

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA TIERRA Y ASTROFÍSICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código TFG: FTA30

Los límites de la predicción meteorológica: Las ecuaciones de Lorenz y el efecto mariposa

The limits of weather forecasting: Lorenz equations and the butterfly effect

Supervisor: Álvaro de la Cámara Illescas

Javier de Oro García

Grado en Física

Curso académico 2023-24

Convocatoria Ordinaria de Junio

Calificación: 9,0

Resumen:

En este trabajo mostraremos que el sistema atmosférico es caótico y, a la hora de predecir estados, existe una gran sensibilidad a las condiciones iniciales. La solución más efectiva y extendida es tratar la información de una manera probabilista con la “predicción por conjuntos”. Todo esto lo ejemplificaremos con el Sistema de Lorenz, resolviendo sus ecuaciones, graficando las trayectorias que toman sus soluciones en el espacio de fases y acumulando en un histograma las posiciones finales de las mismas. Por último, pondremos un ejemplo real de cómo los modelos europeo y estadounidense difirieron en sus previsiones para la trayectoria del huracán Sandy en 2012.

Abstract:

In this study we will show that the atmospheric system is chaotic and, when it comes to predict states, there exists a big sensitivity to initial conditions. The most effective and extended solution is to treat the system in a probabilistic way using the “ensemble forecasts”. Everything will be exemplified with the Lorenz’s System, solving its equations, plotting the solutions’ trajectories, which are in the phase space and accumulating its final positions in an histogram. Eventually, we will show a real example of how both the European and American models differed in their predictions for hurricane Sandy’s trajectories in 2012.

Índice de contenidos

1. INTRODUCCIÓN	5
2. METODOLOGÍA	7
2.1. El Sistema de Lorenz.....	7
2.2. Método Runge-Kutta.....	8
3. RESULTADOS	10
3.1. Naturaleza del Atractor de Lorenz	10
3.2. Comportamiento de las tres componentes del Atractor.....	11
3.3. Tiempo de divergencia de las trayectorias	13
3.4. Predicción por conjuntos	15
3.5. Caso real: predicción de la trayectoria del huracán Sandy.....	19
4. CONCLUSIONES	21

1. INTRODUCCIÓN

El Efecto Mariposa es el término acuñado por Edward Norton Lorenz (1917-2008) para referirse al fenómeno que sucede en numerosos sistemas, como por ejemplo la atmósfera, en los que un pequeño cambio en las condiciones actuales del mismo puede provocar un estado final cuyas variables tomen valores completamente diferentes a los de partida, no teniendo sentido intentar predecirlo de manera exacta.

La atmósfera es un sistema cuya predicción se basa en la solución de las ecuaciones de la dinámica de fluidos, o sea, de Navier-Stokes. De este modo, entran en juego los modelos de predicción meteorológica, donde cada uno trata de resolver dichas ecuaciones de la manera más precisa. Sin embargo, existen varias limitaciones:

- a) Las ecuaciones no admiten una solución analítica, así que se resuelven numéricamente. Sin embargo, no todos los procesos quedan representados (transferencia radiativa, turbulencia, nubosidad, precipitación, etc.). Estos procesos son incluidos mediante parametrizaciones, las cuales son modelos sencillos, normalmente unidimensionales, basados en el conocimiento teórico y/u observacional de cada proceso.
- b) La atmósfera es un sistema caótico: las soluciones divergen rápidamente para condiciones iniciales ligeramente distintas. Dichas condiciones presentan, además, el problema de que no se conocen exactamente debido a que dependen exclusivamente de las observaciones meteorológicas.

Ante estas dos problemáticas se presentan las siguientes maneras de atajarlas:

- a) En lo que respecta a los modelos, se pueden mejorar tanto en términos computacionales como en la propia física que representan. Como ejemplo veremos cómo una mejor parametrización de los cúmulos por parte del *Centro Europeo de Previsiones Meteorológicas a Medio Plazo* permitió una mejor predicción que la del *Sistema de Previsión Global*, de la NOAA, de la trayectoria que siguió el huracán Sandy a lo largo de las costas estadounidenses.
- b) En lo que se refiere a las condiciones iniciales, estas se pueden mejorar, en primer lugar, realizando unas observaciones más precisas y, después, mejorando el sistema mediante el cual el modelo ingiere las observaciones, proceso denominado “asimilación de datos”. No obstante, debido que la incertidumbre estará siempre presente, se lleva a cabo la predicción por conjuntos, donde se perturban varias veces las condiciones iniciales y se corre el modelo para todas ellas a fin de ver cuál será el estado final más probable, siendo este un tratamiento estadístico.

Para poder analizar esta fenomenología del caos y dificultad a la hora de predecir estados del sistema, emplearemos una analogía con un modelo sencillo de una columna de convección, al igual que hizo Lorenz a mediados del siglo XX.

El objetivo de este trabajo es poner de manifiesto que el caos está presente en la atmósfera y que existe una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, y que debido a este último factor lo más efectivo a la hora de realizar predicciones es tratar de manera probabilista un conjunto de predicciones deterministas (predicción por conjuntos). Además, se analizarán los motivos que hacen que la predicción de distintos modelos sea

diferente: por un lado, el cómo trabajan y resuelven las ecuaciones y, por otro, la adecuada parametrización de la fenomenología atmosférica y cómo esta se introduce en las ecuaciones y dinámica del sistema.

2. METODOLOGÍA

2.1. El Sistema de Lorenz

El Sistema Dinámico de Lorenz fue establecido en 1963 por el meteorólogo estadounidense Edward Norton Lorenz en un intento por analizar los límites de la predicción meteorológica. Se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Este sistema es un modelo simplificado de convección, el cual describe el flujo caótico emergente de ecuaciones hidrodinámicas no lineales (Bertuglia et al. 2005). El sistema tiene tres grados de libertad, es forzado y disipativo, es decir, no conserva la energía. Además, es no lineal porque existen productos cruzados de las diferentes variables dependientes y, por último, es autónomo, es decir, los coeficientes que multiplican a las variables son independientes del tiempo, el cual está adimensionalizado. Las tres variables con las que nos encontramos dependen del mismo, están también adimensionalizadas y con un punto sobre las mismas se denota su derivada temporal:

- x es proporcional a la amplitud del movimiento de convección.
- y es proporcional al gradiente térmico entre las corrientes ascendente y descendente
- z es proporcional a la distorsión de la linealidad del perfil vertical de temperatura

Los parámetros involucrados en el sistema son constantes propias de los fluidos que entran en juego, y los valores que tomamos son los mismos que escogió Lorenz:

- σ es el número de Prandtl (cociente entre la viscosidad y la conductividad térmica), y será igual a 10.
- ρ es el número de Rayleigh (diferencia de temperatura entre la base de la columna y el tope), y será igual a 28.
- β es el ratio entre la longitud y la altura del sistema, y será igual a $8/3$.

Sabemos de la teoría que, dadas unas condiciones iniciales *en* $t = 0$ (x_0, y_0, z_0), la solución del sistema será única, siendo este determinista, no implicando de este modo una fácil predicción. Como última característica fundamental tenemos que el sistema es caótico porque presenta mezclado topológico, una propiedad que tiene que ver con lo parecidas que podrán llegar a ser dos condiciones meteorológicas inicialmente diferentes en la evolución del sistema (Lorenz, 1963).

Reincidiendo en la no linealidad del sistema, la implicación más importante de este hecho es la enorme sensibilidad al cambio en las condiciones iniciales. Si, además, lo unimos a que es caótico, la consecuencia más relevante es que dos estados que comiencen prácticamente en el mismo punto del espacio de fases, acabarán en estados completamente diferentes, un fenómeno que estudiaremos en este trabajo. En términos prácticos, no es un sistema que se pueda predecir a pesar de ser, como ya hemos dicho, determinista.

2.2. Método Runge-Kutta

Para la resolución del Sistema de Lorenz recurriremos a los métodos Runge-Kutta, desarrollados por los matemáticos Carl Runge y Martin Wilhelm Kutta alrededor del 1900.

Estos son métodos matemáticos numéricos e iterativos destinados a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, siendo este el caso de nuestro sistema. Con el plural nos referimos a que emplearemos el método de segundo y cuarto orden como un intento de hacer una analogía a la comparativa entre dos modelos que “compiten” por ver cuál es capaz de ser más exacto y, por tanto, más adecuado describiendo la realidad.

Orden II:

Recordando el método de Euler (de orden 1) como primera aproximación para resolver ecuaciones diferenciales:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

donde se avanza una solución desde la posición x_n hasta el paso inmediatamente posterior, es decir, $x_n + h$. Vemos que, para este caso, para llegar al valor de la solución en un paso determinado, se emplea la información del paso anterior, entregando de esta manera un error asociado del orden de $O(h^2)$.

Para el método de orden II realizaremos conceptualmente lo mismo, pero añadiendo un “paso prueba” (“*trial step*”) en el punto medio de intervalo ($x_n, x_n + h$). Después, usaremos el valor de tanto x como y en ese punto medio para así calcular el “paso completo” a través de dicho intervalo entero. En términos de expresiones matemáticas:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3)$$

existiendo ahora un error menor porque $h (< 1)$ es un grado mayor que en el caso de Euler.

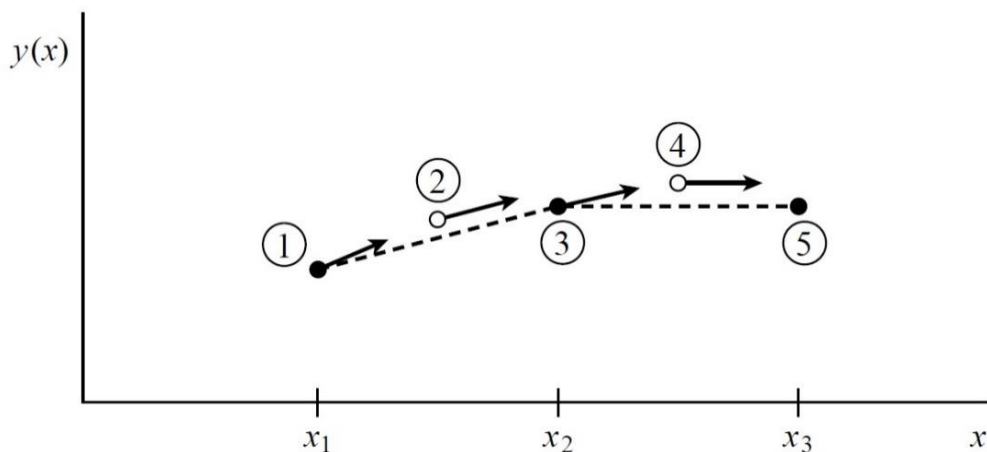


Figura 1. Significado geométrico del método Runge-Kutta de orden II. Con la derivada en el origen se encuentra el valor de $y(x)$ en el punto medio del intervalo para, después, usar la pendiente de dicho punto para todo el intervalo.

Orden IV:

Este segundo método es, con respecto al anterior, mucho más usado y ciertamente más complejo. Ahora, para calcular el siguiente punto se requiere de cuatro evaluaciones distintas:

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)$$

donde tenemos las pendientes (multiplicadas por el paso h) al inicio (k_1), en el punto medio del intervalo utilizando k_1 (k_2), también en el punto medio del intervalo pero usando k_2 (k_3), y al final (k_4). Por último, se calcula el siguiente punto promediando las cuatro pendientes, dando un peso doble a los puntos intermedios.

Podemos ver cómo el error asociado es del orden de $O(h^5)$, siendo ahora dos órdenes de magnitud más pequeño que en el caso anterior.

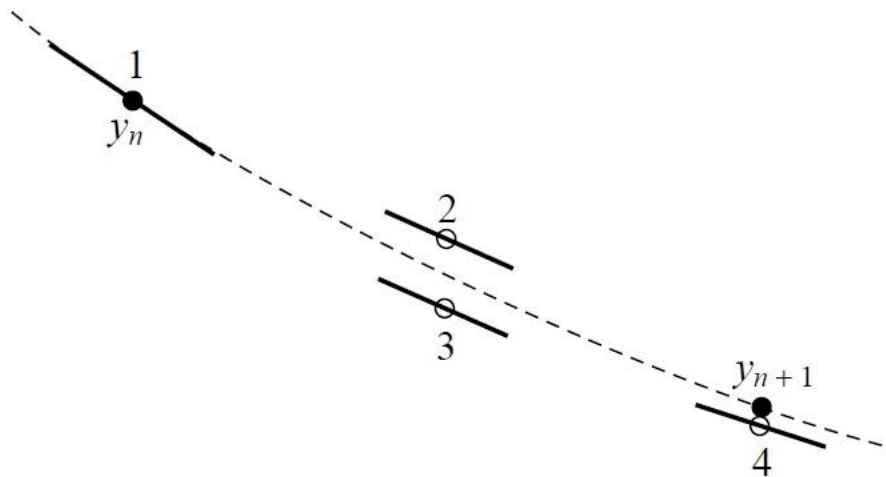


Figura 2. Significado geométrico del método Runge-Kutta de orden IV. En cada paso la derivada se evalúa cuatro veces: una al inicio, dos veces en los "puntos prueba" en la mitad del intervalo y, por último, al final del mismo.

* * *

La resolución del sistema y todas las gráficas que hayan sido obtenidas al trabajar con el mismo fueron elaboradas mediante el software *Matlab*.

3. RESULTADOS

3.1. Naturaleza del Atractor de Lorenz

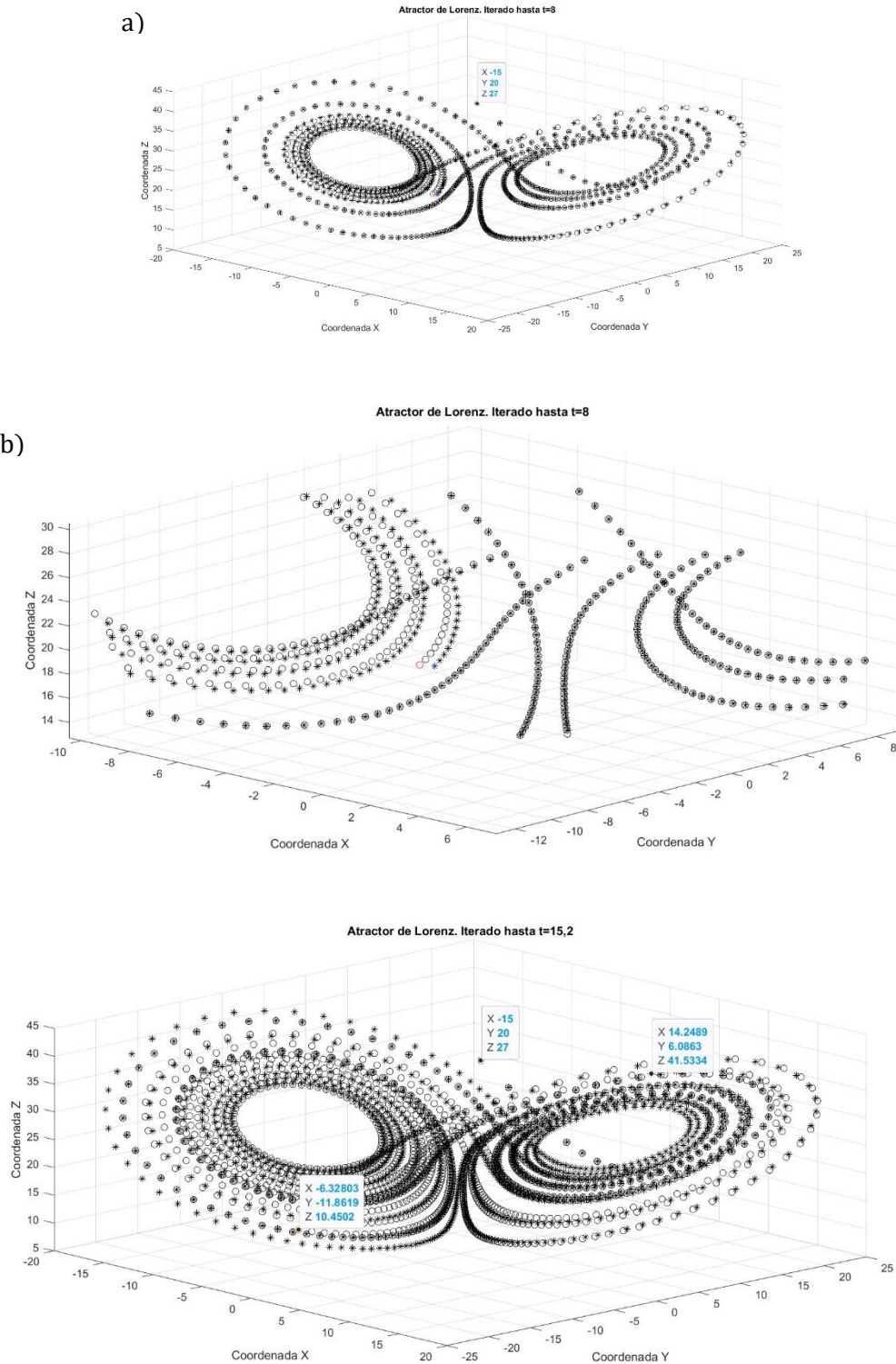


Figura 3. El Atractor de Lorenz para dos trayectorias, una perturbada (asteriscos) respecto de otra de control (círculos). a) Sistema iterado hasta $t=8$ con el estado inicial de control marcado. b) Zoom de la imagen anterior con los puntos finales de ambas trayectorias marcados (en azul la perturbada y en rojo la de control). c) Sistema iterado hasta $t=15,2$ con el estado inicial marcado, junto los estados finales de control (a la izquierda) y el perturbado (a la derecha).

En la Figura 3 observamos la geometría tan clara y definida del Atractor: las trayectorias en el espacio de fases describen oscilaciones entre regiones muy definidas con transiciones entre ambas pareciendo así las alas de una mariposa, de ahí el nombre que se le dio al famoso fenómeno.

Y, en segundo lugar, vemos una clara manifestación de la no linealidad y el caos: dos trayectorias que comienzan muy juntas (perturbación en las tres componentes de valor 0,01 unidades), con un salto temporal entre dos puntos de 0,01 unidades también, cuando llegan a $t = 8$ ya se distinguen claramente y, por supuesto, para tiempos mayores, la naturaleza de ambas trayectorias no tiene nada que ver una con otra.

A continuación, analizaremos los valores y el comportamiento que toma cada una de las componentes del Atractor a fin de analizar más en profundidad este sistema.

3.2. Comportamiento de las tres componentes del Atractor

A continuación, mostraremos cómo progresa cada una de las componentes del Sistema de Lorenz por sí solas a lo largo del tiempo. En nuestro caso, iteraremos hasta un tiempo $t = 20$, recordando que este se encuentra adimensionalizado.

Es importante hacer notar que todos los pares de trayectorias aquí graficados comienzan en la misma posición del espacio de fases salvo por una pequeña perturbación que tiene una de ellas, la cual es de 0,01 unidades más que la de referencia, es decir, describen aproximadamente el mismo estado inicial del sistema que queremos estudiar.

Componente X:

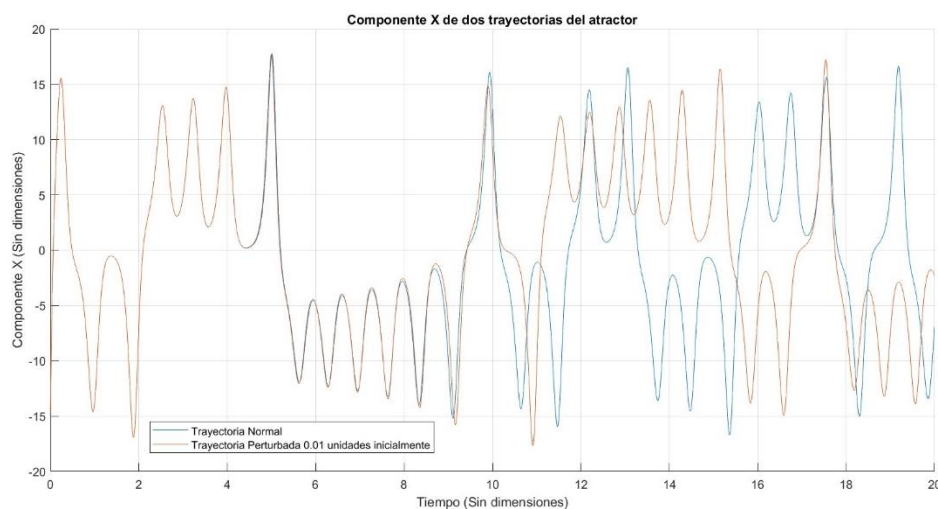


Figura 4. Gráfica con la trayectoria que sigue la componente X de dos trayectorias (una de referencia y otra perturbada) del sistema en el espacio de fases.

En la Figura 4 vemos que, desde el momento que comienza el tiempo a correr, ambas trayectorias describen prácticamente el mismo estado para el sistema. Sin embargo, tras pasar el punto temporal $t = 10$, las trayectorias empiezan a divergir y, aunque el comportamiento es el mismo (oscilaciones entre ciertos puntos con una transición que dura alrededor de 1 unidad temporal), ya no coinciden salvo cuando se cruzan. Se observan incluso patrones opuestos con un cierto desfase en determinados intervalos como sucede, por ejemplo, en $t \in [13, 17]$.

La fenomenología que subyace a las oscilaciones tan marcadas viene producida por la existencia de esas dos regiones tan diferenciadas del Atractor: cuando las trayectorias permanecen alrededor de alguna de ellas, se observan oscilaciones cuyas amplitudes son variables en el tiempo, no dando lugar así a una geometría circular perfecta.

Componente Y:

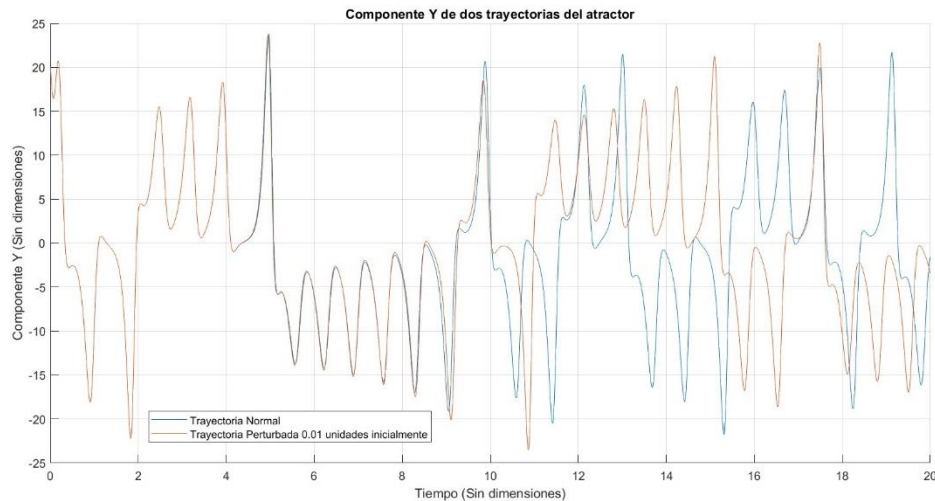


Figura 5. Gráfica con la trayectoria que sigue la componente Y de dos trayectorias (una de referencia y otra perturbada) del sistema en el espacio de fases.

Para esta componente, se observa en la Figura 5 una fenomenología similar a la que apreciábamos en la anterior: se describen prácticamente estados idénticos hasta el instante $t \approx 10$, comportamientos oscilantes y en algunos intervalos son opuestos con un desfase.

De nuevo, se observa cómo se describen las proyecciones de las “alas” de la mariposa cuando las trayectorias permanecen alrededor de puntos cuyos valores parecen opuestos, sugiriendo una cierta simetría en la figura tridimensional.

Componente Z:

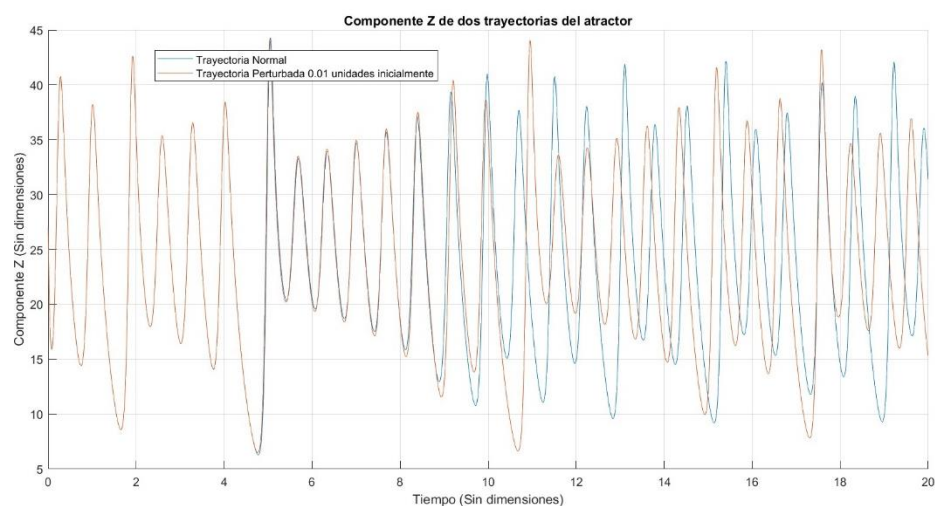


Figura 6. Gráfica con la trayectoria que sigue la componente Z de dos trayectorias (una de referencia y otra perturbada) del sistema en el espacio de fases.

Para este último caso tenemos varias semejanzas y diferencias con respecto a las otras dos componentes que se han estudiado.

En primer lugar, la similitud de estados y comienzo de divergencia ocurre en los mismos intervalos temporales. Después, también se observan oscilaciones alrededor de lo que parece, en este caso, el centro del Atractor en el espacio de fases.

Por el contrario, las diferencias que se observan con la X y la Y es que ya no se describen dos puntos alrededor de los cuales se presentan las oscilaciones, sino que ahora todo el comportamiento para estar “centrado” entorno a 27 unidades, lo que nos lleva a concluir que con esta componente no se describe la forma característica de las “alas”: ahora lo que se ve son las constantes oscilaciones con las que se recorre toda la figura, independientemente de que se encuentre el sistema en una región o en otra.

La consecuencia principal que obtenemos de observar estas tres gráficas y el Atractor completo en el apartado anterior es la siguiente: si se deseara predecir cómo va a encontrarse el sistema en un tiempo suficientemente alejado a partir de unas condiciones iniciales que apenas difieren de la realidad (tomamos la trayectoria de referencia como la “real”), no sería adecuado fiarse de lo que nos dijeran los resultados.

Queremos resaltar la analogía y, con ello, dar las primeras pinceladas de la complejidad que ostentará la predicción de estados futuros en el sistema Tierra-atmósfera y cómo no hay ningún sentido en predecir situaciones meteorológicas en períodos largos.

3.3. Tiempo de divergencia de las trayectorias

En este apartado pondremos de manifiesto un hecho clave que nos permitirá estudiar más en detalle el Sistema de Lorenz y que responde a la siguiente pregunta: ¿cuánto tiempo tardarán dos trayectorias inicialmente muy parecidas en separarse lo suficiente?

Para la realización de las subsiguientes gráficas hemos tenido en cuenta, para contabilizar la separación entre trayectorias, una nueva variable, la cual hemos definido de la siguiente manera:

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

donde i denota el estado i -ésimo en el espacio de fases (compararemos solo dos).

La métrica que usaremos para determinar si dos estados, r_1 y r_2 , son distintos entre sí consiste en evaluar el módulo de la diferencia entre esos dos estados:

$$|\Delta\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Adoptamos el criterio de que si la distancia relativa es mayor al 10%, es decir, si $\frac{|\Delta\vec{r}_{21}|}{|\vec{r}_1|} > 0,1$, los estados son distintos.

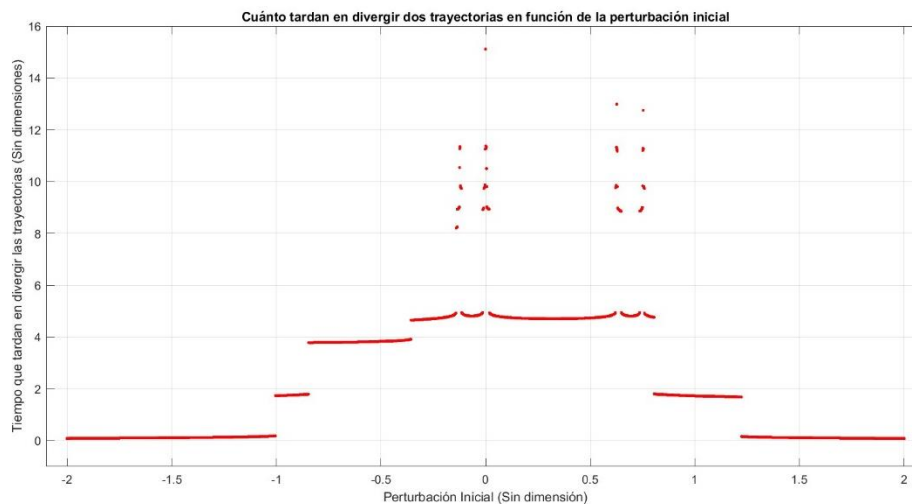


Figura 7. Gráfica con el tiempo que tardan en divergir dos trayectorias en función de la perturbación que las separaba al inicio del tiempo. De una perturbación a otra hay una diferencia en la milésima, o sea, de 0,001.

Podemos ver en la Figura 7 un comportamiento esperable: cuanto menor sea la perturbación entre los dos estados iniciales, más se tardará en divergir. Existe una singularidad en 0, la cual es provocada por dos trayectorias iguales que nunca divergen.

Es cierto que se ven varios “escalones” y dos picos que se salen de este comportamiento general. Ambos comportamientos surgen por la propia naturaleza del atractor en conjunción con lo caótico del mismo y la sensibilidad a las condiciones iniciales: debido a que, aunque *Matlab* pueda trabajar con numerosos decimales, llega un momento que debe redondear. Esto puede dar lugar a que, por ejemplo, al llegar a la bifurcación, dos trayectorias permanezcan todavía por debajo del umbral para una perturbación y no suceda lo mismo para una ligerísimamente diferente. Por último, otra consecuencia de estos factores es la asimetría en la gráfica, elevando así la dificultad de la predicción otro escalón más: aunque se perturbe la misma cantidad, no es lo mismo hacerlo añadiendo que sustrayendo.

Llegamos de esta manera a otra conclusión de gran importancia, y es que en los sistemas caóticos como este sencillo de Lorenz o como otros muchísimos más complejos como la atmósfera, siempre es deseable tener unas medidas muy precisas, siendo imperativo cuando se trata de predecir.

La parte negativa de todo esto es que, por mucha precisión que se logre, las trayectorias acabarán por divergir y habrá un momento en el que la predicción carezca de sentido. Sin embargo, siempre se podrá mejorar la tecnología a fin de agrandar la ventana temporal de futuro.

Finalmente, empleando otra analogía con la realidad, si es bien sabido que las predicciones meteorológicas no son fiables en períodos de no más de diez días aproximadamente ^[1] ¿cuál es la solución más adecuada?

^[1]Lead time of anomaly correlation coefficient (ACC) reaching multiple thresholds (High resolution (HRES) 500 hPa height forecasts). Fuente: ECMWF.

3.4. Predicción por conjuntos

El método de predicción por conjuntos es un método que consiste en ver cuál es el estado más probable que puede suceder en un tiempo final tras haber perturbado un número grande de veces el estado inicial. Este método nace de la necesidad de dar un tratamiento probabilístico a la información ya que, como hemos visto, tratar una sola trayectoria impide acotar la incertidumbre de la predicción debido a las condiciones iniciales. Por ello, el procedimiento que a día de hoy se emplea es este:

1. Se generan unas condiciones iniciales lo más precisas posibles mediante observaciones meteorológicas y su ingesta por el modelo (asimilación de datos).
2. Se crean varios estados parecidos al inicial a partir de la perturbación mínima de este último. Nosotros en la simulación la realizaremos de manera gaussiana, es decir, con una mayor densidad de estados iniciales cerca de la situación real. En las predicciones meteorológicas dicha perturbación se realiza con métodos más complejos.
3. Se realiza una simulación en la que se resuelvan las ecuaciones de la misma manera para todos estos estados iniciales, incluyendo el medido (muestra de control).
4. Se analiza el estado final de cada trayectoria para contemplar la distribución de estados finales: los más y menos probables.

Esta metodología permite acotar la incertidumbre de la predicción asociada a las incertidumbres en las condiciones iniciales mediante el tratamiento estadístico de un conjunto de predicciones (trayectorias), cuyas diferencias entre sí radican únicamente en las condiciones iniciales.

En este trabajo pondremos de manifiesto los resultados de aplicar esta metodología a nuestro Sistema de Lorenz, donde veremos diferentes distribuciones de estados finales en un punto temporal suficientemente alejado del punto de divergencia. Además, veremos cómo “compiten” dos modelos distintos entre sí entregando, para unas mismas condiciones iniciales, resultados diferentes. Una de nuestras intenciones es ejemplificar lo que sucede en la realidad: para la predicción no solo hay un modelo universal, sino que distintos centros de predicción ^[2] resuelven las ecuaciones que gobiernan la atmósfera de distinta manera introduciendo, por ejemplo, mismos parámetros pero con diferentes valores dando, por supuesto, resultados diferentes.

A continuación, analizaremos mediante histogramas los estados finales obtenidos mediante perturbación de unas condiciones iniciales, usando dos métodos de integración numérica: Runge-Kutta de segundo y cuarto orden.

^[2] Como la *National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA)* de Estados Unidos o el Centro Europeo de Previsiones Meteorológicas a Plazo Medio (*ECMWF*).

Componente X:

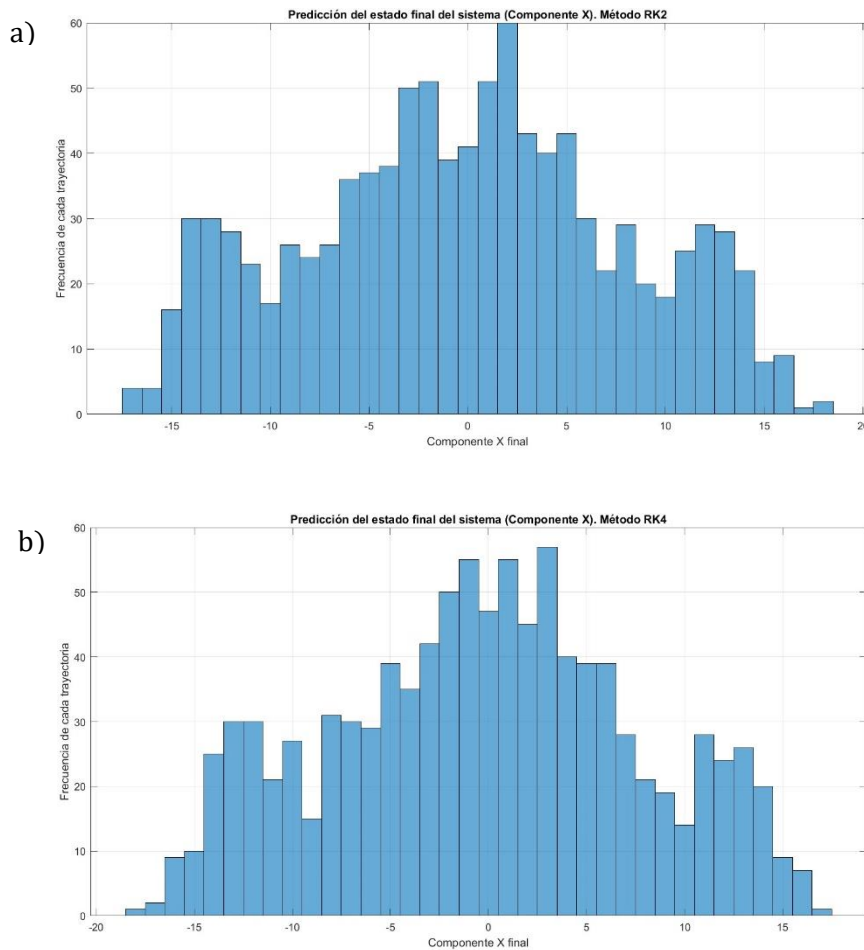


Figura 8. Histograma con la componente X de la posición final de las 999 trayectorias que han comenzado perturbadas gaussianamente respecto de 1 estado inicial muestra. a) Empleando el método RK2 y b) empleando el método RK4.

En la Figura 8 vemos distribuciones realmente semejantes para ambos modelos, con gran predominancia de los puntos $X = -13$ y $X = 11$ con unas 30 trayectorias de cada 1000 y $X = 0$ con el doble de trayectorias, siendo los dos primeros máximos relativos y, el tercero, un máximo absoluto. Como analogía, si uno tuviese que predecir cuál es el estado más probable y solo existieran estos tres, podría afirmarse que con un 50 % de probabilidades ocurría el estado $X=0$ y, con un 25% aproximadamente, ocurrirían $X=-13$ o $X=11$.

No es casualidad que estos dos puntos tengan más preponderancia: en la Figura 3 vemos que, aunque una de las trayectorias esté perturbada, hay valores entorno a los cuales hay una mayor ocurrencia como, por ejemplo, donde se producen las oscilaciones.

Comparando ambos modelos, vemos en la Figura 8 que, aunque los dos muestran una distribución de estados finales aparentemente iguales, hay notorias diferencias en el número de veces que se repite algunos estados como, por ejemplo, $X=0$. En dicho punto un modelo muestra mucha más probabilidad de ocurrencia que otro.

Cuando veamos la comparativa entre los modelos europeo y estadounidense a la hora de predecir las trayectorias del huracán Sandy, una pequeña diferencia en la parametrización de los cúmulos marcará la diferencia entre la probabilidad de que este fenómeno toque tierra o no.

Componente Y:

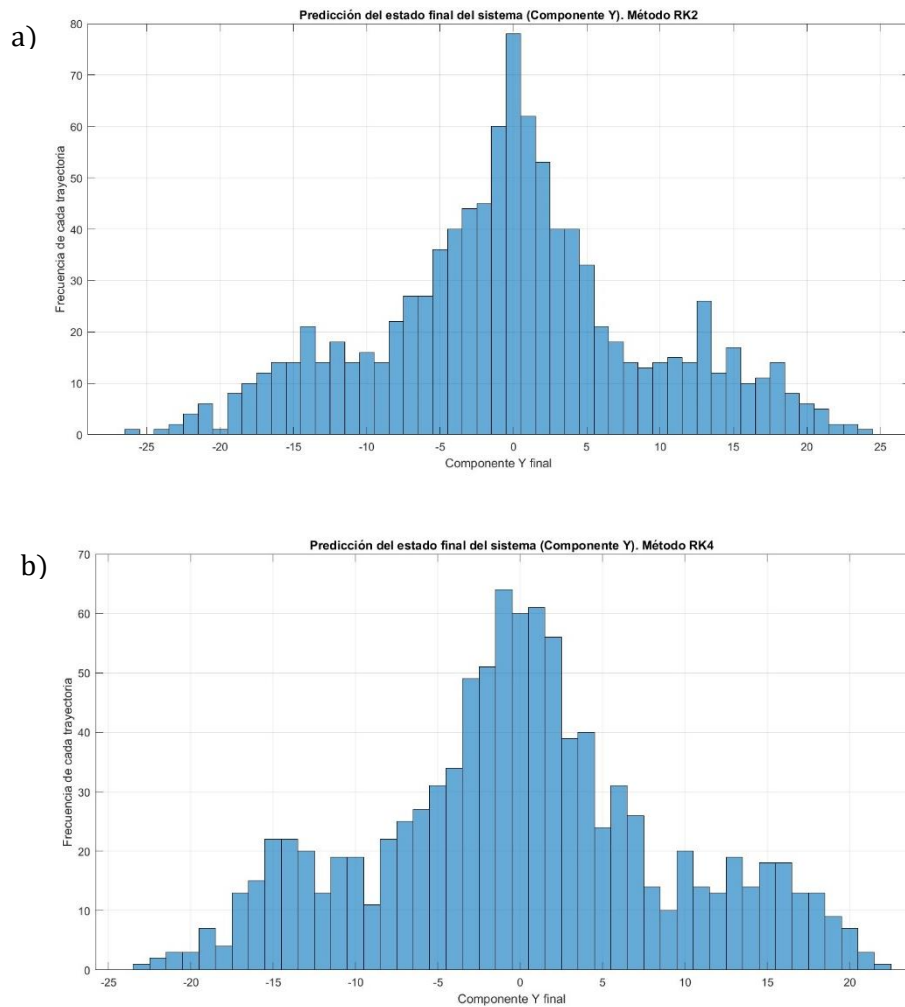


Figura 9. Histograma con la componente Y de la posición final de las 999 trayectorias que han comenzado perturbadas gaussianamente respecto de 1 estado inicial muestra. a) Empleando el método RK2 y b) empleando el método RK4.

En la Figura 9 vemos que en esta segunda componente se aprecia una distribución mucho más marcada que en el caso anterior, con una ocurrencia mayor en el origen y dos máximos relativos entorno a $Y = \pm 15$.

De nuevo, estos puntos son coherentes con la distribución de posiciones en el espacio de fases que toma el atractor de Lorenz: oscilaciones alrededor de las alas con numerosas pasadas por el origen en las transiciones. En este segundo caso, al igual que hicimos en la componente X, de solo existir estos tres puntos la probabilidad de que suceda el estado $Y=0$ sería todavía mayor al 50%.

Componente Z:

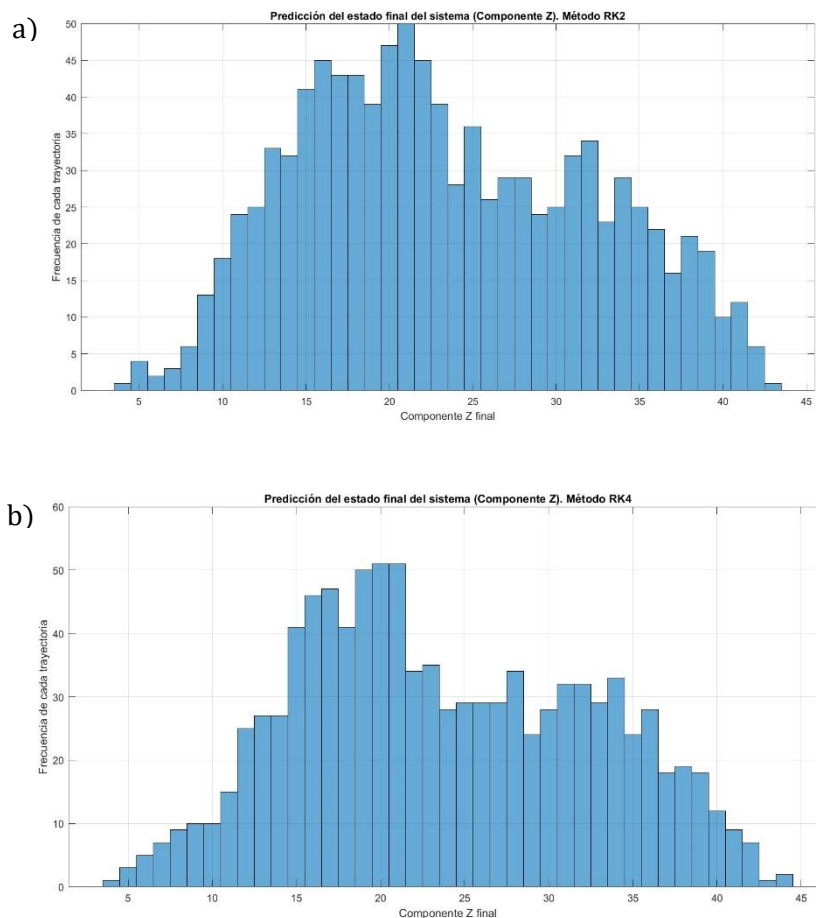


Figura 10. Histograma con la componente Z de la posición final de las 999 trayectorias que han comenzado perturbadas gaussianamente respecto de 1 estado inicial muestra. a) Empleando el método RK2 y b) empleando el método RK4.

Finalmente, en la Figura 10 vemos, principalmente, dos puntos con una ocurrencia mayor: alrededor de $Z = 20$ como máximo absoluto, asociado a unas 50 de cada 1000 trayectorias, y entorno a $Z = 33$ como máximo relativo con unas 35 de cada 1000 trayectorias. Si tratáramos de predecir alguno de estos dos estados, de estar solo ambos ocurriría el primero con un 60% de probabilidades y el otro con el porcentaje restante: 40%.

Hasta aquí hemos podido comprobar cómo funciona la predicción por conjuntos y cómo un tratamiento estadístico de la información puede aliviar la gran problemática que entraña el caos. Aun así, no debemos olvidar que este sistema, que nos permite una buena ejemplificación, no deja de ser una modelización muy simplificada de una columna de convección y que nada tiene que ver con la complejidad del sistema atmosférico real. Es por ello por lo que vemos los estados más probables constreñidos a dos o como mucho tres diferentes, sin embargo, la realidad es muchísimo más amplia y entraña numerosa fenomenología, por lo que no todo se verá reducido a si hace sol o no, sino que un estado real final estará caracterizado por una temperatura, precipitaciones, viento, oleaje...

Finalmente, por todo esto existe la limitación temporal: no se puede predecir más allá de los tiempos que conocemos (una semana, como mucho diez días) porque todas estas variables que hemos citado están acopladas y crean un número de estados absolutamente superior a los dos o tres que observamos en el Atractor de Lorenz y, por supuesto, conforme más largo sea el horizonte de predicción, mayor será la incertidumbre asociada a la predicción.

3.5. Caso real: predicción de la trayectoria del huracán Sandy

El huracán Sandy fue el ciclón tropical más mortífero de 2012 (Blake et al. 2013), el cual llegó a las costas del Caribe y finalizó su trayectoria al noreste de los Estados Unidos el 29 de octubre del mismo año. A falta de 6-7 días para que tocara tierra, existían numerosas bifurcaciones de las trayectorias que eran predichas por los distintos modelos meteorológicos. Concretamente, nos centraremos en el modelo europeo (*Integrated Forecast System, IFS*) del ECMWF, y el modelo estadounidense (*Global Forecast System, GFS*) de la NOAA. Ambos trataron la información meteorológica que se recabó desde su formación y realizaron, mediante sus propios modelos, una predicción de la trayectoria que iba a tomar el huracán.

Para la realización de las predicciones cada uno empleó su propio modelo, el cual resolvía las ecuaciones de la dinámica atmosférica y tenía diferentes parametrizaciones. Cuando se realiza una parametrización en un modelo, se imponen determinados valores de distintas magnitudes que no se encuentran en las ecuaciones de la atmósfera como, por ejemplo, el índice de nubosidad. Este parámetro fue la principal clave en la discordancia entre lo que mostraba un modelo y el otro: **una parametrización de los cúmulos más adecuada a la realidad hizo que el modelo europeo realizara mejores predicciones sobre la trayectoria del huracán que el estadounidense** (Bassill, 2014).

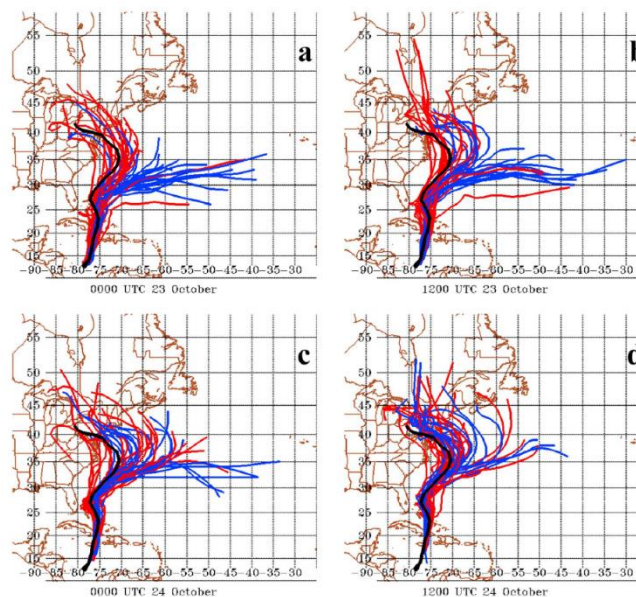


Figura 11. Predicciones de 180 horas para simulaciones del modelo europeo (rojo) y estadounidense (azul) iniciadas a las a) 00:00 UTC del 23 de octubre, b) 12:00 UTC del 23 de octubre, c) 00:00 del 24 de octubre y d) 12:00 del 24 de octubre. También se muestra la mejor trayectoria (negro). Fuente: Bassill, 2014.

En la Figura 11 podemos ver cómo de sensible es también este sistema a las condiciones iniciales: con tan solo 12 horas de diferencia, la información que se tenía en conjunto con la adecuada parametrización de cúmulos hacía que en el momento de correr el modelo se tuviesen trayectorias con posiciones finales del huracán muy diferentes entre sí.

Aparte, para un mismo modelo, aunque muchos caminos al principio siguieran un itinerario parecido, conforme más lejano era el día que se pretendía predecir, algunas posiciones diferían en más de 1000 kilómetros.

Una vez que ya ha quedado patente la sensibilidad a las condiciones iniciales, cuando uno quiere hacer una predicción y quiere saber cuál es el estado más probable con suficiente confianza, se deberá tomar el conjunto de trayectorias como una distribución de probabilidad y ver entorno a qué punto, ya sea espacial o perteneciente al espacio de fases, se agrupa el mayor número de estados posibles (en la Figura 8 con la línea negra), exactamente igual que hacíamos en los histogramas.

4. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo hemos podido estudiar el caos que se encuentra en la atmósfera, ejemplificándolo mediante del Sistema de Lorenz, siendo este un modelo simple de convección de una columna de aire.

Hemos resuelto dicho sistema mediante métodos numéricos e iterativos, como los son el método de Runge-Kutta de segundo y cuarto orden, los cuales presentan unas ciertas diferencias a la hora de resolver las ecuaciones diferenciales y, por ello, se han tomado como ejemplo de lo que sería en la realidad dos “modelos” distintos.

Tras haber experimentado de primera mano la enorme sensibilidad a las condiciones iniciales, hemos entendido por qué es tan difícil predecir en períodos largos de tiempo las condiciones meteorológicas y, por ello, la necesidad de implementar un tratamiento estadístico de la información a través de la predicción por conjuntos. Dicha metodología permite, mediante una densidad de probabilidad de posibles estados, conocer cuáles serán las trayectorias más probables y menos (aunque también posibles estas últimas) que tomará nuestro sistema. Todo ello ha sido ejemplificado con un caso real, el cual versa sobre la discordancia entre los modelos de predicción europeo y estadounidense tratando de prever cuál era la trayectoria que tomaría el huracán Sandy. El modelo europeo acabó mostrando mejores resultados por la más adecuada parametrización de cúmulos.

Finalmente, este trabajo ha sido muy interesante no solo porque nos ha permitido sentir de primera mano el gran desconocimiento que entraña el fenómeno del caos, sino porque nos ha dejado claro que el universo, lejos de comportarse acorde a unas ecuaciones que caben en cualquier pizarra, tiene el capricho de hacer burla de nuestros intentos por conocer cómo va a querer comportarse.

“Chaos: When the present determines the future, but the approximate present does not approximately determine the future.”

Edward Norton Lorenz, *The Essence of Chaos*

REFERENCIAS

Bassill, N. P. (2014), "Accuracy of early GFS and ECMWF Sandy (2012) track forecasts: Evidence for a dependence on cumulus parameterization", *Geophys. Res. Lett.*, 41,3274–3281, doi:10.1002/2014GL059839

Bertuglia, Cristoforo Sergio; Vaio, Franco (2005), "Nonlinearity, chaos, and complexity: the dynamics of natural and social systems", *Oxford University Press on Demand*, ISBN 0198567901

H. Press, William; A. Teukolsky, Saul; T. Vetterling, William; P. Flannery, Brian (2002), "Numerical recipes in C: the art of scientific computing", *Cambridge University Press - 2nd ed.* pp 710-712. ISBN 0-521-43108-5.

Lorenz, Edward N. (1963), "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2, pp 130-141. ISSN: 0022-4928. doi: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2

S. Blake, Eric; B. Kimberlain, Todd; J. Berg, Robert; P. Cangialosi, John; L. Beven II, John (2013), "Tropical Cyclone Report, Hurricane Sandy", *National Hurricane Center*, AL182012

Santos Burguete, Carlos (2018), "Física del caos en la predicción meteorológica: historia y fundamentos de la meteorología, sistemas de predicción por conjuntos, predicción probabilista y aplicaciones, cambio climático y aspectos sociales", *Agencia Estatal de Meteorología - Edición digital.* pp 59-60. doi: 10.31978/014-18-009-X