Visualización matemática: intuición y razonamiento

Inés Mª Gómez-Chacón

Facultad de Ciencias Matemáticas
igomezchacon@mat.ucm.es

Dedicado a Juan Tarrés

ABSTRACT

La matematización tiene un apoyo continuo en la intuición y en lo visual. Este trabajo versa sobre la visualización matemática, no sólo como las matemáticas reconocidas a través de imágenes sino como clave de significado en la comprensión e inspiradora en los descubrimientos matemáticos. A través de datos empíricos se reflexiona desde la Educación matemática universitaria, sobre las características de visualización geométrica y sobre algunos obstáculos y oportunidades de la enseñanza de la visualización con alumnado universitario.

Mathematization is heavily sustained by intuition and visual reasoning. In this work we consider mathematical visualization not only as the process of recognizing Mathematics though images, but also as a key factor to enhance understanding and inspiring mathematical discoveries. Within the frame of mathematical education at university level, we use empirical data to reflect on the characteristics of geometric visualization and on some of the obstacles and opportunities arising in the teaching of visualization in this particular context.

Key words: Visualization, Geometry, Teaching at university level, Mathematic education, visual thinking, geometrical thinking, learning and teaching geometry, intuition

2010 Mathematics Subject Classification: 97-XX, 97GXX,97U70

1. Introducción

Este capítulo está pensado como homenaje a la aportación docente de Juan Tarrés. Si algo puedo destacar de lo que he conocido como colega de Juan Tarrés es su preocupación por favorecer, desde su tarea docente, la formación matemática de los estudiantes en sus comienzos en la universidad y por impulsar una adecuada enseñanza de la Geometría en los futuros profesores de Secundaria. En una entrevista informal con Juan antes de empezar a incubar este capítulo, me comentaba que una constante en sus clases, tanto para los estudiantes futuros matemáticos como, en sus últimos años, para los estudiantes del Master de Formación del profesorado de Secundaria, ha sido el desarrollo de la intuición matemática y las conexiones de los conceptos matemáticos con la realidad: "*Los alumnos tienen una experiencia inmensa que se puede utilizar en la Geometría Elemental. En particular, pienso en su familiaridad con la existencia y propiedades de la Geometría. Esta familiaridad procede de fuera de las clases de matemáticas, de la vida cotidiana, lo que debemos considerar como una situación especialmente favorecedora. Por eso continuamente usaba ejemplos en las clases de ese tipo. Convencer de que aquello tiene un sentido que va más allá del mero formalismo de una teoría acabada*" (conversación informal 14 de marzo de 2012). Estas palabras del profesor Tarrés me evocaron otras dichas por René Thom (1972): "*Se llega al rigor absoluto, solo eliminando significado... y si se debe elegir entre rigor y significado, elegiré este último. Es la elección que se ha hecho en matemática, en donde casi siempre se trabaja en una situación semi-formalizada, con un metalenguaje que es el habla ordinaria, no formalizada*". "*La tendencia modernista representa un aumento de la cultura en detrimento de la naturaleza; es, en el estricto significado del término, una preciosura. Pero si la preciosura tiene, a veces, encanto en arte y en literatura, puede no tenerlo en matemática*".

El profesor Tarrés siempre ha sido consciente de las dificultades que entraña la exposición elemental de los fundamentos de la Geometría, de ahí su interés en crear y elegir el "significado", como ha quedado evidenciado en varios de sus trabajos, sobre todo los que contribuyen a la comprensión del concepto de Dimensión o de Espacio Abstracto (Tarrés, 1991, 1994 y 2011a). La forma de generar significado para sus alumnos siempre ha sido a través de conexiones con la realidad. Por ejemplo, en una de sus conferencias más recientes en la Universidad de Santander, nos planteaba una serie de preguntas para ayudar a reflexionar sobre el espacio. Decía:

> "*Quiero que pensemos juntos qué entendemos por espacio en Matemáticas y por qué se ha llegado al concepto de espacio que se utiliza en la actualidad, a través de las siguientes cuestiones:*
>
> *¿Se puede pasar realmente al otro lado del espejo, o sólo es posible en un mundo de sueños y fantasía? ¿Necesitó Alicia sumergirse en otro espacio y utilizar otra geometría?*
>
> *¿Cómo podemos interpretar las diferentes visiones que nos ofrece Internet de una determinada panorámica al ir aproximándonos a la misma? ¿Qué conclusión se puede sacar al comprobar que los detalles de aquella zona y las relaciones entre los diferentes objetos son cada vez más nítidos?*
>
> *¿Qué visión de una ciudad tiene el viajero que se desplaza por ella utilizando solamente el "Metro"? ¿Podrá ser capaz de relacionar entre sí los diferentes lugares que ha visitado? ¿Tendrá conciencia de cómo es aquella ciudad con la simple contemplación del plano del Metro?*
>
> *¿Qué espacio ha querido representar un pintor al crear y ejecutar su obra? ¿Expresa la misma clase de espacio un cuadro del Renacimiento que otro de Dalí o Magritte, por ejemplo? ¿Qué pensar de los dibujos de Escher? ¿Qué nos quiere decir Euclides en sus Elementos cuando postula que "una recta se puede prolongar indefinidamente"? ¿En qué espacio se debe prolongar? ¿Volverá el alguna vez sobre sí misma?*" (Tarrés, 2011b).

Para el profesor Tarrés la Geometría es comprendida, en el sentido clásico de la palabra, cómo un área que tiene mucho que ofrecer como gimnasia razonadora y como depósito de ejemplos que ayuden a comprender el mundo, la matemática, las ciencias naturales y el arte (ver por ejemplo, Tarrés, 2011a).

Se puede afirmar que de forma constante en sus escritos, ha puesto de relieve la función central de la Geometría en el desarrollo de la matemática y su conexión con la sociedad. Para Juan Tarrés los procesos intuitivos y la visualización aparecen como algo profundamente natural, tanto en el nacimiento del pensamiento geométrico como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias de la actividad matemática. Compartimos completamente con él esta visión, la cual tomamos como punto de partida para la realización de este artículo.

Por tanto, como tema central hemos elegido el razonamiento visual o los procesos de visualización en el aprendizaje geométrico a nivel universitario. A través de algunos resultados procedentes de la investigación en Educación matemática, trataremos de poner de manifiesto la naturaleza de esta visualización de los estudiantes en situaciones de aprendizaje que podría servir de aval en la práctica docente.

2. Razonamiento visual y visualización

A lo largo de estas páginas utilizaremos los términos razonamiento visual y visualización indistintamente, por lo que, antes de avanzar, tomaremos la resolución del siguiente problema para hacernos una idea sobre el razonamiento visual de una forma más concreta: *Hallar el lugar geométrico de los puntos, para los cuales la suma de las distancias a dos rectas dadas, "a" y "b", que se cortan, sea igual a una longitud dada.*

Una forma (global) de comenzar es argumentar que el lugar tiene que estar contenido en una región acotada del plano, porque cualquier punto que esté lejos está necesariamente lejos de una de las rectas. Otra forma más local de comenzar a resolver el problema es preguntarse si cualquier punto del lugar geométrico descansa sobre las rectas dadas, y comenzar a buscar a lo largo de estas rectas. Esta búsqueda se puede aproximar dinámicamente comenzando en el punto de intersección y moviéndonos a lo largo de las dos rectas. Al proceder así, la distancia desde la otra recta crece desde cero sin límite, por lo tanto en un cierto momento pasa por un punto que pertenece al locus. Análogamente, se pueden identificar cuatro puntos. El lugar es un rectángulo cuyas esquinas son los cuatro puntos (Figura 1).

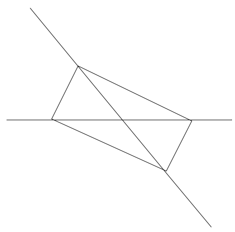

Figura 1: Solución del problema

Establecer esto no es trivial, necesitándose de detallados argumentos analíticos, los cuales se pueden basar en las proporciones de los triángulos semejantes. El anterior argumento se puede considerar esencialmente como información visual. El razonamiento visual que hemos utilizado puede ser global o local, dinámico o estático, pero no es meramente perceptivo, implica argumentos analíticos que van dirigiendo cada etapa de la resolución.

En este artículo vamos a entender la visualización desde una concepción global: "*Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión* "(Arcavi, 2003:217). La visualización como camino para "*ver lo invisible*", idea que enlaza con la intuición de lo abstracto señalada por Tarrés (1991, 1994). Junto a la definición expresada queremos hacer notar también que la visualización es la "*intencionalidad* "(Gianquinto, 1992) que no está presente en el mero ver. La consideramos "*una manera de ver las cosas*" (Davis, 1993). Esta expresión de Davis sugiere que los conceptos matemáticos son "*cosas*"para la persona en cuestión, y por lo tanto, "*una manera de mirar*" es una síntesis (a menudo) tácita de comprender las propiedades de estas cosas y requiere de una comprensión de los conceptos más allá de la presentación visual.

3. La actividad del matemático ejemplo de visualización

Una de las mayores aportaciones que han hecho la Filosofía y la Historia de la matemática es considerar la matemática como una ciencia temporal y conectada con la sociedad que le ha permitido su desarrollo. Gianquinto (2005) distingue varias fases en la actividad global del matemático: descubrimiento, explicación, justificación y aplicaciones. Estas fases ponen de manifiesto facetas del trabajo matemático, algunas de ellas con influencia implícita en la docencia. El contexto de descubrimiento precisa las condiciones que permiten el hallazgo y la elaboración de los conceptos a partir de la resolución de problemas. La explicación matemática a menudo involucra imágenes, representaciones, diagramas o imágenes mentales. La justificación se relaciona con la forma en que un resultado se presenta, se defiende, se justifica en una comunidad investigadora. Estas diferentes fases o contextos de la actividad del matemático no se refieren a lo puramente científico, sino que, a lo largo del pasado siglo, distintos matemáticos han señalado la necesidad de tener en cuenta en la invención matemática la naturaleza psicológica, como es el caso de los ensayos de Hadamard (1908/1945) o, posteriormente, los trabajos de Lakatos y Kuhn que permitieron enriquecer el contexto de descubrimiento, introduciendo una perspectiva más sociológica, como un contexto destinado a favorecer el trabajo de los matemáticos: *"como seres humanos que hacen avanzar la comprensión humana de las matemáticas"* (Thurston, 1995).

Por tanto, definir las matemáticas a partir de la actividad de los matemáticos nos obliga a mirar sus trabajos para comprender mejor la naturaleza y el contenido de las matemáticas. Para situar la relevancia de la visualización en la enseñanza universitaria nos gustaría tener en cuenta algunos testimonios de matemáticos que nos han precedido. El siguiente testimonio sobre el papel de la visualización, en el que se explicita la influencia de la imagen en los procesos del pensamiento matemático lo tomamos de Hadamard:

> "*Yo mismo he dado una demostración simplificada de la parte (a) del teorema de Jordan. Por supuesto, mi demostración es completamente aritmetizable (de otro modo debería ser considerada inexistente), pero al construirla nunca he cesado de pensar en el diagrama (pensando solamente en*

una curva muy retorcida) y así lo hago cuando la recuerdo. No puedo siquiera decir que he verificado explícitamente (o que puedo verificar) cada paso del argumento en cuanto a su aritmetizabilidad (con otras palabras, el argumento aritmetizado no aparece en general en mi plena conciencia). Sin embargo, que cada paso del argumento puede ser aritmetizado es incuestionable tanto para mí como para cualquier matemático que quiera leer la demostración. Yo puedo darlo inmediatamente en su forma aritmetizada, lo cual demuestra que esa forma aritmetizada está presente en mi conciencia marginal"(Hadamard (1945, p.103).

Otros matemáticos y físicos perspicaces describen su pensamiento como dominado por imágenes. Con frecuencia las imágenes son visuales, e incluso pueden ser somatosensoriales. No es sorprendente que Benoit Mandelbrot, que ha dedicado toda su vida a la geometría fractal, diga que piensa siempre en imágenes. En cuanto a Albert Einstein, según cita Hadamard (1945), no tenía dudas acerca del proceso: "*Las palabras del lenguaje, tal como se escriben o se hablan, no parecen desempeñar papel alguno en mi mecanismo de pensamiento. Las entidades psíquicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son determinados signos o imágenes más o menos claras que pueden reproducirse y combinarse "voluntariamente". Existe, desde luego, una cierta conexión entre estos elementos y los conceptos lógicos relevantes. También es evidente que el deseo de llegar finalmente a conceptos conectados de forma lógica es la base emocional de este juego más bien vago con los elementos anteriormente mencionados". Y más adelante, en el mismo texto, lo explicita de forma todavía más clara: "Los elementos anteriores mencionados son, en mi caso, de tipo visual y muscular. Las palabras u otros signos convencionales sólo han de buscarse laboriosamente en una fase secundaria, cuando el juego asociativo citado se halla suficientemente establecido y puede reproducirse a voluntad*" (A. Einstein, citado en J. Hadamard (1945)).

Estos testimonios sugieren que el principal contenido de nuestro pensamiento son imágenes, con independencia de la modalidad sensorial en la que son generadas. Nuestra percepción se realiza prioritariamente a través de la visión, por tanto, no debe sorprender que esta actividad de matematización tenga un apoyo continuo en lo visual. Pero no debemos pensar que este apoyo se limita únicamente a actividades perceptibles por la vista, como pueden ser las propias de la Geometría, sino que en actividades más abstractas también desempeña un importante papel como una intuición de lo abstracto, como la aportación sobre la Topología General desde sus comienzos hasta Hausdorff, descrita por Tarrés, así nos lo muestra (para más desarrollo de este aspecto ver el capítulo de Capi Corrales en este mismo volumen).

Escondidos tras estas representaciones o imágenes, existen en realidad numerosos procesos que guían la generación y el despliegue de dichas imágenes. Las investigaciones en Educación matemática indican que estos procesos utilizan reglas y estrategias encarnadas en representaciones disposicionales, representaciones que puede favorecer una comunicación externa adecuada. Coincidimos con otros autores cuando señalan que una labor importante del experto matemático "*en su tarea de formación de los más jóvenes, debe consistir en tratar de transmitir no solamente la estructura formal y lógica del quehacer matemático en este campo particular, sino también, y probablemente con mucho más énfasis, estos aspectos estratégicos e intuitivos de su oficio, que por otra parte son probablemente mucho más difíciles de hacer explícitos y asi-*

milables para los estudiantes, precisamente por encontrarse muchas veces situados en los sustratos menos conscientes de la propia actividad del experto" (Guzmán, 1996, p. 34).

4. Pensamiento Geométrico: Génesis de razonamiento visual, instrumental y discursivo

En las últimas décadas la visualización en Educación matemática se reconoce como un aspecto importante del razonamiento matemático y los procesos de resolución de problemas. Varias investigaciones han demostrado que las actividades que promueven la construcción de las imágenes pueden mejorar enormemente el aprendizaje de las matemáticas (Presmeg, 2006; Stylianou, 2002; Rivera, 2010, Tall, 1991), contribuyendo significativamente a la profundidad de la comprensión en los estudiantes.

En el estudio de los procesos de razonamiento matemático geométrico el papel de la intuición y la visualización es clave (Duval, 2005) y así ha sido señalado en los distintos modelos de aprendizaje (Mammana, y Villani, 1998). Aquí aludiremos brevemente a dos de ellos: el modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986), procedente de la escuela holandesa, y el de Houdement y Kuzniak (1998, 2006 y 2010), en el ámbito de la escuela francesa.

El modelo de Van Hiele está constituido por dos componentes: a) la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo en las etapas iniciales hasta el formal y abstracto de los estudios superiores; b) la delineación de un esquema de enseñanza en cinco fases con el que el profesor pueda organizar la actividad en sus clases a fin de que el alumnado pueda alcanzar el nivel de razonamiento superior. Por su parte, el modelo de Espacio de Trabajo de la Geometría (ETG) y paradigmas, que destacan que en el dominio de la Geometría aparecen claramente tres paradigmas que se designan bajo los términos de Geometría I (o Geometría natural), Geometría II (o Geometría natural axiomática) y, finalmente, Geometría III (o Geometría axiomática formal). La idea que sustenta este modelo es que sólo se puede hablar de trabajo geométrico cuando la actividad del alumno es a la vez lo suficientemente coherente y compleja como para permitir la puesta en ejecución de una actividad de raciocinio. De esta manera, en cierto modo, hacen suyo el pensamiento de Gonseth (1945, p. 72): "*Ser geómetra significa no confundir una evidencia nacida de la intuición con una información experimental, el resultado de una experiencia con la conclusión de un raciocinio*".

Estos autores introducen dos niveles conectados en la estructuración del ETG: el nivel epistemológico y el nivel cognitivo:

1. *El nivel epistemológico.* La actividad geométrica en su dimensión puramente matemática se caracteriza por tres componentes: Un espacio real y local, como material de apoyo con un conjunto de objetos concretos y tangibles, un conjunto de artefactos, tales como instrumentos de dibujo o de software y un marco teórico de referencia sobre la base de definiciones y propiedades. Estas componentes no están simplemente yuxtapuestas, sino que se deben organizar con un objetivo preciso en función del ámbito matemático en su dimensión epistemológica. Esto justifica el nombre de plano epistemológico dado a este primer nivel. En este marco teórico, el concepto de paradigma geométrico reúne a los componentes de este plano epistemológico. Cuando

una comunidad se pone de acuerdo sobre un paradigma, podrá formular problemas y organizar sus soluciones con herramientas o estilos de pensamiento preciso que da lugar al ETG de referencia.

2. *El nivel cognitivo.* Un segundo nivel, centrado en la articulación cognitiva de los componentes del ETG. Este plano nos ayuda a entender cómo los grupos, y también las personas particulares hacen uso y adecúan el conocimiento geométrico en la práctica. Siguiendo a Duval (2005) estos autores destacan tres procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica:

- Una visualización del proceso conectado a la representación del espacio y el material de apoyo.
- Un proceso de construcción determinado por instrumentos (reglas, compás, manejo de software, etc.) y configuraciones geométricas.
- Un proceso discursivo que transmite la argumentación y las pruebas.

Este enfoque busca comprender mejor la creación y desarrollo de todos los componentes y niveles mostrados en el diagrama de la Figura 2. El trabajo geométrico se ve como un proceso que implica la creación, desarrollo y transformación. Todo el proceso se estudia a través de la noción de génesis, utilizado en un sentido general que se centra no sólo en el origen, sino también en el desarrollo y la transformación de las interacciones. A través del proceso de transformación, se estructura el espacio de trabajo geométrico.

Los dos niveles, cognitivos y epistemológicos, necesitan ser articulados con el fin de garantizar un trabajo geométrico completo y coherente. Este proceso supone una serie de transformaciones que es posible identificar a través de tres génesis fundamentales, como se muestra en la Figura 2:

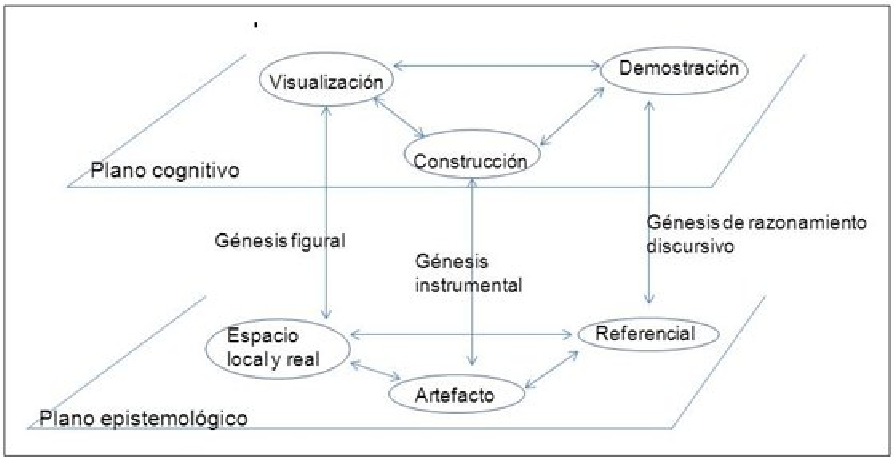

Figura 2: Espacio de trabajo geométrico: planos y génesis (Kuzniak, 2011)

1. *Una génesis figurativa y semiótica* que proporciona a los objetos tangibles su estado de funcionamiento de los objetos matemáticos.

2. *Una génesis instrumental* que transforma los objetos en las herramientas en el proceso de construcción.

3. *Una génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades utilizadas en el razonamiento matemático.

Las ciencias cognitivas han puesto de relieve los procesos para el estudio del pensamiento geométrico: percepción, lenguaje y acción. En el lenguaje de la Geometría, la visión está constituida por la percepción que conduce a los procesos de visualización. La acción se refleja fuertemente en los procesos de construcción. Finalmente, en el marco de la Geometría la articulación de los procesos de razonamiento está estrechamente asociada a las cuestiones de inferencia y toma de decisión. En definitiva, cada componente del trabajo geométrico está asociada a estos procesos cognitivos. Estudiar estas génesis y las conexiones entre ellas en ambientes tecnológicos puede suponer un avance para ofrecer a un profesor conocimiento estratégico para aprender a enseñar con tecnología (ver sección 5.3).

5. Algunos resultados de nuestro contexto

En este apartado se presentan algunos resultados de estudios empíricos realizados con estudiantes de Matemáticas sobre el rechazo o la preferencia a utilizar visualización en el aprendizaje, sobre el nivel de razonamiento de los estudiantes y por último sobre el aprendizaje de la Geometría en contextos tecnológicos.

5.1. Rechazo o preferencia por lo visual en los estudiantes

Distintas investigaciones han señalado que una de las dificultades que pueden encontrar los profesores para trabajar la matemática mediante razonamiento visual es el rechazo o la no valoración por parte de los estudiantes (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Eisenberg, 1994). En un estudio con 29 estudiantes de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (Souto y Gómez-Chacón, 2011), evaluando la influencia del método visual para la comprensión del concepto de integral, se puso de manifiesto el uso limitado que hacen los estudiantes del registro visual y la dificultad cognitiva propia del uso del registro visual, como una de las causas para el rechazo de la visualización. Para este grupo de estudiantes, el concepto de integral se identifica con el cálculo de primitivas y con la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow, la integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico. La mayoría de los problemas que se les plantearon estaban basados en conceptos que tiene una interpretación visual, y esto hizo que los estudiantes no pudieran hacer muchos de los problemas de la lista, ya que "*parecen no haber aprendido*" a explotar las representaciones visuales asociadas con los conceptos y muestran deficit en la coordinación entre el registro visual y analítico o en la combinación de ambos.

En otro de los estudios sobre pensamiento geométrico y aprendizaje con sistemas de geometría dinámica (SGD), realizado también en nuestra facultad, con 30 estudiantes formándose como profesores de Secundaria (Gómez-Chacón, 2012) se buscó detectar factores que favorecían o inhibían el uso del pensamiento visual, focalizando en qué dificultades estaban generadas por las creencias sobre el razonamiento visual y qué tipologías de emoción se derivaban de ellas. Los datos pusieron de manifiesto que todos los estudiantes consideraban que el razonamiento visual es algo central en la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, pudimos observar que frente a esta misma creencia se produjeron emociones diferentes. En un primer momento estas emociones fueron categorizadas como: gusto (77 %), disgusto (10 %), e indiferencia (13 %) hacia el objeto. Las razones que aducen para justificar estas emociones son: a) placer/gusto como una indicación de que uno puede lograr un conocimiento experto (30 % de los estudiantes); b) placer/gusto cuando se progresa en la esquematización y se logra una forma conceptual suave (35 %); c) placer y gusto como control y creación de aprendizaje profundo (40 %); d) placer y gusto porque está asociado con aspectos intuitivos y lúdicos del conocimiento matemático (20 %); e) emociones de indiferencia ante la visualización (13 %); f) no placer y gusto cuando la visualización tiene una demanda cognitiva más fuerte (10 %).

Una respuesta similar se obtuvo cuando se exploró las creencias relacionadas con el uso de software de Geometría dinámica como una ayuda para la comprensión y la visualización del concepto de lugar geométrico. Todos los estudiantes afirmaron que les resultó útil y el 80 % expresaron emociones positivas sobre la base de su fiabilidad, rapidez de ejecución y el potencial para desarrollar su intuición y visión espacial. Agregaron que la herramienta les ayudó a superar bloqueos mentales y mejorar su confianza y motivación. Como futuros docentes hicieron hincapié en que GeoGebra puede favorecer no sólo el pensamiento visual, sino que ayuda a mantener una vía afectiva productiva. Indicaron que el trabajo con la herramienta les favorece creencias positivas hacia las matemáticas y hacia sí mismos como aprendices y estimula su propia capacidad y voluntad de participar en el aprendizaje de las matemáticas. En síntesis, estos resultados muestran que la valoración o rechazo por la visualización está ligado al área de conocimiento, así como al uso de determinados instrumentos (atribución de gran valor al aprendizaje con ordenador). La elección de la representación en la que se resuelve un problema parece depender tanto del propio problema, como de las preferencias y habilidades visuales personales.

5.2. Niveles de razonamiento de los estudiantes

Otro de los estudios que nos ha aportado datos sobre lo que les sucede a nuestros estudiantes y que pudiera ofrecer pistas para la acción docente en pensamiento geométrico avanzado es una investigación que tenía por objeto el estudio del razonamiento geométrico en la transición Bachillerato a la Universidad (Gómez-Chacón, Sevilla y Castrillón, 2012). Siguiendo el modelo de Van Hiele anteriormente mencionado, nos centramos en la identificación de distintos niveles de razonamiento de los estudiantes (visualización, deducción informal, deducción formal, rigor y abstracción). El grupo de estudio estuvo formado por 22 estudiantes de segundo de Bachillerato y 28 estudiantes de primero de Licenciatura de Matemáticas.

Este trabajo ha tratado de poner de relieve que gran parte de la dimensión de dificultad del paso de la Matemática en la transición del bachillerato a la universidad en el área de Geometría Avanzada está estrechamente ligada a los procesos cognitivos del razonamiento geométrico referidos a la deducción formal y a los procesos de rigor y abstracción implicados en esa deducción formal, mediados por la visualización y análisis de objetos.

Como instrumento para la recogida de datos se elaboró un cuestionario compuesto por problemas de Geometría que requieren del resolutor una secuencia que permite identificar niveles de razonamiento. Este cuestionario fue aplicado de forma colectiva pidiéndole de forma detallada el protocolo de resolución. Comentamos los resultados de uno de los problemas:

Problema

Sabemos que un modo que facilita contar el número de vértices, aristas, caras, etc., de un cubo o hipercubo, es reducir una zona y ampliar otra de la figura, aplastar y obtener la nueva la figura reducida en una dimensión respecto a la de partida.

a) Así, de un cubo de dimensión 3, quedaría en dimensión 2, según se muestra en el dibujo siguiente. Anota:

-el número de vértices:
-el número de aristas:
-el número de caras:

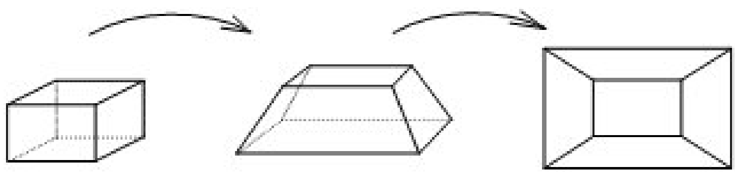

Figura 3: Cubo

b) Dibuja lo que ocurriría si aplastamos a dimensión 1 un cuadrado de dimensión 2 y anota:

-el número de vértices:
-el número de aristas:

c) El hipercubo de dimensión 4 ¡no lo puedes dibujar!. Sin embargo, ¿podrías dibujar la figura aplastada que resultaría en dimensión 3? Anota en su caso:

-el número de vértices:
-el número de aristas:
-el número de caras:
-el número de cubos:

A fin de recoger y analizar la información de las producciones de los estudiantes en relación con los niveles de Van Hiele, se determinó y categorizó una serie de niveles de desempeño (acompañados de sus correspondientes indicadores) a contrastar en las respuestas de los alumnos. Estos niveles van recorriendo de forma progresiva las dificultades a superar en cada uno de los niveles según el Modelo de Van Hiele. Los niveles analizados en los estudiantes fueron los siguientes:

Nivel 1 (Visualización/ Análisis). [1] Análisis y conteo de los elementos del cubo (Indicador: Contar bien elementos cubo).

Nivel 2 (Deducción informal). Deducción informal y ordenación. Dibujo de un cuadrado reducido y conteo de elementos del cuadrado (Indicadores: Dibujar cuadrado reducido. Contar bien elementos del cuadrado).

Nivel 3 (Deducción formal). Deducción formal. Intentar dibujar hipercubo reducido como consecuencia de una compresión del proceso y reglas de reducción de dimensión a partir de lo aprendido en el caso de dimensión 2 ó 3. (Indicador: Intentar dibujar hipercubo reducido).

Nivel 4 (Rigor y abstracción). Rigor y abstracción. Dibujar bien el hipercubo reducido, distinguiendo correctamente sus elementos así como la forma que tendrán cada uno de ellos. Como consecuencia se puede hacer un conteo correcto de los mismos, en el que además se identifican correctamente las hipercaras, ingrediente que no es una mera generalización del caso tridimensional, sino fruto de un proceso de abstracción e inducción. (Indicadores: Dibujar hipercubo reducido. Contar bien elementos del hipercubo).

Del análisis de los datos se desprenden los siguientes cuatro asertos:

- El rigor y abstracción propia de la enseñanza de la Geometría avanzada y relacionados con el Nivel 4, sólo lo muestra el 11 % de alumnos de universidad y ningún alumno de bachillerato.
- La deducción formal y la imaginación espacial, relacionadas con el Nivel 3, sólo son alcanzadas por el 43 % de los alumnos de universidad y ningún alumno de bachillerato.
- La deducción informal, relacionada con el Nivel 2, es alcanzada por el 43 % de alumnos de universidad y por un 32 % de los alumnos de bachillerato.
- Los indicadores asociados a la visualización relacionada con el Nivel 1, son alcanzados por el 68 % de universitarios y por el 55 % de alumnos de bachillerato.

5.3. Visualización y trabajo geométrico con ordenador

Un objetivo principal en las investigaciones recientes consiste en caracterizar y especificar la naturaleza exacta del trabajo geométrico realizado por los estudiantes de matemáticas en los contextos tecnológicos con programas de Geometría dinámica (SGD). Respecto al aprendizaje geométrico en contextos tecnológicos son varias las cuestiones que se nos plantean: ¿Cómo se articulan las tres tipologías de génesis necesarias para la construcción de pensamiento geométrico en la integración de software de sistemas dinámicos (Cabri, GeoGebra, etc.) en el trabajo geométrico? ¿Qué rol desempeña el instrumento (software, p.e. GeoGebra) en la construcción del espacio geométrico? ¿Cómo interviene la utilización de los SGD en el paso de la Geometría I a la Geometría II (axiomática natural) o de la Geometría II a la III (axiomática formal), particularmente en los procesos visualización e intuición geométrica y cómo influye el uso de este software? ¿Qué nuevo rol tienen las propiedades geométricas cuando se usa software dinámico? ¿Cómo puede hacer un profesor en su actividad docente que el artefacto (p.e. software de SGD) sea un instrumento matemático?

[1] Este nivel integra el Nivel 0 y 1 del modelo de Van Hiele.

En nuestro caso, utilizando el marco teórico de los espacios de trabajo geométricos (ETG) mencionado en la sección 3 y el enfoque instrumental (Artigue, 2002) hemos podido constatar varios hechos en los estudiantes: no dominio del ciclo de razonamiento y la necesidad de profundizar en la visualización icónica versus la visualización no icónica.

5.3.1. Ciclo de razonamiento

Se constató el carácter incompleto del ciclo de trabajo geométrico del alumnado (Gómez-Chacón y Kuzniak, 2011). Para dominar todo el ciclo de razonamiento, los estudiantes deben dominar al mismo tiempo las técnicas aplicadas en tres génesis - figurativa, instrumental y discursiva- y mostrar un grado de flexibilidad cognitiva en el uso de diferentes facetas del trabajo geométrico. Volver al instrumento para poner fin al ciclo puede ser problemático entre los estudiantes que apoyan su investigación en la resolución de los problemas sobre los aspectos figurativos y discursivos cuando no hay congruencia entre el instrumento teórico y un instrumento informático. Este carácter incompleto del ciclo de razonamiento fue constatado en dos experimentaciones, una primera con 30 estudiantes de matemáticas, confirmada por una experimentación complementaria con cuatro grupos de clase, con un total de 98 estudiantes.

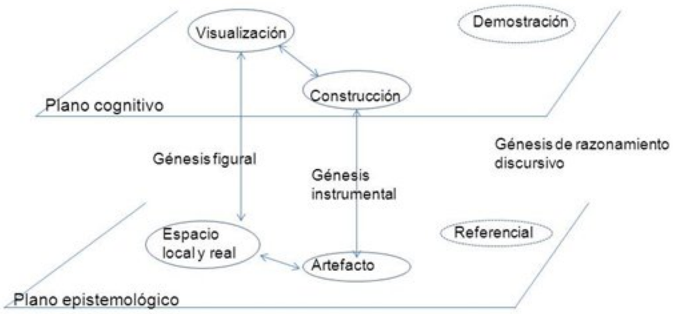

Figura 4: Diagrama de trabajo geométrico que privilegia la génesis instrumental

También, el estudio muestra que al punto de vista sobre el desarrollo del razonamiento geométrico hay que añadir el mantenimiento de la construcción de una génesis discursiva relacionada con los elementos visuales de la deconstrucción de figuras. Esta forma de razonamiento requiere una reflexión sobre el papel de las definiciones y teoremas en el proceso de desarrollo de lo geométrico de cara a que los estudiantes pasen de un trabajo práctico perteneciente a Geometría I a una Geometría más axiomática (Geometría II).

5.3.2. Visualización icónica versus visualización no icónica

Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo en los cuales los procesos de reconocimiento de los objetos representados difieren radicalmente en el trabajo geométrico son la *visualización icónica* y la *visualización no icónica* (Duval, 2005). Si tenemos en cuenta la complejidad del proceso puesto en juego en el acto de "*ver*", "*ver*" conlleva siempre dos niveles de operaciones que son diferentes e independientes uno del otro, aunque frecuentemente éstos se fusionan en la sinergia del acto de ver. Estos dos niveles de operaciones son el reconocimiento discriminativo de las formas y la identificación de los objetos correspondientes a las formas reconocidas. El problema cognitivo mayor es saber cómo se realiza el paso de un reconocimiento discriminativo de formas a la identificación de los objetos a ver.

En la *visualización icónica* el reconocimiento de lo que representan las formas se hace por el parecido con el objeto (real) que representa, o en su defecto, por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo, y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo).

La *visualización no icónica* reconoce las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que han sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas, o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura.

Hemos podido constatar que en el aprendizaje geométrico con software dinámico se produce una gran ruptura entre estas dos diferentes formas de visualización. Y esta ruptura es muy importante, ya que sólo la visualización no icónica es pertinente para los procesos geométricos que se deben producir. Tomemos un ejemplo, que también fue trabajado por Tarrés (2010) en su forma analítica y desde distintos tipos de registros. El problema es el siguiente: *Una escalera que mide 5 metros está apoyada por su extremo superior en una pared vertical, y su extremo inferior está situado en el suelo ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por el punto medio M de la escalera al resbalar y caer ésta? (Y si el punto no es el punto medio de la escalera).*

Consideramos que se trata de un problema de nivel medio alto para nuestros estudiantes. El enunciado está formulado sin consignas explícitas de construcción. Es una situación realista de fácil comprensión. No obstante, la traslación a construcción con el software GeoGebra no es evidente, es necesario ayudarse de un objeto auxiliar. El razonamiento visual-analítico requiere superar la dificultad inicial de construcción de la escalera a través de un objeto auxiliar, en ese caso GeoGebra ofrece el locus de forma precisa. Para el registro analítico o algebraico es necesario situar cinco puntos sobre el locus y después trazar con el comando "*cónica que pasa por tres puntos*". En este caso se obtiene la ecuación algebraica precisa. En lo referente al razonamiento instrumental que debe seguir el estudiante, dos momentos son claves en este problema: 1) La construcción de la escalera con una circunferencia auxiliar, 2) Y si se quiere estudiar el lugar que describen los puntos sobre la escalera, estos puntos deben estar determinados de forma precisa (punto medio, 1/4).

En esta tipología es clave la visualización no-icónica (para una resolución completa de elementos de visualización no-icónica en lápiz y papel ver Tarrés (2010)). A continuación comentamos brevemente algunas de las dificultades de los alumnos en una resolución con ordenador (GeoGebra). Una primera tipología de dificultad son las construcciones estáticas (tratamiento discreto, Fig. 6). En esta tipología el alumno utiliza GeoGebra como una pizarra avanzada pero no utiliza el dinamismo que propicia el software, sólo repite las construcciones para un conjunto de puntos. Para trazar el lugar geométrico se ayudan del comando cónica que pasa por 5 puntos.

Otra segunda tipología de dificultad es la definición no correcta de la construcción

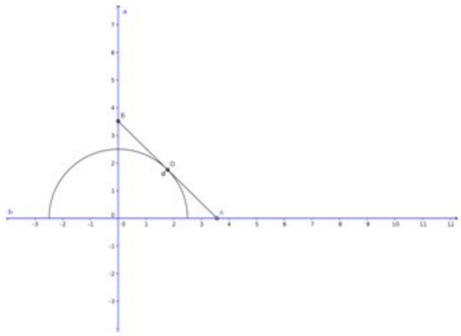

Figura 5: Resolución del problema de la escalera

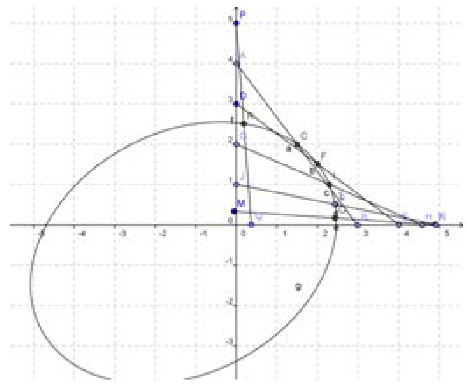

Figura 6: Resolución de alumno 13

(punto libre). El alumno resuelve aparentemente el problema pero la solución impide la utilización de las herramientas de GeoGebra. Para utilizar la herramienta lugar geométrico es necesario que los puntos que lo definen estén correctamente determinados (no pueden ser puntos libres). En esta aproximación el alumno, en el mejor de los casos, puede obtener una representación parcialmente válida pero que no admite ningún tratamiento algebraico con GeoGebra. En este problema, la dificultad está en definir el punto de la escalera que no es el punto medio. Si se toma un punto libre no se podrá utilizar la herramienta Locus.

Como se puede observar en la Figura 7, la solución que se obtiene es visual, aproximada y no da una solución exacta. Los estudiantes de esta tipología de solución quedan absolutamente convencidos y no son conscientes de que su solución es errónea.

Por último, otra tipología de dificultades es la utilización de elementos instrumentales no válidos. Por ejemplo, para este problema se utiliza la herramienta deslizador para desplazar el "*mover*". El alumno se da cuenta de que el "*mover*" hay que acotarlo y lo hace a través del deslizador. El problema es que en el sistema GeoGebra el deslizador es un escalar, y por lo que tras ello no se puede utilizar la herramienta lugar geométrico [2]

[2] Hacemos notar que en este estudio se utilizó la versión 3.7; en la actualidad los creadores de

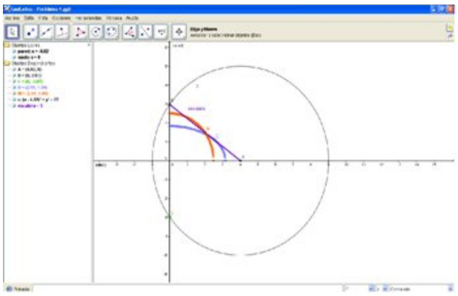

Figura 7: Solución del estudiante 23

En una proporción amplia de estudiantes se produce una deficiencia heurística ("*esa incapacidad de ir más allá de lo que se aprecia en un primer vistazo*") en la interpretación geométrica de las visualizaciones, este caso en la comprensión de lugar geométrico desde el punto de vista funcional. A veces, la figura en Geometría funciona como una verdadera representación icónica que deja sin significado la aprehensión discursiva. Coincidimos con Duval cuando afirma que: "*la complejidad de la visualización matemática no radica en sus unidades visuales -que son menos y más homogéneas que para las imágenes- sino en la selección implícita de las variables visuales contrastadas dentro de la configuración de unidades que son relevantes y las que no*"(Duval, 1999, p.15).

¿Se tiene esto en cuenta en la enseñanza? Muchas veces se enseña a construir imágenes, pero esto no es enseñar visualización. En construir incluso algunos alumnos son buenos, pero muchos se quedan en la aprehensión local, y no son capaces de llegar a lo global (ver Gómez-Chacón y Escribano, 2011 y Souto y Gómez-Chacón, 2011 a propósito de la visualización de la integral definida). En la enseñanza es importante diferenciar entre utilizar una figura, manipularla en búsqueda de nuevas ideas y de comprensión, o utilizarla como esquema, como apoyo del proceso deductivo que se sigue. Es decir, en una situación la figura sirve para razonar, para generar nuevas ideas, para inventar, crear. En la otra, la imagen tan sólo tiene un papel explicativo, está subordinado a lo formal (discursivo). Por tanto, de cara a la docencia parece pertinente distinguir dos posibles funciones de las figuras: heurística (para crear, manipular, asociada a la aprehensión operativa); ilustrativa (explicativa, subordinada a las hipótesis y el pensamiento deductivo, asociada a la aprehensión discursiva). Para el estudiante, o para el profesor como mediador en el aprendizaje, no es fácil activar los resortes necesarios para que la figura funcione de forma heurística, como base del pensamiento. Por ejemplo, en el aprendizaje uno de estos resortes podría ser la habilidad de introducir nuevas unidades en la figura, así como las operaciones visuales que definen.

Por otro lado, cuando se trabaja con Geometría dinámica la aprehensión perceptual, que sirve para ver las figuras y las visualizaciones icónicas, no siempre conduce a la aprehensión operativa. Por ejemplo, en el problema de la escalera que hemos descrito, la utilización de las representaciones físicas es muy diferente en la Geometría dinámica: qué nos da la información visual y qué esconde toda una visuali-

GeoGebra han incorporado esta posibilidad.

zación no-icónica. Habitualmente la construcción paso a paso con SGD para realizar la representación visual de un problema de lugares geométricos procede del siguiente modo: construir las figuras geométricas basadas en las hipótesis del problema, aplicar las transformaciones geométricas, (mover el punto M a lo largo de una recta A), comprender las relaciones entre la construcción euclídea y la demostración, crear la demostración que involucra y determinada activación de comandos, averiguar las conexiones tanto geométricamente y algebraicamente para llegar a una demostración.

Normalmente los estudiantes cuando resuelven este tipo de problemas utilizan más bien el comando "*Traza*" que "*Lugar geométrico*". Pensamos que una justificación de este hecho puede darse por el punto de vista conceptual geométrico de la definición de Lugar Geométrico en los manuales. Comprender estos aspectos epistemológicos que afecten a la dimensión cognitiva-instrumental de los estudiantes es clave. En los libros de texto la noción de *Lugar geométrico* se introduce vinculada a construcciones con regla y compás, donde su aspecto constructivo y mecánico es claro en el contexto de las aplicaciones (caso1). Pero también, podemos encontrar la noción *Lugar geométrico* en el contexto de las transformaciones, mostrando que estas transformaciones son herramientas muy eficaces para resolver problemas de *Lugares* (caso 2), cuyo significado no es el mismo.

En el primer caso la definición vendría dada en el siguiente modo Definición 1: *Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que satisfacen una determinada propiedad expresable a partir de una construcción geométrica realizada con regla y compás.* Ésta es conocida como la aproximación "*clásica*". También, podemos encontrar otro tipo de formulación en el contexto de las transformaciones, en este caso nos referimos a un conjunto de puntos que son imágenes de un conjunto de puntos, se define como la imagen de un objeto bajo una aplicación o transformación. "*Si llamamos f de la función*: $M \to N = f(M)$, *buscar el lugar geométrico de N es buscar el conjunto de todos los puntos $f(M)$*". En este último caso, *Locus* se define de forma funcional, teóricamente tenemos que considerar que un punto P variable que pertenece a una figura F considerado como un conjunto de puntos (una línea recta, un círculo...) corresponde a un punto P', la imagen de P por una la aplicación f. Locus tiene un doble significado: por una parte legítima el cambio de una figura sintética (un punto global de ver) a una figura como un conjunto de puntos, y permite recomponer la figura. Esta distinción entre trayectoria y locus expresada en estas definiciones se refleja en el software de Geometría dinámica mediante dos herramientas "*Lugar geométrico* " y "*Traza*". Utilizar la herramienta "*Lugar geométrico*" requiere de una aprehensión operatoria para hacer fecunda la intuición de la figura. La visualización no icónica requiere la toma de conciencia de las propiedades que están ligadas a las operaciones que se efectúan, bien para construir una figura o bien para transformarla.

6. Conclusión

En síntesis, en este capítulo se ha argumentado, dando evidencias empíricas que, la articulación entre visualización y razonamiento está en la base de toda actividad matemática, y en particular de la geométrica. La visualización aparece de forma natural por la propia naturaleza de la matemática -concepto de matematización-; porque nuestra percepción es prioritariamente visual pero también es esencialmente relevante en actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos lejos de lo perceptible por la vista. En esos casos, los matemáticos se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otros procesos imaginativos que les ayuden a desarrollar una intuición de lo abstracto.

También, se muestra que los procesos de visualización no están ausentes de dificultad en la transmisión de la disciplina. Para que una imagen sirva para visualizar, no basta con que se establezcan conexiones parciales de sus elementos con el registro analítico, sino que debe lograrse una visión más global, conjunta, que involucre a todos los elementos y relaciones relevantes, y se realice de forma independiente al registro analítico y especialmente si trabajamos con situaciones de aprendizaje con usos tecnológicos. Parece pertinente estudiar la importancia de los contextos informáticos en las interrelaciones de las tres génesis (figural, instrumental y de razonamiento discursivo) en el espacio de trabajo geométrico. El comportamiento de los estudiantes en situaciones de aprendizaje geométrico con SGD muestra que es necesario añadir una dimensión para el desarrollo de razonamiento geométrico del estudiante que tome en cuenta una línea de construcción de la génesis discursiva articulada con elementos de de-construcción visual.

Por último, no tenemos duda de que desarrollar el pensamiento matemático avanzado de nuestros estudiantes supone trabajar los procesos de representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer y formalizar. Sin embargo, en la educación matemática que ofrecemos, a veces corremos el riesgo de no inculcar el hábito de interpretar y descodificar adecuadamente nuestras visualizaciones, tratando de hacerlas explícitas a nuestro alumnado y traduciéndolas, cuando esto resulte adecuado, a un lenguaje formal. Contar con una enseñanza explícita de los diferentes tipos de visualización para cada una de las cuales se muestre sus codificaciones y descodificaciones, utilidades, conversiones de registros sería un inestimable impulso a la comprensión conceptual de nuestros alumnos. Y como ha mostrado el profesor Tarrés, esta codificación y descodificación está inmersa en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma historia de la actividad matemática.

Referencias

[1] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics.* 52(3), 215-24.

[2] Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3): 245-274.

[3] Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 333-344.

[4] Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, 1, 3-26.

[5] Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de lapprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 10, 5-53.

[6] Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 26, 109-113.

[7] Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmemann, W. y Cunningham (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes n. 19, 25-37. Washington, D.C.

[8] Giaquinto, M. (1992). Visualization as a means of geometrical discovery. *Mind and Language*, 7, 382 - 401.

[9] Giaquinto, M. (2005). From symmetry perception to basic geometry. In P. Mancosu, K. F. JØrgensen & S.A. Pedersen (Eds.) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 31-55). The Netherland: Springer.

[10] Gonseth, F. (1945-1955). La géométrie et le problème de l'espace, *Éditions du Griffon, Lausanne.*

[11] Gómez-Chacón, I. M & Escribano, J. (2011). Teaching geometric locus using GeoGebra. An experience with pre-service teachers, *GeoGebra International Journal of Romania (GGIJRO), GeoGebra The New Language For The Third Millennium*, 2 (1), 209-224.

[12] Gómez-Chacón, I. M & Kuzniak, A. (2011) Les espaces de travail Géométrique de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles. *Annales de didactique et de sciences* 16, 187 - 216.

[13] Gómez-Chacón, I. M (2012) Prospective Teachers' Interactive Visualization and Affect in Mathematical Problem-Solving. *The Montana Mathematics Enthusiast Journal*, vol. 10, 1 y 2.

[14] Gómez-Chacón, I. M; Sevilla, I. y Castrillón, M. (2012) Un estudio en Geometría en la transición Secundaria/Universidad a través de la óptica del modelo de Van Hiele. *Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.*

[15] Guzmán, M. de (1996). El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático, *Ediciones Pirámide, S. A.*

[16] Hadamard, J. (1945) The psychology of invention in the mathematical field, *Princeton University Press. Princeton N. J.*

[17] Houdement, C. & Kuzniak, A. (1998). Géométrie et Paradigmes géométriques. *Petit x*, n 51, 5-21.

[18] Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

[19] Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

[20] Mammana, C. y Villani, V. (Ed.) (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

[21] Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning an teaching mathematics, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* PME 1976-2006. Ed. Sense Publishers, 205-235.

[22] Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice and issues.* New York: Springer.

[23] Souto, B. & Gómez-Chacón, I. M (2011). Visualization at university level. The concept of Integral, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 217 - 246.

[24] Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving, *Journal of Mathematical Behavior 21 (2002) 303-317.*

[25] Tall, D. (1991). Intuitions and rigour: the role of visualization in the calculus. En W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds). *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 105-119). Washington: M.A.A.

[26] Tarrés Freixenet, J. (2010). La escalera que se desliza, *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 85, pp 25-36.

[27] Tarrés Freixenet, J. (1991). Historia de la teoría de la dimensión, en *Seminario de Historia de la Matemática I.* (pp. 59-96). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

[28] Tarrés Freixenet, J. (1994). La Topología General desde sus comienzos hasta Hausdorff, en *Historia de la Matemática en el siglo XIX.* (pp. 191-211). Madrid: Edición de la Real Academia de la CC. Exactas, Físicas y Naturales.

[29] Tarrés Freixenet, J. (2011). ¿Cómo paso Alicia al otro lado del espejo? Reflexiones de un matemático sobre el espacio. Conferencia impartida el 23 de marzo de 2011, Universidad de Cantabria. (http://www.matesco.unican.es/talleres_matematicas/transparencias20102011/tarres.pdf)

[30] Tarrés Freixenet, J. (2011). Los espacios abstractos, En Corrales Rodrigáñez C. y Gómez-Chacón, I.M (Ed.) *Ideas y Visualizaciones Matemáticas*, Publicaciones Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Matemáticas, UCM.

[31] Thom, R. (1972) ¿Existe la matemática moderna? Conferencia pronunciada en el 2 *Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática*, Exeter 1972. Traducido en Conceptos de Matemática, Buenos Aires, n 31, 1974, p. 5-12.

[32] Thurston, W. P. (1995). On Proof and Progress in Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 15(1), 29-35.

[33] Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education.* Academic Press.