\psi^{\{\alpha_1\dots\alpha_{2r}\}}$ la verifica), por la hipótesis de inducción (II.35):

$$\phi_{\mu_1}^{\{\alpha_3\dots\alpha_{2r}\}} = \prod_{i=2}^{r} \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^{\mu_i} C^{-1} \right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} X_{\mu_1\{\mu_2\dots\mu_r\}}$$

$$\phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_3\dots\alpha_{2r}\}} = \prod_{i=2}^{r} \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^{\mu_i} C^{-1} \right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} X_{[\mu\nu]\{\mu_2\dots\mu_r\}} .$$

El tensor $X_{\mu_1\{\mu_2\dots\mu_r\}}$ es simétrico de trazas nulas en los índices $\{\mu_2\dots\mu_r\}$ y verifica

$$(p^2 - m^2)\, X_{\mu_1\{\mu_2\dots\mu_r\}} = 0$$

$$p^{\mu_2} X_{\mu_1\{\mu_2\dots\mu_r\}} = 0$$

pero considerando solo los índices $\alpha_1\alpha_2$, como hicimos en el caso r = 2, podemos demostrar la simetría total de los índices $\{\mu_1\ldots\mu_r\}$ y la nulidad de todas las trazas.

$$\psi^{\{\alpha_1\ldots\alpha_{2r}\}} =$$

$$= \left\{ \frac{\gamma p+m}{m}\, \gamma^{\mu_1} C^{-1} \right\}^{\alpha_1\alpha_2} \phi_{\mu_1}^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}} =$$

$$= \left\{ \frac{\gamma p+m}{m}\, \gamma^{\mu_1} C^{-1} \right\}^{\alpha_1\alpha_2} \prod_{i=2}^{r} \left[\frac{\gamma p+m}{m}\, \gamma^{\mu_i} C^{-1} \right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} X_{\mu_1\{\mu_2\ldots\mu_r\}}$$

de donde es inmediato deducir los resultados que queríamos sobre $X_{\{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r\}}$

Así pues, solo falta comprobar que los restantes tensores tienen las expresiones correctas (II.36,37,38) en función de $X^{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}$

Pero sabemos que:

$$\phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}} = -\frac{i}{2m} \left\{ p_\mu \phi_\nu^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}} - p_\nu \phi_\mu^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}} \right\}$$

y sustituyendo $\phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}}$ y $\phi_\mu^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}}$ por sus valores en función de $X_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}$ y $X_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}}$ se obtiene (II.36):

$$X_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}} = -\frac{i}{2m} \left\{ p_{\mu_1} X_{\{\mu_2\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}} - p_{\mu_2} X_{\{\mu_1\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}} \right\}$$

y desarrollando los índices de $\phi_\mu^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}}$ de dos en dos, las restantes expresiones (II.37,38).

ii) El caso de rango impar se reduce al primero (i) sin más que cambiar los tensores $X_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}}$ por los tensor-bispinors $\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}}$ Las fórmulas son las escritas anteriormente (II.30)

$$\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r+1}\}} = \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^{\mu_i} C^{-1} \right]^{\alpha_{2i-1} \alpha_{2i}} \varphi^{\alpha_{2r+1}}_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}}$$

donde, para asegurar la simetría del índice α_{2r+1} con los restantes, hay que imponer la condición adicional (II.32)

$$(\gamma^{\mu_1})^{\alpha}{}_{\beta} \, \varphi^{\beta}_{\{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r\}} = 0$$

y $\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}}$ verifica la ecuación de Dirac (II.31).

Estas dos ecuaciones (II.31,32) se comprueban fácilmente para los casos r = 0 y r = 1 (§II, 3b,3c) y se generalizan por inducción para r arbitrario. O simplemente de la expresión (II.30) de $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r+1}\}}$ en función de $\varphi^{\alpha_{2r+1}}_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}}$ se ve que $\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}}$ debe cumplir la ecuación de Dirac, y de la simetría total del bispinor $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r+1}\}}$ contrayendo primero con $C_{\alpha_{2r} \alpha_{2r+1}} \prod_{i=1}^{r-1} (C\gamma_{\lambda_i})_{\alpha_{2i} \alpha_{2i-1}}$ y luego con $(C\gamma^5)_{\alpha_{2r} \alpha_{2r+1}} \prod_{i=1}^{r} (C\gamma_{\lambda_i})_{\alpha_{2i} \alpha_{2i-1}}$ se llega a

$$\gamma^{\mu} \varphi_{\{\mu \mu_2 \ldots \mu_r\}} = 0$$

2.1 Análisis de representaciones asociadas a los bispinors y tensores del párrafo 5.

Como habíamos dicho (§I) $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}}$ se puede considerar como un tensor de un cierto espacio en el que actua una representación del grupo conforme SU(2,2). Sin embargo no nos interesan especialmente las simetrías del grupo conforme sino solo su reducción al grupo de Lorentz SO(3,1).

Al ser $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}}$ totalmente simétrico, la representación de SU(2,2) irá asociada a un diagrama de Young del tipo $[n]$, es decir, una fila y n columnas. Su dimensión es $\binom{n+3}{n}$ y su peso máximo (en SU(4) y en coordenadas cartesianas) (ver Apéndice 3), es $(\frac{3n}{4}, -\frac{n}{4}, -\frac{n}{4}, -\frac{n}{4})$. En SO(4,2) su peso máximo (en SO(6) y en coordenadas cartesianas) será $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2})$.

Al restringirnos a SO(4,1) (pesos en la notación para SO(5)), este tipo de representaciones (bispinors totalmente simétricos), siguen siendo irreducibles (Murnaghan, 1963, Corson 1954) y tienen como peso máximo $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ y dimensión evidentemente la misma $\binom{n+3}{n}$. Al pasar a SO(3,1), la representación $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ ya no es irreducible y se descompone dando las siguientes (Murnaghan, 1963)

$$\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \oplus \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1\right) \oplus \ldots \oplus \left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1\right) \oplus \left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \qquad \text{(II.39)}$$

(en la notación cartesiana de pesos para SO(4)). La dimensión de cada una de ellas (m_1, m_2) es $(m_1 + m_2 + 1)(m_1 - m_2 + 1)$ y como es lógico

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k+1)(k+1) = \binom{n+3}{3}$$

En la notación usual para las representaciones finitas del grupo de Lorentz (spinors, spinors conjugados) (ver por ejemplo Corson 1954), las anteriores representaciones son:

$$(k,\ell) \sim (m_1, m_2) \qquad k = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) \qquad \ell = \tfrac{1}{2}(m_1 - m_2)$$

$$\left(\tfrac{n}{2},0\right) \oplus \left(\tfrac{n-1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \oplus \dots \oplus \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{n-1}{2}\right) \oplus \left(0, \tfrac{n}{2}\right) \tag{II.40}$$

Supongamos $n = 2r$. La representación es

$$\left[(r,0) \oplus (0,r)\right] \oplus \left[\left(r-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{1}{2}, r-\tfrac{1}{2}\right)\right] \oplus \dots$$

$$\dots \oplus \left[\left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{r-1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-1}{2}, \tfrac{r+1}{2}\right)\right] \oplus \left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r}{2}\right) \tag{II.41}$$

Cada uno de los bloques de dos representaciones va asociado a ún tensor irreducible del grupo de Lorentz completo (es decir, incluyendo la paridad) cuyo diagrama de Young es del tipo $[m_1, m_2]$, si la representación en la notación cartesiana de pesos es $(m_1, m_2) \oplus (m_1, -m_2)$, (con $m_2 > 0$); es decir dos filas, la primera de longitud m_1 y la segunda m_2. La representación $(\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ lleva a un diagrama totalmente simétrico $[r]$ que corresponde al tensor $X^{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}$ (discutido anteriormente (§II,5)) (Hamermesh,1964).

2.2 Veamos algunos ejemplos concretos de lo anterior.

a) El caso más sencillo es $r = 1$. Las representaciones que aparecen son $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus \left[(1,0) \oplus (0,1)\right]$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ corresponde a X^{μ}

$(1,0) \oplus (0,1)$ a $X^{[\mu\nu]}$

con diagramas respectivos $[1]$ y $[1^2]$

b) El siguiente r = 2, contiene las representaciones $[(2,0) \oplus (0,2)] \oplus [(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})] \oplus (1,1)$. $(1,1)$ corresponde a $X^{\{\mu\nu\}}$ con traza nula, diagrama $[2]$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ a $X^{[\mu\nu]\lambda}$, asimismo de trazas nulas y que verifica $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} X^{[\nu\lambda]\rho} = 0$ y diagrama $[2, 1]$.

Parecería que $(2,0) \oplus (0,2)$ corresponde a $X^{[\mu\nu][\lambda\rho]}$, pero no es así, pues $X^{\mu\nu}{}_{\nu}{}^{\rho} = \frac{1}{4} X^{\mu\rho} \neq 0$ y por lo tanto no es irreducible bajo el grupo de Lorentz. Entonces, $X^{[\mu\nu][\lambda\rho]}$ que cumple $X^{[\mu\nu][\lambda\rho]} = X^{[\lambda\rho][\mu\nu]}$, $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} X^{[\mu\nu][\lambda\rho]} = 0$ y $X^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$, se transforma con la representación $[(2,0) \oplus (0,2)] \oplus (1,1)$ y son las ecuaciones BW las que rompen esta estructura al poder expresar $X^{[\mu\nu][\lambda\rho]}$ en función de su traza, es decir de $X^{\{\mu\nu\}}$ (ver Apéndice 1,6).

En general esta va a ser la situación. Los tensores que aparezcan en el desarrollo de $\psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_{2r}\}}$ no van a ser irreducibles (ni siquiera bajo el grupo de Lorentz completo); únicamente lo será $X^{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}$, y $X^{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3 \dots \mu_{r+1}\}}$ si se incluye la operación de paridad.

c) El caso siguiente es $r = 3$ las representaciones que aparecen son:

$$\left[(3,0) \oplus (0,3)\right] \oplus \left[\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{2}\right)\right] \oplus \left[(2,1) \oplus (1,2)\right] \oplus \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

y los tensores del desarrollo de $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_6\}}$ son:

$$X^{\{\mu\nu\rho\}} \;,\quad X^{[\mu\nu]\{\lambda\rho\}} \;,\quad X^{[\mu\nu][\lambda\rho]\tau} \;,\quad X^{[\mu\nu][\lambda\rho][\tau\sigma]}$$

$X^{\{\mu\nu\rho\}}$ es irreducible y se transforma con la representación $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ de diagrama de Young $[3]$. $X^{[\mu\nu]\{\lambda\rho\}}$ lo hace con $(2,1) \oplus (1,2)$ de diagrama $[3,1]$. Los dos tensores restantes no son irreducibles:

como
$$X^{\mu\nu\lambda} = 4 X^{[\mu\rho]}{}_{\rho}{}^{\nu\lambda}$$

y
$$X^{[\mu\nu]\{\rho\lambda\}} = 4 X^{[\mu\nu][\rho\sigma]}{}_{\sigma}{}^{\lambda}$$

el tensor $X^{[\mu\nu]\{\rho\lambda\}\tau}$ se transforma con $\left[(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})\right] \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $X^{[\mu\nu][\rho\lambda][\tau\sigma]}$ con $\left[(3,0) \oplus (0,3)\right] \oplus \left[(2,1) \oplus (1,2)\right]$.

En resumen, en la descomposición de las representaciones asociadas a los bispinors totalmente simétricos de rango 2r, aparecen los tensores correspondientes, aunque no son irreducibles en general, al no tener trazas nulas, las cuales corresponden a tensores de rango inferior.

2.3 Podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 2

Sea $\psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_{2r}\}}$ bispinor de $B_{n=2r}$, totalmente simétrico en sus n índices. Si

$$\begin{aligned}
\psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_{2r}\}} &= (\gamma^{\mu_1} C^{-1})^{\alpha_1 \alpha_2} \dots (\gamma^{\mu_r} C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} X_{\mu_1 \dots \mu_r} + \\
&+ (\sigma^{\mu_1 \mu_2} C^{-1})^{\alpha_1 \alpha_2} (\gamma^{\mu_3} C^{-1})^{\alpha_3 \alpha_4} \dots (\gamma^{\mu_{r+1}} C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} X_{[\mu_1 \mu_2]\mu_3 \dots \mu_{r+1}} + \\
&+ \dots + (\gamma^{\mu_1} C^{-1})^{\alpha_1 \alpha_2} \dots (\gamma^{\mu_{r-1}} C^{-1})^{\alpha_{2r-3}\alpha_{2r-2}} (\sigma^{\mu_r \mu_{r+1}} C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} \cdot \\
&\cdot X_{\mu_1 \dots \mu_{r-1}[\mu_r \mu_{r+1}]} + \dots + (\sigma^{\mu_1 \mu_2} C^{-1})^{\alpha_1 \alpha_2} \dots (\sigma^{\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}} C^{-1})^{\alpha_{2r-3}\alpha_{2r-2}} \cdot \\
&\cdot (\gamma^{\mu_{2r-1}} C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} X_{[\mu_1 \mu_2] \dots [\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}]\mu_{2r-1}} + \dots + \\
&+ (\sigma^{\mu_1 \mu_2} C^{-1})^{\alpha_1 \alpha_2} \dots (\sigma^{\mu_{2r-1}\mu_{2r}} C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} X_{[\mu_1 \mu_2] \dots [\mu_{2r-1}\mu_{2r}]} \qquad \text{(II.42)}
\end{aligned}$$

entonces, los tensores que aparecen en este desarrollo verifican las siguientes condiciones:

i) Los tensores con igual número de pares de índices antisimétricos, es decir que son coeficientes de elementos de la base con el mismo número de $\sigma^{\mu\nu}$, son iguales al cambiar el orden de $\sigma^{\mu\nu}$ en el producto tensorial.

ii) $X^{\mu_1\cdots\mu_r}$ y $X^{[\mu_1\mu_2]\mu_3\cdots\mu_{r+1}}$ son irreducibles bajo O(3,1) $X^{\mu_1\cdots\mu_r}$ se transforma con la representación (r,0) del grupo de Lorentz y $X^{[\mu_1\mu_2]\mu_3\cdots\mu_{r+1}}$ lo hace con $(r,1) \oplus (r,-1)$ (en la notación cartesiana de pesos. En la usual, $(\frac{r}{2},\frac{r}{2})$ y $(\frac{r+1}{2},\frac{r-1}{2}) \oplus$ $\oplus\ (\frac{r-1}{2},\frac{r+1}{2})$ respectivamente).

iii)

$$X^{\mu_1\cdots\mu_r} = 4\, X^{\mu_1}{}_{\nu}{}^{[\nu\mu_2]\mu_3\cdots\mu_r}$$

$$X^{[\mu_1\mu_2]\mu_3\cdots\mu_{r+1}} = 4\, X^{[\mu_1\mu_2]\mu_3}{}_{\nu}{}^{[\nu\mu_4]\mu_5\cdots\mu_{r+1}}$$

....

$$X^{[\mu_1\mu_2]\cdots[\mu_{2r-5}\mu_{2r-4}]\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}} =$$

$$= 4\, X^{[\mu_1\mu_2]\cdots[\mu_{2r-5}\mu_{2r-4}][\mu_{2r-3}\nu]}{}_{\nu}{}^{\mu_{2r-2}}$$

iv)

$X^{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\mu_5\cdots\mu_{r+2}}$ se transforma con $[(r,2)\oplus(r,-2)] \oplus (r,0)$

$X^{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4][\mu_5\mu_6]\mu_7\cdots\mu_{r+3}}$ con $[(r,3)\oplus(r,-3)] \oplus [(r,1)\oplus(r,-1)]$

$X^{[\mu_1\mu_2]\cdots[\mu_7\mu_8]\mu_9\cdots\mu_{r+4}}$ con $[(r,4)\oplus(r,-4)] \oplus [(r,2)\oplus(r,-2)] \oplus$

$\oplus (r,0)$

.....

$$\chi^{[\mu_1\mu_2]\dots[\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}]\mu_{2r-1}} \quad \text{con} \quad [(r,r-1)\oplus(r,-(r-1))]\oplus$$

$$\oplus[(r,r-3)\oplus(r,-(r-3))]\oplus\dots$$

$$\dots\oplus\begin{cases}(r,0) & \text{si } r \text{ es impar}\\ (r,1)\oplus(r,-1) & \text{si } r \text{ es par}\end{cases}$$

$$\chi^{[\mu_1\mu_2]\dots[\mu_{2r-1}\mu_{2r}]} \quad \text{con} \quad [(r,r)\oplus(r,-r)]\oplus$$

$$\oplus[(r,r-2)\oplus(r,-(r-2))]\oplus\dots$$

$$\dots\oplus\begin{cases}(r,1)\oplus(r,-1) & \text{si } r \text{ es impar}\\ (r,0) & \text{si } r \text{ es par}\end{cases}$$

Demostración:

i) Se sigue de la simetría del bispinor $\psi^{\{\alpha_1\dots\alpha_{2r}\}}$. Sea por ejemplo:

$$\psi^{\{\alpha_1\dots\alpha_{2r}\}} = \dots + (\sigma^{\mu_1\mu_2}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\dots(\gamma^{\mu_{r+1}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\cdot$$

$$\cdot\,\chi_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\dots\mu_{r+1}} + (\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma^{\mu_2\mu_3}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}(\gamma^{\mu_4}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\dots$$

$$\dots(\gamma^{\mu_{r+1}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\,\chi_{\mu_1[\mu_2\mu_3]\mu_4\dots\mu_{r+1}} + \dots$$

entonces

$$X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\dots\mu_{r+1}} =$$

$$= \frac{1}{8.4^{r-2}} \left(C\sigma_{\mu_1\mu_2}\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(C\gamma_{\mu_3}\right)_{\alpha_3\alpha_4} \dots \left(C\gamma_{\mu_{r+1}}\right)_{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} \psi^{\{\alpha_1\dots\alpha_{2r}\}}$$

y

$$X_{\mu_1[\mu_2\mu_3]\mu_4\dots\mu_{r+1}} =$$

$$= \frac{1}{8.4^{r-2}} \left(C\gamma_{\mu_1}\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(C\sigma_{\mu_2\mu_3}\right)_{\alpha_3\alpha_4} \dots \left(C\gamma_{\mu_{r+1}}\right)_{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} \psi^{\{\alpha_1\dots\alpha_{2r}\}}$$

y al ser ψ totalmente simétrico,

$$X^{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4\dots\mu_{r+1}} = X^{\mu_3[\mu_1\mu_2]\mu_4\dots\mu_{r+1}}$$

ii), iii).

Para r = 1, $\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = \left(\gamma^\mu C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2} X_\mu + \left(\sigma^{\mu\nu} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2} X_{[\mu\nu]}$

y X_μ se transforma con (1,0)

$X_{[\mu\nu]}$ se transforma con (1,1) $\oplus$ (1,-1)

siendo ambos irreducibles bajo el grupo completo.

Para r = 2

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}} = \left(\gamma^\mu C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^\nu C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4} X_{\mu\nu} + \left(\sigma^{\mu\nu} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^\rho C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4} \cdot$$

$$\cdot X_{[\mu\nu]\rho} + \left(\gamma^\rho C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2} \left(\sigma^{\mu\nu} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4} Y_{\rho[\mu\nu]} + \left(\sigma^{\mu\nu} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2} \left(\sigma^{\rho\lambda} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]}$$

y por i)

$$=(\gamma^{\mu} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\nu} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X_{\mu\nu} + (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma^{\rho\lambda} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} +$$

$$+ \left[(\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\rho} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} + (\gamma^{\rho} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\right] X_{[\mu\nu]\rho}$$

Sabemos ya, que (Cap.II, 4.1(b)):

1) $X_{\mu\nu}$, $X_{[\mu\nu]\rho}$ son irreducibles (bajo el grupo de Lorentz completo)

$X_{\mu\nu}$ se transforma con (2,0)

$X_{[\mu\nu]\rho}$ con $(2,1) \oplus (2,-1)$

2) $X_{\mu\nu} = 4\, X_{\mu\rho}{}^{\rho}{}_{\nu}$

$X_{[\mu\nu][\rho\lambda]}$ se transforma con $\left[(2,2) \oplus (2,-2)\right] \oplus (2,0)$

Supongamos ahora un r cualquiera.

$\psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_{2r}\}}$ tiene el desarrollo (II.42) pero podemos poner también:

$$\psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_{2r}\}} = (\gamma^{\mu} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\nu} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \phi_{\mu\nu}^{\{\alpha_5 \dots \alpha_{2r}\}} +$$

$$+ \left\{(\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\rho} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} + (\gamma^{\rho} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\right\} \phi_{[\mu\nu]\rho}^{\{\alpha_5 \dots \alpha_{2r}\}} +$$

$$+ (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma^{\rho\lambda} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \phi_{[\mu\nu][\lambda\rho]}^{\{\alpha_5 \dots \alpha_{2r}\}}$$

como para r = 2, $\phi_{\mu\nu}^{\{\alpha_5\ldots\alpha_{2r}\}} = 4\,\phi^{\{\alpha_5\ldots\alpha_{2r}\}}{}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\rho\nu}$, desarrollando cada miembro de esta igualdad,

$$\phi_{\mu\nu}^{\{\alpha_5\ldots\alpha_{2r}\}} = (\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\ldots(\gamma^{\mu_{r-1}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}X_{\mu\nu\mu_3\ldots\mu_{r-1}}\ldots$$

$$\ldots + (\sigma^{\mu_1\mu_2}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\ldots(\sigma^{\mu_{2r-5}\mu_{2r-4}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\cdot$$

$$\cdot X_{\mu\nu[\mu_1\mu_2]\ldots[\mu_{2r-5}\mu_{2r-4}]}.$$

$$\phi^{\{\alpha_5\ldots\alpha_{2r}\}}{}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\rho\nu} = (\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\ldots(\gamma^{\mu_{r-2}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\cdot$$

$$\cdot X_{\mu}{}^{\rho}{}_{\rho\nu\mu_1\ldots\mu_{r-2}} + \ldots + (\sigma^{\mu_1\mu_2}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\ldots$$

$$\ldots(\sigma^{\mu_{2r-5}\mu_{2r-4}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}X_{\mu}{}^{\rho}{}_{\rho\nu[\mu_1\mu_2]\ldots[\mu_{2r-5}\mu_{2r-4}]}$$

igualando coeficientes obtenemos los resultados de iii). Veamos ahora que $X_{\mu_1\ldots\mu_r}$ y $X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\ldots\mu_{r+1}}$ son irreducibles. Sus simetrías, ($X_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}$ totalmente simétrico, $X_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}}$ simétrico en $\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}$ y antisimétrico en $[\mu_1\mu_2]$) son consecuencia inmediata de la simetría de $\psi^{\{\alpha_1\ldots\alpha_{2r}\}}$

Nos falta probar que $X_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}$ tiene todas sus trazas nulas, así como $X_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}}$, que además verifica la ecuación

$$\epsilon^{\rho\mu_1\mu_2\mu_3}X_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\mu_4\ldots\mu_{r+1}\}} = 0$$

Por inducción:

Hemos visto que era cierto para r = 2 (ver Apéndice 1,6). Supongamos que lo es para r-1. Entonces, para r,

$$\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r}\}} = (\gamma^{\mu} C^{-1})^{\alpha_1 \alpha_2} \phi_{\mu}^{\{\alpha_3 \ldots \alpha_{2r}\}} + (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_1 \alpha_2} \phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_3 \ldots \alpha_{2r}\}}$$

como

$$\phi_{\mu_1}^{\{\alpha_3 \ldots \alpha_{2r}\}} = (\gamma^{\mu_2} C^{-1})^{\alpha_3 \alpha_4} \ldots (\gamma^{\mu_r} C^{-1})^{\alpha_{2r-1} \alpha_{2r}} X_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} + \ldots$$

$\Longrightarrow X_{\{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r\}}$ tiene todas las trazas nulas en los índices $\mu_2 \ldots \mu_r$

Como es simétrico, son cero en todos los índices.

De forma semejante se demuestra para $X^{[\mu_1 \mu_2]\{\mu_3 \ldots \mu_{r+1}\}}$

iv) También por inducción se comprueba que las simetrías son las correspondientes a las representaciones indicadas, es decir

$$X^{[\mu_1 \mu_2] \ldots [\mu_{2k-1} \mu_{2k}] \mu_{2k+1} \ldots \mu_{r+k}} \quad \text{verifica}$$

a) es simétrico en $\{\mu_{2k+1} \ldots \mu_{r+k}\}$

b) antisimétrico en cada pareja de índices $[\mu_1 \mu_2], \ldots, [\mu_{2k-1} \mu_{2k}]$

c) $X^{[\mu_1 \mu_2] \ldots [\mu_i \mu_{i+1}] \ldots [\mu_j \mu_{j+1}] \ldots [\mu_{2k-1} \mu_{2k}]\{\mu_{2k+1} \ldots \mu_{r+k}\}} =$

$$= X^{[\mu_1 \mu_2] \ldots [\mu_j \mu_{j+1}] \ldots [\mu_i \mu_{i+1}] \ldots [\mu_{2k-1} \mu_{2k}]\{\mu_{2k+1} \ldots \mu_{r+k}\}}$$

y d) $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{[\mu_1 \mu_2] \ldots [\mu_{2k-1} \nu]\{\rho \lambda \mu_{2k+3} \ldots \mu_{r+k}\}} = 0$

(en el tensor $X_{[\mu_1\mu_2]\ldots[\mu_{2r-1}\mu_{2r}]}$ la condición d) es equivalente a

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\, X_{[\mu_1\mu_2]\ldots[\mu_{2r-5}\mu_{2r-4}][\mu\nu][\rho\lambda]} = 0$$

Usando (iii) se comprueba qué trazas son nulas y cuáles no, y se llega a las representaciones dadas por iv).

2.4 Consideremos ahora el caso n = 2r+1. La representación del grupo de Lorentz bajo la que se transforma el bispinor es:

$$\left[\left(r+\tfrac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,r+\tfrac{1}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(r,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},r\right)\right]\oplus\ldots$$

$$\ldots\oplus\left[\left(\tfrac{r}{2}+1,\tfrac{r}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r}{2}-\tfrac{1}{2},\tfrac{r}{2}+1\right)\right]\oplus\left[\left(\tfrac{r}{2}+\tfrac{1}{2},\tfrac{r}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r}{2},\tfrac{r}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\right] \qquad \text{(II.43)}$$

Dado un diagrama de Young del tipo $[\lambda_1,\lambda_2]$, la representación a la que va asociado es $\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right)\oplus\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$ (en la notación usual (spinors, spinors conjugados)). Si multiplicamos esta representación por $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ obtenemos la correspondiente a un tensor-bispinor, irreducible en sus índices tensoriales (bajo el grupo de Lorentz completo).

En el caso $\lambda_2=0$, el resultado es:

$$\left[\left(\tfrac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\tfrac{1}{2}\right)\right]\otimes\left(\tfrac{\lambda_1}{2},\tfrac{\lambda_1}{2}\right) =$$

$$=\left(\tfrac{\lambda_1+1}{2},\tfrac{\lambda_1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{\lambda_1}{2},\tfrac{\lambda_1+1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{\lambda_1-1}{2},\tfrac{\lambda_1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{\lambda_1}{2},\tfrac{\lambda_1-1}{2}\right)$$

y la condición (ver Prop.3(i))

$$\gamma^{\mu_1 \alpha}{}_{\beta}\, \varphi^{\beta}{}_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{\lambda_1}} = 0 \tag{II.44}$$

anula los componentes de las representaciones $\left(\frac{\lambda_1-1}{2}, \frac{\lambda_1}{2}\right) \oplus \left(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_1-1}{2}\right)$

con lo que nos quedan solo $\left(\frac{\lambda_1+1}{2}, \frac{\lambda_1}{2}\right) \oplus \left(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_1+1}{2}\right)$

Si el diagrama es $[\lambda_1, 0]$ el número de índices tensoriales es $\lambda_1 = r$ y corresponderá a un bispinor $\psi^{\{\alpha_1 \cdots \alpha_{2r+1}\}}$. En efecto, $(\frac{r+1}{2}, \frac{r}{2}) \oplus (\frac{r}{2}, \frac{r+1}{2})$ es la última de las representaciones que aparecen en la relación (II.43).

En el caso $\lambda_2 \neq 0$ si $p = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ y $q = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}$

$$\left[(\tfrac{1}{2},0) \oplus (0,\tfrac{1}{2})\right] \otimes \left[(p,q) \oplus (q,p)\right] =$$

$$= \left[(p+\tfrac{1}{2}, q) \oplus (q, p+\tfrac{1}{2})\right] \oplus \left[(q+\tfrac{1}{2}, p) \oplus (p, q+\tfrac{1}{2})\right] \oplus$$

$$\oplus \left[(p, q-\tfrac{1}{2}) \oplus (q-\tfrac{1}{2}, p)\right] \oplus \left[(p-\tfrac{1}{2}, q) \oplus (q, p-\tfrac{1}{2})\right] \tag{II.45}$$

Consideremos algunos casos concretos: Sea

$$\lambda_2 = 1 \qquad p = \frac{\lambda_1+1}{2} \qquad q = \frac{\lambda_1-1}{2}.$$

La representación producto es:

$$\left[\left(\frac{\lambda_1}{2}+1\, ,\, \frac{\lambda_1-1}{2}\right)\oplus\left(\frac{\lambda_1-1}{2}\, ,\, \frac{\lambda_1}{2}+1\right)\right]\oplus\left[\left(\frac{\lambda_1}{2}\, ,\, \frac{\lambda_1-1}{2}\right)\oplus\left(\frac{\lambda_1-1}{2}\, ,\, \frac{\lambda_1}{2}\right)\right]\oplus$$

$$\oplus\left[\left(\frac{\lambda_1+1}{2}\, ,\, \frac{\lambda_1}{2}\right)\oplus\left(\frac{\lambda_1}{2}\, ,\, \frac{\lambda_1+1}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(\frac{\lambda_1+1}{2}\, ,\, \frac{\lambda_1}{2}-1\right)\oplus\left(\frac{\lambda_1}{2}-1\, ,\, \frac{\lambda_1+1}{2}\right)\right]$$

El tensor-bispinor $\varphi^{\alpha}{}_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}}$, con $\lambda_1 = r$, se transforma con estas representaciones. Pero:

$$\gamma^{\mu_1\,\alpha}{}_{\beta}\,\varphi^{\beta}{}_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_2\ldots\mu_{r+1}\}} = -\frac{i}{2}\,\varphi^{\alpha}{}_{\{\mu_2\ldots\mu_{r+1}\}}$$

(ver Proposición 3 (ii)).

Entonces $\gamma^{\mu}\varphi_{[\mu\mu_2]\{\mu_2\ldots\mu_{r+1}\}}$ es simétrico en $\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_{r+1}$ y como

$$\gamma^{\mu}\varphi_{\{\mu\mu_2\ldots\mu_r\}} = 0$$

se tiene

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\varphi_{[\mu\nu]\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}} = 0 \qquad \text{(II.46)}$$

además (ver Prop. 3(i))

$$\gamma^{\mu}\varphi_{[\mu_1\mu_2]\{\mu\mu_4\ldots\mu_{r+1}\}} = 0 \qquad \text{(II.47)}$$

$\gamma^{\mu}\varphi_{[\mu_1\mu_2]\{\mu\mu_4\ldots\mu_{r+1}\}}$ se transforma con

$$\left[\left(\frac{r+1}{2}\, ,\, \frac{r}{2}-1\right)\oplus\left(\frac{r}{2}-1\, ,\, \frac{r+1}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(\frac{r-1}{2}\, ,\, \frac{r}{2}-1\right)\oplus\left(\frac{r}{2}-1\, ,\, \frac{r-1}{2}\right)\right]\oplus$$

$$\oplus\left[\left(\frac{r}{2}\, ,\, \frac{r-1}{2}\right)\oplus\left(\frac{r-1}{2}\, ,\, \frac{r}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(\frac{r}{2}\, ,\, \frac{r-3}{2}\right)\oplus\left(\frac{r-3}{2}\, ,\, \frac{r}{2}\right)\right] \qquad \text{(II.48)}$$

(con más exactitud, no tiene componentes en los cuatro bloques de representaciones, pero no nos importa ahora).

Así pues, al cumplirse (II.46), se tiene que $\varphi^{\alpha}{}_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\cdots\mu_{r+1}\}}$ se transforma con $\left[(\frac{r}{2}+1,\ \frac{r-1}{2}) \oplus (\frac{r-1}{2},\ \frac{r}{2}+1)\right] \oplus \left[(\frac{r+1}{2},\ \frac{r}{2}) \oplus (\frac{r}{2},\ \frac{r+1}{2})\right]$

Es este un resultado equivalente de alguna forma al encontrado para tensores:

$\gamma^{\mu}\varphi_{[\mu\mu_2]\{\mu_3\cdots\mu_{r+1}\}}$ no es cero, sino proporcional a $\varphi_{\{\mu_2\cdots\mu_{r+1}\}}$ que se transforma con $(\frac{r+1}{2},\ \frac{r}{2}) + (\frac{r}{2},\ \frac{r+1}{2})$.

El caso siguiente es $\lambda_2 = 2$. La representación producto $(\lambda_1 = r)$ sería:

$$\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{2},\ \frac{r}{2}-1\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-1,\ \frac{r}{2}+\frac{3}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{r}{2}-1\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-1,\ \frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] \oplus$$

$$\oplus \left[\left(\frac{r}{2}+1,\ \frac{r}{2}-\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{r}{2}+1\right)\right] \oplus \left[\left(\frac{r}{2}+1,\ \frac{r}{2}-\frac{3}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-\frac{3}{2},\ \frac{r}{2}+1\right)\right],$$

si el tensor-bispinor $\varphi^{\alpha}{}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\{\mu_5\cdots\mu_{r+2}\}}$ fuera irreducible en sus índices tensoriales. Pero no es ésta la situación como sabemos del caso de spin entero, sino que se verifica: (ver Prop.2(iii)

$$\varphi^{\alpha}{}_{\mu_1}{}^{\nu}{}_{[\nu\mu_4]\{\mu_5\cdots\mu_{r+2}\}} = \frac{\lambda}{4}\,\varphi^{\alpha}{}_{\{\mu_1\mu_4\cdots\mu_{r+2}\}} \qquad \text{(II.49)}$$

es decir $\varphi^{\alpha}{}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\{\mu_5\cdots\mu_{r+2}\}}$ se transforma en los índices tensoria les con $\left[\left(\frac{r}{2}+1,\ \frac{r}{2}-1\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-1\ ,\ \frac{r}{2}+1\right)\right] \oplus \left(\frac{r}{2}\ ,\ \frac{r}{2}\right)$ y multiplicando por $\left(\frac{1}{2}\ ,0\right) \oplus \left(0\ ,\frac{1}{2}\right)$, resulta:

$$\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{2}\ ,\frac{r}{2}-1\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-1\ ,\ \frac{r}{2}+\frac{3}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2},\frac{r}{2}-1\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-1\ ,\ \frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] \oplus$$

$$\oplus \left[\left(\frac{r}{2}+1\ ,\ \frac{r}{2}-\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{r}{2}+1\right)\right] \oplus \left[\left(\frac{r}{2}+1\ ,\ \frac{r}{2}-\frac{3}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-\frac{3}{2}\ ,\ \frac{r}{2}+1\right)\right] \oplus$$

$$\oplus \left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{r}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2},\ \frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2},\frac{r}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2},\ \frac{r}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

Pero aún faltan por considerar algunas condiciones. La ecuación

$$\gamma^{\mu_1} \varphi_{\mu_1}{}^{\nu}{}_{\nu\mu_4\{\mu_5 \ldots \mu_{r+2}\}} = 0 \tag{II.50}$$

inmediata de (II.48) anula las componentes sobre

$$\left[\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2},\frac{r}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

(pues $\gamma^{\mu_1} \varphi_{\{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r\}} = 0$ las anulaba (II.44))

$$\gamma^{\mu} \varphi_{[\mu\mu_2][\mu_3\mu_4]\{\mu_5 \ldots \mu_{r+2}\}} = -\frac{i}{2} \varphi_{[\mu_3\mu_4]\{\mu_2\mu_5 \ldots \mu_{r+2}\}}$$

anula $\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\ ,\frac{r}{2}-1\right) + \left(\frac{r}{2}-1\ ,\ \frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)$ sin más que comparar con el caso anterior, y por fin (ver Prop.3(i))

$$\gamma^{\mu} \varphi_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\{\mu\mu_6 \ldots \mu_{r+2}\}} = 0$$

anula las de $\left[\left(\frac{r}{2}+1\ ,\ \frac{r}{2}-\frac{3}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-\frac{3}{2}\ ,\ \frac{r}{2}+1\right)\right]$.

Luego $\varphi^{\alpha}{}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\{\mu_5 \ldots \mu_{r+2}\}}$ se transforma con

$$\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{2}, \frac{r}{2}-1\right) \oplus \left(\frac{r}{2}-1, \frac{r}{2}+\frac{3}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\frac{r}{2}+1, \frac{r}{2}-\frac{1}{2}\right) \oplus \right.$$

$$\left. \oplus \left(\frac{r}{2}-\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+1\right)\right] \oplus \left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right) \oplus \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

De esta forma podríamos considerar los demás tensor-bispinors que aparecen en el desarrollo de $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r+1}\}}$. Ninguno, salvo el primero $\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}}$ es irreducible y la contracción con γ^{μ} (que sustituye aquí a las trazas que tomábamos en el caso tensorial) nos va dando tensor-bispinors de un orden inferior.

Haremos a continuación un desarrollo paralelo al caso de spin entero, para un bispinor totalmente simétrico con un número impar de índices.

2.5 Dado $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r+1}\}}$, los tensor-bispinors que aparecen en su desarrollo son idénticos en sus índices tensoriales a los tensores del desarrollo de $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r}\}}$ (II.42) Sean pues estos tensores

$X_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}}$ que se transforma con D_r

$X_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3 \ldots \mu_{r+1}\}}$ D_{r+1}

$X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\{\mu_5 \ldots \mu_{r+2}\}}$ D_{r+2}

.....

$X_{[\mu_1\mu_2] \ldots [\mu_{2r-1}\mu_{2r}]}$ D_{2r}

donde D_r, $D_{r+1}, \ldots, D_{2r}$ son representaciones ya estudiadas (4.2,iv).

Si $\Delta = (\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, es claro que los tensor-bispinors del desarrollo de $\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r+1}\}}$ se transformarán (no con todas pues faltan condiciones que aseguren la simetría del índice α_{2r+1} con los demás) con las representaciones:

$$\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}} \qquad\qquad \Delta \otimes D_r$$

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3 \ldots \mu_{r+1}\}} \qquad\qquad \Delta \otimes D_{r+1}$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2] \ldots [\mu_{2r-1}\mu_{2r}]} \qquad\qquad \Delta \otimes D_{2r} \; .$$

Veamos cuales son las condiciones que aseguran la simetría del índice α_{2r+1}

En el caso r = 1 (Ap.1,3)

$$\gamma^{\mu}\varphi_{\mu} = 0 \quad , \quad \sigma^{\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu]} = 0 \quad , \quad \varphi^{\mu} = 2i\gamma_{\nu}\varphi^{\nu\mu}$$

φ^{μ} se transformaba con $\Delta \otimes (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pero debido a la condición $\gamma^{\mu}\varphi_{\mu} = 0$ solo lo hace con $(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1)$. $\varphi_{[\mu\nu]}$ se transformaba con $\Delta \otimes$ $\otimes \left[(1,0) + (0,1)\right]$ pero $\sigma^{\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu]} = 0$, elimina de $\left[(\frac{3}{2}, 0) \oplus (0, \frac{3}{2})\right]$ $\oplus\left[(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1)\right] \oplus \Delta$ la representación Δ (para que $\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu]}$ fuera irreducible bajo el grupo completo debería transformarse solo con una de las representaciones $\left[(\frac{3}{2}, 0) + (0, \frac{3}{2})\right]$ y $\left[(1, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 1)\right]$. Nótese sin embargo que $\gamma^\mu \varphi_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\varphi_\nu$ y φ_ν se transforma con $(1, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1)$. Esta es la razón de que aparezcan las dos representaciones).

Estudiemos el caso r = 2.

$$\psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_5\}} = (\gamma^{\mu_1} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma^{\mu_2} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \varphi^{\alpha_5}_{\mu_1\mu_2} +$$

$$+ (\sigma^{\mu_1\mu_2} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\sigma^{\mu_3\mu_4} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \varphi^{\alpha_5}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]} +$$

$$+ \left\{ (\sigma^{\mu_1\mu_2} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma^{\mu_3} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} + (\gamma^{\mu_3} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\sigma^{\mu_1\mu_2} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \right\} \varphi^{\alpha_5}_{[\mu_1\mu_2]\mu_3}$$

con las relaciones obtenidas en el caso n = 4 (Ap.1,6).

El hecho de ser ψ totalmente simétrico, lleva (Ap.1,11) a las ecuaciones:

$$\gamma^\mu \varphi_{\{\mu\nu\}} = 0 \qquad \gamma^\mu \varphi_{[\rho\nu]\mu} = 0$$

$$\sigma^{\mu\nu} \varphi_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0$$

con lo que $\varphi^\alpha_{\{\mu\nu\}}$ se transforma, en lugar de la representación:

$$\Delta \otimes (1,1) = \left[(\tfrac{3}{2}, 1) \oplus (1, \tfrac{3}{2}) \right] \oplus \left[(\tfrac{1}{2}, 1) \oplus (1, \tfrac{1}{2}) \right]$$

solo con $\left[(\frac{3}{2}, 1) \oplus (1, \frac{3}{2}) \right]$.

$\varphi^\alpha_{[\mu\nu]\rho}$ se transformaría con

$$\Delta \otimes \left[(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}) \oplus (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) \right] = \left[(2, \tfrac{1}{2}) \oplus (\tfrac{1}{2}, 2) \right] \oplus \left[(1, \tfrac{3}{2}) \oplus (\tfrac{3}{2}, 1) \right] \oplus$$

$$\oplus \left[(1, \tfrac{1}{2}) \oplus (\tfrac{1}{2}, 1) \right] \oplus \left[(\tfrac{3}{2}, 0) \oplus (0, \tfrac{3}{2}) \right]$$

pero $\gamma^\mu \varphi_{[\nu\rho]\mu} = 0$ elimina las representaciones

$$\left[\left(\tfrac{3}{2},0\right)\oplus\left(0,\tfrac{3}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(1,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},1\right)\right]$$ (ver el caso anterior)

luego

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu]\rho} \sim \left[\left(2,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},2\right)\right]\oplus\left[\left(1,\tfrac{3}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{3}{2},1\right)\right]$$

Como $\gamma^{\mu}\varphi_{[\mu\nu]\lambda} = -\frac{i}{2}\varphi_{\nu\lambda}$ (Ap.1,11), en $\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu]\lambda}$ aparecen las represen taciones bajo las que se transforma $\varphi^{\alpha}_{\{\mu\nu\}}$

En cuanto al tercer tensor, se transformaría con

$$\begin{aligned}\Delta\otimes\{(2,0)\oplus(0,2)\oplus(1,1)\} &= \left[\left(\tfrac{5}{2},0\right)\oplus\left(0,\tfrac{5}{2}\right)\right]\oplus\\ &\oplus\left[\left(2,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},2\right)\right]\oplus\left[\left(\tfrac{3}{2},0\right)\oplus\left(0,\tfrac{3}{2}\right)\right]\oplus\\ &\oplus\left[\left(\tfrac{3}{2},1\right)\oplus\left(1,\tfrac{3}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(\tfrac{1}{2},1\right)\oplus\left(1,\tfrac{1}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

pero la condición $\sigma^{\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu][\rho\lambda]}$ elimina, como en el caso anterior las representaciones

$$\left[\left(\tfrac{3}{2},0\right)\oplus\left(0,\tfrac{3}{2}\right)\right]\;,\;\left[\left(1,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},1\right)\right]$$

Así pues $\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu][\rho\lambda]}$ se transforma con:

$$\left[\left(\tfrac{5}{2},0\right)\oplus\left(0,\tfrac{5}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(2,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},2\right)\right]\oplus\left[\left(\tfrac{3}{2},1\right)\oplus\left(1,\tfrac{3}{2}\right)\right]$$

de acuerdo a la relación (Ap.1,11): $\gamma^{\mu}\varphi_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = -\frac{i}{2}\varphi_{[\rho\lambda]\nu}$

Consideremos ahora el caso general:

<u>Proposición 3</u>:

Sea $\psi^{\{\alpha_1\ldots\alpha_{2r+1}\}}$ bispinor de $B_{n=2r+1}$, totalmente simétrico en sus n índices. Si

$$\psi^{\{\alpha_1 \ldots \alpha_{2r+1}\}} = \tag{II.51}$$

$$= (\gamma^{\mu_1} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} \ldots (\gamma^{\mu_r} C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} \varphi^{\alpha_{2r+1}}_{\mu_1 \ldots \mu_r} + \ldots$$

$$\ldots + (\sigma^{\mu_1\mu_2} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} \ldots (\sigma^{\mu_{2r-1}\mu_{2r}} C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} \varphi^{\alpha_{2r+1}}_{[\mu_1\mu_2] \ldots [\mu_{2r-1}\mu_{2r}]}$$

entonces, los tensor-bispinor que aparecen en este desarrollo verifican las siguientes condiciones: (Del caso de spin entero, conocemos las propiedades de simetría en los índices tensoriales de estos tensores bispinors).

i) $\gamma^{\mu} \varphi_{\{\mu \mu_2 \ldots \mu_r\}} = 0$

$$\gamma^{\mu} \varphi_{[\mu_1\mu_2]\{\mu \mu_4 \ldots \mu_{r+1}\}} = 0$$

$$\gamma^{\mu} \varphi_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\{\mu \mu_5 \ldots \mu_{r+2}\}} = 0$$

$\ldots$

$$\gamma^{\mu} \varphi_{[\mu_1\mu_2] \ldots [\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}]\mu} = 0$$

$$\sigma^{\mu\nu} \varphi_{[\mu\nu][\mu_3\mu_4] \ldots [\mu_{2r-1}\mu_{2r}]} = 0$$

ii)

$$\varphi_{\{\mu_1 \ldots \mu_r\}} = 2i \gamma^{\mu} \varphi_{[\mu\mu_1]\{\mu_2 \ldots \mu_r\}}$$

$$\varphi_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3 \ldots \mu_{r+1}\}} = 2i \gamma^{\mu} \varphi_{[\mu\mu_3][\mu_1\mu_2]\{\mu_4 \ldots \mu_{r+1}\}}$$

$\ldots$

$$\varphi_{[\mu_1\mu_2] \ldots [\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}]\mu_{2r-1}} = 2i \gamma^{\mu} \varphi_{[\mu_1\mu_2] \ldots [\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}][\mu\mu_{2r-1}]}$$

iii) las representaciones bajo la que se transforman estos tensor-bispinors son: (ver (II.52) para la definición de Δ_k)

$$\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}} \longrightarrow \Delta\otimes D_r \quad \text{y por la condición ii)} \longrightarrow \Delta_r$$

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}} \longrightarrow \Delta\otimes D_{r+1} \longrightarrow \Delta_{r+1}$$

. . .

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2]\ldots[\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}]\mu_{2r-1}} \longrightarrow \Delta\otimes D_{2r-1} \longrightarrow \Delta_{2r-1}$$

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2]\ldots[\mu_{2r-1}\mu_{2r}]} \longrightarrow \Delta\otimes D_{2r} \longrightarrow \Delta_{2r}$$

Demostración:

i) para r = 1 y r = 2 lo hemos hecho explícitamente, supuesto para r - 1

$$\psi^{\{\alpha_1\ldots\alpha_{2r+1}\}} = (\gamma^{\mu}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\phi_{\mu}^{\alpha_3\{\alpha_4\ldots\alpha_{2r+1}\}} + (\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\phi_{[\mu\nu]}^{\alpha_3\{\alpha_4\ldots\alpha_{2r+1}\}}$$

implica

$$(\gamma^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta}\,\phi_{\mu}^{\beta\{\alpha_4\ldots\alpha_{2r+1}\}} = 0$$

y como $\phi_{\mu}^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r+1}\}}$ es totalmente simétrico y de rango 2r-1, es inmediato que $\gamma^{\mu}\varphi_{\mu\mu_2\ldots\mu_r} = 0$ como queríamos probar.

Los demás tensor-bispinors aparecen en los desarrollos de $\phi_{\mu}^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r+1}\}}$ y $\phi_{[\mu\nu]}^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r+1}\}}$, pero demostramos en el caso de spin entero, que los de igual rango, son iguales (cambiando adecuadamente los índices) y por lo tanto, como $\gamma^{\mu}\phi_{\mu}^{\{\alpha_4\ldots\alpha_{2r+1}\}} = 0$, por el caso r = 1, se tiene que todos ellos verifican las condiciones de

(i) salvo el último, $\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2]\ldots[\mu_{2r-1}\mu_{2r}]}$ que solo aparece en el desarrollo de $\phi^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r+1}\}}_{[\mu\nu]}$ y por lo tanto verifica la misma condición que este tensor bispinor:

$$(\sigma^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\alpha'}\,\varphi^{\alpha'}_{[\mu\nu][\mu_2\mu_3]\ldots[\mu_{2r-1}\mu_{2r}]} = 0$$

ii) se prueba como en i).

$$\phi^{\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r+1}\}}_{\mu} = 2i\,(\gamma^{\nu})^{\alpha_3}{}_{\beta}\,\phi^{\{\beta\alpha_4\ldots\alpha_{2r+1}\}}_{[\nu\mu]}$$

Desarrollando los dos miembros de esta igualdad se tiene:

$$(\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\ldots(\gamma^{\mu_r}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\,\varphi^{\alpha_{2r+1}}_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}} +$$

$$+\Big[(\sigma^{\mu_2\mu_3}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}(\gamma^{\mu_4}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\ldots(\gamma^{\mu_{r+1}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\Big]_{\text{simetrizado en } \sigma_{\mu\nu}}$$

$$\cdot\,\varphi^{\alpha_{2r+1}}_{[\mu_2\mu_3]\{\mu_4\mu_4\ldots\mu_{r+1}\}} + \ldots + (\sigma^{\mu_2\mu_3}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\ldots$$

$$\ldots(\sigma^{\mu_{2r-2}\mu_{2r-1}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\Big]\,\varphi^{\alpha_{2r+1}}_{[\mu_2\mu_3]\ldots[\mu_{2r-2}\mu_{2r-1}]\mu_1} =$$

$$= 2i\,(\gamma^{\mu_2}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\ldots(\gamma^{\mu_r}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\,\big[\gamma^{\mu}\varphi_{[\mu\mu_1]\{\mu_2\ldots\mu_r\}}\big]^{\alpha_{2r+1}} +$$

$$\ldots + 2i\,(\sigma^{\mu_2\mu_3}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\ldots(\sigma^{\mu_{2r-2}\mu_{2r-1}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}\,\cdot$$

$$\cdot\,\big[\gamma^{\mu}\varphi_{[\mu\mu_1][\mu_2\mu_3]\ldots[\mu_{2r-2}\mu_{2r-1}]}\big]^{\alpha_{2r+1}}$$

y de aquí, igualando los coeficientes de los elementos de la base se llega al resultado ii).

iii) el cálculo de representaciones es (ver Prop.2 (iv)):

$$D_r = \left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r}{2}\right)$$

$$D_{r+1} = \left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{r-1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-1}{2}, \tfrac{r+1}{2}\right)$$

$$D_{r+2} = \left[\left(\tfrac{r+2}{2}, \tfrac{r-2}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-2}{2}, \tfrac{r+2}{2}\right)\right] \oplus \left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r}{2}\right)$$

$$\cdots$$

$$D_{2r-1} = \left[\left(\tfrac{2r-1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2r-1}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\tfrac{2r-3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) \oplus \right.$$

$$\left. \oplus \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{2r-3}{2}\right)\right] \oplus \ldots \oplus \begin{cases} \left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r}{2}\right) & \text{si r es impar} \\ \left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{r-1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-1}{2}, \tfrac{r+1}{2}\right) & \text{si r es par} \end{cases}$$

$$D_{2r} = \left[(r,0) \oplus (0,r)\right] \oplus \left[(r-1,1) \oplus (1,r-1)\right] \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus \begin{cases} \left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{r-1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-1}{2}, \tfrac{r+1}{2}\right) & \text{si r es impar} \\ \left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r}{2}\right) & \text{si r es par} \end{cases}$$

Multiplicando por Δ :

$$\Delta \otimes D_r = \left[\left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{r}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r+1}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r-1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-1}{2}, \tfrac{r}{2}\right)\right]$$

$$\Delta \otimes D_{r+1} = \left[\left(\tfrac{r+2}{2}, \tfrac{r-1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-1}{2}, \tfrac{r+2}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r-1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-1}{2}, \tfrac{r}{2}\right)\right] \oplus$$

$$\oplus \left[\left(\tfrac{r-2}{2}, \tfrac{r+1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{r-2}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\tfrac{r}{2}, \tfrac{r+1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{r}{2}\right)\right]$$

$$\Delta \otimes D_{r+2} = \left[\left(\tfrac{r+3}{2}, \tfrac{r-2}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-2}{2}, \tfrac{r+3}{2}\right)\right] \oplus \left[\left(\tfrac{r+1}{2}, \tfrac{r-2}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{r-2}{2}, \tfrac{r+1}{2}\right)\right] \oplus$$

$$\oplus\left[\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{r+2}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r+2}{2},\tfrac{r-1}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(\tfrac{r-3}{2},\tfrac{r+2}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r+2}{2},\tfrac{r-3}{2}\right)\right]\oplus$$

$$\oplus\left[\left(\tfrac{r+1}{2},\tfrac{r}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r}{2},\tfrac{r+1}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(\tfrac{r}{2},\tfrac{r-1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{r}{2}\right)\right]$$

. . .

$$\Delta\otimes D_{2r-1}=\left[\left(r,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},r\right)\right]\oplus\left[\left(r-1,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},r-1\right)\right]\oplus$$

$$\oplus\left[\left(r-\tfrac{1}{2},1\right)\oplus\left(1,r-\tfrac{1}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(r-\tfrac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,r-\tfrac{1}{2}\right)\right]\oplus\ldots$$

$$\ldots\oplus\begin{cases}\Delta\otimes D_r & \text{si r es impar}\\ \Delta\otimes D_{r+1} & \text{si r es par}\end{cases}$$

$$\Delta\otimes D_{2r}=\left[\left(r+\tfrac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,r+\tfrac{1}{2}\right)\right]\oplus\left[\left(r-\tfrac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,r-\tfrac{1}{2}\right)\right]\oplus$$

$$\oplus\left[\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},r\right)\right]\oplus\ldots\oplus\begin{cases}\Delta\otimes D_{r+1} & \text{si r es impar}\\ \Delta\otimes D_r & \text{si r es par}\end{cases}$$

y al aplicar las condiciones de i), estas representaciones se reducen a

$$\varphi^{\alpha}_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}\longrightarrow\left(\tfrac{r+1}{2},\tfrac{r}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r}{2},\tfrac{r+1}{2}\right)=\Delta_r$$

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\ldots\mu_{r+1}\}}\longrightarrow\left[\left(\tfrac{r+2}{2},\tfrac{r-1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{r+2}{2}\right)\right]\oplus\Delta_r=\Delta_{r+1}$$

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\{\mu_5\ldots\mu_{r+1}\}}\longrightarrow\left[\left(\tfrac{r+3}{2},\tfrac{r-2}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r-2}{2},\tfrac{r+3}{2}\right)\right]\oplus\Delta_{r+1}=\Delta_{r+2}$$

. . .

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2]\ldots[\mu_{2r-3}\mu_{2r-2}]\mu_{2r-1}}\longrightarrow\left[\left(r,\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},r\right)\right]\oplus\Delta_{2r-2}=\Delta_{2r-1}$$

$$\psi^{\alpha}_{[\mu_1\mu_2]\dots[\mu_{2r-1}\mu_{2r}]} \longrightarrow \left[\left(r+\tfrac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,r+\tfrac{1}{2}\right)\right]\oplus\Lambda_{2r-1}=\Delta_{2r}$$

(II.52)

Obsérvese que cada tensor-bispinor contraido con γ^{μ} da el tensor-bispinor anterior, es decir, como veremos despues, las ecuaciones de onda van a ser de primer orden.

En el caso de spin entero, las trazas de cada tensor son el tensor dos rangos inferior, y las ecuaciones serán de segundo orden.

CAPITULO III. BISPINORS NO SIMETRICOS

1. Hasta ahora nos hemos limitado a considerar tensores bajo el grupo SU(2,2) totalmente simétricos. Se ha visto como las ecuaciones de Bargmann-Wigner impuestas a estos tensores llevaban a condiciones de masa y spin único, y la equivalencia de estas ecuaciones con las de Fierz-Pauli y Rarita-Schwinger.

Estudiaremos ahora qué ocurre cuando los tensores pertenecen a otros tipos de simetría. Usando resultados anteriormente expuestos (§I), los diagramas de Young a tratar son aquellos que tienen tres o menos filas. Pero los que tienen tres filas, son cero necesariamente si verifican las ecuaciones BW (Guralnik 1965). En efecto sea un bispinor de rango n, con un grupo al menos de tres índices antisimétricos, es decir que pertenezca a un diagrama de Young del tipo $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ con $\lambda_3 \neq 0$. Si verifica las ecuaciones BW en el sistema en reposo:

$$(\gamma^0 \pm 1)^{\alpha}{}_{\alpha_i} \psi^{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Usando una representación de γ^μ en la que $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ vemos que los índices $\alpha_1 \dots \alpha_n$ solo pueden tomar los valores 1 y 2 (en el caso de energía positiva, $(\gamma^0 - 1)^{\alpha}{}_{\alpha_i} \psi^{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n} = 0$). Los valo res 3 y 4 dan componentes nulas (recíprocamente si tomamos $(\gamma^0 + 1)^{\alpha}{}_{\alpha_i} \psi^{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n} = 0$). Pero si el diagrama de Young tiene tres filas, en una columna hay que colocar tres valores del índice distintos(debido a la antisimetría), de los que no disponemos. Por lo tanto el bispinor es identicamente nulo. Podemos pues restringirnos al caso de diagramas $[\lambda_1, \lambda_2]$

Ahora bien, si $\psi^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ cumple las ecuaciones BW, se comporta en el sistema en reposo como un tensor bajo SU(2). En una base en la que SU(2,2) actúe conservando la forma cuadrática $|z_1|^1 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2$ siendo (z_1, z_2, z_3, z_4) las componentes de un vector sobre el que actúa el grupo, $\gamma^0 + 1$ proyecta en el espacio $[(z_1, z_2, 0, 0)]$ y las matrices $U \in SU(2,2)$ que dejan invariante este espacio verifican $U\gamma^0 = \gamma^0 U$ formando un subgrupo SU(2). Pero en SU(2), los diagramas con dos filas son equivalentes a la que resultan de suprimir las columnas con dos filas (unimodularidad de SU(2)). Es decir, todos los diagramas son equivalentes a diagramas simétricos y los resultados concernientes al spin (la masa es única como consecuencia inmediata de las ecuaciones BW) son los ya obtenidos para los bispinors simétricos,aunque el número de componentes y los desarrollos en función de las matrices de Dirac sean distintos.

Podemos emplear un sencillo argumento, generalización de uno de Lurié para bispinors simétricos (Lurié, 1968) para demostrar estos resultados referentes al spin.

Sea ψ un bispinor de rango 2 simétrico que verifique la ecuación de Dirac en cada índice. En el sistema en reposo

$(\gamma^0 - 1)\psi = 0$ (energía positiva) $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

y las soluciones pueden escribirse como:

$$\omega^{\alpha\beta}_{(1)} = \delta^{\alpha}{}_{1}\,\delta^{\beta}{}_{1}$$

$$\omega^{\alpha\beta}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta^{\alpha}{}_{1}\,\delta^{\beta}{}_{2} + \delta^{\alpha}{}_{2}\,\delta^{\beta}{}_{1}\right)$$

$$\omega^{\alpha\beta}_{(3)} = \delta^{\alpha}{}_{2}\,\delta^{\beta}{}_{2}$$

El operador de spin es $S = (S^D \otimes 1 + 1 \otimes S^D)$ con

$$S^D_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]$$

y la componente 12,

$$\left(S_{12}\right)^{\alpha\beta}{}_{\alpha'\beta'} = \left(S^D_{12}\right)^{\alpha}{}_{\alpha'}\,\delta^{\beta}{}_{\beta'} + \delta^{\alpha}{}_{\alpha'}\left(S^D_{12}\right)^{\beta}{}_{\beta'}$$

aplicada a las tres funciones $\omega^{\alpha\beta}_{(i)}$ en una representación de las matrices γ^μ en la que $S^D_{12} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$S_{12}{}^{\alpha\beta}{}_{\alpha'\beta'}\,\omega^{\alpha'\beta'}_{(1)} = \left(S^{D}_{12}{}^{\alpha}{}_{1}\,\delta^{\beta}{}_{1} + S^{D}_{12}{}^{\beta}{}_{1}\,\delta^{\alpha}{}_{1}\right) = \omega^{\alpha\beta}_{(1)}$$

de igual forma:

$$S_{12}{}^{\alpha\beta}{}_{\alpha'\beta'}\,\omega^{\alpha'\beta'}_{(2)} = 0$$

$$S_{12}{}^{\alpha\beta}{}_{\alpha'\beta'}\, \omega_{(3)}^{\alpha'\beta'} = -\omega_{(3)}^{\alpha\beta}$$

Este argumento se generaliza sin dificultad a cualquier spin; sean:

$$\omega_{(1)}^{\{\alpha_1\ldots\alpha_n\}} = \delta^{\alpha_1}{}_1 \ldots \delta^{\alpha_n}{}_1$$

$$\omega_{(2)}^{\{\alpha_1\ldots\alpha_n\}} = \sum_{sim} \left(\delta^{\alpha_1}{}_1 \ldots \delta^{\alpha_{n-1}}{}_1\, \delta^{\alpha_n}{}_2\right)$$

$$\omega_{(3)}^{\{\alpha_1\ldots\alpha_n\}} = \sum_{sim} \left(\delta^{\alpha_1}{}_1 \ldots \delta^{\alpha_{n-2}}{}_1\, \delta^{\alpha_{n-1}}{}_2\, \delta^{\alpha_n}{}_2\right)$$

... ...

$$\omega_{(n+1)}^{\{\alpha_1\ldots\alpha_n\}} = \delta^{\alpha_1}{}_2 \ldots \delta^{\alpha_n}{}_2$$

El operador 3ª componente de spin es $S_{12} = \left\{S^D_{12} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1\right\}_{sim}$ y aplicado a $\omega_{(i)}$ nos da:

$$S_{12}\,\omega_{(1)} = \left(\tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2}\right)\omega_{(1)} = \tfrac{n}{2}\,\omega_{(1)}$$

$$S_{12}\,\omega_{(2)} = \left(\tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\omega_{(2)} = \left[(n-1)\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right]\omega_{(2)} = \left(\tfrac{n}{2} - 1\right)\omega_{(2)}$$

....

$$S_{12}\,\omega_{(n+1)} = \left(-\tfrac{1}{2} - \ldots - \tfrac{1}{2}\right)\omega_{(n+1)} = -\tfrac{n}{2}\,\omega_{(n+1)}$$

Para bispinors no simétricos que se transformen con un diagrama de Young del tipo $[r,s]$, $s \leq r$, se construyen $\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(n+1)}$, $n=r-s$ usando los operadores de Young correspondientes a las simetrías de ese diagrama. Así pues si el bispinor es $\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\ldots[\alpha_{2s-1}\alpha_{2s}]\alpha_{2s+1}\ldots\alpha_n}$ las funciones solución de $(\gamma^0-1)^{\alpha}{}_{\alpha_i}\psi^{\alpha_1\ldots\alpha_i\ldots\alpha_n}=0$ son:

$$\omega_{(i)}^{[\alpha_1\alpha_2]\ldots\alpha_n} = (\delta^{\alpha_1}{}_1\,\delta^{\alpha_2}{}_2 - \delta^{\alpha_1}{}_2\,\delta^{\alpha_2}{}_1)\ldots(\delta^{\alpha_{2s-1}}{}_1\,\delta^{\alpha_{2s}}{}_2 - \delta^{\alpha_{2s-1}}{}_1\,\delta^{\alpha_{2s}}{}_2).$$

$$.\left\{\delta^{\alpha_{2s+1}}_{1,2}\ \ldots\ \delta^{\alpha_n}_{1,2}\right\}$$

donde $\left\{\delta^{\alpha_{2s+1}}_{1,2}\ldots\ \delta^{\alpha_n}_{1,2}\right\}$ depende del índice i $(i=1,\ldots,r-s+1)$. Es decir, los primeros productos son iguales para todas las funciones $\omega_{(i)}$, pues reflejan la antisimetría de esos índices. El resto es simétrico en todos los índices y reproduce los resultados obtenidos para bispinors simétricos.

2. Consideremos algunos ejemplos de bispinors con simetrías mixtas:

a) El diagrama no simétrico más sencillo es $[1^2]$: $\psi^{[\alpha\beta]}$ bispinors de rango 2 antisimétrico.

Su desarrollo en la base $\{\Lambda_k\}$ es:

$$\psi^{\{\alpha\beta\}} = (C^{-1})^{\alpha\beta}\chi + (\gamma^5C^{-1})^{\alpha\beta}\chi_5 + (\gamma^\mu\gamma^5C^{-1})^{\alpha\beta}\chi_{5\mu} \qquad \text{(III.1)}$$

y aplicando las ecuaciones BW:

$$\chi=0\ ,\quad \chi_5^\mu = \frac{1}{m}p^\mu\chi_5\ ,\quad (p^2-m^2)\chi_5=0 \qquad \text{(III.2)}$$

luego
$$\psi^{[\alpha\beta]} = \left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5C^{-1}\right]^{\alpha\beta}\chi_5 \qquad \text{(III.3)}$$

con $(p^2-m^2)\,\chi_5=0$

b) El diagrama $[2,1]$ corresponde a un bispinor $\psi^{[\alpha\beta]\gamma}$ que verifica (Apéndice 1, 4)

$$\psi^{[\alpha\beta]\gamma} + \psi^{[\beta\gamma]\alpha} + \psi^{[\gamma\alpha]\beta} = 0 \qquad \text{(III.4)}$$

Esta última condición se obtiene de la ecuación de simetría del diagrama, $Y\psi = k\psi$

Y = operador de simetría asociado a ese diagrama

$Y = (1 + (13))\ (1 - (12))$ ((13),(12) permutaciones)

y k es un número que verifica $Y^2 = kY$ (Apéndice 1,4).

El desarrollo de $\psi^{[\alpha\beta]\gamma}$ es:

$$\psi^{[\alpha\beta]\gamma} = (C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi_5^{\gamma} + (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi_{5\mu}^{\gamma} \qquad \text{(III.5)}$$

que ya es antisimétrico en $\alpha\ \beta$

Para que además se cumpla la relación (III.4) debe verificarse (Apéndice 1,4)

$$\varphi^{\gamma} = (\gamma^5\varphi_5)^{\gamma} - (\gamma^5\gamma^{\mu}\varphi_{5\mu})^{\gamma} \qquad \text{(III.6)}$$

$\psi^{[\alpha\beta]\gamma}$ tiene 24 componentes menos 4 de la condición (III.4) son 20. φ_5^{α} son 4 componentes y $\varphi_{5\mu}^{\alpha}$, son 16.

Al aplicar las ecuaciones BW obtenemos:

$$\varphi = 0\ ,\ \varphi_{5\mu} = \frac{1}{m}p_{\mu}\varphi_5\ ,\ (\gamma p - m)\varphi_5 = 0 \qquad \text{(III.7)}$$

con lo que el campo que representa $\psi^{[\alpha\beta]\gamma}$ tiene masa única y spin 1/2, como corresponde al único índice γ que aparece sin antisimetrizar en su diagrama.

Sustituyendo (III.7) en (III.5),

$$\psi^{[\alpha\beta]\gamma} = (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\,\varphi_5^\gamma + \frac{1}{m}(\gamma^\mu\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\, p_\mu\,\varphi_5^\gamma =$$

$$= \left[\frac{\gamma p + m}{m}\,\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha\beta}\varphi_5^\gamma \qquad \text{(III.8)}$$

con $(\gamma p - m)^\alpha{}_{\alpha'}\,\varphi_5^{\alpha'} = 0$

c) Consideremos aun, diagramas con solo dos índices antisimétricos. El siguiente caso es $[3,1]$ (ver Apéndice 1,7)

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\alpha_4\}} = (C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma_\mu C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,X^\mu \;+$$

$$+(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma_\mu C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,X_5^\mu + (\gamma_\mu\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma_\nu C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,Y_5^{\mu\nu} +$$

$$+(C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma_{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,X^{[\mu\nu]} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,X_5^{[\mu\nu]} +$$

$$+(\gamma_\mu\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma_{\nu\rho} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,X^{\mu[\nu\rho]} \qquad \text{(III.9)}$$

Para que sea irreducible, es decir, para que verifique

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\alpha_4\}} + \psi^{[\alpha_2\alpha_3]\{\alpha_1\alpha_4\}} + \psi^{[\alpha_3\alpha_1]\{\alpha_2\alpha_4\}} = 0$$

se deben verificar las condiciones:

$$
\begin{aligned}
&X^{\mu} = i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{5\nu[\rho\lambda]} \\
&X^{[\mu\nu]} = -\tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\lambda\tau\mu\nu}\left(X_{5[\lambda\tau]} + i\,Y_{5\lambda\tau}\right) \\
&X_5^{\mu} = 2i\,X_{5\rho}{}^{\rho\mu} \\
&Y_5{}^{\mu}{}_{\mu} = 0
\end{aligned}
\qquad \text{(III.10)}
$$

y al aplicar las ecuaciones BW se obtiene:

$$X^{\mu} = X^{[\mu\nu]} = 0$$

$$Y_5^{\mu\nu} = \frac{1}{m}\, p^{\mu} X_5^{\nu} \quad , \quad X_5^{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m}\left(p^{\mu}X_5^{\nu} - p^{\nu}X_5^{\mu}\right) \qquad \text{(III.11)}$$

$$X_5^{\mu[\nu\rho]} = -\frac{i}{2m^2}\, p^{\mu}\left(p^{\nu}X_5^{\rho} - p^{\rho}X_5^{\nu}\right) \qquad \text{(III.12)}$$

con

$$(p^2 - m^2)\, X_5^{\mu} = 0 \qquad \text{(III.13)}$$

$$p_{\mu} X_5^{\mu} = 0 \qquad \text{(III.14)}$$

Entonces el bispinor $\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\alpha_4\}}$ se puede poner como:

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\alpha_4\}} = \left[\frac{\gamma p + m}{m}\,\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_1\alpha_2} \left[\frac{\gamma p + m}{m}\,\gamma^{\mu} C^{-1}\right]^{\alpha_3\alpha_4} X_{5\mu} \qquad \text{(III.15)}$$

3. Pasemos ya al caso general de dos índices antisimétricos.

Proposición 4:

Si $\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3 \ldots \alpha_{2r}\}}$ es un bispinor que se transforma bajo SU(2,2) de acuerdo al diagrama de Young $[2r-1,1]$, y cumple las ecuaciones BW, se verifica:

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}} = \left[\frac{\gamma p+m}{m}\,\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_1\alpha_2} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{r-1}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\,\gamma_{\mu_i}\,C^{-1}\right]^{\alpha_{2i+1}\alpha_{2i+2}} X_5^{\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}} \qquad \text{(III.16)}$$

donde $X_5^{\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}}$ es totalmente simétrico y de trazas nulas, con

$$p_\mu\, X_5^{\{\mu\mu_2\ldots\mu_{r-1}\}} = 0 \qquad \text{(III.17)}$$

y

$$(p^2-m^2)X_5^{\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}} = 0 \qquad \text{(III.18)}$$

$X_5^{\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}}$ es el coeficiente de $(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\ldots$ $\ldots(\gamma^{\mu_{r-1}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}$ en el desarrollo de $\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}}$ en la base $\Lambda_{k_1}\otimes\ldots\otimes\Lambda_{k_r}$.

Demostración:

Usando los resultados de los bispinors simétricos (§II, Prop 1)

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}} = \prod_{i=1}^{r-1}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\,\gamma^{\mu_i} C^{-1}\right]^{\alpha_{2i+1}\alpha_{2i+2}} \phi^{[\alpha_1\alpha_2]}_{\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}}$$

con $\phi^{[\alpha_1\alpha_2]}_{\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}}$ simétrico y de traza nula en sus índices tensoriales, y

$$p^\mu \phi^{[\alpha_1\alpha_2]}_{\{\mu\mu_2\ldots\mu_{r-1}\}} = 0$$

$$(p^2 - m^2)\, \phi^{[\alpha_1\alpha_2]}_{\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}} = 0$$

por 2.a),

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r}\}} = \left[\frac{\gamma P+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_1\alpha_2} \prod_{i=1}^{r-1}\left[\frac{\gamma P+m}{m}\gamma^{\mu_i}C^{-1}\right]^{\alpha_{2i+1}\alpha_{2i+2}} \cdot X_{5\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}}$$

donde $X_{5\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}}$ es el coeficiente de $(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}$ del desarrollo de $\phi^{[\alpha_1\alpha_2]}_{\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}}$

Si el número de índices es impar, se tiene

Proposición 5

Si $\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r+1}\}}$ bispinor asociado al diagrama de Young $[2r,1]$, que verifica las ecuaciones BW, entonces

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\alpha_3\ldots\alpha_{2r+1}\}} = \left[\frac{\gamma P+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_1\alpha_2} \cdot \prod_{i=1}^{r-1}\left[\frac{\gamma P+m}{m}\gamma^{\mu_i}C^{-1}\right]^{\alpha_{2i+1}\alpha_{2i+2}} \cdot \varphi^{\alpha_{2r+1}}_{5\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}} \qquad \text{(III.19)}$$

donde $\varphi^{\alpha_{2r+1}}_{5\{\mu_1\ldots\mu_{r-1}\}}$ es el coeficiente de $(\gamma^5C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\ldots$ $\ldots(\gamma^{\mu_{r-1}}C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}$. Es un tensor-bispinor, simétrico y de trazas nulas en sus índices tensoriales y que verifica:

$$(\gamma p - m)\, \varphi_{5\{\mu_1 \ldots \mu_{r-1}\}} = 0 \qquad \text{(III.20)}$$

$$\gamma^{\mu}\, \varphi_{5\{\mu\, \mu_2 \ldots \mu_{r-1}\}} = 0 \qquad \text{(III.21)}$$

Demostración:

Se siguen los pasos de la demostración anterior. Así pues, los bispinors de simetrías $[2r-1,1]$ que verifican las ecuaciones BW representan campos de masa única y spin r-1. Los de simetría $[2r,1]$ campos de masa única y spin r - 1/2.

4. Los cálculos para otros tipos de simetría, no ofrecen mayores dificultades. Veamos los de diagramas $[r,r]$.

a) Si r = 1, es el caso a) del apartado 2

b) r = 2,

$$\begin{aligned}
\psi^{[\alpha_1\alpha_2][\alpha_3\alpha_4]} &= (C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X_5 + \\
&+ (C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} Y_5 + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X_{55} - \\
&+ (\gamma_\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X_5^{\mu} + (C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma_\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} Y_5^{\mu} + \\
&+ (\gamma_\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X_{55}^{\mu} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma_\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} Y_{5}^{\mu} + \\
&+ (\gamma_\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma_\nu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X_{55}^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

al imponer las condiciones de simetría (Apéndice 1,8)

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2][\alpha_3\alpha_4]} = \psi^{[\alpha_3\alpha_4][\alpha_1\alpha_2]}$$

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2][\alpha_3\alpha_4]} + \psi^{[\alpha_1\alpha_3][\alpha_4\alpha_2]} + \psi^{[\alpha_1\alpha_4][\alpha_2\alpha_3]} = 0 \qquad \text{(III.22)}$$

se verifica (Apéndice 1,8)

$$X_5 = Y_5 \quad , \quad X_5^{\mu} = Y_5^{\mu} \quad , \quad X_{55}^{\mu} = Y_{55}^{\mu} \quad , \quad X_{55}^{\mu\nu} = X_{55}^{\nu\mu}$$
$$X + X_{55} - X_{55}{}^{\mu}{}_{\mu} = 0 \qquad \text{(III.23)}$$

y al aplicar las ecuaciones BW, (Apéndice 1,8):

$$X = 0 \quad , \quad X_5 = 0 \quad , \quad X_5^{\mu} = 0 \qquad \text{(III.24)}$$
$$X_{55}^{\mu} = \frac{1}{m} p^{\mu} X_{55} \quad , \quad X_{55}^{\mu\nu} = \frac{1}{m^2} p^{\mu} p^{\nu} X_{55}$$
$$(p^2 - m^2) X_{55} = 0$$

Entonces podemos escribir:

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2][\alpha_3\alpha_4]} = (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} X_{55} +$$
$$+ \left[(\gamma_\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma_\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \right] \frac{1}{m} p^{\mu} X_{55} +$$
$$+ (\gamma_\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma_\nu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \frac{1}{m^2} p^{\mu} p^{\nu} X_{55} =$$
$$= \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^5 C^{-1} \right]^{\alpha_1\alpha_2} \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^5 C^{-1} \right]^{\alpha_3\alpha_4} X_{55} \qquad \text{(III.25)}$$

c) Se tiene la siguiente

Proposición 6

Si $\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\dots[\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}]}$ es un bispinor asociado al diagrama de Young $[r,r]$, que verifica la ecuación BW, entonces:

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\dots[\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}]} = \prod_{i=1}^{r}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} X_{5\dots 5(r)} \qquad \text{(III.26)}$$

donde $X_{5\dots 5(r)}$ es el coeficiente de $(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\dots(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}$ y verifica $(p^2 - m^2)X_{5\dots 5(r)} = 0$.

ψ describe un campo de masa m y spin 0.

Demostración

Es inmediata: por ejemplo, por inducción, para n = 2 está probado (párrafo 2.a).

Si n = 2r - 2

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\dots[\alpha_{2r-3}\alpha_{2r-2}]} = \prod_{i=1}^{r-1}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} \cdot X_{5\dots 5(r-1)}$$

para n = 2r

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\dots[\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}]} = \left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_1\alpha_2} \phi_5^{[\alpha_3\alpha_4]\dots[\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}]}$$

y de la hipótesis de inducción se deduce la proposición.

5. Uniendo los resultados de 3 y 4, llegamos a las fórmulas siguientes:

Proposición 7

Para un diagrama $[s+m,s]$, con $m=2r$, número total de índices $n=\text{par}$, si el bispinor cumple las ecuaciones BW se tiene:

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\dots[\alpha_{2s-1}\alpha_{2s}]\{\alpha_{2s+1}\dots\alpha_{2(s+r)}\}} = \prod_{i=1}^{s}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{r}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma_{\mu_j} C^{-1}\right]^{\alpha_{2s+2j-1}\alpha_{2s+2j}} X_{5\dots5}^{\{\mu_1\dots\mu_r\}} \qquad \text{(III.27)}$$

con $X_{5\dots5}^{\{\mu_1\dots\mu_r\}}$ el coeficiente de $(\gamma^5C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\dots(\gamma^5C^{-1})^{\alpha_{2s-1}\alpha_{2s}}$ $(\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_{2s+1}\alpha_{2s+2}}\dots(\gamma^{\mu_r}C^{-1})^{\alpha_{2(s+r)-1}\alpha_{2(s+r)}}$

y verificando

$$\begin{aligned}(p^2-m^2)\,X_{5\dots5}^{\mu_1\dots\mu_r} &= 0\\ p_\mu X_{5\dots5}^{\mu\mu_2\dots\mu_r} &= 0\end{aligned} \qquad \text{(III.28)}$$

$X_{5\dots5}^{\{\mu_1\dots\mu_r\}}$ es totalmente simétrico y de traza nula.

Si el diagrama es $[s+m,s]$ con $m=2r+1$, número total de índice impar,

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\dots[\alpha_{2s-1}\alpha_{2s}]\{\alpha_{2s+1}\dots\alpha_{2s+2r+1}\}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{s}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} \prod_{j=1}^{r}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^{\mu_j} C^{-1}\right]^{\alpha_{2(s+j)-1}\alpha_{2(s+j)}} \cdot$$

$$\cdot\, \varphi_{5\dots5\{\mu_1\dots\mu_r\}}^{\alpha_{2(s+r)+1}} \qquad \text{(III.29)}$$

donde $\varphi^{\alpha\,\{\mu_1\ldots\mu_r\}}_{s\ldots s}$ es el coeficiente del término (III.28) y es totalmente simétrico y de trazas nulas en sus índices tensoriales, verificando:

$$\gamma_\mu \varphi^{\{\mu\mu_1\ldots\mu_r\}}_{s\ldots s} = 0$$

$$(\gamma p - m)\varphi^{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}_{s\ldots s} = 0$$

Demostración

La comprobación es inmediata a partir de los resultados anteriores:(por (III.16))

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\ldots[\alpha_{2s-1}\alpha_{2s}]\{\alpha_{2s+1}\cdots\alpha_{2s+2r}\}} = \left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_{2s-1}\alpha_{2s}} \cdot$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{r}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^{\mu_i}C^{-1}\right]^{\alpha_{2(s+i)-1}\alpha_{2(s+i)}} \cdot \phi^{[\alpha_1\alpha_2]\ldots[\alpha_{2s-3}\alpha_{2s-2}]}_{s\,\{\mu_1\ldots\mu_r\}}$$

y por (III.26)

$$= \left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_{2s-1}\alpha_{2s}} \prod_{i=1}^{r}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma_{\mu_i}C^{-1}\right]^{\alpha_{2s+2i-1}\alpha_{2s+2i}} \cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{s-1}\left[\frac{\gamma p+m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha_{2j-1}\alpha_{2j}} \chi^{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}_{s\ldots s}$$

y de forma semejante para el caso de número impar de índices.

6. Análisis de representaciones. El estudio de las representaciones bajo las que se transforman estos bispinors, es similar al hecho en el caso simétrico.

a) diagramas $[r,r]$

La representación de SO(4,2) asociada a este diagrama es $(r,0,0)$ que al reducirse a SO(3,1) nos da:

$$\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)\oplus 2\left(\frac{r-1}{2},\frac{r-1}{2}\right)\oplus 3\left(\frac{r-2}{2},\frac{r-2}{2}\right)\oplus\ldots\oplus r\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\oplus(r+1)(0,0)$$

$X_{5\ldots5}$ se transforma con $(0,0)$. Los demás tensores no son en general irreducibles. El de orden más alto $X_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}$ se transforma con $(\frac{r}{2},\frac{r}{2})\oplus\ldots$ pues sus trazas no son nulas (en el caso $r=2$, $X^{\mu}{}_{\mu}=$ $=X+X_{55}$); la simetría de $X_{\{\mu_1\ldots\mu_r\}}$ es consecuencia de la condición

$$\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\ldots[\alpha_{i-1}\alpha_i]\ldots[\alpha_{j-1}\alpha_j]\ldots[\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}]}=$$

$$=\psi^{[\alpha_1\alpha_2]\ldots[\alpha_{j-1}\alpha_j]\ldots[\alpha_{i-1}\alpha_i]\ldots[\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}]}\qquad\text{(III.30)}$$

que aparece debido a la irreducibilidad de este tensor.

La repetición de representaciones se debe a lo siguiente: Para $(0,0)$ hay $r+1$ coeficientes, correspondientes a los elementos de la base:

$$(C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\ldots(C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}},\ (\gamma^5C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\ldots(C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}},\ \ldots$$

$$\ldots,\ (\gamma^5C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\ldots(\gamma^5C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}$$

téngase en cuenta, que debido a la condición (III.30), los coeficientes con igual número de factores C^{-1} y $\gamma^5 C^{-1}$ son iguales. Las r de $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ corresponden a:

$$(C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} \ldots (C^{-1})^{\alpha_{2r-3}\alpha_{2r-2}} (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}},$$

$$,(C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} \ldots (C^{-1})^{\alpha_{2r-5}\alpha_{2r-4}} (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_{2r-3}\alpha_{2r-2}} (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}} \ldots$$

$$\ldots (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} \ldots (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_{2r-3}\alpha_{2r-2}} (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}$$

y así sucesivamente. Con $(\frac{r-1}{2},\frac{r-1}{2})$ solo se transforman dos tensores. Los correspondientes a

$$(C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma^{\mu_1}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \ldots (\gamma^{\mu_{r-1}}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}$$

$$(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma^{\mu_1}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \ldots (\gamma^{\mu_{r-1}}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha_{2r-1}\alpha_{2r}}$$

b) diagramas $[r,r-1]$

El peso máximo es $(r-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y al reducirlo al grupo de Lorentz queda:

$$\left[\left(\frac{r}{2},\frac{r-1}{2}\right)\oplus\left(\frac{r-1}{2},\frac{r}{2}\right)\right] \oplus 2\left[\left(\frac{r-1}{2},\frac{r-2}{2}\right)\oplus\left(\frac{r-2}{2},\frac{r-1}{2}\right)\right]\oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus (r-1)\left[\left(1,\frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2},1\right)\right]\oplus r\left[\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)\right]$$

y $\varphi^{\alpha}_{5\ldots5}$ se transforma con $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$.

La repetición de representaciones obedece a razones análogas a las adu cidas en el caso a).

c) Diagramas $[r,r-2]$

El peso máximo es (r-1,1,1) que se descompone al pasar al gru po de Lorentz en:

$$\left[\left(\tfrac{r}{2},\tfrac{r-2}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r-2}{2},\tfrac{r}{2}\right)\right]\oplus 2\left[\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{r-3}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{r-3}{2},\tfrac{r-1}{2}\right)\right]\oplus\cdots$$

$$\cdots\oplus(r-2)\left[\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right)\oplus\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right)\right]\oplus(r-1)\left[(1,0)\oplus(0,1)\right]\oplus$$

$$\oplus\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{r-1}{2}\right)\oplus 2\left(\tfrac{r-2}{2},\tfrac{r-2}{2}\right)\oplus\cdots\oplus(r-2)(1,1)\oplus(r-1)\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

$X^{\mu}_{5\ldots5}$ se transforma con $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

En general los diagramas $[r,r-k]$, $0<k<r$, k par, se tratan de forma similar.

d) Los diagramas $[r,r-k]$, $0<k<r$, k impar, siguen esquemas se mejantes a los del caso b), teniendo en cuenta la condición: $\gamma_\mu \varphi^{\mu\ldots}_{5\ldots5}=0$ que elimina las representaciones de spin inferior.

CAPITULO IV. ECUACIONES DE EVOLUCION

1. Una vez calculadas las expresiones de bispinors de rango n en función de tensores y tensor-bispinors, queremos estudiar con más detalle las ecuaciones de Fierz-Pauli para spin entero, y Rarita-Schwinger para semientero. Buscábamos en principio, un formalismo lagrangiano para estas ecuaciones. La mayor dificultad es la existencia de condiciones auxiliares que se pueden evitar mediante la introducción de nuevos campos que se anulan por las ecuaciones del movimiento o que son funciones de las primitivas. Para spin 1 es posible encontrar una ecuación en la que no aparezcan condiciones auxiliares, pero su generalización a spin 2 y superior lleva a restricciones no evitables si no es, como hemos dicho antes, introduciendo más campos. Así hemos obtenido para spin entero ecuaciones de tipo Schrödinger $i\partial_0\psi = H\psi$, donde H es un operador en las derivadas espaciales, de 2° orden, y condiciones auxiliares en las que solo intervienen derivadas espaciales. Para spin semientero, la forma de las ecuaciones es similar, con H el hamiltoniano de Dirac para spin 1/2, por tanto de primer orden. También es inevitable la aparición de condiciones auxiliares para spin superior a 1/2.

2. Se pueden escribir las ecuaciones de Klein-Gordon y Proca en forma hamiltoniana (Foldy, 1956, Lurié 1968) introduciendo campos auxilares:

a) Así para spin 0, se puede definir

$$X^{\mu} = -\frac{i}{m}\partial^{\mu} X \tag{IV.1}$$

con X un campo escalar y X^{μ} por lo tanto un vector. Usando el par de funciones X, X^{0}

$$(\Box + m^2)\, X(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad ((\partial^0)^2 - \Delta + m^2)\, X(x) = 0$$

como

$$\partial^0 X = im\, X^0$$

se tiene:

$$\begin{aligned} i\,\partial_0 X &= -m\, X^0 \\ i\partial_0 X^0 &= \frac{1}{m}\Delta X - m X \end{aligned} \tag{IV.2}$$

llamando $\psi = \begin{pmatrix} X \\ X^0 \end{pmatrix} \Longrightarrow i\partial_0 \psi = H\psi$

donde

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ \frac{1}{m}(\Delta - m^2) & 0 \end{pmatrix} \tag{IV.3}$$

o en representación de momentos

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -m \\ -\frac{1}{m}\omega(\vec{p})^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \omega(\vec{p}) = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

Los autovalores de H son $\pm\omega(\vec{p})$.

Si realizamos la transformación dada por $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se obtiene el hamiltoniano (Lurié, 1968)

$$H_L = Q\,H\,Q^{-1} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} \vec{p}^{\,2} + 2m^2 & \vec{p}^{\,2} \\ -\vec{p}^{\,2} & -(\vec{p}^{\,2} + 2m^2) \end{pmatrix}$$

$H_L = (\sigma_3 + i\,\sigma_2)\,\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + m\,\sigma_3$ (IV.4), ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ matrices de Pauli)

y las funciones en esta representación son:

$$\tilde{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X - X^0)$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X + X^0)$$

Si hacemos la transformación dada por $P = \begin{pmatrix} a & -\frac{m}{\omega(\vec{p})}\,a \\ \frac{\omega(\vec{p})}{m}\,d & d \end{pmatrix}$ donde a y d son no nulas, el hamiltoniano queda diagonal. Eligiendo por ejemplo $a = \omega(\vec{p})$, $d = m$, las autofunciones de H_0, $H_0 = P\,H\,Q^{-1}$, son:

$$X_{\pm} = \omega(\vec{p})\;X \mp m\;X^0$$

y la ecuación que verifican es:

$$p_0\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} = \omega(\vec{p})\,\sigma_3\begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.5)}$$

b) para spin 1, la ecuación es

$$(\Box + m^2)\,X^{\mu} = 0$$

$$\partial_{\mu}X^{\mu} = 0$$

En el desarrollo del bispinor de rango 2 simétrico (Apéndice 1,1) aparecía el tensor

$$X^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2m}\left\{\partial^\mu X^\nu - \partial^\nu X^\mu\right\} \qquad \text{(IV.6)}$$

Sus componentes independientes son X^{oi}, X^{jk}, $i,j,k = 1,2,3$.

No es dificil probar que X^o, X^{jk} se pueden expresar en función de X^k y X^{ok}. Así:

$$X^{[jk]} = \frac{1}{2m}\left\{\partial^j X^k - \partial^k X^j\right\} \qquad \text{(IV.7)}$$

y

$$\partial_\mu X^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2m}\left\{\Box X^\nu - \partial^\nu \partial^\mu X_\mu\right\} = -\frac{m}{2} X^\nu$$

luego

$$X^o = \frac{2}{m}\partial_\mu X^{o\mu} = \frac{2}{m}\partial_k X^{ok} \qquad \text{(IV.8)}$$

Las componentes X^k, X^{ok} verifican:

$$X^{ok} = \frac{1}{2m}\left\{\partial^o X^k - \partial^k X^o\right\} = \frac{1}{2m}\left\{\partial^o X^k - \frac{2}{m}\partial^k \partial_j X^{oj}\right\}$$

luego

$$i\partial_o X^k = \frac{2i}{m}\left(m^2 X^{ok} + \partial^k \partial_j X^{oj}\right) \qquad \text{(IV.9)}$$

análogamente

$$\partial_o X^{ok} = \frac{1}{2m}\left\{(\partial^o)^2 X^k - \partial^k \partial_o X^o\right\} = \frac{1}{2m}\left\{(\partial^o)^2 X^k + \partial^k \partial_j X^j\right\}$$

pues

$$\partial_\mu X^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_o X^o = -\partial_k X^k$$

y

$$(\partial^o)^2 X^k = -m^2 X^k + \partial_j \partial^j X^k$$

luego

$$i\partial_o X^{ok} = -\frac{i}{2m}\left\{(m^2-\Delta)X^k - \partial^k\partial_j X^j\right\} \qquad \text{(IV.10)}$$

tenemos las ecuaciones:

$$i\partial_o X^k = \frac{2i}{m}\left(m^2\delta^k{}_j + \partial^k\partial_j\right)X^{oj}$$

$$i\partial_o X^{ok} = -\frac{i}{2m}\left((m^2+\partial^j\partial_j)\delta^k{}_\ell - \partial^k\partial_\ell\right)X^\ell$$

Si se pone

$$N^k{}_j = \frac{2i}{m}\left(m^2\delta^k{}_j + \partial^k\partial_j\right) \qquad \text{(IV.11)}$$

y

$$N'^k{}_j = -\frac{i}{2m}\left((m^2+\partial_j\partial^j)\delta^k{}_\ell - \partial^k\partial_\ell\right) \qquad \text{(IV.12)}$$

se tiene:

$$N^k{}_j N^j{}_\ell = (m^2+\partial^i\partial_i)\delta^k{}_\ell$$

en la representación de momentos

$$N^k{}_j N'^j{}_\ell = \omega(\vec{p})^2\delta^k{}_\ell$$

y si se pone

$$M = \frac{1}{\omega(\vec{p})}N \quad , \quad M^{-1} = \frac{1}{\omega(\vec{p})}N' \quad , \quad MM^{-1} = 1 \qquad \text{(IV.13)}$$

y las ecuaciones son:

$$p^0\begin{pmatrix} X^k \\ X^{ok}\end{pmatrix} = \omega(\vec{p})\begin{pmatrix} 0 & M^k{}_i \\ (M^{-1})^k{}_i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^i \\ X^{oi}\end{pmatrix} \qquad \text{(IV.14)}$$

con lo que

$$H = \omega(\vec{p}) \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^{-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad (IV.15)$$

tanto X^k como X^{ok} son tensores irreducibles del grupo de rotaciones, asociados a la representación de spin 1.

Si hacemos la transformación $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$ obtenemos el hamiltoniano (Lurié 1968)

$$H_L = QHQ^{-1} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} (2m^2-\Delta)\delta^k{}_j & -\Delta\delta^k{}_j - 2\partial^k\partial_j \\ \Delta\delta^k{}_j + 2\partial^k\partial_j & -(2m^2-\Delta)\delta^k{}_j \end{pmatrix}$$

es decir, en momentos

$$H_L = m\sigma_3 + \frac{\vec{p}^2}{2m}(\sigma_3 + i\sigma_2) - \frac{i\sigma_2}{m} p^k p_j$$

y usando la relación $p^k p^j = \vec{p}^2 - (\vec{p}.\vec{S})^2$, con $\vec{S}$ operador de spin para S=1,

$$H_L = (\sigma_3 + i\sigma_2)\frac{\vec{p}^2}{2m} + m\sigma_3 - i\sigma_2 \frac{\vec{p}^2 - (\vec{p}.\vec{S})^2}{m} \qquad (IV.16)$$

que es el de spin 0 (IV.4) más el término $-i\sigma_2 \frac{\vec{p}^2 - (\vec{p}\vec{S})^2}{m}$. Se puede hacer una transformación que, como en el caso de spin 0, lleve al hamiltoniano (IV.15) a una forma diagonal:

$$(H_0)^i{}_k = \omega(\vec{p})\,\sigma_3\,\delta^i{}_k \qquad (IV.17)$$

Sea $P = \begin{pmatrix} A & AM \\ -DM^{-1} & D \end{pmatrix}$ con A,D matrices regulares 3 x 3.

Entonces $H_0 = PHP^{-1}$ y

$$\psi_+^k = A^k{}_l \left(X^l + M^l{}_j X^{0j} \right)$$
$$\psi_-^k = D^k{}_l \left(-(M^{-1})^l{}_j X^j + X^{0l} \right) \qquad \text{(IV.18}$$

son las autofunciones de H.

No es posible hacer lo mismo en spin superior a 1. Ocurre igual con las ecuaciones de onda tensoriales: la ecuación de Klein-Gordon y la de Proca, no necesitan condiciones adicionales para describir part culas de spin 0 y 1, pero no es posible hacer esto (sin introducir nu vos campos) para spin mayor que 1. Lo que vamos a hacer es construir una formulación hamiltoniana con condiciones auxiliares que permitan asegurar la unicidad del spin. El hamiltoniano va a ser el dado por l ecuación de spin 1, por la matriz identidad, cuya dimensión depende del rango de los tensores que intervienen en las ecuaciones.

3. a) Analicemos el caso $n = 2$, en el que aparecen ya, condiciones auxiliares a la ecuación de evolución.

Como sabemos, la ecuación que describe un campo de spin 2 y masa m es

$$(p^2 - m^2)\, X^{\mu\nu} = 0$$
$$p_\mu\, X^{\mu\nu} = 0$$

donde $X^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico de traza nula, es decir irreducible bajo el grupo de Lorentz. No lo es sin embargo, bajo el grupo de rotaciones SO(3) y contiene spin 2,1,0. Los spines más bajos son eliminanados por la condición $p_{\mu} X^{\mu} = 0$.

Habíamos calculado (Apéndice 1,6) las siguientes expresiones:

$$X^{[\mu\nu]\rho} = -\frac{i}{2m}\left\{ p^{\mu} X^{\nu\rho} - p^{\nu} X^{\mu\rho} \right\} \tag{IV.19}$$

$$X^{\nu\rho} = \frac{2i}{m} p_{\mu} X^{[\mu\nu]\rho} \tag{IV.20}$$

que nos relacionan $X^{\mu\nu}$ con $X^{[\mu\nu]\rho}$, otro de los tensores que aparecían en el desarrollo de los bispinors simétricos de rango 4. Calculamos las expresiones de las componentes X^{oo}, X^{ok}, $X^{[ij]k}$, $X^{[oj]o}$, $X^{[jk]o}$ en función de las restantes. Para ello, utilizamos las condiciones algebraicas de estos tensores y las ecuaciones anteriores (IV.19, 20). Así

$$X^{\mu}{}_{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad X^{oo} = -X^{k}{}_{k}$$

$$X^{ok} = \frac{2i}{m} p_{\mu} X^{[\mu o]k} = -\frac{2i}{m} p_j X^{[oj]k}$$

$$X^{[ij]k} = -\frac{i}{2m}\left(p^{i} X^{jk} - p^{j} X^{ik}\right)$$

$$X^{[oj]o} = -\frac{i}{2m}\left(p^{o} X^{oj} - p^{j} X^{oo}\right) = -\frac{i}{2m}\left(-p_k X^{kj} + p^{j} X^{k}{}_{k}\right)$$

pues $\quad p_{\mu} X^{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow p^{o} X^{oj} = -p_k X^{kj}$

de $\quad X^{[\mu\nu]\rho} + X^{[\nu\rho]\mu} + X^{[\rho\mu]\nu} = 0 \quad$ se sigue

$$X^{[jk]o} = -X^{[oj]k} + X^{[ok]j}$$

Nos quedan X^{jk} y $X^{[oj]k}$. El primer tensor es simétrico pero no tiene traza nula ($X^{j}{}_{j} = -X^{oo}$) y el segundo no es simétrico pero tiene tie ne traza nula ($X^{[o\mu]}{}_{\mu} = 0 \Longrightarrow X^{[ok]}{}_{k} = 0$). Veamos que ecuaciones cum plen:

$$X^{[oj]k} = -\frac{i}{2m}\left\{p^o X^{jk} - p^j X^{ok}\right\} = -\frac{i}{2m}\left\{p^o X^{jk} + \frac{2i}{m} p^j p_l X^{[ol]k}\right\}$$

entonces $p^o X^{jk} = \frac{2i}{m}\left\{m^2 \delta^j{}_l - p^j p_l\right\} X^{[ol]k}$, es decir de (IV.13)

$$p^o X^{jk} = \omega(\vec{p}) M^j{}_l X^{[ol]k} \tag{IV.21}$$

análogamente

$$p^o X^{[oj]k} = -\frac{i}{2m}\left\{(p^o)^2 X^{jk} - p^j p^o X^{ok}\right\} =$$

$$= -\frac{i}{2m}\left\{(m^2 + \vec{p}^2) X^{jk} + p^j p_l X^{lk}\right\}$$

pues $p_\mu X^{\mu k} = 0 \Longrightarrow p_o X^{ok} = -p_j X^{jk}$, luego

$$p^o X^{[oj]k} = \omega(\vec{p}) (M^{-1})^j{}_l X^{lk} \tag{IV.22}$$

y en resumen

$$p^o \begin{pmatrix} X^{jk} \\ X^{[oj]k} \end{pmatrix} = H^{jk}{}_{il} \begin{pmatrix} X^{il} \\ X^{[oi]l} \end{pmatrix} \tag{IV.23}$$

con $$H^{jk}{}_{il} = \omega(\vec{p}) \begin{pmatrix} 0 & M^j{}_i \\ (M^{-1})^j{}_i & 0 \end{pmatrix} \delta^k{}_l \tag{IV.24}$$

Sin embargo, hay más ecuaciones. En el caso de spin 1, a partir de $p^0\psi = H\psi$ se pueden recuperar las ecuaciones $(p^2 - m^2)X^\mu = 0$, $p_\mu X^\mu = 0$. En efecto:

$$p^0 X^k = \omega(\vec{p}) M^k{}_\ell X^{0\ell}$$

$$p^0 X^{0\ell} = \omega(\vec{p}) (M^{-1})^\ell{}_j X^j$$

luego $(p^0)^2 X^k = \omega(\vec{p})^2 X^k \Longrightarrow (p^2 - m^2) X^k = 0$. De igual forma

$$(p^2 - m^2) X^{0k} = 0$$

de donde $(p^2 - m^2) X^\mu = 0$. La condición auxiliar se obtiene de:

$$X^0 = -\frac{2i}{m} p_k X^{0k}$$

$$p_0 X^0 = -\frac{2i}{m} p_0 p_k X^{0k} = -\frac{2i}{m} p_k \omega(\vec{p})(M^{-1})^k{}_\ell X^\ell$$

pero $p_k (M^{-1})^k{}_l = -\dfrac{im}{2\omega(\vec{p})} p_\ell$ luego

$$p_0 X^0 = -p_\ell X^\ell \Rightarrow p_\mu X^\mu = 0$$

En el caso de spin 2,

$$p_0 X^{0k} = -\frac{2i}{m} p_0 p_j X^{[0j]k} = -\frac{2i}{m}\omega(\vec{p}) p_j (M^{-1})^j{}_\ell X^{\ell k} =$$

$$= -p_\ell X^{\ell k} \Rightarrow p_\mu X^{\mu k} = 0$$

pero $p_\mu X^{\mu 0} = 0$ no se puede deducir:

$$p_0 X^{00} = -p_0 X^k{}_k = -\omega(\vec{p}) M^k{}_j X^{[0j]}{}_k$$

$-\omega(\vec{p})\ M^{k}{}_{j}\ X^{[oj]}{}_{k} = -\ p_{j}\ X^{oj}$ es una condición adicional, que podemos escribir de forma más compacta:

$$p_{o}\ X^{oo} = -p_{j}\ X^{oj}$$

aplicando p_{o}:

$$(p_{o})^{2}\ X^{oo} = -\ p_{o}p_{j}\ X^{oj} = p_{j}p_{l}\,X^{j\ell}$$

es decir $(p_{o})^{2}\ X^{k}{}_{k} - p_{j}p_{\ell}\ X^{j\ell} = 0$

$$\Longrightarrow\ (M^{-1})_{jk}\ X^{jk} = 0 \qquad \text{(IV.25}$$

Aparece también otra condición sobre el tensor $X^{[oj]k}$: X^{ik} es un tensor simétrico. Por tanto, de (IV.21) $M^{j}{}_{l}\ X^{[ol]\,k}$ debe ser simétrico en jk, es decir

$$M^{j}{}_{l}\ X^{[ol]\,k} = M^{k}{}_{\ell}\ X^{[o\ell]\,j} \qquad \text{(IV.26}$$

Estàs dos (IV.25,26) son las condiciones que son faltaban.

El cálculo de componentes independientes es sencillo:

para X^{jk} , 6 componentes menos la condición (IV.25) = 5

para $X^{[oj]\,k}$, 8 componentes menos las tres de (IV.26) = 5

b) Para spin superior a 2 los resultados son similares. Para s=3, tenemos dos tensores: $X^{\{\mu\nu\rho\}}$ totalmente simétrico y de traza nula que verifica $(p^{2}-m^{2})\ X^{\{\mu\nu\rho\}} = 0$, $p_{\mu}\ X^{\{\mu\nu\rho\}} = 0$, y $X^{[\mu\nu]\{\rho\lambda\}} =$ $= -\frac{i}{2m}\left\{\ p^{\mu}\ X^{\{\nu\rho\lambda\}} - p^{\nu}\ X^{\{\mu\rho\lambda\}}\right\}$, tomando como componente que aparezcan en las ecuaciones: X^{ijk} y $X^{[oi]\,jk}$ las demás se expresan en función de éstas.

Así $$\chi^{ooj} = - \chi^{k}{}_{k}{}^{j}$$

como $\chi^{\mu\nu\rho} = \frac{2i}{m} p_{\lambda} \chi^{[\lambda\mu]\nu\rho}$ (Apéndice 1,12)

$$\chi^{ojk} = - \frac{2i}{m} p_{l} \chi^{[ol]jk}$$

$$\chi^{ooo} = - \chi^{ok}{}_{k} = \frac{2i}{m} p_{l} \chi^{[ol]k}{}_{k}$$

de $\chi^{[\mu\lambda]\nu\rho} + \chi^{[\lambda\nu]\mu\rho} + \chi^{[\nu\mu]\lambda\rho} = 0$ se deduce

$$\chi^{[jk]ol} = - \chi^{[oj]kl} + \chi^{[ok]jl}$$

y las demás son:

$$\chi^{[ok]oo} = - \chi^{[ok]l}{}_{l}$$

$$\chi^{[jk]\{lr\}} = - \frac{i}{2m} \left\{ p^{j} \chi^{klr} - p^{k} \chi^{jlr} \right\}$$

$$\chi^{[jk]oo} = - \chi^{[jk]l}{}_{l} = \frac{i}{2m} \left\{ p^{j} \chi^{kl}{}_{l} - p^{k} \chi^{jl}{}_{l} \right\}$$

$$\chi^{[oj]ol} = - \chi^{[kj]}{}_{k}{}^{l} = \frac{i}{2m} \left\{ p^{k} \chi_{k}{}^{jl} - p^{j} \chi^{lk}{}_{k} \right\}$$

las ecuaciones para los tensores χ^{jkl} y $\chi^{[oj]kl}$ son las mismas que en el caso anterior:

$$p^{o} \chi^{jkl} = \omega(\vec{p}) M^{j}{}_{r} \chi^{rkl} \tag{IV.27}$$

$$p^{o} \chi^{[oj]kl} = \omega(\vec{p}) (M^{-1})^{j}{}_{r} \chi^{rkl} \tag{IV.28}$$

con condiciones auxiliares:

$$(M^{-1})_{jl} \chi^{jlr} = 0 \tag{IV.29}$$

$$M^j{}_l\, X^{[ol]kr} = M^k{}_l\, X^{[ol]jr} \qquad \text{(IV.3}$$

En el caso general tenemos el siguiente resultado:

Proposición 8

Sea $X^{\{\mu_1 \dots \mu_n\}}$ tensor totalmente simétrico de trazas nulas que rifica las ecuaciones

$$(p^2 - m^2)\, X^{\{\mu_1 \dots \mu_n\}} = 0 \qquad \text{(IV.31}$$

$$p_\mu X^{\{\mu\mu_2 \dots \mu_n\}} = 0 \qquad \text{(IV.32}$$

Sea

$$X^{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3 \dots \mu_{n+1}\}} =$$

$$= -\frac{i}{2m}\left\{ p^{\mu_1} X^{\{\mu_2\mu_3 \dots \mu_{n+1}\}} - p^{\mu_2} X^{\{\mu_1\mu_3 \dots \mu_{n+1}\}} \right\} \qquad \text{(IV.3}$$

entonces todas las componentes de $X^{\{\mu_1 \dots \mu_n\}}$ y $X^{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3 \dots \mu_{n+1}\}}$ se expresan en función de $X^{\{k_1 \dots k_n\}}$ y $X^{[ok_2]\{k_3 \dots k_{n+1}\}}$ y estos tensores cumplen las siguientes ecuaciones:

$$p_o\, X^{\{k_1 \dots k_n\}} = \omega(\vec{p})\, M^{k_1}{}_j\, X^{[oj]\{k_2 \dots k_n\}} \qquad \text{(IV.34}$$

$$p^o\, X^{[ok_1]\{k_2 \dots k_n\}} = \omega(\vec{p})(M^{-1})^{k_1}{}_j\, X^{jk_2 \dots k_n} \qquad \text{(IV.35}$$

y las condiciones auxiliares

$$(M^{-1})_{jk}\, X^{\{jkk_3 \dots k_n\}} = 0 \qquad \text{(IV.36}$$

$$M^{k_1}{}_l\, X^{[ol]\{k_2k_3 \dots k_n\}} = M^{k_2}{}_l\, X^{[ol]\{k_1k_3 \dots k_n\}} \qquad \text{(IV.37}$$

Demostración:

Como $X^{\{\mu_1\dots\mu_n\}}$ es de trazas nulas,

$$X^{ook_3\dots k_n} = -X^{j}{}_{j}{}^{k_3\dots k_n}$$

$$X^{ooook_5\dots k_n} = X^{j_1j_2}{}_{j_1j_2}{}^{k_5\dots k_n}$$

etc.

En general

$$X^{o\dots ok_{2r+1}\dots k_n} = (-1)^r X^{j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+1}\dots k_n} \qquad \text{(IV.38)}$$

Se tiene además $X^{\{\mu_1\dots\mu_n\}} = \frac{2i}{m} p_\mu X^{[\mu\mu_1]\{\mu_2\dots\mu_n\}}$ como consecuencia de (IV.31,32,33); si el número de índices 0 es impar:

$$X^{ok_2\dots k_n} = \frac{2i}{m} p_\mu X^{[\mu o]\{k_2\dots k_n\}} = -\frac{2i}{m} p_k X^{[ok]\{k_2\dots k_n\}}$$

$$X^{oook_4\dots k_n} = -X^{oj}{}_{j}{}^{k_4\dots k_n} = \frac{2i}{m} p_k X^{[ok]\{j}{}_{j}{}^{k_4\dots k_n\}} \qquad \text{etc...}$$

en general:

$$X^{o\dots ok_{2r+2}\dots k_n} = X^{j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{ok_{2r+2}\dots k_n}(-1)^r =$$

$$= (-1)^r \left(\frac{-2i}{m}\right) p_k X^{[ok]\{j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+2}\dots k_n\}} \qquad \text{(IV.39)}$$

Las componentes del otro tensor se expresan de formas similares según el número de índices = 0 que tengan, usando la condición de trazas nulas y la relación (IV.33) y:

$$X^{[\mu_1\mu_2]\{\mu_3\mu_4\cdots\mu_{n+1}\}} + X^{[\mu_1\mu_3]\{\mu_2\mu_4\cdots\mu_{n+1}\}} + X^{[\mu_3\mu_2]\{\mu_1\mu_4\cdots\mu_{n+1}\}} = 0$$

Entonces

$$X^{[k_1k_2]\{0k_4\cdots k_{n+1}\}} = -X^{[0k_1]\{k_2k_4\cdots k_{n+1}\}} + X^{[0k_2]\{k_1k_4\cdots k_{n+1}\}}$$

$$X^{[0k_2]\{00k_5\cdots k_{n+1}\}} = -X^{[0k_2]\{j}{}_{j}{}^{k_5\cdots k_{n+1}\}}$$

$$X^{[k_1k_2]\{k_3\cdots k_{n+1}\}} = -\frac{i}{2m}\left\{p^{k_1}X^{\{k_2k_3\cdots k_{n+1}\}} - p^{k_2}X^{\{k_1k_3\cdots k_{n+1}\}}\right\}$$

$$X^{[k_1k_2]\{00k_5\cdots k_{n+1}\}} = -\frac{i}{2m}\left\{p^{k_1}X^{\{k_200k_5\cdots k_{n+1}\}} - p^{k_2}X^{\{k_100k_5\cdots k_{n+1}\}}\right\} =$$

$$= -\frac{i}{2m}\left\{p^{k_1}X_{j}{}^{jk_2k_5\cdots k_{n+1}} - p^{k_2}X_{j}{}^{jk_1k_5\cdots k_{n+1}}\right\}$$

$$X^{[0k_2]\{0k_4\cdots k_{n+1}\}} = -\frac{i}{2m}\left\{-p_k X^{\{kk_2k_4\cdots k_{n+1}\}} + p^{k_2}X_{j}{}^{jk_4\cdots k_{n+1}}\right\}$$

Es decir, cuando el número de índices es par:

$$X^{[0k_2]\{0\cdots0k_{2r+4}\cdots k_{n+1}\}} = (-1)^r\frac{i}{2m}\left\{p_\ell X^{j_1\cdots j_r}{}_{j_1\cdots j_r}{}^{k_2k_{2r+4}\cdots k_{n+1}} - \right.$$
$$\left. - p^{k_2}X^{j_1\cdots j_{r+1}}{}_{j_1\cdots j_{r+1}}{}^{k_{2r+4}\cdots k_{n+1}}\right\} \qquad \text{(IV.40)}$$

y si es impar

$$X^{[0k_2]\{0\cdots0k_{2r+3}\cdots k_{n+1}\}} = -(-1)^r X^{[0k_2]\{j_1\cdots j_r}{}_{j_1\cdots j_r}{}^{k_{2r+3}\cdots k_{n+1}\}} \qquad \text{(IV.41)}$$

finalmente

$$X^{[k_1k_2]\{000k_6\dots k_{n+1}\}} = - X^{[k_1k_2]\{0j}{}_{j}{}^{k_6\dots k_{n+1}\}} =$$

$$= -\left\{ - X^{[0k_1]\{k_2 j}{}_{j}{}^{k_6\dots k_{n+1}\}} + X^{[0k_1]\{k_1 j}{}_{j}{}^{k_6\dots k_{n+1}\}} \right\}$$

es decir, si el número de índices 0 es impar:

$$X^{[k_1k_2]\{0\dots 0 k_{2r+4}\dots k_{n+1}\}} = (-1)^r \left\{ - X^{[0k_1]\{j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+4}\dots k_{n+1}\}} + \right.$$

$$\left. + X^{[0k_1]\{k_1 j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+4}\dots k_{n+1}\}} \right\} \tag{IV.42}$$

y si es par:

$$X^{[k_1k_2]\{0\dots 0 k_{2r+3}\dots k_{n+1}\}} = (-1)^r \left(\frac{-i}{2m}\right) \left\{ p^{k_2} X^{\{k_1 j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+3}\dots k_{n+1}\}} - \right.$$

$$\left. - p^{k_1} X^{\{k_2 j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+3}\dots k_{n+1}\}} \right\} \tag{IV.43}$$

En resumen, las fórmulas obtenidas son (r varía desde 0 hasta el último índice posible):

$$X^{\{0\dots 0 k_{2r+1}\dots k_n\}} = (-1)^r X^{j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+1}\dots k_n} \tag{IV.38}$$

$$X^{\{0\dots 0 k_{2r+2}\dots k_n\}} = (-1)^r \left(\frac{-2i}{m}\right) p_\ell X^{[0\ell]\{j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+2}\dots k_n\}} \tag{IV.39}$$

$$X^{[0k_2]\{0\dots 0 k_{2r+3}\dots k_{n+1}\}} = -(-1)^r X^{[0k_2]\{j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+3}\dots k_{n+1}\}} \tag{IV.41}$$

$$X^{[0k_2]\{0\dots 0 k_{2r+4}\dots k_{n+1}\}} = (-1)^r \frac{i}{2m} \left\{ p_\ell X^{\{\ell k_2 j_1\dots j_r}{}_{j_1\dots j_r}{}^{k_{2r+4}\dots k_{n+1}\}} - \right.$$

$$\left. - p^{k_2} X^{\{j_1\dots j_{r+1}}{}_{j_1\dots j_{r+1}}{}^{k_{2r+4}\dots k_{n+1}\}} \right\} \tag{IV.40}$$

$$X^{[k_1k_2]\{0\ldots 0\, k_{2r+4}\ldots k_{n+1}\}} = (-1)^r \Big\{ - X^{[0k_1]\{k_2 j_1\ldots j_r}{}_{j_1\ldots j_r}{}^{k_{2r+4}\ldots k_{n+1}\}} +$$

$$+ X^{[0k_2]\{k_1 j_1\ldots j_r}{}_{j_1\ldots j_r}{}^{k_{2r+4}\ldots k_{n+1}\}} \Big\} \qquad \text{(IV.42}$$

$$X^{[k_1k_2]\{0\ldots 0\, k_{2r+3}\ldots k_{n+1}\}} = (-1)^r \left(\frac{-i}{2m}\right) \Big\{ p^{k_1} X^{\{k_2 j_1\ldots j_r}{}_{j_1\ldots j_r}{}^{k_{2r+3}\ldots k_{n+1}\}} -$$

$$- p^{k_2} X^{\{k_1 j_1\ldots j_r}{}_{j_1\ldots j_r}{}^{k_{2r+3}\ldots k_{n+1}\}} \Big\} \qquad \text{(IV.43)}$$

Las relaciones (IV.38,41,42) son algebraicas y vienen dadas por las condiciones de simetría de los tensores. (IV.39,40,43) son ecuaciones diferenciales que se obtienen de las ecuaciones BW.

Las ecuaciones que verifican $X^{\{k_1\ldots k_n\}}$ y $X^{[0k_1]\{k_1\ldots k_{n+1}\}}$ son de (IV.33):

$$X^{[0k_1]\{k_1\ldots k_{n+1}\}} = -\frac{i}{2m}\Big\{ p^0 X^{\{k_1k_3\ldots k_{n+1}\}} - p^{k_2} X^{\{0k_3\ldots k_{n+1}\}} \Big\}$$

y aplicando (IV.39) con r = 0

$$= -\frac{i}{2m}\Big\{ p^0 X^{\{k_2k_3\ldots k_{n+1}\}} + \frac{2i}{m} p^{k_2} p_l X^{[0l]\{k_3\ldots k_{n+1}\}} \Big\} .$$

luego:

$$p^0 X^{\{k_1\ldots k_n\}} = \frac{2i}{m}\Big\{ m^2 \delta^{k_1}{}_j - p^{k_1} p_j \Big\} X^{[0j]\{k_2\ldots k_n\}} \qquad \text{(IV.34)}$$

Si ahora aplicamos p^0 a la ecuación (IV.33):

$$p^0 X^{[0k_1]\{k_2\dots k_n\}} = -\frac{i}{2m}\left\{(p^0)^2 X^{\{k_1\dots k_n\}} - p^{k_1} p^0 X^{\{0k_2\dots k_n\}}\right\} =$$

$$= -\frac{i}{2m}\left(\omega(\vec{p})^2 \delta^{k_1}{}_j - p^{k_1} p_j\right) X^{\{j k_2\dots k_n\}} \qquad \text{(IV.35)}$$

usando (IV.31,32).

En forma matricial

$$p^0 \begin{pmatrix} X^{\{k_1\dots k_n\}} \\ X^{[0k_1]\{k_2\dots k_n\}} \end{pmatrix} = \omega(\vec{p})\delta^{k_1}{}_{k_1'}\dots\delta^{k_n}{}_{k_n'} \begin{pmatrix} 0 & M^{k_1}{}_{k_1'} \\ (M^{-1})^{k_1}{}_{k_1'} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\{k_1'\dots k_n'\}} \\ X^{[0k_1']\{k_2'\dots k_n'\}} \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.44)}$$

las condiciones auxiliares son:

i) para $X^{\{k_1\dots k_n\}}$

$$p_\mu X^{\{\mu 0 k_3\dots k_n\}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_0 X^{\{00k_3\dots k_n\}} = -p_j X^{\{0jk_3\dots k_n\}}$$

y operando con p^0:

$$(p^0)^2 X^{\{00k_3\dots k_n\}} = -(p^0)^2 X^{\{j}{}_j{}^{k_3\dots k_n\}} = -p_j p_0 X^{\{0jk_3\dots k_n\}}$$

$$= -p_j p_l X^{\{jlk_3\dots k_n\}}$$

luego

$$(M^{-1})_{jl}\, X^{\{jlk_3\dots k_n\}} = 0 \qquad \text{(IV.36)}$$

ii) para $X^{[0k_1]\{k_2\dots k_n\}}$

de la ecuación (IV.34) y la simetría de $X^{\{k_1\dots k_n\}}$ se deduce:

$$M^{k_1}{}_j X^{[0j]\{k_2k_3\dots k_n\}} = M^{k_2}{}_j X^{[0j]\{k_1k_3\dots k_n\}} \qquad \text{(IV.37)}$$

Veamos como el número de componentes es el adecuado:

El de $X^{\{k_1 \dots k_n\}}$ era: $\begin{pmatrix} 3+n-1 \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$

El número de condiciones de (IV.36) es

$$\begin{pmatrix} n-2+3-1 \\ n-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

la diferencia es 2n+1, n es el spin.

Igual ocurre con el otro tensor:

$X^{[ok_1]\{k_1 \dots k_n\}}$ tiene $3 \times \begin{pmatrix} n-1+3-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}n(n+1)$ componentes. Pero $X^{[\mu_1\nu]}{}_{\nu}{}^{\mu_4 \dots \mu_{n+1}} = 0 \Longrightarrow X^{[ok]}{}_{k}{}^{k_4 \dots k_{n+1}} = 0$ que son $\begin{pmatrix} n-2+3-1 \\ n-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}n(n-1)$ condiciones.

Las condiciones de (IV.37), aseguran la simetría de $M^{k_1}{}_j X^{[oj]\{k_1 \dots k_n\}}$ en todos sus índices, luego el número de componentes es $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Restando las condiciones de traza nula

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n-1) = 2n+1$$

Haciendo como en spin = 1 la transformación

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} A & AM \\ -DM^{-1} & D \end{pmatrix} \qquad \text{(IV.18}$$

$$\psi_{+}^{k_1\ldots k_n} = A^{k_1}{}_{j}\left(X^{\{j k_2\ldots k_n\}} + M^{j}{}_{l}\, X^{[0l]\{k_2\ldots k_n\}}\right)$$

$$\psi_{-}^{k_1\ldots k_n} = D^{k_1}{}_{j}\left(-(M^{-1})^{j}{}_{l}\, X^{\{l k_2\ldots k_n\}} + X^{[0j]\{k_2\ldots k_n\}}\right)$$

escogiendo 2A = 1, 2D = -M

$$\psi_{\pm}^{k_1\ldots k_n} = \frac{1}{2}\left\{ X^{\{k_1\ldots k_n\}} \pm M^{k_1}{}_{j}\, X^{[0j]\{k_2\ldots k_n\}}\right\}$$

Estos dos tensores $\psi_{\pm}$ son simétricos como consecuencia inmediata de las condiciones auxiliares (IV.37). Sin embargo no tienen traza nula. Las ecuaciones son

$$p^0\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} = \omega(\vec{p})\,\sigma_3\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}$$

Si $p^0 = +\omega(\vec{p})$ la solución es $\psi = \begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X^{\{k_1\ldots k_n\}}\\ 0\end{pmatrix}$

y si $p^0 = -\omega(\vec{p})$ la solución es $\psi = \begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ X^{\{k_1\ldots k_n\}}\end{pmatrix}$

pues $X^{\{k_1\ldots k_n\}} = \pm M^{k_1}{}_{j}\, X^{[0j]\{k_2\ldots k_n\}}$ si $p^0 = \pm\omega(\vec{p})$.

Las condiciones subsidiarias para $\psi_{\pm}$ nos dan:

$(M^{-1})_{jl}\,\psi_{\pm}^{\{j\}l k_3\ldots k_n\}} = 0$, como se obtiene de sustituir $\psi_{\pm}$ por su expresión .

Si hubiéramos escogido $A = \frac{1}{2} M^{-1}, D = \frac{1}{2}$, las nuevas funciones hubieran sido:

$$\phi_{\pm}^{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{2} \left\{ X^{[0k_1]\{k_2 \dots k_n\}} \pm (M^{-1})^{k_1}{}_{j} \, X^{\{j k_2 \dots k_n\}} \right\} \qquad \text{(IV.45}$$

que tienen traza nula , pero solo es simétrico en $\{k_1 \dots k_n\}$

A partir de $X^{\{k_1 \dots k_n\}}$ y $X^{[0k_1]\{k_2 \dots k_n\}}$ podemos construir tensores irreducibles bajo el grupo de rotaciones y que por tanto van asociados a un solo spin. Así en s = 2,

$$Y^{ij} = X^{ij} - \frac{1}{3} g^{ij} X^{k}{}_{k} = X^{ij} + \frac{1}{3\omega(\vec{p})^2} g^{ij} p_k p_l X^{kl}$$

(de la relación $(M^{-1})_{kl} X^{kl} = 0$) .

Y^{ij} es un tensor de traza nula. Además

$$Z^{ij} = M^{i}{}_{k} X^{[0k]j} - \frac{1}{3} g^{ij} M_{lk} X^{[0k]l}$$

es un tensor simétrico y de traza nula. Es inmediato comprobar que la ecuaciones que verifican Y^{ij} y Z^{ij} son:

$$p^0 Y^{ij} = \omega(\vec{p}) Z^{ij}$$
$$p^0 Z^{ij} = \omega(\vec{p}) Y^{ij}$$

Para cualquier otro spin se pueden hacer las mismas construcciones aunque los cálculos son más complicados.

4. El caso de spin semientero.

a) La ecuación de Dirac, $(\gamma_\mu p^\mu - m)\varphi = 0$ describe partícu las de spin $\frac{1}{2}$ y masa m usando como función de ondas un bispinor φ
El número de componentes es 2+2 que es el adecuado para estudiar soluciones de energía positiva y negativa.

Ya en spin 3/2, el formalismo de Rarita-Schwinger usa una función de 16 componentes, necesitando en principio únicamente 4+4.

φ^α_μ es un tensor-bispinor que verifica

$$(\gamma p - m)\varphi^\mu = 0 \qquad \text{(IV.46)}$$

$$\gamma^\mu \varphi_\mu = 0 \qquad \text{(IV.47)}$$

φ^0 se puede expresar en función de las demás componentes (de (IV.47))

$$\varphi^0 = -\gamma^0\gamma_k\varphi^k \qquad \text{(IV.48)}$$

Sin embargo, el número de componentes de φ^k es todavía excesivo, 12. Como hemos estudiado ya, el tensor-bispinor

$$\varphi_{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m}\left(p_\mu\varphi_\nu - p_\nu\varphi_\mu\right)$$

aparece en el desarrollo del bispinor $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ en la ecuación de BW. Usando este tensor podríamos reproducir los resultados obtenidos en el párrafo 3 para spin entero. Sin embargo, no lo haremos así, y en su lugar obtendremos unos operadores H en las primeras derivadas espaciales (en el caso de spin entero eran derivadas de 2° orden) y condiciones auxiliares, que aseguren la unicidad del spin.

Las ecuaciones:

$$(\gamma p - m)\varphi^k = 0$$

$$\varphi^0 = -\gamma^0\gamma_k\varphi^k$$

no llevan a la ecuación de Rarita-Schwinger (IV.46,49).

En efecto, $(\gamma p - m)\varphi^0$ no tienen porque ser cero. Imponiendo que lo sea,

$$(\gamma p - m)\varphi^0 = -(\gamma p - m)\gamma^0\gamma_k\varphi^k =$$

$$= -\gamma^0\gamma_k(\gamma p - m)\varphi^k - 2\gamma^0(\gamma p)\gamma_k\varphi^k + 2\gamma^0 p_k\varphi^k = 0$$

y por $(\gamma p - m)\varphi^k = 0 \Rightarrow$

$$(\gamma_k p^k)(\gamma_j\varphi^j) - p_k\varphi^k = 0 \qquad \text{(IV.49)}$$

entonces

$$p^0\varphi^k = \gamma^0(-\gamma_j p^j + m)\varphi^k \qquad \text{(IV.50)}$$

$$p_k\varphi^k = (\gamma_k p^k)(\gamma_j\varphi^j) \qquad \text{(IV.49)}$$

con

$$\varphi^0 = -\gamma^0\gamma_k\varphi^k \qquad \text{(IV.48)}$$

es un sistema de ecuaciones equivalentes a las de Rarita-Schwinger para spin 3/2. (IV.50) es una ecuación de evolución y (IV.49) una condición subsidiaria en la que no aparecen derivadas temporales.

El número de componentes es el adecuado. φ^k tiene 12 componentes y (IV.49) son 4 ecuaciones: 12-4 = 8.

Es sencillo comprobar que las ecuaciones (IV.48,49,50) llevan a las de Rarita-Schwinger sin más que repetir los pasos dados en orden inverso (lo único a comprobar es $(\gamma p - m)\varphi^0 = 0$).

El sistema se puede escribir así:

$$p^0 \varphi^k = H \varphi^k \qquad \text{(IV.51)}$$

donde H es el hamiltoniano de Dirac

$$H = \gamma^0 \vec{\gamma} \vec{p} + m\gamma^0 \qquad \text{(IV.52)}$$

que se puede diagonalizar usando la transformación de Foldy-Wouthuysen.

b) Estudiemos ahora el siguiente caso s = 5/2. Las ecuaciones R-S son ahora:

$$(\gamma p - m)\varphi^{\mu\nu} = 0$$

$$\gamma_\nu \varphi^{\mu\nu} = 0$$

donde $\varphi^{\mu\nu}$ es simétrico y de traza nulas en sus índices tensoriales.

Escojamos como componentes independientes φ^{jk} , que son 24.

φ^{00} viene fijado por la condición de traza nula y φ^{0k} por $\gamma_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0$. En efecto:

$$\varphi^{\mu}{}_{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi^{00} = -\varphi^{k}{}_{k} \qquad \text{(IV.53)}$$

$$\gamma_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi^{ok} = -\gamma^o \gamma_j \varphi^{jk} \qquad (IV.54$$

(la condición $\gamma_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0$ $=\!=\!=$ $\varphi^{oo} = -\gamma^o \gamma_j \varphi^{oj}$ y sustituyendo φ^{oj}, $\varphi^{oo} = -\gamma_j \gamma_\ell \varphi^{\ell j} = -\varphi^k{}_k$)

Las ecuaciones para φ^{jk} son:

$$(\gamma p - m)\varphi^{jk} = 0$$

φ^{oo} cumple la ecuación de Dirac, pues $\varphi^{oo} = -\varphi^k{}_k$ para que la verifique φ^{oj}:

$$(\gamma p - m)\varphi^{oj} = -(\gamma p - m)\gamma_o \gamma_k \varphi^{kj} \text{ y como en a),}$$

$$(\gamma_\ell p^\ell)(\gamma_k \varphi^{kj}) = p_k \varphi^{kj}$$

y las ecuaciones son como antes

$$p^o \varphi^{jk} = \gamma^o(-\gamma_k p^k + m)\varphi^{jk} \qquad (IV.55)$$

$$\{p_k - (\gamma_j p^j)\gamma_k\}\varphi^{k\ell} = 0 \qquad (IV.56)$$

Asimismo, el número de componentes independientes de φ^{jk} es el adecuado: 24-12 = 12, pues el número de condiciones (IV.56) es 12.

En el caso general, tenemos:

<u>Proposición 9</u>. Dadas las ecuaciones de Rarita-Schwinger para spin n + 1/2

$$(\gamma p - m)\varphi^{\{\mu_1 \dots \mu_n\}} = 0 \qquad (IV.57)$$

$$\gamma_\mu \varphi^{\mu\mu_1 \dots \mu_n} = 0 \qquad (IV.58)$$

$\varphi^{\{\mu_1\ldots\mu_n\}}$ tensor-bispinor, totalmente simétrico y de trazas nulas en sus índices tensoriales, se pueden poner todas las componentes de $\varphi^{\{\mu_1\ldots\mu_n\}}$ en función de $\varphi^{\{k_1\ldots k_n\}}$, verificando este último las ecuaciones

$$p^0\varphi^{\{k_1\ldots k_n\}} = \gamma^0(-\gamma^j p_j + m)\,\varphi^{\{k_1\ldots k_n\}} \tag{IV.59}$$

$$\{p_k - (\gamma_j p^j)\gamma_k\}\,\varphi^{\{k k_2\ldots k_n\}} = 0 \tag{IV.60}$$

Demostración:

Ya hemos visto como en s = 3/2, 5/2, $\varphi^{\{\mu_1\ldots\mu_n\}}$ eran función de $\varphi^{\{k_1\ldots k_n\}}$. En s = 7/2

de $\qquad \varphi^{\mu}{}_{\mu\rho} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^{00\rho} = -\varphi^{k}{}_{k}{}^{\rho}$

y de $\qquad \gamma_\mu\varphi^{\mu\nu\rho} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^{0\nu\rho} = -\gamma^0\gamma_k\varphi^{k\nu\rho}$

luego $\qquad \varphi^{00j} = -\varphi^{k}{}_{k}{}^{j}$

$$\varphi^{000} = -\gamma^0\gamma_k\varphi^{k00} = \gamma^0\gamma_k\varphi^{kj}{}_{j}$$

$$\varphi^{0j\ell} = -\gamma^0\gamma_k\varphi^{kj\ell}$$

en general si el número de índices 0 es par

$$\varphi^{0\ldots0\,k_{2r+1}\ldots k_n} = (-1)^r\,\varphi^{j_1\ldots j_r}{}_{j_1\ldots j_r}{}^{k_{2r+1}\ldots k_n} \tag{IV.61}$$

si es impar

$$\varphi^{0\ldots 0 k_{2r+1}\ldots k_n} = -(-1)^r \gamma^0 \gamma_k \varphi^{k j_1 \ldots j_r}{}_{j_1\ldots j_r}{}^{k_{2r+2}\ldots k_n} \qquad \text{(IV.62)}$$

con r variando desde 0 hasta el último índice posible.

La condición auxiliar (IV.60) se obtiene de exigir que $\varphi^{0\ldots 0 k_r \ldots k_n}$ cumplan la ecuación de Dirac. Las que tienen un número par de 0 la cumplen de manera inmediata. Las que tienen un número impar:

$$(\gamma p - m)\gamma^0 \gamma_k \varphi^{k j_1\ldots j_r}{}_{j_1\ldots j_r}{}^{k_{2r+2}\ldots k_n} = 0$$

es decir, tanto φ como sus trazas deben verificar (IV.60). Pero si lo verifica, sus trazas también.

El número de componentes independientes es:

$$\varphi^{\{k_1\ldots k_n\}} \quad \text{tiene } 4 \times \binom{n+3-1}{n} = 2(n+2)(n+1) \text{ componentes}$$

y el número de ecuaciones de (IV.60) es

$$4 \times \binom{n-1+3-1}{n-1} = 2(n+1)n,$$

luego el número de independientes es:

$$2(n+1)(n+2) - 2(n+1)n = 4(n+1)$$

como el spin es $s = n + \frac{1}{2}$, $= 2(2s+1)$.

CONCLUSIONES

Establecemos aquí los principales resultados a los que nos ha llevado nuestro estudio.

1. La descripción de campos de spin arbitrario mediante bispinors, permite el uso de técnicas asociadas al grupo conforme SU(2,2), lo cual, prescindiendo de posibles interpretaciones físicas, facilita los cálculos y la comprensión de los resultados.

2. Las ecuaciones BW para spin semientero son equivalentes a las ecuaciones de Rarita-Schwinger, relación que expresan las fórmulas obtenidas en el apartado 1 del capítulo II. De igual forma las ecuaciones para spin entero son equivalentes a las formulaciones de Fierz-Pauli en forma tensorial, siendo posible expresar todos los tensores en función del tensor totalmente simétrico que aparece en cada desarrollo.

3. Las representaciones asociadas a todos los tensores y tensor-bispinors, que aparecen en las expresiones de bispinors en la base estudiada en el capítulo I, así como las restricciones que las simetrías imponen sobre ellas quedan completamente determinadas en el capítulo II.

4. Similares resultados a los señalados en los puntos 2 y 3 se obtienen para bispinors de simetrías mixtas. Al aplicar las ecuaciones BW a uno de estos bispinors la función de ondas lleva asociado un único spin, que es el mismo que se obtendría si se consideran únicamente los índices totalmente simétricos del bispinor. Productos tensoriales de estas características se usan por ejemplo, por Guralnik y Kibble (1965) y más recientemente por Larsen y Repko (1978) para escribir lagrangianos asociados a las ecuaciones BW, al menos hasta spin igual a 2.

5. Por último se escriben ecuaciones de evolución equivalentes a las de BW en la notación de Fierz-Pauli y Rarita-Schwinger. En ella se comprueba una vez más, como a partir de spin 1 no es posible, si no es introduciendo condiciones auxiliares, escribir una ecuación de ondas. En el caso de spin 3/2 esto se puede aún hacer, mediante la ecuación dada por Rarita-Schwinger (1941), pero para spin superior, no es posible. Por ejemplo, Kawakami y Kamefuchi (1967) demuestran la imposibilidad, ya señalada por Kusaka y Weinberg (ver Fronsdal, 1958), y reencontrada por Berends et al. (1979) de escribir un lagrangiano para spin 5/2 con un campo $\varphi^{\alpha}_{\mu\nu}$ y solo derivadas primeras. El resultado equivalente es la necesidad de introducir campos auxiliares que permitan usar lagrangianos con derivadas primeras.

6. Parece pues interesante un estudio, análogo al hecho por Fronsdal (1958), de los proyectores asociados a los campos bispinor, teniendo en cuenta el uso extensivo que de los mismos se ha hecho por

ejemplo para las ecuaciones de Rarita-Schwinger (Berends et al. 1979) Un trabajo de este tipo podría de alguna forma desarrollar una teoría lagrangiana para campos bispinor sin tener que recurrir a formulaciones tensoriales o tensor-bispinor.

Asimismo, el uso de estas ecuaciones en teorías de supersimetría, hace que su estudio detallado siga siendo, aún en el caso simple de no interacción, necesario para la comprensión clara de los fenómenos físicos.

APENDICE 1

Cálculos explícitos de simetrías y ecuaciones de Bargmann-Wigner para bispinors de diagramas de Young $[2]$, $[1^2]$, $[3]$, $[2,1]$, $[1^3]$, $[4]$ $[3,1]$, $[2^2]$, $[2,1^2]$, $[1^4]$, $[5]$, $[6]$ usados en las demostraciones.

1. $[2]$ (ver Lurié 1968, Takahashi 1969, Salam 1965)

$$\psi^{\{\alpha\beta\}} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta} X_\mu + (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta} X_{[\mu\nu]} \tag{1.1}$$

número de componentes 10 = 4 + 6.

Aplicando BW al índice α

$$\{(\gamma p - m)\psi\}^{\alpha\beta} = [(\gamma p - m)\gamma^\mu C^{-1}]^{\alpha\beta} X_\mu + [(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu} C^{-1}]^{\alpha\beta} X_{[\mu\nu]} = 0 \tag{1.2}$$

Contrayendo con

a) $C_{\beta\alpha}$

$$tr[(\gamma p - m)\gamma^\mu] X_\mu + tr[(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu}] X_{[\mu\nu]} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_\mu X^\mu = 0 \tag{1.3}$$

b) $(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}$

$$tr[(\gamma p - m)\gamma^\mu\gamma^5\gamma_\lambda] X_\mu + tr[(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu}\gamma^5\gamma_\lambda] X_{[\mu\nu]} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p^\rho \epsilon_{\lambda\rho\mu\nu} X^{[\mu\nu]} = 0 \tag{1.4}$$

c) $(C\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}$

$$tr[(\gamma p - m)\gamma^\mu \gamma_\lambda] X_\mu + tr[(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu}\gamma_\lambda] X_{[\mu\nu]} = 0$$

$$\Rightarrow -m X^\mu + 2i p_\nu X^{[\nu\mu]} = 0$$

$$\Rightarrow X^\mu = \frac{2i}{m} p_\nu X^{[\nu\mu]} \qquad (1.5)$$

d) $(C\sigma^{\rho\lambda})_{\beta\alpha}$

$$tr[(\gamma p - m)\gamma^\mu \sigma_{\rho\lambda}] X_\mu + tr[(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}] X_{[\mu\nu]} = 0$$

$$\Rightarrow i(p_\mu X_\nu - p_\nu X_\mu) - 2m X_{[\mu\nu]} = 0$$

$$\Rightarrow X^{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m}(p^\mu X^\nu - p^\nu X^\mu) \qquad (1.6)$$

la contración con $(C\gamma^5)_{\beta\alpha}$ da 0 = 0.

Es inmèdiato comprobar que las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$(p^2 - m^2) X^\mu = 0$$

$$p_\mu X^\mu = 0 \qquad \text{campo de spin 1.}$$

y
$$X^{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m}(p^\mu X^\nu - p^\nu X^\mu)$$

Por tanto:

$$\psi^{\{\alpha\beta\}} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta} X_\mu + (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta} X_{[\mu\nu]} =$$

$$= (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta} X_\mu - \frac{i}{2m}(\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta}(p_\mu X_\nu - p_\nu X_\mu) =$$

$$= (\gamma^{\mu} C^{-1})^{\alpha\beta} X_{\mu} + \frac{1}{m}[(\gamma p)\gamma^{\nu} C^{-1}]^{\alpha\beta} X_{\nu} - \frac{1}{m}(C^{-1})^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} p_{\mu} X_{\nu} =$$

$$= \left\{ \frac{\gamma p + m}{m} \gamma^{\mu} C^{-1} \right\}^{\alpha\beta} X_{\mu} \qquad (1.7)$$

2. $[1^2]$ (ver Salam 1965)

$$\psi^{[\alpha\beta]} = (C^{-1})^{\alpha\beta} X + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} X_5 + (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} X_{5\mu} \qquad (1.8)$$

número de componentes: 1 + 1 + 4 = 6.

Ecuaciones BW:

$$(\gamma p - m)^{\alpha}{}_{\eta} \psi^{\eta\beta} = [(\gamma p - m) C^{-1}]^{\alpha\beta} X + [(\gamma p - m)\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta} X_5 +$$

$$+ [(\gamma p - m)\gamma_{\mu}\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta} X_5^{\mu} = 0 \qquad (1.9)$$

Contrayendo con:

a) $C_{\beta\alpha}$ $\quad -4mX = 0 \Rightarrow X = 0$ (1.10)

b) $(C\gamma^5)_{\beta\alpha}$ $\quad m X_5 - p_{\mu} X_5^{\mu} = 0 \Rightarrow X_5 = \frac{1}{m} p_{\mu} X_5^{\mu}$ (1.11)

c) $(C\gamma^5\gamma_{\lambda})_{\beta\alpha}$ $\quad -p^{\lambda} X_5 + m X_5^{\lambda} = 0 \Rightarrow X_5^{\mu} = \frac{1}{m} p^{\mu} X_5$ (1.12)

d) $(C\sigma_{\lambda\rho})_{\beta\alpha}$ $\quad \epsilon_{\rho\mu\lambda\sigma} p^{\rho} X_5^{\mu} = 0$ (1.13)

Es decir, las ecuaciones son:

$$(p^2 - m^2) X_5 = 0$$

describe un campo de spin 0.

$$X = 0$$
$$X_5^{\mu} = \frac{1}{m} p^{\mu} X_5$$

y $$\psi^{[\alpha\beta]} = \left[(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} + (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} \frac{1}{m} p_\mu \right] \chi_5 =$$

$$= \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^5 C^{-1} \right]^{\alpha\beta} \chi_5 \qquad (1.14)$$

Nótese que la condición (1.4) se puede poner así:

$$p^\mu \, \chi^{[\nu\rho]} + p^\rho \chi^{[\mu\nu]} + p^\nu \chi^{[\rho\mu]} = 0$$

y la traza no nula de $p^\mu \chi^{[\nu\rho]}$ es proporcional a χ^μ. La condición (1.13) se puede escribir como:

$$p^\mu \chi^\nu_5 = p^\nu \chi^\mu_5$$

y multiplicando por p_μ :

$$p^2 \chi^\mu_5 = p^\mu p^\nu \chi_{5\nu}$$

es decir, $\chi^\mu_5 = \dfrac{p^\mu p_\nu}{p^2} \chi^\nu_5$ que es la condición que debe cumplir un tensor de rango 1 para representar spin 0.

3. [3] (ver Lurié, 1968, Salam, 1965, Kamefuchi , 1966)

$$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta} \varphi^\gamma_\mu + (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\alpha\beta} \varphi^\gamma_{[\mu\nu]} \qquad (1.15)$$

para que sea simétrico totalmente.

a) $$C_{\beta\gamma} \psi^{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \varphi_\mu + \sigma^{\mu\nu} \varphi_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (1.16)$$

b) $$(C\gamma^5)_{\beta\gamma} \psi^{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \varphi_\mu - \sigma^{\mu\nu} \varphi_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (1.17)$$

luego $$\gamma^{\mu}\varphi_{\mu} = \sigma^{\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (1.18)$$

c) $(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\beta\gamma}\,\psi^{\alpha\beta\gamma} = 0$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{5}\gamma_{\lambda}\varphi_{\mu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^{5}\gamma_{\lambda}\varphi_{[\mu\nu]} = 0$$

aplicando (1.18)

$$\varphi^{\mu} = 2i\,\gamma_{\nu}\varphi^{[\nu\mu]} \qquad (1.19)$$

es decir, como condiciones independientes: (1.18,19)

$$\varphi^{\mu} = 2i\,\gamma_{\nu}\varphi^{[\nu\mu]}$$

$$\sigma^{\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu]} = i\,\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\varphi_{[\mu\nu]} = 0$$

son pues 24 componentes ($\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu]}$) - 4 condiciones (1.18) = 20.

$\gamma^{\mu}\varphi_{\mu} = 0$ elimina las representaciones $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}) = \Delta$ de φ^{α}_{μ}. $\sigma^{\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu]} = 0$ elimina esas mismas representaciones.

$\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu]}$ se transformaba con:

$$\Delta \otimes [(1,0) \oplus (0,1)] = [(\tfrac{3}{2},0) \oplus (0,\tfrac{3}{2})] \oplus [(1,\tfrac{1}{2}) \oplus (\tfrac{1}{2},1)] \oplus \Delta$$

Ecuaciones BW. Aplicadas al primer índice:

$$(\gamma p - m)^{\alpha}{}_{\alpha'}\,\psi^{\alpha'\beta\gamma} = 0$$

$$[(\gamma p - m)\gamma^{\mu}C^{-1}]^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma}_{\mu} + [(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu}C^{-1}]^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma}_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (1.20)$$

es idéntica al caso [2] (salvo el índice γ). Así pues:

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m}\left(p_{\mu}\varphi^{\alpha}_{\nu} - p_{\nu}\varphi^{\alpha}_{\mu}\right) \tag{1.21}$$

$$p^{\mu}\varphi^{\alpha}_{\mu} = 0 \tag{1.22}$$

$$(p^2 - m^2)\varphi^{\alpha}_{\mu} = 0 \tag{1.23}$$

pero además se deben cumplir en el tercer índice:

$$(\gamma p - m)^{\gamma}{}_{\gamma'}\psi^{\alpha\beta\gamma'} = 0$$

luego $$(\gamma p - m)\varphi_{\mu} = 0 \tag{1.24}$$

Es decir, tenemos las ecuaciones

$$(\gamma p - m)^{\alpha}{}_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\mu} = 0 \tag{1.24}$$

$$(\gamma^{\mu})^{\alpha}{}_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}_{\mu} = 0 \tag{1.18}$$

campo de spin 3/2

$$\varphi^{\alpha}_{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m}\left[p_{\mu}\varphi^{\alpha}_{\nu} - p_{\nu}\varphi^{\alpha}_{\mu}\right] \tag{1.21}$$

Las demás ecuaciones son consecuencia de éstas.

$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ se puede escribir así

$$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\}} = \left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^{\mu}C^{-1}\right]^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma}_{\mu} \tag{1.25}$$

con $(\gamma p - m)\varphi_{\mu} = 0 \qquad \gamma_{\mu}\varphi^{\mu} = 0$

4. $[2,1]$ (ver por ejemplo Salam, 1969)

Supongamos la siguiente distribución de índices en el diagra_ ma de Young

$$\begin{matrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \end{matrix}$$

entonces $\psi^{[\alpha\beta]\gamma} = -\psi^{[\beta\alpha]\gamma}$

Para que ψ corresponda a este diagrama, se debe verificar:

$$Y\psi = k\psi$$

con Y = operador de Young asociado a $[2,1]$, Y = QP, P permutación asociada a las filas, Q, a las columnas.

En este caso:

$$P = e + (13)$$
$$Q = e - (12)$$

En el diagrama

$$\begin{matrix}1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}$$

y $k = 3$.

(en general (ver por ejemplo Boerner, 1969, Hamermesh, 1964). Si n es es el número de índices y f la dimensión de la representación del grupo simétrico S_n asociada a ese tablero de Young, se tiene:

$$K = \frac{n!}{f^{(m)}} \qquad f^{(m)} = n! \frac{\prod_{i<k} (l_i - l_k)}{\prod_{i=1}^{r} l_i!}$$

siendo $m = [m_1, m_2, \ldots, m_r]$ el nombre del diagrama y

$$l_1 = m_1 + r - 1$$
$$l_2 = m_2 + r - 2$$
$$\ldots$$
$$l_r = m_r$$

En $[2,1]$, n = 3, m = $[2,1]$ luego $l_1 = 3$, $l_2 = 1$.

$$k = \frac{n!}{f} = \frac{\prod_{i=1}^{2} l_i!}{\prod_{i<k}(l_i - l_k)} = 3 \quad)$$

entonces Y = QP = e - (12) + (13) - (132)

$$[Y\psi]^{\alpha\beta\gamma} = \psi^{\alpha\beta\gamma} - \psi^{\beta\alpha\gamma} + \psi^{\gamma\beta\alpha} - \psi^{\gamma\alpha\beta} = 3\psi^{\alpha\beta\gamma}$$

y como $$\psi^{\alpha\beta\gamma} = -\psi^{\beta\alpha\gamma} \qquad (1.26)$$

$$\Rightarrow \quad \psi^{[\alpha\beta]\gamma} + \psi^{[\beta\gamma]\alpha} + \psi^{[\gamma\alpha]\beta} = 0 \qquad (1.27)$$

(1.26,27) son las condiciones que debe cumplir $\psi^{[\alpha\beta]\gamma}$ para transformarse de acuerdo al diagrama $[2,1]$. Solo tenemos que aplicarlas a:

$$\psi^{[\alpha\beta]\gamma} = (C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi_5^{\gamma} + (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi_{5\mu}^{\gamma} \qquad (1.28)$$

(1.26) se cumple por construcción.

Contrayendo con $C_{\alpha\beta}$ la expresión (1.27)

$$C_{\alpha\beta}\psi^{[\alpha\beta]\gamma} + 2C_{\alpha\beta}\psi^{[\gamma\alpha]\beta} = 0 \qquad (1.29)$$

$$C_{\alpha\beta}(C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma} + C_{\alpha\beta}(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi_5^{\gamma} + C_{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi_{5\mu}^{\gamma} +$$

$$+ 2C_{\alpha\beta}(C^{-1})^{\gamma\alpha}\varphi^{\beta} + 2C_{\alpha\beta}(\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\alpha}\varphi_5^{\beta} + 2C_{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\alpha}\varphi_{5\mu}^{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi^{\alpha} = (\gamma^5\varphi_5)^{\alpha} - (\gamma^5\gamma^{\mu}\varphi_{5\mu})^{\alpha} \qquad (1.30)$$

Es fácil ver que $\psi^{[\alpha\beta]\gamma}$ con esta condición cumple la ecuación

(1.27). φ^{α}_{5} son 4 componentes y $\varphi^{\alpha}_{5\mu}$, 16, en total las 20 componententes independientes de $\psi^{[\alpha\beta]\gamma}$

Apliquemos ahora las ecuaciones BW.

i) al índice α

$$(\gamma p - m)^{\alpha}{}_{\alpha'}\, \psi^{[\alpha'\beta]\gamma} = 0$$

$$[(\gamma p - m) C^{-1}]^{\alpha\beta} \varphi^{\gamma} + [(\gamma p - m)\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta} \varphi^{\gamma}_{5} + [(\gamma p - m)\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta} \varphi^{\gamma}_{5\mu} = 0$$

(1.31)

Contrayendo con

a) $C_{\beta\alpha}$ $\qquad \varphi^{\alpha} = 0$ (1.32)

b) $(C\gamma^5)_{\beta\alpha}$ $\qquad \varphi^{\alpha}_{5} = \frac{p^{\mu}}{m} \varphi^{\alpha}_{5\mu}$ (1.33)

c) $(C\gamma^5\gamma_{\lambda})_{\beta\alpha}$ $\qquad \varphi^{\alpha}_{5\mu} = \frac{p_{\mu}}{m} \varphi^{\alpha}_{5}$ (1.34)

d) $(C\sigma_{\lambda\rho})_{\beta\alpha}$ $\qquad \epsilon_{\rho\mu\nu\lambda} p^{\rho} \varphi^{\alpha\mu}_{5} = 0 \Leftrightarrow p_{\mu} \varphi^{\alpha}_{5\nu} = p_{\nu} \varphi^{\alpha}_{5\mu}$ (1.35)

la otra contracción no da información (cuando esto ocurra o se repita alguna ecuación, no la incluiremos).

ii) al índice γ

$\Rightarrow$ φ^{α}_{5} y $\varphi^{\alpha}_{5\mu}$ cumplen la ecuación de Dirac. Así pues, las ecuaciones son:

$$(\gamma p - m)^{\alpha}{}_{\beta}\, \varphi^{\beta}_{5} = 0$$

describe un campo.de spin 1/2.

$$\varphi_{5\mu} = \frac{1}{m} p_\mu \varphi_5 \qquad (1.34)$$

$$\varphi = 0 \qquad (1.32)$$

y

$$\psi^{[\alpha\beta]\gamma} = (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} \varphi_5^\gamma + (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} \frac{1}{m} p_\mu \varphi_5^\gamma =$$

$$= \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha\beta} \varphi_5^\gamma \qquad (1.36)$$

5. $[1^3]$ (ver Guralnik, 1965)

$$\psi^{[\alpha\beta\gamma]} = (C^{-1})^{\alpha\beta} \varphi^\gamma + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} \varphi_5^\gamma + (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} \varphi_{5\mu}^\gamma \qquad (1.37)$$

para que sea antisimétrico en los tres índices:

a) $\psi^{\alpha\beta\gamma}(C\gamma_\lambda)_{\beta\gamma} = 0$

$$\gamma_\mu \varphi + \gamma^5 \gamma_\mu \varphi_5 + \gamma^\nu \gamma^5 \gamma_\mu \varphi_{5\nu} = 0$$

luego

$$\varphi = \gamma^5 \varphi_5 + \frac{1}{2} \gamma^5 \gamma^\mu \varphi_{5\mu} \qquad (1.38)$$

b) $\psi^{\alpha\beta\gamma}((C\sigma_{\lambda\rho})_{\beta\gamma} = 0$

$$\sigma_{\lambda\rho} \varphi + \gamma^5 \sigma_{\lambda\rho} \varphi_5 + \gamma^\mu \gamma^5 \sigma_{\lambda\rho} \varphi_{5\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = -\gamma^5 \varphi_5 \qquad (1.39)$$

ustituyendo en (1.38)

$$2\gamma_\lambda \varphi_5 = -\gamma_\lambda \gamma^\mu \varphi_{5\mu} + 2\varphi_{5\lambda}$$

en b) multiplicando por γ_λ

$$\gamma_\lambda \varphi^\mu \varphi_{5\mu} = 4\,\varphi_{5\lambda}$$

luego $$\varphi_{5\mu} = -\gamma_\mu \varphi_5 \qquad (1.40$$

En resumen, $\varphi_{5\mu}$ y φ se pueden expresar en función de φ_5 y:

$$\psi^{[\alpha\beta\gamma]} = -(C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^5\varphi_5)^\gamma + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}\varphi_5^\gamma - (\gamma^\mu\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma_\mu\varphi_5)^\gamma \qquad (1.41)$$

si ahora aplicamos las ecuaciones BW, al índice γ :

$$(\gamma p - m)\gamma^5\varphi_5 = 0 \qquad\qquad (\gamma p - m)\varphi_5 = 0$$

llevan a $\varphi_5 = 0$ y el bispinor $\psi^{[\alpha\beta\gamma]}$ se anula idénticamente.

6. [4] (Salam, 1965)

$$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^\nu C^{-1})^{\gamma\delta} X_{\mu\nu} + (\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^\rho C^{-1})^{\gamma\delta} X_{[\mu\nu]\rho} +$$
$$+ (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta}(\sigma^{\nu\rho}C^{-1})^{\gamma\delta} Y_{\mu[\nu\rho]} + (\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\alpha\beta}(\sigma^{\rho\lambda}C^{-1})^{\gamma\delta} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} \qquad (1.4$$

para conseguir que sea totalmente simétrico, basta imponer simetría en $\beta\gamma$

a) $$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}} C_{\beta\gamma} = 0$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu C^{-1} X_{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho C^{-1} X_{[\mu\nu]\rho} + \gamma^\mu\sigma^{\nu\rho}C^{-1} Y_{\mu[\nu\rho]} +$$
$$+ \sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}C^{-1} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.43)$$

b) $$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}}(C\gamma^5)_{\beta\gamma} = 0$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{5}\gamma^{\nu}C^{-1}X_{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^{5}\gamma^{\rho}C^{-1}X_{[\mu\nu]\rho} + \gamma^{\mu}\gamma^{5}\sigma^{\nu\rho}C^{-1}Y_{\mu[\nu\rho]} +$$
$$\sigma^{\mu\nu}\gamma^{5}\sigma^{\rho\lambda}C^{-1}X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.44)$$

c) $\psi^{\alpha\beta\gamma\delta}(C\gamma^{5}\gamma^{\tau})_{\beta\gamma} = 0$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{5}\gamma^{\tau}\gamma^{\nu}C^{-1}X_{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^{5}\gamma^{\tau}\gamma^{\rho}C^{-1}X_{[\mu\nu]\rho} +$$
$$+ \gamma^{\mu}\gamma^{5}\gamma^{\tau}\sigma^{\nu\rho}C^{-1}Y_{\mu[\nu\rho]} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^{5}\gamma^{\tau}\sigma^{\rho\lambda}C^{-1}X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.45)$$

multiplicando en (1.43) por C y en (1.44) por $C\gamma^{5}$ y sumando y restando ambas ecuaciones,

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}X_{\mu\nu} + \gamma^{\mu}\sigma^{\nu\rho}Y_{\mu[\nu\rho]} = 0 \qquad (1.46)$$
$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} + \sigma^{\mu\nu}\gamma^{\rho}X_{[\mu\nu]\rho} = 0 \qquad (1.47)$$

Como son sumas de elementos independientes del álgebra de Dirac, se tiene

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}X_{\mu\nu} = 0 \qquad (1.48)$$
$$\gamma^{\mu}\sigma^{\nu\rho}Y_{\mu[\nu\rho]} = 0 \qquad (1.49)$$
$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.50)$$
$$\sigma^{\mu\nu}\gamma^{\rho}X_{[\mu\nu]\rho} = 0 \qquad (1.51)$$

De igual forma en (1.45), multiplicando por $C\gamma^{5}$ y considerando la independencia lineal de los elementos que aparecen en la ecuación:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\tau}\gamma^{\nu}X_{\mu\nu} - \sigma^{\mu\nu}\gamma^{\tau}\sigma^{\rho\lambda}X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.52)$$
$$\sigma^{\mu\nu}\gamma^{\tau}\gamma^{\rho}X_{[\mu\nu]\rho} - \gamma^{\mu}\gamma^{\tau}\sigma^{\nu\rho}Y_{\mu[\nu\rho]} = 0 \qquad (1.53)$$

Cada una de estas seis ecuaciones (1.48 - 53) implican condiciones sobre los tensores X. Para extraerlas se cmultiplican por los elementos de una base del álgebra de Dirac, y se toman trazas. Por ejemplo por

$1\,,\ \gamma^{\mu}\,,\ \sigma^{\mu\lambda}\,,\ \gamma^{5}\gamma^{\mu}\,,\ \gamma^{5}.$

en (1.48)

1) $\quad X^{\mu}{}_{\mu} = 0$

$\sigma^{\mu\lambda}$) $\quad X^{\mu\nu} = X^{\nu\mu}$

en (1.49)

γ^{λ}) $\quad Y^{\mu}{}_{[\mu\nu]} = 0$

$\gamma^{\lambda}\gamma^{5}$) $\quad \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\, Y_{\mu[\nu\rho]} = 0 \Leftrightarrow Y_{\mu[\nu\rho]} + Y_{\nu[\rho\mu]} + Y_{\rho[\mu\nu]} = 0$

en (1.50) como en (1.49)

$$X_{[\mu\nu]}{}^{\nu} = 0$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{[\nu\rho]\lambda} = 0$$

en (1.51)

1) $\quad X^{[\mu\nu]}{}_{[\mu\nu]} = 0$

$\sigma^{\lambda\rho}$) $\quad X^{\mu\rho}{}_{\rho}{}^{\nu} = X^{\nu\rho}{}_{\rho}{}^{\mu}$

γ^{5}) $\quad \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\, X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0$

En (1.52, 53) podemos hacer alguna simplificación, usando las primeras ecuaciones.

En (1.53), usando (1.49) y (1.51)

$$\gamma_{\tau}\sigma^{\mu\nu}\gamma^{\rho} X_{[\mu\nu]\rho} + 2i\,\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} X_{[\mu\tau]\rho} - 2i\,\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} X_{[\tau\nu]\rho} +$$

$$+ \gamma_{\tau}\gamma^{\mu}\sigma^{\nu\rho}\, Y_{\mu[\nu\rho]} - 2\sigma^{\nu\rho}\, Y_{\tau[\nu\rho]} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma^\mu \gamma^\rho \left[2\, X_{[\mu\tau]\rho} - Y_{\tau[\mu\rho]} \right] = 0 \qquad (1.54)$$

(si hubiéramos conmutado γ^τ a la derecha, habríamos llegado a

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \left[X_{[\mu\rho]\tau} - 2\, Y_{\mu[\tau\rho]} \right] = 0$$

igual a (1.54) como veremos a continuación).
Contrayendo (1.54) con

$$\sigma^{\lambda\tau}) \qquad X^{[\mu\nu]\rho} = Y^{\rho[\mu\nu]}$$

Operando de forma análoga en (1.52)

$$-\gamma_\tau \gamma^\mu \gamma^\nu X_{\mu\nu} + 2\gamma^\nu X_{\tau\nu} - \gamma_\tau \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\lambda} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} -$$
$$- 2i\gamma^\mu \sigma^{\rho\lambda} X_{[\mu\tau][\rho\lambda]} + 2i\gamma^\nu \sigma^{\rho\lambda} X_{[\tau\nu][\rho\lambda]} = 0$$

y usando (1.48), (1.50)

$$\gamma^\nu X_{\tau\nu} - 2i\gamma^\mu \sigma^{\rho\lambda} X_{[\mu\tau][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.55)$$

si hubiéramos conmutado γ^τ a la derecha

$$\gamma^\nu X_{\nu\tau} + 2i\, \sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho X_{[\mu\nu][\rho\tau]} = 0 \qquad (1.56)$$

de (1.55) contrayendo con los elementos de la base:

$$\gamma^\lambda) \qquad X^{\mu\nu} = 4\, X^{\mu\rho}{}_\rho{}^\nu \qquad (1.57)$$

$$\gamma^\nu\gamma^5) \qquad \epsilon^{\nu\mu\rho\lambda} X_{[\tau\mu][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.58)$$

de (1.56)

$$\gamma^\nu\gamma^5) \qquad \epsilon^{\nu\mu\rho\lambda} X_{[\mu\rho][\lambda\tau]} = 0 \qquad (1.59)$$

las relaciones (1.58, 59) son equivalentes a

$$X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} + X_{[\mu\rho][\lambda\nu]} + X_{[\mu\lambda][\nu\rho]} = 0$$

$$X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} + X_{[\nu\rho][\mu\lambda]} + X_{[\rho\mu][\nu\lambda]} = 0$$

respectivamente, que implican:

$$X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = X^{[\rho\lambda][\mu\nu]} \qquad (1.6$$

Es decir, hemos obtenido:

$$X^{\mu\nu} = 4\, X^{\mu\rho}{}_{\rho}{}^{\nu} \qquad X^{[\mu\nu]\rho} = Y^{\rho[\mu\nu]}$$

$$X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = X^{[\rho\lambda][\mu\nu]} \qquad X^{[\mu\nu]}{}_{\nu} = 0$$

$$X^{[\mu\nu]}{}_{[\mu\nu]} = 0 \qquad \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} X^{[\nu\rho]\lambda} = 0$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0$$

$X^{[\mu\nu][\rho\lambda]}$ tiene 36 componentes que por (1.60) se quedan en 21 y por las condiciones $X^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$ y $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0$ en 19. $X^{[\mu\nu]\rho}$ tiene 24 componentes menos 8 condiciones dadas por $X^{[\mu\nu]}{}_{\nu} =$ y $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} X^{[\nu\rho]\lambda} = 0$ (4 cada una) se quedan en 16. 16 + 19 = 35 componentes independientes de $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}}$

Las ecuaciones BW aplicadas a este bispinor nos dan: En el índice α :

$$(\gamma p - m)^{\alpha}{}_{\alpha'} \psi^{\{\alpha'\beta\gamma\delta\}} = 0$$

es decir:

$$[(\gamma p - m)\gamma^{\mu} C^{-1}]^{\alpha\beta} (\gamma^{\nu} C^{-1})^{\gamma\delta} X_{\mu\nu} + \Big[[(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu} C^{-1}]^{\alpha\beta} (\gamma^{\rho} C^{-1})^{\gamma\delta} +$$

$$+ [(\gamma p - m)\gamma^{\rho} C^{-1}]^{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\gamma\delta} \Big] X_{[\mu\nu]\rho} +$$

$$+ [(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu} C^{-1}]^{\alpha\beta} (\sigma^{\rho\lambda} C^{-1})^{\gamma\delta} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]} \qquad (1.$$

ara extraer de esta ecuación información sobre los tensores X contrae os con los elementos de la base: En $\gamma\delta$ con los simétricos y en $\alpha\beta$ on todos. Así:

) $(C\gamma_\lambda)_{\delta\gamma}$

$$[(\gamma p - m)\gamma^\mu C^{-1}]^{\alpha\beta} X_{\mu\lambda} + [(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu} C^{-1}]^{\alpha\beta} X_{[\mu\nu]\lambda} = 0$$

) $(C\sigma_{\lambda\tau})_{\delta\gamma}$

$$[(\gamma p - m)\gamma^\rho C^{-1}]^{\alpha\beta} X_{[\lambda\tau]\rho} + [(\gamma p - m)\sigma^{\mu\nu} C^{-1}]^{\alpha\beta} X_{[\mu\nu][\lambda\tau]} = 0$$

Para la primera ecuación:

i) $C_{\beta\alpha}$ $\qquad p_\mu X^{\mu\nu} = 0$ (1.62)

ii) $(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}$ $\qquad \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} p^\nu X^{[\rho\lambda]\tau} = 0$

iii) $(C\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}$ $\qquad -m X_{\mu\nu} + 2i p^\rho X_{[\rho\mu]\nu} = 0$

iv) $(C\sigma_{\lambda\tau})_{\beta\alpha}$ $\qquad i[p_\mu X_{\nu\rho} - p_\nu X_{\mu\rho}] + 2m X_{[\mu\nu]\rho} = 0$ (1.63)

para la segunda:

i) $C_{\beta\alpha}$ $\qquad p^\mu X_{[\nu\rho]\mu} = 0$

ii) $(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}$ $\qquad \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} p^\nu X^{[\rho\lambda][\tau\sigma]} = 0$

iii) $(C\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}$ $\qquad -m X_{[\mu\nu]\rho} + 2i p^\lambda X_{[\lambda\rho][\mu\nu]} = 0$

iv) $(C\sigma_{\lambda\tau})_{\beta\alpha}$ $\qquad i[p_\mu X_{[\nu\rho]\lambda} - p_\lambda X_{[\nu\rho]\mu}] + 2m X_{[\mu\lambda][\nu\rho]} = 0$ (1.64)

Ecuaciones que se resumen en:

$$(p^2 - m^2) X^{\mu\nu} = 0$$

$$p_\mu X^{\mu\nu} = 0$$

campo de spin 2,

con
$$X^{[\mu\nu]\rho} = -\frac{i}{2m}\left(p^{\mu}X^{\nu\rho} - p^{\nu}X^{\mu\rho}\right)$$

$$X^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = \left(-\frac{i}{2m}\right)^2 \left\{ p^{\mu}\left(p^{\rho}X^{\nu\lambda} - p^{\lambda}X^{\nu\rho}\right) - p^{\nu}\left(p^{\rho}X^{\mu\lambda} - p^{\lambda}X^{\mu\rho}\right)\right\}$$

Sustituyendo estas expresiones en (1.42)

$$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\}} = \left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^{\mu}C^{-1}\right]^{\alpha\beta}\left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^{\nu}C^{-1}\right]^{\gamma\delta} X_{\mu\nu} \qquad (1.65)$$

con $X^{\mu\nu}$ cumpliendo $(p^2 - m^2)X^{\mu\nu} = 0$, $\quad p_{\mu}X^{\mu\nu} = 0$

7. $[3,1]$

Escogemos la distribución de índices en el diagrama de Young

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & & \end{matrix} \qquad , \quad \psi^{[\alpha\beta]\{\gamma\delta\}}$$

la ecuación que debe cumplir ψ para ser irreducible

$$Y\psi = k\psi$$

En este caso, $\quad k = \dfrac{\prod l_i!}{\prod_{i<k}(l_i - l_k)} = 8 \qquad l_1 = 4 \quad l_2 = 1$

$Y = QP = (1 - (12))(1 + (14) + (13) + (34) + (143) + (134))$.

Entonces:

$$\psi^{\alpha\beta\gamma\delta} + \psi^{\gamma\beta\alpha\delta} + \psi^{\delta\beta\gamma\alpha} + \psi^{\alpha\beta\delta\gamma} - \psi^{\beta\alpha\gamma\delta} + \psi^{\gamma\beta\delta\alpha} + \psi^{\delta\beta\alpha\gamma} -$$
$$- \psi^{\gamma\alpha\beta\delta} - \psi^{\delta\alpha\gamma\beta} - \psi^{\gamma\alpha\delta\beta} - \psi^{\delta\alpha\beta\gamma} - \psi^{\beta\alpha\delta\gamma} = 8\psi^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

que se puede reducir a:

$$\psi^{[\alpha\beta]\{\gamma\delta\}} + \psi^{[\beta\gamma]\{\alpha\delta\}} + \psi^{[\gamma\alpha]\{\beta\delta\}} = 0 \tag{1.66}$$

que son 15 condiciones.
El desarrollo es:

$$\begin{aligned}\psi^{[\alpha\beta]\{\gamma\delta\}} &= (C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\mu C^{-1})^{\gamma\delta} X_\mu + (C^{-1})^{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\gamma\delta} X_{[\mu\nu]} + \\ &+ (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\mu C^{-1})^{\gamma\delta} X_{5\mu} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\gamma\delta} X_{5[\mu\nu]} + \\ &+ (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\nu C^{-1})^{\gamma\delta} Y_{5\mu\nu} + (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\sigma^{\nu\rho} C^{-1})^{\gamma\delta} X_{5\mu[\nu\rho]}\end{aligned} \tag{1.67}$$

al que hay que imponer la condición (1.66).

Si $S_{\alpha\beta}$ es un elemento simétrico y $A_{\alpha\beta}$ antisimétrico de la base $\{\Lambda_\kappa\}$ (ver Cap.I), esa condición es equivalente a

$$S_{\delta\gamma} A_{\beta\alpha} \psi^{[\alpha\beta]\{\gamma\delta\}} - 2 S_{\delta\gamma} A_{\beta\alpha} \psi^{[\alpha\gamma]\{\beta\delta\}} = 0$$

1) $C_{\beta\alpha} (C\gamma_\lambda)_{\delta\gamma}$ $\qquad X_\lambda - i \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} X_5^{\mu[\nu\rho]} = 0 \qquad (1.68)$

2) $C_{\beta\alpha} (C\sigma_{\lambda\rho})_{\delta\gamma}$ $\qquad 2X_{[\lambda\tau]} + \epsilon_{\lambda\tau\mu\nu} (X_5^{[\mu\nu]} + i Y_5^{\mu\nu}) = 0 \qquad (1.69)$

3) $(C\gamma^5)_{\beta\alpha} (C\gamma_\lambda)_{\delta\gamma}$ $\qquad X_{5\lambda} - 2i X_5{}^{\mu}{}_{[\mu\lambda]} = 0 \qquad (1.70)$

4) $(C\gamma^5)_{\beta\alpha} (C\sigma_{\lambda\tau})_{\delta\gamma}$

$$2X_{5[\lambda\tau]} - \epsilon_{\lambda\tau\mu\nu} X^{[\mu\nu]} + i (Y_{5\mu\nu} - Y_{5\nu\mu}) = 0 \tag{1.71}$$

5) $(C\gamma_\lambda\gamma^5)_{\beta\alpha} (C\gamma_\sigma)_{\delta\gamma}$

$$i\epsilon_{\sigma\lambda\mu\nu} X^{[\mu\nu]} + 2i X_{5[\lambda\sigma]} - Y_{5\lambda\sigma} + Y_{5\sigma\lambda} + g_{\sigma\lambda} Y_5{}^{\mu}{}_{\mu} = 0 \tag{1.72}$$

6) $(C\gamma_\lambda\gamma^5)_{\beta\alpha} (C\sigma_{\mu\nu})_{\delta\gamma}$

$$2(X_{5\sigma[\tau\lambda]} + X_{5\tau[\lambda\sigma]} + X_{5\lambda[\sigma\tau]}) - g_{\sigma\lambda}(2X_5{}^{\mu}{}_{[\mu\tau]} + iX_{5\tau}) +$$
$$+ g_{\sigma\tau}(2X^{\mu}{}_{[\mu\lambda]} + iX_{5\lambda}) - i\epsilon_{\sigma\lambda\tau\mu}X^{\mu} = 0 \qquad (1.73$$

que nos lleva a:

$$X_{\lambda} = i\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}X_5^{\mu[\nu\rho]} \qquad (1.68$$
$$X_{[\lambda\tau]} = -\tfrac{1}{2}\epsilon_{\lambda\tau\mu\nu}(X_5^{[\mu\nu]} + iY_5^{\mu\nu}) \qquad (1.69$$
$$X_{5\lambda} = 2iX_5{}^{\mu}{}_{[\mu\lambda]} \qquad (1.70$$
$$Y_5{}^{\mu}{}_{\mu} = 0 \qquad (1.74$$

$X_5{}^{\mu[\nu\rho]}$ tiene 24 componentes, $X_5^{[\mu\nu]}$ 6 y $Y_5^{\mu\nu}$ 15, en tctal 45 componentes independientes de $\psi^{[\alpha\beta](\gamma\delta)}$

Si aplicamos ahora las ecuaciones BW, en el índice α :

$$(\gamma P - m)^{\alpha}{}_{\alpha'}\,\psi^{[\alpha'\beta](\gamma\delta)} = 0$$

$$[(\gamma p - m)C^{-1}]^{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}C^{-1})^{\gamma\delta}X_{\mu} + [(\gamma p - m)C^{-1}]^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\gamma\delta}X_{[\mu\nu]} +$$
$$+ [(\gamma p - m)\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}C^{-1})^{\gamma\delta}X_{5\mu} + [(\gamma p - m)\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\gamma\delta}X_{5[\mu\nu]} +$$
$$+ [(\gamma p - m)\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(\gamma^{\nu}C^{-1})^{\gamma\delta}Y_{5\mu\nu} +$$
$$+ [(\gamma p - m)\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(\sigma^{\nu\rho}C^{-1})^{\gamma\delta}X_{5\mu[\nu\rho]} = 0 \qquad (1.75$$

Contrayendo con:

$$C_{\beta\alpha}((C\gamma_{\lambda})_{\delta\gamma} \qquad X_{\mu} = 0 \qquad (1.76$$
$$C_{\beta\alpha}((C\sigma_{\lambda\mu})_{\delta\gamma} \qquad X_{[\mu\nu]} = 0 \qquad (1.77$$

$$((C\gamma^5)_{\beta\alpha}((C\gamma_\lambda)_{\gamma\delta} \qquad X_5^{\mu} = \frac{1}{m} P_\nu Y_5^{\nu\mu} \tag{1.78}$$

$$(C\gamma^5)_{\beta\alpha}((C\sigma_{\nu\mu})_{\gamma\delta} \qquad X_5^{[\mu\nu]} = \frac{1}{m} P_\rho X_5^{\rho[\mu\nu]} \tag{1.79}$$

$$(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}((C\gamma_\mu)_{\gamma\delta} \qquad Y_5^{\mu\nu} = \frac{1}{m} P^\mu X_5^{\nu} \tag{1.80}$$

$$(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}(C\sigma_{\mu\nu})_{\gamma\delta} \qquad X_5^{\mu[\nu\rho]} = \frac{1}{m} P^\mu X_5^{[\nu\rho]} \tag{1.81}$$

$$(C\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}(C\gamma_\rho)_{\gamma\delta} \qquad p^\mu X_5^{\nu\rho} = p^\nu X_5^{\mu\rho} \tag{1.82}$$

$$((\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}((\sigma_{\lambda\rho})_{\gamma\delta} \qquad p^\mu X_5^{\nu[\rho\lambda]} = p^\nu X_5^{\mu[\rho\lambda]} \tag{1.83}$$

que se puede resumir en

$$(p^2 - m^2) X_5^{\mu} = 0$$
$$p_\mu X_5^{\mu} = 0$$

campo de spin 1.

con
$$Y_5^{\mu\nu} = \frac{1}{m} p^\mu X_5^{\nu}$$
$$X_5^{\mu[\nu\rho]} = -\frac{i}{2m^2} p^\mu (p^\nu X_5^{\rho} - p^\rho X_5^{\nu})$$
$$X_5^{[\mu\nu]} = -\frac{i}{2m} (p^\mu X_5^{\nu} - p^\nu X_5^{\mu})$$
$$X^{\mu} = 0$$
$$X^{[\mu\nu]} = 0$$

con lo que

$$\psi^{[\alpha\beta]\{\gamma\delta\}} = \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha\beta} \left[\frac{\gamma p + m}{m} \gamma^\mu C^{-1}\right]^{\gamma\delta} X_{5\mu} \tag{1.84}$$

8. $[2^2]$

Escogemos la distribución de índices $\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}$

$\psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$ Además $Y\psi = k\psi$

$$k = \frac{3!\,2!}{1} = 12 \quad , \ell_1 = 3 \ , \ \ell_2 = 2$$

$$Y = QP \quad \text{con} \quad Q = \big(e - (12)\big)\big(e - (34)\big)$$
$$P = \big(e + (13)\big)\big(e + (24)\big)$$

y la ecuación $Y\psi = 12\psi$ se reduce a:

$$\psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} + \psi^{[\alpha\gamma][\delta\beta]} + \psi^{[\alpha\delta][\beta\gamma]} = 0 \qquad (1.85$$

$$\psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = \psi^{[\gamma\delta][\alpha\beta]} \qquad (1.86$$

(1.85) es una sola condición.

Entonces

$$\begin{aligned}\psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} &= (C^{-1})^{\alpha\beta}(C^{-1})^{\gamma\delta}X + (\gamma^5C^{-1})^{\alpha\beta}(C^{-1})^{\gamma\delta}X_5 + \\ &+ (\gamma^\mu\gamma^5C^{-1})^{\alpha\beta}(C^{-1})^{\gamma\delta}X_{5\mu} + (C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^5C^{-1})^{\gamma\delta}Y_5 + \\ &+ (\gamma^5C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^5C^{-1})^{\gamma\delta}X_{55} + (\gamma^\mu\gamma^5C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^5C^{-1})^{\gamma\delta}X_{55\mu} + \\ &+ (C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^\mu\gamma^5C^{-1})^{\gamma\delta}Y_{5\mu} + (\gamma^5C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^\mu\gamma^5C^{-1})^{\gamma\delta}Y_{55\mu} + \\ &+ (\gamma^\mu\gamma^5C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^\nu\gamma^5C^{-1})^{\gamma\delta}X_{\mu\nu}\end{aligned} \qquad (1.87$$

que debe cumplir (1.86).

Para que esto se verifique, si $A_{\alpha\beta}$ es un bispinor antisimétrico y $S_{\alpha\beta}$ simétrico,

$$A_{\alpha\gamma} S_{\beta\delta}\, \psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = A_{\alpha\gamma} S_{\beta\delta}\, \psi^{[\gamma\delta][\alpha\beta]} = - A_{\alpha\gamma} S_{\beta\delta}\, \psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\alpha\gamma} S_{\beta\delta}\, \psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = 0$$

1) $\quad C_{\alpha\gamma} ((C\gamma^{\mu})_{\beta\delta} \quad \Rightarrow \quad X^{\mu}_{55} = Y^{\mu}_{55}$ (1.88)

2) $\quad (C\gamma^5)_{\alpha\gamma} ((C\gamma^{\mu})_{\beta\delta} \quad \Rightarrow \quad X^{\mu}_{5} = Y^{\mu}_{5}$ (1.89)

3) $\quad ((C\gamma^5\gamma_{\mu})_{\alpha\gamma} ((C\gamma_{\nu})_{\beta\delta} \quad \Rightarrow \quad X_5 = Y_5 \;, \quad X^{\mu\nu} = X^{\nu\mu}$ (1.90)

es decir:

$$\begin{aligned}
\psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} &= (C^{-1})^{\alpha\beta} (C^{-1})^{\gamma\delta} X + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{55} + \\
&+ (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^{\nu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{\mu\nu} + \left[(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (C^{-1})^{\gamma\delta} + \right. \\
&+ \left. (C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta}\right] X_5 + \left[(\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (C^{-1})^{\gamma\delta} + \right. \\
&+ \left. (C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta}\right] X_{5\mu} + \left[(\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} + \right. \\
&+ \left. (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta}\right] X_{55\mu}
\end{aligned} \qquad (1.91)$$

Además debe cumplir (1.85).

Multiplicando por $C_{\beta\alpha}$

$$\psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} C_{\beta\alpha} + 2\, \psi^{[\alpha\gamma][\delta\beta]} C_{\beta\alpha} = 0$$

que implica

$$X + X_{55} - X^{\mu}{}_{\mu} = 0$$

que es la condición que nos faltaba:

$$X = - X_{55} + X^{\mu}{}_{\mu} \qquad (1.92$$

El número de componentes es: $X^{\mu}{}_{55}(4)$, $X^{\mu}{}_{5}(4)$, $X_{5}(1)$, $X^{\{\mu\nu\}}$ (10), $X_{55}(1)$, en total las 20 componentes independientes de $\psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$

Aplicando las ecuaciones BW al índice α :

$$\begin{aligned}
&[(\gamma p - m)C^{-1}]^{\alpha\beta}(C^{-1})^{\gamma\delta}(-X_{55} + X^{\mu}{}_{\mu}) + [(\gamma p - m)\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta} \cdot \\
&\cdot (\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{55} + [(\gamma p - m)\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(\gamma^{\nu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{\mu\nu} + \\
&+ \{[(\gamma p - m)\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(C^{-1})^{\gamma\delta} + [(\gamma p - m)C^{-1}]^{\alpha\beta}(\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta}\} X_5 + \\
&+ \{[(\gamma p - m)\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(C^{-1})^{\gamma\delta} + [(\gamma p - m)C^{-1}]^{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta}\} X_{5\mu} + \\
&+ \{[(\gamma p - m)\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} + \\
&+ [(\gamma p - m)\gamma^5 C^{-1}]^{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta}\} X_{55\mu} = 0
\end{aligned} \qquad (1.9$$

Contrayendo con bispinors antisimétricos en $\gamma\delta$ y de cualquier tipo en $\alpha\beta$

$C_{\beta\alpha}C_{\delta\gamma}$	$X_{55} = X^{\mu}{}_{\mu}$	$\Rightarrow X = 0$
$(C\gamma^5)_{\beta\alpha}C_{\delta\gamma}$	$X_5 = \frac{1}{m} p_{\mu} X^{\mu}_{5}$	
$(C\gamma^5\gamma_{\mu})_{\beta\alpha}C_{\delta\gamma}$	$X^{\mu} = \frac{1}{m} p^{\mu} X_5$	
$(C\sigma^{\mu\nu})_{\beta\alpha}C_{\delta\gamma}$	$p^{\mu} X^{\nu}_{5} = p^{\nu} X^{\mu}_{5}$	
$C_{\beta\alpha}(C\gamma^5)_{\delta\gamma}$	$X_5 = 0$	

$$(C\gamma^5)_{\beta\alpha}\,(C\gamma^5)_{\delta\gamma} \qquad X_{55} = \frac{1}{m}\,p_\mu X^\mu_{55}$$

$$(C\gamma^5\gamma_\mu)_{\beta\alpha}(C\gamma^5)_{\delta\gamma} \qquad X^\mu_{55} = \frac{1}{m}\,p^\mu X_{55}$$

$$(C\sigma^{\mu\nu})_{\beta\alpha}(C\gamma^5)_{\delta\gamma} \qquad p^\mu X^\nu_5 = p^\nu X^\mu_5$$

$$C_{\beta\alpha}\,(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\delta\gamma} \qquad X^\mu_5 = 0$$

$$(C\gamma^5)_{\beta\alpha}(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\delta\gamma} \qquad X^\mu_{55} = \frac{1}{m}\,p_\nu X^{\nu\mu}$$

$$(C\gamma^5\gamma_\mu)_{\beta\alpha}\,(C\gamma^5\gamma_\lambda)_{\delta\gamma} \qquad X^{\mu\nu} = \frac{1}{m}\,p^\mu X^\nu_{55}$$

$$(C\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}\,(C\gamma^5\gamma_\rho)_{\delta\gamma} \qquad p^\mu X^{\nu\rho} = p^\nu X^{\mu\rho}$$

En resumen

$$(p^2 - m^2)\,X_{55} = 0$$

campo de spin 0,

$$X = 0\;,\; X_5 = 0\;,\; X^\mu_5 = 0$$

$$X^\mu_{55} = \frac{1}{m}\,p^\mu X_{55}$$

$$X^{\mu\nu} = \frac{1}{m^2}\,p^\mu p^\nu X_{55}$$

y
$$\psi^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} = \left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\alpha\beta}\left[\frac{\gamma p + m}{m}\gamma^5 C^{-1}\right]^{\gamma\delta} X_{55} \qquad (1.94)$$

9. $[2,1^2]$

Escogemos la ordenación de índices en el diagrama de Young

1	4
2	
3	

Para que $\psi^{[\alpha\beta\gamma]\delta}$ sea irreducible, debe verificar $Y\psi = k\psi$, donde

$$k = \frac{4!\ 2!\ 1!}{2.\ 3.\ 1.} = 8 \quad , \quad l_1 = 4, \quad l_2 = 2, \quad l_3 = 1$$

$$Y = QP \quad \text{con} \quad Q = e - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)$$

$$P = e + (14)$$

$Y\psi = 8\psi$ es:

$$\psi^{[\alpha\beta\gamma]\delta} - \psi^{[\beta\alpha\gamma]\delta} - \psi^{[\gamma\beta\alpha]\delta} - \psi^{[\alpha\gamma\beta]\delta} + \psi^{[\beta\gamma\alpha]\delta} +$$
$$+ \psi^{[\gamma\alpha\beta]\delta} + \psi^{[\delta\beta\gamma]\alpha} - \psi^{[\delta\alpha\gamma]\beta} - \psi^{[\delta\beta\alpha]\gamma} - \psi^{[\delta\gamma\beta]\alpha} +$$
$$+ \psi^{[\delta\gamma\alpha]\beta} + \psi^{[\delta\alpha\beta]\gamma} = 8\psi^{[\alpha\beta\gamma]\delta}$$

que es la única condición:

$$\psi^{[\alpha\beta\gamma]\delta} + \psi^{[\delta\beta\gamma]\alpha} + \psi^{[\delta\gamma\alpha]\beta} + \psi^{[\delta\alpha\beta]\gamma} = 0 \qquad (1.95)$$

El desarrollo es:

$$\psi^{[\alpha\beta\gamma]\delta} = (C^{-1})^{\alpha\beta} ((C^{-1})^{\gamma\delta} X + ((C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^5 (C^{-1})^{\gamma\delta} X_5 +$$
$$+((C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma^5 (C^{-1})^{\gamma\delta} X_{5\mu} + ((C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\mu (C^{-1})^{\gamma\delta} X_\mu +$$
$$+((C^{-1})^{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} (C^{-1})^{\gamma\delta} X_{[\mu\nu]} + (\gamma^5 (C^{-1})^{\alpha\beta} (C^{-1})^{\gamma\delta} Y_5 +$$
$$+(\gamma^5 (C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^5 (C^{-1})^{\gamma\delta} X_{55} + (\gamma^5 (C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma^5 (C^{-1})^{\gamma\delta} X_{55\mu} +$$

$$+ (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\mu C^{-1})^{\gamma\delta} Y_{5\mu} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} C^{-1})^{\gamma\delta} X_{5[\mu\nu]} +$$
$$+ (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (C^{-1})^{\gamma\delta} Z_{5\mu} + (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} Y_{55\mu} +$$
$$+ (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\nu \gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{55\mu\nu} + (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\gamma^\nu C^{-1}) Y_{5\mu\nu} +$$
$$+ (\gamma^\mu \gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta} (\sigma^{\nu\rho} C^{-1})^{\gamma\delta} X_{5\mu[\nu\rho]} \qquad (1.96)$$

Tenemos que imponer la antisimetría en $[\alpha\beta\gamma]$, es decir γ con $\alpha\beta$ Para ello contraemos γ y β con bispinors simétricos y extraemos los coeficientes de los elementos de la base que aparecen. Los resultados son:

$$Y_5^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} X_5 + i\, \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} X_{[\lambda\rho]}$$
$$X_5^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} X - 2i\, X^{[\mu\nu]}$$
$$X_5^{[\mu\nu]} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} X_{[\lambda\rho]}$$
$$X_{55} = X$$
$$Y_5 = -X_5$$
$$X_5^{\mu[\nu\rho]} = \frac{i}{2} (g^{\mu\nu} X_5^\rho - g^{\mu\rho} X_5^\nu) + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_\lambda$$
$$Y_5^\mu = X_5^\mu$$
$$Z_5^\mu = -X_5^\mu$$
$$X_{55}^\mu = -X^\mu$$
$$Y_{55}^\mu = X^\mu$$

$\psi^{[\alpha\beta\gamma]\delta}$ tiene 16 componentes independientes dadas por los tensores: X, X_5, X^{μ}, X_5^{μ}, $X^{[\mu\nu]}$

Pero nos falta imponer la condición (1.95) que se puede escribir así:

$$C_{\beta\alpha}\, C_{\delta\alpha}\, \psi^{[\gamma\beta\alpha]\delta} = 0$$

y que lleva a $X = 0$ (1.97)

15 son las componentes que tiene el tensor asociado al diagrama $[2,1^2]$.

Las ecuaciones BW se aplican, por ejemplo, a los índices γ y δ y nos dan, por los métodos de contracción ya expuestos, que $\psi^{[\alpha\beta\gamma]\delta} = 0$

10. $[1^4]$

$$\begin{aligned}\psi^{[\alpha\beta\gamma\delta]} = & ((C^{-1})^{\alpha\beta}((C^{-1})^{\gamma\delta} X + ((C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^5 (C^{-1})^{\gamma\delta} X_5 + \\ & + ((C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{5\mu} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}((C^{-1})^{\gamma\delta} Y_5 + \\ & + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{55} + (\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{55\mu} + \\ & + (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}((C^{-1})^{\gamma\delta} Y_{5\mu} + (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^5 (C^{-1})^{\gamma\delta} Y_{55\mu} + \\ & + (\gamma^{\mu}\gamma^5 C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^{\nu}\gamma^5 C^{-1})^{\gamma\delta} X_{55\mu\nu}\end{aligned} \quad (1.98)$$

Imponiendo que la antisimetría sea total, se llega a:

$$\begin{aligned}\psi^{[\alpha\beta\gamma\delta]} = & \{((C^{-1})^{\alpha\beta}((C^{-1})^{\gamma\delta} + (\gamma^5 (C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^5 (C^{-1})^{\gamma\delta} - \\ & - (\gamma_{\mu}\gamma^5 (C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^{\mu}\gamma^5 (C^{-1})^{\gamma\delta}\} X\end{aligned} \quad (1.99)$$

con

$$X_5 = Y_5 = 0$$
$$X_{5\mu} = X_{55\mu} = Y_{5\mu} = Y_{55\mu} = 0$$
$$X_{55} = X$$
$$X_{55}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} X$$

y al aplicar las ecuaciones BW se llega a

$$X = 0 \qquad (1.100)$$

11. [5]

$$\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\eta\}} = (\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^\nu C^{-1})^{\gamma\delta}\varphi^\eta_{\mu\nu} + (\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\alpha\beta}(\gamma^\rho C^{-1})^{\gamma\delta}\varphi^\eta_{[\mu\nu]\rho} +$$
$$+(\gamma^\mu C^{-1})^{\alpha\beta}(\sigma^{\nu\rho}C^{-1})^{\gamma\delta}\varphi'^\eta_{\mu[\nu\rho]} + (\sigma^{\mu\nu}C^{-1})^{\alpha\beta}(\sigma^{\rho\lambda}C^{-1})^{\gamma\delta}\varphi^\eta_{[\mu\nu][\rho\lambda]} \qquad (1.101)$$

Usando resultados del diagrama [4]

$$\varphi^\alpha_{\mu\nu} = 4\,\varphi^\alpha{}_{\mu\rho}{}^\rho{}_\nu \qquad (1.102)$$
$$\varphi'^\alpha_{\mu[\nu\rho]} = \varphi^\alpha_{[\nu\rho]\mu} \qquad (1.103)$$

on

$$\varphi^\alpha{}_{[\mu\nu]}{}^{[\mu\nu]} = 0 \qquad\qquad \varphi^\alpha{}_{[\mu\nu]}{}^\nu = 0$$
$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varphi^\alpha{}_{\mu\nu\rho\lambda} = 0 \qquad\qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varphi^\alpha{}_{[\nu\rho]\lambda} = 0$$
$$\varphi^\alpha{}_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = \varphi^\alpha{}_{[\rho\lambda][\mu\nu]}$$

Como debe ser simétrico en los cinco índices, imponiendo simetrí entre δ y η :

$$\varphi^{[\mu\nu]\rho} = -2i\,\gamma_\lambda\,\varphi^{[\mu\nu][\rho\lambda]} \qquad (1.104)$$

$$\sigma_{\mu\nu}\,\varphi^{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.105)$$

(1.105) son 20 condiciones. Como $\varphi^{[\mu\nu][\rho\lambda]}$ tenía 76 componentes, obtenemos las 56 de $\psi^{\{\alpha\beta\gamma\delta\eta\}}$

Al aplicar las ecuaciones BW, a cualquiera de los índices $\alpha\beta\gamma\delta$ se obtienen los resultados del diagrama [4]. Al hacerlo al índice η , se obtiene:

$$(\gamma p - m)\,\varphi_{\mu\nu} = 0$$

que lleva a las demás ecuaciones junto con

$$\gamma_\mu \varphi^{\mu\nu} = 0 \qquad (1.106)$$

(1.106) se obtiene a partir de las relaciones (1.102, 104, 105).

12. [6]

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\}} = (\gamma_{\mu_1} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} (\gamma_{\mu_2} C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4} \cdot$$

$$\cdot (\gamma_{\mu_3} C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\, \chi^{\mu_1\mu_2\mu_3} + (\sigma_{\mu_1\mu_2} C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2} \cdot$$

$$\cdot\left(\gamma_{\mu_3} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4}\left(\gamma_{\mu_4} C^{-1}\right)^{\alpha_5\alpha_6} X^{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4} +$$

$$+\left(\gamma_{\mu_1} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2}\left(\sigma_{\mu_2\mu_3} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4}\left(\gamma_{\mu_4} C^{-1}\right)^{\alpha_5\alpha_6} Y^{\mu_1[\mu_2\mu_3]\mu_4} +$$

$$+\left(\gamma_{\mu_1} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma_{\mu_2} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4}\left(\sigma_{\mu_3\mu_4} C^{-1}\right)^{\alpha_5\alpha_6} Z^{\mu_1\mu_2[\mu_3\mu_4]} +$$

$$+\left(\sigma_{\mu_1\mu_2} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2}\left(\sigma_{\mu_3\mu_4} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4}\left(\gamma_{\mu_5} C^{-1}\right)^{\alpha_5\alpha_6} X^{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\mu_5} +$$

$$+\left(\sigma_{\mu_1\mu_2} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma_{\mu_3} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4}\left(\sigma_{\mu_4\mu_5} C^{-1}\right)^{\alpha_5\alpha_6} Y^{[\mu_1\mu_2]\mu_3[\mu_4\mu_5]} +$$

$$+\left(\gamma_{\mu_1} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2}\left(\sigma_{\mu_2\mu_3} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4}\left(\sigma_{\mu_4\mu_5} C^{-1}\right)^{\alpha_5\alpha_6} Z^{\mu_1[\mu_2\mu_3][\mu_4\mu_5]} +$$

$$+\left(\sigma_{\mu_1\mu_1} C^{-1}\right)^{\alpha_1\alpha_2}\left(\sigma_{\mu_3\mu_4} C^{-1}\right)^{\alpha_3\alpha_4}\left(\sigma_{\mu_5\mu_6} C^{-1}\right)^{\alpha_5\alpha_6} \cdot$$

$$\cdot X^{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4][\mu_5\mu_6]} \qquad (1.107)$$

que es simétrico en los pares $\{\alpha_1\alpha_2\}$, $\{\alpha_3\alpha_4\}$ y $\{\alpha_5\alpha_6\}$

Basta imponer simetrías en $\{\alpha_2\alpha_3\}$ y $\{\alpha_4\alpha_5\}$ para obtener la total.

Pero podemos hacer también los desarrollos:

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\}} = (\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\mu_2}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,\Phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_2} +$$
$$+(\sigma^{\mu_1\mu_2}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,\Phi^{\alpha_5\alpha_6}_{[\mu_1\mu_2]\mu_3} + (\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma^{\mu_2\mu_3}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,\Phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1[\mu_2\mu_3]} +$$
$$+(\sigma^{\mu_1\mu_2}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}(\sigma^{\mu_3\mu_4}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}\,\Phi^{\alpha_5\alpha_6}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]} \qquad (1.108)$$

o también

$$\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\}} = \Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_1\mu_2}(\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}(\gamma^{\mu_2}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6} +$$
$$+\Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{[\mu_1\mu_2]\mu_3}(\sigma^{\mu_1\mu_2}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}(\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6} + \Theta'^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_1[\mu_2\mu_3]}(\gamma^{\mu_1}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}(\sigma^{\mu_2\mu_3}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6} +$$
$$+\Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]}(\sigma^{\mu_1\mu_2}C^{-1})^{\alpha_3\alpha_4}(\sigma^{\mu_3\mu_4}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6} \qquad (1.109)$$

y comparando (1.108) con (1.107)

$$\Phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_2} = (\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\,X_{\mu_1\mu_2\mu_3} + (\sigma^{\mu_3\mu_4}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\,Z_{\mu_1\mu_2[\mu_3\mu_4]}$$
$$\Phi^{\alpha_5\alpha_6}_{[\mu_1\mu_2]\mu_3} = (\gamma^{\mu_4}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\,X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4} + (\sigma^{\mu_4\mu_5}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\,Y_{[\mu_1\mu_2]\mu_3[\mu_4\mu_5]}$$
$$\Phi'^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1[\mu_2\mu_3]} = (\gamma^{\mu_4}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\,Y_{\mu_1[\mu_2\mu_3]\mu_4} + (\sigma^{\mu_4\mu_5}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\,Z_{\mu_1[\mu_2\mu_3][\mu_4\mu_5]}$$
$$\Phi^{\alpha_5\alpha_6}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]} = (\gamma^{\mu_5}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\,X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\mu_5} + (\sigma^{\mu_5\mu_6}C^{-1})^{\alpha_5\alpha_6}\,X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4][\mu_5\mu_6]}$$

$$(1.110)$$

y (1.109) con (1.107)

$$\Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_1\mu_2} = (\gamma^{\mu_3}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\, X_{\mu_3\mu_1\mu_2} + (\sigma^{\mu_3\mu_4}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\, X_{[\mu_3\mu_4]\mu_1\mu_2}$$

$$\Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{[\mu_1\mu_2]\mu_3} = (\gamma^{\mu_4}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\, Y_{\mu_4[\mu_1\mu_2]\mu_3} + (\sigma^{\mu_4\mu_5}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\, X_{[\mu_4\mu_5][\mu_1\mu_2]\mu_3}$$

$$\Theta'^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_1[\mu_2\mu_3]} = (\gamma^{\mu_4}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\, Z_{\mu_4\mu_1[\mu_2\mu_3]} + (\sigma^{\mu_4\mu_5}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\, Y_{[\mu_4\mu_5]\mu_1[\mu_2\mu_3]}$$

$$\Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]} = (\gamma^{\mu_5}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\, Z_{\mu_5[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]} + (\sigma^{\mu_5\mu_6}C^{-1})^{\alpha_1\alpha_2}\, X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4][\mu_5\mu_6]} \qquad (1.111)$$

Por los resultados obtenidos en el caso [4],

$$\Phi^{\alpha_5\alpha_6}_{[\mu_1\mu_2]\mu_3} = \Phi'^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_3[\mu_1\mu_2]} \qquad \Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{[\mu_1\mu_2]\mu_3} = \Theta'^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_3[\mu_1\mu_2]}$$

que llevan a las igualdades:

$$X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4} = Y_{\mu_3[\mu_1\mu_2]\mu_4} \qquad Y_{[\mu_1\mu_2]\mu_3[\mu_4\mu_5]} = Z_{\mu_3[\mu_1\mu_2][\mu_4\mu_5]}$$

$$Y_{\mu_1[\mu_2\mu_3]\mu_4} = Z_{\mu_1\mu_4[\mu_2\mu_3]} \qquad X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\mu_5} = Y_{[\mu_1\mu_2]\mu_5[\mu_3\mu_4]}$$

luego:

$$X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4} = Y_{\mu_3[\mu_1\mu_2]\mu_4} = Z_{\mu_3\mu_4[\mu_1\mu_2]} \qquad (1.112)$$

$$X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\mu_5} = Y_{[\mu_1\mu_2]\mu_5[\mu_3\mu_4]} = Z_{\mu_5[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]} \qquad (1.113)$$

además:

$$\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_2} = 4\phi^{\alpha_5\alpha_6}{}_{\mu_1\nu}{}^{\nu}{}_{\mu_2} \quad , \quad \Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_1\mu_2} = 4\,\Theta^{\alpha_1\alpha_2}{}_{\mu_1\nu}{}^{\nu}{}_{\mu_2}$$

es decir:

$$X_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 4\, X_{[\mu_1\nu]}{}^{\nu}{}_{\mu_2\mu_3} \tag{1.114}$$

$$X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4} = 4\, X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\nu]}{}^{\nu}{}_{\mu_4} \tag{1.115}$$

Las otras dos relaciones que se podrían obtener son equivalentes a (1.114) y (1.115) como veremos a continuación ((1.116), (1.117)).

Se tiene también del caso [4],

$$\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_2} = \phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_2\mu_1} \qquad \Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_1\mu_2} = \Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_2\mu_1}$$

luego

$$X_{\mu_1\mu_2\mu_3} = X_{\mu_2\mu_1\mu_3} = X_{\mu_1\mu_3\mu_2} \tag{1.116}$$

y

$$X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4} = X_{[\mu_1\mu_2]\mu_4\mu_3} \tag{1.117}$$

como

$$\phi^{\alpha_5\alpha_6\,\mu}{}_{\mu} = 0 \qquad \Theta^{\alpha_1\alpha_2\,\mu}{}_{\mu} = 0$$

$$X^{\mu}{}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.118}$$

$$X_{[\mu_1\mu_2]\mu}{}^{\mu} = 0 \tag{1.119}$$

Con lo que quedan completas las simetrías que se pueden deducir de las de $\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_2}$ y $\Theta^{\alpha_1\alpha_2}_{\mu_1\mu_2}$

Consecuencia de [4] son las relaciones:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\phi^{\alpha_5\alpha_6}{}_{[\nu\rho]\lambda} = 0 \qquad\qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\Theta^{\alpha_1\alpha_2}{}_{[\nu\rho]\lambda} = 0$$

que nos dan:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,X_{[\nu\rho]\lambda\tau} = 0 \tag{1.120}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,X_{[\tau\sigma][\nu\rho]\lambda} = 0 \tag{1.121}$$

Las otras dos relaciones que se podrían obtener son consecuencia de (1.117) y (1.124).

También se tiene:

$$\phi^{\alpha_5\alpha_6}{}_{[\mu\nu]}{}^{\nu} = 0 \qquad\qquad \Theta^{\alpha_1\alpha_2}{}_{[\mu\nu]}{}^{\nu} = 0$$

$$X_{[\mu\nu]}{}^{\nu}{}_{\lambda} = 0 \tag{1.122}$$

$$X_{[\mu\nu][\rho\lambda]}{}^{\lambda} = 0 \tag{1.123}$$

En cuanto a los últimos tensores:

$$\phi^{\alpha_5\alpha_6}{}_{[\mu_1\mu_2](\mu_3\mu_4)} = \phi^{\alpha_5\alpha_6}{}_{(\mu_3\mu_4)(\mu_1\mu_2)} \qquad\qquad \Theta^{\alpha_1\alpha_2}{}_{(\mu_1\mu_2)(\mu_3\mu_4)} = \Theta^{\alpha_1\alpha_2}{}_{(\mu_3\mu_4)(\mu_1\mu_2)}$$

que llevan a:

$$X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\mu_5} = X_{[\mu_3\mu_4][\mu_1\mu_2]\mu_5} \tag{1.124}$$

$$X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4][\mu_5\mu_6]} = X_{[\mu_3\mu_4][\mu_1\mu_2][\mu_5\mu_6]} = X_{[\mu_1\mu_2][\mu_5\mu_6][\mu_3\mu_4]} \tag{1.125}$$

$$\phi^{\alpha_5\alpha_6}{}_{[\mu\nu]}{}^{[\mu\nu]} = 0 \qquad\qquad \Theta^{\alpha_1\alpha_2}{}_{[\mu\nu]}{}^{[\mu\nu]} = 0$$

nos dan:

$$\chi^{[\mu\nu]}{}_{[\mu\nu]\lambda} = 0 \qquad (1.126)$$

$$\chi^{[\mu\nu]}{}_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \qquad (1.127)$$

y por fin

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0 \qquad\qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\Theta^{\alpha_1\alpha_1}_{[\mu\nu][\rho\lambda]} = 0$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\chi_{[\mu\nu][\rho\lambda]\tau} = 0 \qquad (1.128)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\,\chi_{[\mu\nu][\rho\lambda][\tau\sigma]} = 0 \qquad (1.129)$$

Es decir, hemos expresado todos los tensores que aparecían en el desarrollo de $\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\}}$ en función de

$$\chi^{\mu_1\mu_2\mu_3}\,,\quad \chi^{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4}\,,\quad \chi^{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\mu_5}\,,\quad \chi^{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4][\mu_5\mu_6]}$$

y los dos primeros en función de los dos últimos. Las condiciones que cumplen estos dos últimos, vienen dadas por: (1.121, 123, 124, 126, 128, 125, 127, 129).

$\chi^{[\mu\nu][\rho\lambda][\tau\sigma]}$ tiene (por (1.125)), $\begin{pmatrix} 6+3-1 \\ 3 \end{pmatrix} = 56$ componentes. (1.127) son 6 ecuaciones y (1.129) otras 6,es decir tiene 44 componentes independientes.

$\chi^{[\mu\nu][\rho\lambda]\tau}$ tiene (por (1.124)) $4\begin{pmatrix} 6+2-1 \\ 2 \end{pmatrix} = 84$ componentes. Sin embargo ni (1.126) ni (1.128) son independientes.

En efecto, (1.121) es equivalente a:

$$X_{[\tau\sigma][\nu\rho]\lambda} + X_{[\tau\sigma][\rho\lambda]\nu} + X_{[\tau\sigma][\lambda\nu]\rho} = 0$$

tomando trazas:

$$X^{[\mu\nu]}{}_{[\mu\nu]\lambda} + X^{[\mu\nu]}{}_{[\nu\lambda]\mu} + X^{[\mu\nu]}{}_{[\lambda\mu]\nu} = 0$$

pero

$$X^{[\mu\nu]}{}_{[\nu\lambda]\mu} = 0 \qquad X^{[\mu\nu]}{}_{[\lambda\mu]\nu} = 0 \quad \text{(por (1.123,124))}$$

luego $\qquad X^{[\mu\nu]}{}_{[\mu\nu]\lambda} = 0$

De igual forma, de (1.121) contrayendo en $\mu\sigma$,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{[\tau\mu][\nu\rho]\lambda} = 0 \tag{1.130}$$

como (1.121) es:

$$X_{[\mu\nu][\rho\lambda]\tau} + X_{[\nu\tau][\rho\lambda]\mu} + X_{[\tau\mu][\rho\lambda]\nu} = 0$$

(usando (1.124)), tenemos

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]\tau} + \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{[\nu\tau][\rho\lambda]\mu} + \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{[\tau\mu][\rho\lambda]\nu} = 0$$

y por (1.130)

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{[\nu\tau][\rho\lambda]\mu} = 0 \qquad\qquad \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} X_{[\tau\mu][\rho\lambda]\nu} = 0$$

luego se verifica (1.128).

Entonces, (1.121) son 24 condiciones y (1.123) son 20 (pues por (1.121), $\epsilon^{\tau\mu\nu\rho} X_{[\mu\nu][\rho\lambda]}{}^{\lambda} = 0$ son 4 ecuaciones).

Luego $X^{[\mu\nu][\rho\lambda]\tau}$ tiene 40 componentes independientes que sumadas a las 44 de $X^{[\mu\nu][\rho\lambda][\tau\sigma]}$ nos dan 84 componentes de $\psi^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\}}$.

Las ecuaciones BW aplicadas a este bispinor nos dan:

si tomamos el desarrollo (1.108)

$$(p^2-m^2)\,\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_2}=0 \qquad p^{\mu_1}\,\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_2}=0$$

$$\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]}=\left(-\frac{i}{2m}\right)^2\Big[p_{\mu_1}\big(p_{\mu_3}\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_2\mu_4}-p_{\mu_4}\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_2\mu_3}\big)-$$

$$-p_{\mu_2}\big(p_{\mu_3}\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_4}-p_{\mu_4}\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_3}\big)\Big]$$

$$\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{[\mu_1\mu_2]\mu_3}=-\frac{i}{2m}\Big[p_{\mu_1}\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_2\mu_3}-p_{\mu_2}\phi^{\alpha_5\alpha_6}_{\mu_1\mu_3}\Big]$$

y por (1.110)

$$(p^2-m^2)\,X_{\mu_1\mu_2\mu_3}=0 \tag{1.131}$$

$$p^{\mu_1}X_{\mu_1\mu_2\mu_3}=0 \tag{1.132}$$

$$X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4][\mu_5\mu_6]}=\left(-\frac{i}{2m}\right)^2\Big\{p_{\mu_1}\big(p_{\mu_3}X_{[\mu_5\mu_6]\mu_2\mu_4}-p_{\mu_4}X_{[\mu_5\mu_6]\mu_2\mu_3}\big)-$$

$$-p_{\mu_2}\big(p_{\mu_3}X_{[\mu_5\mu_6]\mu_1\mu_4}-p_{\mu_4}X_{[\mu_5\mu_6]\mu_1\mu_3}\big)\Big\} \tag{1.133}$$

$$X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4]\mu_5}=\left(-\frac{i}{2m}\right)^2\Big\{p_{\mu_1}\big(p_{\mu_3}X_{\mu_2\mu_4\mu_5}-p_{\mu_4}X_{\mu_2\mu_3\mu_5}\big)-$$

$$-p_{\mu_2}\big(p_{\mu_3}X_{\mu_1\mu_4\mu_5}-p_{\mu_4}X_{\mu_1\mu_3\mu_5}\big)\Big\} \tag{1.134}$$

$$X_{[\mu_1\mu_2]\mu_3\mu_4} = -\frac{i}{2m}\left\{ p_{\mu_1} X_{\mu_2\mu_3\mu_4} - p_{\mu_2} X_{\mu_1\mu_3\mu_4} \right\} \tag{1.135}$$

y sustituyendo (1.135) en (1.133) se llega a:

$$X_{[\mu_1\mu_2][\mu_3\mu_4][\mu_5\mu_6]} = \left(-\frac{i}{2m}\right)^3 \left\{ p_{\mu_1}\left[p_{\mu_3}\left(p_{\mu_5} X_{\mu_2\mu_4\mu_6} - p_{\mu_6} X_{\mu_2\mu_4\mu_5}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - p_{\mu_4}\left(p_{\mu_5} X_{\mu_2\mu_3\mu_6} - p_{\mu_6} X_{\mu_2\mu_3\mu_5}\right)\right] - p_{\mu_2}\left[p_{\mu_3}\left(p_{\mu_5} X_{\mu_1\mu_4\mu_6} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - p_{\mu_6} X_{\mu_1\mu_4\mu_5}\right) - p_{\mu_4}\left(p_{\mu_5} X_{\mu_1\mu_3\mu_6} - p_{\mu_6} X_{\mu_1\mu_3\mu_5}\right)\right]\right\}$$

(1.131) y (1.132) describen un campo de spin 3.

APENDICE 2

Trazas de productos de matrices γ.

tr (número impar de γ) = 0

$$\gamma^5 = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = i(\gamma^\mu\gamma^\nu - g^{\mu\nu})$$

$$\mathrm{tr}\,\gamma^5 = 0$$

$$\mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0$$

$$\mathrm{tr}\,\sigma^{\mu\nu} = 0$$

$$\mathrm{tr}\,\gamma^5\sigma^{\mu\nu} = 0$$

$$\mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} - g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\sigma^{\rho\lambda}) = 4i(g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda})$$

$$\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}) = 4(g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma^\sigma) = 4\{ & g^{\mu\nu}(g^{\rho\lambda}g^{\tau\sigma} - g^{\rho\tau}g^{\lambda\sigma} + g^{\rho\sigma}g^{\lambda\tau}) - \\ & - g^{\mu\rho}(g^{\nu\lambda}g^{\tau\sigma} - g^{\nu\tau}g^{\lambda\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\lambda\tau}) + g^{\mu\lambda}(g^{\nu\rho}g^{\tau\sigma} - \\ & - g^{\nu\tau}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\rho\tau}) - g^{\mu\tau}(g^{\nu\rho}g^{\lambda\sigma} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\sigma} + \\ & + g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda}) + g^{\mu\sigma}(g^{\nu\rho}g^{\lambda\tau} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\tau} + g^{\nu\tau}g^{\rho\lambda})\}\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\sigma^{\tau\sigma}) = 4i\{g^{\mu\nu}(g^{\rho\sigma}g^{\lambda\tau} - g^{\rho\tau}g^{\lambda\sigma}) - g^{\mu\rho}(g^{\nu\sigma}g^{\lambda\tau} - g^{\nu\tau}g^{\lambda\sigma}) + g^{\mu\lambda}(g^{\nu\sigma}g^{\rho\tau} - g^{\nu\tau}g^{\rho\sigma}) - g^{\mu\tau}(g^{\nu\rho}g^{\lambda\sigma} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda}) + g^{\mu\sigma}(g^{\nu\rho}g^{\lambda\tau} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\tau} + g^{\nu\tau}g^{\rho\lambda})\}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\sigma^{\rho\lambda}\sigma^{\tau\sigma}) = -4\{g^{\mu\nu}(g^{\rho\sigma}g^{\lambda\tau} - g^{\rho\tau}g^{\lambda\sigma}) - g^{\mu\rho}(g^{\nu\sigma}g^{\lambda\tau} - g^{\nu\tau}g^{\lambda\sigma}) + g^{\mu\lambda}(g^{\nu\sigma}g^{\rho\tau} - g^{\nu\tau}g^{\rho\sigma}) - g^{\mu\tau}(g^{\nu\rho}g^{\lambda\sigma} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\sigma}) + g^{\mu\sigma}(g^{\nu\rho}g^{\lambda\tau} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\tau})\}$$

$$\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}\sigma^{\tau\sigma}) = 4i\{g^{\mu\rho}(g^{\nu\sigma}g^{\lambda\tau} - g^{\nu\tau}g^{\lambda\sigma}) - g^{\mu\lambda}(g^{\nu\sigma}g^{\rho\tau} - g^{\nu\tau}g^{\rho\sigma}) + g^{\mu\tau}(g^{\nu\rho}g^{\lambda\sigma} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\sigma}) - g^{\mu\sigma}(g^{\nu\rho}g^{\lambda\tau} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\tau})\}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda) = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\sigma^{\rho\lambda}) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}) = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\tau\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}\epsilon^{\rho\lambda\tau\sigma} - g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\lambda\tau\sigma} + g^{\mu\lambda}\epsilon^{\nu\rho\tau\sigma} - g^{\mu\tau}\epsilon^{\nu\rho\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\rho\lambda\tau} + g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\lambda\tau\sigma} - g^{\nu\lambda}\epsilon^{\mu\rho\tau\sigma} + g^{\nu\tau}\epsilon^{\mu\rho\lambda\sigma} -$$

$$- g^{\nu\sigma}\epsilon^{\mu\rho\lambda\tau} + g^{\rho\lambda}\epsilon^{\mu\nu\tau\sigma} - g^{\rho\tau}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} +$$

$$+ g^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} + g^{\lambda\tau}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} - g^{\lambda\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\tau} +$$

$$+ g^{\tau\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda})$$

$g^{\mu\nu}$: $g^{00} = - g^{11} = - g^{22} = - g^{33} = 1$, $g^{ij} = 0$, $i \neq j$

$\epsilon_{0123} = +1$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4!$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} = -3!\,\delta^{\mu}{}_{\lambda}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\lambda\tau\rho\sigma} = -2! \begin{vmatrix} \delta^{\mu}{}_{\lambda} & \delta^{\mu}{}_{\tau} \\ \delta^{\nu}{}_{\lambda} & \delta^{\nu}{}_{\tau} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\lambda\tau\kappa\sigma} = -1! \begin{vmatrix} \delta^{\mu}{}_{\lambda} & \delta^{\mu}{}_{\tau} & \delta^{\mu}{}_{\kappa} \\ \delta^{\nu}{}_{\lambda} & \delta^{\nu}{}_{\tau} & \delta^{\nu}{}_{\kappa} \\ \delta^{\rho}{}_{\lambda} & \delta^{\rho}{}_{\tau} & \delta^{\rho}{}_{\kappa} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\lambda\tau\kappa\eta} = - \begin{vmatrix} \delta^{\mu}{}_{\lambda} & \delta^{\mu}{}_{\tau} & \delta^{\mu}{}_{\kappa} & \delta^{\mu}{}_{\eta} \\ \delta^{\nu}{}_{\lambda} & \delta^{\nu}{}_{\tau} & \delta^{\nu}{}_{\kappa} & \delta^{\nu}{}_{\eta} \\ \delta^{\rho}{}_{\lambda} & \delta^{\rho}{}_{\tau} & \delta^{\rho}{}_{\kappa} & \delta^{\rho}{}_{\eta} \\ \delta^{\sigma}{}_{\lambda} & \delta^{\sigma}{}_{\tau} & \delta^{\sigma}{}_{\kappa} & \delta^{\sigma}{}_{\eta} \end{vmatrix}$$

APENDICE 3

Tablas de representaciones.

Se dan las representaciones de SU(4) hasta diagramas de Young de seis índices y sus descomposiciones cuando nos restringimos a SO(5) y SO(4). Cuando se repite alguna representación no se vuelve a incluir su descomposición (Boerner, 1969; Hamermesh, 1964, Itzykson, 1966).

El diagrama de Young se designa por $[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$, μ_i = número de cajas en la fila i.

En SU(4) los pesos fundamentales son:

$M^{(1)} = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ corresponde a la representación de diagrama de Young $[1]$

$M^{(2)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $[1^2]$

$M^{(3)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ $[1^3]$

Si λ_i es el número de columnas de longitud i, de un cierto diagrama de Young, el peso máximo de la representación asociada a dicho diagrama es:

$$M = \lambda_1 M^{(1)} + \lambda_2 M^{(2)} + \lambda_3 M^{(3)}$$

y la dimensión es:

$$N = \frac{\Delta(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 : 0)}{\Delta(3,2,1,0)}$$

donde $l_i = \mu_i + i - 1$

y $\Delta(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) = (\ell_1 - \ell_2)(\ell_1 - \ell_3)(\ell_1 - \ell_4)(\ell_2 - \ell_3)(\ell_2 - \ell_4)(\ell_3 - \ell_4)$

N se puede poner en función del peso máximo de la representación $M = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$

$$N = \frac{1}{12}\left[(m_1 - m_2 + 1)(m_1 - m_3 + 2)(m_1 - m_4 + 3)(m_2 - m_3 + 1)(m_2 - m_4 + 2)(m_3 - m_4 + 1)\right]$$

SO(6) es localmente isomorfo a SU(4). (lo que nosotros utilizamos es el isomorfismo local de SU(2,2) y SO(4,2)). Los pesos máximos de las representaciones irreducibles son (m_1', m_2', m_3'), con m_1', m_2', m_3' enteros o semienteros simultáneamente y $m_1' \geq m_2' \geq |m_3'|$. Los pesos máximos de las representaciones fundamentales son:

$$M'^{(1)} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$$M'^{(2)} = (1, 0, 0)$$

$$M'^{(3)} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})$$

y la dimensión es:

$$N(m_1', m_2', m_3') = \frac{1}{12}(m_1' + m_2' + 3)(m_1' - m_2' + 1)(m_1' + m_3' + 2)(m_1' - m_3' + 2)(m_2' - m_3' + 1)(m_2' + m_3' + 1)$$

Construyendo la siguiente biyección entre los sistemas de raices simples de SU(4) y SO(2), (diagramas de Dynkin)

$$\begin{array}{lcl} \alpha_i & & \beta_i \\ \circ\ e_1 - e_2 & & \circ\ e_2' - e_3' \\ \circ\ e_2 - e_3 & \longrightarrow & \circ\ e_1' - e_2' \\ \circ\ e_3 - e_4 & & \circ\ e_2' + e_3' \end{array}$$

$e_1 = (1,0,0,0) \ldots e_4 = (0,0,0,1)$, $e_1' = (1,0,0) \ldots e_3'(0,0,1)$ si $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ son los pesos fundamentales de SU(4) y $M'^{(1)}$, $M'^{(2)}$,$M'^{(3)}$ los de SO(6), numerados de forma que correspondan a las mismas representaciones, y si m es el peso máximo de una representación de SU(4), tal que $m = \lambda_1 M^{(1)} + \lambda_2 (M^{(2)} + \lambda_3 M^{(3)}$, el peso máximo en la notación de SO(6) será: $m' = \lambda_1 M'^{(1)} + \lambda_2 M'^{(2)} + \lambda_3 M'^{(3)}$ donde $\lambda_i = (\alpha_i, m) =$ $= (\beta_j, m')$ (productos escalares de raices por pesos), donde $\alpha_i \rightarrow \beta_j$ viene dado por el isomorfismo de los diagramas de raices simples. En nuestra elección, $\alpha_i \rightarrow \beta_i$

Con más precisión

$$(m') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (m)$$

$$\text{ó} \quad (m') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{matrix}$$

con $m_4 = -m_1 - m_2 - m_3$

Y la inversa

$$(m) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (m')$$

Para restringir la representación de SU(4) a SO(5) y SO(4), usamos la notación de pesos en SO(6). (La notación en SU(4) es más útil en el estudio de diagramas de Young).

Si la representación irreducible de SO(6) tiene peso máximo (m_1, m_2, m_3), las representaciones irreducibles de SO(5) (de peso máximo (n_1, n_2)) en que se descompone al restringirla a este último grupo son las que verifican:

$$m_1 \geq n_1 \geq m_2 \geq n_2 \geq |m_3|$$

y las de SO(4) (de peso máximo (l_1, l_2)) que resultan de (n_1, n_2) cumplen:

$$n_1 \geq \ell_1 \geq n_2 \geq \ell_2 \geq -n_2$$

Las de SO(3) que aparecen en (l_1, l_2) de SO(4) son las (l) que verifican $l_1 \geq l \geq l_2$.

La dimensión de una representación irreducible de SO(5) es:

$$N(n_1, n_2) = \frac{2}{3}\left(n_1 + \frac{3}{2}\right)\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)(n_1 + n_2 + 2)(n_1 - n_2 + 1)$$

y de SO(4)

$$N(\ell_1, \ell_2) = (\ell_1 + \ell_2 + 1)(\ell_1 - \ell_2 + 1)$$

En función de las coordenadas asociadas a los diagramas de Dynkin:

$$SO(5) \qquad n = \lambda_1 M^{(1)} + \lambda_2 M^{(2)}$$

$(M^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $M^{(2)} = (1,0)$ representaciones fundamentales de SO(5)) y

$$N(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{6}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3)(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)(\lambda_2 + 1)$$

$SO(4)$ $\quad \rho = \lambda_1 M^{(1)} + \lambda_2 M^{(2)} \quad \left(M^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), M^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right)$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$N(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) = \left(2\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) + 1\right)\left(2\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) + 1\right)$$

La notación $\left(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}\right)$ coincide con la usual del grupo de Lorentz: (spinors no punteados, spinors punteados).

Notación:

DY Diagrama de Young

PM Peso máximo

D Dimensión

DY	PM SU(4)	PM SO(6)	D	PM SO(5)	D	PM SO(4)	D
[1]	(3/4,-1/4,-1/4,-1/4)	(1/2,1/2,1/2)	4	(1/2,1/2)	4	(1/2,1/2)	2
						(1/2,-1/2)	2
[2]	(3/2,-1/2,-1/2,-1/2)	(1 , 1 , 1)	10	(1 , 1)	10	(1 , 1)	3
						(1 , 0)	4
						(1, -1)	3
[1²]	(1/2,1/2,-1/2,-1/2)	(1 , 0 , 0)	6	(1 , 0)	5	(1 , 0)	4
						(0 , 0)	1
				(0 , 0)	1	(0 , 0)	1
[3]	(9/4,-3/4,-3/4,-3/4)	(3/2,3/2,3/2)	20	(3/2,3/2)	20	(3/2,3/2)	4
						(3/2,1/2)	6
						(3/2,-1/2)	6
						(3/2,-3/2)	4
[2,1]	(5/4,1/4,-3/4,-3/4)	(3/2,1/2,1/2)	20	(3/2,1/2)	16	(3/2,1/2)	6
						(3/2,-1/2)	6
						(1/2,1/2)	2
						(1/2,-1/2)	2
				(1/2,1/2)	4		

[1³]	(1/4,1/4,1/4,-3/4)	(1/2,1/2,-1/2)	4	(1/2,1/2)	4		
[4]	(3 , -1 , -1 , -1)	(2 , 2 , 2)	35	(2 , 2)	35	(2 , 2)	5
						(2 , 1)	8
						(2 , 0)	9
						(2 , -1)	8
						(2 , -2)	5
[3,1]	(2 , 0 , -1 , -1)	(2 , 1 , 1)	45	(2 , 1)	35	(2 , 1)	8
						(2 , 0)	9
						(2 , -1)	8
						(1 , 1)	3
						(1 , 0)	4
						(1 , -1)	3
				(1 , 1)	10		
[2²]	(1,1,-1,-1)	(2 , 0 , 0)	20	(2 , 0)	14	(2 , 0)	9
						(1 , 0)	4
						(0 , 0)	1
				(1 , 0)	5		
				(0 , 0)	1		

$[2,1^2]$	(1 , 0 , 0 , -1)	(1 , 1 , 0)	15	(1 , 1)	10		
				(1 , 0)	5		
$[1^4]$	(0 , 0 , 0 , 0)	(0 , 0 , 0)	1	(0 , 0)	1		
$[5]$	(15/4,-5/4,-5/4,-5/4)	(5/2,5/2,5/2)	56	(5/2,5/2)	56	(5/2,5/2)	6
						(5/2,3/2)	10
						(5/2,1/2)	12
						(5/2,-1/2)	12
						(5/2,-3/2)	10
						(5/2,-5/2)	6
$[4,1]$	(11/4,-1/4,-5/4,-5/4)	(5/2,3/2,3/2)	84	(5/2,3/2)	64	(5/2,3/2)	10
						(5/2,1/2)	12
						(5/2,-1/2)	12
				(3/2,3/2)	20	(5/2,-3/2)	10

[3,2]	(7/4,3/4,-5/4,-5/4)	(5/2,1/2,1/2)	60	(5/2,1/2)	40	(5/2,1/2)	12
						(5/2,-1/2)	12
						(3/2,1/2)	6
						(3/2,-1/2)	6
						(1/2,1/2)	2
						(1/2,-1/2)	2
				(3/2,1/2)	16		
				(1/2,1/2)	4		
$[3,1^2]$	(7/4,-1/4,-1/4,-5/4)	(3/2,3/2,1/2)	36	(3/2,3/2)	20		
				(3/2,1/2)	16		
$[2^2,1]$	(3/4,3/4,-1/4,-5/4)	(3/2,1/2,-1/2)	20	(3/2,1/2)	16		
				(1/2,1/2)	4		
[6]	(9/2,-3/2,-3/2,-3/2)	(3 , 3 , 3)	84	(3 , 3)	84	(3 , 3)	7
						(3 , 2)	12
						(3 , 1)	15
						(3 , 0)	16
						(3 , -1)	15
						(3,-2)	12
						(3,-3)	7

[5,1]	(7/2,-1/2,-3/2,-3/2)	(3 , 2 , 2)	140	(3 , 2)	105	(3 , 2)	12
						(3 , 1)	15
						(3 , 0)	16
						(3 , -1)	15
						(3 , -2)	12
						(2 , 2)	5
						(2 , 1)	8
						(2 , 0)	9
						(2 , -1)	8
						(2 , -2)	5
				(2 , 2)	35		
[4,2]	(5/2,1/2,-3/2,-3/2)	(3 , 1 , 1)	126	(3 , 1)	81	(3 , 1)	15
						(3 , 0)	16
						(3 , -1)	15
						(2 , 1)	8
						(2 , 0)	9
						(2 , -1)	8
						(1 , 1)	3
						(1 , 0)	4
						(1 , -1)	3

				(2 , 1)	35		
				(1 , 1)	10		
$[4,1^2]$	(5/2,-1/2,-1/2,-3/2)	(2 , 2 , 1)	70	(2 , 2)	35		
				(2 , 1)	35		
$[3^2]$	(3/2,3/2,-3/2,-3/2)	(3 , 0 , 0)	50	(3 , 0)	30	(3 , 0)	16
						(2 , 0)	9
						(1 , 0)	4
						(0 , 0)	1
				(2 , 0)	14		
				(1 , 0)	5		
				(0 , 0)	1		
$[3,2,1]$	(3/2,1/2,-1/2,-3/2)	(2 , 1 , 0)	64	(2 , 1)	35		
				(2 , 0)	14		
				(1 , 1)	10		
				(1 , 0)	5		
$[2^3]$	(1/2,1/2,1/2,-3/2)	(1 , 1 , -1)	10	(1 , 1)	10		

REFERENCIAS

Amar, V., Dozzio, U., Nuovo Cimento 9B, 53, 1972. Finite dimensional Gel' fand- Yaglom equations for arbitrary spin.

Azcárraga, J.A., Boya, L.J., J. Math. Phys. 9, 1689, 1968. Poincaré group and the invariant relativistic equations for massive particle of any spin.

Bade, W., Jehle, H.,Rev. Mod. Phys. 25, 714, 1953. An introduction to spinors.

Bargmann, V., Wigner, E.P., Proc.Nat. Acad. Sci. 34, 211, 1948. Group theoretical discussion of relativistic wave equations.

Barut, A. O., Muzinich, I., Williams, D.N.,Phys. Rev. 130, 442, 1963. Construction of invariant scattering amplitudes.

Behrends, R.E., Fronsdal, C., Phys. Rev. 106,345, 1957. Fermi decay of higher spin particles.

Berends, F.A., van Holten, J.W., Nieuwenhuizen, P., de Wit, B.,Nucl. Phys. B154, 261, 1979. On field theory for massive and massless spin 5/2 particles.

Bhabha, H.J., Rev. Mod. Phys. 17, 200, 1945. Relativistic wave equations for the elementary particles.

Capri, A.Z., Phys. Rev. 178, 2427, 1969. First order wave equation for half-odd-integral spin.

Capri, A.Z., Phys. Rev. 187, 1811, 1969. Nonuniqueness of the spin 1/2 equation.

Castell, L., Nuovo Cimento, 50, 945, 1967. Linear field equations for particles with arbitrary spin.

Cecchini, R., Celeghini, R., Nuovo Cimento 37A, 266, 1977. Wave equations from space-time.

Cecchini, R., Tarlini, M., Nuovo Cimento 47A, 1, 1978. Arbitrary spin particles in an electromagnetic field.

Dirac, P.A.M., Proc. Roy. Soc. London 117A, 610, 1928. The quantum theory of the electron.

Dirac, P.A.M., Proc. Roy. Soc. London 155A, 447, 1936. Relativistic wave equations.

Doria, F.A., Lett. Nuovo Cimento 7, 153, 1973. Equations for a spin--two field from a Dirac-like equation.

Doria, F.A., Lett. Nuovo Cimento 8, 994, 1973. Clifford algebra formulation of multispinor field equations.

Doria, F.A., Lett. Nuovo Cimento 18, 37, 1977. On Teitler's higher spin field equation.

Einstein, S., Finkelstein, R., J. Math. Phys. 20, 1972, 1979. Solutions of the Rarita-Schwinger equation in the Kerr-Newman space.

Fierz, M., Pauli, W., Proc. Roy. Soc. London 173A, 211, 1939. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field.

Foldy, L.L., Wouthuysen, S.A., Phys. Rev. 78, 29, 1950. On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non relativistic limit.

Foldy, L.L., Phys. Rev. 102, 568, 1956. Synthesis of covariant particle equations.

Fronsdal, C., Nuovo Cimento Supp. 9,416, 1958. On the theory of higher spin fields.

Galindo, A. Pascual, P., Nuovo Cimento 31, 132, 1964. Some remarks on the relativistic wave equations.

Gruber, B., Klymik, A.U., J. Math. Phys. 20, 1995, 1979. Matrix elements for infinitesimal operators of the groups U(p+q) and U(p,q) in a U(p)xU(q) basis.I.

Gupta, S.N., Phys. Rev. 95, 1334, 1954. Fierz-Pauli theory of particles of spin 3/2.

Guralnik, G.S., Kibble, T.W.B., Phys. Rev. 139B, 712, 1965. Lagrangian formulation of $\widetilde{U}(12)$ symmetry and the Bargmann-Wigner equations.

Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc. London, 192A, 195, 1947. Relativistic equations for elementary particles.

Hurley, W.J., Phys. Rev. D10, 1185, 1974. Invariant bilinear forms and the discrete symmetries for relativistic arbitrary spin fields.

Itzykson, C., Nauenberg, M., Rev. Mod. Phys. 38, 95, 1966. Unitary groups: Representations and decomposition.

Kamefuchi, S., Takahashi, Y., Nuovo Cimento 44A, 1, 1966. A Lagrange formalism and the relativistic quantization of the Bargmann--Wigner fields.

Kawakami, A., Kamefuchi, S., Nuovo Cimento 48A, 239, 1967. Lagrangian field theory of the Rarita-Schwinger fields with spin 5/2.

Kawakami, A., Nucl. Phys., 2B, 33, 1967. Lagrangian formalism for massive Rarita-Schwinger fields with spin 5/2.

Kawasaki, M., Kobayashi, M., Mori, Y., Lett. Nuovo Cimento 14, 611, 1975. Lagrange formulation of the 20-component theory of spin-3 fields.

Kemmer, N., Proc. Roy. Soc. London 173A, 91, 1939. The particle aspect of meson theory.

Khalil, M.A.K., Nuovo Cimento 45A, 389,1978. An equivalence of relativistic wave equations.

Kobayashi, M., Lett. Nuovo Cimento 18, 65, 1977. A first order formalism for massive spin-3 fields.

Krajcik, R.A., Nieto, M.M., Phys. Rev. D10, 4049, 1974. Bhabha first order wave equations. I. C, P and T. Phys. Rev. D11, 1442, 1975. II. Mass and spin composition, hamiltonians and general Sakata--Taketani reductions. Phys. Rev. D11, 1459, 1975. III.Poincaré generators. Phys. Rev. D13, 924, 1976. IV. Causality with minimal electromagnetic coupling. Phys. Rev. D14, 418, 1976. V. Indefinite metric and Foldy-Wouthuysen transformations. Phys. Rev. D15, 433, 1977. VI. Exact closed-form, Foldy-Wouthuysen transformations and solutions. Phys. Rev. D15, 445, 1977. VII. Summary and conclusions.

Krajcik, R.A., Nieto, M.M., Phys. Rev., D13, 2245, 1976. Foldy--Wouthuysen transformations in an indefinite metric space.I. Necessary and sufficient conditions for existence. Phys. Rev. D13, 2250, 1976. II. Theorems for practical calculations. Phys. Rev. D15, 416, 1977. III. Relation to Lorentz transformations for first-order wave equations and the Poincaré generators. Phys. Rev. D15, 426, 1977. IV. Exact closed-form expressions for first-order wave equations.

Larsen, M.L., Repko, W.W., J. Math. Phys. 19, 930, 1978. The use of the symmetric group in the construction of multispinor lagrangians

Loide, K., Loide, R.K., Preprint F-6 (1977) Tartu (Estonian SSR) Some remarks on first order wave equations.

Massa, E., Nuovo Cimento 9B, 41, 1972. Spinor equivalents of irreducible tensors under the special Lorentz group.

Mathews, P.M., Phys. Rev. 143, 978, 1966. Relativistic Schrödinger equations for particles of arbitrary spin.

Moldauer, P.A., Case, K.M., Phys. Rev. 102, 279, 1956. Properties of half-integral spin Dirac-Fierz-Pauli particles.

Niederer, U.H., O'Raifeartaigh, L., Forts. Phys. 22, 111, 1974. Realizations of the unitary representations of the inhomogeneous space-time groups, I. General Structure. Forts. Phys., 22, 131, 1974. II. Covariant realizations of the Poincaré group.

van Nieuwenhuizen, P., Nucl. Phys. B60, 478, 1973. On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation.

Ogievetsky, V.I., Sokatchev, E., J. Phys. A10, 2021, 1977. Superfield equations of motion.

Rarita, W., Schwinger, J., Phys. Rev. 60, 61, 1941. On a theory of particles with half-integer spin.

Rivers, R.J., Nuovo Cimento 34, 386, 1964. Lagrangian theory for neutral massive spin-2 field.

Salam, A., Delbourgo, R., Strathdee, J., Proc. Roy. Soc. London 284A, 146, 1965. The covariant theory of strong interaction symmetries. I.

Salam, A. Delbourgo, R., Rashid, M.A., Strathdee, J., Proc.Roy. Soc. London 285A, 312, 1965. The covariant theory of strong interactions symmetries. II.

Santhanam, T.S., Tekumalla, A.R., Forts. Phys. 22, 431, 1974. Bhabha equations for unique mass and spin.

Seetharaman, M., Mathews, P.M., J. Math. Phys. 13, 938, 1972. Poincaré and TCP invariance in the determination of wave equations for particles of arbitrary spin.

Singh, L.P.S., Hagen, C.R., Phys. Rev. D9, 898, 1974. Lagrangian formulation for arbitrary spin.I. The boson case. Phys. Rev. D9, 910, 1974. II. The fermion case.

Sokatchev, E. Nucl. Phys. B99, 96, 1975. Projection operators and supplementary conditions for superfields with arbitrary spin.

Sudarshan, E.C.G., Khalil, M.A.K., Hurley, W.J., J. Math. Phys. 18, 855, 1977. A criterion for reducibility of a relativistic wave equation.

Velo, G., Zwanziger, D., Phys. Rev. 186, 1337, 1969. Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential.

Weaver, D.L., Hammer, C.L., Good, R.H., Phys. Rev. 135B, 241, 1964. Description of a particle with arbitrary mass and spin.

Weaver, D.L.,An. of Phys. 95, 421, 1975. A comment on relativistic hamiltonian equations for any spin.

Weinberg, S., Phys. Rev. 133B, 1318, 1964. Feynman rules for any spin. I. Phys. Rev. 134B, 882, 1964. II. Massless particles. Phys. Rev. 181, 1893, 1969. III.

Wightman, A.S., Les Houches 1960. Relations de dispersion et particules élémentaires, p. 159, L'invariance dans la mécanique quantique relativiste.

Wightman, A.S., V Coral Gables 1968. Symmetry principles at high energy. The stability of representations of the Poincaré group.

Wightman, A.S., Coral Gables 1971. Troubles in the external field problem for invariant wave equations. Introductory remarks.

Wightman, A.S., Partial differential equations,Symp. Pure Math. 23, 441, 1973. Relativistic wave equations as singular hyperbolic systems.

Wightman, A.S., Essays in honor of V. Bargmann, Ed. Lieb, Simon, Wightman, Princeton 1976. Inestability phenomena in the external field problem for two classes of relativistic wave equations.

Wightman, A.S., Erice School 1977, Springer. Invariant wave equations. General theory and applications to the external field problem.

Wild, E., Proc. Roy. Soc. London 191A, 253, 1947. On first order wave equations for elementary particles without subsidiary conditions.

Wigner, E.P., An. of Math., 40, 149, 1939. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group.

Bacry, H., Leçons sur la théorie des groups et les symétries des particles élémentaires. Gordon & Breach, 1967.

Bjorken, J.D., Drell, S.D., Relativistic Quantum Mechanics and Quantum Fields. Mc Graw, 1965

Boerner, H., Representations of groups. North Holland, 1969.

Bogolubov, N.N., Logunov, A.A., Todorov, I.T., Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory. Benjamin, 1975.

Cartan, E., The theory of spinors. Hermann, 1966.

Corson, E.M., Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations. Blackie & Son, 1954.

Gel'fand, I.M., Minlos, R.A., Shapiro, Z.Ya., Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications. Pergamon Press, 1963.

Hamermesh, M., Group theory and its application to physical problems. Addison-Wesley, 1964.

Lurié, D., Particles and fields. Interscience, 1968.

Lyubarskii, G. Ya., The application of group theory in Physics. Pergamon Press, 1960.

Murnaghan, F.D., The theory of group representations. Dover, 1963.

Naimark, M.A., Linear representations of the Lorentz group. Pergamon Press, 1969.

Rühl, W., The Lorentz group and harmonic analysis. Benjamin, 1970.

Takahashi, Y., An introduction to field quantization. Pergamon Press, 1969.

Visconti, A., Théorie quantique des champs. Gauthier-Villars, 1961.

Weyl, H., The theory of groups and quantum mechanics. Dover, 1950.

Weyl, H., The classical groups. Princeton Press, 1946.