UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE FILOSOFÍA

TESIS DOCTORAL

Relevancia lógica y pluralismo: subestructuralidad y tesis convencionalista de la semántica formal

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Carlos Javier Villacís Hidalgo

DIRECTOR

Javier Vilanova Arias

© Carlos Javier Villacís Hidalgo, 2024

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE FILOSOFÍA

TESIS DOCTORAL

Relevancia lógica y pluralismo: subestructuralidad y tesis convencionalista de la semántica formal

PROGRAMA DE DOCTORADO EN FILOSOFÍA

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Carlos Javier Villacís Hidalgo

DIRECTOR

Javier Vilanova Arias

Madrid
2024

AGRADECIMIENTOS

Mi principal agradecimiento está dirigido a Javier Vilanova Arias, quien no solo cumplió con creces las labores de director y tutor de mi tesis, sino que a nivel personal me acogió con cercanía y afecto. El hecho de mantener posiciones filosóficas (aparentemente) tan distintas nos llevó a discusiones acaloradas que me obligaron a afinar los argumentos y a considerar otras perspectivas. Agradezco que nuestras reuniones siempre tuvieran el carácter de un encuentro amistoso alejado de la formalidad institucional. Nuestras conversaciones fueron lo más grato del doctorado.

Agradezco al grupo *Mathesis* de filosofía formal y al Taller Complutense de filosofía analítica por contar conmigo en las actividades académicas, congresos, seminarios, lecturas, etc. Más allá de la institucionalidad universitaria, encontré un grupo de amigos liderado por Elia Zardini y Víctor Aranda. Agradezco a Benazir, Alejandro, Roberto, David, Julio y Antonio por enriquecerme. Nuestras cenas por Chamberí hicieron que el camino de la tesis fuera divertido.

Agradezco a la profesora Concepción Martínez Vidal, quien me introdujo en las lógicas no clásicas y tuvo la gentileza de dirigir mi TFM. Esta tesis es la conclusión de la investigación que inicié bajo su tutela.

Agradezco a los profesores del módulo en lógica del máster interuniversitario en Lógica y Filosofía de la Ciencia con sede en la Universidad de Salamanca. Para mí fue una etapa de descubrimeintos donde, gracias a ellos, me maravillé por la Lógica. Se merecen una mención destacada los profesores Enrique Alonso y Mara Manzano. En los pocos aciertos que pueda tener mi tesis están presentes sus enseñanzas. No solo me formaron, sino que me transmitieron su entusiasmo. Son fuentes que no se pueden citar formalmente, pero que son más importantes que la bibliografía oficial.

Por último, agradezco a la Facultad de Filosofía de la Universidad Complutense de Madrid. Considero que la esencia de la universidad es la comunidad de investigadores. Personas que comparten intereses sobre los que indagar para corregirse y nutrirse mutuamente. La Complutense es mi *alma mater*. En *mi* facultad (la de filosofía) inicié mis estudios universitarios y encontré los intereses principales que aún mantengo a día de hoy, a pesar de que haya realizado posteriormente otros estudios no filosóficos.

A la memoria de Onías Hidalgo, mi abuelo, quien
me enseñó lo relevante para vivir bien.

ÍNDICE

RESUMEN v

ABSTRACT vii

1. INTRODUCCIÓN 1

1.1. PROBLEMA, OBJETO DE INVESTIGACIÓN Y TESIS 1

1.2. OBJETIVOS 5

Objetivos principales 5

Objetivos parciales 5

Áreas académicas 6

1.3. ESTRUCTURA 7

PARTE I: PLURALIDAD DE LÓGICAS 10

2. EL PROBLEMA DE LA PLURALIDAD DE LÓGICAS 11

2.1. CLASIFICACIÓN DE SHAPIRO 12

2.1.1. Relativismo genérico 12

2.1.2. Pluralismo genérico 13

2.1.3. Tipos de pluralismo y relativismo lógicos 13

2.1.4. Monismo y tolerancia 22

2.1.5. Cuadro esquemático de la clasificación 24

2.2. DISCUSIÓN 27

2.2.1. Sobre la relación de consecuencia 27

2.2.2. Sobre la naturaleza de la lógica 32

2.2.3. Sobre los criterios taxonómicos de Shapiro 38

2.2.4. Sobre las dificultades en la explicación de posiciones particulares: el caso de la tolerancia 40

2.3. TAXONOMÍA ALTERNATIVA 41

2.3.1. Concepción semanticista de la consecuencia lógica 41

2.3.2. Criterios taxonómicos a partir del problema de la pluralidad de lógicas y el problema de la naturaleza de la lógica 44

2.3.3. Cuadro clasificatorio 46

2.4. PROBLEMAS PRINCIPALES DEL DESCRIPTIVISMO 48
2.5. SÍNTESIS 50
3. LÓGICAS NO CLÁSICAS 54
3.1. SOBRE LA LÓGICA 55
3.1.1. Usos académicos del término "lógica" 55
3.1.2. Relación de consecuencia 56
3.2. LENGUAJES ARTIFICIALES 58
3.3. RELACIÓN DE CONSECUENCIA CARACTERIZADA POR LA SATISFACCIÓN DE MODELOS 62
3.3.1. Lenguaje interpretado 62
3.3.2. Modelos 65
3.4. CRITERIO FORMAL DE DIVERGENCIA LÓGICA 69
3.4.1. Criterios de divergencia 70
3.4.2. Discusión 72
3.4.3. Tipos de divergencia 78

PARTE II: RELEVANCIA LÓGICA 80
4. LA LÓGICA DE LA RELEVANCIA 81
4.1. PARADOJAS DEL CONDICIONAL MATERIAL 82
4.2. IMPLICACIÓN Y RAZONAMIENTO CONDICIONAL 83
4.3. LÓGICA DEL ENTRAÑAMIENTO Y DE LA RELEVANCIA 85
4.3.1. **H** 86
4.3.2. **S4** 87
4.3.3. **R** 89
4.3.4. **E** 94
4.4. LÓGICAS SUBESTRUCTURALES Y RELEVANCIA 98
4.4.1. Cálculo de secuentes tipo Gentzen 98
4.4.2. Crítica a la regla de la atenuación 99
4.4.3. Disolución de la ambigüedad expresiva de las conectivas clásicas 101
5. PLANES SEMÁNTICOS PARA LAS LÓGICAS RELEVANTES 105
5.1. ANÁLISIS SEMÁNTICO 105
5.1.1. Plan australiano 105
5.1.2. Plan americano 108

5.2. COMPARACIÓN CRÍTICA 111
5.2.1. Defensa americana 111
5.2.2. Defensa australiana 116
5.3. PLAN ESCOCÉS 120
5.3.1. Noción relevante de validez 120
5.3.2. Monismo: *The One True Logic* 126
5.3.3. El Silogismo Disyuntivo bajo el descriptivismo relevantista 132
6. LA FILOSOFÍA DE LA RELEVANCIA 138
6.1. RELEVANCIA EN LA INFERENCIA SITUADA 139
6.1.1. Interpretación de las situaciones, el condicional y la relación ternaria 141
6.1.2. Interpretación de la negación y del Silogismo Disyuntivo 145
6.1.3. Discusión 150
6.2. RELEVANCIA EN ARGUMENTACIÓN 152
6.2.1. Motivación: hacia una teoría unitaria 152
6.2.2. Insuficiencia de los sistemas formales 153
6.2.3. Implicatura conversacional 158
6.2.4. Técnica de diagramas 159
6.2.5. Teoría unitaria 160
6.2.6. Discusión 162

PARTE III: MONISMO CONVENCIONALISTA 167
7. SEMÁNTICA CONVENCIONAL 168
7.1. IN THE BEGINNING WAS THE SIGN 169
7.2. FINITARISMO 177
7.3. REDUCCIÓN DE COMPLEJIDAD: CONJUNTOS DE FÓRMULAS COMO MODELOS 182
7.4. SÍNTESIS DE RESULTADOS 194
8. ARITMÉTICA RELEVANTE 196
8.1. PROYECTO DE MEYER 196
8.1.1. Teoría de números en sistema relevante 197
8.1.2. Evitar el segundo teorema de incompletud 206
8.2. DISCUSIÓN 210
8.2.1. Problemas de la inclusión de $\mathbf{C}^{\#}$ en $\mathbf{R}^{\#}$ 211
8.2.2. Problemas en la elusión del segundo teorema de incompletud 216
8.2.3. Descriptivismo aritmético 221

9. LA POSIBILIDAD DE UN MONISMO CONVENCIONALISTA RELEVANTE 227
9.1. LÓGICA RELEVANTE RELEVANTE 228
9.2. INTERPRETACIÓN DE LA ARITMÉTICA RELEVANTE 234
9.2.1. Proyecto de Meyer 234
9.2.2. Interpretaciones posibles 235
9.2.3. Monismo descriptivista relevante 237
9.3. MONISMO CONVENCIONALISTA 240

10. CONCLUSIÓN 248

APÉNDICES 256
APÉNDICE 1: FAMILIA DE LÓGICAS SUBESTRUCTURALES EN CÁLCULO DE SECUENTES TIPO RESTALL 257
APÉNDICE 2: ANÁLISIS SEMÁNTICO DE LAS EXTENSIONES DE **B** Y DE **B** CUANTIFICADO EN EL PLAN AUSTRALIANO 268
APÉNDICE 3: REGLAS DE TABLAS SEMÁNTICAS PARA **B** 270
APÉNDICE 4: TEORÍA SINTÁCTICA DEL SIGNIFICADO 272
APÉNDICE 5: TÉCNICA DE REINTERPRETACIÓN PARA LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA EN EL ENFOQUE FORMALISTA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO COMO ANTECEDENTE DE LA TEORÍA DE MODELOS 278
APÉNDICE 6: RECURSOS PARA LA ARITMÉTICA RELEVANTE 286

BIBLIOGRAFÍA 296

RESUMEN

La presente tesis doctoral tiene por título *Relevancia lógica y pluralismo: subestructuralidad y tesis convencionalista de la semántica formal*. El objetivo principal consiste en analizar los efectos recíprocos entre el problema de la pluralidad de lógicas y la idea de relevancia lógica. Ambos extremos y sus relaciones mutuas constituyen el objeto básico de la investigación. Para orientar la investigación establecemos un marco conceptual sobre el planteamiento y defensa de una tesis convencionalista de la semántica formal.

Por un lado, a partir de esta posición dentro del problema de la pluralidad de lógicas argumentamos que la caracterización más apropiada de la relevancia lógica es aquella que hace uso de operadores intensionales en el metalenguaje para definir la relación de consecuencia lógica. Particularmente, se emplea la fusión, o conjunción intensional, para formular la condición según la cual una inferencia no puede ser válida si sus premisas son verdaderas y su conclusión falsa. Nos apoyamos en la semántica en el plan escocés para las lógicas relevantes; no obstante, argumentamos desde un planteamiento convencionalista contrario al descriptivismo profesado por los creadores del plan. Desde el marco de las lógicas subestructurales, obtenemos la fusión a partir de la restricción de la regla estructural de la atenuación. Esta regla permite introducir premisas irrelevantes para la conclusión, lo cual da lugar a las Paradojas del Condicional Material. Al restringir la regla de la atenuación se dividen las reglas operacionales de la conjunción en intensionales y extensionales. Por otro lado, desde la idea de la relevancia lógica exploramos la posibilidad de un monismo que favorezca a las lógicas relevantes teniendo en consideración el proyecto de la aritmética relevante. No se trata de una argumentación concluyente, sino de poner de manifiesto la viabilidad de un monismo convencionalista cuyo éxito depende de la consecución de los objetivos de la aritmética relevante. La hipótesis filosófica para evaluar este monismo convencionalista reside en la concepción convencionalista de la semántica formal que formulamos a partir de determinada lectura no ortodoxa del formalismo de Hilbert, el cual nos sirve para obtener una interpretación del lema de Lindenbaum dirigida a comprender los modelos como meras estipulaciones simbólicas en términos de conjuntos máximamente consistentes.

Estructuramos el desarrollo de la investigación realizada en tres partes fundamentales. Los resultados se pueden comprender dentro de esta estructura. La primera está dedicada al problema de la pluralidad de lógicas. En ella ponemos de manifiesto el problema general que subyace al asunto del pluralismo lógico mediante la intersección del problema del pluralismo con el problema de las concepciones de la lógica. Con ello obtenemos un cuadro clasificatorio más amplio para sistematizar las posiciones que cabe tomar al respecto. La segunda está dedicada a examinar las lógicas relevantes y a discutir los planes semánticos con la finalidad de obtener una definición de relevancia lógica: A es lógicamente relevante para B si no es posible que sea verdadero "$(A \times \neg B) \wedge (B \times \neg A)$", donde $\times$ es la fusión. Asimismo, abordamos el problema fundamental para los lógicos relevantes del fallo del Silogismo Disyuntivo y su conexión con el principio *Ex falso quodlibet*. La tercera está dedicada a nuestra propuesta del convencionalismo semántico y a la discusión del proyecto de la aritmética relevante. Defendemos que, del mismo modo que el nivel *contentual* de Hilbert, la dimensión semántica de la lógica está constituida por meras estipulaciones simbólicas en la que lo relevante es la reducción de complejidad de una cantidad infinita no numerable a una cantidad enumerable de pruebas. Por último constatamos las dificultades de la aritmética relvante para admitir la regla γ y, a la vez, emplear solo métodos finitarios.

ABSTRACT

The title of this doctoral thesis is *Logical relevance and pluralism: substructurality and conventionalist thesis of formal semantics*. The main aim is to analyze the reciprocal effects between the problem of the plurality of logics and the idea of logical relevance. Both extremes and their mutual relationships constitute the basic object of the research. To guide the research we establish a conceptual framework on the approach and defense of a conventionalist thesis of formal semantics.

On the one hand, from this position within the problem of the plurality of logics we argue that the most appropriate characterization of logical relevance is one that makes use of intensional operators in the metalanguage to define the relationship of logical consequence. Particularly, fusion, or intensional conjunction, is used to formulate the condition according to which an inference cannot be valid if its premises are true and its conclusion false. We rely on semantics in the Scottish plan for the relevant logics. However, we argue from a conventionalist approach contrary to the descriptivism of said plan. From the framework of substructural logics, we obtain fusion from the restriction of the structural rule of weakening. This rule allows the introduction of premises that are irrelevant to the conclusion, which gives rise to the Paradoxes of the Material Conditional. By restricting the rule of weakening, the operational rules of conjunction are divided into intensional and extensional. On the other hand, from the idea of logical relevance we explore the possibility of a monism that favors the relevant logics taking into consideration the project of relevant arithmetic. This is not a conclusive argument, but rather a matter of highlighting the viability of a conventional monism whose success depends on the achievement of the objectives of the relevant arithmetic. The philosophical hypothesis to evaluate this conventionalist monism lies in the conventionalist conception of formal semantics that we formulate based on a certain non-orthodox reading of Hilbert's formalism and an interpretation of Lindenbaum's lemma aimed at understanding models as mere symbolic stipulations in terms of maximal consistent sets.

We structure the development of the research carried out in three fundamental parts. The results can be understood within this structure. The first is dedicated to the problem of the plurality of logics. In it we reveal the general problem that underlies the issue of logical pluralism through the intersection of the problem of pluralism with the

problem of the conceptions of logic. With this we obtain a broader classification table to systematize the positions that can be taken in this regard. The second is dedicated to examining the relevant logics and discussing semantic plans in order to obtain a definition of logical relevance: A is logically relevant to B if it is not possible for it to be true "$(A \times \neg B) \wedge (B \times \neg A)$", where $\times$ is the fusion. Likewise, we address the fundamental problem for the relevant logic of the failure of the Disjunctive Syllogism and its connection with the *Ex false quodlibet* principle. The third is dedicated to our proposal of semantic conventionalism and to the discussion of the relevant arithmetic project. We defend that, in the same way as Hilbert's *contentual* level, the semantic dimension of logic is constituted by mere symbolic stipulations in which what is relevant is the reduction of complexity from an infinite non-countable quantity to an enumerable quantity of proofs. Finally, we note the difficulties of relevant arithmetic in admitting the γ rule and, at the same time, using only finitary methods.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. PROBLEMA, OBJETO DE INVESTIGACIÓN Y TESIS

El núcleo de esta tesis reside en las relaciones entre la relevancia lógica y el problema de la pluralidad de lógicas. Se trata de relaciones bidireccionales, por lo que el problema que guía la investigación se puede formular en los siguientes términos: ¿qué incidencia tiene la relevancia lógica sobre el pluralismo lógico y qué incidencia tiene el pluralismo lógico sobre la relevancia lógica?

En lo que respecta al primer extremo, defenderemos que el pluralismo lógico es una posible respuesta ante un problema más fundamental y de mayor alcance, a saber: el problema de la pluralidad de lógicas. Es un hecho que se han desarrollado sistemas lógicos divergentes, de modo que la pregunta filosófica básica consiste en cuestionar si son admisibles y en virtud de qué criterios los son. Al admitir dos o más sistemas lógicos obtenemos la tesis del pluralismo lógico. Por el contrario, el monismo se obtiene al admitir un solo sistema. En este planteamiento debemos, por tanto, diferenciar entre el estatuto filosófico de la tesis pluralista en general y las propuestas pluralistas en particular que especifican el modo en el que los distintos sistemas admitidos se relacionan. El primer problema es de carácter conceptual y el segundo requiere el uso de recursos lógicos y metalógicos.

Por consiguiente, en la tesis analizaremos el problema del pluralismo lógico en tres niveles. En un primer nivel, analizamos el problema de la pluralidad de lógicas y clasificamos las distintas posturas que se pueden tomar para resolverlo. Defenderemos que en la literatura relacionada no se ha llegado a una sistematización adecuada y completa porque no se ha tenido en cuenta su relación con una segunda dimensión de análisis relativa al criterio de admisión de los sistemas lógicos. Esta segunda dimensión está relacionada con lo que podemos denominar la concepción de la lógica. Defenderemos que solo al cruzar las respuestas al problema de la concepción de la lógica con las respuestas al problema entre el monismo y el pluralismo, obtenemos una taxonomía que agote las posibilidades lógicas de las posturas que cabe adoptar ante la pluralidad de lógicas. Esto no solo aclara la problemática fundamental, sino que también despeja las vías para justificar cada postura que se adopte.

En todo caso, no solo pretendemos superar clasificaciones deficientes, sino que nos proponemos explicar las posiciones para defender una de ellas y criticar a las restantes. Esto nos permitirá situarnos en el nivel de los fundamentos y evitar el análisis de cada una de las propuestas que se han planteado a lo largo de la historia. Nuestro planteamiento pretende ser sistemático y sincrónico, pero no histórico y diacrónico. Admitimos las ventajas como la completud e inconvenientes como la excesiva generalización de esta asunción metodológica que adoptamos de partida.

En un segundo nivel, discutiremos una de las propuestas específicas de la tesis del pluralismo lógico. Se trata de la tesis pluralista con mayor impacto en los últimos veinte años, a saber, el pluralismo de Beall y Restall (2006) a partir de la *Tesis Generalizada de Tarski*. Ahora bien, esta propuesta pluralista la discutiremos con relación a la polémica sobre los planes semánticos para las lógicas relevantes geenrada en las últimas décadas. En un tercer nivel, exploraremos la posibilidad de una tesis monista que favorezca al principal sistema relevante **R** a partir del proyecto de la aritmética relevante.

En lo concerniente al segundo extremo, el que se enfoca en las lógicas relevantes y cómo les afecta la cuestión del pluralismo lógico, debemos empezar aclarando que la lógica es una disciplina cuyo objeto de estudio es la relación de consecuencia. A partir de determinadas premisas *se sigue* cierta conclusión. La relación entre las premisas y la conclusión es lo que permite que la segunda se siga de las primeras. Tomado en su conjunto lo que tenemos es una *inferencia*, la cual puede ser válida con respecto a la conservación de la verdad o correcta con respecto a las reglas de derivación. Esta relación metalingüística puede estar íntimamente vinculada[1] con la conectiva del lenguaje lógico que denominamos *condicional*. Desde el punto de vista de la relevancia, lo problemático son algunos razonamientos condicionales válidos o correctos en lógica clásica (y otras lógicas) pero intuitivamente inadmisibles. El problema consiste en que existen razonamientos condicionales que en lógica clásica son válidos o correctos, pero

[1] Este vínculo se debe al metateorema de deducción, tal como analizaremos más adelante (infra §4). No obstante, como adelanto, lo presentamos del siguiente modo: B es consecuencia de $A_1,\ldots, A_n$, A sii "si A, entonces B" es consecuencia de $A_1,\ldots, A_n$. Esto debe probarse en cada sistema lógico.

en los que el antecedente no es relevante para el consecuente o las premisas no son relevantes para la conclusión.

Un ejemplo de inferencia que no cumple la relevancia puede ser el siguiente: "los cangrejos vuelan, luego Sócrates está vivo o Sócrates está muerto" o "las gaviotas vuelan, luego Sócrates está vivo o Sócrates está muerto". En este tipo de inferencia la conclusión siempre es verdadera independientemente de la verdad o la falsedad de las premisas. Dicho de otro modo, si siempre es verdadera la conclusión, entonces la inferencia es válida con cualquier premisa. El problema se encuentra en que las premisas de estas inferencias no están relacionadas con sus respectivas conclusiones. No parece que el vuelo de los cangrejos esté relacionado con la vida de Sócrates. Se puede replicar que "Sócrates está vivo o Sócrates está muerto" tampoco habla sobre Sócrates, puesto que es una tautología. Sin embargo, intuitivamente su contenido parece tener una conexión con las premisas debido a que lo estamos conectando con ellas a partir de la relación de consecuencia.

Otro ejemplo de inferencia que no cumple la relevancia puede ser el siguiente: "he votado en las elecciones y me he abstenido, luego soy el presidente de España". A este tipo de inferencia se lo conoce como *principio de explosión* o *Ex Falso Quodlibet*. La noción clásica de validez (infra §3.1.2., §3.3.1. y §5.3.1.), esto es, la inadmisión de premisas verdaderas en conjunción con una conclusión falsa, hace que sean válidas las inferencias con una conclusión verdadera y una contradicción como premisas. El problema de la relevancia concierne a la misma relación de consecuencia, es decir, al núcleo de la lógica. Si las premisas de una inferencia válida no pueden ser verdaderas, puesto que son contradictorias, entonces no se puede dar que haya premisas verdaderas y conclusión falsa. Por lo tanto, la inferencia es válida con cualquier conclusión. En nuestro ejemplo, dado que no cabe la posibilidad de que las premisas "he votado en las elecciones y me he abstenido" sean verdaderas[2], tampoco cabe la posibilidad de que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa; ergo, la inferencia es válida con cualquier conclusión como "soy el presidente de España". Un efecto pernicioso de este tipo de inferencia es la explosión deductiva, esto es, que se puede deducir todo, lo cual hace que la relación de consecuencia se convierta en trivial. Ahora bien, el problema de

[2] Entendiendo que "abstenerse" se define en un contexto electoral como "no participar en las votaciones" o "no votar".

base se encuentra en la falta de relevancia de las premisas para la conclusión y no en si disponemos o no de alguna contradicción.

La tarea es, por consiguiente, aclarar qué es la relevancia lógica desde una perspectiva formal (y no meramente intuitiva) y desarrollar lógicas en las que se pueda probar el fallo de las inferencias que no cumplen la relevancia. En lógica-matemática contemporánea los antecedentes en la búsqueda de aquello en lo que consiste la relevancia lógica son los análisis sobre el teorema de deducción de Moh (1950), la teoría de la implicación débil de Church (1951) y la implicación fuerte de Ackermann (1956). No obstante, fue Belnap (1960) quien estableció la relación entre el sistema confeccionado por Ackermann con los razonamientos condicionales que no cumplen la relevancia, también denominadas falacias de la irrelevancia. Más adelante, Anderson y Belnap (1975)[3] sistematizaron los principales sistemas relevantes y ofrecieron dos criterios formales para aclarar la noción de relevancia.

Habiendo realizado un planteamiento de los dos extremos de la investigación, la tesis relativa al problema fundamental de la investigación —concerniente a las relaciones bidireccionales entre la pluralidad de lógicas y la relevancia lógica— la podemos plantear del siguiente modo. Por un lado, en la dirección de la incidencia de la pluralidad en la relevancia lógica defendemos que la caracterización más adecuada de la relevancia lógica es la que se basa en la definición de la relación de consecuencia con operadores intensionales, en particular la fusión. Esto exige el empleo de operadores intensionales en el metalenguaje. Tal postura se acerca a la semántica en el denominado plan escocés, pero nosotros nos separaremos del planteamiento original al argumentar desde unos fundamentos conceptuales convencionalistas contrarios a los de dicho plan.

Por otro lado, en la dirección de la incidencia de la relevancia en el problema de la pluralidad de lógicas defendemos que la tesis monista de los sistemas relevantes, a pesar de no contar con una justificación apodíctica y concluyente, tiene ciertas ventajas frente a la tesis pluralista debido al éxito relativo del proyecto de la aritmética relevante. La pieza clave de la tesis es la concepción convencionalista de la semántica formal que defenderemos a partir de cierta lectura heterodoxa del formalismo hilbertiano y de cierta

[3] Este trabajo tiene antecedentes en Anderson y Belnap (1962).

interpretación filosófica del lema de Lindenbaum orientada a los fundamentos de la lógica.

1.2. OBJETIVOS

Objetivos principales

Nos proponemos alcanzar cuatro objetivos principales.

1. Aclarar el problema subyacente al pluralismo lógico. Proponer una sistematización de las posturas posibles para resolver el problema de la pluralidad de lógicas.
2. Establecer una noción de relevancia lógica a partir del análisis de los diferentes planes semánticos para los sistemas relevantes. Defender una expresión formal de la noción de relevancia lógica vinculada a la relación de consecuencia.
3. Proponer una definición convencionalista de la semántica formal para defender nuestra propuesta ante el problema de la concepción de la lógica. Comprender la relevancia lógica desde este convencionalismo semántico.
4. Proponer un planteamiento viable de un monismo convencionalista. Evaluar el posible éxito de un planteamiento monista que favorezca al principal sistema relevante **R**.

Objetivos parciales

Para la consecución de los objetivos principales necesitamos alcanzar determinados objetivos parciales.

i. Establecer un criterio formal de divergencia lógica para comprender el fenómeno de la pluralidad de lógicas.
ii. Distinguir dos ejes en los que se debe subdividir el problema de la pluralidad de lógicas: la concepción o naturaleza de la lógica y el contraste entre el monismo y el pluralismo.
iii. Intersectar las respuestas entre ambos ejes para obtener una clasificación completa de las respuestas ante el problema de la pluralidad de lógicas.

iv. Analizar los principales puntos temáticos en el desarrollo del programa de investigación de las lógicas relevantes. Apoyar una de las caracterizaciones sintáctico-deductivas de los sistemas relevantes.
v. Comparar críticamente las diversas propuestas semánticas desarrolladas para definir lógico-formalmente la noción de relevancia.
vi. Discutir una tesis pluralista dentro del contexto del análisis sobre la expresión formal de la relevancia lógica.
vii. Relacionar la semántica convencionalista con el programa formalista y las propiedades metalógicas.
viii. Evaluar técnica y conceptualmente los resultados del proyecto de la aritmética relevante.

Áreas académicas

La investigación se encuentra principalmente dentro del área de la *filosofía de la lógica*, puesto que el núcleo del problema investigado exige una reflexión conceptual sobre los sistemas lógicos relevantes. Tanto la relevancia lógica como el pluralismo son temáticas relativas a la concepción de la lógica desde una perspectiva filosófica. Ahora bien, el material de trabajo no es otro más que la *lógica* considerada en su aspecto técnico-formal. Los sistemas lógicos no solo constituyen el objeto básico de estudio, sino que sus conceptos son los recursos básicos que empleamos para el desarrollo de la investigación. Tanto los sistemas relevantes como la familia de las lógicas subestructurales y el análisis de propiedades metalógicas forman parte de los recursos para la consecución de los objetivos planteados. Asimismo, la tesis está involucrada en ciertos elementos de la *lógica filosófica*, en tanto que se aplica la lógica para resolver (o disolver) determinados problemas filosóficos tales como las Paradojas del Condicional Material.

La antedicha distinción de las áreas de conocimiento responde a una partición meramente analítica dirigida a adecuarse a las disciplinas académicas establecidas. Sin embargo, si bien es cierto que el área de trabajo principal es la filosofía de la lógica, en la presente investigación la filosofía de la lógica, la lógica y la lógica filosófica se encuentran intrínsecamente relacionadas. Esto se pone de manifiesto en cuestiones como las siguientes. La aritmética relevante es una discusión lógico-técnica, pero nos interesa la dimensión filosófica del problema. Por el contrario, la polémica sobre los

planes semánticos es una discusión filosófica, pero nos interesa la formulación lógico-técnica de la relevancia dada la concepción convencionalista de la lógica que defenderemos.

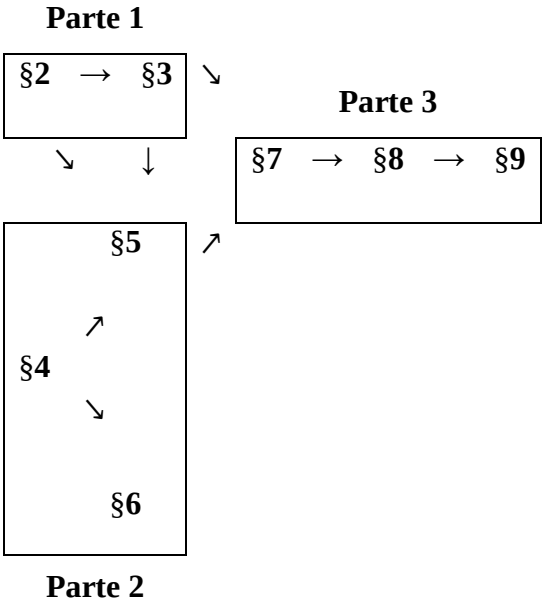
1.3. ESTRUCTURA

Para alcanzar los objetivos planteados hemos estructurado el desarrollo de la investigación en tres partes principales. En la primera parte abordamos el problema de la pluralidad de lógicas. En la segunda parte abordamos el problema de la relevancia lógica. En la tercera parte abordamos la posibilidad de un monismo de la lógica relevante desde una concepción convencionalista. La primera parte está dividida, a su vez, en dos capítulos. En el primer capítulo abordamos el problema de la pluralidad de lógicas y proponemos una clasificación alternativa. En el segundo capítulo aclaramos las asunciones básicas sobre el concepto de sistema lógico y establecemos un criterio de divergencia entre sistemas lógicos. El criterio de divergencia es la condición de posibilidad de la existencia de la pluralidad de lógicas.

La segunda parte está compuesta por tres capítulos. En el primer capítulo analizamos los puntos fundamentales del programa de investigación de las lógicas relevantes y secundamos una de las caracterizaciones sintáctico-deductivas de las lógicas relevantes por su economicidad expresiva. En el segundo capítulo examinamos los planes semánticos para las lógicas relevantes y argumentamos a favor de uno de ellos a partir de unos fundamentos conceptuales convencionalistas. En el tercer capítulo sometemos a crítica dos de las interpretaciones filosóficas más importantes de las lógicas relevantes.

La tercera parte también contiene tres capítulos. En el primero definimos nuestra postura sobre el problema de la concepción de la lógica a partir de una concepción convencionalista de la semántica formal. En el segundo capítulo plantemos la posibilidad de un monismo convencionalista. En el tercer capítulo evaluamos el éxito relativo del proyecto de la aritmética relevante como concreción de una tesis monista, desde unos fundamentos conceptuales distintos a las motivaciones originales del proyecto.

En cuanto a las relaciones entre los capítulos, presentamos el siguiente cuadro esquemático de la estructura de la tesis. Esperamos facilitar la lectura aclarando el orden de influencias.



Como puede observarse, la Parte 1 y la Parte 2 se encuentran al mismo nivel. Esto se debe a que tratan de los dos objetos de la investigación: el problema de la pluralidad de lógicas y el problema de la relevancia lógica. Las relaciones mutuas entre los dos extremos de la investigación se encuentran en la Parte 3 de la tesis. No obstante, esto no quiere decir que las partes 1 y 2 sean independientes. Antes bien, mantienen relaciones mutuas previas a la Parte 3.

En el capítulo §3 se establece una asunción semanticista de la lógica, de lo cual resulta la centralidad del capítulo §5 sobre la polémica relativa los planes semánticos para las lógicas relevantes. Al igual que las lógicas modales, las lógicas relevantes surgieron como sistemas deductivos. La caracterización semántica se fue realizando posteriormente. Ahora bien, al contrario que la semántica de mundos posibles para las lógicas modales, en el desarrollo de una semántica formal para las lógicas relevantes se encontraron más dificultades y hubo mayor polémica entre las diferentes propuestas. Del mismo modo, en el capítulo §2 argumentamos a favor de una concepción convencionalista de la lógica, lo cual sirve como orientación en la misma discusión sobre los planes semánticos del capítulo §5.

El núcleo central de la segunda parte es el capítulo §5. Ahora bien, este capítulo exige el examen crítico del programa de investigación de las lógicas relevantes del capítulo §4. En esta misma línea, consideramos pertinente valorar críticamente las interpretaciones filosóficas más destacadas sobre las lógicas relevantes en el capítulo §6. El eje que conecta las tres partes de la tesis es nuestra propuesta de una concepción convencionalista de la semántica formal que expondremos en el capítulo §7. Esta tesis completa desde nuestra propia perspectiva la discusión sobre los planes semánticos del capítulo §5. Asimismo, los recursos semántico-formales presentados en el capítulo §3 son necesarios para la comprensión de la tesis desarrollada en el capítulo §7. Por último, desde las bases planteadas en el capítulo §7 evaluamos el proyecto monista de la aritmética relevante de los capítulos §8 y §9.

PARTE I: PLURALIDAD DE LÓGICAS

2. EL PROBLEMA DE LA PLURALIDAD DE LÓGICAS

Nuestro propósito en este capítulo consiste en sistematizar las distintas posiciones filosóficas que se pueden plantear ante las distintas caracterizaciones de los sistemas lógicos. El problema ante el que nos encontramos lo formulamos del siguiente modo: ¿qué cabe reflexionar filosóficamente ante el hecho de la existencia actual de una pluralidad de sistemas lógicos? La sistematización de las posiciones que dan respuesta a esta problemática general exige aclarar y definir las cuestiones involucradas en ella. Así, pues, consideramos que puede especificarse en dos sub-problemas analíticamente diferenciados y que suelen confundirse en la literatura relacionada: el problema del pluralismo/monismo y el problema de la naturaleza o concepción de la lógica. El cruce de las distintas definiciones de estos sub-problemas arroja diferentes posiciones dentro de las cuales se clasifican las respuestas al problema de la pluralidad de lógicas. En definitiva, las aportaciones de este capítulo pretenden ser dos:

i. Definir el problema de la pluralidad de lógicas a partir de dos criterios que le otorgan su especificidad.
ii. Establecer una taxonomía que incluya y sistematice las posibles respuestas a tal problema.

La clarificación y la especificación del problema las realizamos teniendo como referencia crítica principal el trabajo de Shapiro (2014), el cual es la obra de referencia sobre esta temática en los años recientes. Por este motivo, realizaremos una reconstrucción propia de la propuesta de Shapiro (2014) para valorar sus fortalezas y carencias. Asimismo, es importante tener en cuenta que se establecerá una terminología específica para evitar la ambigüedad en la que se puede incurrir al manejar expresiones con diferentes usos en distintos contextos, ya que no existe un uso unívoco de los términos que aparecerán. En los subsiguientes capítulos de la tesis se deben comprender los términos a partir de lo establecido en el capítulo presente.

En lo concerniente a la conexión con el desarrollo de la tesis, es preciso mencionar que los resultados que se obtengan en este capítulo permitirán delimitar conceptualmente la posición convencionalista, a partir de la cual se definirá el criterio de distinción entre los sistemas lógicos que se abordará en el siguiente capítulo.

2.1. CLASIFICACIÓN DE SHAPIRO

2.1.1. Relativismo genérico

La primera concepción de relativismo que Shapiro (2014, p.7) destaca es el *folk-relativism* caracterizado por Crispin Wright (2008, p.158). Se trata de una caracterización de la idea general de relativismo aún no circunscrita al ámbito de la lógica que va a servir de punto en virtud del cual se podrán ir concretando y especificando los distintos tipos de relativismo. El *folk-relativism* se define en relación a un tema en cuestión cualquiera Φ de tal modo que desde su perspectiva negativa se afirma que no hay un Φ *simpliciter* o que "There is no such thing as simply being Φ" (Shapiro 2014, p.7). Desde la perspectiva positiva se dice que, dado el *folk-relativism*, cualquier enunciado de tipo "Φ*x*" adquiere su valor veritativo en virtud de un tercer componente allende esta expresión.

Para formalizar esta idea general de relativismo, Shapiro (2014, p.7) recurre al *General Relativistic Schema*[4] (en adelante GRS), el cual expresa que "*Y* es relativo a *X*". Lo que aclara el GRS respecto al *folk-relativism* es que el tema en cuestión Φ es la variable dependiente *Y* de una variable independiente que debe ser especificada. Por consiguiente, para obtener la definición general de relativismo lógico, debemos aplicar el GRS al núcleo de la lógica, a saber, la relación de consecuencia y la validez. Una noción de validez *K* ocupa el lugar de la variable dependiente *Y*. Esto quiere decir que *Y* se extiende o ranguea sobre nociones de validez. Los tipos de relativismo se generan a partir del GRS en función de los objetos sobre los que se extienda la variable independiente *X*. Shapiro (2014, p.10) distingue tres formas generales de *folk-relativism* en tanto que particularizaciones del GRS. Para exponer esta subdivisión se apoya en el marco teórico elaborado por MacFarlane (2005, 2009 y 2014): contextualismo deíctico, contextualismo no deíctico y relativismo dependiente de la valuación.

[4] Shapiro cita la entrada Swoyer, C., 2010, "Relativism", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, (Winter 2010 Edition), Edward N. Zalta (ed.). No obstante, la entrada actual es Baghramian, Maria and J. Adam Carter, "Relativism", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2021/entries/relativism/>.

2.1.2. Pluralismo genérico

El concepto general de *pluralismo* que define Shapiro (2014, p.13), aún no particularizado en la lógica, establece que existen dos o más nociones que dan cuenta de un tema en cuestión: "different accounts of the subject are equally correct, or equally good, or equally legitimate, or perhaps even true". Este *pluralismo genérico* es una concreción particular del *folk-relativism* o relativismo genérico (en nuestra terminología): el pluralismo surge si se pueden asignar dos o más valores a la variable independiente del GRS para un mismo valor de la variable dependiente.

Ahora bien, en cuanto a las relaciones entre el pluralismo y el relativismo genéricos, Shapiro (2014, p.14) considera que cabe la posibilidad de un pluralismo no relativista. Se trataría de valores asignados a la variable del tema en cuestión que no dependen de una segunda variable. Son asignaciones *simpliciter* ya que, en este caso, no existe una variable independiente. Podría pensarse en la asignación del nombre de una persona, el cual es tan legítimo o correcto como cualquier otro nombre. La legitimidad del nombre no depende de las preferencias de los padres ya que si lo hubiesen nombrado sin seguir sus preferencias, el nombre seguiría siendo igual de "válido".

2.1.3. Tipos de pluralismo y relativismo lógicos

Pluralismo anfibológico

Shapiro (2014, §2) expone diversas posturas relativistas y pluralistas relativas específicamente a la relación de consecuencia lógica y la validez. Son posiciones que pueden intersectar el pluralismo y el relativismo. En virtud de la concepción de la noción de consecuencia en tanto que idea intuitiva con diferentes dimensiones, se extrae una primera idea general de pluralismo: existen varios modos de caracterizar la relación de consecuencia lógica en función del aspecto que se tome como característico de la idea intuitiva de consecuencia. Todos ellos son igualmente legítimos y, a su vez, pueden ser incompatibles. Podemos denominar a esta postura la *tesis del pluralismo anfibológico*[5]. En este sentido Shapiro (2014, p.17) explica la distinción entre los enfoques de la lógica basados en la teoría de modelos o en la teoría de la prueba. En esta perspectiva, ambos toman un aspecto distinto de la idea intuitiva de consecuencia.

[5] En nuestra terminología. No es una etiqueta presente en Shapiro (2014).

Desde las coordenadas del pluralismo anfibológico también es posible explicar el pluralismo de Beall y Restall (2006). Beall y Restall (2006, p.29) proponen la *Tesis de Tarski Generalizada* (en adelante TTG), la cual formulamos del siguiente modo: $\Gamma \models A$ sii $\forall x\ (\forall B \in \Gamma, x \Vdash B \supset x \Vdash A)$, donde x es la variable de los casos admisibles (que pueden ser modelos, mundos posibles, construcciones, situaciones, etc.) y "$\supset$" es el condicional material. Según se especifiquen los casos se obtienen nociones distintas de validez, de lo cual resulta un pluralismo. En este caso la anfibología no oscila entre modelos y cálculos deductivos dado que se circunscribe exclusivamente al aspecto semántico, sino que admiten diferentes modos de caracterizar la idea intuitiva de modelo de un lenguaje artificial. Las extensiones de la noción de validez varían en función de la idea de modelo que se formalice.

El pluralismo anfibológico se sostiene sobre la tesis de la polisemia de la consecuencia lógica: si no hay una única relación de consecuencia, entonces sus diferentes definiciones pueden ser igualmente legítimas en tanto que caracterizan distintas ideas de la misma:

> Why think that one of these is to be dubbed as the One True relation of logical consequence?
>
> This hypothesis is a sort of pluralism concerning logic. It says that there are different, mutually incompatible articulations or sharpenings of the intuitive notion or notions of logical consequence. At least some of the supposedly rival explications of logical consequence are (more or less) accurate theories of *different* aspects of consequence, different members of the cluster. (Shapiro 2014, p.25)

Respecto a la noción de consecuencia lógica, Shapiro (2014, pp.19-20) parte de dos asunciones: (i) los *relata* de la relación de consecuencia son enunciados de lenguajes formales interpretados y (ii) los *relata* son un conjunto de premisas y una única conclusión.

La primera aclaración que realiza sobre la consecuencia es que no se trata de un concepto unitario, sino de un término que puede entenderse como (i) un grupo de conceptos, (ii) como un nombre polisémico o (iii) como una idea intuitiva con distintas dimensiones:

> I propose, first, that logical consequence is either polysemous or is something like a cluster concept. One way to put this is that a number of different notions go by that name, even in the literature on logic and the philosophy of logic. Or one might say instead that there is a single, intuitive notion of logical consequence, but it has several, relatively diverse aspects —different items in the cluster (Shapiro 2014, p.17).

Partiendo de esta concepción general de la noción de consecuencia lógica Shapiro (2014, pp.22-23) plantea diversas posibles definiciones de la relación de consecuencia clasificadas en tres grupos:

1. Versiones de la definición modal:
   - i. Δ es consecuencia lógica de Γ sii *no es posible* que Δ sea falsa y, a la vez, todos los elementos de Γ sean verdaderos.
   - ii. Δ es consecuencia lógica de Γ sii Δ se sostiene[6] en todos los *mundos posibles* en los que los elementos de Γ también se sostienen.

2. Versiones de la definición semántica:
   - iii. Δ es consecuencia lógica de Γ sii Δ se sostiene en todos los *modelos* en los que los elementos de Γ también se sostienen.
   - iv. Δ es consecuencia lógica de Γ sii Δ es verdadero en virtud del significado de los términos de los elementos de Γ.
   - v. Δ es consecuencia lógica de Γ sii Δ es verdadero en virtud del significado de los términos lógicos de los elementos de Γ.
   - vi. Δ es consecuencia lógica de Γ sii no puede efectuarse una sustitución de los términos no lógicos en virtud de la cual Δ es falso y los elementos de Γ son verdaderos.
   - vii. Δ es consecuencia lógica de Γ sii Δ es verdadero en virtud de la forma de los enunciados de los elementos de Γ.

3. Versiones de la definición epistémica:
   - viii. Δ es consecuencia lógica de Γ sii es irracional que Δ no se sostenga y, a la vez, todos los elementos de Γ sean verdaderos.

[6] Shapiro (2014, p.22) emplea el término "hold" sin definirlo, puesto que está expresando nociones intuitivas de la relación de consecuencia. Más adelante (en la sección §2.2. dedicada a la discusión), nuestra crítica consistirá en afirmar que debe definirse o bien sintáctica o bien semánticamente.

ix. Δ es consecuencia lógica de Γ sii Δ se deriva de Γ mediante un procedimiento de aplicación sucesiva de reglas deductivas[7].

Pluralismo de modelos lógicos

El enfoque que Shapiro emplea para dar cuenta de las distintas formas de pluralismo y relativismo es lo que denomina "lógica como modelo". Lo expresa de este modo: "The perspective is sometimes called 'logic-as-model.' The idea is that a logical system —a formal language together with a deductive system and/or a model-theoretic semantics— is a mathematical model (…)" (Shapiro 2014, p.18). Es importante no confundir este enfoque con otro enfoque que prima la caracterización modelo-teórica de la lógica. En este sentido distinguimos:

- La *lógica como modelo*[8] entiende que un sistema lógico representa de forma ideal y abstracta un fenómeno o un contexto en el que ya está presente una relación de consecuencia lógica.
- El *enfoque modelo-teórico* entiende que lo fundamental y característico de los sistemas lógicos reside en la descripción semántico-formal de la relación de consecuencia lógica, la cual descripción se realiza mediante reglas definidas en teoría de modelos.

El enfoque de la lógica como modelo ya está orientado hacia una visión pluralista en tanto que "In general, it is rare for there to be a single mathematical model for a given phenomenon" (Shapiro 2014, p.18). A este pluralismo lo podemos denominar la tesis de la pluralidad de modelos[9], dado que diversos modelos pueden dar cuenta de un mismo fenómeno o de una idea intuitiva preexistente. Lo característico es que existe una realidad previa al modelo, la cual es explicada o representada mediante un sistema lógico.

[7] Esta clasificación de Shapiro será discutida en la sección §2.2.1. Consideramos pertinente adelantar, a modo de mera mención, que las versiones modales y epistémicas pueden reducirse a las sintácticas o semánticas.

[8] Mantenemos el mismo vocablo que emplea Shapiro (2014, p.18).

[9] Terminología original nuestra no presente en Shapiro (2014).

Relativismo de los términos lógicos

Una forma de *folk-relativism* concerniente a la relación de consecuencia es la que incide sobre la frontera entre los términos lógicos y los no lógicos: "The idea is that logical consequence and validity are relative to the choice of logical terms" (Shapiro 2014, p.18). A esta postura la podemos denominar la *tesis del relativismo de los términos lógicos*[10]. Esta tesis también podría explicar la diferencia entre la lógica de primer orden y las de orden superior (Shapiro 2014, p.19).

Lo que determina la *forma* y el *contenido* de un enunciado son los términos lógicos y los términos no lógicos, respectivamente[11]. Siguiendo a Shapiro (2014, p.50) en el uso del ejemplo clásico, la forma del enunciado "todos los hombres son mortales" puede expresarse en un lenguaje de primer orden del siguiente modo: $\forall x(Px \supset Qx)$. Lo que expresa esta fórmula es que para cualquier individuo, si de él se predica *P*, entonces también se predica *Q*. De este modo, si *P* se lee como "ser hombre" y *Q* como "mortal", entonces se dice que cualquier individuo que sea un hombre también es mortal. Ahora bien, la fórmula lógica no se compromete exclusivamente con este contenido en particular. También podría leerse *P* como "perro" y *Q* como "mamífero".

El enunciado será verdadero según la situación desde la que se lo interprete, esto es, dependiendo del modelo que satisface o no satisface. La teoría de modelos ofrece una caracterización matemática de los modelos. El enfoque modelo-teórico es un enfoque (no el único pero sí el más desarrollado formalmente) concerniente a las condiciones semánticas de los enunciados. Asimismo, un enunciado correcto[12] se deriva a partir de ciertas reglas deductivas relativas a la estructura de la inferencia y a los operadores de los enunciados. La teoría de la prueba ofrece diversos cálculos concernientes a la deducción. No obstante, en un primer momento Shapiro (2014, p.50) relaciona la distinción entre la terminología lógica y no lógica con, al menos, dos de sus definiciones semánticas de la relación de consecuencia, que expresamos de esta manera:

[10] Terminología original nuestra no presente en Shapiro (2014).

[11] Es importante aclarar que la aparición repetida de los términos no lógicos en un enunciado es parte de su forma. Por ejemplo, $P \supset P$ tiene la misma forma lógica que $Q \supset Q$, pero no la misma que $P \supset Q$.

[12] Esta distinción se explicará con más detalle en §3.

i. Δ es consecuencia lógica de Γ sii no puede efectuarse una sustitución de los términos lógicos (por su significado) en virtud de la cual Δ es falso y los elementos de Γ son verdaderos.
ii. Δ es consecuencia lógica de Γ sii no puede efectuarse una sustitución de los términos no lógicos en virtud de la cual Δ es falso y los elementos de Γ son verdaderos.

Más adelante, Shapiro (2014, p.51) pone de manifiesto la relevancia de la distinción entre los términos lógicos y los no lógicos tanto en teoría de la prueba como en teoría de modelos. Por un lado, en teoría de modelos las reglas semánticas o significado de los términos lógicos no varía en función de las interpretaciones. Sin embargo, la extensión de los términos no lógicos sí se modifica: "in a given model theory, the meaning or semantic role of the logical terms remains fixed from interpretation to interpretation, while the extensions and, presumably, the meaning of each non-logical term varies" (Shapiro 2014, p. 51). En la fórmula $\forall x(Px \supset Qx)$ del ejemplo anterior las respectivas extensiones de los predicados monádicos P y Q pueden cambiar según el dominio del modelo que se está considerando. Por otro lado, en los cálculos deductivos las reglas de inferencia son relativas a la terminología lógica.

Shapiro (2014, p.52) plantea el problema de la justificación de la distinción entre los términos lógicos y los no lógicos. El problema lo sitúa en el carácter convencional de esta distinción, lo cual, según este autor, impide que sea un aspecto intrínseco a la relación de consecuencia:

> What is it that makes a given particle "logical," other than an arbitrary implicit or explicit stipulation in a logic text? From the logic-as-model perspective, (…), a corresponding question is this: Is the distinction between logical and non-logical terminology an artifact of the system, or does it represent something crucial about the notion of logical consequence? (Shapiro 2014, p.52).

Se plantean como alternativas excluyentes la condición de formar parte del núcleo de la relación de consecuencia y la naturaleza convencional de la terminología lógica. Desde esta perspectiva se considera que la distinción debe representar una realidad preexistente en la idea intuitiva de consecuencia. Si se recurre al lenguaje natural, entonces tampoco se puede asignar un carácter lógico preciso o exclusivo a palabras como "o", "y" o "si…entonces".

La arbitrariedad del límite entre los términos lógicos y los no lógicos conduce a una posición pluralista: distintas estipulaciones del límite pueden deberse a que representan nociones intuitivas diferentes de la relación de consecuencia o que representen caracteres distintos de la misma noción de consecuencia. Sin embargo, el problema no se circunscribe sólo a la anfibología de la noción de consecuencia. Según Shapiro (2014, p.52) incluso si asumimos una única noción de consecuencia o si nos fijamos en uno solo de sus aspectos, el problema de la distinción se mantiene dado que la distinción no sería la misma para todos los lenguajes o todos los tipos de objetos que relaciona la noción de consecuencia.

El problema se puede formular teniendo en consideración la multiplicidad de formas lógicas con las que se puede expresar un enunciado del lenguaje natural: "does each sentence, or proposition, have only one logical form, or can it have several at once, depending on how one parses it for logical relations?" (Shapiro 2014, p.53). Para mostrarlo toma el ejemplo de Bolzano (1972 [1837]) "Caius es humano, por consiguiente Caius tiene un alma inmortal": si solo hay una variable y, por tanto, un término no lógico, la cual en este enunciado tiene el valor "Caius", entonces cualquier valor que sustituya a "Caius" mantiene la verdad de la conclusión. Sin embargo, si asumimos que "poseer un alma inmortal" y "ser humano" son valores de variables de predicados monádicos, entonces la inferencia no es lógicamente válida.

La arbitrariedad de la distinción entre términos lógicos y no lógicos conduce a un *folk-relativism* puesto que la relación de consecuencia dependería precisamente de este límite: "The independent variable, to which consequence is relative, is a specific division of the terms into the logical and non-logical" (Shapiro 2014, p.54).

Pluralismo por vaguedad

El fenómeno de la vaguedad, si afecta a la consecuencia y a la validez, entonces también genera un tipo de pluralismo lógico. Es posible que existan argumentos cuya validez no esté determinada y argumentos que sean casos límite. En esta postura también converge una posición relativista en tanto que una expresión vaga puede depender de otro elemento tal como el contexto (Shapiro 2014, p. 19).

En determinadas concepciones, la finalidad de la lógica es ofrecer un modelo exacto de razonamiento deductivo. Sin embargo, es posible que la realidad que se

pretenda formalizar sea ambigua o, incluso, que la propia relación de consecuencia sea una noción caracterizada por la vaguedad. El fenómeno de la vaguedad tampoco es un fenómeno unívoco, por lo cual asumimos la definición de Shapiro (2014, p.57): "let us just assume that the vagueness of a predicate or relation consists in the presence of borderline cases". De este modo, se califica de "vaga" a cualquier relación de consecuencia que admita, cuanto menos, algún caso límite de inferencia válida.

A partir de la idea general de la vaguedad lógica como la existencia de casos límite admitidos por la relación de consecuencia, se pueden ofrecer diversas formas de comprender la misma idea. Por un lado, siguiendo a Williamson (1994), se considera que los casos límite no son realidades intermedias, sino que desde el punto de vista epistémico no es posible determinar qué predicado le corresponde (Shapiro 2014, p.58). Por otro lado, se puede entender la vaguedad desde la condición multi-valorada de aquellos enunciados que son casos límite, de tal modo que existan grados de pertenencia a la extensión de un predicado. Por último, se puede entender la vaguedad en tanto que dependiente del contexto, el cual puede ser cambiante. Esto quiere decir que el cambio del contexto puede determinar el cambio de la extensión de los enunciados válidos. El pluralismo y el relativismo dependen de la noción de vaguedad que se tome en consideración. Especificamos las distinciones del siguiente modo:

- Idea general de vaguedad: la relación de consecuencia es vaga si para ella existe algún caso límite.
- Vaguedad epistémica: los predicados tienen una extensión definida y son epistémicamente vagos si existen casos que no podemos determinar a qué conjunto pertenecen. Desde la noción epistémica de vaguedad no existe pluralismo o relativismo lógicos.
- Vaguedad gradual: la vaguedad de los enunciados reside en la naturaleza gradual de los valores veritativos de los enunciados que son casos límite. A esta concepción de la vaguedad Shapiro (2014, p.58) la denomina "degree theory". Dada esta noción de vaguedad, se puede obtener una postura pluralista lógica si se admite que la vaguedad afecta a la relación de consecuencia y que existen sistemas rivales que otorgan el mismo grado de verdad a los casos límite (Shapiro 2014, p.59).
- Vaguedad por extensión cambiante: es posible entender la vaguedad de ciertos predicados como un relativismo dependiente del contexto. Un ejemplo habitual

> es el predicado "ser alto", ya que no se puede "ser alto" *simpliciter*. A esta perspectiva de la vaguedad la denomina Shapiro (2014, p.60) "extension-shifting" (la traducimos como "extensión cambiante"). Así pues, Shapiro (2014, p.61) explica que "the extension of "logical consequence" is relative to contextual factors present or absent in each of the relevant kind of conversational context".

Para desarrollar su argumentación, Shapiro (2014, p.58) toma como ejemplos de casos límite de verdad lógica y de inferencia válida a la ley del tercio excluso y al principio de explosión, respectivamente. Por tanto, si son casos límite, desde la vaguedad epistémica se dirá que la ley del tercio excluso es una verdad lógica y el principio de explosión una inferencia válida, pero no es posible tener un conocimiento de ello. Por su parte, la teoría gradualista podrá considerar que la ley del tercio excluso no es completamente válida ni inválida, sino que su validez es gradual. Desde la concepción de la extensión cambiante puede entenderse que la ley del tercio excluso es una verdad lógica o no lo es en función del contexto.

Relatividad de la consistencia

Otra forma de relativismo y pluralismo es aquella concerniente a la noción de consistencia. Desde esta perspectiva, la consistencia de una teoría depende del sistema lógico del que se haga uso (Shapiro 2014, p.67). Así pues, "there are a number of interesting and important mathematical theories that employ a non-classical logic, and are rendered inconsistent if classical logic is imposed" (Shapiro 2014, p.19).

Pluralismo modelo-teórico

En la propuesta de Shapiro (2014, p.8) la *Tesis Generalizada de Tarski* de Beall y Restall (2006) es un caso particular del GRS en la que la variable independiente se extiende sobre "casos" (que pueden ser modelos, mundos posibles, construcciones, situaciones, etc.). En la clasificación de Shapiro, la tesis pluralista de Beall y Restall es un caso particular de *folk-relativism*, en concreto de contextualismo deíctico (Shapiro 2014, p.11), a pesar de que estos últimos rechacen explícitamente tal posición. Como es natural, esta discrepancia se debe a una cuestión meramente terminológica, puesto que Beall y Restall (2006) entienden el relativismo que rechazan como una postura concerniente a la verdad, lo cual es distinto del pluralismo de las nociones de validez.

Lo que le interesa destacar a Shapiro (2014, p.32) es su carácter modelo-teórico: "So, one distinctive feature of their view is that they find a pluralism (and, indeed, a folk-relativism) within the modal-cum-semantic-cum-model-theoretic conception of logical consequence". No obstante, continúa diciendo que "Even that conception of logical consequence is not univocal: it can be developed in several, mutually incompatible ways, each relative to the value of a parameter". Shapiro (2014, p.36) sigue esta línea para poner en duda que el metalenguaje clásico semanticista de Beall y Restall no sólo no es la única posibilidad, sino que pueda representar la idea intuitiva de, por ejemplo, los intuicionistas. No olvidemos que Shapiro asume de partida la noción modelo-teórica de consecuencia, por lo que para él si unos "casos" son admisibles en la TTG, entonces otros no lo son[13].

2.1.4. Monismo y tolerancia

Shapiro (2014, p.14) denomina *monismo* a aquella posición que rechaza tanto el pluralismo como el relativismo sobre un tema en cuestión: "Let us use the term monism

[13] Más adelante, Shapiro (2014, p.38) da cuenta de cierto pluralismo que denomina "primitivo" que surgió a la luz de determinadas críticas al pluralismo de Beall y Restall. El término que usa es "Primitive Pluralism". Primitivo en el sentido que no define el concepto y lo asume de partida. Se trata de un pluralismo primitivo en la medida en que hacen uso de nociones no definidas asumidas como conceptos primitivos. Bueno y Shalkowski (2009) critican la tesis pluralista de Beall y Restall alegando que la TTG falla al no poder establecer un vínculo entre la cuantificación sobre casos y la necesidad propia de la relación de consecuencia. Según esta crítica, el pluralismo no puede evitar caer en una tesis en la que no existe relación de consecuencia o una en la que se valide todo argumento. La solución que proponen es la de analizar el fundamento de la lógica al margen del enfoque modelo-teórico y priorizar la definición modal de la relación de consecuencia. Así pues, Bueno y Shalkowski (2009) hablan de una modalidad "primitiva" no comprendida dentro de los modelos.

Compartimos la crítica de Shapiro (2014, p.39) a esta indefinición del concepto básico a partir del cual pretenden analizar los fundamentos de la lógica: "They must say something about this modality, in order to give readers some idea of what it is. There are, after all, a lot of modal notions". Además, Shapiro (2014, p.40) critica la escasa extensión del pluralismo modal que defienden Bueno y Shalkowski (2009): "Bueno and Shalkowski say they are open to a kind of logical pluralism, although it is not easy to see how far it extends, given that intuitionistic logic and relevance logic are not logics by their lights". El pluralismo primitivo no puede escapar de una de estas dos condiciones: o es indefinido o al especificarse técnicamente es subsumido en el enfoque modelo-teórico (esta crítica se explicará en §2.2.1.).

for views about a given subject that reject both folk-relativism and pluralism for that subject".

Dada la concepción de la lógica como modelo, Shapiro (2014, p.21) entiende el monismo como "The One True Logic will be the system that captures the One True notion of logical consequence". A partir de esta concepción podemos distinguir tres componentes de la tesis del monismo lógico: (i) existe una única relación de consecuencia lógica que subyace a sus distintos usos, (ii) la relación de consecuencia no es relativa a una segunda variable independiente y (iii) se debe emplear un único sistema lógico adecuado a la relación de consecuencia, el cual excluye el uso de los demás sistemas divergentes.

Por último, Shapiro (2014, p.15) pone de relieve una cuarta posición general independiente, a saber, la tolerancia. Toma de referencia la postura expresada por Carnap (1950) "Let us be cautious in making assertions and critical in examining them, but tolerant in permitting linguistic forms". No se trata de un pluralismo en tanto que no admite la legitimidad de diversas formas lingüísticas. Tampoco se trata de un relativismo en tanto que no asume que dependa de una segunda variable. Simplemente permite las propuestas para que puedan ser pasadas por un examen crítico, lo cual no implica que se vayan a asumir más de una forma lingüística como legítimas a la vez[14].

Es en este sentido en el que Shapiro (2014, p.15) entiende la tolerancia carnapiana: "He [Carnap] proposes that we *permit* theorists to develop and present linguistic frameworks, and see where they go" (cursiva del original). Tal como se presenta, la interpretación de Shapiro de la tolerancia no la admite como una doctrina filosófica, sino que la entiende como una consideración psicologista en el comportamiento del investigador en lógica: "When it comes to logic, tolerance, as characterized so far, is not a particularly interesting philosophical doctrine, at least not by itself. Tolerance is merely a matter of how one behaves toward other, rival logicians (…)" (Shapiro 2014, p.15). La tolerancia es independiente de las tres posiciones anteriores, pero compatible con todas ellas. Más adelante (infra §2.2.4.), se explicará que desde los criterios de Shapiro no se entiende la tolerancia carnapiana.

[14] En §2.2.4. se critica esta lectura que Shapiro hace de la tolerancia.

2.1.5. Cuadro esquemático de la clasificación

En síntesis, Shapiro (2014) propone como clasificación fundamental cuatro posiciones, a saber: el relativismo, el pluralismo, el monismo y la tolerancia. Proponemos la siguiente reconstrucción del análisis y posibles combinaciones.

- En primer lugar, para definir el *relativismo* toma el concepto general de *folk-relativism* de Wright (2008, p.158), en virtud del cual se afirma que dado un predicado Φ, un objeto *x* no puede ser Φ *simpliciter*. Esto quiere decir que el valor veritativo del enunciado Φ*x* depende de un *parámetro* distinto al predicado y al objeto: "in order to get a truth-value for a statement in the form "*a* is Φ," one must explicitly or implicitly indicate a value for something else, sometimes called a parameter" (Shapiro 2014, p.63).

  Tipos de relativismo genérico:

  - Contextualismo deíctico: el contenido de un término deíctico depende del contexto de uso.
  - Contextualismo no deíctico: el contenido depende de un parámetro perteneciente al contexto.
  - Relativismo dependiente de la valuación: la extensión de un concepto depende del contexto de valuación.

- En segundo lugar, se habla de *pluralismo* en general si existen dos o más nociones divergentes sobre un tema en cuestión, los cuales son legítimos racionalmente de igual manera. Si el tema en cuestión es la relación de consecuencia lógica, entonces se obtiene un pluralismo lógico. El pluralismo lógico puede surgir a partir de la tesis relativista. La relación es la siguiente: el "parámetro" del *folk-relativism* o la variable independiente de la GRS genera dos o más valores de la variable dependiente como nociones racionalmente legítimas. En este sentido se pronuncia Shapiro (2014, p.64): "All it takes is that at least some instances of the "independent variable," the parameter, correspond to legitimate "accounts" of the dependent variable". Asimismo, existe la posibilidad lógica de un pluralismo no relativista. En esta posición se admiten distintas nociones de la relación de consecuencia lógica sin referencia a algún parámetro en virtud del cual adquiriría su legitimidad. También es posible un

relativismo no pluralista en la medida en que solo una o ninguna particularización de la variable dependiente a partir del parámetro sea legítima.

Tipos de pluralismo y relativismo coordinados:

- Pluralismo anfibológico: es posible caracterizar diversas nociones de consecuencia debido a la existencia de distintas ideas intuitiva que se pretendan captar. Se trataría de un término polisémico.
- Pluralismo de modelos lógicos: entiende a los sistemas lógicos como modelos abstractos de realidades en las que ya existe una relación de consecuencia. Para distintas realidades se ofrecen distintos modelos y para una misma realidad también se pueden ofrecer distintos modelos.
- Relativismo de los términos lógicos: la estipulación de los términos lógicos y los no lógicos determina una noción de validez que cambia según la estipulación.
- Relativismo por vaguedad: Dependiendo del carácter gradual de los valores veritativos de los casos límite o dependiendo del carácter relativo según el contexto de los casos límite, la noción de consecuencia lógica puede determinarlos como válidos o como inválidos.
- Relatividad de la consistencia: dependiendo del sistema lógico que se emplee para una teoría matemática o un contexto argumentativo, la consistencia cambiará.
- Relativismo modelo-teórico: es la tesis del pluralismo lógico propuesta por Beall y Restall (2006) (supra § 2.1.3.). Se basa en la TTG: para un argumento válido, la conclusión es verdadera en los mismos *casos* (mundos posibles, situaciones, construcciones, etc.) en los que las premisas lo son. Las distintas especificaciones de los *casos* conducen a diferentes nociones de validez.

- En tercer lugar, el *monismo* lo define Shapiro (2014, p.64) como la contraparte negativa tanto del relativismo como del pluralismo. De la negación de la tesis pluralista y de la pluralista se obtiene que solo una noción de consecuencia y de validez es racionalmente legítima: "a monist about a given subject is someone who rejects both relativism and pluralism for that subject. So a monist about logic holds that there is only one correct account of logical consequence and

validity" (Shapiro 2014, p.64). Cualquier contexto de argumentación racional se encontraría regido por la única noción de consecuencia lógica admitida.

- En cuarto lugar cabe mencionar la *tolerancia*. Dada la propuesta de Shapiro, la tolerancia no representa una alternativa *sensu stricto*, sino una actitud del investigador en virtud de la cual admite pasar a examen crítico cualquier propuesta lógica

Podemos esquematizar la clasificación de Shapiro en dos cuadros. Hay que destacar que Shapiro no pretende ser exhaustivo ni agotar todas las posibilidades con su clasificación. Se limita a exponer algunas de las posibilidades más relevantes. Además, se trata de una reconstrucción propia no presente en Shapiro (2014). El primer cuadro distingue las posturas genéricas y el segundo es una subclasificación de los tipos de pluralismo y relativismo lógicos.

Posiciones genéricas:

Posiciones:	Relativismo	Pluralismo	Monismo	Tolerancia
Definición:	*Folk-relativismo* GRS	Dos o más nociones divergentes legítimas	Una única relación de consecuencia lógica	Actitud tolerante del investigador
Tipos:	- Contextualismo deíctico - Contextualismo no deíctico - Relativismo dependiente de la valuación	- *Simpliciter* - Relativista: dependientes de un parámetro		

El segundo cuadro es una subdivisión de la definición de pluralismo que se coordina con el relativismo —pues depende de un parámetro— y particulariza su carácter genérico refiriéndose a la relación de consecuencia lógica.

Tipos de pluralismos lógicos:

Pluralismo anfibológico	Pluralidad de nociones y/o aspectos de la relación de consecuencia lógica.
Pluralismo de modelos lógicos	Pueden existir diversos modelos lógicos para representar de forma abstracta una misma realidad.
Relativismo de los términos lógicos	La noción de validez depende de la convención que se adopte sobre los términos lógicos.
Pluralismo por vaguedad	Los valores de los casos límite pueden ser graduales. La extensión de las fórmulas válidas puede cambiar en virtud del carácter contextualmente relativo de los casos límite.
Relatividad de la consistencia	La consistencia depende del sistema lógico del que se haga uso.
Pluralismo modelo-teórico	Dada la TTG, se obtienen diferentes nociones de validez al especificar los *casos* en los que se conserva la verdad de las premisas y la conclusión.

2.2. DISCUSIÓN

2.2.1. Sobre la relación de consecuencia

La postura de Shapiro al respecto la podemos sintetizar en dos rasgos característicos, a saber: (i) existe una relación de consecuencia preexistente a su desarrollo formal y (ii) existen múltiples definiciones divergentes capaces de representar la relación de consecuencia: modal semántica y epistémica. Asimismo, el vínculo entre ambos caracteres consiste en que la relación de consecuencia misma (o sus diferentes aspectos) es variable según el contexto de lo que esté relacionando.

Las definiciones que propone Shapiro (2014, pp.22-23)[15] pueden resultar problemáticas como caracterizaciones igualmente adecuadas de la relación de consecuencia, en tanto que no se trata de caracterizaciones independientes y

[15] Supra §2.1.5.

conceptualmente diferenciadas. El propio Shapiro (2014, p.23) declara: "I do not claim that all of these intuitive notions [of logical consequence] are completely distinct from each other". El problema de fondo estriba en la creencia en una relación de consecuencia previa que pueda ser formalizada de diferentes modos según el aspecto que se tome como determinante de la relación. Para justificar la idea de una relación preexistente que pretende ser captada Shapiro (2014, p.21) se apoya en Tarski (1936 [1983], p.409):

> in defining this concept, efforts were made to adhere to the common usage of the language of everyday life. But these efforts have been confronted with the difficulties which usually present themselves in such cases. With respect to the clarity of its content the common concept of consequence is in no way superior to other concepts of everyday language. Its extension is not sharply bounded and its usage fluctuates. Any attempt to bring into harmony all possible vague, sometimes contradictory, tendencies which are connected with the use of this concept, is certainly doomed to failure. We must reconcile ourselves from the start to the fact that every precise definition of this concept will show arbitrary features to a greater or less degree.

Shapiro destaca la idea de captar formalmente la noción de consecuencia presente en los usos del lenguaje natural, de tal modo que se trataría de una tarea empírica. La observación de Tarski la emplea Shapiro para justificar una realidad cambiante y no unívoca con respecto a la relación de consecuencia que se intenta representar. Este es precisamente el punto que sirve de enlace de las dos características que Shapiro observa en la relación de consecuencia. Sin embargo, apoyándonos en la misma explicación de Tarski, también se puede poner de relieve el carácter arbitrario y estipulativo de una definición formal, habida cuenta del inevitable fracaso de reflejar un uso unitario de la noción de consecuencia en el lenguaje natural. Del hecho de la dificultad de adecuar de modo exacto la representación formal de la relación de consecuencia lógica y su contraparte en los usos del lenguaje natural no se sigue que existe una relación empírica cambiante. Se trata de un sofisma de la afirmación del consecuente, dado que dicha dificultad también podría ser explicada, por ejemplo, como el producto de la naturaleza estipulativa de la noción de consecuencia lógica.

Por otra parte, los problemas de la clasificación de Shapiro son puestos de manifiesto inmediatamente por el propio autor. En primer lugar, sobre la distinción entre la caracterización semántica y modal afirma que "This depends on the extent to

which the modality invoked in the modal notions is to be understood in terms of the meaning of the constituents of the sentences or propositions" (Shapiro 2014, p.23). Lo que se cuestiona es si la posibilidad de la definición modal no funciona en realidad como un modelo de un lenguaje interpretado. Esto se ve de forma clara en la semántica que Kripke (1963) introdujo para la lógica modal. Podemos definir un modelo tipo Kripke como una tripleta <W, R, *v*>, donde W ≠ Ø es un conjunto de mundos posibles, R ⊆ W×W es una relación binaria de accesibilidad entre mundos posibles y *v* es una función de interpretación tal que *v*: W×FOR-A ⟶ {1, 0}. Así, por ejemplo, "v_w(A) = 1" quiere decir que la fórmula atómica A es verdadera en el mundo *w*. Además, se debe cumplir la condición de herencia: para todo mundo posible y para toda fórmula atómica, si v_{w_1}(A) = 1 y w_1Rw_2, entonces v_{w_2}(A) = 1.

Como puede observarse, se siguen empleando modelos para caracterizar formalmente la semántica aunque éstos funcionen de forma distinta a los propuestos por Tarski (por hacer uso de un conjunto de mundos posibles y una relación binaria de accesibilidad entre ellos). Los mundos posibles sirven para establecer las reglas semánticas y se puede definir semánticamente la relación de consecuencia: para todo *w* ∈ W y para toda estructura <W, R, *v*>, Γ ⊨ A sii ∀B ∈ Γ (si v_w(B) = 1 entonces v_w(A) = 1). La cual es la definición (ii) de Shapiro que, a su vez, es equivalente a la definición (i).

Se podría cuestionar esta idea si mantenemos una noción intuitiva de modalidad, que no fuera formalizable mediante la semántica de mundos posibles. Para examinar desde una perspectiva más amplia esta limitación en el enfoque de Shapiro, resulta útil recurrir a la propuesta de Bueno y Shalkowski (2009). A esta postura la denomina Shapiro (2014, p.38) "primitivismo". Bueno y Shalkowski (2009) defienden que la cuantificación sobre casos en la TTG (supra §2.1.3.) conduce al nihilismo lógico o al universalismo lógico. Para evitar el problema del colapso Bueno y Shalkowski (2009) proponen un pluralismo basado en una definición modal de consecuencia lógica alejada del enfoque modelo-teórico. Por este motivo deben hacer un tratamiento "primitivo" de la modalidad, puesto que según explican "Treating a modality as primitive and as more fundamental than cases has the advantage, (…), that consequence can be characterized without presupposing a logical notion in our metatheory, that is, the universal quantifier" (Bueno y Shalkowski 2009, p. 307). La posibilidad la toman como una idea intuitiva que se asume de partida sin definición.

Sobre tal propuesta podemos realizar dos observaciones críticas:

- Al presuponer la idea intuitiva de posibilidad, hacen una asunción de mayor envergadura conceptual que la del cuantificador, ya que este último no deja de ser una estipulación formal. El cuantificador puede ser comprendido como una estipulación formal de una regla, mientras que la posibilidad primitiva es una intuición que se asume sin definición. Shapiro critica la propuesta modal primitivista en un sentido parecido a la anterior observación. El problema radica en que "Bueno and Shalkowski propose that the modality in question not be defined or analyzed at all. (…). I suggest that one cannot just leave it at that" (Shapiro 2014, p.39). Considera que esta idea intuitiva no es suficiente para elaborar una definición de consecuencia.
- La caracterización modal de la relación de consecuencia lógica, aun siendo de carácter "primitivista", no deja de ser semántica. Del mismo que ocurre con la versión substitucional (que podría entenderse como inferencialista) (vi) de las definiciones semánticas, las cuales tienen que ver con el contenido significativo. La definición de Bueno y Shalkowski (2009, p.307) "*B* is a consequence of *A* if, and only if, the conjunction of *A* and *not-B* is impossible" es equivalente a la definición realizada mediante modelos de Kripke[16]. La expresión "is impossible" de la definición modal primitivista puede especificarse mediante los valores veritativos de las fórmulas involucradas. De lo contrario, se está omitiendo la definición de dicha expresión (de hecho lo toman como noción intuitiva primitiva). Lo fundamental reside en aquello que Tarski (1933 [1983]) y Tarski y Vaught (1956)[17] matematizaron a través de la función de interpretación, a saber, la relación de "ser verdadero en una estructura".

Hay que aclarar que esta última observación no es una crítica directa a la propuesta de Bueno y Shalkowski (2009), sino que nos sirve para mostrar la debilidad de la distinción de las definiciones de la relación de consecuencia lógica.

[16] La cual, a su vez, genera un conjunto de fórmulas válidas coextensional al que genera la definición que se realiza con modelos de Tarski.

[17] Tarski y Vaught (1956) hicieron que la definición de verdad de Tarski (1933) sea aplicable a lenguajes modelo-toéricos.

En segundo lugar, respecto a la especificidad de la definición epistémica Shapiro (2014, p.23) expresa que "The epistemic notion (viii) can be brought into the semantic fold, if we think of the indicated rationality as somehow tied to knowledge of the meaning of certain terms, presumably the meanings of the logical terminology". Lo que quiere decir no es más que la "irracionalidad" de admitir premisas verdaderas junto con una conclusión falsa estriba precisamente en el significado de los términos de una inferencia válida. Esto es, que la irracionalidad epistémica vendría dada por el incumplimiento de las reglas semánticas.

La definición (ix), encuadrada del mismo modo en la caracterización epistémica, es una definición deductiva que Shapiro (2014, p.24) considera que también puede comprenderse de un modo semántico: "The deductive notion (ix) can also be understood in semantic terms if the primitive steps in the gap-free chains of reasoning turn on the meanings of the terminology, or perhaps the meanings of the logical terminology". No obstante, consideramos que se trata de un error, en tanto que los pasos encadenados orientados a la obtención de un nuevo objeto (la conclusión) a partir de las premisas, hacen referencia a un cálculo deductivo, esto es, a un procedimiento en virtud del cual se derivan enunciados correctos a partir de hipótesis. La definición (ix) es la única distinta a las demás que ofrece Shapiro. En este caso se habla de un procedimiento de derivación y no de una conservación de la verdad.

En definitiva, no se justifica la pretensión de Shapiro (2014, p.24) según la cual "at least some of the items in the list are, at least prima facie, different notions, even if it is not clear exactly how many there are". Dado que nos encontramos en el estadio crítico de la argumentación (previo a la propuesta: infra §2.3.), lo que destacamos en este punto son dos consideraciones:

- Las diferentes definiciones que propone Shapiro pueden ser comprendidas bajo sólo dos nociones irreductibles, las cuales admiten diversas formulaciones. Las dos nociones fundamentales y bien definidas formalmente son la semántica y la sintáctica: la idea de la conservación de la verdad (en estructuras) y la idea de derivación de fórmulas (mediante un cálculo deductivo), respectivamente.
- Aceptar acríticamente una postura descriptiva como fundamento para analizar el pluralismo lógico supone una asunción que orienta y restringe las clasificaciones posteriores. Con esto se pretende poner de manifiesto que la

> postura descriptivita pertenece a la discusión sobre una problemática distinta y que debe ser tomada como la variable de un criterio coordinado con el problema del pluralismo. En este punto no nos estamos comprometiendo con una concepción convencionalista en detrimento de una concepción descriptivista. Simplemente llamamos la atención sobre la necesidad de tomarlo como un criterio separado para construir una clasificación con mayor rendimiento explicativo.

2.2.2. Sobre la naturaleza de la lógica

Todas las posiciones de la clasificación de Shapiro responden a un problema común: el problema de la pluralidad de las lógicas: "Our questions include these: Is there more than one logic that is employed —or can be employed, or should be employed— in legitimate mathematical theories? Is there more than one extension for the relation of logical consequence, or validity, depending on the background theory (or depending on something else)?" (Shapiro 2014, p.1). Si bien admite que otros problemas tales como el de la naturaleza de la lógica influyen en ciertos temas de la discusión sobre la pluralidad de las lógicas, su proyecto se ciñe a clasificar las posiciones que responden específicamente a tal problema: "Indeed, a certain flexibility concerning the nature of logic drives at least some aspects of the project. Although we will broach more general matters from time to time, the main focus is on rigorous deduction, within various mathematical theories" (Shapiro 2014, p.1).

Relación entre lenguaje formal y lenguaje natural según Shapiro

Esta problemática es explicada por Shapiro a partir de la relación entre el lenguaje formal y el lenguaje natural. Tal como explica Shapiro (2014, p.41), esta relación puede ser explicada en virtud del significado que en un lenguaje formal tienen los términos lógicos. En el enfoque modelo-teórico el significado depende de la noción de "verdad en una estructura", esto es, de la relación de satisfacibilidad cuyos *relata* son modelos y fórmulas en las que se encuentran los términos lógicos. Esta propuesta semántica contrasta, según Shapiro (2014, p.42), con el enfoque de la teoría de la prueba en el que el significado depende de las reglas de inferencia relativas a los términos lógicos (también hay reglas estructurales).

Consideramos que en este análisis se pueden estar confundiendo distintos órdenes conceptuales. El significado es una cuestión concerniente a la semántica, la cual puede ser formalizada a partir de distintos enfoques. Uno de ellos es el enfoque modelo-teórico desarrollado por Tarski. Por su parte, la teoría de la prueba se refiere a las reglas deductivas de derivación concernientes al aspecto sintáctico de las fórmulas, no a su significado. Esta es la distinción entre la validez y la corrección de las inferencias. Por una parte obtenemos fórmulas válidas y, por otra, teoremas.

Ahora bien, la posición de Shapiro (2014, p.42) niega que el "significado real" de los símbolos de un lenguaje artificial estén dados por las reglas deductivas o las reglas de satisfacibilidad. El motivo de esta negación reside en que ambos tipos de reglas son convencionales, es decir, que no hay nada intrínseco a tales términos en virtud de lo cual se pueda explicar su significado, sino que se estipula: "When a logician presents a formal system, she stipulates the rules of a deductive system and/or she *stipulates* the relation of satisfaction between formulas, interpretations, and variable assignments (or something to that effect)" (Shapiro 2014, p.42). Por "significado *real*" entiende un contenido previo que la estipulación no capta.

Por nuestra parte, no consideramos que la crítica sea suficiente: no se puede negar el carácter convencional de las reglas, pero ello no implica que no definan el significado de los términos. Lo que podemos concluir es que el significado y la corrección de las derivaciones deductivas son convencionales. Shapiro (2014, p.42) explica que:

> There is no further question about the *real* meaning of the logical terminology in the formal language, is there? If there is such a thing as "meaning" in this context, it is given by the stipulated definitions— either the axioms and rules of the deductive system, or the recursion clauses for satisfaction, or both, if the presented system is sound and complete.

Esto lo entiende como una limitación de las reglas deductivas y de satisfacibilidad para dar cuenta del significado de los términos lógicos de un lenguaje. No obstante, la dificultad radica en la forma de determinar el supuesto "significado real" de tales términos. Se puede aludir al lenguaje natural, sin embargo, los distintos usos del lenguaje natural son también convencionales. Se trata de una diferencia de lenguajes y de sus interpretaciones y no de acceder a un contenido metafísicamente real

intrínsecamente vinculado con los términos. Por este motivo sostenemos que la concepción convencionalista que entiende que el significado se define a partir de la estipulación de reglas de satisfacibilidad es más plausible que la idea de un contenido lógico preexistente a la relación de consecuencia deductiva.

El enfoque de Shapiro (2014, p.43) le conduce a centrase en la relación "entre un lenguaje formal en un sistema lógico" y un campo de objetos que relaciona la consecuencia lógica, cualquiera que sea, por ejemplo, el lenguaje natural. Esta relación es lo que justifica la *tesis de la pluralidad de modelos*, la cual no sólo es un pluralismo, sino un *folk-relativism*. Shapiro (2014, pp.43-49) propone cuatro posiciones que pueden explicar esta relación.

- Descriptiva

La concepción descriptiva es aquella que entiende que la relación entre un lenguaje formal y el lenguaje natural consiste en que el primero representa las características definitorias del segundo: "formal languages aim to accurately *represent* or *describe* underlying features of natural language sentences" (Shapiro 2014, p.43). Esta tesis afirma que existe una forma lógica en el lenguaje natural, la cual puede ser explicitada por un lenguaje formal. Las disputas entre los sistemas lógicos se resuelven recurriendo al trabajo empírico. Shapiro explica que la postura descriptiva no conduce a un pluralismo lógico dado que un sistema podrá captar el uso de los términos lógicos de un lenguaje natural: "If the logical terms in natural languages are univocal, and if logical consequence turns on the meaning of that logical terminology, then there will be no pluralism" (Shapiro 2014, p.44).

- Prescriptiva

Dada la ineludible ambigüedad del lenguaje natural, la postura prescriptiva defiende la utilización de un lenguaje artificial de modo sustitutorio al natural para determinados campos tales como el científico o el filosófico. Desde esta perspectiva, el lenguaje ordinario debe ser modificado para obtener mayor grado de exactitud en el razonamiento deductivo. A esta postura Shapiro (2014, p.45) también la denomina "revisionista", en tanto que dependiendo de los distintos objetivos se revisarán los sistemas lógicos para adecuarlos. Vincula el carácter prescriptivo de los lenguajes artificiales a las finalidades que pretenden satisfacer. En este sentido, la postura

prescriptiva también es una forma de *folk-relativism*, en el que la relación de consecuencia depende de la práctica deductiva en cuestión.

- Proposiciones abstractas

La tercera posición que destaca Shapiro (2014, p.46) es aquella que entiende que la lógica es relativa a proposiciones que pertenecen al pensamiento abstracto objetivo: "A third perspective, (…), is that sentences of natural languages are used to express, or try to express, *propositions*, members of an objective, abstract realm of thoughts, or perhaps sentences in a language of thought". Según esta posición tanto el lenguaje natural como un lenguaje artificial expresan las proposiciones del pensamiento abstracto, no obstante, el primero lo hace de un modo más ambiguo y el segundo lo hace de manera más detallada y exacta. Para ejemplificar esta postura, Shapiro (2014, p.46) recurre a la analogía que hace Frege (1879) entre el ojo humano y el microscopio, por un lado, y el lenguaje natural y su *conceptografía*, por otro.

- Propuesta de Shapiro: modelo matemático o "lógica como modelo"

Por último, Shapiro (2014, p.46) propone una cuarta posición, la cual es su propia aportación a la discusión sobre la naturaleza de la lógica: "I propose that a formal language is a *mathematical model* of a natural language in roughly the same sense as, say, a collection of point masses is a model of a system of physical objects, and a Turing machine is a mathematical model of a person following an algorithm, or perhaps a computing device". Así pues, un lenguaje artificial se entiende como un modelo matemático que sirve para mostrar con claridad determinados aspectos de un lenguaje natural, lo cual se lleva a cabo mediante la simplificación o incluso la omisión de las restantes características que no se pretenden mostrar.

En el caso de la lógica, el modelo matemático en cuestión se enfoca en el razonamiento deductivo y en la consistencia de las creencias mediante una relación de consecuencia. Lo característico de esta posición consiste en que éstos son aspectos del lenguaje natural, los cuales se tienen en consideración por parte del modelo matemático, mientras que se hace abstracción de los restantes aspectos del mismo lenguaje natural. En esta postura de la lógica como modelo se idealizan los aspectos del lenguaje natural que están relacionados con el razonamiento deductivo.

Dentro de este enfoque caben, según Shapiro (2014, p.47), diversas modalidades del pluralismo lógico. Si la postura de la lógica como modelo se coordina con la tesis del pluralismo anfibológico, entonces se obtiene un pluralismo en el que diversos sistemas son modelos lógicos de distintos conceptos o aspectos de la relación de consecuencia. Asimismo, este pluralismo es un *folk-relativism* en la medida en que un sistema lógico depende del aspecto que se pretenda modelar del razonamiento deductivo de un lenguaje natural[18]. Sin embargo, se puede mantener una tesis pluralista dentro del enfoque de la lógica como modelo sin necesidad de asumir la anfibología del concepto de consecuencia lógica (Shapiro 2014, p.49). Es posible mantener un monismo en la concepción de la relación de consecuencia y, a la vez, un pluralismo de modelos igualmente adecuados que la captan.

Ahora bien, respecto a la posición descriptiva consideramos que es compatible con tesis pluralistas: en primer lugar, los usos del lenguaje natural pueden ser ambiguos, en segundo lugar, la noción de validez puede depender del contexto argumentativo incluso empleando el mismo lenguaje natural y, en tercer lugar, la realidad descrita puede ser un lenguaje matemático, un conjunto de fenómenos empíricos o cierta realidad ideal. Si existe sólo una realidad ideal, una teoría fundamental de la realidad (Ej.: la lógica cuántica para Putnam o la convergencia de todas las teorías para Russell) o un solo contexto argumentativo, entonces el descritivismo será de tipo monista puesto que la lógica correcta será la adecuada a esa realidad. No obstante, si se admite la existencia de diversas realidades a describir, entonces el descriptivismo será de tipo pluralista. En cualquier caso, lo característico del descriptivismo consiste en que existe una o varias realidades existentes a las que debe adecuarse el formalismo lógico.

Sobre la postura prescriptivista cabe mencionar que el carácter prescriptivo es un rasgo propio de cualquier concepción de la lógica. Incluso la perspectiva descriptivista mantiene cierta prescripción de los sistemas lógicos una vez adecuados a la realidad representada. Lo cual no va en detrimento de la posibilidad de realizar modificaciones que mejoren la adecuación. Consideramos que este rasgo no basta para establecer una posición específica que excluya a las demás. Asimismo, un prescriptivismo tal como lo

[18] Es importante destacar cómo Shapiro (2014, p.48) señala al condicional material como uno de los grandes problemas de la lógica clásica en tanto que modelo del razonamiento deductivo del lenguaje natural. Esto será pertinente en la discusión sobre la relevancia lógica.

expone Shapiro no es necesariamente pluralista dado que puede existir una posición monista platónica.

Sobre la posición de las proposiciones abstractas, podemos observar que la afirmación según la cual la lógica se debe adecuar al pensamiento abstracto puede seguir siendo comprendida bajo la concepción descriptivista. Simplemente se estaría describiendo una realidad abstracta en lugar de una empírica. Por último, respecto a la propuesta de Shapiro de la lógica como modelo matemático del razonamiento deductivo podemos decir que se trata de un descriptivismo menos detallado y más idealizado al hacer abstracción de los elementos que considera irrelevantes para la deducción de la que se haga uso según el contexto. En definitiva, la clasificación que propone Shapiro no es capaz de establecer una verdadera distinción entre las diferentes concepciones de la lógica. Esto es el resultado de la priorización de una perspectiva descriptivista que pretende distinguir con ciertos matices.

La tesis descriptivista general afirma que la lógica consiste en la descripción de una relación de consecuencia preexistente (o de la consistencia preexistente de un conjunto de enunciados o creencias). La realidad descrita puede ser de carácter empírico-lingüístico, abstracto, mental o de otra índole, lo cual no modifica la tesis general. La única postura que, *prima facie*, se opone a esta perspectiva general es el prescriptivismo. No obstante, como se ha señalado, el rasgo prescriptivo pertenece a cualquier sistema lógico sin que esta condición sea inconciliable con su naturaleza descriptiva. La pretensión de Shapiro con esta clasificación se orienta a vincular el descriptivismo (tal como él lo entiende, esto es, la primera posición que expone) con una actividad empírica destinada al monismo lógico. Su propuesta de la *lógica como modelo* matemático permite (e, incluso, impone) un descriptivismo pluralista conciliable con el *folk-relativism*. En este sentido Shapiro utiliza una posición para defender su pluralismo pero no lo usa como criterio para sistematizar las distintas posiciones posibles. Se está orientando la discusión en lugar de ofrecer un marco de comprensión general, puesto que al dar por sentado esta postura provoca una restricción de la clasificación de las posiciones en discusión, lo cual supone una insuficiencia explicativa.

2.2.3. Sobre los criterios taxonómicos de Shapiro

Tal como puede observarse en la clasificación que propone Shapiro (supra §2.1.5.), el relativismo y el pluralismo en tanto que posiciones genéricas pueden converger en los distintos tipos de pluralismos-relativismos lógicos, pero en el análisis conceptual son posturas diferenciadas. El relativismo responde al GRS y el pluralismo admite dos o más nociones divergentes de relación de consecuencia legítimas. De este modo, se admite la posibilidad de un pluralismo *simpliciter* cuyas nociones admitidas como legítimas no dependen de un segundo factor, aunque se trae de una posición con poco recorrido y no explorada por Shapiro.

Ante este estado de la cuestión podemos realizar la siguiente observación crítica: por una parte, como ya se dijo antes, en cuanto a la relación del relativismo con el pluralismo hay que señalar que también cabe la posibilidad de un relativismo no pluralista. Esto quiere decir que la dependencia respecto a una segunda variable independiente puede dar lugar a instancias no legítimas para el concepto en cuestión, en nuestro caso la relación de consecuencia lógica. Por consiguiente, se está presuponiendo (de modo no explícito por Shapiro) que la relación de dependencia con respecto a un segundo elemento (característico del GRS) y la legitimidad o admisibilidad de una instancia de la variable dependiente son reglas conceptualmente distintas. Sin embargo, no es posible establecer un criterio de legitimidad sin hacer referencia a un segundo elemento en virtud del cual la instancia en cuestión se admite. Esto quiere decir que, atendiendo a la GRS, todo pluralismo sería necesariamente relativista, ya que si se admite una noción legítima siempre es en virtud de otro elemento o parámetro.

Por otra parte, en cuanto a la relación del relativismo con el monismo, dada la definición de Shapiro, se establece que el monismo exige la negación no sólo del pluralismo, sino del relativismo. Por este motivo la concepción del monismo es tan restringida que argumentalmente conduce a su rechazo, puesto que no es posible justificarlo con arreglo a cierta adecuación respecto a una realidad, contexto argumentativo, razonamiento común, el lenguaje natural, el pensamiento abstracto, etc. Si se justificase el monismo de acuerdo con una correspondencia, entonces se estaría haciendo uso del GRS ya que su adecuación depende de una variable independiente, a saber: la realidad a la que se adecúa. No obstante, Shapiro no llega a abordar este problema ya que vincula su caracterización del descriptivismo con el monismo. Se

podría objetar diciendo que para el monismo el parámetro siempre es el mismo, pero se sigue manteniendo la relación de dependencia característica del relativismo de Shapiro. En definitiva, si todo es relativismo, entonces obtenemos una clasificación trivial. El relativismo se convierte en una posición trivial en tanto que no hay forma de no hacer uso del GRS. Y si el relativismo sólo excluye posiciones insostenibles, tales como el pluralismo *simpliciter*, entonces no es un criterio operativo para discernir las posiciones interesantes (que son de las que se hace cargo Shapiro).

Allende la crítica principal antedicha, podemos destacar otras dificultades de la clasificación de Shapiro:

- Como corolario de la crítica principal, podemos decir que Shapiro ofrece una distinción analítica que no clasifica con claridad los subcasos de la postura que considera interesante. Shapiro se centra y defiende un pluralismo-relativismo de modo que los criterios de clasificación genéricos justifican esta posición y permite enfrentarla a otras posiciones vacías como el pluralismo no relativista y el relativismo no pluralista.
- Sobre los tres caracteres del monismo que distinguimos en la explicación de Shapiro (supra §2.1.4.) podemos decir que es posible mantener un monismo sin la necesidad de la primera característica: existe una relación de consecuencia previa al formalismo. Por otro lado, la segunda característica, esto es, que se niega el relativismo, puede generar una inconsistencia con la definición general que ofrece Shapiro (2014, p.21): "The One True Logic will be the system that captures the One True notion of logical consequence". Esto quiere decir que la *única lógica* depende de una variable independiente que es la noción de consecuencia verdadera, lo cual encaja en el GRS. Esta observación es una reducción al absurdo del GRS mostrando que se siguen consecuencias inadmisibles de su definición, ya que el monismo descriptivista sería inconsistente. El problema reside en que la definición es demasiado general como para evitar efectos no deseados. No se trata de un rechazo a la relación de dependencia, sino de emplearla como criterio. Es un criterio tan amplio que impide cribar determinadas consecuencias absurdas.
- La noción gradualista de la vaguedad de la relación de consecuencia lógica puede ser formaliza mediante las supervaluaciones. Ahora bien, el propio Shapiro (2014, p.60) explica que la formalización de las supervaluaciones no

supone un pluralismo basado en la vaguedad, dado que lo que acepta es que existen algunos enunciados indeterminados. La vaguedad no genera necesariamente un pluralismo lógico.

- Sobre el relativismo de los términos lógicos (supra §2.1.3.) debemos aclarar, en contraposición a lo que sugiere Shapiro, que el hecho de que la distinción sea convencional no impide que sea determinante dela relación de consecuencia lógica de un sistema formal, siempre que la propia relación de consecuencia se entienda a su vez como convencional. Si los *relata* de la relación son FBF, entonces no existe el problema al que apunta Shapiro al presentar como alternativas incompatibles la condición de formar parte del núcleo de la relación de consecuencia y la naturaleza convencional de la terminología lógica.

2.2.4. Sobre las dificultades en la explicación de posiciones particulares: el caso de la tolerancia

Dados los criterios clasificatorios de Shapiro la tolerancia queda restringida a una mera actitud del investigador lógico. Así pues según Shapiro (2014, p.16) "an open-minded monist will be tolerant". Sin embargo, esto no se ajusta a la propuesta de la tolerancia. Tal como explican Harré y Sagüillo (2001), el principio de *tolerancia de las formas lingüísticas* defendido por Carnap está vinculado al *criterio de formalización* como vía filosófica antimetafísica no encorsetado en los parámetros empiristas de significación propios del *principio verificacionista*. La tolerancia de las formas lingüísticas da cabida en las investigaciones filosóficas a nociones distintas de las meramente no-metafísicas, tales como los propios criterios lógico-empiristas.

El interés respecto a la naturaleza de la lógica que tiene el principio de tolerancia ligado al criterio de formalización es el de la suposición de una postura *convencionalista* en lo concerniente a las formas lingüísticas. Así pues, Carnap (1934) expresa que:

> No es asunto nuestro establecer prohibiciones, sino llegar a convenciones (…). En lógica no hay estándares. Cualquiera tiene libertad para construir su propia lógica, i.e., la forma de lenguaje que desee./ Lo único que se requiere, si alguien desea discutir, es que establezca su método con claridad y que aporte reglas sintácticas en lugar de argumentos filosóficos.

Esta posición permite a Carnap resolver problemas metafísicos tradicionales haciendo patentes los supuestos en un lenguaje formal. Se trataría de un análisis reconstructivo en la que los argumentos filosóficos se resuelven a través de la capacidad explicativa de las formas lingüísticas empleadas. En un primer momento Carnap desarrolla esta postura dentro de una orientación sintacticista. No obstante, Carnap (1947) extiende su análisis en términos de reconstrucción convencionalista a la semántica formal.

En definitiva, Shapiro se equivoca al considerar a la tolerancia carnapiana como respuesta al problema de la pluralidad de lógicas, puesto que se trata, antes bien, de una postura sobre la naturaleza de la lógica. Los criterios de Shapiro le impiden comprender dentro de su cuadro clasificatorio a otras posturas como la de la tolerancia. Lo cual pone de manifiesto que existen posiciones que no pueden ser explicadas.

2.3. TAXONOMÍA ALTERNATIVA

2.3.1. Concepción semanticista de la consecuencia lógica

Tomando como referencia crítica el modelo clasificatorio de Shapiro (que hemos sintetizado en dos cuadros[19]), consideramos que es posible obtener un mayor rendimiento explicativo de las respuestas posibles al problema de la pluralidad de lógicas si coordinamos sus criterios taxonómicos con los criterios del problema de la naturaleza o concepción de la lógica. Respecto a la clasificación de Shapiro realizamos dos variaciones: (i) se intersectan dos problemas en lugar de tener en cuenta sólo a uno de ellos y (ii) se extraen criterios taxonómicos más generales de dichos problemas. Las modificaciones producen un cambio sustancial en la taxonomía de tal modo que resultan posiciones distintas dentro de las posibilidades lógicas del cuadro propuesto. Para justificar los criterios taxonómicos demos aclarar el enfoque que adoptamos en tres problemas, a saber, la pluralidad de lógicas, la naturaleza o concepción de la lógica y la relación de consecuencia.

Respecto a la relación de consecuencia adoptamos una concepción fundamentalmente semanticista. Por este motivo no asumimos un tercer criterio clasificatorio dependiente de la caracterización semántica o sintáctica. Sin embargo,

[19] Supra §2.1.5.

dentro de la perspectiva semanticista es necesario distinguir entre la concepción semanticista en general, relativa al significado de las expresiones formales mediadas por la relación de consecuencia lógica, y el enfoque modelo-teórico de la semántica, el cual es una de las posibles formas de comprensión y de tratamiento formal. En el enfoque modelo-teórico de la semántica el núcleo de los sistemas lógicos consiste en los modelos formales que rigen la relación de consecuencia deductiva y determinan la práctica inferencial. Existen dos nociones irreductibles de consecuencia lógica, a saber, la semántica y la sintáctica. Lo que proponemos como hipótesis metodológica es que la sintáctica es complementaria de la semántica.

Ahora bien, la concepción general no es necesariamente modelo-teórica, puesto que existen diversos enfoques tales como el modal primitivo, el teórico-conjuntista, el algebraico relacional, el substitucional, entre otros. El enfoque modal de Bueno y Shalkowski (2009) no llega al grado de formalización de los modelos de Tarski, se queda en la idea intuitiva. Pero el enfoque modal sigue siendo semántico, es una alternativa al enfoque modelo-teórico, no a la semántica. Además, el enfoque modal primitivo puede subsumirse en la teoría de modelos mediante la semántica tipo Kripke. Esto puede verse en las definiciones (i) y (ii) de Shapiro[20], donde comprobamos que "no es posible que" es sustituible por "en todo mundo posible", y un mundo posible está en un modelo.

La tesis de la polisemia de la consecuencia lógica de Shapiro (2014, p.25) no es admisible en tanto que la variedad que propone puede reducirse a dos definiciones. De hecho el propio Shapiro las reduce a una: la semántica. Asumimos una polisemia restringida a dos definiciones. En este sentido podemos acercarnos a la postura de Shapiro (2014, p.26): "The proof-theoretic account is aimed at a deductive notion of consequence, or perhaps the deductive aspects of the intuitive notion of logical consequence (if there is a single intuitive notion)". Sin embargo, proponemos que la caracterización sintáctica es complementaria de la semántica. La alternativa a la consideración sobre el contenido significativo es el procedimiento de derivación. Ambas caracterizaciones pueden coincidir técnicamente, pero a partir de un lenguaje de primer orden su correspondencia no es *a priori* y debe ser demostrada. En orden cero o

[20] Supra §2.1.3.

fragmento proposicional la correspondencia es inmediata puesto que ya contamos con un procedimiento constructivo.

Para Shapiro la perspectiva semanticista supone un tipo de monismo. Así, pues,

> My claim, then, is that the two camps —the model-theorists and the inferentialists— are each onto different, though related, notions of consequence. A member of either camp might concede at least some of this, but go on to argue that her notion is the primary one. This would be to maintain a monism concerning logic, perhaps with only a grudging tolerance, maintaining that the opponent has focused on a derivative or subsidiary aspect of the One True consequence relation (Shapiro 2014, p.27).

Esta declaración es muy esclarecedora, puesto que para defender una perspectiva semanticista en un espacio de posibilidades en el que quepa el pluralismo, tal como es nuestra pretensión, obliga a argumentar en favor de dos aspectos diferenciados: (i) la primacía de la semántica y (ii) tal primacía no es necesariamente un monismo.

Sobre el segundo aspecto, consideramos que la postura que afirma que el semanticismo es un monismo no es viable dado que la semántica permite diversas caracterizaciones excluyentes de la relación de consecuencia. Sobre el primer aspecto no presuponemos la idea de que aquello que describe a la lógica es el conjunto de fórmulas válidas que tienen en común todas las teorías de un conjunto de modelos[21]. De este modo, podemos establecer que lo que caracteriza de forma específica a la lógica es: $\cap\{T(\mathcal{M})\colon \mathcal{M} \in C\}$. Esto es, la intersección generalizada de las fórmulas verdaderas en un modelo $\mathcal{M}$ o teoría de ese modelo $T(\mathcal{M})$ tal que el modelo pertenece a un conjunto determinado C. La consecuencia se define a partir de esta idea: La fórmula ψ es consecuencia del conjunto de fórmulas Γ sii $\forall\mathcal{M}\,(\mathcal{M} \in C \supset (\forall\varphi\,(\varphi \in \Gamma \supset \mathcal{M} \Vdash \varphi) \supset \mathcal{M} \Vdash \psi))$.

La definición semántica de consecuencia (en este caso con un enfoque modelo-teórico) se encuentra vinculado con el núcleo característico de la lógica. Esto permite comprender el carácter subsidiario de la definición sintáctica: se necesita un sistema deductivo para producir los elementos del conjunto de fórmulas válidas en cuestión. De

[21] No se trata de un argumento, sino de una aclaración del semanticismo que se toma como asunción.

este procedimiento se deriva un conjunto de teoremas, por lo que se necesita que el cálculo sea correcto para que el conjunto de teoremas esté incluido en el conjunto de fórmulas válidas. Desde esta perspectiva, un sistema deductivo es un complemento cuyo objetivo es solventar la escasa operatividad de la noción semántica de consecuencia lógica. La hipótesis de trabajo consiste en que existen dos nociones de consecuencia y una de ellas es complementaria de la otra.

En lenguajes de segundo orden "for any sound, effective deductive system S, there is a valid argument, couched in a second-order language, that is not sanctioned as valid by S" (Shapiro 2014, p.25). No obstante, esto no supone un problema en caracterizar a SOL como sistema lógico si lo *esencial* es la semántica. No es necesaria una tesis pluralista basada de la ambigüedad de la noción intuitiva de consecuencia para admitirla como lógica, tal como presupone (Shapiro 2014, p.26). No hay una idea intuitiva multívoca, sino distintos usos ya sea en el lenguaje natural o en el formal, tal como la definición semántica modelo-teórica de consecuencia. Además, es necesario tener presente que el lenguaje natural también es una convención.

En definitiva, adoptamos como hipótesis metodológica los siguientes puntos: (i) podemos distinguir dos definiciones distintas de consecuencia lógica a las que se pueden reducir las restantes, (ii) se necesita el componente convencional, no meramente recoger los usos confusos e incompatibles entre sí del lenguaje natural y (iii) se prioriza la noción semántica sobre la sintáctica.

2.3.2. Criterios taxonómicos a partir del problema de la pluralidad de lógicas y el problema de la naturaleza de la lógica

Lo que se propone es que para abordar el problema de la pluralidad de lógicas hay que coordinarlo e intersectarlo con otro, a saber, el de la naturaleza de la lógica. En este marco teórico hay que distinguir entre la tesis del pluralismo lógico y el problema de la pluralidad de lógicas: las diversas tesis que defienden el pluralismo lógico ocupan posiciones dentro de esta taxonomía que toma a las respuestas del problema de la pluralidad de lógicas como los criterios de un eje de la clasificación. No existe una teoría absoluta sobre los diferentes usos de los términos involucrados en la discusión, sino sólo hipótesis metodológicas con mayor o menor capacidad explicativa. Así pues, nuestro modo de abordar el problema de la pluralidad de las lógicas consiste en elaborar

una taxonomía de posiciones, las cuales son el resultado de cruzar dos criterios de clasificación:

- Eje 1: las posturas que dan respuesta al problema de la naturaleza de la lógica o las concepciones de la lógica.
- Eje 2: las posturas que dan respuesta al problema de la existencia de la pluralidad de lógicas.

Respecto al eje 1, cabe observar la distinción básica entre la naturaleza descriptiva y la naturaleza estipulativa de la lógica. La concepción descriptiva asume que existe una realidad previa al desarrollo de la lógica formal el cual debe ser captado o representado por la relación de consecuencia. Es posible que para esa tarea se simplifiquen las realidades explicadas. La consecuencia lógica debe retener mediante sus reglas las propiedades de una realidad deductiva existente. Proponemos tres versiones de la postura descriptiva, las cuales son extremos idealizados: el platonismo, el mentalismo y el empirismo. En virtud del primero la lógica describe una realidad abstracta y objetiva, según el segundo lo que se representa son las reglas del pensamiento y para el tercero la lógica se adecúa a los fenómenos empíricos tales como una práctica argumentativa o la realidad física. La concepción estipulativa, por su parte, es una propuesta convencionalista en virtud de la cual las reglas de la consecuencia lógica no se adecúan a una realidad preexistente. Respecto a la clasificación de Shapiro[22] hay que resaltar que prioriza una perspectiva descriptivista salvo en un caso que destaca el carácter prescriptivo, el cual es característico de la lógica y no es incompatible con la descripción de una realidad y, por consiguiente, no es una posición específica. En esta taxonomía proponemos un nivel más en la comprensión del problema al contraponer el descriptivismo al convencionalismo.

Respecto al eje 2, dada la existencia de sistemas lógicos divergentes, el *problema de la pluralidad de lógicas* consiste en cuestionarse si es racionalmente legítimo hacer uso de diferentes sistemas relativos, en todo caso, a una relación de consecuencia deductiva formal. Dependiendo del sistema lógico que se emplee pueden diferir tanto las inferencias válidas en el lenguaje objeto como la propia definición de consecuencia en el metalenguaje. Esta distinción será determinante para la discusión

[22] Supra §2.1.5.

sobre la relevancia lógica. Así, pues, mantenemos el centro de discusión que establece Shapiro (2014, p.1):

> the main focus is on rigorous deduction, within various mathematical theories. Our questions include these: Is there more than one logic that is employed —or can be employed, or should be employed— in legitimate mathematical theories? Is there more than one extension for the relation of logical consequence, or validity, depending on the background theory (or depending on something else)? If so, is the extension of logical consequence somehow relative to something?

Establecemos tres posibles respuestas identificadas cada una de ellas con una posición extrema e idealizada que permite explicar las posturas matizadas en la interacción con otras problemáticas. Estas tres posiciones son:

- El pluralismo lógico: existen sistemas divergentes igualmente legítimos para la relación de consecuencia lógica y la validez ya sea para un mismo ámbito o para diferentes ámbitos.
- El monismo lógico: sólo existe un único sistema legítimo para la relación de consecuencia lógica y la validez.
- El unitarismo lógico: existe una única *logicidad* común, pero muchos sistemas lógicos traducibles entre sí.

2.3.3. Cuadro clasificatorio

A partir de los criterios extraídos en el epígrafe anterior, elaboramos un cuadro con el que clasificar las posiciones posibles. Con ello caracterizamos extremos idealizados que permiten contener las posturas existentes matizadas. No pretende ser una exposición detallada del desarrollo de la historia de la filosofía de la lógica. Se trata de una hipótesis metodológica original que permitirá posteriormente (i) ubicar teóricamente el problema que nos interesa, esto es, el pluralismo, y (ii) defender una de las posiciones aclarando su relación con el problema de la relevancia lógica. Es una hipótesis meramente instrumental, la cual se propone por su mayor rendimiento explicativo en comparación con otros modelos, en particular el de Shapiro (2014).

	Convencionalismo	Descriptivismo		
		Empirismo	Platonismo	Mentalismo
Pluralismo	P_c	P_e	P_p	P_m
Monismo	M_c	M_e	M_p	M_m
Unitarismo	U_c	U_e	U_p	U_m

Cada posición del cuadro puede admitir más de una versión dado que los criterios de clasificación que las caracterizan son rasgos generales. Así, por ejemplo, M_e puede referirse a la lógica que corresponde a la teoría que mejor describe la realidad física como la propuesta de la lógica cuántica por parte de Putnam (1968) o puede aludir a la lógica relevante como mejor caracterización del razonamiento intuitivo tal como propone Read (1988), si entendemos que lo intuitivo se refiere al uso en lenguaje natural. Asimismo, hay que aclarar que es una taxonomía *etic* que permite explicar las posiciones que los distintos autores mantienen de forma *emic*. Esta analogía con las ciencias sociales puede servir de ayuda para entender este punto. Al igual que en antropología se distingue entre una perspectiva de tercera persona, externa al objeto de estudio, y una perspectiva de primera persona interna al fenómeno social que se estudia, nosotros distinguimos nuestros criterios taxonómicos de los conceptos internos a las propuestas clasificadas. Por consiguiente, mantenemos esta analogía antropológica dado que los distintos desarrollos involucran diferentes conceptos no compartidos por todos. Este pretende ser un marco común que puede no coincidir con los conceptos que cada autor de las posiciones clasificadas mantuvo. Los extremos idealizados que se proponen como criterios de clasificación pueden ser entendidos como versiones débiles de la tesis que defienden. Por este motivo el platonismo sólo expresaría que las leyes de la lógica se adecúan a realidades no empíricas.

Debemos aclarar que en adelante solo consideraremos el monismo y el pluralismo en lo que respecta al eje de la pluralidad de lógicas. Por ello debemos realizar una aclaración sobre la postura que denominamos “unitarismo”. Esta tercera posición ha sido introducida con el propósito de incluir en la taxonomía propuestas tales como las del etiquetado de Gabbay (1996) o la *logicidad* de los distintos sistemas lógicos en su traducibilidad a un marco común de Manzano (1996 y 2004). Esta última

propuesta se auto-concibe (desde una perspectiva *emic*) como una forma de pluralismo. El problema lo encontramos en que la traducción de las distintas lógicas a la lógica multivalorada de primer orden como lógica marco o lógica unificadora bien podría comprenderse filosóficamente como un modo de monismo lógico. Incluso podría defenderse que se trata de un monismo que favorece simplemente a la lógica clásica (con un solo dominio) ya que puede probarse su equivalencia con la lógica multivalorada (Manzano y Aranda 2022, §6.1.). A esto hay que añadir que no existen versiones específicamente descriptivistas o convencionalistas de las mentadas propuestas unitaristas. Estas concepciones filosóficas del unitarismo exigirían desarrollo teórico para poder tratarlas con sistematicidad. Consideramos que las posturas unitaristas admiten la pluralidad de sistemas lógicos, pero defienden la existencia de un marco común que puede comprenderse como cierta unificación. Desde nuestra perspectiva esta postura es distinta del mero pluralismo y del mero monismo.

2.4. PROBLEMAS PRINCIPALES DEL DESCRIPTIVISMO

Consideramos que la posición más plausible como solución al sub-problema de la naturaleza de la lógica es el convencionalismo. A continuación, sintetizamos determinadas razones que nos orientan a aproximarnos a la concepción convencionalista de la lógica en detrimento de la descriptivista. No se trata de una refutación taxativa, sino de la identificación de problemas que más adelante se podrán solventar con la postura convencionalista. Esta última postura también tiene problemas, pero en una evaluación general consideramos que es preferible. Esta consideración se asienta sobre tres problemas fundamentales de la postura descriptivista:

1. El descriptivismo incurre en una petición de principio: De forma general, para realizar algún tipo de inferencia o para considerar fenómenos desde la perspectiva de sus relaciones formales es necesario contar previamente con una relación de consecuencia lógica. Si partimos de una realidad pre-lógica para justificar la relación de consecuencia que se está ya empleando, entonces caemos un una circularidad. Si optamos por una fundamentación metafísica, entonces caemos en un círculo vicioso, puesto que nos encontraríamos ante una fundamentación metafísica de la lógica y una fundamentación lógica de las inferencias de la metafísica.

Habitualmente se responde que se parte un razonamiento informal presente en el lenguaje natural con el cual se llegan a conclusiones y posteriormente se puede formalizar. Sin embargo, en primer lugar, que sea informal o ambigua no quiere decir que no esté operando ya una relación de consecuencia. En segundo lugar, del hecho de la dificultad de adecuar de modo exacto la representación formal de la relación de consecuencia lógica y su contraparte en los usos del lenguaje natural no se sigue que existe una relación empírica cambiante. Esto es un *sofisma de la afirmación del consecuente*, dado que dicha dificultad también podría ser explicada como el producto de la naturaleza estipulativa de la noción de consecuencia lógica. En tercer lugar, se está privilegiando el metalenguaje que se está usando, por tanto, en la práctica se está asumiendo una prioridad de la relación de consecuencia, en este caso la noción informal y ambigua presente en el lenguaje natural.

2. El descriptivismo incurre en proposiciones metafísicas indemostrables: si se parte de una realidad preexistente y se entiende que la lógica es una descripción de dicha realidad, se debe explicar la relación entre las entidades lingüístico-formales en cuestión y los objetos de la realidad. Existe un salto injustificado en la adecuación del lenguaje formal a los fenómenos reales. El problema se encuentra en cómo explicar dicha adecuación. Si, como réplica, se dice que se trata de un criterio instrumental, entonces la circularidad se mantendría pero ahora para determinar qué teoría cumple mejor los criterios instrumentales. En cualquier caso, lo que se está señalando es el problema de explicar en qué consiste y cómo es posible esta adecuación. El problema del punto anterior es la petición de principio de la explicación metafísica de la relación de consecuencia. El problema de este punto es el salto de lo lingüístico a lo metafísico. El problema del siguiente punto es la traslación del problema a los modelos.
3. Dado el semanticismo, el descriptivismo no resuelve el problema de la relación con la realidad, sino que lo traslada: la relación de satisfacción es entre entidades lingüístico-formales, no con la realidad[23]. Si se dice que la relación con la realidad es la del modelo como descripción de cierto fragmento espacio-temporal de la realidad y el modelo en tanto que representación formal satisface

[23] Esto se puede matizar con alguna postura semanticista que considere que los conjuntos y estructuras algebraicas "están" en la realidad.

fórmulas, entonces no se resuelve el problema sino que se traslada. Los modelos también son estipulaciones. La motivación al establecerlos es instrumental, pero no influye en la justificación teórica.

Intuición quiere decir sin mediación y pre-lógico realidad preexistente. Es evidente que hay realidad pero es discutible que las reglas del razonamiento estén en la realidad. Eso es una postura metafísica muy discutible. Lo que se está atacando es la consideración según la cual existe una relación de consecuencia preexistente a su desarrollo formal. Así pues, la noción clásica de validez no falla porque sea deficiente al captar las nociones pre-lógicas concernientes a la consecuencia lógica. De lo que tenemos intuición es:

i. Del lenguaje natural, lo cual es otra convención con una relación de consecuencia ambigua.
ii. De la "lógica de la realidad": es una postura metafísica indemostrable.

Por tanto, la propuesta convencionalista que defendemos es la de la naturaleza meramente estipulativa de las condiciones del análisis semántico mediante las cuales se define la relación de consecuencia lógica.

2.5. SÍNTESIS

A partir de la discusión del problema de la pluralidad de lógicas y las tesis filosóficas que caben ser defendidas al respecto, hemos obtenido tres resultados principales:

1. Reconstruimos las distintas acepciones que aborda Shapiro en dos cuadros clasificatorios que distinguen las posiciones genéricas y los tipos de pluralismos. No obstante, discutimos los criterios de distinción que ofrece Shapiro y ponemos de manifiesto que tanto el planteamiento del problema de la pluralidad de lógicas como la clasificación de las posibles respuestas al mismo no tienen suficiente capacidad explicativa para dar cuenta del problema y de la clasificación de alternativas a tomar si solo tiene en cuenta un único criterio, a saber, la cuestión del pluralismo lógico.
2. Si añadimos un segundo criterio y cruzamos el criterio del pluralismo lógico con el criterio de la concepción o naturaleza de la lógica, entonces obtenemos mayor

rendimiento explicativo del problema de la pluralidad de lógicas y mayor alcance para incorporar distintas posiciones en la taxonomía.

En lo concerniente al primer criterio distinguimos dos posiciones fundamentales: el convencionalismo y el descriptivismo. El primero entiende que la relación de consecuencia es una definición estipulada que no mantiene una dependencia interna con una realidad pre-teórica de la que tengamos conocimiento intuitivo. El segundo considera que la relación de consecuencia es una descripción de una realidad preexistente que se pretende explicar formalmente. El descriptivismo puede especificarse en tres sub-tesis dependiendo del tipo de realidad que describan: empirismo, platonismo y mentalismo.

En lo concerniente al segundo criterio, mantenemos las posturas comúnmente admitidas, esto es, el monismo lógico y el pluralismo lógico. El primero admite un solo sistema lógico y el segundo admite dos o más sistemas lógicos divergentes y rivales. El modo en el que se admiten diversos sistemas lógicos depende de la concepción de la lógica que se sostenga. En definitiva, la nueva taxonomía propuesta resulta del cruce de las posiciones de ambos criterios.

3. Ponemos de manifiesto determinadas dificultades a las que se enfrenta la concepción descriptivista. Las dificultades con las cuales discutimos la concepción descriptivista las sintetizamos en tres. Primero, observamos la posibilidad de incurrir en una *petitio principii* al justificar metafísicamente la relación de consecuencia, en este caso mediante una descripción. La metafísica (y cualquier práctica racional) presupone explícita o implícitamente una relación de consecuencia para realizar sus inferencias. Segundo, si se pretende resolver el problema anterior afirmando que no interviene ningún discurso metafísico (o cualquier otra práctica racional), sino que se representa de forma directa una realidad pre-teórica de la que tenemos conocimiento intuitivo (inmediato), entonces observamos la posibilidad de incurrir en un salto injustificado de las entidades lingüístico-formales a los objetos reales. Esta relación sería la de satisfacción de un modelo a un enunciado (lo cual es cierta noción de adecuación de verdad en una estructura). Sin embargo, los modelos son también entidades lingüísticas estipuladas. Tercero, si se pretende resolver el problema anterior afirmando que son los modelos los que describen la realidad, entonces no se está resolviendo el problema del salto, sino meramente trasladándolo.

Respecto al primer resultado, Shapiro (2014) parte de una definición muy general de relativismo expresada en el GRS, le cual establece una relación de dependencia de una variable (dependiente) a otra (independiente). Si es posible asignar dos o más valores a la variable independiente para un mismo valor de la variable dependiente, entonces tenemos una noción genérica de pluralismo. Esta sería una forma de concretar la idea de que pueden existir dos o más nociones igualmente admisibles sobre un tema en cuestión. Si este esquema se aplica a la relación de consecuencia, entonces hablamos de pluralismo lógico. Los distintos tipos de pluralismo se obtienen en función de la explicación que se dé a la posibilidad de asignar diferentes valores a la variable independiente. Ejemplos de ello pueden ser los fenómenos de la vaguedad o la anfibología. Por su parte, el monismo se define como la negación del esquema del relativismo-pluralismo. Ahora bien, al dar por sentado una noción descriptivista de la lógica los criterios de distinción de Shapiro conduce a tres tipos de problemas. Por un lado, se derivan posiciones extremas inviables no previstas por Shapiro tales como la imposibilidad de un monismo no relativista y la posibilidad de un pluralismo que no siga la GRS. Por otro lado, sus criterios no permiten comprender posiciones relevantes en la discusión tales como la tolerancia entendida como convencionalismo. Por último, los criterios no permiten establecer una distinción clara de los casos interesantes de pluralismo ni sistemática de las explicaciones que dan lugar a los distintos tipos de pluralismo.

Respecto al segundo resultado, consideramos que no es posible ser neutral al problema de la concepción de la lógica y que la postura que se tome afecta a la tesis que se defienda sobre el problema del pluralismo. Obtenemos esta consideración a la luz de la discusión del abordaje de Shapiro (2014) a la problemática en cuestión. Shapiro (2014) da por sentada una concepción, la cual es la que hemos denominado *descriptivismo*. Ciertamente, admitimos (supra §2.2.2.) que Shapiro considera ciertos modos de comprender la lógica. No obstante, identificamos dos problemas en su aproximación: (i) las diferentes posturas que propone son reducibles al descriptivismo y (ii) no permiten una coordinación sistemática con el problema del pluralismo.

Respecto al tercer resultado, dadas las dificultades presentadas a las que se enfrenta el descriptivismo, optamos por la concepción convencionalista de la lógica. Será esta postura la que se tomará como supuesto en las discusiones de las ulteriores secciones, salvo cuando se reconstruyan posturas externas. Ahora bien, es menester

realizar tres aclaraciones. En primer lugar, la concepción convencionalista aún no ha sido especificada. Se detallará más adelante (infra §7) y se coordinará con el problema de la relevancia lógica (infra §§4-6). En este punto de la investigación nos basta contar con la crítica del descriptivismo como razón a favor del convencionalismo. En segundo lugar, las dificultades a las que se enfrenta el descriptivismo no suponen un rechazo taxativo del mismo. Nos resulta difícil sostener una postura absolutamente concluyente en problemas tan fundamentales y generales. Simplemente consideramos que al detallar el convencionalismo podremos resolver o disolver algunos problemas del descriptivismo, en particular, lo relativo a su justificación, que en el caso del convencionalismo se convierte en un problema de auto-justificación. En tercer lugar, lo antedicho no quiere decir que el convencionalismo esté libre de dificultades, sino que sus dificultades serán menores con respecto a las líneas argumentales de la tesis.

El siguiente paso que debemos investigar es el criterio de divergencia y rivalidad entre sistemas lógicos. Por un lado, necesitamos establecer que existen distintos sistemas lógicos divergentes y rivales para que tenga sentido el problema de la pluralidad de lógicas que acabamos de tratar. Por otro lado, es un paso previo para abordar el problema de la relevancia lógica entendiendo a los sistemas relevantes como lógicas no clásicas. En las próximas secciones de la tesis asumiremos una concepción convencionalista de la lógica desde la cual discutiremos las subsiguientes problemáticas. Asimismo, evaluaremos las bases que podrían posibilitar un monismo convencionalista que, *prima facie*, parece un espacio vacío en nuestra taxonomía.

3. LÓGICAS NO CLÁSICAS

En el capítulo anterior establecimos una taxonomía de las posiciones filosóficas que cabe proponer frente al problema de la pluralidad de lógicas a partir del cruce de dos sub-problemas analíticamente diferenciados: el pluralismo lógico y la naturaleza o concepción de la lógica. Dada la crítica a la concepción que denominamos "descriptivista", en adelante nos apoyamos en la postura convencionalista (que hemos planteado en §2 y desarrollaremos en §7). Sobre estos fundamentos nos proponemos en el presente capítulo establecer un criterio formal de divergencia lógica que dé cuenta de la llamadas "lógicas no clásicas".

El *problema de la pluralidad de lógicas* hace referencia a la existencia de diversos sistemas lógicos diferentes a la lógica clásica. Por este contraste, de forma general se denominan "no clásicos" a tales sistemas lógicos. Se trata de una definición negativa que toma como referencia característica a la lógica estándar. No obstante, nos encontramos ante una caracterización conceptualmente vaga dado que no especifica el criterio en virtud del cual un sistema es divergente respecto a la lógica clásica, los tipos de distinción o las posibles relaciones entre los sistemas lógicos. Para esclarecer nuestro marco teórico tomamos como referencia crítica la discusión del trabajo de Haack (1996) respecto al criterio formal de divergencia lógica y a su concepción de la lógica que opera como condición de posibilidad de la divergencia.

El objetivo de este capítulo reside en establecer un criterio de divergencia lógica. Necesitamos alcanzar este objetivo tanto para dotar de sentido la discusión sobre el problema de la pluralidad de lógicas puesto que asume la existencia actual de lógicas divergentes, como para investigar los sistemas relevantes en tanto que lógicas no clásicas. Para la consecución de dicho objetivo dividimos el presente capítulo en cuatro partes. La cuarta parte es la central y ataca el problema del criterio de divergencia lógica a partir de nuestra distinción básica entre descriptivismo y convencionalismo con la finalidad de obtener una solución formal. En las tres primeras abordamos la idea general

de lógica con un doble propósito[24], a saber: (i) partir de un "punto cero" para no dar presupuestos por sobreentendidos y (ii) hacer explícitas las asunciones de partida sobre la noción de sistema lógico, la caracterización de la lógica clásica, la centralidad de la relación de consecuencia y la prioridad de su caracterización semántica.

3.1. SOBRE LA LÓGICA

3.1.1. Usos académicos del término "lógica"

El término "lógica" es empleado con distintos usos en el acervo filosófico y matemático. Por este motivo, en primer lugar, es necesario aclarar los distintos usos académicos para realizar la primera gran delimitación que permita determinar el objeto de estudio de la presente investigación. Con este objetivo, nos apoyamos en el estudio de Manzano (2004, p.xi) que introduce una distinción académico-disciplinaria que ordena las materias relativas a la lógica y que son susceptibles de estudio:

- Los contenidos fundamentales de la *Lógica matemática*, la cual comprende a la Teoría de Modelos, la Teoría de la Demostración, la Teoría de la Computabilidad y la Teoría de Conjuntos.
- Los diversos *Sistemas Lógicos,* tanto la lógica clásica como las lógicas no-clásicas.
- Las distintas *aplicaciones* de los sistemas lógicos a diversos campos y el diseño informático de programas que permiten automatizar e implementar tales sistemas.
- Los *Estudios sobre Lógica*, los cuales consisten en análisis externos que inciden sobre esta disciplina. Entre ellos encontramos a la Historia de la Lógica o a la Filosofía de la Lógica, entre otros.

Nuestra investigación se encuentra en la relación comprendida entre los *Sistemas Lógicos* y la *Filosofía de la Lógica*. Ahora bien, resulta inevitable acudir a herramientas

[24] Estas tres primeras secciones están dedicadas a establecer las nociones fundamentales que se tomarán como punto de partida del sucesivo desarrollo de la tesis. Las posturas que se establecen son debatibles (y han sido debatidas), no obstante, el objetivo es sentar las bases a partir de las cuales y frente a las cuales se plantean los demás temas de la investigación, se discuten los problemas y se proponen los aportes específicos. Si nos centramos en la discusión de estas bases, la investigación discurriría por una trayectoria distinta a la que es propia de esta tesis.

propias de las otras acepciones, especialmente a los contenidos de la *Lógica Matemática* con particular atención a la Teoría de Modelos y a la Teoría de la Demostración. Es importante señalar que las diferentes acepciones se encuentran intrínsecamente vinculadas y las investigaciones operativas las relacionan y se comprenden como pertenecientes a un mismo campo de estudio. Sin embargo, conviene tener presente esta distinción disciplinaria para no incurrir en confusiones terminológicas que conduzcan a confusiones entre los temas tratados. Un ejemplo podría ser el epíteto "lógica matemática", el cual puede entenderse como lógica aplicada a las matemáticas y se distinguiría de lógica aplicada a otras ciencias como la computación, la economía o la lingüística; o bien, puede comprenderse como cualquier sistema lógico que parte de proposiciones asentadas sobre la noción de función (lógica contemporánea a partir de Frege), que se distinguiría de la lógica aristotélica asentada sobre juicios universales/particulares y afirmativos/negativos.

3.1.2. Relación de consecuencia

Para delimitar más estrictamente el objeto de estudio, podemos distinguir a modo propedéutico tres sentidos de Lógica. Esta distinción es una caracterización gradual en sus niveles de detalle técnico. Se trata de una primera aproximación que nos ofrece, metodológicamente, un punto de partida general y provisorio, pero centrado en un objeto de análisis. En su sentido amplio, la Lógica consiste en los puntos que tienen en común todos los campos de estudio racionales, por muy heterogéneos que sean entre sí. Así, pues, la Lógica es la intersección entre las distintas ciencias y prácticas racionales. Dicha intersección no puede ser el contenido o la metodología. Razonar implica el uso de la Lógica en tanto que herramienta formal[25]. Manzano (2004, p.4) distingue un sentido estricto en contraposición al sentido amplio. El sentido estricto define la lógica como el estudio de la *consecuencia*. La consecuencia es una *relación* en virtud de la cual una *conclusión* se *sigue* de determinadas *premisas*. Esto quiere decir que se trata del estudio de los *argumentos* o *inferencias válidas* o *correctas*[26].

[25] Hay que señalar que este sentido amplio lo mantenemos de modo tentativo, puesto que depende de concepciones filosóficas relativas a la naturaleza de la Lógica tales como el empirismo o el platonismo.

[26] Todos los términos en cursiva remiten a nociones que deben ser definidos.

Así, pues, en tanto que rama del conocimiento, la Lógica es aquella disciplina que se ocupa de estudiar la relación de consecuencia. En este punto inicial del desarrollo tenemos un primer encuentro con uno de los objetos centrales de nuestra investigación, a saber, la pluralidad de lógicas:

> Puesto que en el campo de la lógica se cifra no sólo el razonamiento atemporal y estático de la matemática, sino también el temporal del razonamiento aplicado al mundo real, el metateórico de nuestra reflexión sobre la lógica misma, el filosófico de nuestra reflexión sobre el pensamiento y el dinámico sobre los resultados de la ejecución de acciones, o los procesos de transmisión de información, no hay una única lógica, sino multitud de ellas (Manzano 2004, pp.4-5).

Ahondando en el carácter técnico de la Lógica, podemos atenernos a un tercer sentido funcional (Manzano 2004, p.5). Para realizar una definición de un sistema lógico debemos introducir:

i. Un lenguaje artificial, esto es, un vocabulario y un conjunto de reglas de formación de fórmulas.
ii. Modelos o interpretaciones semánticas con los que atribuir significado a las expresiones del lenguaje. Son precisamente estas interpretaciones formales las que posibilitan determinar que una conclusión se sigue de ciertas premisas.
iii. Un cálculo deductivo, en virtud del cual se mecaniza el procedimiento mediante el que de las premisas se extraen las conclusiones.
iv. Un procedimiento efectivamente computable que arroje como *outputs* las inferencias correctas o válidas y las incorrectas o inválidas.

Ahora bien, es menester señalar no siempre se pueden introducir (iii) y (iv). La consecuencia sintáctica es la relativa a la deducibilidad y la consecuencia semántica es la concerniente a los modelos. Asimismo, un área de estudio técnico de la Lógica es el de las propiedades de los mismos sistemas lógicos en cuestión, denominadas *metapropiedades* o *propiedades metalógicas* tales como la completud, la corrección o la decidibilidad. Para este tratamiento de los sistemas lógicos se precisa un metalenguaje; habitualmente el metalenguaje emplea recursos de la Teoría de Conjuntos. En suma, tenemos tres subdisciplinas básicas: Teoría de Modelos, Teoría de la Prueba y Teoría de la Computabilidad. La Teoría de Conjuntos no es en sentido estricto una de las ramas de la lógica, pero el uso de sus recursos es tan amplio y sus problemas tan emparentados

que puede situarse al nivel de las tres ramas mencionadas. Por este motivo la Teoría de Conjuntos entra dentro del alcance del estudio de la Lógica y sus problemas forman parte del trabajo del "lógico".

Semánticamente, los enunciados (que expresan creencias) pueden ser satisfacibles y, sintácticamente, consistentes. Esta última propiedad alude a la imposibilidad de que se deriven contradicciones. Poniéndolas en relación decimos que la consistencia de un conjunto de creencias estriba en la posibilidad de describir un modelo en el que todas y cada una de las creencias sean verdaderas. Una contradicción no puede ser verdadera en ningún modelo y una verdad lógica es verdadera en todos. Los enunciados contingentes pueden describir un modelo o situación de tal modo que lo especifica respecto a los demás. Los enunciados contingentes son, por tanto, verdaderos en unos modelos y falsos en otros. El tipo de enunciados que describen a la lógica son precisamente las verdades lógicas.

Nos centraremos en la definición de la relación de consecuencia a partir de la satisfacción de modelos según la cual una inferencia es válida sii no existe un modelo en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Lo cual quiere decir que el conjunto de las premisas y la negación de la conclusión no es satisfacible. Esto pone de manifiesto la equivalencia entre las definiciones de la lógica como disciplina cuyo objeto son las inferencias válidas o de los conjuntos de creencias consistentes. Lo importante estriba en el tránsito de la verdad de las premisas a la conclusión, esto es lo que justifica la relación de consecuencia.

3.2. LENGUAJES ARTIFICIALES

Respecto al lenguaje formal son necesarias unas reglas gramaticales, las cuales determinan qué sucesión de símbolos son fórmulas bien formadas y otras reglas semánticas que indican qué fórmulas son verdaderas para un modelo. Existe una pluralidad de lenguajes posibles con vocabulario, gramática y semántica distintos. El lenguaje L_0 del fragmento proposicional (grado 0 o lógica de enunciados) de la lógica clásica lo podemos definir del siguiente modo: $L_0 :=$ <FOR-A, CON, FBF>, donde

- El conjunto de fórmulas atómicas FOR-A $:= \{p, q, r, \ldots\}$, cuyos elementos son variables proposicionales.

- El conjunto de las conectivas CON ≔ {¬, ∧, ∨, ⊃, ≡, ⊤, ⊥}, cuyos elementos son constantes lógicas. ¬ es una conectiva unaria, ∧, ∨, ⊃, ≡ son conectivas binarias y ⊤, ⊥ son conectivas 0-arias.
- El conjunto de las fórmulas bien formadas FBF, las cuales se generan a partir de FOR-A y CON según las reglas gramaticales de formación de fórmulas. ⊤ y ⊥ son fórmulas y dado que cualquier parámetro proposicional es una fórmula:
  - Si A es una fórmula, entonces ¬A es una fórmula.
  - Si A y B son fórmulas, entonces (A ∧ B), (A ∨ B), (A ⊃ B) y (A ≡ B) son fórmulas.

Emplearemos las letras mayúsculas del alfabeto latino en orden {A, B, C,…} como variables para representar fórmulas. Dadas las reglas, puede observarse que funciona el principio de inducción matemática. También se emplean símbolos auxiliares como los paréntesis.

El fragmento proposicional de la lógica clásica posee metapropiedades convenientes para un sistema lógico. No obstante, su capacidad expresiva es muy limitada. Pueden establecerse órdenes de lenguajes. Con los órdenes superiores va aumentando la capacidad expresiva del lenguaje. El lenguaje proposicional es de orden cero. El lenguaje de primer orden o de predicados agrega al análisis de fórmulas atómicas el uso de predicados, constantes, functores y permite cuantificar sobre individuos. El lenguaje de segundo orden permite, además, la cuantificación sobre los predicados y los conjuntos. En adelante denominaremos "propiedad" a los predicados monádicos y "relación" o "relator *n*-ádico" a los predicados *n*-ádicos, donde *n* es el número de los parámetros relacionados. Una propiedad es un relator 1-ádico[27]. Definimos un lenguaje L_1 de primer orden:

- Vocabulario: es la unión de los conjuntos disjuntos
  - Símbolos lógicos o conectivas CON ≔ {¬, ∧, ∨, ⊃, ≡, =, ∀, ∃}
  - Conjunto de símbolos predicativos *n*-arios (finito o enumerable) para cada $n \in \mathbb{N}$. Una variable proposicional es un símbolo predicativo 0-ario, denominamos propiedad a un símbolo predicativo 1-ario y denominamos

[27] También se emplea la expresión "*n*-ario".

relación a un símbolo predicativo $n \geq$ 2-ario. Los predicados son símbolos relacionales.

- Conjunto de símbolos funcionales *n*-arios (finito o enumerable) para cada $n \in \mathbb{N}$. Una constante es un símbolo funcional 0-ario.
- Variables (conjunto enumerable).
- Constantes (conjunto enumerable).

- Términos: los términos simples son las variables y las constantes. Se pueden construir otros términos mediante su combinación con los símbolos funcionales. Con dicho procedimiento es posible definir el conjunto de términos recursivamente. Dadas las variables, constantes y funciones *n*-arios, se estipula:
  - Las variables y constantes son términos.
  - Dada la función *n*-aria f^n, si $t_1,\ldots,t_n$ son términos, entonces $f^n(t_1,\ldots,t_n)$ es un término.
  - No existe otro símbolo que sea un término.
- Fórmulas bien formadas: el conjunto FBF(L_1) de fórmulas bien formadas puede definirse recursivamente:
  - Dado el conjunto FOR-A(L_1) de fórmulas atómicas:
    i. Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica.
    ii. Dada el predicado *n*-ario P^n, si $t_1,\ldots,t_n$ son términos, entonces $P^n(t_1,\ldots,t_n)$ es una fórmula atómica.
  - Y dado el conjunto de conectivas CON,
  - Si A y B son fórmulas, entonces
    i. $\neg$A es una fórmula bien formada.
    ii. (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B), (A $\supset$ B) y (A $\equiv$ B) son fórmulas bien formadas.
    iii. Para cada variable *x*, $\forall x$A y $\exists x$A son fórmulas bien formadas.
  - No existe otra secuencia de símbolos que sea una fórmula bien formada.

  FOR(L_1) es, por tanto, infinito enumerable[28].

[28] Se puede entender que el conjunto de fórmulas atómicas está incluido en el conjunto de fórmulas bien formadas, de tal modo que este último es el mismo que FOR(L_1).

Con esta presentación es sencillo demostrar por inducción matemática que todos los términos tienen una determinada propiedad α:

- Base: toda constante y toda variable de individuo tiene la propiedad α.
- Paso inductivo: si $t_1,\ldots,t_n$ poseen α, entonces $f^n(t_1,\ldots,t_n)$ también posee α.

Análogamente, se podría aplicar la misma metodología a las fórmulas.

El conjunto de *expresiones* es la unión del conjunto de las fórmulas y el de los términos. Además, se denomina *sentencia* a cualquier fórmula cuyas variables no están ligadas por un cuantificador, esto es, que no tiene *variables libres*.

La lógica de primer orden (o FOL por sus siglas en inglés) tampoco es suficiente para expresar cualquier propiedad posible de las estructuras matemáticas. En algunos casos se necesita cuantificar sobre propiedades, lo cual exige el uso de la lógica de segundo orden (o SOL por sus siglas en inglés). Ahora bien, las propiedades metalógicas van decreciendo a medida de que la capacidad expresiva va en aumento. Así pues, el cálculo proposicional es decidible (y por tanto también), correcto y completo; sin embargo, el cálculo de FOL es correcto y completo pero indecidible; y SOL no tiene un cálculo completo.

Además de órdenes, existen niveles de lenguaje, de tal modo que conviene distinguir entre lenguaje objeto y metalenguaje. Con el metalenguaje se puede hablar del lenguaje objeto. En el lenguaje natural se suelen emplear las comillas u otros signos, por ejemplo:

"<" 'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor', dijo Averroes", escribe Jorge Luis Borges>, destaca Deaño", comenta Manzano (2004).

La noción de consecuencia pertenece al metalenguaje. Las inferencias correctas o válidas pueden ser caracterizadas como conjuntos de enunciados tal que uno de los cuales se sigue de los demás. El enunciado que se sigue es la conclusión de la inferencia y los restantes son las premisas. Por consiguiente, la *consecuencia* es la *relación* entre las *premisas* y la *conclusión* de una *inferencia correcta o válida*.

Los símbolos "⊢" y "⊨" pertenecen al metalenguaje y son relaciones que aluden a la derivabilidad o consecuencia sintáctica y a la validez o consecuencia semántica, respectivamente. El primero se refiere a la prueba de teoremas mediante un cálculo

deductivo y el segundo a la satisfacibilidad por modelos. Para evitar ambigüedades, establecemos que "implicación" se refiere a la relación de consecuencia (sintáctica o semántica) y "condicional" ("si…, entonces…") se refiere a la conectiva.

3.3. Relación de consecuencia caracterizada por la satisfacción de modelos

Empleamos letras griegas mayúsculas como variables de conjuntos de fórmulas. Así, "$\Gamma \vDash A$" quiere decir que la fórmula A es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas Γ. En el contexto semántico, la definición estricta de la relación de consecuencia es la siguiente:

$\Gamma \vDash A$ sii cualquier modelo de Γ también es un modelo de A.

Para especificar esta definición no nos basta con un mero lenguaje formal, sino que requerimos *lenguajes interpretados*, lo cual exige presentar la noción de *modelo*.

3.3.1. Lenguaje interpretado

Interpretar un lenguaje consiste en asignar valores veritativos a las fórmulas del mismo. Para ello necesitamos una función que asigne tales valores a los parámetros proposicionales. El conjunto de valores de verdad de la lógica clásica es {1, 0}, leídos como "verdadero" y "falso", respectivamente. Además, el conjunto {1} es el conjunto de valores designados que, en el caso clásico, es un conjunto unitario. Tenemos la función v: FOR-A$\longrightarrow$ {1, 0}. v asigna valores de verdad a los parámetros proposiciones. Con esta función podemos definir recursivamente una función de interpretación $\mathcal{I}$ que atribuye valores a cada elemento del conjunto FOR(L_0) de fórmulas (atómicas y compuestas) de un lenguaje: $\mathcal{I}$: FOR(L_0) $\longrightarrow$ {1, 0}. Clásicamente tenemos que:

- Para cada variable proposicional $p \in$ FOR-A, $\mathcal{I}(p) = v(p)$.
- $\mathcal{I}(\top) = 1$ e $\mathcal{I}(\bot) = 0$.
- Para cualesquiera fórmulas compuestas A, B $\in$ FOR(L_0),
  - La negación: $\mathcal{I}(\neg A) = 1$ si y solo si $\mathcal{I}(A) = 0$.
  - La conjunción: $\mathcal{I}(A \wedge B) = 1$ sii $\mathcal{I}(A) = 1$ y $\mathcal{I}(B) = 1$.
  - La disyunción: $\mathcal{I}(A \vee B) = 1$ sii $\mathcal{I}(A) = 1$ o $\mathcal{I}(B) = 1$.
  - El condicional material: $\mathcal{I}(A \supset B) = 1$ sii $\mathcal{I}(A) = 0$ ó $\mathcal{I}(B) = 1$.

– El bicondicional: $\mathcal{I}(A \equiv B) = 1$ sii $I(A) = \mathcal{I}(B)$.

Mediante la función es posible determinar el valor de cualquier fórmula de L_0. Dadas estas condiciones, obtenemos las siguientes definiciones para una fórmula $A \in FOR(L_0)$:

- A es una verdad lógica sii para cualquier asignación *v*, $v(A) = 1$.
- A es una contradicción sii para cualquier asignación *v*, $v(A) = 0$.
- A es contingente sii existe una asignación *v* tal que $v(A) = 1$ y existe una asignación *v* tal que $v(A) = 0$.

Entre las verdades lógicas más destacadas en el sistema clásico podemos señalar:

- La ley de identidad: $A \supset A$.
- La ley del tercio excluso: $A \vee \neg A$.
- El principio de no contradicción: $\neg (A \wedge A)$.
- La ley de Pierce: $((A \supset B) \supset A) \supset A$.
- La ley de Duns Scoto: $\neg A \supset (A \supset B)$.
- La ley de Clavius: $(\neg A \supset A) \supset A$.
- El Silogismo Disyuntivo o modus Tollendo Ponens: $((A \vee B) \wedge \neg A) \supset B$.
- El principio de explosión o *Ex Falso Quodlibet*: $(A \wedge \neg A) \supset B$.

Podemos determinar el valor veritativo de una fórmula compuesta en virtud del valor de los parámetros proposicionales y de las reglas semánticas de las conectivas previamente descritas. La función veritativa es precisamente aquella aplicación que atribuye valores a las composiciones de valores veritativos mediante conectivas. En lógica clásica sólo hay dos asignaciones para una variable proposicional. El número de asignaciones es 2^n, siendo *n* el número de variables proposicionales.

Cualquier fórmula $A \in FOR(L_0)$ arroja un único valor de verdad dada la función *v*. Esto quiere decir que el valor de verdad de una fórmula, dada la función *v*, depende de las reglas semánticas de los elementos de CON. Así, por ejemplo, se puede determinar el valor de verdad de la fórmula $C \coloneqq (p \vee q) \supset \neg(p \supset r)$ dada la función $v(p) = 0$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 1$:

- v(C) = 1, dada la regla de ⊃ y dado que $v(p \vee q) = 0$ y $v(\neg(p \supset r)) = 0$.
- $v(p \vee q) = 0$, dada la regla de ∨ y dado que $v(p) = 0$ y $v(q) = 0$.
- $v(\neg(p \supset r)) = 0$, dada la regla de ¬ y dado que $v(p \supset r) = 1$.
- $v(p \supset r) = 1$, dada la regla de ⊃ y dado que $v(p) = 0$ y $v(r) = 1$.

Cada paso muestra el valor de las subfórmulas de C. Una *tabla de verdad* es un procedimiento que permite calcular el valor veritativo de una formula con todas las asignaciones posibles. Como puede observarse, el valor veritativo de una fórmula involucra tres elementos, a saber: la sintaxis de la fórmula, las reglas semánticas de las conectivas y la función *v* correspondiente. Con las caracterizaciones realizadas hasta este punto podemos ofrecer ciertas definiciones formales:

DEF.1. Γ⊨A (A es *consecuencia* de Γ) sii todo modelo[29] de Γ también es un modelo de A.

DEF.2. ⊨A (A es una fórmula *lógicamente válida*) sii Ø ⊨A.

DEF.3. A es *independiente* de Γ sii Γ⊭A (A no es consecuencia de Γ).

DEF.4. Γ es *independiente* sii para todo A ∈ Γ, Γ – {A} ⊭A.

DEF.5. A y B son *lógicamente equivalentes* sii A⊨B & B⊨A.

DEF.6. A es *satisfacible* sii existe un $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}$(A) = 1. Representamos la relación de satisfacción con el símbolo "⊪", de tal modo que "$\mathcal{I}$ ⊪ A" quiere decir que la función de interpretación $\mathcal{I}$ satisface la fórmula A o que $\mathcal{I}$ es un modelo de A.

DEF.7. Γ es *satisfacible* sii existe un $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}$(A) = 1 para todo A∈ Γ.

Dadas las definiciones, las fórmulas satisfacibles pueden ser lógicamente válidas o contingentes. Se puede entender la función de interpretación $\mathcal{I}$ como una extensión de *v* de tal modo que atribuye a cualquier A ∈ FOR(L_0) el valor que *v* determina. En adelante (salvo casos que exijan mayor detalle técnico) emplearemos simplemente *v* para asignar valores a las fórmulas de un lenguaje.

[29] La noción de modelo se definirá técnicamente en la siguiente sección (§3.3.2.).

3.3.2. Modelos

Ahora podemos comprender la definición de la teoría de modelos como aquella subdisciplina matemática cuyo objeto de estudio reside en las relaciones entre los lenguajes artificiales y sus modelos. Los *modelos* (también llamados *sistemas* o *estructuras*) son objetos matemáticos cuya relación con un lenguaje formal es la noción de *verdad en una estructura*. Un modelo $\mathcal{M}$ de un lenguaje L_1 de primer orden es un par $<D, v>$ tal que:

- Su dominio o universo es un conjunto no vacío: $D \neq \emptyset$.
- v es una función de interpretación. Su dominio es el conjunto de los símbolos propios de L_1:

    i. Si c es una constante de L_1, entonces $v(c) \in D$. Podemos extender el lenguaje añadiendo una constante para cada $d \in D$, de tal modo que $v(c_d) = d$.
    ii. Si P es un símbolo predicativo n-ario de L_1, entonces $v(P^n) \subseteq D^n$.
    iii. Si f es un símbolo funcional n-ario de L_1, entonces $v(f^n)$ es una función de D^n en D.

D^n es el conjunto de las n-tuplas que pertenecen a D. Además, necesitamos una asignación[30] σ en $\mathcal{M}$, tal que σ es una función de las variables al dominio: $\forall x \in L_1$, $\sigma(x) \in D$. Para cualquier σ y cualquier $d \in D$: $\sigma[d/x](x)$ es una asignación denominada "x-variante de σ" que cumple:

i. $\sigma[d/x](x) = d$.
ii. $\sigma[d/x](y) = \sigma(y)$, donde y es una variable distinta de x.

Por otro lado, v_σ es una función que da un valor a los términos del lenguaje. Esta función interpreta los términos de L_1 de este modo:

i. $v_\sigma(c) = v(c)$.

[30] Para lenguajes de primer orden es importatne tener en cuenta la distinción conceptual entre una función de interpretación y una asignación. La función de interpretación no interpreta variables, por este motivo se debe añadir una asignación. Una asignación interpreta variables, establece qué objeto designa una variable.

ii. $v_\sigma(x) = v(x)$.

iii. $v_\sigma(ft_1,\ldots,t_n) = v(f)(v_\sigma(t_1)\ldots v_\sigma(t_n))$.

Con estos elementos podemos definir la relación de satisfacción. Dicha relación se da entre modelos, asignaciones y fórmulas. "$\mathcal{M},\sigma \Vdash$ A" quiere decir que $\mathcal{M}$ y σ *satisfacen* la fórmula A. Se puede definir recursivamente la relación de satisfacción de tal modo que determine cuáles son las fórmulas que satisface un modelo y una asignación en ese modelo:

i. $\mathcal{M},\sigma \Vdash P^n t_1\ldots t_n$, sii $<v_\sigma(t_1)\ldots v_\sigma(t_n)> \in v(P)$.

ii. $\mathcal{M},\sigma \Vdash t_1 = t_2$ sii $v_\sigma(t_1) = v_\sigma(t_2)$.

iii. $\mathcal{M},\sigma \Vdash$ A ∧ B sii $\mathcal{M},\sigma \Vdash$ A y $\mathcal{M},\sigma \Vdash$ B.

iv. $\mathcal{M},\sigma \Vdash$ A ∨ B sii $\mathcal{M},\sigma \Vdash$ A o $\mathcal{M},\sigma \Vdash$ B.

v. $\mathcal{M},\sigma \Vdash \neg$A sii $\mathcal{M},\sigma \nVdash$ A.

vi. $\mathcal{M},\sigma \Vdash \forall x$A sii $\mathcal{M},\sigma' \Vdash$ A para toda *x*-variante σ' de σ.

vii. $\mathcal{M},\sigma \Vdash \exists x$A sii $\mathcal{M},\sigma' \Vdash$ A para alguna *x*-variante σ' de σ.

La semántica formal vincula los lenguajes y las estructuras a través de la noción de "verdad en una estructura": La fórmula A es verdadera en la estructura $\mathcal{M}$ si A se da en $\mathcal{M}$. Lo cual quiere decir que $\mathcal{M}$ es un modelo de A. Esto se puede formalizar con la relación de satisfacción, tal como se ha visto anteriormente. Para asignar un valor de verdad a una fórmula se debe estipular la interpretación de sus símbolos. Con ella se puede determinar que los términos del lenguaje de la fórmula en cuestión denotan individuos del modelo.

Un modelo interpreta un lenguaje y un mismo lenguaje es susceptible de ser interpretado por diversos modelos. Ahora bien, intuitivamente, diferentes lenguajes tienen modelos diferentes. Sin embargo, más propiamente, los modelos están vinculados a una *signatura* antes bien que a un determinado lenguaje. Como se ha mencionado, un modelo interpreta determinadas constantes, funciones y predicados con una *ariedad* definida. Una signatura es, pues, el conjunto de tales símbolos, los cuales se denominan *constantes no lógicas*. Dos o más lenguajes formales pueden ser *del mismo tipo* o *de la misma signatura* pero tener distintos símbolos. Formalmente decimos que una signatura es el par $<<\Phi, ar>, <\Psi, rg>>$, tal que

- Los elementos del conjunto Φ son los símbolos operacionales.
- *ar* es una función de Φ en ℕ.
- Los elementos del conjunto Ψ son los símbolos relacionales.
- *rg* es una función de Ψ en ℕ – 1.

Decimos que *ar* es la *aridad* y *rg* el *rango*. Así pues, φ es un símbolo operacional *n*-ario en el caso de que exista un φ tal que φ ∈ Φ y $ar(\varphi)= n$. Asimismo, Φ_n denota el conjunto de todos los símbolos operacionales *n*-arios para cualquier $n \in \mathbb{N}$. *ar* alude a la cantidad de argumentos que tiene cada realización de un símbolo operacional φ en tanto que operación sobre un conjunto. ψ es un símbolo operacional *n*-ario en el caso de que exista un ψ tal que ψ ∈ Ψ y $rg(\psi)= n$. Ψ_n denota el conjunto de todos los símbol relacionales *n*-arios para cualquier $n \in \mathbb{N}– 1$. *rg* alude a la cantidad de argumentos que tiene cada realización de un símbolo relacional ψ en tanto que relación sobre un conjunto. El par que forma la signatura suele abreviarse del siguiente modo: $<\underline{\Phi}, \underline{\Psi}>$. En adelante denominamos K a la signatura de primer orden.

Es preciso definir ciertas relaciones básicas entre sistemas o modelos. Dados $\mathcal{M}_1 := <D_1, v_1>$ y $\mathcal{M}_2 := <D_2, v_2>$ del mismo tipo:

- Isomorfismo: de un modo informal podemos decir que dos modelos son isomorfos si representan estructuras iguales o con la misma forma. De un modo formal, dos modelos son isomorfos $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ si existe entre ellos un isomorfismo, esto es, una función *h* tal que
  i. Para cualquier *c*, $v_2(c) = h(v_1(c))$.
  ii. Para cualquier *P* *n*-ario y cualesquiera $d_1 \ldots d_n \in D$, $<d_1 \ldots d_n> \in v_1(P)$ sii $<h(d_1) \ldots h(d_n)> \in v_2(P)$.
  iii. Para cualquier *f* *n*-ario y cualesquiera d, $d_1 \ldots d_n \in D$, $<d_1 \ldots d_n, d> \in v_1(f)$ sii $<h(d_1) \ldots h(d_n), h(d)> \in v_2(f)$.

  Si $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$, entonces ambos modelos satisfacen las mismas fórmulas. En esencia, se trataría del mismo modelo. Esto se entiende en tanto que para cualquier $A \in FOR(L_1)$, $\mathcal{M}_1,\sigma \Vdash A$ sii $\mathcal{M}_2, h\sigma \Vdash A$, lo cual se puede demostrar a partir de que dado un σ en $\mathcal{M}_1$ se define *h*σ como una asignación en $\mathcal{M}_2$ en virtud de la cual para toda variable *y*: $h\sigma(y) = h(\sigma(y))$.

- Submodelo: $\mathcal{M}_2$ es un submodelo de $\mathcal{M}_1$ si
  - $D_2 \subseteq D_1$.
  - Para cualquier c, $v_2(c) = v_1(c)$.
  - Para cualquier P n-ario, $v_2(P) = v_1(P) \cap D_2^n$. Lo cual quiere decir que $v_2(P)$ es la restricción de $v_1(P)$ a D_2.
  - Para cualquier f n-ario, $v_2(f) = v_1(f) \cap D_2^{n+1}$. Lo cual quiere decir que $v_2(f)$ es la restricción de $v_1(f)$ a D_2.

D_2 no puede ser cualquier subconjunto de D_1, sino que debe cumplir la condición de estar cerrado bajo las funciones y contener las interpretaciones de las constantes. También se dice que $\mathcal{M}_2$ es una *restricción* de $\mathcal{M}_1$ o que este último es la *extensión* de anterior.

- Submodelo elemental: $\mathcal{M}_2$ es un submodelo elemental de $\mathcal{M}_1$ si
  - $\mathcal{M}_2$ es un submodelo de $\mathcal{M}_1$
  - Para cualquier σ en D_2 y cualquier A ∈ FOR(L_1), $\mathcal{M}_2$,σ ⊩ A sii $\mathcal{M}_1$,σ ⊩ A.

    Esto quiere decir que las mismas fórmulas son satisfechas por los elementos comunes a $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$.
- Equivalencia elemental: existe una equivalencia elemental entre dos modelos $\mathcal{M}_1 \Leftrightarrow$[31] $\mathcal{M}_2$ sii para cualquier *sentencia* A, $\mathcal{M}_2$ ⊩ A sii $\mathcal{M}_1$ ⊩ A.
- Inmersión: existe una inmersión de $\mathcal{M}_2$ en $\mathcal{M}_1$ sii
  - Existe un $\mathcal{M}_3$ tal que sea un submodelo de $\mathcal{M}_1$.
  - Existe una función de inmersión h tal que sea un isomorfismo entre $\mathcal{M}_2$ y $\mathcal{M}_3$.
- Inmersión elemental: $\mathcal{M}_2$ está elementalmente inmerso en $\mathcal{M}_1$ sii
  - h es la función de inmersión entre ambos modelos.
  - Para cualquier σ en D_2 y cualquier A ∈ FOR(L_1), $\mathcal{M}_2$,σ ⊩ A sii $\mathcal{M}_1$,hσ ⊩ A.

[31] Para evitar ambigüedades diferenciamos entre el bicondicional en el lenguaje objeto "≡", el bicondicional en el metalenguaje "↔" y la relación de equivalencia entre modelos en el metalenguaje "⇔".

- Expansión y reducción: L^* es una *expansión* del lenguaje de primero orden L, esto es, L^* añade símbolos adicionales a L. En ese caso también se dice que L es una reducción de L^*. Del mismo modo, $\mathcal{M}^*$ es una expansión de $\mathcal{M}$ para L^* si se le agregan interpretaciones para los símbolos adicionales de L^* y $\mathcal{M}$ es un modelo de L.

También podemos definir un *modelo* (*sistema* o *estructura*) como una tripleta compuesta por un conjunto no vacío D denominado *dominio* o *universo*, una tupla ordenada de individuos, otra de predicados y otra de funciones definidas sobre el dominio: $\mathcal{M} \coloneqq \langle D, \langle c_1,\ldots, c_n\rangle, \langle P_1,\ldots, P_n\rangle, \langle f_1,\ldots, f_n\rangle\rangle$.

Cuando v asigna los valores $d_1,\ldots,d_n \in D$ al conjunto de variables libres $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de una fórmula A, se simboliza $\mathcal{M}[d_1/x_1,\ldots,d_n/x_n]$. Así pues, un predicado P^n sobre el dominio D es *definible* en $\mathcal{M}$ con L_1 sii existe un A con al menos $x_1,\ldots,x_n$ variables libres, que cumple $P = \{\langle d_1,\ldots,d_n\rangle \in D \mid \mathcal{M}[d_1/x_1,\ldots,d_n/x_n] \Vdash A\}$. Un *predicado definible* no es un predicado propio $\langle P_1,\ldots, P_n\rangle$ del modelo $\mathcal{M}$, pero tampoco es un mero subconjunto de D.

En primer orden, una *teoría* es un conjunto de sentencias, el cual está cerrado bajo la relación de consecuencia semántica. La teoría de un modelo $tr(\mathcal{M}) \coloneqq \{A \in SENT(L_1) \mid \mathcal{M} \Vdash A\}$, donde $SENT(L_1)$ es el conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden. Algunas teorías (no todas) pueden ser representadas de forma axiomática. En el caso de una teoría axiomática se puede emplear un conjunto decidible de sentencias, denominadas axiomas.

3.4. CRITERIO FORMAL DE DIVERGENCIA LÓGICA

Teniendo como referencia la caracterización previa, podemos analizar la noción de lógica no clásica. Haack (1996, p.1) analiza de forma específica "the question whether, or in what way, non-standard systems are '*alternatives*' to classical logic". Se analiza la cuestión en términos de en qué condiciones se establece una alternativa a la lógica clásica, lo cual se encuentra relacionado con el criterio de distinción. Haack (1996, p.2) defiende que existen dos tipos de alternativa respecto a la lógica clásica. Toma en consideración una versión débil y otra fuerte, a saber: la suplementación y la

rivalidad, respectivamente. Se trata de un criterio de compatibilidad respecto a la lógica clásica. Así, pues, si un sistema es rival de la lógica clásica, entonces debe emplearse el sistema rival en su lugar. Desde la rivalidad se considera que el sistema clásico es por algún motivo erróneo. Desde esta perspectiva se podrían comprender las motivaciones de los intuicionistas o de los proponentes de los sistemas polivalentes. Por su parte, si un sistema es suplementario respecto a la lógica clásica, entonces el sistema complementario puede emplearse del mismo modo que el estándar. Desde la suplementación se pone de manifiesto el carácter inadecuado del sistema clásico en tanto que no incluye inferencias que debiera incluir. Desde esta perspectiva se puede comprender la familia de los sistemas modales[32].

Esta distinción no se introduce en y no debe ser confundida con las cuestiones adyacentes tales como los criterios de elección para la aplicación de los sistemas lógicos rivales o suplementarios. A este respecto Haack (1996, p.3) califica de *realista* a aquella posición que considera que la lógica adecuada en su aplicación debe ser verificada. Por otro lado, califica de *pragmatista* a la posición que asume como criterio de aplicación la simplicidad o la conveniencia. Ahora bien, estas discusiones son heterogéneas al problema de los tipos de alternativas a la lógica clásica. Del mismo modo Haack (1996, p.3) denomina *reformadores globales* a aquellos que mantienen que la lógica clásica debe reemplazarse en cualquier aplicación y *reformadores locales* a los que proponen el reemplazo en algunas aplicaciones. La rivalidad y la suplementación dependen de la problemática sobre la "lógica legítima", es decir, el problema del pluralismo. Lo que nos interesa destacar en este punto es la posibilidad de distinguir unos sistemas de otros, esto es, los criterios en virtud de los cuales podemos especificar el tipo de divergencia entre ellos.

3.4.1. Criterios de divergencia

La distinción entre rivalidad y suplementación se refiere a la compatibilidad de los sistemas no clásicos respecto a la lógica clásica. Sin embargo, es necesario establecer un criterio formal de distinción en virtud del cual demarcar la diferencia entre

[32] Haack (1996, p.2) ofrece un cuadro en el que distingue sistemas rivales y suplementarios. Al primer grupo pertenecen las lógicas cuánticas, intuicionista, polivalentes de Lukasiewicz y Bochvar, mínima de Gentzen y los lenguajes presuposicionales de van Fraassen. Al segundo grupo pertenecen las lógicas tensa, deóntica, epistémica y modales.

un sistema clásico y uno no clásico. Dentro de esta problemática Haack (1996, p.4) analiza las posibles diferencias semánticas y sintácticas que pueden darse entre sistemas alternativos. En primer lugar, la dimensión sintáctica concierne al conjunto TEO de teoremas generados a partir de un cálculo deductivo. En segundo lugar, la dimensión semántica concierne a las fórmulas válidas relativas a las interpretaciones o modelos (en el enfoque modelo-teórico de la semántica). Haack (1996, p.4) propone tres posibilidades en la distinción sintáctica de dos lenguajes artificiales L_1 y L_2 según sus conjuntos de fórmulas bien formadas, sus conjuntos de teoremas y sus vocabularios. Así, pues, expresándolo en términos sintácticos, tenemos que:

i. $\text{FBF}(L_2) \subset \text{FBF}(L_1)$, $\text{TEO}(L_2) \subset \text{TEO}(L_1)$ y $\forall x \in \text{TEO}(L_1) - \text{TEO}(L_2)$, x emplea vocabulario adicional que no pertenece a L_2. Dadas estas condiciones se establece que el sistema S_1 definido por L_1, $\text{FBF}(L_1)$, $\text{TEO}(L_1)$ y su correspondiente cálculo deductivo es una *extensión* del sistema S_2 definido por L_2, $\text{FBF}(L_2)$, $\text{TEO}(L_2)$ y su correspondiente cálculo deductivo. En adelante simplemente diremos que S_1 es una *extensión* de S_2. Este es el caso del fragmento proposicional de la lógica modal como extensión del fragmento proposicional de la lógica clásica.

ii. $\text{FBF}(L_2) = \text{FBF}(L_1)$, pero $\text{TEO}(L_2) \neq \text{TEO}(L_1)$. Estas condiciones definen la divergencia entre sistemas: S_1 y S_2 son mutuamente *divergentes*. Este sería el caso de la lógica trivalente de Lukasiewicz y la lógica clásica.

iii. $\text{FBF}(L_2) \subset \text{FBF}(L_1)$, $\text{TEO}(L_2) \neq \text{TEO}(L_1)$ y los teoremas no coincidentes pueden ser aquellos que emplean el vocabulario adicional de L_1 como los que emplean el vocabulario común. Estas condiciones definen a S_1 como un sistema *cuasi-divergente* de S_2. Este sería el caso de la lógica trivalente de Reichenbach respecto a la lógica clásica. (Asumimos con Haack (1996, p.5) la convención de denominar simplemente "divergente" tanto a los sistemas divergentes como a los cuasi-divergentes).

Es natural considerar que, *prima facie*, la divergencia es el criterio formal de la rivalidad y la extensión es el correspondiente criterio formal de al suplementación. Sin embargo, tal como Haack (1996, p.6) explica:

> It would be a mistake too hastily to take Deviance as the test of rivalry. The difficulties come from two directions. First, there is a question whether Deviance is a

> necessary condition for rivalry, for there are some logics in the list of 'systems proposed as rivals' which may fail to satisfy the criteria of Deviance.

En este sentido no coinciden las pretensiones de rivalidad de algunos sistemas calificados de extensiones según el criterio formal antedicho. Además, continúa Haack (1996, p.7), "The second, and more serious, difficulty is that it is not certain whether Deviance is *sufficient* for rivalry", con lo cual alude a la demarcación de lo que es un sistema clásico. El criterio seguido ha sido tener como referencia al conjunto TEO o al conjunto VAL de un sistema estándar como el de los *Principia Mathematica*.

Sin embargo, desde nuestra perspectiva la dificultad que Haack (1996, p.7) pone de manifiesto es la posibilidad o imposibilidad de diferenciar una disparidad meramente notacional de una verdadera disparidad en el significado de las fórmulas. Se podrían leer símbolos o conjuntos de símbolos de un sistema divergente de tal modo que coincidan los fragmentos seleccionados con los establecidos en la lógica clásica. Ahora bien, consideramos que esta dificultad se ve disuelta si tomamos en consideración las reglas para la formación de fórmulas a partir de los símbolos del vocabulario. La naturaleza del problema que Haack señala consiste en cierta ambigüedad, la cual no tiene cabida en lenguajes formales con reglas sintácticas definidas previamente.

A partir de este planteamiento y en contraste con Haack, en adelante discutiremos y defenderemos que la divergencia sí es un criterio adecuado para la rivalidad. Esta tesis encaja con nuestro convencionalismo. Más aún, podríamos anular la misma noción de rivalidad en tanto que, desde nuestros parámetros, mantiene unas asunciones conceptuales próximas al descriptivismo. Desde una postura descriptivista como la de Haack persiste el problema de determinar si describen dos objetos diferentes (significado) o simplemente el mismo objeto de modos diferentes (notación).

3.4.2. Discusión

Quine (1960a) argumentó en contra de una verdadera incompatibilidad entre los sistemas lógicos. Su crítica a la incompatibilidad se asienta sobre la posibilidad de explicarla a partir de la modificación del significado de las constantes lógicas. Si las constantes tienen un significado diferente, entonces no hay un conflicto entre ellas. Haack (1996, p.8) reconstruye el razonamiento en tres pasos:

i. No existe incompatibilidad entre sistemas divergentes si el significado de las constantes lógicas se modifica.
ii. La divergencia implica que el significado de las constantes lógicas se modifica.
iii. Ergo, no existe una incompatibilidad entre sistemas divergentes.

No obstante, Haack (1996, p.9) pone de relieve que la primera premisa es errónea. Si bien es cierto que, dada una fórmula A, A es válida en S_1 pero no lo es en el sistema divergente S_2, lo que se valida en S_1 y se invalida en S_2 puede ser distinto si A está construida con una constante con un significado diferente en cada uno de los dos sistemas en cuestión. También es cierto que no se sigue que lo que valida S_1 sea distinto de lo que invalida S_2. En síntesis, dada una fórmula A formada a partir de la constante *c*, donde *c* tiene un significado en S_1 y otro diferente en S_2, no se sigue que A tenga el mismo significado en los dos sistemas, pero tampoco se sigue que A tenga un significado diferente en los dos sistemas. En ambos casos nos encontramos ante un *non sequitur*. Puede seguir existiendo incompatibilidad incluso cambiando el significado de la constante lógica.

Lo que Haack pretende mostrar consiste en que la modificación del significado de las constantes lógicas no puede establecerse como un criterio suficiente para eliminar la rivalidad entre dos sistemas lógicos divergentes. Empleamos su ejemplo (Haack 1996, p.9): supongamos que $\vDash_{S1}(A \vee B) \supset (\neg A \supset B)$ pero $\nvDash_{S2}(A \vee B) \supset (\neg A \supset B)$ y en cierto momento descubrimos que la regla semántica en S_2 del símbolo "$\vee$" es la misma que la regla semántica del símbolo "$\wedge$" en S_1. De esta circunstancia se sigue que la fórmula en cuestión tiene un significado distinto de modo que lo que uno niega no es lo que el otro afirma. Sin embargo, y en este punto se encuentra el núcleo de la argumentación de Haack, dada esta misma circunstancia no se sigue que la incompatibilidad sea imposible dado que puede darse el caso de que $\vDash_{S1}(A \wedge B) \supset (\neg A \supset B)$. Asimismo, S_1 podría validar fórmulas sin conectivas que S_2 invalidaría. En este caso no se podría explicar la divergencia mediante el cambio de significado de las constantes lógicas. Se podría replicar que se trata de un cambio de significado del símbolo de la relación de consecuencia. No obstante, por ejemplo "The Intuitionist, (…), means the same by '$\vdash$' as the classical logician, but nevertheless believes that a principle for '$\vdash$', which the classical logician accepts, does not hold" (Haack 1996, p.10). Este último aspecto hace alusión a cierto componente conceptual de carácter descriptivista.

Existen diversos argumentos a favor del cambio de significado de las constantes lógicas como criterio de divergencia y como criterio suficiente para eliminar la incompatibilidad:

A. La dependencia teórica del significado de las conectivas

Este argumento defiende que la divergencia implica la modificación del significado de las constantes lógicas (segunda premisa del argumento de Quine reconstruido por Haack) mediante la tesis según la cual los axiomas y reglas de inferencia de un sistema deductivo son los que determinan el significado de las constantes lógicas (Haack 1996, p.11). Por consiguiente, si se asume tal tesis, entonces se sigue inmediatamente que al modificar las reglas se modifica el significado de las conectivas.

Para replicar esta tesis, Haack (1996, p.12) toma el argumento de Prior (1960 y 1964) que emplea la conectiva "*tonk*". Se pretende poner de manifiesto que el significado de las constantes lógicas no se establece a partir de las reglas de inferencia. Suponemos que *tonk* es un functor cuyas reglas inferenciales son (i) A ⊢ A *tonk* B y (ii) A *tonk* B ⊢ B. Atendiendo al cálculo deductivo, el sistema en el que está presente *tonk* es trivial puesto que se puede deducir cualquier fórmula, ya que sus reglas inferenciales conducen a A ⊢ B. Asimismo, tales reglas no permiten condiciones de verdad consistentes. La conclusión del argumento es que el significado de las conectivas es independiente y previo a las reglas inferenciales del sistema en el que se encuentran. Dichas reglas, por tanto, deben adecuarse a tal significado previo. Ahora bien, Haack (1996, p.13) llama la atención sobre la circunstancia de que del hecho de que las reglas inferenciales de *tonk* no determinan su significado, no se sigue que ninguna regla inferencial sea capaz de determinar el significado de una constante lógica. Por este motivo Haack (1996, p.14) concluye expresando que "So no conclusive has yet been given, from an acceptable premise concerning the meanings of the connectives, to the conclusion that in Deviant logics meaning-variance accounts for apparent rivalry".

Allende la consideración de Haack, podemos contrarreplicar poniendo de manifiesto que el sistema en el que está *tonk* es inconsistente (habiendo estipulado la consistencia) y simplemente no hay relación de consecuencia porque todo se deduce y

la explosión deductiva lo convierte en trivial[33]. La relación de consecuencia se puede explicar en términos de consistencia de un conjunto de creencias. No se trata de un concepto previo a otro sino del mismo, el cual es de carácter convencional y puede definirse por estipulación. Las reglas inferenciales no pueden dar el significado de *tonk* porque son inaceptables si se asume de partida una perspectiva descriptivista. Desde una perspectiva convencionalista se dirá que *tonk* no tiene significado en absoluto. Otra dificultad parte de la observación por la cual si se puede estipular cualquier cosa, entonces se puede aceptar la inconsistencia, y si la consistencia se debe respetar, entonces la consistencia es algo previo no estipulado. No obstante, la réplica es análoga a la anterior: la consistencia también es una regla estipulada a partir de la cual se puede construir una relación de consecuencia. No se trata de la negación, sino de hacerla trivial. A eso denominamos "lógica", pero se pueden cambiar las convenciones y simplemente no tener lógica. Al estipular una relación de consecuencia ya se está estipulando al mismo tiempo una noción de consistencia. No hay una relación de prioridad entre ambas nociones.

B. El argumento de la traducción

Un segundo argumento que concluye que la rivalidad es explicada por el cambio de significado, entendiendo que no existe incompatibilidad sino cambio de significado de las conectivas, consiste en afirmar que la rivalidad se explica por una mala traducción. Este argumento se debe a Quine (1970), quien considera que la traducción de un sistema divergente se realiza desde un sistema de referencia, el cual se estaría imponiendo. Así, pues, la rivalidad sería imposible. Cabe diferenciar este argumento de otro en el que Quine (1951) afirma que cualquier creencia, en este caso sobre las reglas de los sistemas lógicos, es susceptible de ser revisada tomando como criterio la experiencia. No obstante, Quine (1970) sostiene que no es posible un cambio de lógica genuino. Esta última tesis se apoya en la tesis de la *indeterminación de la traducción* (Quine 1960, §2 y 1968). Haack (1996, p.16) distingue tres tesis relativas a la indeterminación de la traducción:

[33] Como se verá más adelante, en los sistemas paraconsistentes el principio de explosión puede fallar de tal modo que se puede admitir cierta inconsistencia controlada sin incurrir en explosión deductiva. Ahora bien, en este punto lo que nos interesa es la discusión sobre otro aspecto.

i. La incertidumbre inductiva de sentencias observacionales: "There is *inductive uncertainty* in the translation even of *observation sentence*".
ii. La indeterminación radical de enunciados. "There is *radical indeterminacy* in the translation of *words and phrases*".
iii. La indeterminación radical de sentencias teóricas: "There is *radical indeterminacy* in the translation of *theoretical sentences*".

La tesis de la indeterminación de la traducción se compone de la indeterminación radical de enunciados y la indeterminación radical de sentencias teóricas (ii y iii). Ambas implican que no hay una traducción que sea correcta y única. Por su parte, la incertidumbre inductiva de sentencias observacionales (i) es una versión más débil que plantea sólo una dificultad para determinar una traducción.

La excepción a la indeterminación la encuentra Quine (1970) en los functores veritativo-funciones (extensionales). Este es el dato que le interesa resaltar a Haack (1996, p.17) para su argumentación. Si una tercera constante satisface las condiciones de verdad de la conectiva extensional del lenguaje que se pretende traducir, entonces es posible traducirla mediante la correspondiente función veritativa. Siguiendo el análisis de Haack (1996, p.18) sobre la traducción en Quine, se mantienen dos tesis vinculadas:

i. Cabe la posibilidad de traducir una expresión de cierto lenguaje a través de una conectiva extensional.
ii. No cabe la posibilidad de que en el lenguaje traducido se validen contradicciones o se invaliden verdades lógicas, dada una traducción adecuada mediante las conectivas extensionales.

La determinación de la traducción de las conectivas extensionales ofrecería un criterio para los sistemas divergentes a partir de la alteración del significado. Dada la segunda tesis no es posible la rivalidad entre sistemas. No obstante, Haack (1996, p.18) argumenta que la segunda tesis no se sigue de la primera si no son aceptadas previamente tres presuposiciones: "a) the principle of maximizing agreement, b) the adoption of classical criteria for the truth-functions and c) the adoption of assent and dissent as behavioral co-ordinates". Así, pues, el criterio de la traducción para eliminar la posibilidad de la divergencia se asienta sobre tres postulados cuya justificación es cuestionable.

En primer lugar, Quine (1970, p.59) asume que las aserciones tomadas como inválidas (debiendo ser válidas en correspondencia con el sistema clásico) en el lenguaje traducido se deben a diferencias que se ignoran entre los lenguajes. Es importante notar que se distingue entre la creencia del hablante y el significado de las expresiones (en este sentido asume el descriptivismo), de tal modo que el principio de la maximización del acuerdo se refiere a la coincidencia en las creencias y la divergencia en el significado de las expresiones. En segundo lugar, se toma como sistema de partida la lógica clásica, a la cual los distintos lenguajes deben de converger. Y en tercer lugar, en relación con la primera asunción, se toma el asentimiento como algo relativo al comportamiento del hablante de una lengua y no a las expresiones mismas. En definitiva, "The principle of maximizing agreement entails that correct translation invariably preserves classical logic in a privilege position, only if one assumes that classical logic is the right one" (Haack 1996, p.20). Tales condiciones conducen a una *petitio principii*.

En definitiva, lo que obtenemos al replicar los argumentos 1 y 2 es que la divergencia entre sistemas lógicos no supone la alteración en el significado de las constantes lógicas, de tal modo que, al no cambiar el significado, no se elimina la rivalidad, esto es, se mantiene la incompatibilidad. Asumiendo la crítica de Haack, defendemos una afirmación que va más allá de esta autora: el cambio de significado no elimina la rivalidad. El argumento previo señala que si hay cambio de significado entonces no hay incompatibilidad, pero la noción de divergencia no implica un cambio de significado. Asumiendo la no exigencia de cambio de significado para la divergencia, de forma añadida señalamos que el cambio de significado también es una forma de incompatibilidad. De este modo, a diferencia de Haack, defendemos que la incompatibilidad no depende sólo de afirmar o negar una fórmula con el mismo significado. Desde nuestra perspectiva, si no son capaces de hablar de lo mismo, entonces también son incompatibles. Y en este sentido, una extensión también puede ser incompatible con el sistema base precisamente en la parte extendida.

Para que nuestra tesis tenga sentido debemos anular la exigencia de la apelación a una instancia externa de referencia, ya sea un sistema lógico en particular o una realidad que debamos describir. Lo que queremos decir es que la noción de rivalidad exige de modo implícito esta exigencia de referencia única, la cual es propia del descriptivismo monista. Para que la consideración sobre el cambio de significado como

no excluyente de la incompatibilidad sea admisible es necesario no mantener una concepción descriptivista. Si conectivas de dos sistemas están describiendo el comportamiento de aspectos distintos de cierta realidad, entonces va de suyo que no habría rivalidad. En esto reside la importancia del convencionalismo para la divergencia como criterio formal de incompatibilidad. Incluso la suplementación sería una forma parcial de rivalidad. Obtenemos este resultado al introducir en la discusión la distinción entre el descriptivismo y el convencionalismo (no presente en el planteamiento de Haack), puesto que ligamos la idea de rivalidad con el descriptivismo. De este modo, los criterios de divergencia (supra §3.4.1.) son necesarios y suficientes para hablar de lógicas no clásicas.

Como puede observarse, se admite tanto la determinación de la traducción de las conectivas extensionales (con Quine) como la crítica de Haack a las tres presuposiciones injustificadas que sostienen la segunda tesis de la traducción. Ahora bien, asumimos de manera añadida una prioridad de las reglas semánticas estipuladas modelo-teóricamente[34]. Defendemos el criterio formal de divergencia lógica, sin embargo, diferimos en la concepción de la rivalidad y la complementación. Mantenemos que el criterio de la rivalidad es la compatibilidad entre sistemas, pero para comprobar la compatibilidad no se debe suponer un significado común previo al que poder adecuarse. Antes bien, no existe un significado previo a las reglas semántico-formales estipuladas en teoría de modelos. La incompatibilidad se puede entender precisamente como tener distinto significado. Esto nos permite impugnar la premisa (ii) "si hay cambio de significado, entonces no hay incompatibilidad", la cual presupone una perspectiva descriptivista. Del mismo modo se puede mantener la tesis carnapiana de la dependencia teórica del significado de las constantes lógicas respecto de las reglas de inferencia y a la vez mantener la incompatibilidad.

3.4.3. Tipos de divergencia

Dada la discusión anterior, reconstruimos las tres formas de divergencia que Haack (1996, p.22) distingue tomando como referencia al sistema clásico S_C y a un sistema divergente S_D:

[34] Esta idea se desarrollará más adelante en §7.

1. Es posible traducir cualquier fórmula A ∈ TEO(S_D) de tal modo que se corresponda con una fórmula A' ∈ TEO(S_C) y viceversa. En este caso la traducción consiste en una mera modificación de los símbolos de las conectivas veritativo funcionales con las que las fórmulas se forman.
2. Existe algún A ∈ TEO(S_D) tal que no es posible traducirlo a algún A' ∈ TEO(S_C).
3. CON(S_D) ≠ CON(S_C) dado que sus elementos poseen distintos significados.

Para Haack en el tercer caso los sistemas no son rivales porque cambian el significado, por lo que no hay incompatibilidad. Nosotros mantenemos que precisamente hay incompatibilidad porque cambia el significado. Es importante poner de manifiesto que la noción de traducción que Haack está dando por sentado en su clasificación de los tipos de divergencia entre sistemas lógicos está basada exclusivamente en la determinación de la traducción de las constantes veritativo-funcionales, de tal modo que se trata de una sustitución de símbolos. Así, pues, dada la determinación de la traducción de las conectivas extensionales, la traducción se realiza mediante la sustitución de los símbolo de dichas conectivas de tal modo que si hay una correspondencia entre los símbolos de los distintos sistemas, entonces $\vdash_{SD}$ A sii $\vdash_{SC}$ A'.

PARTE II: RELEVANCIA LÓGICA

4. La Lógica de la relevancia

En el capítulo anterior se plateó un criterio formal de divergencia lógica que permite demarcar las lógicas rivales unas de otras. La exigencia de determinar este criterio reside en la comprensión del problema de la pluralidad de lógicas puesto que se debe establecer en qué sentido los sistemas lógicos existentes son divergentes. El criterio expuesto consiste en la no coincidencia de los elementos de los conjuntos de fórmulas válidas de dos sistemas distintos. Para que el argumento quineano del cambio de significado como excluyente de la rivalidad no sea aplicable al criterio de divergencia antedicho es necesario evitar la concepción descriptivista de la lógica: si se cambia de tema y se pretende describir el comportamiento de realidades distintas, entonces deja de darse la rivalidad.

Ahora bien, el objeto mismo de investigación de la presente tesis consiste en la relación del problema de la pluralidad de lógicas y la noción de relevancia lógica. Esta relación la detallamos en la tercera parte de la tesis en las siguientes dos vías:

i. Proponer una comprensión de la idea de relevancia lógica bajo la concepción convencionalista de la lógica.
ii. Evaluar la posibilidad de un convencionalismo a partir de los sistemas relevantes, lo cual concluye en un posible monismo. Con ello se llenaría un espacio dentro de la taxonomía que hemos propuesto (supra §2), a saber: el monismo convencionalista, *prima facie* considerado como un espacio vacío dentro de la clasificación.

Por consiguiente, el paso que se debe dar a continuación en el desarrollo de la presente investigación consiste en determinar la versión de las lógicas relevantes adecuada a los objetivos antedichos. Así, pues, en esta segunda parte de la tesis nos centramos en las lógicas denominadas relevantes o relevantistas. En particular, en el presente capítulo nos ocupamos de las motivaciones que impulsaron el programa de investigación de la idea de relevancia lógica y de la caracterización formal de los sistemas relevantes. Nos interesa su caracterización en tanto que sistema subestructural por tratarse de una caracterización más económica, ya que define las lógicas relevantes mediante la simple restricción de la regla estructural de la atenuación en el cálculo de secuentes. En el siguiente capítulo discutimos los distintos planes semánticos para las

lógicas relevantes. Finalmente, en el último capítulo de esta segunda parte discutimos dos de las principales interpretaciones filosóficas de la relevancia lógica.

4.1. PARADOJAS DEL CONDICIONAL MATERIAL

De modo general, las lógicas relevantes están motivadas por la definición de (i) una noción de *consecuencia* tal que para que la inferencia sea válida el consecuente debe ser relevante con respecto a las premisas, y (ii) un *condicional* tal que para ser verdadera una fórmula condicional el consecuente de una fórmula condicional verdadera sea relevante con respecto al antecedente. Restall (2006, p.2) lo expresa de este modo: "The discipline of *relevant logic* grew out of an attempt to understand notions of consequence and conditionality where the conclusion of a valid argument is relevant to the premises, and where the consequent of a true conditional is relevant to the antecedent".

El núcleo de la lógica reside en la relación de *consecuencia*. Como es sabido, a partir de ella podemos establecer qué se sigue de un conjunto de premisas. Necesitamos, pues, un lenguaje capaz de expresar información concerniente a la relación de consecuencia. Habitualmente esto se consigue haciendo uso del condicional, puesto que con él podemos formular el (meta-)*teorema de deducción* (Restall 2000, p.9):

$$\frac{\Gamma, A \vDash B}{\Gamma \vDash A \rightarrow B}$$

La doble línea horizontal quiere decir que se puede leer de arriba a abajo y de abajo a arriba. Este teorema nos permite observar la relación del condicional con la consecuencia lógica, lo cual pone de manifiesto la importancia del condicional en lógica. Tal vínculo entre la consecuencia y el condicional se conoce como "residuo" (*residuation*) o "equivalencia de deducción" (*deduction equivalence*).

Por este motivo se entiende que Anderson y Belnap (1975, p.3) expresen "Although there are many candidates for 'logical connectives', such as conjunction, disjunction, negation, quantifiers, and for some writers even identity of individuals, we take the heart of logic to lie in the notion 'if... then'". En este contexto, los sistemas lógicos relevantes permiten evitar las llamadas paradojas tanto del condicional material (PCM) como las del condicional estricto (PCE). Desde el punto de vista de la relevancia, el problema con dichas paradojas reside en que el antecedente es irrelevante

para el consecuente, por tanto, con ellas obtenemos fórmulas válidas pero contraintuitivas. Para que las distinciones sean claras, en adelante mantendremos la siguiente notación: condicional material ⊃, condicional estricto ⥽ y condicional relevante →.

PCM	**PCE**
$A \supset (B \supset A)$	$(A \wedge \neg A) \backsimeq B$
$\neg A \supset (A \supset B)$	$A \backsimeq (B \backsimeq B)$
$(A \supset B) \vee (B \supset C)$	$A \backsimeq (B \vee \neg B)$

Se puede entender que la motivación filosófica de las lógicas relevantes consiste en dar una solución formal a tales paradojas, buscar algún modo de conseguir que sean inválidas. El problema reside en que, *prima facie*, la relevancia parece ser relativa al contenido de las proposiciones y no a su estructura formal. No obstante, cabe preguntarse si se pueden aplicar principios formales que garanticen que se dé la relación de relevancia entre antecedente y consecuente y entre premisas y conclusión.

Filosóficamente, se trata de una cuestión de gran envergadura dado que la concepción tradicional de la lógica entiende que esta disciplina se ocupa exclusivamente del aspecto formal de los razonamientos. Sin embargo, así entendida, la validez de un enunciado conlleva validar argumentos intuitivamente inaceptables, tales como las ya mencionadas paradojas del condicional material. Por ello, como se ha indicado, para evitar la problemática que plantean las PCM y también las PCE, se han propuesto condiciones formales que mantengan la relevancia en el condicional y la consecuencia.

4.2. IMPLICACIÓN Y RAZONAMIENTO CONDICIONAL

Se entienden las implicaciones como razonamientos de tipo "si…, entonces…" del lenguaje natural. Bajo este concepto caen tanto las conectivas condicionales como la relación de consecuencia. Es cierto que el teorema de deducción permite vincularlas si el sistema en cuestión lo admite[35], ahora bien, distinguimos los dos niveles del lenguaje. Esta aclaración es precisa para no incurrir en confusiones entre los términos que emplean Anderson y Belnap y los términos que empleamos en esta investigación.

[35] Esto quiere decir que debe probarse.

Denominamos “implicación” a la relación de consecuencia, “condicional” a la conectiva lógica e “implicación en sentido genérico” al uso informal que incluye a ambas. El condicional lo leemos como “si…, entonces…” y la consecuencia la leemos como “…se sigue de…”.

Existen paradojas que afectan a la implicación en sentido genérico tanto en su versión material como estricta. Anderson y Belnap (1975, p.3) defienden que se trata de una terminología errónea, puesto que no son verdaderas paradojas. Un ejemplo de paradoja del condicional es el teorema $A \supset (B \supset A)$. Ahora bien, “Properly understood there are no ‘paradoxes’ of implication” (Anderson y Belnap 1975, p.3) puesto que, para que el caso mencionado sea falso, el antecedente debe ser verdadero y el consecuente falso. Sin embargo, el condicional no puede ser falso ya que si el antecedente, A, es verdadero, entonces $\neg B \vee A$ también lo es, teniendo en cuenta que $B \supset A$ es equivalente a $\neg B \vee A$. No existe paradoja alguna en tales condiciones. Para reforzar este planteamiento Anderson y Belnap (1975, p.4) proponen un contraejemplo: supongamos que pretendemos caracterizar formalmente al condicional a partir del *Modus Ponens* y de los siguientes tres axiomas:

i. $A \supset A$
ii. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
iii. $(A \supset B) \supset (B \supset A)$

Esta caracterización parece rechazable porque el axioma iii convierte a los razonamientos tipo “si…, entonces…” en simétricos. Ahora bien, no hay nada paradójico en esta axiomatización, puesto que las objeciones a la misma no son propiamente *lógicas* y el apologeta del supuesto condicional simétrico podría alegar que “The implication connective of this system may not exactly coincide with the intuitions of naive, untutored folk, but it is quite adequate for my needs, and for the rest of us who are reasonably sophisticated” (Anderson y Belnap 1975, pp.4-5). El supuesto condicional simétrico satisface la condición de la conservación de la verdad y, a la vez, expresa que “si A, entonces B” quiere decir que ambos son falsos o ambos son verdaderos. La crítica por paradójico no es acertada puesto que apela a razones extra-lógicas que pueden ser arbitrarias.

Con el contraejemplo antedicho lo que se quiere mostrar es simplemente que el problema con las llamadas “paradojas” del condicional material no es su supuesto

carácter paradójico o alguna contradicción que se derive de alguna de ellas en particular, sino que el problema se encuentra en la noción intuitiva de relevancia en los razonamientos "si…, entonces…". Se pueden derivar contradicciones de determinadas PCM, pero eso no es más que una consecuencia negativa del problema fundamental de la irrelevancia. No se trata de encontrar un problema particular en cada paradoja, ni siquiera se trata de mostrar su carácter paradójico. La motivación original del programa de investigación en lógicas relevantes parte de una concepción descriptivista en virtud de la cual la lógica debe describir los razonamientos intuitivos tipo "si…, entonces…", los cuales son relevantes. En la tercera parte de la tesis mostraremos una forma de comprender la idea de relevancia lógica desde una perspectiva convencionalista.

Dado que la crítica del carácter paradójico de ciertos tipos de condicional no es efectiva, la estrategia se orienta a rechazar a los condicionales material y estricto como reales condicionales. Lo que Anderson y Belnap (1975, p.4) defienden es que "the view that material 'implication' is not an implication connective". No se trata de que el condicional material sea un condicional extraño o paradójico, sino de que no es un condicional de ningún tipo. Llamar "condicional" al condicional material es simplemente una falacia de ambigüedad: "Material implication is not a 'kind' of implication, (…); it is no more a kind of implication than a blunderbuss is a kind of buss" (Anderson y Belnap 1975, p.5). No se busca el "verdadero" condicional entre muchas posibilidades, sino que se trata de caracterizar al "único" condicional. Desde nuestro planteamiento esta postura es la de un monismo descriptivista (pretendidamente) justificado por un conocimiento intuitivo (inmediato y directo) de un razonamiento pre-teórico. Anderson y Belnap (1975) defienden una postura monista relevante, en particular un monismo del sistema **E**.

4.3. LÓGICA DEL ENTRAÑAMIENTO Y DE LA RELEVANCIA

Anderson y Belnap (1975, *passim*) denominan "entailment" a la implicación lógica en sentido genérico, el cual término lo traducimos como "entrañamiento". El núcleo de la propuesta de Anderson y Belnap (1975) para caracterizar formalmente el entrañamiento se apoya en la deducción natural tipo Fitch para justificar la determinación de la regla adecuada del condicional "→". Para ello, el itinerario que siguen es el siguiente: parten del fragmento condicional del sistema intuicionista de Heyting $\mathbf{H}_{\rightarrow}$ y ponen de manifiesto dos insuficiencias del mismo para formalizar el

entrañamiento. En primer lugar, no incorpora la *necesidad* y en segundo lugar no incorpora la *relevancia*. Al introducir la necesidad se obtiene el fragmento condicional de **S4** de Lewis y Langford (1932), al introducir la relevancia se obtiene el fragmento condicional de **R** originariamente tratado por Moh (1950) y Church (1951) y al incorporar ambas se obtiene el fragmento condicional del sistema **E** (de *Entailment*).

4.3.1. **H**

FH→ es el sistema lógico caracterizado en la deducción natural tipo Fitch por las reglas de introducción y eliminación del condicional, la introducción de hipótesis, la repetición y la reiteración (esto es, la repetición pero en una subprueba bajo otra hipótesis)[36]. Se denominan "categóricas" a aquellas pruebas en las que se han descargado todas las hipótesis, e "hipotéticas" a las que no lo han hecho. Un teorema en la deducción natural es la fórmula que se encuentra en el último paso de las pruebas categóricas. El conjunto de teoremas del fragmento condicional del cálculo proposicional intuicionista **H**→ de Heyting (1930) es coincidente con los teoremas de **FH**→[37]. La caracterización axiomática de **H**→ se basa en la regla de la eliminación del condicional o *Modus Ponens* y los axiomas:

i. $A \supset (B \supset A)$
ii. $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset B \supset (A \supset C))$
iii. $A \supset A$

Ahora bien, el argumento de Anderson y Belnap (1975, p.13) consiste en rechazar la idea de que la mera prueba a partir de hipótesis representa adecuadamente a la implicación: "the impropriety of accepting the Official definition of 'proof from hypotheses,' as a basis for defining a 'proper implication'". **H**→ no consigue captar la noción de prueba en la medida en que no considera la necesidad y tampoco consigue captar la noción de probar "a partir de" en la medida en que no considera la relevancia.

[36] Más adelante (infra §4.3.4.) se especificarán estas reglas con más detalle.

[37] Véase la prueba en Anderson y Belnap (1975, pp.11-12).

4.3.2. **S4**

Un rasgo característico de la relación de consecuencia, asumido en la tradición lógica, consiste en considerar que la validez de la inferencia depende solo de la forma de los enunciados y es, por lo tanto, independiente de su contenido material. Asimismo, Anderson y Belnap (1975, p.14) remarcan el rasgo de la necesidad según el cual la validez de una inferencia (válida) es una propiedad necesaria: "an entailment, if true at all, is necessarily true". La necesidad se encuentra en la conservación de la verdad de las premisas a la conclusión. Ahora bien, la verdad lógica "$A \supset (B \supset A)$" no satisface la condición de la necesidad de la validez. Toda verdad implicada por una verdad necesaria es, a su vez, necesaria. Pero dado $A \supset (B \supset A)$, si suponemos que A es contingente y B necesaria, entonces de una verdad contingente se sigue una necesaria. El rechazo de esta PCM se justifica porque no expresa una verdad de la implicación puesto que si es verdadera, entonces debe ser necesariamente verdadera, y esta implicación (en sentido genérico) no lo es. "Truths entailed by necessary truths are themselves one and all necessary" (Anderson y Belnap 1975, p.15).

Para caracterizar un sistema cuyas implicaciones incorporen la necesidad, Anderson y Belnap parten de $\mathbf{H}_{\rightarrow}$ y emplean la deducción natural tipo Fitch restringiendo la regla de la reiteración de tal manera que solo pueda emplearse para entrañamientos ("entailments"). Se proponen solo introducir en una subprueba por reiteración una proposición que sea necesariamente verdadera: "we should be allowed to import into a deduction (…) only propositions which, if true at all, are necessarily true: i.e., we should reiterate only entailments" (Anderson y Belnap 1975, p.15). A este sistema lo denominan $\mathbf{FS4}_{\prec}$ y prueban que es equivalente al fragmento condicional de **S4** cuya descripción axiomática, junto con la regla de la eliminación del condicional, es la siguiente:

i. $A \prec B \prec (C \prec (A \prec B))$
ii. $(A \prec (B \prec C)) \prec (A \prec B \prec (A \prec C))$
iii. $A \prec A$

Lo que se consigue es imposibilitar que se dé $A \prec B$ si A es necesario y B es contingente. Este es el denominado *condicional estricto*: $A \prec B \coloneqq \Box(A \supset B)$, el cual tiene sus propias paradojas puesto que permite que de cualquier proposición arbitraria se siga una verdad necesaria: dada la fórmula necesariamente verdadera $A \prec A$, si se aplica

el axioma A ⥽ B ⥽ (C ⥽ (A ⥽ B)), entonces obtenemos B ⥽ (A ⥽ A). El problema en este caso reside en la irrelevancia de B con respecto a A ⥽ A. No obstante, sí satisface la condición de la necesidad de la validez puesto que es imposible determinar una asignación de valores tal que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Por este motivo se debe introducir una nueva restricción concerniente a la relevancia.

Las lógicas modales son una familia de sistemas que puede representarse a partir de restricciones en la relación binaria de accesibilidad entre mundos si empleamos la semántica de mundos posibles[38]. Así, pues, el condicional estricto "⥽" ostenta propiedades distintas según el sistema modal en cuestión. La tripleta <W, R, *v*> es una interpretación del lenguaje proposicional clásico aumentado con los operadores monádicos de necesidad y posibilidad "□" y "◊", tal que:

i. W ≠ Ø es el conjunto de mundos posibles.
ii. R es una relación binaria sobre W: R ⊆ W × W. Habitualmente se entiende a R como una relación de *accesibilidad* entre mundos posibles.
iii. *v* es una función de FBF × W a {0, 1} tal que para cualesquiera fórmulas A, B y cualquier mundo *w* asigna valores veritativos siguiendo el esquema: $v_w(A) = i$.

Las condiciones semánticas de los operadores modales son las siguientes:

- ∀*w* ∈ W: $v_w(\Box A) = 1$ sii ∀*w'* ∈ W tal que *w*R*w'* ($v_{w'}(A) = 1$). De lo contrario $v_w(A) = 0$.
- ∀*w* ∈ W: $v_w(\Diamond A) = 1$ sii ∃*w'* ∈ W tal que *w*R*w'* ($v_{w'}(A) = 1$). De lo contrario $v_w(A) = 0$.

Lo que estas reglas expresan es que si en algún mundo A es verdadera, entonces es verdad que A es *posible* en un mundo relacionado con aquel en el que A es verdadera. Si en todos los mundos A es verdadera, entonces es verdad que A es *necesaria* en un mundo relacionado con aquellos en los que A es verdadera. Empleando la interpretación filosófica de la *accesibilidad* podemos decir que si en algún mundo accesible desde *w* A es verdadera, entonces es verdad que A es posible en *w*; y que si en

[38] Nos detenemos en el aspecto semántico por dos motivos. Por un lado, nos permite aclarar el comportamiento del condicional estricto. Por otro lado, A partir de la semántica de mundos posibles será más sencillo comprender la semántica en el plan australiano para las lógicas relevantes (infra §5.1.1.), la cual será un punto central en el desarrollo de la tesis.

todo mundo accesible desde *w* A es verdadera, entonces es verdad que A es necesaria en *w*. Además, si no se puede acceder a ningún otro mundo desde *w*, entonces □A es verdadera y ◊A es falsa.

Con tales condiciones semánticas (junto con las de las conectivas no modales) se constituye el sisma modal básico **K**. Se pueden definir extensiones de **K** introduciendo restricciones en la relación de accesibilidad entre mundos. Más específicamente, las extensiones se caracterizan a partir de la definición de validez en tanto que conservación de la verdad en mundos posibles de determinadas clases de interpretaciones. Siguiendo el esquema de Priest (2008, p.36), dichas interpretaciones se determinan mediante el cumplimiento de restricciones en R tales como:

- Reflexividad (ρ): $\forall w \in W: wRw$.
- Transitividad (τ): $\forall w_1 w_2 w_3 \in W$: si $w_1 R w_2$ y $w_2 R w_3$, entonces $w_1 R w_3$.
- Simetría (σ): $\forall w_1 w_2 \in W$: si $w_1 R w_2$, entonces $w_2 R w_1$.
- Extensibilidad (η): $\forall w \in W: \exists w' \in W$ tal que wRw'.

El sistema correspondiente a **S4** es $\mathbf{K}_{\rho\tau}$ (y **S5** corresponde a $\mathbf{K}_{\rho\sigma\tau}$). Por consiguiente, la validez en $\mathbf{K}_{\rho\tau}$ se define del siguiente modo. Para toda estructura $<W, R_{\rho\tau}, v>$ y $\forall w \in W: \Gamma \vDash_{\mathbf{K}\rho\tau} A$ sii $\forall B \in \Gamma$ (si $v_w(B) = 1$ entonces $v_w(A) = 1$).

Ahora bien, a pesar de las distintas propiedades del condicional estricto según las extensiones de **K**, lo que generan las PCE son inferencias válidas en cualquier sistema modal: $\Box B \vDash A \prec B$ y $\neg \Diamond A \vDash A \prec B$. Si, además, constatamos que en todos los sistemas modales también son válidas $\vDash \neg \Diamond(A \wedge \neg A)$ y $\vDash (B \vee \neg B)$, entonces obtenemos $\vDash (A \wedge \neg A) \prec B$ y $\vDash A \prec (B \vee \neg B)$ como casos particulares.

4.3.3. **R**

Para explicar la noción de relevancia, Anderson y Belnap (1975, p.18) emplearon la idea de prueba a partir de hipótesis expresada sintácticamente en el método axiomático. Con esta herramienta pretenden expresar la condición de probar A → B a partir de la derivación de B a partir de A como hipótesis. Para incorporar una restricción formal para expresar la idea de "a partir de" en la prueba a partir de hipótesis es preciso introducir una técnica que permita mantener identificada la sucesión de los pasos que se han empleado de tal manera que la regla de la introducción del condicional

solo sea aplicable cuando el antecedente se haya usado para derivar al consecuente: "we should devise a technique for keeping track of the steps used, and then allow application of the introduction rule only when A is relevant to B in the sense that A is used in arriving at B" (Anderson y Belnap 1975, p.18).

El teorema de deducción clásico (no relevante) se puede formular en la deducción natural tipo Fitch del siguiente modo: si hay alguna prueba de B a partir de las hipótesis $A_1,\ldots, A_n$, entonces hay una prueba de $A_n \supset B$ bajo las hipótesis $A_1,\ldots, A_{n-1}$. Si se parte de la hipótesis B y del axioma $A \supset B$, entonces el teorema de deducción permite derivar $B \supset (A \supset A)$. Para el caso relevante, lo que se busca es un sistema que permita probar un teorema de deducción tal que exija que $A \rightarrow B$ sea probable para que exista una prueba de B a partir de A como hipótesis. Anderson y Belnap (1975, pp.19-20) buscan este resultado mediante la determinación de los axiomas adecuados. Estos axiomas son:

i. Identidad: $A \rightarrow A$
ii. Transitividad: $A \rightarrow B \rightarrow (B \rightarrow C \rightarrow (A \rightarrow C))$
iii. Permutación: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
iv. Auto-distribución: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C))$

Tales axiomas permiten probar un teorema de deducción para el que la relevancia es exigida: "$A \rightarrow B$ is a theorem of $\mathbf{R}_{\rightarrow}$' just in case there is a proof of B *from* the hypothesis A" (Anderson y Belnap 1975, p.20). El sistema $\mathbf{R}_{\rightarrow}$' de Anderson y Belnap es equivalente al "weak positive implicational propositional calculus" de Church (1951) cuyos axiomas son coincidentes con los de $\mathbf{R}_{\rightarrow}$' salvo la auto-distribución en cuyo lugar se encuentra el axioma de contracción: $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$. A este sistema axiomático Anderson y Belnap (1975, p.20) lo denominan $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ por ser el sistema de la implicación relevante (en su fragmento condicional).

La generalización del teorema de deducción para $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ se puede formular del siguiente modo: existe una prueba de $A_n \rightarrow B$ a partir de $A_1,\ldots,A_{n-1}$ donde es empleado cada elemento de la secuencia, si hay una prueba de B a partir de las hipótesis $A_1,\ldots,A_{n-1}$ donde es empleado cada elemento de la secuencia. Esta generalización del teorema de deducción en $\mathbf{R}_{\rightarrow}$, según explican Anderson y Belnap (1975, p.21), hace técnicamente operativa la prueba de varias implicaciones anidadas (concatenada una dentro de otra). Esto exige que todos y cada uno de los A_i sean empleados para derivar B como

condición de que la fórmula condicional sea verdadera. Es necesario distinguir la trayectoria en cada paso de la relevancia de las distintas hipótesis y, para ello, Anderson y Belnap (1975, p.22) proponen la técnica de subíndices en virtud de la cual identificar la descarga de los marcadores de relevancia del mismo modo que la descarga de las propias hipótesis:

> the easiest way of handling the matter is to use classes of numerals to mark the relevance conditions, since then we may have as many nested subproofs as we wish, each with a distinct numeral (which we shall write in subscripted set-notation) for its hypothesis.

Con la técnica de subíndices la introducción de una hipótesis nueva en una subprueba tiene un subíndice distinto que el de la hipótesis de aquella prueba a la que está subordinada. Las variables de subíndices son conjuntos de números y las repeticiones y reiteraciones mantienen el subíndice. Así, pues, según las reglas establecidas por Anderson y Belnap (1975, p.22), a partir de A_x y $A \rightarrow B_y$ es posible derivar $B_{x \cup y}$, y a partir de la hipótesis $A_{\{i\}}$ y la prueba de B_x es posible derivar $A \rightarrow B_{x -\{i\}}$ si i pertenece a x. La regla de introducción del condicional es la siguiente: de una subprueba que parte de la hipótesis $A_{\{k\}}$ e infiere B_a, se puede deducir $(A \rightarrow B)_{a-\{k\}}$, siempre y cuando k esté en a. El núcleo de la regla sintáctica reside en que k ocurre en a, puesto que de este modo se garantiza que se está usando A en la deducción de B. Se trata de un método sintáctico para definir la regla (de introducción) del condicional relevante, en virtud del cual una hipótesis debe ser empleada para derivar correctamente la conclusión. Al eliminar los números de un índice en la prueba de los teoremas están descargando las hipótesis. Podemos mostrar el fallo de una PCM con esta técnica:

1.	$A_{\{1\}}$	Hipótesis
2.	$B_{\{2\}}$	Hipótesis
3.	$A_{\{1\}}$	Reiteración de 1
4.	$B \rightarrow A_{\{1\}}$	I → en 2-3
5.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	I → en 1-4

El fallo puede observarse en la aplicación de "I → en 2-3" puesto que $2 \notin \{1\}$, lo cual impide descargar la hipótesis introducida en el segundo paso. Para mostrar una prueba tomamos el ejemplo de la prueba de la ley de aserción:

1.		$A_{\{1\}}$	Hipótesis
2.		$A \rightarrow B_{\{2\}}$	Hipótesis
3.		$A_{\{1\}}$	Reiteración de 1
4.		$B_{\{1,2\}}$	Eliminación de → en 2 y 3
5.		$A \rightarrow B \rightarrow B_{\{1\}}$	Introducción de → en 2 y 4
6.	$A \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow B)$		Introducción de → en 1 y 5

A la caracterización de $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ con la técnica de subíndices en la deducción natural tipo Fitch, Anderson y Belnap (1975, p.22) la denominan $\mathbf{FR}_{\rightarrow}$, la cual es equivalente a la expresión axiomática de $\mathbf{R}_{\rightarrow}$. Las lógicas relevantes son una familia de sistemas que se pueden caracterizar como extensiones del sistema relevante básico **B**. La presentación más eficaz y económica de la familia de sistemas relevantes es mediante el método axiomático de teoría de la prueba en el cual $\Gamma \vdash A$ sii hay una serie de fórmulas $A_1,\ldots, A_n$ tal que cada fórmula es un miembro de Γ, es un axioma o se deriva de una de ellas mediante las reglas, y A es A_n. Presentamos los siguientes axiomas (A) y reglas (R) para **B**:

R1. $A, A \rightarrow B \vdash B$

R2. $A, B \vdash A \wedge B$

R3. $A \rightarrow B \vdash (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$ (*prefixing*)

R4. $A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (*suffixing*)

R5. $A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow \neg A$

A1. $A \rightarrow A$

A2.1. $A \rightarrow (A \vee B)$

A2.2. $B \rightarrow (A \vee B)$

A3.1. $(A \wedge B) \rightarrow A$

A3.2. $(A \wedge B) \rightarrow B$

A4. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

A5. $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$

A6. $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

A7. $\neg \neg A \rightarrow A$

Las extensiones de **B** son versiones más fuertes que se generan al añadir axiomas que no son fórmulas válidas en **B**:

A8. $(A\rightarrow \neg B) \rightarrow (B\rightarrow \neg A)$

A9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A10. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$

A11. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

A12. $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

A13. $A \vee \neg A$

A14. $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$

A15. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A16. $A \rightarrow (A \rightarrow A)$

Siguiendo la caracterización y las denominaciones de Priest (2008, p.202), presentamos la definición axiomática de los sistemas lógicos de la familia relevante *affixing* (esto es, que le son características las reglas *prefixing* y *suffixing*)[39]:

B ≔ A1-7, R1-5

BX ≔ **B**, A13

DW ≔ **B**, A8

DWX ≔ **DW**, A13

TW ≔ **DW**, A9, A10

TWX ≔ **TW**, A13

T ≔ **TW**, A11, A14

RW (o **C**) ≔ **TW**, A12

R ≔ **RW**, A11

[39] Las siguientes definiciones también son válidas: **DWX** ≔ **BX**, A8; **TWX** ≔ **DWX**, A9, A10; **T** ≔ **TWX**, A11, A14; **R** ≔ **T**, A12. **RM** y **RWK** no son relevantes puesto que $\vdash_{RM} (p \wedge \neg p) \rightarrow \neg (q \wedge \neg q)$ y $\vdash_{RWK} q \rightarrow (p \rightarrow p)$ a partir de R1, A1 y A15. Por otro lado, siguiendo a Routley (1980), el siguiente conjunto de axiomas permite caracterizar **B** cuantificado:

A$^{\forall}$1. $\vdash \forall x A \rightarrow A_x(a)$

A$^{\forall}$2. $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$

A$^{\forall}$3. $\vdash \forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (\exists x B \rightarrow A)$

A$^{\forall}$4. $\vdash \forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall x B)$

A$^{\forall}$5. Si $\vdash A_x(a)$, entonces $\vdash \forall x A$

RWK (o **CK**) ≔ **RW**, A15

RM ≔ **R**, A16

4.3.4. **E**

Anderson y Belnap (1975, p.23) elaboraron el cálculo del entrañamiento para incorporar la necesidad y la relevancia[40]. Lo formulan a través de la deducción natural tipo Fitch. Así, pues, el sistema **FE**→ resulta de la introducción de las restricciones que en **FS4**→ se imponen sobre la regla de la reiteración y de la técnica de subíndices desarrollada para **FR**→. Por consiguiente, las reglas se establecen como sigue (Anderson y Belnap 1975, p.23):

- Hipótesis: si se introduce una hipótesis, entonces es un nuevo paso del cálculo que abre una subprueba nueva. Toda hipótesis introducida tiene como subíndice un conjunto unitario $\{i\}$ cuyo elemento es nuevo en el orden de aparición.
- Repetición: es posible repetir A_x si mantiene el mismo subíndice x como marcador de relevancia.
- Reiteración: es posible reiterar $(A \rightarrow B)_x$ si conserva el subíndice x como marcador de relevancia de un paso que se encuentra en una prueba a la que está subordinada la subprueba en la que aparece.
- Eliminación del condicional: es posible derivar $B_{x \cup y}$ a partir de A_x y $A \rightarrow B_y$.
- Introducción del condicional: es posible derivar $A \rightarrow B_{x\ -\{i\}}$ a partir de la hipótesis $A_{\{i\}}$ y la prueba de B_x si i pertenece a x.

El cálculo condicional de Ackermann (1956) es equivalente a **FE**→. Anderson y Belnap (1975, p.24) declaran que el mencionado trabajo de Ackermann "served as the point of departure for all the investigations reported in this book". En su formulación axiomática, **E**→ puede detallarse mediante los axiomas:

i. Identidad: $A \rightarrow A$
ii. Transitividad: $A \rightarrow B \rightarrow (B \rightarrow C \rightarrow (A \rightarrow C))$
iii. Aserción restringida: $A \rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C)$
iv. Auto-distribución: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C))$

[40] Previamente, Anderson (1959) y Belnap (1960) caracterizaron axiomáticamente por vez primera el sistema **E** cuantificado.

Siguiendo a Anderson y Belnap (1975, p.26), otros teoremas importantes particularmente destacados en la caracterización de $\mathbf{E}_{\rightarrow}$ son:

i. Transitividad prefijada ("prefixing"): $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$
ii. Transitividad sufijada ("suffixing"): $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
iii. Contracción: $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
iv. Auto-distribución en la mayor: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
v. Auto-distribución en la menor: $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
vi. Reemplazo del término medio: $(D \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (D \rightarrow C)))$
vii. Reemplazo del tercero: $(C \rightarrow D) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$
viii. Prefijación en el consecuente: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)))$
ix. Sufijación en el consecuente: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)))$
x. Permutación restringida: $(A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow D)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow D))$
xi. *Modus Ponens* condicionado restringido: $B \rightarrow C \rightarrow ((A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow D)) \rightarrow (A \rightarrow D))$
xii. Aserción restringida: $(A \rightarrow B) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow C)$
xiii. Aserción especializada: $((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$

Es importante destacar que el operador de necesidad se puede introducir como un término primitivo en $\mathbf{E}_{\rightarrow}$. Basta con establecer los siguientes tres axiomas: (i) $\Box A \rightarrow A$, (ii) $(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(A \rightarrow B)$, (iii) $\Box A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \Box B)$. Ahora bien, Anderson y Belnap (1975, p.27) definen la necesidad del siguiente modo: $\Box A \coloneqq (A \rightarrow A) \rightarrow A$. Con esta definición pretenden expresar que en la lógica del entrañamiento la necesidad se encuentra intrínsecamente vinculada con el condicional (y con la implicación por el teorema de deducción en $\mathbf{E}_{\rightarrow}$). Esto quiere decir que si A es el consecuente de un condicional verdadero en la lógica del entrañamiento, entonces A es necesario. Proponen el siguiente teorema como ejemplo (Anderson y Belnap 1975, p.28):

1.	$A \rightarrow B_{\{1\}}$	Hipótesis
2.	$A \rightarrow B \rightarrow C_{\{2\}}$	Hipótesis
3.	$C \rightarrow C_{\{3\}}$	Hipótesis
4.	$A \rightarrow B_{\{1\}}$	Reit. 1
5.	$A \rightarrow B \rightarrow C_{\{2\}}$	Reit. 2
6.	$C_{\{1,2\}}$	Elim. → 4,5
7.	$C_{\{1,2,3\}}$	Elim. → 3,6
8.	$(C \rightarrow C) \rightarrow C_{\{1,2\}}$	Intro. → 3,7
9.	$(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow \Box C_{\{1\}}$[41]	Intro. → 2,8
10.	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow \Box C)$	Intro. → 1,9

Respecto a la caracterización de **E** con relación a la definición axiomática de la familia de las lógicas relevantes en tanto que extensiones de **B**, es menester señalar que para incorporarla debemos introducir la necesidad. Dado que en **E** el operador de necesidad sobre una fórmula A cualquiera es equivalente a $(A \rightarrow A) \rightarrow A$, basta añadir a **T** un caso particular de A12 y un axioma que involucre la idea de necesidad. Por consiguiente, **E** ≔ **T**, A12', A17, donde:

A12'. $(A \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow C) \rightarrow B) \rightarrow B)$
A17. $\Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$

Para mantener la relevancia Anderson y Belnap (1975, p.30) proponen dos métodos formales. Por un lado, se encuentra la mencionada técnica de subíndices en la deducción natural tipo Fitch y, por otro lado, se encuentra el método de compartir una variable proposicional. El primero es necesario y suficiente para conservar la relevancia de las premisas en la conclusión. El segundo, sin embargo, es un método necesario pero insuficiente.

a) La condición que obliga a *compartir una variable proposicional* en un sistema axiomático (Anderson y Belnap 1975, p.32): expresa la idea intuitiva de que en un condicional A es relevante para B si A y B tratan el mismo contenido.
b) La *técnica de subíndices* en la deducción natural tipo Fitch (Anderson y Belnap 1975, p.30): expresa la idea de que A es relevante para B si

[41] Recordemos que $\Box A \coloneqq (A \rightarrow A) \rightarrow A$.

usamos A para inferir B de A. La relevancia se entiende como una dependencia lógica.

Son dos métodos para expresar formalmente las condiciones que la idea intuitiva de relevancia lógica debe imponer en el condicional. Un condicional verdadero es un teorema de un sistema relevante si cumple una de estas condiciones: por un lado, que haya un contenido significativo común entre el antecedente y el consecuente y, por otro lado, que el antecedente debe ser usado en la deducción del consecuente. Para cada una de las condiciones se diseña una restricción formal.

En el primer caso la relevancia está relacionada con el significado de las proposiciones. En este método la consecuencia relevante exige que la relevancia de A a B sea entendida como un contenido compartido entre A y B en un condicional verdadero (Anderson y Belnap 1975, p.32). La idea es la siguiente: si A y B comparten un mismo contenido significativo, entonces el condicional "A → B" puede ser relevante. Anderson y Belnap (1975, p.33) hacen uso de un modelo matricial[42] para demostrar que si "A → B" se puede probar en un sistema relevante, entonces A y B comparten una variable proposicional. El modelo matricial permite comprobar que los axiomas de un sistema axiomático relevante toman el valor verdadero para todas las asignaciones de sus variables. La restricción formal de la segunda condición consiste en usar una técnica de subíndices que permite rastrear el uso de las fórmulas en una deducción. Así, pues, si se usa A en la deducción de B, entonces "A → B" es admisible desde la perspectiva de la relevancia. Dicho condicional es un teorema de un sistema relevante si el antecedente es usado en la prueba del consecuente.

Read (1988, p. 132) objeta a la idea de que la relevancia exija compartir el significado mediante una variable proposicional común puesto que la condición de compartir un contenido es algo trivial y que no añade nada específicamente relevante a la relación de consecuencia clásica. Para una relación de consecuencia la conclusión inferida está ya contenida en las premisas. Esto quiere decir que la idea de compartir el significado en tanto que exigencia de la relevancia no es captada por la condición de compartir una variable. Además, el *Ex falso quodlibed* también cumpliría esta condición

[42] El modelo matricial es carácter semántico. No lo explicaremos puesto que en el siguiente capítulo nos centramos en la discusión de planes semánticos más desarrollados. No obstante, debemos hacer, cuanto menos, mención de él en este contexto.

puesto que "the meaning of a contradiction contains that of every other proposition" (Read 1988, p.132). Por otro lado, el compartir una variable no es una condición suficiente[43], ya que las inferencias "$A \vDash A \wedge B$" y "$A \vee B, \neg A \vDash B$" la cumplen pero no son válidas desde el punto de vista de la idea de la relevancia.

4.4. LÓGICAS SUBESTRUCTURALES Y RELEVANCIA

La técnica de subíndices pertenece a la teoría de la prueba. Dentro de esta rama de la lógica es posible ofrecer otras caracterizaciones de los sistemas relevantes. Dado que la motivación principal reside en evitar la irrelevancia que introduce la adición de fórmulas irrelevantes, la metodología más eficaz consiste en aludir a la regla estructural de la atenuación en el cálculo de secuentes. Por consiguiente, es posible caracterizar a los sistemas relevantes como formando parte de la familia de las lógicas subestructurales. Consideramos que este enfoque es el más económico en términos sintácticos.

4.4.1. Cálculo de secuentes tipo Gentzen

Las *lógicas subestructurales* son aquellas que se obtienen mediante la introducción de restricciones o del abandono de una o varias de las *reglas estructurales*. Dichas reglas son las relativas a la manipulación de la estructura de los secuentes. Paoli (2002 p.8) indica que las reglas estructurales "are so called since they do not introduce any logical symbol into discourse, but are concerned with the manipulation of the structure of sequents".

Con la *estrategia subestructuralista* para caracterizar la relevancia lógica conseguimos dos objetivos:

i. Evitar la irrelevancia con el abandono de la regla estructural de la atenuación, puesto que esta regla permite introducir fórmulas irrelevantes para la conclusión y las premisas.
ii. Desambiguar las conectivas clásicas de modo que se obtienen conectivas intensionales con capacidad expresiva para captar la idea de relevancia.

Seguimos a Paoli (2002) para expresar formalmente tales condiciones a partir del *cálculo de secuentes tipo Gentzen*. Tomamos como referencia el fragmento

[43] Así lo indican los propios Anderson y Belnap (1975, p.33).

proposicional del sistema **LK** (cálculo de secuentes para lógica clásica). Los aspectos fundamentales son los siguientes:

- L_{LK} es un lenguaje proposicional de **LK** que comprende variables proposicionales *p,q,r,…* y las conectivas clásicas ∧,∨,¬, ⊃. Usamos las letras mayúsculas A,B,C,… como variables de fórmulas.
- Las expresiones básicas de **LK** son los *secuentes*. Tales expresiones son inferencias de la forma "Γ ⊢ Δ", y se leen "Δ es derivable de Γ"[44]. Γ y Δ son el antecedente y el consecuente (en este orden).
- El antecedente y el consecuente son secuencias finitas de fórmulas bien formadas: $A_1,\ldots,A_n \vdash B_1,\ldots,B_m$. La coma se puede entender como la conjunción en el antecedente y como la disyunción en el consecuente, de modo que un secuente se puede expresar de forma equivalente como un condicional: $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$.
- Un *axioma* es un postulado que puede introducirse en cualquier momento de una deducción en el cálculo. **LK** tiene como axioma A ⊢ A.
- Las *reglas* permiten transformar los secuentes sin modificar la relación de derivabilidad. Las reglas tienen la forma de pares o tripletas ordenadas de secuentes tal que las premisas se encuentran encima de una línea horizontal y la conclusión debajo. En este esquema podemos encontrar *fórmulas secundarias*: conjuntos de fórmulas Γ, Δ, Π, Σ,…; *fórmulas principales*: fórmulas que no son secundarias en la conclusión A, B,…; y *fórmulas auxiliares*: fórmulas que no son secundarias en las premisas A, B,… En las reglas necesitamos el contexto inferencial dado por las fórmulas secundarias, las cuales pueden ser el conjunto vacío. Las reglas pueden ser de dos tipos: estructurales y operacionales.

4.4.2. Crítica a la regla de la atenuación

Como se ha mencionado, las lógicas relevantes son un subconjunto de las lógicas subestructurales, ya que pueden caracterizarse a partir de la crítica a la *regla estructural de la atenuación* y los efectos que tiene su abandono en las reglas operacionales: "Relevant Logic is the result of rejecting the rule of weakening in **LK**.

[44] El símbolo "⊢" tiene un segundo uso: cuando aparece con un subíndice quiere decir que la expresión que sigue es un teorema en el sistema al que se refiere el subíndice. Por ejemplo: $\vdash_{LK} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ quiere decir que el secuente $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ es un teorema de **LK**.

This rejection is motivated by the behavior of the material conditional ⊃ in **LK**, and also the behavior of ⊢" (Terrés 2019, p.80).

Las *reglas estructurales* del cálculo de secuentes son:

Atenuación

Izquierda

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}$$

Derecha

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

Intercambio

Izquierda

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Pi}$$

Derecha

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Pi}$$

Contracción

Izquierda

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}$$

Derecha

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

Corte

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Pi \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}$$

El abandono de la regla de la atenuación permite expresar formalmente la idea de que no se deben introducir en las premisas fórmulas irrelevantes para la conclusión y viceversa. Lo que se pretende captar es que al decir que "B se sigue de A", B dependa de A en el sentido de que se use A como hipótesis para derivar B. Por este motivo se rechaza la regla de la atenuación. Tal como explica Paoli (2002, p. 22):

> Weakening says that if A follows from the assumptions in Γ, then it follows from any aggregate of assumptions Γ' which includes Γ. But generally speaking, some of the hypotheses in Γ' will not be used in deriving A — worse than that, they may be totally irrelevant to whether A holds or not.

En esencia, la regla de la atenuación permite introducir información irrelevante en las premisas y en la conclusión de la derivación. Esto genera derivaciones que desde el relevantismo se consideran inaceptables ya que dan lugar a las paradojas del condicional. Por consiguiente, para que la relación de derivación sea relevante se exige que del secuente "Γ ⊢ Δ" no se pueda derivar (i) "A, Γ ⊢ Δ", siendo A irrelevante para Δ; ni (ii) "Γ ⊢ Δ, A", siendo A irrelevante para Γ.

4.4.3. Disolución de la ambigüedad expresiva de las conectivas clásicas

En este apartado nos fijamos en las reglas operacionales. El punto que nos interesa destacar estriba en que con las conectivas clásicas de L_{LK} no es posible dar cuenta de la idea de relevancia lógica. Esto se debe a que las conectivas clásicas entrañan una ambigüedad expresiva en tanto que engloban un significado extensional y otro significado intensional: "Structural rules flatten this expressive wealth by reducing the defining rules of some connectives to the defining rules of other ones" (Paoli 2002, p.15).

La estrategia subestructuralista pretende disipar la ambigüedad puesto que con el significado intensional de las conectivas podemos expresar la idea de relevancia lógica. Si hacemos la distinción, entonces cada conectiva expresa lo siguiente (Terrés 2019, p.98)[45]:

i. El condicional intensional: "si A entonces B" se sostiene sii dado A afirmamos B.
ii. El condicional extensional: "si A entonces B" se sostiene sii negamos A o afirmamos B.
iii. La conjunción intensional: a) la "negación de A y B" se sostiene sii A y B son incompatibles. b) "Si A y B entonces C" se sostiene sii se necesitan tanto A como B para C.
iv. La conjunción extensional: a) la "negación de A y B" se sostiene sii negamos A o negamos B. b) "Si A y B entonces C" se sostiene sii "si A entonces C" o "si B entonces C".
v. La disyunción intensional: "A o B" se sostiene sii la "negación de A implica B" y viceversa.
vi. La disyunción extensional: "A o B" se sostiene sii afirmamos A o afirmamos B.

[45] Para nuestros objetivos no es necesario desambiguar el significado de la negación.

A la conjunción intensional se la denomina *fusión* y a la disyunción intensional se la denomina *fisión*. Adoptamos la notación de Paoli (2007) y Terrés (2019)[46]:

	Extensional	Intensional
Conjunción	$\sqcap$	$\times$
Disyunción	$\sqcup$	$\oplus$
Condicional	$\rightsquigarrow$	$\rightarrow$

Ahora bien, necesitamos justificar esta distinción. La justificación se entiende de forma clara con el cálculo de secuentes:

i. En **LK** las reglas operacionales intensionales y extensionales son equivalentes. De ahí su ambigüedad expresiva. Se pueden derivar unas de otras (y viceversa) haciendo uso de las reglas estructurales. Esto quiere decir que, si las reglas estructurales están vigentes, entonces las conectivas extensionales e intensionales colapsan en las conectivas clásicas.

ii. Si restringimos o abandonamos una o varias de las reglas estructurales, entonces las conectivas extensionales e intensionales no colapsarían en las conectivas clásicas. En el caso de las lógicas relevantes nos interesan los efectos sobre las reglas operacionales del abandono de la regla estructural de la atenuación.

Las reglas operacionales, diferenciadas entre conectivas extensionales e intencionales, son las siguientes (mantenemos la negación clásica):

Conjunción	Extensional	Intensional (fusión)
Derecha	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \sqcap B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Pi \vdash \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, A \times B}$
Izquierda	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \sqcap B, \Gamma \vdash \Delta}$ $\dfrac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \sqcap B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \times B, \Gamma \vdash \Delta}$

[46] Solo cambiamos el símbolo de la fisión para no confundirlo con el oprdor aritmético de la suma que empelaremos abundantemente en la tercera parte de la tesis.

Disyunción	Extensional	Intensional (fisión)
Derecha	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \sqcup B}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \sqcup B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B}$
Izquierda	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \sqcup B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Pi \vdash \Sigma}{A \oplus B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}$

Condicional	Extensional	Intensional
Derecha	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightsquigarrow B}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightsquigarrow B}$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}$
Izquierda	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightsquigarrow B, \Gamma \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Pi \vdash \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}$

Negación	Clásica
Derecha	$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
Izquierda	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$

Podemos observar que una conectiva puede tener el mismo comportamiento *operacional* en dos sistemas lógicos diferentes, pero distinto significado *global* debido a las distintas reglas estructurales de cada sistema (Paoli, 2007, p.557). El significado global se define por la relación de la constante con las demás constantes del lenguaje en cuestión[47]. Por este motivo, cuando faltan las reglas de la atenuación, el condicional intensional no valida las PCM y PCE.

Dadas estas reglas, podemos caracterizar formalmente las lógicas relevantes. Tomamos el caso del sistema **R** sin las leyes de distribución definido mediante cálculo

[47] Esto le permite afirmar a Paoli (2007, p.557) frente a Quine que no se trata de constantes distintas, puesto que se mantiene el mismo significado operacional.

de secuentes tipo Gentzen. Paoli denomina a este cálculo $\mathbf{LR}^{ND}$[48]. Seguimos a Paoli[49] (2002, p.51) en la presentación de $\mathbf{LR}^{ND}$:

- Al lenguaje L_{RND} pertenecen un conjunto numerable de variables proposicionales VAR(L_{RND}), un conjunto de fórmulas bien formadas FOR(L_{RND}), las conectivas binarias $\sqcap$, $\times$, $\sqcup$, $+$, $\rightsquigarrow$, $\rightarrow$, la conectiva unaria $\neg$ y las constantes proposicionales (conectivas cero-arias) 1,0.
- $A \vdash A$ es un axioma.
- Las reglas estructurales son la regla del corte, las reglas del intercambio y las reglas de contracción.
- Las reglas operacionales son las reglas de la negación clásica, las reglas de la fusión, las reglas de la fisión, las reglas de la conjunción extensional, las reglas de la disyunción extensional y las reglas de los condicionales intensional y extensional. Además, hay que añadir las siguientes reglas para las constantes de la verdad y la falsedad:

1		**0**	
Derecha	$\vdash 1$	Derecha	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, 0}$
Izquierda	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{1, \Gamma \vdash \Delta}$	Izquierda	$0 \vdash$

El cálculo de secuentes permite una comprensión sencilla de los sistemas subestructurales. Dado que lo quenos interesa en este punto es la aclaración conceptual, hemos empleado la caracerización habitual del cálculo de secuentes tipo Gentzen. Ahora bien, Restall (2000) propuso una sistematización de las lógicas subestructurales que tiene la ventaja de ser más eficaz en la presentación de las reglas. Esto permite sistematizar de un modo más económico las distintas familias subestructurales. Véase el apéndice 1 para los aspectos lógico-técnicos de la caracterización de los sistemas subestructurales en el cálculo de secuentes tipo Restall y el lugar de las lógicas relevantes.

[48] L hace referencia al cálculo de secuentes, R al sistema relevante y NR a la condición de ser no distributivo.

[49] Paoli (2002, pp.52-54) demuestra que en $\mathbf{LR}^{ND}$ se cumple la condición que exige que el antecedente y el consecuente compartan una variable proposicional para ser relevante.

5. PLANES SEMÁNTICOS PARA LAS LÓGICAS RELEVANTES

Las lógicas relevantes surgieron como sistemas deductivos. Al igual que en el caso de las lógicas modales, la tarea de desarrollar una semántica adecuada fue un resultado posterior. El caso de las lógicas relevantes muestra una mayor problematicidad dado que se han propuesto diversos planes semánticos para aclarar formalmente el significado de tales sistemas. El análisis de la discusión cruzada entre los diversos planes nos conduce directamente al análisis de los conceptos fundamentales de la semántica formal necesarios para la idea de relevancia lógica. Esto entronca con uno de nuestros focos de interés, a saber, la semántica formal como núcleo de la lógica. En este capítulo nos proponemos defender el plan que nos resulta más adecuado a la idea de relevancia lógica, lo cual nos servirá como punto de apoyo básico para desarrollar nuestra concepción de la semántica formal desde el punto de vista convencionalista en la tercera parte de la tesis.

5.1. ANÁLISIS SEMÁNTICO

5.1.1. Plan australiano

El *plan australiano* es un enfoque semántico para las lógicas relevantes que asume la teoría clásica de la validez. Este enfoque se caracteriza por la *semántica Routley* (Routley y Routley 1972) a la cual se le añade una *relación ternaria* de accesibilidad para definir el comportamiento del condicional (Routley y Meyer 1973).

La *semántica Routley* apareció en Routley y Routley (1972) para ofrecer una semántica a la lógica del *First Degree Entailment* (**FDE**). Routley y Routley (1972, p.337) entienden los *casos* en los que se conserva la verdad como *set-ups* (que denominaremos "configuraciones"), los cuales son conjuntos de fórmulas bien formadas. Las condiciones de verdad de las conectivas se dan en virtud de la pertenencia a las configuraciones. En las configuraciones de la *semántica Routley* es posible prescindir de la restricción de consistencia de tal modo que se mantiene el comportamiento clásico de la negación pero sobre configuraciones que pueden ser inconsistentes e incompletas. Estas configuraciones se interpretan habitualmente como *situaciones* y se diferencian de los *mundos posibles* en tanto que estos últimos son por definición consistentes y completos.

El centro del análisis reside en la negación. La regla de la negación se puede formular de este modo para configuraciones consistentes:

$\exists x$' tal que $\neg A \in x$ sii $A \notin x$' y $x = x$', donde x es una configuración.

El objetivo de esta forulación de la definición de la negación clásica es hacer explícita la condición de consistencia $x = x$'. No entramos en la discusión sobre los detalles de la relación de identidad, simplemente aclaramos que se encuentra en el metalenguaje y asumimos un comportamento clásico. Si las configuraciones x y x'son idénticas, entonces esta configuración es consistente y tiene un comportamiento clásico. Con esta versión de la definición de la negación podemos ver de forma sencilla el comportamiento de la negación en el plan australiano mediante la restricción de la condición de consistencia. Routley y Routley (1972, p.337) señalan que si omitimos la restricción de consistencia $x = x$', entonces A y ¬A pueden pertenecer ambas a x, y A y ¬A pueden no pertenecer a x. El hecho de que A pertenezca a x no impide que ¬A también pueda y el hecho de que ¬A no pertenezca a x no exige que A deba hacerlo. Tales configuraciones son situaciones que en adelante simbolizaremos con la letra "s".

Lo específico de la *semántica Routley* es la definición de la regla de la negación con el operador "*". La *estrella Routley* es una función tal que s* es la imagen de s. La idea consiste en que ¬A es falsa en s sii A es verdadera en s*. El valor de verdad de ¬A en s depende del valor de A en s*. El valor de A en s es independiente del valor de A en s*, por este motivo A y ¬A pueden ser ambas verdaderas en la misma situación s. A s* pertenece toda fórmula A tal que $\neg A \notin s$. Además, $s = s$**. Si una configuración $x = x$*, entonces x es un *mundo posible* porque es consistente. La regla de la negación es la siguiente: $\neg A \in s$ sii $A \notin s$*.

Dado un lenguaje L ≔ <FOR-A, CON, FBF> tal que FOR-A es un conjunto de fórmulas atómicas, CON es el conjunto de conectivas {¬, ∧, ∨, →} y FBF es el conjunto de fórmulas bien formadas[50], a partir de FOR-A y CON; la *semántica Routley* puede expresarse en la estructura <S, @, *, v> tal que

i. $S \neq \emptyset$ es el conjunto de las configuraciones.
ii. $@ \in S$ es el mundo actual o la situación base, la cual es completa y consistente.

[50] la generación de fórmulas se define inductivamente del modo habitual.

iii. * es una función de S a S tal que

- $@^* = @$
- $\forall s \in S\ (s = s^{**})$

iv. *v* es una función de valuación de *L* en <S, @, *> tal que a cada par compuesto por un elemento de S y una fórmula A ∈ FOR-A, *v* le asigna un valor de verdad: $v_s(A) \in \{0, 1\}$[51]. La asignación de valores de los elementos de FBF en los elementos de S dependen de las condiciones de verdad de las conectivas.

Para caracterizar las lógicas relevantes en el *plan australiano* debemos añadir a la *semántica Routley* una *relación ternaria* R en S con el objetivo de determinar el comportamiento del condicional. Se trata de una relación de accesibilidad entre *situaciones*. La semántica de la relación ternaria apareció en Routley y Meyer (1973, 1972a y 1972b).

Con la semántica del *plan australiano* se definió una variedad de sistemas dentro de la familia de las lógicas relevantes distintos de las lógicas principales **T**, **R** y **E** de Anderson y Belnap (1975). Se pueden caracterizar dichos sistemas a partir del sistema básico **B**. Así, pues, las distintas lógicas relevantes se definen como extensiones de **B** a partir de la introducción de restricciones en la relación ternaria[52] (Priest y Sylvan 1992, p.217).

A continuación, caracterizamos **B** en la *semántica Routley* con la relación ternaria siguiendo la versión simplificada[53] de Priest y Sylvan (1992). Una interpretación para *L* es una estructura <S, @, *, R, *v*> donde S, @, * y *v* son iguales que en la *semántica Routley*, pero además:

[51] En la formulación original de Routley y Routley (1972, p.347) los elementos de S son conjuntos de configuraciones atómicas. Las configuraciones son conjuntos de fórmulas bien formadas. Por tanto, no hay una función de valuación *v*, sino reglas para generar configuraciones compuestas. Por consiguiente, las reglas semánticas de sostenibilidad dependen de la relación de pertenencia a las configuraciones.

[52] La idea es análoga a la caracterización de las lógicas modales como extensiones del sistema **K** a partir de restricciones en la relación binaria de accesibilidad entre mundos posibles (Routley y Meyer 1973, p.199).

[53] Es una versión más simple de la relación ternaria (porque elimina condiciones sobre ella) pero equivalente a la original de Routley y Meyer (1973, 1972a y 1972b).

i. R es una relación ternaria sobre S: $R \subseteq S \times S \times S$[54].

ii. *v* es una función de FBF × S a {0, 1} tal que para cualesquiera fórmulas A, B y cualquier situación *s* cumple las siguientes reglas:

- $v_s(A \wedge B) = 1$ sii $v_s(A) = 1$ y $v_s(B) = 1$, en cualquier otro caso $v_s(A \wedge B) = 0$.
- $v_s(A \vee B) = 1$ sii $v_s(A) = 1$ o $v_s(B) = 1$, en cualquier otro caso $v_s(A \vee B) = 0$.
- $v_s(\neg A) = 1$ sii $v_{s*}(A) = 0$, en cualquier otro caso $v_s(\neg A) = 0$.
- $v_@(A \rightarrow B) = 1$ sii $\forall x \in S$ (si $v_x(A) = 1$ entonces $v_x(B) = 1$).
- $\forall x \in S$ tal que $x \neq @$: $v_x(A \rightarrow B) = 1$ sii $\forall yz \in S$ (si $Rxyz$ entonces (si $v_y(A) = 1$ entonces $v_z(B) = 1$)).

Priest y Sylvan (1992, p.220) establecen una condición sobre R (que Priest 2008, p.189) denomina "condición de normalidad") en virtud de la cual las dos reglas semánticas del condicional colapsan en una sola. La *condición de normalidad* es esta: $R@xy$ sii $x = y$. La regla unificada del condicional es esta:

$v_@(A \rightarrow B) = 1$ sii $\forall xy \in S$ tal que $x = y$ (si $v_x(A) = 1$ entonces $v_y(B) = 1$)).

La relación de consecuencia se define en una condición semántica de conservación de la verdad en @: para toda estructura <S, @, *, R, *v*>,

$\Gamma \vDash A$ sii (si $\forall B \in \Gamma$ ($v_@(B) = 1$), entonces $v_@(A) = 1$).

Para el análisis semántico de las extensiones de **B** en el plan australiano y la caracterización del sistema **B** cuantificado véase el apéndice 2.

5.1.2. Plan americano

El *plan americano* rechaza el uso del operador estrella y mantiene la exigencia extensionalista o veritativo-funcional clásica, según la cual el valor de las conectivas depende del valor de las fórmulas conectadas. Sin embargo, añade la posibilidad de asignar cuatro valores a una fórmula. Dado que el *plan americano* considera que el carácter veritativo-funcional de las conectivas es irrenunciable, recurre a una semántica multivalorada para invalidar las inferencias ilegítimas desde la perspectiva de la

[54] En este contexto este símbolo "×" expresa el producto cartesiano conjuntista y no la fusión.

relevancia. En concreto, tal como explican Meyer y Martin (1986, p.307), el *plan americano* asume una semántica tetra-valorada en la que los valores de verdad pueden ser "verdadero", "falso", "verdadero y falso" (*both* o "b") y "ni verdadero ni falso" (*neither* o "n").

Routley (1984) definió en el enfoque americano los sistemas **B**, **R**, **E** y **T**. Sin embargo, en esta sección nos centramos en **FDE**, el cual es la referencia principal de Belnap y Dunn (1981). De hecho, Dunn (1976, p.167) llega a declarar que "In all frankness I have not had much luck in extending my framework [el *plan americano*] to the whole of systems **E** or **R**". Quien lo consiguió fue Routley (1984), uno de los fundadores del *plan australiano*.

La estrategia que siguieron Anderson y Belnap (1975) para caracterizar el comportamiento de los sistemas lógicos relevantes fue ir aumentando grados de anidamiento (concatenación unas detro de otras) del entrañamiento (*entailment*). El entrañamiento de primer grado (*First Degree Entailment*, **FDE**) se refiere al comportamiento de la negación, la conjunción y la disyunción. Posteriormente incorporaron la conectiva "→" para obtener **R** y **E**.

FDE es una lógica relevante aunque no sea habitual incluirla dentro de dicha familia por no usar el condicional. No obstante, permite mostrar el fallo del Silogismo Disyuntivo. Dado un lenguaje $L \coloneqq$ <FOR-A, CON, FBF>, podemos definir **FDE** en el *plan americano* con una estructura $<2^V$, D, $\{v_c; c \in$ CON$\}>$, tal que:

i. V $\coloneqq \{0, 1\}$ es el conjunto clásico de los valores de verdad, luego $2^V = \{\emptyset, 0, 1, \{0, 1\}\} = \{n, 0, 1, b\}$ es el conjunto de los valores de verdad de la semántica tetra-valorada.
ii. D $\coloneqq \{1, \{0, 1\}\}$ es el conjunto de los valores que se conservan en las inferencias válidas (o *valores designados*).
iii. v es una función de valuación de FOR-A a 2^V. v_c asigna valores a los elementos de FBF según las condiciones de verdad de los elementos de CON con los que están formados:

$v_{\neg}$	
1	0
b	b
n	n
0	1

$v_{\wedge}$	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	b	b	0	0
n	n	0	n	0
0	0	0	0	0

$v_{\vee}$	1	b	n	0
1	1	1	1	1
b	1	b	1	b
n	1	1	n	n
0	1	b	n	0

El *plan americano* respeta la noción clásica de validez: A es consecuencia de un conjunto de premisas Γ sii a A no se le asigna el valor "falso" ni el valor "ni verdadero ni falso" cuando las premisas tienen el valor "verdadero" o el valor "verdadero y falso". De este modo podemos establecer que $\Gamma \vDash A$ sii no es posible que haya una interpretación *v* por la cual para cualquier $B \in \Gamma$: $v(B) \in D$ y $v(A) \notin D$. Dado que los dos valores de D representan la verdad, se puede decir que la validez se define en términos de conservación de la verdad.

Dada la tabla de la negación de **FDE** en el *plan americano* observamos que $v_{\neg}(A) \in D$ sii A = 0 o A = b y en cualquier otro caso $v_{\neg}(A) \notin D$. Por tanto, la correspondencia de los planes americano y australiano respecto a la negación se puede esquematizar de la siguiente forma (Meyer y Martin 1986, p. 308):

Plan americano		Plan australiano		
	A		A	A*
Verdadero	{1}	A	1	1
Falso	{0}	¬A	0	0
Verdadero y falso	{1, 0}	A ¬A	1	0
Ni verdadero ni falso	{Ø}		0	1

5.2. COMPARACIÓN CRÍTICA

5.2.1. Defensa americana

Meyer y Martin (1986, p.329) califican a Dunn como "first author of the American Plan" y explican que "this plan is due to Dunn, and has been discussed by him and Belnap in several articles". Siguiendo a Meyer y Martin (1986), en esta sección nos fijamos en Dunn (1976) y en Belnap y Dunn (1981). Dunn (1976) propuso una semántica tetra-valuada para un sistema relevante sin condicional: **FDE**. Belnap y Dunn (1981) discuten la admisibilidad del Silogismo Disyuntivo en las lógicas relevantes en el plan americano.

Belnap y Dunn (1981, p.339) distinguen dos proyectos distintos relativos a las lógicas relevantes. En primer lugar denominan "relevance logician" a aquellos que pretenden definir la idea de relevancia a partir de mecanismos lógico-formales. En segundo lugar, denominan "relevantist" a aquellos que rechazan la lógica clásica en favor de considerar la inferencia relevante como la única inferencia. La postura de Belnap y Dunn (1981, p.340) es la siguiente: "we propose to defend the claim of the relevance logician, and to investigate the claim of the relevantist".

Dunn (1976, p.154) explica que con la semántica del plan americano pretende dar cuenta de una doble intuición relativa al significado de las conectivas:

a) Por un lado, en sentido amplio admite que el significado de los enunciados compuestos depende de las condiciones veritativas que le corresponden a las conectivas que contiene.
b) Por otro lado, rechaza que las condiciones veritativas de cualquier contradicción o tautología sean exactamente las mismas.

Con la intuición a) lo que se está asumiendo es el carácter veritativo-funcional o extensional del significado de los enunciados compuestos. Esto quiere decir que el significado del enunciado en su conjunto depende del valor de las variables proposicionales (o fórmulas atómicas) que están siendo relacionadas por las conectivas del enunciado en cuestión. Con la intuición b) se está discutiendo la idea en virtud de la cual las tautologías y las contradicciones siempre tienen el mismo significado, a saber, ninguno[55].

La idea que Dunn discute es la siguiente: sean p = "llueve" y q = "2+2=4", establecemos que $p \wedge \neg p$ y $q \wedge \neg q$. Dada la tesis extensional y la regla semántica de la conjunción clásica, para que $p \wedge \neg p$ sea verdadero es preciso que p sea verdadero y p sea falso (de forma análoga ocurre con $q \wedge \neg q$). Por tanto, ambas son contradicciones y en la concepción estándar ambas tienen las mismas condiciones veritativas, esto es, son falsas en cualquier situación. Esto quiere decir que $p \wedge \neg p$ no hace referencia a ningún tipo de situación meteorológica y $q \wedge \neg q$ no hace referencia a ningún tipo de operación aritmética.

Sin embargo, Dunn (1976, p.154) considera que esta concepción es un error: "The question bluntly then is whether the condition that p is true and p is false is the same condition as that q is true and q is false. I think it is not". Para la tesis extensional lo determinante para el significado de la conectiva reside en los valores de verdad de los parámetros proposicionales (o fórmulas atómicas). Lo que Dunn pone en cuestión es que las reglas de valuación pueden ser diferentes incluso si se trata de contradicciones y tautologías puesto que dependen del tema del que traten en cada caso. Dado que p = "llueve" y q = "2+2=4", las situaciones que describen $p \wedge \neg p$ y $q \wedge \neg q$ son intuitivamente distintas aunque ninguna de las dos sea satisfacible. La semántica del plan americano pretende captar esta intuición: "we need modify this picture only slightly to provide a kind of extensional apparatus that allows us to distinguish contradictory propositions from one another" (Dunn 1976, p.155). El objetivo de este plan consiste en modificar el análisis semántico de tal modo que se pueda conservar el carácter extensional y, a la vez, se puedan discriminar entre diferentes enunciados contradictorios.

[55] En la tradición de la proposición 4.461 del *Tractatus* (Wittgenstein 2013).

La interpretación de Dunn (1976, p.156) se fundamenta en una *valuación de relevancia* ("relevance valuation"), la cual es una función de valuación cuyo dominio son las fórmulas extensionales y su rango son los elementos del conjunto de los valores de verdad clásicos. Así, pues, dadas las fórmulas A y B y la valuación de relevancia *v* tenemos que:

$v(\neg A)= 1$ sii $v(A)= 0$
$v(\neg A)= 0$ sii $v(A)= 1$
$v(A \wedge B)= 1$ sii $v(A)= 1$ y $v(B)= 1$
$v(A \wedge B)= 0$ sii $v(A)= 0$ o $v(B)= 0$
$v(A \vee B)= 1$ sii $v(A)= 1$ o $v(B)= 1$
$v(A \wedge B)= 0$ sii $v(A)= 0$ y $v(B)= 0$

Lo característico consiste en que es posible asignar los dos valores o ninguno a una fórmula. Por tanto, las reglas semánticas de las conectivas son condiciones de verdad y de falsedad dado que no opera la estipulación tácita según la cual si a un enunciado se le ha asignado el valor "verdadero" también es no "falso". Dunn (1976, p.158) define la noción de validez relevante a partir de la función de valuación de relevancia con la siguiente disyunción en el metalenguaje: $A \vDash B$ sii para toda valuación de relevancia *v*, $1 \notin Im_v(A)$ o $1 \in Im_v(B)$, donde $Im_v(\varphi)$ es la imagen de φ bajo *v*. La imagen de una función es su rango o campo de valores que, en este caso, son los valores de verdad que se le asignan a la fórmula en cuestión. O lo que es lo mismo, con el condicional en el metalenguaje: si $1 \in Im_v(A)$ entonces, $1 \in Im_v(B)$.

Las condiciones antedichas no contravienen al análisis semántico clásico. El mecanismo de asignar los dos valores a la vez o ninguno lo concibe intuitivamente como condiciones de verdad imposibles para las contradicciones y condiciones de no-verdad imposibles para las tautologías, respectivamente. Dunn (1976, p.158) insiste en la aclaración de que en su análisis semántico con la valuación de la relevancia no existen enunciados que no sean ni verdaderos ni falsos: "Here again I am not arguing that there are sentences which are in fact neither true nor false". La idea que pretende expresar consiste en que es posible pasar por alto ("overlook") la exigencia de asignar un valor de verdad a una subfórmula cuando se calcula el valor de la fórmula compuesta: "It is just that in working out the truth conditions for a compound sentence it is very easy to overlook the condition that an ingredient sentence have some truth

value" (Dunn 1976, p.158). Con este mecanismo Dunn pretende satisfacer su motivación inicial de diferenciar las tautologías (y las contradicciones) puesto que en el momento en el que la valuación de relevancia determine el valor que se había pasado por alto se pone de manifiesto que existen diferentes tautologías con distintos valores de verdad.

El centro de la discusión reside en las condiciones semánticas de la negación y en la validez del Silogismo disyuntivo. La discusión relativa a la negación se formula en la distinción entre la negación de *De Morgan* y la negación *booleana*. Según explican Belnap y Dunn (1981, p.343) la segunda indica que una fórmula es falsa y la primera indica que no es el caso que una fórmula sea verdadera.

Belnap y Dunn (1981, p.341) afirman que Routley y Meyer (1973) mostraron la posibilidad de introducir la negación booleana a los sistemas relevantes, la cual tiene un comportamiento diferente al de la negación habitual en tales sistemas, a saber, la de De Morgan. De este modo, interpretan la negación clásica como la booleana tal que $A \wedge \neg A \vDash B$ y $\neg A \wedge (A \vee B) \vDash B$. El hecho destacado reside en que en la axiomatización (tipo Gödel-Lemmon) de las lógicas relevantes de Meyer (1974) pueden coexistir ambas conectivas para la negación. Lo que le interesa es el condicional relevante. Ahora bien, Belnap y Dunn (1981, p.341) señalan que de dicha axiomática se deriva el principio de explosión formulado con la negación de De Morgan como teorema.

En la semántica tetra-valuada la negación de De Morgan se define del siguiente modo: si A tiene el valor b, entonces ¬A también tiene el valor b. Lo interesante consiste en que si A no tiene ningún valor, entonces ¬A tampoco tiene ningún valor. Ahora bien, la negación booleana se comporta de un modo distinto: la negación del valor b es n y viceversa. Podemos expresarlo de la siguiente manera:

De Morgan

i. $1 \in v(\neg A)$ sii $0 \in v(A)$
ii. $0 \in v(\neg A)$ sii $1 \in v(A)$

Booleana:

i. $1 \in v(\neg A)$ sii $\neg(1 \in v(A))$
ii. $0 \in v(\neg A)$ sii $\neg(0 \in v(A))$

En este sentido Belnap y Dunn (1981, p.343) interpretan a la negación de De Morgan como interna y a la booleana como externa, puesto que para la primera ¬A se lee como "A es falso" y para la segunda se lee como "no es el caso que A sea verdadero".

Si se admite la negación booleana, entonces desde la perspectiva de la lógica clásica lo que los relevantistas llevan a cabo no es solo emplear el condicional relevante, sino también una negación no clásica. Más aún, si se admite la negación booleana (incluso manteniendo la de De Morgan), entonces se sigue pudiendo derivar el principio de explosión.

No obstante, el problema principal que Belnap y Dunn (1981, p.345) observan en la admisión simultánea de las dos negaciones reside en el metalenguaje que se usa en sus condiciones semánticas. Esta caracterización no es satisfactoria dado que el problema se traslada a la negación que se está usando en el metalenguaje de las condiciones semánticas expresadas. ¿Se trata de la negación booleana o la de De Morgan? Si la negación del metalenguaje es la de De Morgan, entonces las dos negaciones (De Morgan y booleana) colapsan en una sola negación. Lo que demuestran es que $0 \in v(A)$ sii $\neg(1 \in v(A))$[56]. Si, por el contrario, la negación del metalenguaje es la booleana, entonces un "relevantista" no puede comprender el comportamiento de tal negación. Dicho de otro modo: desde la idea intuitiva de la relevancia lógica no se puede explicar el comportamiento de su negación. A partir de la irresolubilidad de este dilema, Belnap y Dunn (1981, p.345) defienden la razonabilidad de admitir solo una negación, a saber, la de De Morgan. Ahora bien, no les basta con la plausibilidad de defender el mantenimiento de una sola negación, sino que pretenden justificar particularmente el uso de la negación de De Morgan apelando a situaciones de información inconsistente.

Lo que se muestra con $0 \in v(A)$ sii $\neg(1 \in v(A))$ es que las condiciones semánticas al ser reinterpretadas en un metalenguaje relevante, esto es, sin emplear la negación booleana, se expresan con dos valores veritativos. No es necesario una semántica tetra-valuada si se proporciona el análisis en un metalenguaje relevante. La interpretación que Belnap y Dunn (1981, p.350) hacen de esta condición consiste en comprender que

[56] Véase la prueba en Belnap y Dunn (1981, pp.346-347).

"There is no way in a relevant metalanguage to express that a sentence A takes on, say, just the value t ["1" en nuestra notación] (and not f as well). The most that one can say is that A is at least t". Dado que la negación booleana expresa que "no es el caso que A sea verdadera" y según Belnap y Dunn en el metalenguaje relevante no disponemos de dicha negación, entonces si a A se le asigna solo el valor 1, lo que se expresa es que A es "al menos" verdadero y no que también es falso, es decir que no se le ha asignado el valor 0. Tanto $1 \in v(A)$ como $\neg(0 \in v(A))$ expresan que A es al menos verdadero y no dicen nada sobre si A es al menos falso. Los dos valores de verdad en el metalenguaje se entienden como "al menos verdadero" y "al menos falso". La condición $0 \in v(A)$ sii $\neg(1 \in v(A))$ establece que una fórmula toma el valor "al menos falso" sii es "al menos falso" que dicha fórmula sea "al menos verdadera". Esta es la peculiaridad del metalenguaje relevante de Belnap y Dunn al emplear la negación de De Morgan.

5.2.2. Defensa australiana

Al asociarse al plan australiano, los sistemas lógicos relevantes han sido objeto de un tipo de crítica consistente en defender el carácter extensional de las conectivas lógicas (Copeland 1979). Esto quiere decir que el valor veritativo de, por ejemplo, una disyunción depende del valor que tengan los disyuntos. La discusión se ha centrado específicamente en la negación de De Morgan, tal como hemos visto en la sección anterior. Las "interpretaciones extraordinarias", esto es, intensionales, son necesarias para la relevancia lógica desde la perspectiva australiana. Meyer y Martin (1986, p.305) proponen una analogía con la consistencia: del mismo modo que la consistencia absoluta[57] no puede mantenerse, la absoluta interpretación veritativo-funcional tampoco. El argumento de Meyer y Martin (1986) estriba en asumir que, del mismo modo que la consistencia, la concepción veritativo-funcional es la fundamental para las lógicas relevantes pero, a la vez, admitir ciertas interpretaciones extraordinarias que son contraintuitivas. No niegan su carácter contraintuitivo, sino que lo asumen (al igual que cierta inconsistencia): "So it is not useful to deny that there exists a logical problem for our truth-functional intuitions" (Meyer y Martin 1986, p.305).

El plan australiano es una forma de mantener la vigencia de la concepción veritativo-funcional sin renunciar a la "extraordinary interpretation" (Meyer y Martin

[57] La consistencia de todas las configuraciones, casos o mundos posibles.

1986, p.305) de las conectivas que posibilitan las condiciones de los sistemas relevantes. Con la semántica de los sistemas relevantes en el plan australiano es posible "that extraordinary interpretations do not cancel ordinary ones" (Meyer y Martin 1986, p.305). Lo característico del plan australiano es el operador estrella en virtud del cual para toda proposición *a* existe otra proposición *a**. Los defensores de la concepción extensional como Copeland (1979) lo consideran ininteligible. El plan australiano pretende mantener el carácter intuitivo de solo dos valores de verdad, ahora bien, para caracterizar los sistemas relevantes esto implica adoptar la negación de De Morgan.

La disyuntiva es la siguiente: perder el carácter intuitivo de los dos valores de verdad y asumir cuatro como el plan americano o perder el carácter intuitivo del homomorfismo de la condición semántica de la negación booleana (negar A implica que A no es el caso). Recordamos que usando índices de valuación de enunciados como en la semántica de mundos posibles y la estrella de Routley, la condición de verdad de la negación de De Morgan es la siguiente: $v_w(\neg A) = 1$ sii $v_{w*}(A) = 0$, esto es, ¬A es verdadero en el mundo *w* sii A es falso en *w**. No se trata de que la negación de De Morgan no sea clásica, sino de que para que tenga un comportamiento clásico se debe cumplir la condición de consistencia *w* = *w*'. A cambio, respecto a la intuición, la virtud se encuentra en mantener el carácter extensional de las conectivas ∨ y ∧ y, a la vez, conservar los dos valores de verdad clásicos.

La discusión se centra en el operador estrella * el cual, para Meyer y Martin, debe ser justificado tanto teórica como intuitivamente. Respecto a la justificación teórica, Meyer y Martin (1986, p.310) afirman que no ha sido posible un análisis semántico de **R** completo (no un fragmento) sin recurrir a la idea del operador estrella o a alguna noción que permita derivar de manera implícita al operador estrella, incluso en el plan americano: "seems to us an important theoretical ingredient in Relevant semantical analysis. One may re-describe its effect —one may even define it in terms of other notions— but one does not escape it".

Respecto a la justificación intuitiva Meyer y Martin (1986, p.309) recurren al lenguaje natural: "Although it is not a particle of English, it *should* be. It certainly corresponds to what one can *say* in English". Así, pues, aunque no exista una expresión correspondiente en el lenguaje natural, la idea de * debe ser expresable. La contribución de los sistemas relevantes no se restringe, para Meyer y Martin, a las reglas formales

sino que asimismo hace una aportación al modo de razonamiento informal. Con esta orientación, la idea intuitiva de * consiste en expresar que no es lo mismo afirmar A y no negar A: "At the simplest informal level, to hold that A is the case is just different from not denying that A is the case" (Meyer y Martin 1986, p.309). La regla de la doble negación no opera sobre la "no negación" de algo. No afirmar A y no afirmar ¬A no implica negar A y negar ¬A, respectivamente. El mundo estrella puede entenderse intuitivamente como la colección de enunciados que no se están negando.

La negación booleana mantiene la condición de consistencia tal que $v(\sim A) = 1$ sii $v(A) = 0$. Es posible añadir la negación booleana a sistemas como **R** sin que genere efectos irrelevantes en las demás conectivas. Más aún, esta introducción permite aclarar el enunciado A* puesto que se define como $\sim\neg A$[58] (Meyer y Martin 1986, p.312).

Meyer y Martin (1986, p.315) mantienen una concepción descriptivista en tanto que consideran que los sistemas lógicos son realizaciones de ideas filosóficas que motivan la construcción de tales sistemas. Dentro de esta comprensión defienden que la condición semántica de la negación de De Morgan permite retener intuiciones acerca del comportamiento de la negación y no establece modelos meramente matemáticos que resultan arbitrarios respecto a la negación. Ahora bien, Meyer y Martin admiten que, una vez establecido, un sistema tiene un desarrollo propio y es preciso poner en relación los nuevos elementos con las ideas motivadoras. A este respecto, Meyer y Martin (1986, p.316) proponen el ejemplo del sistema **S4** que Lewis elaboró para representar la implicación estricta y más adelante se aplicó para diversas interpretaciones filosóficas.

El argumento central de la defensa del plan australiano consiste en que supone un menoscabo mínimo respecto a la interpretación de la negación[59]. La preferencia de este menoscabo en la comprensión veritativo-funcional de la negación booleana se justifica en dos sentidos:

[58] Habitualmente "~" representa la negación de De Morgan, en este caso lo empleamos para la booleana. Empleamos esta distinción notacional solo para aclarar este aspecto conceptual. En el resto de la tesis solo se usa el símbolo "¬" cuyo significado depende de las reglas que se hayan estipulado previamente.

[59] Berto y Restall (2019) defienden la semántica de la negación en el plan australiano entendiéndola como un operador modal.

- La negación intensional no elimina las intuiciones veritativo-funcionales del resto del sistema lógico en cuestión. Meyer y Martin (1986, p.318) afirman que "truth-functional intuitions do not apply in truth-functionally deformed theories". A lo que hay que añadir que la relevancia lógica reemplaza la interpretación extensional solo en aquellos aspectos en los que estas no se corresponden con las intuiciones. Conservar el carácter veritativo-funcional es necesario para dar cuenta de las intuiciones lógicas, sin embargo, no es suficiente puesto que se incurre en las falacias de la irrelevancia: "It still does not follow that, if one has attended to the truth-functional, one has attended to all that is worth attending to in Logic." (Meyer y Martin 1986, p.319).
- Para los australianos, la negación de De Morgan y la *estrella Routley* representan un artificio matemático menor que la admisión de cuatro valores de verdad y dos valores designados tal como propone el plan americano. Lo intuitivo es que sea veritativo-funcional y no que adopte más de dos valores de verdad.

Para Meyer y Martin (1986, p.320) existen, al menos, dos problemáticas propias del plan americano. Por un lado, consideran que o los dos nuevos valores colapsan en uno solo o que carece de un vocabulario que permita dar cuenta de su propio plan semántico. Esto se debe a que el valor "ni verdadero ni falso" se reduce al valor "verdadero y falso" si admitimos el significado de la negación booleana en este plan: dada la fórmula A, ~(A = 1) y ~(A = 0). Ahora bien, si lo que se asume es la negación de De Morgan, tal como admiten Belnap y Dunn (1981), entonces no es posible expresar el valor "ni verdadero ni falso" con el vocabulario del propio plan americano. En segundo lugar, resulta arbitrario detenerse en el conjunto potencia de los dos valores de verdad tradicionales puesto que con los cuatro valores también podemos encontrar *gaps* y *gluts* que podrían solventarse con el conjunto potencia del conjunto potencia del conjunto de los dos valores de verdad tradicionales (de lo cual obtendríamos 16 valores de verdad) y así sucesivamente.

En definitiva, Meyer y Martin comprenden que no existe una situación prefecta. Los planes semánticos para los sistemas relevantes suponen la introducción de elementos técnicos contraintuitivos que se admiten para evitar fallos mayores relativos a la irrelevancia: "the Relevant semantical plans are not something that we should welcome. They are something that we should accept grudgingly, as the best that our

Regulative Logical Ideals can do for us when confusion or ignorance strikes" (Meyer y Martin 1986, p.320).

Es importante remarcar que Meyer y Martin (1986, p.318) mantienen una concepción descriptivista que recurre a intuiciones pre-lógicas, las reglas de las cuales pueden representarse con un comportamiento clásico. Es el sistema clásico el que falla al representar algunos aspectos relacionados con la relevancia, no obstante, la lógica relevante no modifica ninguna de las intuiciones prelógicas y en este sentido los sistemas relevantes siguen siendo clásicos: "But it is overstating the case, both in assault and in rebuttal, to suppose that an overhaul of what previously passed for our logical intuitions is in prospect. (…) if Relevant logics are seriously non-Classical, then we are monkeys' uncles". Debemos aclarar que entienden por "lógica no clásica" a aquella que modifica las intuiciones prelógicas, lo cual responde a un criterio conceptual alejado de nuestro criterio formal (supra §3).

En este sentido Meyer y Martin (1986, p.320) consideran que el plan australiano (y también el americano) debe comprenderse a partir de las intuiciones prelógicas y no desde su propio análisis técnico semántico. Esto quiere decir que lo que se defiende es que la comprensión de la negación de De Morgan depende del uso del "no" del lenguaje natural (ellos apelan al inglés) y no del análisis semántico anómalo que proponen para su funcionamiento formal. "If one persists in taking DeMorgan ¬ as a preferred formal counterpart of English 'not', one had better think that it has a root semantical sense which is just the ordinary one, not dependent on the extraordinary machinery" (Meyer y Martin 1986, p.320).

5.3. PLAN ESCOCÉS

5.3.1. Noción relevante de validez

Read (1988) propuso el *plan escocés* como enfoque semántico para la lógica relevante. Este enfoque entiende que la *teoría clásica de la validez* incurre en "the same fundamental mistake and misconception" (Read 1988, p.136) que los planes americano y australiano. Tal como señala Routley (1984, p.133) "Nor, for that matter, should the differences between the Australian and the American plans be exaggerated". El centro de su disputa es el comportamiento de la negación, cuando la cuestión de importancia es la relación de consecuencia. Podemos condensar la crítica de Read (1988, pp.34-35) a la

teoría clásica de la validez estableciendo que estas tres tesis no pueden mantenerse a la vez:

i. La condición de que un argumento no puede ser válido si sus premisas son verdaderas y su conclusión es falsa, es necesaria.
ii. La condición de que un argumento no puede ser válido si sus premisas son verdaderas y su conclusión es falsa, es suficiente.
iii. La validez de la consecuencia y la verdad del condicional se encuentran intrínsecamente ligados por el teorema de deducción.

Si las tres tesis se mantienen a la vez, entonces obtenemos que el condicional es veritativo-funcional ya que estas inferencias serían válidas: "$A \vDash B \supset A$", "$\neg A \vDash A \supset B$" y "$A, \neg B \vDash \neg(A \supset B)$". No obstante, esto no se puede aceptar ya que el resultado sería el condicional material, el cual trae consigo las paradojas de la irrelevancia. El enfoque de Read rechaza la segunda tesis, ya que desde la relevancia se considera que no es una condición suficiente. Lo que se propone para una condición suficiente de validez es una modificación de la teoría clásica de la validez, lo cual conlleva una alteración de las conectivas. Es importante destacar que la primera y la tercera tesis se mantienen. Para que la condición según la cual *un argumento no puede ser válido si sus premisas son verdaderas y su conclusión falsa* sea suficiente y no solo necesaria, es preciso alterar la forma en la que se combinan las premisas y la conclusión. La propuesta de Read recurre a la conjunción intensional o fusión[60]. El error de la teoría clásica reside en el uso de la conjunción extensional: "That intensional sense, fusion, provides the correct combination of true premises and false conclusion whose impossibility yields a necessary and sufficient condition for validity" (Read 1988, p.50).

En síntesis, para el *plan escocés* la noción de validez sigue teniendo la misma formulación: $\Gamma \vDash A$ sii no es posible que para cualquier $B \in \Gamma$: B sea verdadero y A sea falso. La diferencia radica en que la teoría clásica entiende el "y" del metalenguaje como la conjunción extensional y la teoría relevante lo entiende que como la fusión:

- Versión *clásica*: $\Gamma \vDash A$ sii no es posible para todo $B \in \Gamma$: B sea verdadero $\wedge$ A sea falso.

[60] Véanse las reglas de la fusión en §4.4.3.

– Versión *relevante*: Γ ⊨ A sii no es posible que para cualquier B ∈ Γ: B sea verdadero × A sea falso.

Tal como expresa Read (1988, p.147) "The impossibility of true premises and false conclusion does not suffice for validity. What is needed is the impossibility of true premises fuse false conclusion". Con la fusión conseguimos dotar a la relevancia lógica de un sentido apropiado: B es consecuencia de A sii "A × B", de tal modo que no puede darse que A sea verdadero y B falso.

Puede decirse que A es relevante para B si no pueden ser verdaderos "A fusión ¬B" ni "B fusión ¬A". Lo cual quiere decir que B es consecuencia de A sii A es relevante para B.

> Fusion binds two propositions together in such a way that one is assured of their mutual relevance in deriving any consequence from the fused conjunction, as in the Deduction Theorem or in the Relevant Account of Validity. Whatever 'A × B' entails needs both A and B in its derivation (Read 1988, p.134).

La fusión permite describir la relevancia de forma más adecuada. Por este motivo Read (1988, p.134) explica que con la fusión conseguimos tres características importantes: define de forma correcta las propiedades formales de una relación lógica entre enunciados, aporta un concepto correcto de uso de las premisas en la derivación (*derivational utility*) y excluye la posibilidad de que una contradicción sea relevante para cualquier enunciado aleatorio. Estas son, en síntesis, las ventajas del enfoque escocés. Respecto a los planes americano y australiano, por un lado, recoge de modo más natural la idea de relevancia lógica ya que los anteriores planes ofrecen una semántica alejada de la idea informal de relevancia y extraña respecto a las formulaciones sintácticas más habituales (Read 1988, pp.142-143). Por otro lado, el *plan escocés* define una relación de consecuencia necesaria y suficiente (a diferencia de la teoría clásica que no es suficiente), ya que con la fusión "two propositions are logically relevant if the fusion of one with the contradictory of the other cannot both be true" (Read 1988, p.134). Según propone Read (1988, p.136), este enfoque proporciona "la Lógica" basada en el *plan relevante*, que es la *única lógica correcta*.

Desde la perspectiva de este plan, usar modelos clásicos para representar un razonamiento que no lo es, es una tarea imposible. En el caso de la lógica relevante, Read (2006, p.7) expresa que "Relevance logicians are interpreted as concerned with

truth-preservation in arcane situations, situations which in the interesting cases —that is, the cases where their account of validity differs from that in classical logic— turn out to be impossible". Para que la preservación de la verdad en lógicas paraconsistentes[61] no genere problemas, una de estas tres tesis debe ser afirmada:

i. Estos sistemas no son verdaderas lógicas, por tanto, las lógicas relevantes principales no son verdaderas lógicas.
ii. Se deben aceptar los mundos imposibles o situaciones inconsistentes como las *situaciones* del *plan australiano*.
iii. Se debe abandonar el metalenguaje clásico para caracterizar la semántica de la lógica relevante.

La primera tesis es inaceptable puesto que las lógicas relevantes pueden evitar las PCM y las PCE[62]. La segunda tesis es inaceptable por incoherente. La postura de Read se orienta a afirmar la tercera de estas tesis. Asimismo, al usar un metalenguaje se privilegia una lógica. Si se usa la lógica clásica como metalenguaje para caracterizar la semántica de la lógica relevante, entonces se tiene que usar una condición *ad hoc* añadida a la condición de preservación de la verdad, lo cual es incoherente con el criterio intuitivo de validez. Con el *plan escocés* la preservación de la verdad y la relevancia lógica se subsumen en una misma condición. En definitiva, podemos distinguir tres problemas en los que incurre el uso del metalenguaje clásico que la noción relevante de consecuencia solventa:

i. Se privilegia la lógica que se usa en el metalenguaje.
ii. Se deben introducir nociones contraituitivas como los mundos imposibles del plan australiano o los cuatro valores de verdad del plan americano para representar un razonamiento relevante.
iii. La relevancia lógica es un añadido de naturaleza distinta a la relación de consecuencia. La relevancia debe añadirse a la conservación de la verdad.

[61] Las lógicas paraconsistentes son aquellas en las que falla el principio de explosión. Este principio es una de las paradojas del condicional material, de modo que las lógicas relevantes son lógicas paraconsistentes. Para que no se dé la explosión deductiva, se tiene que asumir cierta inconsistencia controlada.

[62] No se incurre en petición de principio si se distinguen dos aspectos: la relevancia lógica como idea intuitiva y las paradojas del condicional como los efectos de no captar dicha idea.

El segundo punto es un problema para el descriptivismo, pero no para el convencionalismo ya que las situaciones no serían nada más que índices de valuación de fórmulas y no partes reales de mundos inconsistentes e incompletas. Para la concepción convencionalista el último punto es el más problemático, puesto que se debe apelar a motivos más allá de las estipulaciones formales. En ese caso se tendría que explicar una realidad pre-lógica. En la noción relevante de consecuencia la relevancia está ejercida en el propio funcionamiento de la consecuencia, no son independientes. Este es el principal motivo por el cual consideramos que la noción relevante de validez del plan escocés es el plan semántico que más le conviene a la concepción convencionalista.

En definitiva, siguiendo a Read (1988, p.189) afirmamos que el condicional material no solo es erróneo, sino que por el teorema de deducción se validan inferencias contraintuitivas. El condicional material se obtiene con la perspectiva extensionalista propia de la *teoría clásica de la validez*. Ahora bien, existen cuatro vías para evitar la aparición del condicional extensional, a saber, rechazar alguna de estas asunciones:

a) El teorema de deducción.
b) La transitividad de la consecuencia.
c) La regla de la simplificación.
d) La regla de la adjunción.

El problema reside en que las cuatro afirmaciones son intuitivas, pero asumidas en conjunto generan efectos contraintuitivos. Por este motivo Read sugiere una quinta vía refiriéndose a una ambigüedad expresiva de la conjunción. El planteamiento es el siguiente:

- Se acepta que de (i) la imposibilidad de la verdad de las premisas se siga que (ii) es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.
- Se acepta que de (ii) la imposibilidad de que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa se sigua que (iii) las premisas implican a la conclusión.
- Pero no se acepta que de (i) la imposibilidad de la verdad de las premisas se siga que (iii) las premisas implican a la conclusión.

Este fallo de la transitividad no depende de un cambio en la definición de la relación de consecuencia en términos de conservación de la verdad, sino del uso de una conjunción no veritativo-funcional en el término medio del argumento: (ii) la

imposibilidad de que las premisas sean verdaderas "y" la conclusión falsa. Por consiguiente, con el uso de la conjunción intensional cambia el sentido de las tesis a) - d). Así, si empleamos la conjunción intensional en el teorema de deducción lo que obtenemos es un condicional intensional. Con esta estrategia tenemos las siguientes equivalencias:

Clásico	
$\neg (A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
$\neg (A \wedge B)$	$A \supset \neg B$
$\neg A \vee B$	$A \supset B$
Intensional	
$\neg (A \times B)$	$\neg A \oplus \neg B$
$\neg (A \times B)$	$A \rightarrow \neg B$
$\neg A \oplus B$	$A \rightarrow B$

Con la conjunción intensional en la definición de validez no tenemos que de una contradicción se siga un enunciado cualquiera. Asimismo, el teorema de deducción también debe hacer uso de la conjunción intensional para no incurrir en conclusiones arbitrarias o triviales: $C \times A \vdash B$ sii $C \vdash A \rightarrow B$. No obstante, $B \nvdash A \rightarrow B$ puesto que para ello necesitamos la conjunción extensional y no es permitido con su versión intensional: $B \wedge A \vdash B$, pero $B \times A \nvdash B$. Por este motivo Read defiende el uso de la conjunción intensional tanto en el lenguaje objeto como en el metalenguaje. Con la noción relevante de validez tenemos la siguiente definición formal de relevancia lógica (Read 1988, p.133):

> A es *lógicamente relevante* para B si no es posible que sea verdadero "$(A \times \neg B) \wedge (B \times \neg A)$"

Dada la noción relevante de validez —esto es, B es consecuencia de A sii no es posible la fusión de premisas verdaderas con una conclusión falsa— tenemos que B se sigue de A si A es lógicamente relevante para B. Como puede observarse, esta definición permite conservar la idea de que la implicación es la que determina que las premisas son relevantes para la conclusión y no se añade la relevancia como una condición agregada a la noción de validez. A su vez, tiene los mismos efectos que la utilidad derivacional en tanto que lo que se deriva de $A \times B$ exige que se empleen tanto A como B.

5.3.2. Monismo: *The One True Logic*

Read (1988, §7) ofrece una caracterización semántica de la lógica relevante que denomina *plan escocés* con el objetivo de definir "the One True Logic". Frente a la lógica clásica y al uso del condicional estricto, la relevancia lógica como restricción formal permite evitar las PCM y las PCE. Esta postura monista del plan escocés exige la discusión de las propuestas de pluralismo lógico. Entre las distintas posibilidades nos ceñimos a la propuesta de la *Tesis de Tarski Generalizada* de Beall y Restall (2006) por dos motivos: (i) es la propuesta pluralista que Read (2006) discutió directamente y (ii) permite vincular fácilmente el análisis con la relevancia lógica y el plan australiano.

Tesis de Tarski Generalizada

Tomamos como referencia el concepto de pluralismo lógico desarrollado por Beall y Restall (2006). El *pluralismo lógico* alude a una tesis relativa a la consecuencia lógica: "Logical pluralism is a *pluralism* about logical consequence" (Beall y Restall 2006, p.25). Se trata de una tesis que establece que existen varias relaciones de consecuencia diferentes e igualmente legítimas. La idea del pluralismo de Beall y Restall consiste en que existe un concepto pre-teórico de consecuencia que puede ser precisado de distintas maneras a partir de diferentes casos admisibles para el concepto pre-teórico. Dicho concepto pre-teórico es una generalización de la tesis de Tarski según la cual un enunciado A es consecuencia lógica de los enunciados del conjunto Γ sii cada modelo de Γ es un modelo de A.

La base de la tesis del pluralismo lógico es la denominada *Tesis de Tarski Generalizada* (en adelante TTG): una inferencia es *válida*$_x$ sii la conclusión es verdadera en cada *caso*$_x$ donde las premisas son verdaderas (Beall y Restall 2006, p.29). Hay que destacar que nos encontramos ante una noción semántica de consecuencia puesto que dicha relación debe cumplir la condición de validez de la TTG. Dada la TTG, tenemos que la validez lógica se define en términos de conservación de la verdad en cada *caso*$_x$. Con esta noción pre-teórica podemos encontrar distintos sentidos de validez en función de los *casos* de la TTG (modelos, mundos posibles, situaciones, cosntrucciones, etc.). Desde esta base, Beall y Restall (2006 p.35) sintetizan la tesis del pluralismo lógico en cinco condiciones claras y distintas:

i. El núcleo conceptual de la idea de consecuencia lógica está expresado en la *Tesis de Tarski Generalizada*. Los distintos tipos de consecuencia deben adaptarse a esta condición de validez.
ii. Se genera una particularización de la TTG al especificar los *casos*$_x$.
iii. No toda particularización de la TTG es admisible. Se deben cumplir determinadas condiciones: debe ser necesaria, formal y normativa.
iv. A partir de una particularización que cumple las condiciones de admisibilidad se define una lógica.
v. Hay pluralismo si existe un mínimo de dos particularizaciones distintas de la TTG.

No entramos en la discusión sobre las condiciones de admisibilidad. El centro del argumento pluralista reside en afirmar que, dadas diferentes particularizaciones de la TTG, no tiene sentido establecer que solo una de ellas es la correcta. Los *casos*$_x$ de la TTG se refieren a aquello en lo que los enunciados involucrados en una inferencia deben ser verdaderos. Esto implica la especificación de las condiciones de verdad de los enunciados. Se exigen reglas semánticas para concretar las condiciones de *ser verdadero en cada caso*. Lo que la tesis del pluralismo lógico expresa es que, dada una inferencia, existen distintas versiones legítimas para determinar si es válida o inválida. Beall y Restall proponen diversas lógicas para defender la tesis del pluralismo lógico. Nosotros nos centramos en la lógica relevante.

Beall y Restall (2006, §5) analizan la *consecuencia lógica relevante* como posible particularización de la TTG tomando como referencia al *plan australiano*. En relación a la tesis del pluralismo, el primer paso es especificar los casos en los que se conserva la verdad. En la semántica del enfoque australiano la consecuencia relevante no puede comprometerse con la consistencia y la completud de los casos en los cuales se debe preservar la verdad. A dichos casos se los denomina *situaciones*[63]. La validez relevante se puede definir del siguiente modo (Beall y Restall 2006, p.53): *la inferencia de* Γ *a* A *es válida de forma relevante sii* A *es verdadera en toda situación en la que todas las premisas que pertenecen a* Γ *son verdaderas*.

[63] La interpretación filosófica del plan australiano para las lógicas relevantes mediante la semántica de situaciones la analizaremos en el siguiente capítulo (infra §6).

Beall y Restall (2006, p.55) arguyen es que no es necesario desechar la lógica clásica para poder admitir la consecuencia relevante. El hecho de que "A ∨ ¬A" sea una verdad lógica para la validez clásica pero no lo sea para la validez con situaciones no implica que una de ellas sea ilegítima racionalmente. Así, pues, validez relevante no niega a la validez clásica, simplemente establece que "A ∨ ¬A" no es verdad en todas las situaciones (ya que pueden ser inconsistentes), pero admite que "A ∨ ¬A" sí es verdad en todos los mundos posibles. La validez con situaciones usa la misma negación clásica pero en modelos con situaciones y la estrella Routley.

Rechazo de la tesis pluralista

Se puede justificar que la defensa del monismo lógico referido a la lógica relevante exige el rechazo de la idea de que la consecuencia relevante es una más entre otras igualmente admisibles. Por este motivo Read (2006) se hace cargo de objetar la tesis del pluralismo lógico defendida por Beall y Restall. Esto permite defender la tesis en virtud de la cual solo existe una lógica correcta, la cual es la relevante.

La tesis del pluralismo lógico establece que dos o más nociones de validez pueden ser aceptadas a la vez. Además, la validez se refiere a la conservación de la verdad en casos. De este modo, en una inferencia la conclusión debe ser verdadera en aquellos casos en los que las premisas también lo son. Se obtienen nociones diferentes de consecuencia lógica al especificar qué casos son aquellos sobre los que opera. A partir de una relación de consecuencia se construye una lógica.

Ante este planteamiento, la crítica de Read (2006) muestra que se trata de una concepción incoherente de la lógica. La incoherencia la observa Read en la TTG[64]. No propone una consideración contraria a la condición de preservación de la verdad, sino que considera que hay una forma correcta de entenderla que excluye a las demás. Asimismo, Read (2006, p.1) identifica el origen del error del planteamiento pluralista de Beall y Restall en el uso de la lógica clásica como metalenguaje para analizar otras lógicas como la relevante. No obstante, podemos distinguir cuatro grandes objeciones que conducen al mismo punto final:

[64] Es importante señalar que Read (2006) no discute con el libro Beall y Restall (2006), sino con los artículos Beall y Restall (2000 y 2001). Por este motivo no menciona la TTG, sino que hace referencia a la tesis (V), la cual es la TTG pero con distinta denominación. Nosotros nos referimos en todo caso a la TTG.

i. No todas las nociones de validez son igualmente correctas.
ii. Se puede encontrar un contraejemplo al pluralismo lógico identificando dos lógicas incompatibles entre sí, pero admisibles según la tesis.
iii. La noción de validez con situaciones debe admitir la existencia de mundos imposibles, los cuales son incoherentes.
iv. El metalenguaje clásico no es adecuado para expresar la relevancia lógica.

Todo ello entronca con la noción relevante de validez y permite desarrollar su comprensión. Nos centramos en los puntos primero, tercero y cuarto. En primer lugar, Read (2006, p.2) plantea el *desafío de Priest* (2001) que podemos formular como sigue:

i. Sean K_1 y K_2 dos nociones admitidas de validez.
ii. $\Gamma \vDash A$ en K_1, pero $\Gamma \nvDash A$ en K_2.
iii. Todo $B \in \Gamma$ es verdadero.
iv. ¿Es A verdadero? ¿a partir de i-iii se puede deducir la verdad de A?

"A" es verdadero o no lo es. La respuesta solo puede ser una en tanto que, por un lado, no se admiten las contradicciones: no es posible que A sea verdadera y no lo sea a la vez. De hecho, con K_2 no se sigue que A sea falsa, sino que la verdad de A no se sigue de la verdad de Γ. Por otro lado, no se admite el relativismo: la tesis del pluralismo lógico no es un relativismo respecto a la verdad, "K_1 and K_2 are accounts of validity, not of truth. As Priest notes, Beall and Restall deny that they are relativists about truth" (Read 2006, p.2). No es posible que A sea verdadera y no lo sea a la vez en función de las distintas nociones de validez empleadas. Como puede observarse, la asunción implícita del razonamiento es lo que desde nuestros parámetros denominamos monismo descriptivista: existe solo una relación de consecuencia pre-teórica.

Si K_2 estableciese que A es falso, entonces una de las dos nociones de validez es incorrecta, ya que no puede ser verdadero y falso a la vez. Dado que con K_1 podemos establecer que A es verdadera (en determinadas estructuras) y con K_2 no podemos hacerlo, entonces K_1 es más apropiada para definir una relación de consecuencia, puesto que K_2 es insuficiente para determinar la verdad de la conclusión de la misma inferencia considerada en K_1. Por tanto, no son dos nociones igualmente adecuadas de validez. El argumento no se sostiene en saber previamente qué es lo verdadero, sino en saber que algo no puede ser verdadero y no serlo a la vez. Este argumento muestra que K_2 falla en lo fundamental de la lógica, a saber, determinar que una conclusión se sigue de ciertas

premisas (Read 2006, p.2). Por tanto, no puede definirse una relación de consecuencia lógica a partir de dicha condición de validez.

El núcleo del razonamiento se encuentra en el no-relativismo de la verdad. Si partimos del *desafío de Priest*, entonces parece que la consecuencia relevante es más deficiente que la clásica ya que a partir de la misma información puede darse que clásicamente $A \vDash B$ pero relevantemente $A \nvDash B$. Si asumimos el pluralismo, lo que se está diciendo es que B es verdadero *simpliciter* pero la consecuencia relevante no es capaz de afirmar la validez de la inferencia de A a B, luego es una alternativa deficiente respecto a la noción clásica. Esto está lejos de ser la motivación de la lógica relevante. La motivación relevante no consiste en emplear lógicas incapaces de determinar la verdad de la conclusión de inferencias problemáticas desde el punto de vista de la relevancia.

En segundo lugar, para la lógica relevante *Ex falso quodlibet* no es una inferencia válida. Si asumimos que una contradicción no puede ser verdadera en ningún caso (es decir, si no aceptamos el dialeteísmo), entonces ¿cómo puede el principio de explosión ser inválido en la TTG? ¿Puede una lógica paraconsistente no dialeteísta (como los sistemas **E** y **R**) encajar en la TTG? La respuesta de Beall y Restall consiste en plantear que hay diversas formas en las que una inferencia puede fallar: "there is more than one way of going astray" (Read 2006, p.6). En el caso de las lógicas relevantes parece claro que la forma en la que una inferencia puede fallar es que las premisas no sean relevantes para la conclusión. Esto parece que salva la posición de Beall y Restall sobre la admisibilidad de la lógica relevante en la TTG.

Ahora bien, Read señala que esta argumentación implica el abandono del criterio de conservación de la verdad como criterio principal de validez. Se trataría de una "preservation of relevance" (Read 2006, p.6) añadida a la preservación de la verdad como noción de validez. Para que sea posible que una lógica paraconsistente no dialeteísta, como los sistemas relevantes principales, pueda encajar en la TTG debemos pensar en que los casos puedan ser *situaciones*, es decir, mundos que pueden ser inconsistentes e incompletos, o lo que es lo mismo, *mundos imposibles*. Para Read, el hecho de que una situación pueda ser inconsistente quiere decir que simplemente no pueden existir y no se deben de tomar en consideración. Pero son precisamente las situaciones inconsistentes e incompletas las que hacen la diferencia entre la

consecuencia clásica y la relevante. Read (2006, p.6) simplemente los descarta por incoherentes.

Insistimos en que desde nuestro planteamiento, esta problemática afecta a la posisión descriptivista. Desde la postura convencionalista los mundos imposibles son meros índices de valuación de fórmulas y no representaciones de realidades pre-teóricas. De hecho, el propio Read (2006, p.8) llama la atención sobre el hecho de que las situaciones inconsistentes o mundos imposibles pueden funcionar como meras expresiones metafóricas que permiten dar cuenta de contraejemplos para inferencias inválidas desde la perspectiva de la relevancia, visto desde el prisma semántico de la lógica clásica. Ahora bien, esto no quiere decir que el modo de razonar de la relevancia lógica asuma la existencia de situaciones inconsistentes no actuales.

En tercer lugar, y de forma conectada con el punto anterior, Read (2006, p.7) explica que el origen del error estriba en el uso de la lógica clásica como metalenguaje. Como muchas otras lógicas, la lógica relevante no contaba con una caracterización semántica. Meyer y Routley diseñaron una semántica que fuera deliberadamente clásica en el metalenguaje con el objetivo explícito de emplear los métodos de sus críticos. Ahora bien, se debe caracterizar una semántica adecuada para las lógicas relevantes. "The right response is to insist on doing one's semantics in the logic in which one believes" (Read 2006, p.10). Así, pues, con relación a la propuesta pluralista que estamos considerando, tenemos la TTG:

$\Gamma \vDash A$ sii $\forall x\ (\forall B \in \Gamma\ (x \Vdash B \Rightarrow x \Vdash A))$

donde x son los casos admisibles, entre los que no caben los mundos imposibles para Read. Si entendemos que el metalenguaje es la lógica clásica, entonces el símbolo "$\Rightarrow$" es el condicional material "$\supset$". En cambio, para la lógica relevante caben dos posibilidades: el condicional extensional y el intensional.

TTG con metalenguaje extensional: $\Gamma \vDash A$ sii $\forall x\ (\forall B \in \Gamma\ (x \Vdash B \nrightarrow x \Vdash A))$

TTG con metalenguaje intensional: $\Gamma \vDash A$ sii $\forall x\ (\forall B \in \Gamma\ (x \Vdash B \rightarrow x \Vdash A))$

La Concepción Relevante de la Validez (Read 2006, p.10) es la que hace uso del condicional intensional en el metalenguaje. Esta noción también asegura el paso de la verdad de las premisas a la verdad de la conclusión y es, según Read (2006, p.11), la

noción correcta de validez de modo que "There is one true logic, relevance logic, and it consists in rejecting classical logic, including classical semantics". El punto central consiste en formular una noción de validez en la que la condición de conservación de la verdad esté intrínsecamente vinculada con la relevancia de las premisas para la conclusión. Si se usa un metalenguaje clásico, entonces la relevancia es un añadido distinto a la conservación de la verdad, esto es, una forma en la que las inferencias pueden fallar sin tener en cuenta la conservación de la verdad. Solo con un metalenguaje relevante con conectivas intensionales es posible expresar una noción de validez en la que "the relevance of the premises to the conclusion is an integral part of truth preservation" (Read 2006, p.11). Esta es la *noción relevante de validez,* la cual es propia del *plan escocés*.

Tal como hemos ido apuntando, las primeras dos críticas de Read al pluralismo suponen una postura descriptivista. Desde nuestra perspectiva convencionalista conservamos la consideración sobre la necesidad del metalenguaje relevante para establecer una definición de consecuencia que recoja la preservación de la verdad y la relevancia de manera unificada y no como dos condiciones separadas.

5.3.3. El Silogismo Disyuntivo bajo el descriptivismo relevantista

La justificación del monismo de Read está intrínsecamente ligada a una concepción descriptivista de la lógica. Para Read (1988) la labor de la lógica como disciplina consiste en confeccionar una explicación que dé cuanta de la validez de una inferencia. Así, la validez es algo preexistente que debe ser teorizado por los lógicos. Ahora bien, asume que dicha concepción debe tener un carácter falibilista por el cual se deben lanzar hipótesis sobre el criterio de validez de un argumento y la teoría de la validez propuesta debe revisarse según las evidencias que se vayan obteniendo. Desde esta perspectiva, para Read, la noción clásica de la validez no capta la realidad de la *validez* por admitir inferencias *inválidas*, por lo que debe ser revisada[65].

Para determinar cuál es la lógica correcta (en la pretensión monista de Read) es necesario hacer explícito el criterio que se sigue. En este contexto el monismo

[65] Es importante distinguir los usos no explícitos del término validez en las consideraciones antedichas: por un lado, "validez" se refiere a la realidad pre-lógica que debe ser captada y, por otro lado, "validez" se refiere la teoría revisable que capta la realidad de las inferencias válidas.

descriptivista de Read se centra en la adecuación respecto al razonamiento intuitivo. Por lo tanto, de lo que se trata es de justificar que la relación de consecuencia relevante es la que capta dicha intuición. Se parte de la *teoría clásica de la validez* y lo que se afirma es que ésta es errónea: al no captar la idea intuitiva de relevancia se tienen como efectos las paradojas del condicional. *La teoría clásica de la validez* consiste en una condición de conservación de la verdad de las premisas a la conclusión de una inferencia. Además, las conectivas son extensionales, esto es, tienen un carácter veritativo-funcional dado que el valor semántico de las fórmulas que las contienen depende de los valores de verdad de los parámetros conectados. En esta sección nos centramos en el problema del descriptivismo relevante con relación al fallo del Silogismo Disyuntivo. La *teoría clásica de la validez* no puede escapar de, al menos, una de estas dos condiciones contraintuitivas:

i. Aceptar la inconsistencia para rechazar el principio de explosión.
ii. Aceptar PCM y PCE.

Esto quiere decir que la lógica clásica no es una lógica alternativa, sino errónea respecto al razonamiento intuitivo. Por este motivo, centramos la atención en el principio de explosión y, por tanto, también en el Silogismo Disyuntivo. El resultado de apostar por la relevancia en lógica no es otro que la invalidez de determinadas inferencias que son válidas en lógica clásica. Tomamos el caso del Silogismo Disyuntivo o *Modus tollendo ponens*: $A \vee B, \neg A \vDash B$. Se puede objetar que no es posible ofrecer un contraejemplo a la validez del Silogismo Disyuntivo. La disyunción es verdadera sii al menos uno de los disyuntos es verdadero. Si tenemos que la disyunción es verdadera y tenemos que la negación de uno de los disyuntos es verdadera, entonces el otro disyunto debe ser verdadero. El problema del Silogismo Disyuntivo reside en que a partir de él se puede probar el principio de explosión (por el *argumento de Lewis* que presentamos más adelante). En síntesis, el problema es el siguiente: si el criterio es conservar el carácter intuitivo del razonamiento pre-formal, constatamos que asumir el principio de explosión es tan contraintuitivo como rechazar el Silogismo Disyuntivo.

En la teoría clásica, el Silogismo Disyuntivo es válido. Si se presupone que el Silogismo Disyuntivo es inválido, entonces (dada la teoría clásica de la validez) se estaría aceptando que puede darse el caso de que las premisas de la inferencia sean

verdaderas y la conclusión falsa. El problema reside en que lo que no se puede aceptar es dicha transgresión del concepto de validez, esto es, violar la conservación de la verdad. Desde la perspectiva relevantista es necesario, por tanto, confeccionar condiciones de verdad que permitan ofrecer un contraejemplo al Silogismo Disyuntivo (planes americano y australiano) o que admitan el Silogismo Disyuntivo pero no el *Ex falso quodlibet*, como pretende el plan escocés.

Se propone que la mejor caracterización lógica de la idea de relevancia es aquella que hace uso de la conjunción intensional en la noción de validez. La propuesta escocesa supera las insuficiencias de la técnica de subíndices (no invalida el principio de explosión) y el compartir una variable (es necesaria pero no suficiente) como formas de expresar formalmente la relevancia. En cuanto a la idea del uso de todas las premisas para derivar la conclusión mediante la técnica de subíndices, se puede objetar que en la prueba del principio *Ex falso quodlibet* sí se usan las premisas contradictorias para inferir una conclusión arbitraria. Esto último es lo que pretende mostrar precisamente el *argumento de Lewis*:

1.	$A \wedge \neg A_{\{1\}}$	Hipótesis
2.	$A_{\{1\}}$	E ∧ en 1
3.	$A \vee B_{\{1\}}$	I ∨ en 2
4.	$\neg A_{\{1\}}$	E ∧ en 1
5.	$B_{\{1\}}$	Silogismo Disyuntivo en 3 y 4
6.	$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$	I → en 1-5

Esta prueba se propuso para mostrar la conexión entre $A \wedge \neg A$ y B. Por este motivo Read (1988, p.132) afirma que "derivational utility cannot, therefore, be used to dismiss the Lewis argument, or any other such, as unsound". Esto se debe a la ambigüedad expresiva de las conectivas clásicas (supra §4.4.3.). Según Read (1988, p.134) pone de manifiesto, el problema se podría disipar empleando la fusión en el teorema de deducción. La estrategia del *plan escocés* consiste en negar que la imposibilidad de premisas verdaderas en conjunción con una conclusión falsa sea condición suficiente para caracterizar la validez (Read 1981). Por lo tanto, dada la noción clásica de consecuencia, se acepta que no se pueda ofrecer un contraejemplo al Silogismo Disyuntivo, pero también se niega que esta noción clásica muestre la validez del Silogismo Disyuntivo.

Si admitimos el Silogismo Disyuntivo, entonces por el *argumento de Lewis* también obtenemos el principio de explosión. La lógica relevante pretende ofrecer una caracterización de deducción más intuitiva que la clásica. Sin embargo, lo contraintuitivo en este caso es el rechazo del Silogismo Disyuntivo. La solución del *plan escocés* consiste en admitir la versión intensional del Silogismo Disyuntivo (Read 1983, p.474 y Mares 2004, p.180), esto es, usando la fisión: $A \oplus B, \neg A \vDash B$. Los planes australiano y americano desechan el Silogismo Disyuntivo. Tal como Belnap y Dunn (1981, p.363) expresan: "the true relevantist should not at all even be tempted to use the d. s.". En cambio, con el *plan escocés* podemos mantenerlo y, a la vez, rechazar el principio de explosión. Si el criterio es adecuarse al razonamiento intuitivo, entonces el *plan escocés* es la mejor propuesta, dado que evita las paradojas de la implicación y mantiene el Silogismo Disyuntivo intensional. Con **LR**^{ND66} podemos probar el Silogismo Disyuntivo intensional haciendo uso de la regla de la fisión:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ \text{Axioma}}{\neg A, A \vdash}\ \neg\ \text{Izquierda}}{A, \neg A \vdash}\ \text{Intercambio Izquierda} \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\ \text{Axioma}}{A \oplus B, \neg A \vdash B}\ \oplus\ \text{Izquierda}$$

Por otro lado, podemos probar la invalidez del Silogismo Disyuntivo (extensional) en **B** usando tablas semánticas[67] para el plan australiano:

$\nvdash_B ((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$

1.	$((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$,	- @		
2.	$r@@@, r@@^{\#}@^{\#}$		RN	
3.	$r@11, r@1^{\#}1^{\#}$		⎫	
4.	$((A \vee B) \wedge \neg A$,	+ 1	⎬	- → 1
5.	B,	- 1	⎭	
6.	$A \vee B$,	+ 1	⎫	
7.	$\neg A$,	+ 1	⎭	+ ∨ 4

/ \

8.	A,	+ 1	⎪	9.	B,	+ 1	+ ∨ 6
							X

[66] Supra §4.4.3.

[67] Véanse las reglas de las tablas semánticas para **B** en apéndice 3.

Se puede obtener un contramodelo de forma sencilla a partir de la rama abierta de la tabla. El contramodelo del Silogismo Disyuntivo es una estructura <S, @, *, R, *v*> donde:

i. $S = \{@, @^{\#}, s_1, s_{1\#}\}$

ii. $\forall s \in S: R@ss$

iii. $s^*_i = s_{i\#}$ y $s^*_{i\#} = s_i$

iv. $v_{s_1}(A) = 1$; $v_{s_1}(\neg A) = 1$; $v_{s_1}(B) = 0$

Ante esto, Read (1983) propuso como solución el Silogismo Disyuntivo Intensional (SDI), esto es, el que hace uso de la fisión en lugar de la disyunción extensional (que depende del valor veritativo de los extremos relacionados en una fórmula disyuntiva). El SDI lo expresamos del siguiente modo: $(A \oplus B)_a$, $\neg A_b \vDash B_{a \cup b}$, donde $A \oplus B \coloneqq \neg A \rightarrow B$. El SDI justifica la eliminación del condicional: $(\neg A \rightarrow B)_a$, $\neg A_b \vDash B_{a \cup b}$. La estrategia de Read permite, por tanto, rechazar el *Ex Falso Quodlibet* y, a la vez, mantener una versión del Silogismo Disyuntivo. Para justificar la concordancia de su propuesta intensional con el Silogismo Disyuntivo del lenguaje natural Read (1983) respondió a Burgess (1981) reinterpretando su ejemplo:

- Se manejan las cartas A, B y C en un juego con dos jugadores,
- Dos de ellas se encuentran boca abajo y la tercera la tiene un segundo jugador,
- El primer jugador debe descifrar cuáles son las cartas boca abajo mediante preguntas al segundo jugador sobre cuáles son tales cartas.
- El segundo jugador solo responde “no” o “quizá”.

Suponemos la siguiente situación:

- Ante la pregunta del primer jugador sobre si las cartas son B y C el segundo jugador ha respondido “no”,
- Ante la pregunta del primer jugador sobre si las cartas son A y C el segundo jugador ha respondido “no”.

El primer jugador puede deducir que las cartas boca abajo son A y B puesto que C no es una de las cartas que están boca abajo mediante la siguiente deducción: $\neg(B \wedge C), \neg(A \wedge C) \vdash A \wedge B$. Este esquema es un entimema cuya premisa implícita es $(B \wedge C)$ o $(A \wedge C)$ o $(A \wedge B)$, donde la disyunción “o”, según Read (1983, p.475) defiende, es la

fisión “For the truth of the three-part disjunction does not depend solely on the truth of some single disjunct, e.g., that as a matter of fact A and B are the cards on the table”. El punto a destacar reside en que la verdad de la disyunción depende del hecho de que las cartas A y B sean las que se encuentran boca abajo. La triple disyunción implícita tiene un carácter condicional en tanto que si dos disyuntos no son el caso, entonces el tercero debe serlo: “if two of them are not realised, then [cards] the third must be. The disjunction has the force of a conditional” (Read 1983, p.475).

6. LA FILOSOFÍA DE LA RELEVANCIA

Desde la concepción convencionalista que hemos asumido consideramos al plan escocés como el plan semántico más adecuado a la idea de relevancia lógica. El motivo se encuentra en el uso de metalenguaje relevante para definir la relación de consecuencia de manera que recoja de forma unificada la validez y la relevancia sin ser condiciones separadas o añadidas. Sin embargo, esto no exige necesariamente la admisión del fundamento descriptivista del monismo del plan escocés. Asimismo, desde la perspectiva sintáctica, la descripción subestructuralista de las lógicas relevantes a partir del cálculo de secuentes nos resulta la más económica expresivamente. Estas consideraciones de base no constituyen aún una propuesta general, de tal manera que debemos elaborar un marco de comprensión de la idea de relevancia lógica desde la postura convencionalista. Esto supone, a su vez, definir la noción de convencionalismo que se está empleando[68]. Todo ello es el propósito de la tercera parte de la tesis. En el primer capítulo de la tercera parte definiremos nuestra noción de convencionalismo y aclaramos la comprensión de la relevancia a partir de ella. Read (1988, 2012) desarrolló una teoría sintáctica del significado (véase apéndice 4) para evitar la asignación simultánea de valores de verdad intuitivamente incompatibles en las lógicas relevantes. Nosotros asumimos la noción relevante de validez del plan escocés, pero al contrario de Read, defenderemos una concepción convencionalista que prioriza una semántica sin significado. En los dos últimos capítulos de la tercera parte exploraremos una posibilidad monista y evaluamos su éxito.

Ahora bien, antes de plantear nuestra propuesta debemos analizar y discutir las interpretaciones filosóficas más destacadas sobre la idea de relevancia lógica. Entre ellas destacamos dos: la relevancia en la inferencia situada y la relevancia en la argumentación. A este respecto, dos aclaraciones son necesarias. Por un lado, señalamos que las alteraciones formales de los sistemas lógicos se vuelven problemáticas (o virtuosas) en virtud de las interpretaciones filosóficas. Por ejemplo, el fallo del Silogismo Disyuntivo se vuelve problemático si la interpretación del sistema en cuestión es tal que exige que el sistema dé cuenta del razonamiento intuitivo, de lo

[68] Recordemos que hasta el momento solo contamos con una definición negativa de la postura convencionalista, asumida por el rechazo al descriptivismo debido a las críticas planteadas previamente (supra §2.4.).

contrario es una mera diferencia formal con respecto a otros sistemas como el clásico. Esta es la principal motivación del capítulo. Por otro lado, debemos insistir en que una de las dos interpretaciones que discutiremos son desarrollos de conceptos y problemas que ya han sido empleados en las explicaciones informales del capítulo anterior. En este capítulo se tratará con más detalle la interpretación del plan australiano con la semántica de situaciones. También se ubicarán en un marco de comprensión más amplio las discusiones sobre la negación y el Silogismo Disyuntivo. La interpretación que no hemos tratado hasta el momento es la idea de la relevancia en la argumentación. Esta será objeto de discusión en la segunda sección de este capítulo. El propósito general es criticar ambas interpretaciones para allanar el terreno a nuestra interpretación convencionalista.

6.1. RELEVANCIA EN LA INFERENCIA SITUADA

Denominamos *inferencia situada* a la interpretación filosófica de Mares (2004) del plan australiano para dar cuenta de la idea de relevancia lógica a partir de la semántica de situaciones. El objetivo de Mares (2004, p.39) es establecer una teoría semántico-formal que sea intuitiva para expresar la implicación relevante. Asume la semántica Routley-Meyer, esto es, el plan australiano, para caracterizar los sistemas relevantes. Asimismo, considera que debe dar una explicación conceptual de dicha semántica para que satisfaga las intuiciones pre-lógicas. Ahora bien, elaborar una interpretación filosófica de la semántica Routley-Meyer que sea intuitivamente adecuada es una tarea difícil por su grado de complejidad técnica: "Giving a philosophical interpretation to the Routley-Meyer semantics is the most important philosophical problem facing relevant logicians at the present time" (Mares 2004, p.38).

Esta interpretación mantiene una concepción descriptivista de la lógica, como es habitual en todo el desarrollo del programa de investigación en lógicas relevantes. El problema que observa Mares (2004, p.8) en las PCM y las PCE se encuentra en su carácter contraintuitivo de fórmulas condicionales correctas: "These [paradoxes of material and strict implication] are formulae that are theorems of classical logic, but are counterintuitive when we think of the arrow as meaning 'implication'[69] in any ordinary sense of the term, or any pre-logical philosophical sense". Un ejemplo de PCM es el

[69] "Condicional" en nuestra terminología.

teorema que establece que cualesquiera dos fórmulas son el antecedente o el consecuente de la otra: (A ⊃ B) ∨ (B ⊃ A). Un ejemplo de PCE es el teorema que establece cualquier verdad lógica es consecuencia de cualquier proposición: A ⊰ (B ⊰ B). En el contexto de discusión de la noción de relevancia lógica las reglas relativas al condicional representan el núcleo de las controversias, tal como explicamos en anteriores capítulos (supra §4). El objetivo de Mares (2004) es dar una interpretación intuitiva a la solución técnica que aporta el plan australiano a partir de la semántica de situaciones. Previamente (supra §§5.1.-5.2.), ya hicimos ciertas alusiones a las situaciones en las explicaciones informales del plan australiano, pero no ofrecimos una interpretación filosóficamente fundamentada[70].

Para Mares (2004, p.15) las intuiciones pre-lógicas son las de un hablante nativo. Es decir, es el uso del lenguaje natural el criterio para determinar el éxito de las condiciones semánticas de un sistema lógico: "Semanticists should judge the success of their Project against the fit between the entailments, synonymies, contradictions, and so on, that it forces and native speaker's intuitions about these phenomena". Debemos atender a las intuiciones relativas a la relevancia para relacionarlas con el uso de los condicionales (en sentido genérico). La perspectiva de Mares sobre la relevancia es de carácter primordialmente semántica. El rasgo distintivo es el uso forzoso de las

[70] Para aclarar la terminología, Mares (2004) emplea el vocablo "conditional" para aludir a la idea informal de un esquema condicional en sentido genérico que puede concretarse tanto en la conectiva del lenguaje objeto como en la relación de consecuencia del metalenguaje. Entiende la implicación (*implication*) como una relación de consecuencia contingente y el entrañamiento (*entailment*) como una relación de consecuencia necesaria. El entrañamiento es un condicional relevante. En el lenguaje objeto es el condicional material con la conectiva modal de necesidad (condicional estricto de Lewis, es un condicional modal). Dado que la semántica de situaciones puede comprenderse a partir de una idea de consecuencia contingente, Mares (2004, p.11) defiende la teoría de la inferencia situada (*theory of situated inference*), esto es, la que hace uso de la semántica de situaciones como una teoría de la implicación relevante. Así, pues, añadiéndole la modalidad a la semántica de situaciones (del plan australiano) Mares considera que se consigue la idea de Anderson y Belnap de un entrañamiento que involucra la necesidad y la implicación. Por mor de la simplicidad y la economía en la terminología, nosotros empleamos "condicional" para denotar la conectiva e "implicación" para denotar la relación de consecuencia lógica. A partir de ahí especificamos si se trata de un condicional relevante o clásico y de una implicación relevante o clásica según el sistema lógico. El condicional (la conectiva) es particularmente significativo por su conexión con la relación de consecuencia a partir del meta-teorema de deducción.

premisas en un argumento correcto para derivar la conclusión. Los sistemas lógicos relevantes los define a partir de la semántica de situaciones (el plan australiano) con la que dar cuenta de las conectivas de la negación y el condicional. Esta estrategia es la que considera más adecuada a los condicionales en sentido genérico del lenguaje natural.

Antes de abordar la interpretación, debemos aclarar el motivo por el cual Mares (2004) prefiere el plan australiano al americano. Dunn (1976) propuso una semántica tetra-valuada (plan americano) para **FDE**. Los valores designados son "verdadero" y "verdadero y falso" de tal modo que la relación de consecuencia se puede definir en términos de conservación de la verdad. La condición de verdad de la negación se puede expresar estableciendo que ¬A tiene un valor designado sii A es falsa o verdadera y falsa. La ventaja de esta estrategia se encuentra en su carácter intuitivo si se lo compara con la tabla de verdad de la negación clásica, puesto que podría entenderse como una generalización de la misma. No obstante, la desventaja que observa Mares (2004, pp.88-89) estriba en que carece de condiciones semánticas para el condicional. Routley (1984) estableció las condiciones semánticas del condicional en esta estrategia tetra-valuada empleando las estructuras de la semántica Routley-Meyer y agregando una segunda relación ternaria negativa para eliminar la estrella Routley. Dada esta complejidad añadida, Mares (2004, p.89) declara que "The Routley continuation of Dunn's semantics is both technically cumbersome and philosophically hard to understand".

6.1.1. Interpretación de las situaciones, el condicional y la relación ternaria

El presupuesto ontológico del que parte Mares (2004, p.39) es de la existencia de individuos, conjuntos, mundos y situaciones. El recurso semántico-formal de las situaciones lo introdujo Kripke (1965a) como "evidential situations" para los modelos de la lógica intuicionista. El desarrollo filosófico más amplio lo realizaron Barwise and Perry (1983) para elaborar una "situation semantics". Las situaciones permiten representar la comunicación de información parcial. No disponemos de la información de la totalidad de un mundo sino solo de una parcela del mismo. Por este motivo las situaciones se entienden como partes de mundos posibles, ya sean reales y concretas o abstractas. Ahora bien, la noción de situación que Mares (2004, p.40) emplea no se restringe a la localización espacial de un agente, sino que se trata de "estructuras de información" parcial y puede incorporar conjuntos de creencias. En la semántica de

mundos posibles (para la lógica clásica) nos encontramos ante las falacias de la irrelevancia en tanto que cualquier fórmula implica toda verdad lógica, lo cual se debe a que (i) una verdad lógica es verdadera en todo mundo posible y (ii) la noción de consecuencia en tanto que conservación de la verdad exige que de las premisas se sigue la conclusión sii la conclusión es verdadera en cada mundo posible en el que las premisas también lo son. Así, pues, las situaciones son pertinentes para la relevancia puesto que no toda verdad lógica es verdadera en todas las situaciones. Es lo que se necesita para el fallo de las PCM.

La interpretación filosófica de la semántica Routley-Meyer basada en situaciones que Mares presenta se basa en la interpretación de Urquhart (1972) con la idea de "piezas de información". Ontológicamente una situación es una parte de un mundo posible entendida como pieza de información. Los mundos posibles son situaciones completas y consistentes que pertenecen al subconjunto de mundos normales incluido en el conjunto de mundos posibles[71]. La regla de la introducción del condicional en deducción natural tipo Fitch con la técnica de subíndices la entiende Mares (2004, p.43) interpretando los subíndices como situaciones. Así, pues, una fórmula condicional es verdadera en una situación *s* sii a partir de la información estructurada en *s* podemos derivar que existe alguna situación *t* en el mismo mundo del consecuente, bajo la hipótesis en virtud de la cual existe una situación *u* en el mismo mundo que *s* y el antecedente pertenece a *u*.

Mares (2004, p.41) propone el concepto de inferencia situada ("situated inference") para expresar "one sort of process that goes on in concrete situations". La idea informacional de la implicación en las situaciones consiste en determinar qué tipo de situaciones se dan en un mundo dependiendo de las hipótesis bajo las que nos encontremos. El núcleo conceptual reside en que no siempre la información de una situación permite inferir el tipo de situaciones que existen en un mundo. Lo que garantiza la posibilidad de dicha inferencia es lo que Mares (2004, p.43) denomina "informational links" (o "informational constraints"). Estos vínculos informacionales son, por tanto, todo mecanismo que permita una *inferencia situada*. Mares se apoya en Israel y Perry (1990) para definir la noción de vínculo informacional y determinar que se trata de un trozo de información tal que para algún enunciado A y para algún

[71] Por este motivo empleamos el mismo tipo de variables para situaciones y mundos posibles.

enunciado B, si existe una situación *s* en un mundo *w* tal que A se da en *s*, entonces existe una situación *t* en *w* tal que B se da en *t*. La información estructurada en una situación incorpora los vínculos informacionales. Por consiguiente, los vínculos informaciones son diferentes según la situación. Por este motivo Mares (2004, p.45) explica que

> From the standpoint of a situation we can infer what other sorts of situations are in the same world, or would be in the same world, using the information in our situation (such as the informational links contained in it), plus the basic deductive techniques of our natural deduction system.

Una *proposición* la entiende Mares en este contexto como el conjunto de situaciones en las que una fórmula es verdadera. Para denotar el conjunto de situaciones en las que A es verdadera empleamos superíndice *s*: A^s. Siguiendo a Mares (2004, p.46), la relación de implicación *I* relaciona proposiciones y pares de situaciones. La expresión $stIA^s$ quiere decir que las situaciones *s* y *t* están relacionadas implicatoriamente con el conjunto A^s sii la existencia de alguna situación de A^s se sigue de que *s* y *t* se dan en el mismo mundo. En la situación *s* se encuentra la información según la cual si podemos acceder a la situación *t*, entonces existe alguna situación de A^s a la que podemos acceder. La regla del condicional relevante se puede formular del siguiente modo:

$$(A \rightarrow B)_s = 1 \text{ sii } \forall x(A_x = 1 \supset sxIB^s)$$

Donde {0,1} es el conjunto de valores veritativos y "$A_s = 1$" expresa que A es verdadero en la situación *s*[72]. La interpretación filosófica de la regla del condicional relevante que se sigue de las condiciones situacionales establecidas por Mares es la siguiente: un condicional es verdadero en una situación sii la existencia de la situación en la que el consecuente del condicional es verdadero se sigue de la hipótesis según la cual existe una situación en la que el antecedente es verdadero, y todas las situaciones se dan en el mismo mundo.

Bajo estas condiciones Mares (2004, §3.7.) ofrece una interpretación de la relación ternaria de accesibilidad de la semántica Routley-Meyer. Nos encontramos ante

[72] Simplificamos notacionalmente el recurso de la función de valuación *v*. Empleamos "$A_s = 1$" en lugar de "$v_s(A) = 1$".

una variante de la *neighbourhood semantics* para los sistemas relevantes: A^s es un vecindario de *s* y *t* si $stIA^s$. En la interpretación de la inferencia situada la intersección de todos los vecindarios de cualesquiera dos situaciones es, a su vez, un vecindario de tales situaciones. Mares (2004, p.50) postula que "for all situations *s* and *t*, the intersection of all the neighbourhoods of *s* and *t* is also a neighbourhood of *s* and *t*". Usamos la expresión SEC(*s*,*t*) para denotar la intersección de todos los vecindarios de las situaciones *s* y *t* y tenemos que *stI*SEC(*s*,*t*). Es posible presentar una relación ternaria R entre situaciones tal que R*stu* sii $u \in$ SEC(*s*,*t*). Conceptualmente, aquello que expresa esta relación ternaria consiste en que no es posible inferir más información de *s* y *t* que la información estructurada en *u*. Ahora bien, es importante atender a la siguiente distinción: por un lado, no es posible inferir cuál es la situación *u* a partir de la información de *s* y *t* pero, por otro lado, sí es posible inferir que existe alguna situación *u* tal que es del mundo de *s* y *t* a partir de la hipótesis en virtud de la cual *s* y *t* son situaciones de un mismo mundo. Este es el modo en el que Mares (2004, p.51) interpreta la relación ternaria de accesibilidad de la semántica Routley-Meyer[73]. Con R la regla del condicional relevante es la siguiente:

$$(A \rightarrow B)_s = 1 \text{ sii } \forall xy((Rsxy \wedge A_x = 1) \supset B_y = 1)$$

El condicional es verdadero en una situación sii es posible inferir que en el mundo en el que se da la situación en el que el antecedente es verdadero existe una situación en la que el consecuente es verdadero a partir de la hipótesis según la cual existe una situación en la que el antecedente es verdadero y esa situación es una parte del mismo mundo de la situación en la que el condicional es verdadero.

[73] Una interpretación alternativa de la semántica Routley-Meyer es la que ofreció Restall (1996) apoyándose en la idea de flujos de información por canales de Barwise (1993) para comprender las situaciones. En esta explicación filosófica las situaciones son sitios de información y se dice que existe un canal entre dos situaciones si se da un flujo de información entre ellas. Una situación es, a su vez, un canal entre otras situaciones de tal manera que la relación ternaria R*stu* se entiende como una relación en la cual *s* es el canal que permite el flujo de información entre *t* y *u*. El problema que Mares (2004, p.55) observa reside en que, dado R*sss*, resulta contraintuitivo asumir que cualquier situación es una canal de información de sí misma a sí misma. La interpretación de los sistemas relevantes basada en la inferencia situada es desigual que la de los canales de información.

6.1.2. Interpretación de la negación y del Silogismo Disyuntivo

La negación es un centro de discusión en las condiciones semánticas de los sistemas lógicos relevantes (tal como analizamos en §5.2.). Asumiendo las condiciones de la disyunción y del condicional, la fórmula "$A \rightarrow (B \vee \neg B)$" solo puede ser inválida si se admiten situaciones que no son bivalentes. Esta circunstancia se sigue de la exigencia de las situaciones no bivalentes en virtud de la cual una fórmula pueda no ser verdadera y tampoco serlo su negación. Para el caso de "$A \rightarrow (B \vee \neg B)$" B y $\neg B$ deben no ser verdaderas. Mares (2004, p.73) denomina "situación parcial" a las situaciones no bivalentes o incompletas. Asimismo, se necesitan situaciones inconsistentes en las que una fórmula y su negación sean verdaderas a la vez. Para que "$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$" sea inválida es necesario que A y $\neg A$ sean ambas verdaderas. La regla semántica de la negación en la lógica clásica impone que las situaciones sean consistentes y bivalentes puesto que A es verdadera sii $\neg A$ es falsa y viceversa.

La regla de la negación en la semántica Routley-Meyer es $\neg A \in s$ sii $A \notin s^*$ (supra §5.1.1.). Ahora bien, el mismo comportamiento de la negación en situaciones puede ser descrito de igual modo con una relación *C* de compatibilidad entre situaciones (Dunn 1993 y Beall y Restall 2006, p.52): $\neg A$ es verdadera en la situación *s* sii para cualquier *s*' tal que *sCs*' A no es verdadera en *s*'. Esto quiere decir que puede haber *situaciones no actuales* (por inconsistentes e incompletas) compatibles entre sí. La relación binaria de la semántica de la compatibilidad de Dunn toma la idea de la relación binaria de ortogonalidad entre resultados de experimentos en la semántica de Goldblatt (1974) para la lógica cuántica. La ortogonalidad (Or) permite expresar la negación en condiciones de incompatibilidad: $\neg A$ se sostiene sii $((\neg A)_s = 1$ sii $\forall x(A_x = 1 \supset t\mathrm{Or}x))$. De este modo, con *t* se establece que $\neg A$ sea verdadera solo en el caso de que *t* excluya cualquier resultado que convierta a A en verdadera. La relación de accesibilidad, por el contrario, establece que *sCt* se sostiene sii las situaciones relacionadas no son incompatibles. La regla de la negación se puede expresar del siguiente modo empleando *C*: $s \vDash \neg A$ sii $\forall x(sCx \supset x \nvDash A)$. Lo cual quiere decir que $\neg A$ es verdadera en *s* sii A no es verdadera en todas las situaciones que son compatibles con *s*. Con la relación de compatibilidad las situaciones pueden ser inconsistentes e incompletas.

Mares toma la semántica de la negación de Dunn para representar la explicación conceptual de la negación en términos de incompatibilidad. Ahora bien, el propio Mares (2004, p.77) admite que asume la relación de incompatibilidad como un término primitivo que introduce sin justificación: "One might object that our view merely takes the incompatibility between situations as primitive (…). In a sense this is correct" Lo cual implica que traslada el problema de la explicación de la negación del plano lógico al plano intuitivo pre-lógico, pero la estipulación sigue sin ser explicada. Mares sigue expresando que "Explanations have to come to an end somewhere, and so we have to have some unexplained entities in our theory". Ahora bien, esto supone un problema dentro de la concepción descriptivista puesto que parte de la asunción como problema de la explicación de las nociones lógicas a partir de realidades preexistentes. De esta forma no se gana nada con el recurso a las intuiciones pre-lógicas. No solo se añaden entidades innecesarias, sino que no ofrece una solución satisfactoria. La solución de Mares consiste en recurrir a "buenas" nociones primitivas que sean más intuitivas que otras: "Our choice of primitives, however, can be good or bad. Some primitive notions are more intuitive than others". No obstante, el criterio de elección de la "buena" noción primitiva es otra vez la intuición, lo cual nos conduce a la misma situación problemática que se pretendía resolver.

Asumida la relación de compatibilidad entre situaciones en tanto que término primitivo, la pregunta subsiguiente es acerca de sus propiedades. En primer lugar, Mares (2004, p.78) propone la irreflexividad puesto que existen situaciones que no son compatibles consigo mismas, dada la definición de *C* y dado que pueden existir situaciones inconsistentes. En segundo lugar, debe ostentar la propiedad de la simetría dado que si una situación es compatible con otra, la segunda debe serlo con la primera. Las restricciones técnicas que permiten expresar las propiedades pre-lógicas de la relación primitiva de compatibilidad entre situaciones las podemos formular del siguiente modo:

- Irreflexividad: $\forall s$: $\neg(sCs)$
- Simetría: $\forall st$: $sCt \supset tCs$

Es la restricción de la simetría la que garantiza la introducción de la regla de la doble negación. Para la regla de la eliminación de la doble negación Mares (2004, pp.78-79) presenta un postulado mediante el cual introduce el operador de la estrella de

Routley. La situación con la estrella de Routley *s** es la situación que es máximamente compatible con *s*. El postulado consiste en estipular que toda situación tiene su situación estrella. La eliminación de la doble negación se justifica, por tanto, en dos condiciones semánticas:

- $(\neg A)_s = 1$ sii $A_{s*} = 0$
- $s = s^{**}$

Asimismo, el operador estrella permite justificar semánticamente la negación de De Morgan: "$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$" y "$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$".

Mares (2004, p.79) comprende el operador estrella como una entidad matemática: "[It] is a mathematical entity which takes an element from a set and returns a unique element from the same set". No define el operador estrella apelando a intuiciones pre-lógicas. La alternativa que presenta es la siguiente: o bien se acepta el operador estrella debido al valor intuitivo de la eliminación de la doble negación o bien los sistemas relevantes deben abandonar dicha regla[74]. Lo que se consigue con esta negación es la idea según la cual no toda contradicción permite derivar cualquier enunciado. Esto conlleva que no todas las contradicciones son equivalentes y que no toda negación expresa lo mismo.

La caracterización intuitiva de las situaciones como partes incompletas e inconsistentes de mundos posibles la enfrenta Mares (2004, §5.8) al argumento de Williamson (1994) en contra de los *truth values gaps* (ni verdadero ni falso) y al argumento de Lewis (1986) en contra de las situaciones inconsistentes (verdadero y falso). Ambos se basan en el principio N: $\forall A \forall s$: $(\neg A)_s = 1$ sii $\neg(A_s = 1)$. Mares (2004, p.85) reconstruye el argumento de reducción al absurdo de Williamson del siguiente modo[75]:

[74] Mares (1995) presenta una semántica de la negación sin la estrella de Routley (lo cual muestra su equivalencia), pero en (2004) la introduce por elegancia expositiva. Es importante remarcar que Mares (2004) adopta la relación de incompatibilidad de la semántica de Dunn para expresar la idea filosófica subyacente de la negación. No obstante, Mares (1995) tampoco emplea la relación *C* para la semántica de la negación en **R**.

[75] Lo adaptamos a nuestra notación y adoptamos la traslación que Mares realiza del argumento original a nuestro tema de discusión sobre situaciones. Esta explicación la presenta Mares (2004, p.85) en la nota 7.

1. $\neg(A_s = 1 \vee (\neg A)_s = 1)$ Hipótesis
2. $\neg(A_s = 1 \vee \neg(A_s = 1))$ Principio N en 1
3. $\neg(A_s = 1) \wedge \neg\neg(A_s = 1)$ Ley de De Morgan en 2
4. $\neg(A_s = 1) \wedge A_s = 1$ Eliminación de la doble negación en 3

Es muy importante no confundir el metalenguaje con el lenguaje objeto. Mares (2004, p.85) reconstruye el argumento de reducción al absurdo de Lewis del siguiente modo[76]:

1. $(A \wedge \neg A)_s = 1$ Hipótesis
2. $A_s = 1$ Condición de verdad de $\wedge$ en 1
3. $(\neg A)_s = 1$ Condición de verdad de $\wedge$ en 1
4. $\neg(A_s = 1)$ Principio N en 3
5. $A_s = 1 \vee \neg(A_s = 1)$ 2 y 4

La respuesta que Mares (2004, p.86) ofrece para evitar la admisibilidad de los argumentos reside en el concepto filosófico con el que explica las situaciones: las situaciones no son solo subíndices en los cuales pueden ser verdaderos o falsos los enunciados, sino que son estructuras de información parcial (tal como se explicó en la sección anterior §6.2.1.). Por consiguiente, un enunciado es verdadero en una situación sii la información del enunciado está contenido en dicha situación: "I hold that a situation, *s*, makes a sentence 'A' true if and only if *s* contains the information that A." (Mares 2004, p.86). Ahora bien, lo particular de las situaciones radica en que no se sigue que la información de ¬A está contenida en una situación del hecho de que esa misma situación contiene la información de A. Con esta concepción Mares consigue rechazar parte del principio N lo que hace incorrectas las derivaciones de Williamson y Lewis. Descomponemos el principio N en sus dos direcciones:

- N_1: $\neg(A_s = 1) \supset (\neg A)_s = 1$
- N_2: $(\neg A)_s = 1 \supset \neg(A_s = 1)$

Mares (2004, p.87) justifica el rechazo de N2 en virtud de dos razones. Por un lado, parte de la admisión de situaciones inconsistentes y, por otro lado, se ofrece una

[76] Lo adaptamos a nuestra notación y adoptamos la traslación que Mares realiza del argumento original a nuestro tema de discusión sobre situaciones.

alternativa intuitiva de las condiciones semánticas de la negación, la cual es la de la relación de compatibilidad entre situaciones. El primer motivo comete la falacia de petición de principio puesto que está aceptando de partida precisamente lo que el argumento de Lewis pretende reprobar. Lo mismo se puede reprochar al propio argumento de Lewis. El segundo motivo es insuficiente puesto que solo expone una alternativa más. Más aún, al admitir Mares N_1 pero rechazar N_2, se está rechazando el uso de la negación clásica en el metalenguaje. Esto no solo resulta contrario a la semántica Routley-Meyer (plan australiano) que suscribe, sino también es contrario a sus propias posiciones de partida: "Note that it does not help to claim that the problem is that the metalinguistic 'not' used in these principles is classical" (Mares 2004, p.86).

Del rechazo de N_2 se sigue que no es posible asumir la negación Booleana, puesto que la negación booleana de un enunciado no es necesariamente un enunciado. Mares (2004, p.92) lo interpreta en términos de piezas de información persistentes: "So the Boolean negation of a proposition is not always a persistent piece of information". Asimismo, la negación booleana valida el principio de explosión. Ahora bien, Meyer y Routley (1973) presentaron una semántica en la que introdujeron la negación booleana en la lógica relevante haciendo colapsar la condición hereditaria en la identidad. Mares (2004, p.92) rechaza esta posibilidad por su carácter contrario a la motivación filosófica de la propia negación booleana:

> I could not hold both that (1) a sentence is true in a world if and only if it is true in some situation that obtains at that world and (2) for some sentence 'A' there is a possible world *w* and situations *s* and *t* such that both *s* and *t* obtain at *w* and 'A' is true in *s* but not in *t*.

En este caso se tendría que aceptar que Ay ¬A son verdaderas en el mismo mundo posible, lo que contraviene a la idea misma de la negación booleana. Debido a la naturaleza de las situaciones, la negación relevante es más débil que la booleana: la negación de un enunciado no excluye la afirmación del mismo, puesto que existen situaciones en las que ambos son verdaderos.

Por último, respecto al Silogismo Disyuntivo, Mares (2000 y 2004, p.184) propone una estrategia distinta a la de Read (1983) para justificar el uso del SD en los sistemas relevantes. Su propósito estriba en mostrar que el esquema argumentativo del Silogismo Disyuntivo no debe ser necesariamente rechazado por los lógicos que optan

por los sistemas relevantes como representación más adecuada de los principios de razonamiento presentes en el lenguaje natural. Así, pues, Mares (2004, p.186) se refiere a los *compromisos* de los *lógicos relevantistas*: "we have shown that the relevant logician is not committed to holding that this intuitive principle of reasoning is not reasonable". La estrategia de Mares consiste en formular una versión pragmática del SD. Para ello distingue entre la negación en tanto que conectiva lógica y la *denegación* ("denial") en tanto que acto de habla. La denegación de una proposición quiere decir que "it fails to obtain in the context in which the denial is made" (Mares 2004, p.184). El rechazo ("rejection") es la actitud proposicional que está vinculada con el acto de la denegación. La versión pragmática del SD (SDP) expresa que del acto de afirmar $A \vee B$ y de denegar A, se sigue la afirmación de B. Si un hablante cree en la disyunción (que afirma) y rechaza uno de los disyuntos (que deniega), entonces cree en el otro disyunto (que puede afirmar). Esta regla se acepta como preexistente en el lenguaje natural "or anyone who understands the meaning of extensional disjunction" (Mares 2004, p.185).

Para justificar el SDP se deben rechazar las contradicciones ya que de lo contrario de la disyunción se podría derivar la denegación y la afirmación de uno de los disyuntos y no necesariamente la afirmación del otro disyunto. El rechazo de las contradicciones lo asume Mares (2004, p.185) "because the view that there are no true contradictions is very deeply entrenched", lo cual es problemático incluso para una concepción descriptivista del lenguaje natural. Para apoyar este compromiso Mares (2004, p.185) define la inferencia SDP': a partir de la denegación de $A \wedge B$ y de la afirmación de A se sigue la denegación de B. Así, pues, si se afirman $A \vee B$ y $\neg A$, entonces de $A \wedge \neg A$ debemos rechazar A por SDP' y la afirmación previa de $\neg A$. Este rodeo permite rechazar la contradicción $A \wedge \neg A$.

6.1.3. Discusión

Empezando por el final de la exposición, respecto a la interpretación de Mares del Silogismo Disyuntivo, desde nuestra perspectiva observamos cierta indefinición en el concepto de "obtención", puesto que al situarse fuera de la lógica no está claro que se trate de una derivación deductiva. En el caso de que sí se trate de una inferencia lógica, entonces no nos encontramos en un nivel pragmática pre-lógico, sino que es la misma conectiva lógica. En definitiva, observamos críticamente que lo que Mares está afirmando no es más que el nivel pragmático del lenguaje natural está regido por la

lógica clásica, lo cual es contrario a su descriptivismo relevantista que pretende defender.

La estrategia de Mares distingue entre dos niveles: (i) el nivel pragmático del uso por parte de los "lógicos relevantistas" como agentes inmersos en prácticas lingüísticas y (ii) el nivel de los sistemas lógicos en los que no es técnicamente viable el uso del Silogismo Disyuntivo extensional. Sin embargo, esta distinción no se está resolviendo el problema. La lógica *utens* del nivel pragmático, tal como asume implícitamente Mares, es la del Silogismo Disyuntivo extensional. Si se acepta la concepción descriptivista, entonces la tesis que asume que los sistemas relevantes constituyen la representación más adecuada del razonamiento del lenguaje natural falla. El error lo genera la asunción previa del SD extensional que pretende ser recogido por el SDP. Lo que propone Mares no es el uso de los sistemas relevantes para determinados razonamientos naturales y el clásico para otros, sino una estrategia pragmatista para que los lógicos relevantistas puedan emplear el silogismo disyuntivo extensional en los razonamientos ordinarios. Ahora bien, con el SDP sí incurre en esta tesis arbitraria.

Ahora bien, con carácter general, la principal observación crítica la orientamos a la cuestión del metalenguaje clásico. Del mismo modo que el plan escocés consideramos que se privilegia el lenguaje que se emplea en el nivel metateórico y al usar metalenguaje clásico en la interpretación de la semántica para las lógicas relevantes se generan objetos (metafísicos) contraintuitivos y recursos lógicos barrocos. No obstante, la crítica específica contra la interpretación de la inferencia situada de Mares es la siguiente. Nos fijamos en la discusión sobre el principio N que surgió en la cuestión de la interpretación de la negación. Aunque no lo pretenda, Mares también asume cierto rechazo de la negación clásica en el metalenguaje al apelar a su intuición de "situación" para rechazar parte del principio N.

Otro problema importante lo encontramos en que Mares asume como primitivos y, por tanto, ni define ni interpreta los conceptos lógicas de la relación de compatibilidad y la estrella de Routley. Se trata de recursos técnicos fundamentales para su caracterización de la semántica en el plan australiano. No ofrecer una interpretación filosófico-conceptual de tales recursos supone no interpretar los recursos teóricos más relevantes de este plan semántico. Está dejando sin ofrecer un contenido intuitivo de

gran parte del plan australiano, lo cual era precisamente el objetivo y la ventaja de la interpretación de la inferencia situada. Resulta arbitrario que para el operador estrella Mares no recurra a la intuición, ya que es el punto central del plan australiano. Es un descriptivismo selectivo según la conveniencia y según la dificultad para interpretar los recursos que se deben interpretar. De hecho existe mucha discusión sobre el carácter contraintuitivo de la estrella Routley por su naturaleza intensional. Por ejemplo, Copeland (1979) y van Benthem (1979) lo critican. Por el contrario, Dunn defiende que el operador estrella es intuitivo al entenderse como "The star operator takes a situation to the maximal situation that is compatible with it". Pero esto es difícil de aceptar, incluso Mares (2004, p.79) lo pone en duda. El operador estrella es el punto más polémico para una concepción descriptivista del plan australiano y Mares simplemente lo evita.

6.2. RELEVANCIA EN ARGUMENTACIÓN

6.2.1. Motivación: hacia una teoría unitaria

El objetivo de Walton (2004, p.89) reside en la elaboración de una *nueva teoría de la relevancia* junto con determinados métodos en virtud de los cuales evaluar la relevancia de un argumento a partir de la teoría: "The central task of the present project is to develop a new theory of relevance and then devise practical methods of judging relevance that derive from the theory". La intención se orienta hacia la confección de una teoría que pueda ser aplicada a casos argumentativos reales mediante métodos prácticos. Para la realización de esta tarea Walton alude a una estructura subyacente que debe ser determinada. El primer paso es, por consiguiente, el problema de analizar la relevancia. El problema es el siguiente: "How can relevance be defined in a structure that can at least potentially be formalized?" (Walton 2004, p.89), es decir, obtener una definición del concepto de relevancia en una estructura que pueda ser formal. Para desarrollar dicha estructura Walton explora diferentes posibilidades: los sistemas formales tales como la *relatedness logic*, métodos argumentativos como la diagramación o el encadenamiento de argumentos, el recurso a la emoción en lógica informal o la implicación (o implicatura) conversacional de Grice. Walton muestra la insuficiencia y propone una forma de integrarlos (excluyendo al recurso a la emoción) que permite comprender los componente de la estructura requerida para analizar la relevancia en la argumentación. Tales serían los componentes de la nueva teoría de la

relevancia capaz de determinar la relevancia de los diferentes contextos argumentativos reales.

Walton (2004, p.92) explica que la relación de consecuencia definida en términos clásicos no refleja la idea de relevancia presente en las argumentaciones en contextos conversacionales:

> At least it [la teoría clásica de la validez] does not model relevance of the kind we commonly appeal to in every conversational evaluation of arguments when we say that an argument is critically or logically deficient because some part of it, like a premise or a conclusion, is not relevant, or commits a fallacy of relevance.

Al evaluar los argumentos, la relevancia es conversacionalmente determinante para establecer su validez. Como puede observarse, Walton adopta una concepción descriptivista de la lógica en virtud de la cual un sistema debe representar una realidad preexistente. Existe una relación de consecuencia en los contextos conversacionales que no es captada por la lógica clásica. Manteniendo esta perspectiva, Walton (2004, p.92) también contempla la posibilidad de separar la validez lógica y la idea de relevancia, de tal modo que un argumento puede fallar por motivos formales al probar la conclusión o puede fallar por ser las premisas irrelevantes. Tal como hemos expuesto en los capítulos precedentes, el problema estriba en el condicional material, el cual es veritativo funcional (o extensional) cuyas condiciones solo lo hacen falso si el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Tales condiciones permiten validar condicionales en los que el antecedente es irrelevante para el consecuente.

6.2.2. Insuficiencia de los sistemas formales

Epstein (1979, p.140) emplea los términos "relatedness" o "related" para designar el tipo de sistema lógico que desarrolló con el cual representar formalmente la relación del contenido de las proposiciones lógicas. Para que un condicional sea verdadero los relata deben ser proposiciones o fórmulas bien formadas cuyo contenido esté relacionado. Se trata de otra estrategia de expresar la idea de compartir el contenido diferente a la de la compartición de una variable proposicional. Epstein evita deliberadamente el término "relevancia" por estar vinculado a los sistemas de Anderson y Belnap, no obstante, Walton (2004, p.95) hace uso de la *relatedness logic* de Epstein para dar cuenta del enfoque lógico-formal de una teoría de la relevancia. La noción de "relacionado" o "emparentado" se entiende como una noción primitiva estipulada como

una relación binaria y dependiendo del contexto la relación de parentesco tendrá otras propiedades. La propiedad básica que siempre debe ostentar es la reflexividad: "the only property that is essential to make the system make sense, and must always be there, is reflexivity" (Epstein 1979, p.141).

Para asignar la materia en cuestión que comparten dos proposiciones, Epstein (1979, p.156) parte de un conjunto C de asuntos o contenidos y a una proposición se le asigna un subconjunto no vacío de C. Dicho subconjunto es la *materia en cuestión* de la proposición. La relación de parentesco se construye a partir de la asignación de las materias en cuestión de las proposiciones: sean *p* y *q* proposiciones, *r* la relación de parentesco y D y E subconjuntos de C correspondientes a *p* y *q* respectivamente, *r*(*p*,*q*) sii $D \cap E \neq \emptyset$. Esto quiere decir que la materia de la que tratan las proposiciones debe estar relacionada en el sentido de que deben coincidir al menos en parte. Si entendemos la materia en cuestión de una proposición en términos conjuntistas, entonces para que el argumento sea relevante es necesario que la intersección entre la materia de una proposición y la materia de la otra no pueda ser el conjunto vacío. Walton (2004, p.95) denomina "topical relevance" a esta forma de construir la relación de parentesco dado que asume con Epstein que el enfoque de la intersección de las materias en cuestión es la adecuada al lenguaje natural. Así, pues, Walton (2004, p.96) emplea diagramas de Venn para expresar formalmente la idea de la relevancia en tanto que *mantenimiento de la materia en cuestión* y entiende que la idea del mantenimiento de la materia en cuestión como representación formal de la relevancia es simétrica no transitiva.

Se trata de un concepto de relevancia entendido como "topical relevance" y formalizado en un sistema lógico con una relación primitiva de parentesco que relaciona proposiciones cuyas respectivas materias en cuestión intersectan. Es un parentesco de materias en cuestión o "subject matter relatedness". La relación de parentesco haría fallar las inferencias problemáticas desde el punto de vista de la relevancia.

Frente a la *relatedness logic* (del parentesco o de lo relacionado), Walton (1982, p.52) observó críticamente que en este sistema se pueden hacer válidas las mismas inferencias problemáticas desde el punto de vista de la relevancia si se le añaden proposiciones inocuas que garanticen la intersección de la materia en cuestión. En el caso del principio de explosión tenemos que el condicional $(A \wedge \neg A) \supset B$ falla, pero el siguiente condicional es una verdad lógica: $((A \wedge \neg A) \wedge (B \wedge \neg B)) \supset B$. Por

consiguiente, “we can always take an argument that fails to be valid in relatedness logic because of failure of subject-matter overlap and arbitrarily make it valid by adding some harmless proposition” (Walton 2004, p.98). Además, Walton expresa que la no transitividad impide captar la idea de relevancia que opera en otros contextos argumentativos tales como el jurídico o el político. Aunque admite que los sistemas lógicos se encuentran involucrados, considera que estos no son suficientes para dar cuenta del concepto de relevancia dado que si bien son útiles para detectar las falacias de la irrelevancia no se ajustan a los contextos argumentativos reales.

El objetivo de Walton consiste en confeccionar una teoría que refleje la idea de relevancia en distintos contextos argumentativos preexistentes. Por consiguiente, desde una perspectiva que emplee exclusivamente sistemas lógico-formales para este objetivo se rechazará la apelación a las emociones como criterio de validez. Ahora bien, en contextos conversacionales ordinarios es posible que un argumento dependa en parte de algún componente emocional: “As a use of practical reasoning in a framework of dialogue, an argument based on emotional appeal could be presumptively reasonable even if it is (in itself) weak and defeasible” (Walton 2004, p.100). Así, pues, en la dimensión probatoria de la relación formal de consecuencia deductiva una inferencia puede ser incorrecta y, a su vez, puede ser aceptable en la dimensión de un argumento en un contexto conversacional. En esta segunda dimensión es posible que los componentes emocionales apoyen la carga de la prueba de tal modo que el argumento sea razonable al menos provisionalmente en una situación que carezca de evidencias apodícticas.

Para Walton (2004, p.101) un argumento es débil en la dimensión probatoria si las premisas no son capaces de ofrecer una garantía completa de la conclusión, pero sí ofrece algún apoyo. Existen argumentos débiles que no son erróneos pero están abiertos al cuestionamiento de la conclusión. En este contexto, los componentes emocionales pueden apoyar la razonabilidad del argumento. Walton (2004, p.101) expone esta idea en forma de tesis: “There is nothing wrong (fallacious, irrational) about emotional appeals *per se* in argumentation. These arguments can be reasonable”. En este sentido, las emociones pueden ayudar a orientarnos conversacionalmente en una situación con información incompleta. Es en este sentido en el que la apelación a las emociones puede ser *relevante* en la argumentación. De este modo, un argumento emocional puede ser relevante.

Walton (2004, pp.101-103) expone ejemplos de *argumentum ad populum* y *argumentum ad misericordiam* para mostrar que no son falacias necesariamente. Esta idea la expone en forma de conclusión del siguiente modo: "When arguments, like the *ad misericordiam* and *ad populum*, that appeal to emotions are said by a critic to have been used wrongly, the critic should have to show why" (Walton 2004, p.104). Con ello se marca un contraste entre un argumento emocional falaz y un argumento emocional no falaz. En definitiva, Walton vincula dos puntos. Por un lado, las emociones pueden ser relevantes para argumentos débiles y, por otro lado, un argumento emocional no es necesariamente una falacia. Desde nuestra perspectiva debemos aclarar que usar las emociones es independiente de la corrección de una inferencia. Se pueden usar las emociones en una inferencia que sea correcta. La falacia reside en usar las emociones como criterio de corrección.

Tal como Walton (2004, p.105) explica, las apelaciones a las emociones pueden inducir a error puesto que pueden generar una apariencia de relevancia: "An emotional appeal may be an argument with little or no real relevance to the issue of a discussion, but because of its emotional impact on the respondent, the respondent may be inclined to presume that it is relevant". Esto se debe a la independencia de la carga emocional de un argumento respecto de la relación de consecuencia de una inferencia válida. Esto implica que la apelación a las emociones no es errónea en sí misma pero tampoco es un criterio de validez. El problema que esto produce es el siguiente: en un contexto dialógico la irrelevancia puede pasar desapercibida si el componente emocional está involucrado en la argumentación. Walton (2004, p.105) lo expresa en forma de tesis: "When emotions are heightened in a dialogue exchange, irrelevance in argumentation is less likely to be perceived as a dialectical failure by someone involved in the exchange".

Lo que pretende poner de manifiesto Walton reside en que el carácter falaz en el que pueden caer (aunque no necesariamente) los argumentos con apelaciones a las emociones se encuentra en la desviación de la temática de la que originalmente trata un diálogo. Por consiguiente, es la *relevancia conversacional* la que se ve afectada: "the fallacy or failure is to be diagnosed as a straying away from the point of the original dialogue. It is a failure of conversational relevance" (Walton 2004, p.107). Un ejemplo de este tipo de argumentación lo podemos especificar en un argumento *ad hominem*. El cambio de temática a través de las emociones puede encajar en la concepción de una falacia como un argumento inválido que aparentemente lo es.

La tesis de Walton (2004, p.108) consiste en afirmar que las falacias emocionales son fallos conversacionales y, por consiguiente, es necesario evaluar este tipo de argumentos de acuerdo con su contexto dialógico. Se trata de fallos pragmáticos conversacionales. La evaluación de la relevancia de los componentes emocionales de una argumentación no pertenece al orden de las reglas inferenciales, antes bien, la relevancia depende de la evaluación de un argumento en tanto que acto de habla contextualizado en un marco de discusión más amplio: "To judge relevance in a particular case, however, we have to evaluate the argument as a speech act that has a place in the larger framework of the critical discussion" (Walton 2004, p.108). Un ejemplo puede ser un argumento *ad baculum* en el cual la amenaza es un acto ilocucionario sin que sea necesariamente explícito en la denotación. Ahora bien, una amenaza no es un argumento falaz y puede ser empleada en contexto de negociación. En el plano de las reglas de inferencia lógicas un argumento *ad baculum* es una falacia, no obstante, las amenazas indirectas pueden ser argumentos prácticos adecuados en contextos como, por ejemplo, las negociaciones bélicas. Desde nuestra perspectiva aclaramos que una amenaza puede no ser una falacia porque pertenece a otro orden: hay que distinguir entre válido-inválido y conseguido-fallido.

Asimismo, un argumento *ad baculum* puede ser una falacia en el nivel pragmático, sin embargo, el aspecto que Walton (2004, p.110) pretende resaltar radica en que su carácter falaz estriba en la desviación del punto temático de la argumentación: "What made it fallacious was the indirect speech act, a tactic used in this case to shift the line of argumentation away from fulfilling the goals of the critical discussion". En definitiva, Walton (2004, p.110) distingue tres aspectos que deben ser determinados para especificar en cada caso si la apelación a las emociones conduce a una falacia de la irrelevancia: (i) definir el tipo de diálogo en el que los sujetos que argumentan está involucrados, (ii) delimitar el modo en el que el acto de habla es empleado en relación con las condiciones de dicho tipo de diálogo y (iii) comprobar si con tal acto de habla existe un desvío tácito de los objetivos del diálogo. Todo lo cual se orienta a afirmar que el uso de una eventual apelación a la emoción puede incurrir de una falacia de la irrelevancia dependiendo del contexto conversacional.

En definitiva, Walton (2004, p.110) concluye lo siguiente: "Relevance appears to be based, at least partly, on rules governing a productive discussion". Por este motivo los sistemas lógicos relevantes no tienen capacidad para captar plenamente la idea de

relevancia presente en los contextos argumentativos reales. En correlación negativa, para Walton la estrategia óptima es la conversacional en virtud de la cual se representa la relevancia como un aspecto contextual propio de un marco dialógico más amplio. En este sentido, la relevancia no es otra cosa más que una propiedad del modo en el que un hablante emplea un argumento en un determinado contexto conversacional para alcanzar los objetivos de la argumentación.

6.2.3. Implicatura conversacional

Grice (1975) propuso la noción de *implicatura conversacional*. Se trata de una inferencia dentro de un contexto conversacional que una de las partes presenta a partir de lo expresado por la contraparte de la conversación. Los intercambios conversacionales entre hablantes son esfuerzos cooperativos dirigidos a fines comúnmente aceptados y no consideraciones inconexas. Lo característico son las restricciones conversacionales que subyacen a los esfuerzos cooperativos, las cuales las concreta Grice (1975, pp.45-46) en cuatro máximas (M) que especifican un principio general (PG):

- PG de cooperación: un hablante debe contribuir al contexto conversacional en el que está involucrado de tal modo que cumpla las condiciones propias del conjunto de propósitos asumido en el intercambio de la conversación.
- M1 de cantidad: haz que la contribución conversacional sea tan informativa como y no menos informativa que la exigencia que el propósito conversacional exija.
- M2 de calidad: intenta que la contribución conversacional sea verdadera y no expreses aquello que creas falso o aquello de lo que no tengas evidencia.
- M3 de relación: sé relevante.
- M4 de modo: sé perspicuo, lo cual implica no incurrir en oscuridad expresiva, en ambigüedades, ser breve y ordenado.

Tal como Grice (1975, p.46) observa, M3 involucra cuestiones tales como realizar un cambio de tema en el intercambio conversacional. En este marco de comprensión la relevancia es un aspecto relativo a las contribuciones conversacionales. Walton (2004, p.113) destaca la virtud del enfoque de Grice, a saber: es una aproximación que representa la relevancia en el nivel pragmático de tal modo que permite conservar la lógica deductiva y explicar el fallo de las inferencias problemáticas

en tanto que fallos conversacionales de la relevancia. Se trataría de fallos de la máxima de la relevancia en contextos conversacionales y no de fallos en la validez de la inferencia deductiva. "The Gricean analysis of conversational implicature shows that people are aware of, and can recognize, failures of relevance in everyday conversational exchanges. But relevance, so understood, is not something that is a semantic property of a single inference" (Walton 2004, p.114).

A pesar de la virtud de la aproximación griceana, el defecto patente de este enfoque reside en la falta de definición de la noción de relevancia. Tampoco ofrece ningún criterio que permita discernir si en un caso en particular existe relevancia conversacional. El propio Grice (1975, p.46) admite que "I find the treatment of such questions exceedingly difficult" y Walton (2004, p.114) observa que Grice se limita a expresar que la máxima de la relevancia es "Be relevant" sin aclarar su significado. Una segunda dificultad se encuentra en que el principio de cooperación necesita una aclaración previa de la noción de relevancia para ser justificado. Esto se debe a que no hay una distinción real entre el principio de cooperación y la máxima de relación: "the problem is that the Maxim of Relation is essentially blank, in Grice's framework, so that the difference between it and the (CP), if any, is impossible to ascertain" (Walton 2004, p.115).

6.2.4. Técnica de diagramas

Walton (2004, p.115) explora la capacidad explicativa de la técnica de *diagramación de argumentos* para representar la relevancia de los argumentos. Es una técnica empleada en la lógica informal que presenta una cadena de premisas y conclusiones en un caso del lenguaje natural. Lo que representa el diagrama es la estructura del razonamiento existente en un argumento del lenguaje natural. La diagramación presenta cada proposición mediante un número. Los números se encuentran dentro de círculos y se consideran puntos, los cuales están vinculados mediante líneas. Así pues, con las líneas se expresan las inferencias puesto que relacionan ciertas proposiciones entendidas como premisas con determinadas conclusiones entendidas como conclusiones. En la técnica que Walton (1996) propone para la diagramación de argumentos se distinguen tres componentes: (i) un conjunto de puntos cada uno de los cuales expresan una proposición, (ii) un conjunto de líneas cada una de las cuales expresa un paso inferencial en la cadena del razonamiento y (iii) una

aplicación que mapea los pasos inferenciales en pares ordenados, por lo cual se obtiene un grafo dirigido o digrafo. Un digrafo G ≔ <A,B>, tal que:

- $A \neq \emptyset$ es el conjunto de vértices o puntos.
- $B \subseteq \{<x,y> \in A \times A: x \neq y\}$ es el conjunto de aristas o líneas.

Una arista tiene una dirección del primer al segundo nodo del par y el número máximo de aristas será el cuadrado de la cantidad de los vértices: dado $n = |A|$, n^2 es el máximo de aristas que el digrafo puede tener. Podemos definir el diagrama de un argumento del siguiente modo: D≔ <A,B,*f*>, donde el tercer componente es una función $f: B \longrightarrow A \times A$[77].

Es importante señalar que lo que el diagrama representa es un discurso concreto del lenguaje natural de tal modo que sirve para aclarar el orden del argumento. Lo que se esquematiza no es la validez de una inferencia lógica. Los pasos inferenciales representados por las aristas son consecuencias informales. El orden de los puntos sigue una relación de prioridad en las evidencias de la cadena argumentativa. Desde nuestra perspectiva debemos aclarar que consideramos que en el planteamiento de Walton hay una ambigüedad en el uso del término "argumento" que no siempre se distingue de forma explícita. Un "argumento" en tanto que inferencia lógica puede ser uno de los diferentes recursos para el éxito de un "argumento" en tanto que actos conversacionales dirigido a convencer a un interlocutor en un diálogo. Los diagramas representan los argumentos en el segundo sentido, pero mantiene cierta similitud informal con los argumentos en el primer sentido (ya que es esta similitud lo que permite su representación esquemática).

6.2.5. Teoría unitaria

Dadas las consideraciones previas, Walton (2004, p.120) establece tres componentes, los cuales operan como condiciones necesarias de posibilidad de una teoría de la relevancia. El primer componente es la exigencia de una noción lógica de relevancia: "there needs to be an underlying logical notion of relevance." (Walton 2004, p.120). Ahora bien, dicha noción lógica preexistente no puede ser representada adecuadamente a través de los sistemas lógicos relevantes caracterizados por la

[77] La función *f* puede representar la dirección de las aristas.

semántica formal. Antes bien, la noción lógica de relevancia está relacionada con la idea del encadenamiento de los razonamientos de un discurso argumentativo, lo cual se puede expresar con la técnica de diagramación de argumentos y la técnica de la extrapolación de argumentos. El segundo de los factores es la necesidad de poner de manifiesto el mecanismo explicativo que determina el carácter falaz de las falacias de la irrelevancia: "the theory needs to deal with the various fallacies of irrelevance, not by just declaring them fallacious but by dealing with them in depth" (Walton 2004, p.120). El tercer elemento de una teoría de la relevancia consiste en el contexto conversacional de dicha noción: "the conversational framework of relevance" (Walton 2004, p.120).

Los componentes de la teoría de la relevancia de Walton se encuentran interrelacionados. Esta condición la podemos observar en la condición pragmático-conversacional de la técnica de diagramación de argumentos. En este marco conceptual que parte de Grice, los diferentes contextos conversacionales orientados a objetivos deben ser especificados y diferenciados para poder aplicar la diagramación de argumentos y la extrapolación de argumentos en casos particulares. La definición de relevancia que ofrece Walton (2004, p.121) es la siguiente:

> An argument is judged to be relevant if it can be chained forward so that the ultimate conclusion of the connected sequence of reasoning is the proposition that was supposed to be proved.

Lo cual se encuentra en un diálogo, esto es, un contexto conversacional dirigido hacia un objetivo compartido en el que al menos dos participantes intercambian alternamente argumentos. Así, pues, la idea de relevancia en tanto que encadenamiento de argumentos tiene asociada técnicas que permiten evaluar la relevancia en los casos particulares. El empleo coordinado de ambas técnicas, esto es: la extrapolación y la diagramación de argumentos, genera una tecnología que Walton (2004, p.120) denomina heurística y que asocia con la heurística computacional: "The kind of task of judging relevance by combining these two methods fits into a technology called *heuristics*, that has already been widely used in computing". La heurística se constituye como método de decisión diseñado para conseguir un objetivo. La heurística permite comprender los juicios relevantes en los contextos conversacionales: se puede entender la relevancia como la posibilidad de realizar un encadenamiento en una secuencia argumentativa o se puede entender la relevancia mediante la posibilidad de establecer

un argumento como formando parte de la línea de un razonamiento que inicia en el punto de partida y concluye en el punto de objetivo de un diálogo. Existe en la propuesta de Walton una dependencia dialógica de la relevancia.

6.2.6. Discusión

Consideramos que la propuesta de Walton de la triple composición como condición necesaria (aunque no inevitablemente suficiente) de una teoría de la relevancia no es admisible por dos motivos: los componentes no generan una técnica satisfactoria y los presupuestos conceptuales son discutibles. Tales críticas se pueden comprender como críticas internas y externas, respectivamente. Walton postula una noción de relevancia lógica y, a partir de ella, diseña unas técnicas dirigidas a su aplicación en casos concretos para evaluar la relevancia presente en contextos argumentativos. Con estas técnicas sería posible juzgar la relevancia que presuntamente existe en las argumentaciones. El marco teórico que permite este mecanismo está restringido por tres supuestos o componentes fundamentales. Por mor de la claridad, reconstruimos esquemáticamente la propuesta de Walton para distinguir y definir sus diferentes aspectos:

a) Los tres componentes necesarios de una teoría de la relevancia:
    1. Es necesario que exista una noción lógica de relevancia.
    2. Es necesario aclarar el mecanismo explicativo de la forma en la que se incurre en una falacia de irrelevancia.
    3. Existe una dependencia conversacional de la relevancia.
b) La noción de relevancia lógica: la relevancia es el encadenamiento en un discurso argumentativo de una secuencia de proposiciones dirigidas hacia una conclusión, la cual es la meta que se pretende probar en el razonamiento.
c) La tecnología para juzgar la relevancia: la heurística, la cual resulta de coordinar las técnicas de extrapolación y diagramación de argumentos. Los diagramas de los argumentos son dígrafos en la técnica diseñada por Walton (1996).

Los puntos a) y b) se refieren a los supuestos conceptuales de una teoría de la relevancia y el punto c) es el resorte técnico que garantiza el éxito de la teoría en la explicación de los casos reales.

En primer lugar, presentamos los problemas relativos al éxito de una teoría de la relevancia fundamentada en los tres componentes que Walton propone. Consideramos que incurre en un argumento inconsistente. Para mostrarlo, debemos señalar que la heurística como tecnología que se aplica para juzgar la relevancia de los razonamientos de un intercambio argumentativo adquiere su sentido a partir de la negación de la posibilidad de representar la noción de relevancia lógica desde los sistemas lógicos caracterizados primariamente desde la semántica formal. Esta condición negativa es la justificación del uso de técnicas de la lógica informal tales como la diagramación de argumentos. Ahora bien, debemos tener en cuenta que Walton (2004, p.121) observa como virtud de su propuesta que la heurística puede representarse mediante grafos tipo AND/OR (compuertas lógicas en computación), lo cual permite obtener un método automático para evaluar la relevancia. Esta observación puede constituir una crítica en tanto que se está aceptando que los sistemas lógico-formales sí son capaces de representar adecuadamente su noción de relevancia lógica, ya que los grafos tipo AND/OR son equivalentes a un fragmento de la lógica proposicional y del mismo modo ocurre con los digrafos (se puede mostrar la equivalencia de la misma estructura definida en el enfoque lógico-algebraico, en la teoría del orden y en la teoría de grafos). Cabe señalar que estos sistemas son caracterizables semánticamente, lo cual era precisamente aquello que se negaba de partida y justificaba la diagramación de argumentos en detrimento de los sistemas formales. En el fragmento proposicional la semántica y la sintaxis colapsan pues existe un método constructivo de decisión, de modo que la prueba de la conclusión y del propio encadenamiento de las proposiciones se puede interpretar a partir de reglas semánticas.

Una segunda observación crítica al problema del éxito de la heurística se encuentra en una observación del propio Walton. El problema que observa Walton (2004, p.121) reside en la existencia de omisiones y ambigüedades en los discursos del lenguaje natural, lo cual dificulta la esquematización del encadenamiento de argumentos. Este problema se agudiza si se emplean lenguajes con escasa capacidad expresiva como los grafos tipo AND/OR. Se puede entender, por tanto, que al evitar el uso de cuantificadores lo que elimina no son los sistemas lógico-formales, sino que lo que evita son lenguajes con mayor capacidad expresiva. Lo que hace es simplificar el lenguaje lógico sin dejar de emplear la lógica.

En segundo lugar, para comprender los problemas que inciden en los fundamentos conceptuales debemos definir la propuesta de Walton en nuestro marco teórico (supra §2) sobre las posturas ante el problema de la concepción de la lógica. Consideramos que se encuentra en una postura descriptivista empirista[78], habida cuenta de la noción lógica de relevancia que, según Walton, subyace necesariamente y de la dependencia conversacional en virtud de la cual la relevancia se da en contextos dialógicos de intercambios argumentativos entre participantes que comparten una finalidad. La noción de relevancia subyace a las actitudes argumentativas de los participantes que tienen una idea intuitiva de relevancia. En este enfoque existe una noción lógica de relevancia que preexiste a las técnicas utilizadas cuyo rasgo definitorio reside en el encadenamiento de una secuencia de proposiciones hacia una conclusión en un contexto argumentativo. Dada esta caracterización, concluye que la estrategia óptima para representar la idea del encadenamiento es la técnica de la diagramación de argumentos definida en términos de digrafos.

El objeto de Walton es la relevancia en la argumentación entendiendo a esta última como realidad presente en contextos argumentativos dispares. Los sistemas lógico-formales serían un método posible para representar la argumentación. Parte de realidades argumentativas preexistentes en distintos contextos y se centra particularmente en las formas en las que se puede incurrir en falacias de la irrelevancia en tales contextos. Como hemos expuesto, Walton pretende confeccionar una teoría (o establecer las condiciones necesarias para poder confeccionar una teoría) que permita evaluar la relevancia en cualquiera de los distintos contextos. Denominamos "teoría unificada" a esta pretensión[79].

En los fundamentos conceptuales de la propuesta de Walton encontramos tres puntos de discusión. Primero, el carácter descriptivista de la concepción de Walton es cuestionable en tanto que no existe una única realidad preexistente que justifique su teoría unificada, sino que existen diversos contextos argumentativos dispares. El objeto de estudio es distinto si nos restringimos a los sistemas lógicos y no la argumentación

[78] Recordamos que en nuestro planteamiento el empirismo puede ser relativo tanto a realidades físicas como a contextos argumentativos.

[79] Nuestro uso del epíteto "teoría unificada" se encuentra restringido a este preciso marco teórico con sus fundamentos conceptuales correspondientes.

en general. Ahora bien, no se trata simplemente de que el objeto de estudio sea diferente en cada caso, sino del error de comprender unívocamente un término polisémico que designa prácticas radicalmente heterogéneas, algunas de las cuales incluso no corresponden al ámbito argumentativo. No es lo mismo persuadir en contextos conversacionales que probar una inferencia. Se pueden usar los mecanismos lógicos para persuadir pero existen otros resortes no lógicos cuya legitimidad no procede de la validez formal.

Segundo, el rechazo de Walton a la estrategia de los sistemas formales para dar cuenta de la noción de relevancia lógica está vinculado exclusivamente a las deficiencias que encuentra en un sistema lógico en particular, a saber, la *relatedness logic* de Epstein. No toma en consideración los desarrollos de los diferentes planes que caracterizan los sistemas relevantes. Tercero, el problema del que parte la discusión sobre la relevancia reside en la noción clásica de la consecuencia deductiva. En contraste, Walton parte de las falacias de la irrelevancia presentes en diferentes contextos argumentativos cuya incorrección se justifica por recurso a la intuición. Con la heurística pretende explicar el fallo pero su ilegitimidad está dada previamente por los contextos conversacionales. Sin embargo, el rechazo de la consecuencia clásica puede comprenderse en términos formales formulando las falacias de la irrelevancia a partir de las paradojas del condicional material. Por ejemplo, *Ex Falso Quodlibet* es una paradoja del condicional material. El rechazo de las PCM no se justifica por no adecuarse a "la intuición".

Visto de este modo, perseguimos una solución formal puesto que la naturaleza del problema es formal. Asumiendo una concepción convencionalista, no se debe construir una noción de relevancia (tal como realiza Walton), sino que se admiten las estipulaciones de los sistemas lógicos. Esto quiere decir que los sistemas relevantes no representan una noción de relevancia ideada y elaborada con la finalidad de aplicarse, sino que no existe una realidad preexistente legitimadora allende la mera estipulación lógica. No hay un problema real que explicar, sólo una convención semántica a la que denominamos "relevancia lógica" (podemos denominarla de otra forma si nos confunde con el lenguaje natural). Ante esto cabe la pregunta sobre cómo se explican, entonces, los contextos argumentativos particulares. La respuesta se dirige a afirmar que simplemente no se explican puesto que la relevancia es una noción multívoca. No tiene sentido una "teoría unificada de la relevancia". Si en esos contextos es útil la aplicación

de los sistemas relevantes, entonces sus participantes pueden emplearlos, pero también pueden optar por no emplearlos.

PARTE III: MONISMO CONVENCIONALISTA

7. SEMÁNTICA CONVENCIONAL

En este capítulo se plantea una comprensión convencionalista de la semántica formal. Hasta este punto el convencionalismo ha sido tratado en términos negativos, esto es, como una alternativa plausible dadas las críticas realizadas al descriptivismo (supra §2). En esta definición positiva del convencionalismo lógico se defiende que la semántica formal no está relacionada con el fenómeno de la significación o representación de un "mundo" pre-teórico. Para elaborar la argumentación nos apoyamos en los artículos Hilbert (1922 y 1926) y Henkin (1949).

Tomamos de Hilbert la idea de que los signos concretos constituyen la realidad básica irreductible y pertenecen a un nivel metateórico. Además, entendemos su formalización de la matemática como una reducción de complejidad al nivel metateórico de los signos elementales mediante el cálculo lógico. Por ello proponemos una analogía de esta reducción hilbertiena con la propiedad metalógica de la compleud que relaciona el sistema deductivo con la semántica. Esto permite entender la semántica formal como meros signos, pero nos distanciamos de la concepción tan restringida que Hilbert tiene de ellos. A continuación, especificamos esta analogía mediante la posibilidad de sustituir un modelo por un conjunto máximamente consistente de fórmulas. Un conjunto máximamente consistente se comporta en el lenguaje como un modelo y operativamente son equivalentes. Esto puede mostrarse mediante el *lema de Lindenbaum* dentro del esquema de la prueba de completud de Henkin (1949). Favorecemos una caracterización sintáctica de los modelos en detrimento de la perspectiva contraria que considera a las fórmulas de los conjuntos máximamente consistentes como dotadas de cierta "naturalidad" por describir "mundos" intuitivos. En este sentido, lo modelos son también meras estipulaciones simbólicas para interpretar un lenguaje igualmente artificial y no como representaciones de determinada realidad.

Esta concepción tiene efectos sobre la comprensión de la idea de relevancia lógica, puesto que la comprendemos a partir de una perspectiva semanticista y convencionalista. Esto quiere decir que simplemente se denomina "relevante" a aquel sistema lógico en el que las Paradojas del Condicional Material fallan. Esto está relacionado con la regla estructural de la atenuación y con la noción relevante de consecuencia como idea fundamental. El hecho de prescindir de la noción intuitiva de "relevancia de la premisas para la conclusión" nos aleja de la motivación básica del

programa de investigación de las lógicas relevantes. Es difícil encontrar un convencionalismo de la relevancia que no tenga por intención captar una idea intuitiva de relevancia pre-teórica.

Con esta concepción convencionalista de la idea de relevancia lógica se conectan los dos objetos centrales de la investigación, a saber: la relevancia y el convencionalismo. Ahora bien, con la reinterpretación del formalismo hilbertiano abrimos paso a una posible vía de justificación de un monismo lógico convencionalista que favorece al sistema **R** a través del proyecto de la aritmética relevante y su relación con el segundo teorema de incompletud de Gödel. Esta posibilidad la discutimos en los siguientes capítulos (infra §§8-9).

7.1. IN THE BEGINNING WAS THE SIGN

Hilbert (1922) empieza el desarrollo de sus ideas en teoría de la prueba en relación con el debate con la filosofía intuicionista. Consideramos que lo que está en juego en este artículo es la forma de entender el constructivismo dentro del programa de fundamentación formalista. En el nivel metateórico consideramos que asume un razonamiento intuitivo ligado a los métodos finitarios. En este sentido existe cierto acuerdo con la crítica intuicionista y su búsqueda de los procesos constructivos. En este artículo Hilbert diferencia marcadamente entre el formalismo matemático y el razonamiento metateórico *contentual* (mantendremos el neologismo en inglés, en alemán es *inhaltliche*[80]). A nivel metateórico el razonamiento no es meramente formal, sino que está relacionado con el contenido. En este punto entronca con un contenido intuitivo, el cual es de carácter finitario. Desde el formalismo de Hilbert solo la axiomática puede satisfacer las intenciones constructivistas.

Nos interesa destacar el modo de comprender estas nociones para relacionarlas con nuestra discusión lógica. No obstante, es importante no perder de vista que nos encontramos en la discusión sobre la fundamentación de la matemática. Lo que se propone Hilbert (1922) en este artículo (concebido como reporte interno) es formular sin ambigüedades el problema de la fundamentación y proponer una solución, la cual está relacionada con su teoría de la prueba.

[80] En ocasiones se traduce por "material" haciendo referencia a la distinción formal-material. Pero en nuestro contexto esto puede confundirse con las condiciones específicas del condicional material.

> All previous investigations into the foundations of mathematics fail to show us a way of formulating the questions concerning foundations so that an unambiguous answer must result. But that is what I require: in mathematical matters there should be in principle no doubt; it should not be possible for half-truths or truths of fundamentally different sorts to exist. (…) I am of the opinion that the foundations of mathematics are capable of full clarity and knowledge, and that the problem of grounding our science is difficult but nevertheless conclusively solvable. The purpose of this interim report is to characterize briefly the sense in which I believe I can attain the solution, and to explain the means. (Hilbert 1922, §1).

La discusión empieza con el caso del concepto de número real. Un procedimiento habitual para fundamentar el concepto de número real consiste en definirlo como una partición de los números racionales, la cual partición tiene la propiedad del corte de Dedekind. Se trata de una fundamentación que apela al contenido de la noción de partición. Desde la perspectiva intuicionista del *principio de constructividad* de Weyl esta fundamentación es un círculo vicioso en tanto que las particiones se aplican de modo condicionado a que existan números reales con la mencionada propiedad. Para Hilbert (1922, §3) esta perspectiva intuicionista crea artificialmente un punto de referencia metodológico de tal modo que impone artificialmente un círculo vicioso en el análisis. Para Hilbert no se trata de un problema de fundamentación interno en el análisis, sino que simplemente existen distintos puntos de referencia metodológicos situados al mismo nivel. De este modo, el error se encuentra en el *principio de constructividad* tal como lo emplea Weyl y no en el análisis.

No obstante, Hilbert (1922, §6) señala la fundamentación axiomática del concepto de número: los axiomas son relaciones que vinculan "cosas" entre sí de determinada manera, siendo el sistema de esas cosas el continuo de números reales. Este sistema está definido por los axiomas de continuidad. Esto quiere decir que un número real es algo que pertenece a este sistema. Se trata de una fundamentación formalista que no se compromete ontológicamente con lo que las "cosas" de ese sistema son. La única condición que se debe cumplir es la consistencia del sistema axiomático, entendiendo que la consistencia es lo que convierte a un sistema en *pensable* ("thinkable")[81]. La

[81] El problema de la consistencia para Hilbert (1922 §15) es un problema epistemológico: es lo que hace que una teoría científica de cualquier campo sea "pensable". Más tarde, el problema con la inconsistencia

consistencia de la axiomática necesita ser probada. Ahora bien, en este artículo a Hilbert le interesa destacar que este tipo de fundamentación axiomática-formalista no excluye la noción de intuición. De hecho, el método axiomático cumple las pretensiones constructivistas sin caer en puntos de referencia metodológicos artificiales externos al propio análisis matemático. Con el método axiomático Hilbert (1922 §12) tiene la intención de "to regain for mathematics the old reputation for incontestable truth, which it appears to have lost as a result of the paradoxes of set theory". La prueba de consistencia es el medio que permite garantizar la seguridad de las verdades matemáticas: "If we can produce this proof, then we can say that mathematical statements are in fact incontestable and ultimate truths—" (Hilbert 1922 §23).

Como puede observarse, el programa axiomático-formalista es solo el planteamiento que Hilbert ofrece del problema de la fundamentación. Para la solución del problema planteado Hilbert (1922 §25) afirma que debe existir algo dado a la representación (*Vorstellung*) como condición de posibilidad de la aplicación misma de las inferencias lógicas. Cabe preguntarse qué es ese dato preexistente que permite la ejecución de las operaciones lógicas. La respuesta de Hilbert (1922 §25) es la siguiente: "certain extra-logical discrete objects, which exist intuitively as immediate experience before all thought". Esto quiere decir que existen objetos discretos pre-teóricos, de los cuales tenemos conocimiento empírico-intuitivo: los conocemos de forma inmediata en la experiencia. Además, estos objetos discretos son una realidad última, en el sentido de que no son reducibles a otra realidad más elemental. La certeza de las inferencias depende del conocimiento que de tales objetos discretos tengamos.

Con lo anterior simplemente ha establecido Hilbert cómo deben ser las realidades intuitivas que fundamentan las inferencias lógico-formales. No obstante, resulta inevitable la pregunta sobre la naturaleza de tales objetos pre teóricos. La respuesta de Hilbert (1922 §25) es igual de clara: aplicando esta concepción filosófica general primeramente a la teoría de números, los objetos en cuestión son los signos. Tenemos conocimiento inmediato de la forma (*Gestalt*) de los signos concretos de la aritmética elemental. Así, Hilbert (1922 §25) afirma que "The solid philosophical

---

es un problema lógico: el principio de explosión, la trivialidad deductiva. Para evitar la consecuencia explosiva (dispongamos o no de contradicciones y de las cuales sí tenemos por las paradojas) se admite cierta inconsistencia controlada.

attitude that I think is required for the grounding of pure mathematics —as well as for all scientific thought, understanding, and communication— is this: *In the beginning was the sign*".

Desde nuestros parámetros teóricos relativos a la concepción de la lógica debemos cuestionarnos si el punto de vista de Hilbert (1922) es descriptivista o convencionalista. *Prima facie*, parece que se trata de una concepción descriptivista en tanto que apela a realidades pre-teóricas que fundamentan las inferencias lógicas. Es importante remarcar que esta postura evitaría la *petitio principii* (señalada en §2.4.) puesto que el carácter discreto de los signos es directamente empleado en las operaciones lógicas. Por otro lado, los signos son realidades estipuladas, a pesar de que Hilbert se refiera a la comprensión de los signos con independencia del modo en el que son producidos. Parece que se alude a nuestra comprensión inmediata de los signos, de la forma de los signos. Esta circunstancia nos aproxima a la concepción convencionalista ya que el punto de partida son estipulaciones lingüístico-formales. Podría considerarse que se trata de una conciliación entre el descriptivismo y el convencionalismo. Consideramos que esta síntesis no es descartable de forma absoluta. No obstante, nos inclinamos a asumir la versión convencionalista por el siguiente motivo: si bien es cierto que la concepción hilbertiana escapa a la petición de principio del descriptivismo general, consideramos que no explica el salto del formalismo lógico a las realidades pre-teóricas discretas. Es importante insistir en que esta lectura no pretender ser la *exégesis correcta* de los textos hilbertianos. Admitimos la posibilidad de otras interpretaciones más adecuadas a las intenciones de Hilbert. Más aún, insistimos en que no se trata de *exégesis alguna*. Simplemente nos apoyamos en ciertas ideas de Hilbert sobre la fundamentación de la matemática para esclarecer nuestro convencionalismo relativo a la concepción de la lógica.

Podemos compendiar nuestra lectura del siguiente modo: las realidades pre-teóricas intuitivas de las que se parte son estipulaciones teórico-formales. Es importante destacar que Hilbert (1922 §26) distingue entre la postura general en virtud de la cual las realidades pre-teóricas discretas son los signos y la aplicación particular de esta concepción. Se centra en los signos de los números debido al carácter elemental de la aritmética, por este motivo: "With this philosophical attitude we turn first to the theory of elementary arithmetic". Es necesario llamar la atención respecto al año en el que escribe este artículo, pues aún quedan nueve para la publicación de los resultados de

limitación de Gödel. En los primeros párrafos de este artículo Hilbert (1922, §8-11) afirma insistentemente el carácter indubitable de la consistencia de la teoría de números: "not even the shadow of an inconsistency has appeared". Parte del rechazo a la postura de Weyl reside precisamente en que su *principio de constructividad* cuestiona la estabilidad interna de los fundamentos del análisis. Por este motivo le acusa de "ver fantasmas" (*he is seeing ghosts*). Lo que nos interesa mostrar es que la aritmética no es el único punto de partida posible. Podemos partir de las estipulaciones simbólicas relativas a las reglas de inferencia o incluso relativas a las condiciones semánticas.

No obstante, Hilbert (1922, §27-ss) se centra en la aritmética elemental. Su propósito primario estriba en explicar la misma existencia de la aritmética bajo la concepción de sus signos como objetos concretos intuitivos. Esto le lleva a confeccionar una explicación de los números. Para hacerlo Hilbert (1922, §28) establece unas reglas sintácticas elementales de formación de números. La estipulación de partida es la siguiente: "The sign 1 is a number" (Hilbert 1922, §27). A partir de aquí se establece que el signo 1 + 1 es un número. Un signo numérico (*Zahlzeichen*) siempre empieza y termina con "1" y admite la concatenación con "+". Estos signos son los objetos discretos primarios. Ahora bien, se trata de signos sin significado. Existen otros signos tales como "2" o "3" cuyo significado reside en la abreviación de los signos "1 + 1" y "1 + 1 + 1", respectivamente. Asimismo, se usan otros símbolos para expresar aserciones tales como "=". En este sentido "2 + 3 = 3 + 2" es una fórmula sin significado. Simplemente afirma que abrevian el mismo signo numérico. Se emplean estos signos "For purposes of communication" (Hilbert 1922, §30).

Lo que nos interesa destacar de esta manera de componer la teoría de números es la distinción que mantiene Hilbert (1922, §31) entre el formalismo matemático y el razonamiento *contentual* metateórico. Al tratar a los signos numéricos como objetos concretos intuitivos no se están estableciendo axiomas y en ellos no cabe la inconsistencia. Se realizan declaraciones *contentuales* sobre tales objetos y sus procedimientos de construcción y destrucción. Hilbert (1922, §31) remarca que no se está presuponiendo el principio de inducción matemática. Este principio opera en el nivel del formalismo matemático. Ahora bien, los procedimientos *contentuales* metateóricos no son suficientes para números y funciones infinitas ya que no es posible introducir infinitas abreviaciones una a una para infinitos números. La solución de Hilbert (1922, §33) a este problema consiste en confeccionar un modo de "contemplar"

(*higher level of contemplation*) las fórmulas y pruebas de la teoría de números de tal manera que sea posible considerarlas como objetos del razonamiento *contentual*. El modo de llevarlo a cabo es mediante una formalización de las teorías matemáticas. Se deben formalizar también las pruebas y, por consiguiente, las definiciones y las inferencias pasan a formar parte del propio nivel matemático. Para Hilbert (1922, §33), los axiomas y las pruebas son en esta formalización de las teorías matemáticas lo mismo que los signos numéricos son en la aritmética elemental.

Lo que observamos es que Hilbert (1922, §33), por un lado, distingue claramente entre "the formulae and formal proofs on the one hand, and the contentual ideas on the other". Pero, a la vez, con la formalización axiomática establece una forma de operar lógico-matemáticamente con el razonamiento *contentual*. Desde nuestra perspectiva, alejándonos de la literalidad de los textos hilbertianos, nos interesa mostrar una analogía entre (i) la relación del razonamiento *contentual* con el formalismo matemático y (ii) la relación de la semántica formal con el cálculo deductivo. La analogía la podemos comprender en los siguientes puntos:

i. Dado que, debido a la infinitud, no se puede comprobar modelo a modelo la validez de cada fórmula bien formada, necesitamos un procedimiento efectivo —finito y discreto, esto es, método finitario— para enumerar recursivamente las fórmulas válidas. Este procedimiento es un cálculo deductivo y el propósito es que tenga la capacidad computacional suficiente para que con él se puedan obtener las verdades metateóricas. Por este motivo es imprescindible la completud (semántica) del cálculo. Es el propio Hilbert (1922, §33) el que se refiere a su formalización diciendo que lo hace "following the example of the logical calculus".
ii. Del mismo modo que el nivel del razonamiento *contentual* de Hilbert, el nivel semántico formal no tiene que ver con el fenómeno de la significación. Son estipulaciones simbólicas sin significado. Se puede denominar significado a la relación de un nivel con el otro, como la abreviación de Hilbert. La realidad pre-teórica es, a su vez, una convención lingüística susceptible de un tratamiento formal y no una realidad metafísica externa.

El segundo punto es el que nos interesa destacar, dado que con él se evita la comprensión de la semántica como perteneciente al ámbito de las creencias pre-teóricas

injustificadas de carácter intuitivo o metafísico. Se trata de meras estipulaciones simbólicas algebraicas en el caso de la teoría de modelos y no de un reflejo del fenómeno de la significación o de la representación de la verdad metafísica. La noción de verdad en una estructura es otra estipulación simbólica. A pesar de nuestra analogía propuesta, cabe señalar que este proyecto se concibió como un avance en el desarrollo en teoría de la prueba. No obstante, tal como hemos propuesto, el planteamiento admite una *lectura semanticista de Hilbert*[82] o una *lectura sintacticista de la semántica*.

Para que funcione la antedicha analogía entre (i) la relación del razonamiento *contentual* con el formalismo matemático y (ii) la relación de la semántica formal con el cálculo deductivo, debemos eliminar el carácter necesariamente intuitivo de los objetos concretos del nivel *contentual* y mantener la mera convencionalidad para construir modelos de distinta índole. Este último paso se apoya en el modo tan restringido con el que Hilbert (1926) caracteriza a las expresiones relativas a tales objetos. Las expresiones elementales se caracterizan por que de modo intuitivo podemos comprobar que:

- Contienen símbolos numéricos.
- Se le puede aplicar las leyes universales (aristotélicas).
- Se sostiene el principio de no contradicción.
- Se sostiene el principio *Tertium non datur*.
- La falsedad de una expresión es equivalente a la verdad de su negación.

El carácter convencional es claro: "we could allow 1 = 1 + 1 to count as a formula along with 1 = 1, provided it were a provable formula yielded by our rules of inference" (Hilbert 1922, §60). Ahora bien, Hilbert considera que debe establecerse en el nivel formal una expresión equivalente a la contradicción *contentual*. Para ello introduce el signo "≠" y decreta que un sistema axiomático es consistente si "a = b" y "a ≠ b" no pueden probarse a la vez. Es una forma deliberada de evitar el uso de la conectiva lógica de la negación. Teniendo a la consistencia como tarea principal, la formalización supone que la "matemática estricta" (*proper mathematics*) no es otra cosa

[82] Siguiendo con la lectura semanticista del formalismo hilbertiano, en el apéndice 5 interpretamos la técnica de reinterpretación para las pruebas de consistencia relativa en el enfoque formalista del método axiomático como antecedente de la teoría de modelos. Para ello nos apoyamos en Blanchette (2018 y 1996).

distinta a un conjunto de teoremas o fórmulas probables. Lo característico de estas fórmulas es que su construcción incluye signos lógicos. Este rasgo es importante en tanto que "a simultaneous construction of arithmetic and formal logic is necessary because of the close connection and inseparability of arithmetical and logical truths" (Hilbert 1922, §79).

Asimismo, Hilbert (1922, §80) pone de manifiesto que la formalización lógica de la matemática (la cual formalización constituye la matemática en sentido estricto) genera el surgimiento de la metamatemática: "there appears a mathematics that is to some extent new, a *metamathematics* which serves to safeguard it by protecting it from the terror of unnecessary prohibitions as well as from the difficulty of paradoxes". Es en el nivel metamatemático donde operan las inferencias *contentuales* y se prueba la consistencia del sistema axiomático en cuestión. Lo que proponemos no es solo que las inferencias *contentuales* de la metamatemática se puede formular términos de la semántica formal habitual actualmente, sino que la semántica formal puede comprenderse como los objetos del nivel *contentual*, esto es, como meros signos convencionales.

En este artículo Hilbert (1922, §34) pretende llevar a la práctica este planteamiento y probar la consistencia de los axiomas de la aritmética[83]. Para ello empieza introduciendo un vocabulario y unas reglas de formación de fórmulas (Hilbert 1922, §§35-50). A continuación, establece los axiomas y las reglas de inferencia (§§51-56). Posteriormente (§§57-59), define el esquema inferencial de las pruebas y con esta definición establece la noción de fórmula probable relativa a un sistema axiomático (o teorema). Al basarse las pruebas en los axiomas se garantiza el carácter constructivo dentro de un planteamiento formalista. "Thus the concept 'provable' is to be understood relative to the underlying axiom-system. (…) keeping w se encuentra en las pruebas dentro de un sistema axiomático definido.ith our constructive tendency". Lo que nos interesa destacar es que el cons tructivismo del formalismo hilbertiano Las pruebas son pasos finitos y discretos, al igual que los signos numéricos como objetos primarios (son

[83] Como se ha mencionado, falta casi una década para los resultados de limitación de Gödel. Hilbert (1922, §§61-71) prueba la consistencia del siguiente sistema axiomático: (i) a = a, (ii) a = b → a + 1 = b + 1, (iii) a + 1 = b + 1 → a = b, (iv) a = c → (b = c → a = b), (v) a + 1 ≠ 1, el cual es solo una parte de la aritmética. Nótese que "→" no es el condicional relevante.

contables infinitos). En este sentido, la condición de los métodos finitarios conecta con el razonamiento intuitivo dado. El razonamiento *contentual* está presente en las pruebas. Ahora bien, es un constructivismo al que le es suficiente la prueba de consistencia, puesto que el carácter constructivo ya está garantizado por la propia noción de "prueba relativa a un sistema axiomático". Todo esto quiere decir que son las propias pruebas las que constituyen el objeto de estudio en este programa de fundamentación, estableciendo así una *teoría de la prueba*: "we are thus compelled to a sort of *proof theory* which studies operations with the proofs themselves".

7.2. FINITARISMO

Hilbert (1926) considera que las disputas relativas a los fundamentos del análisis se deben a la confusión sobre significado del concepto matemático del *infinito*. Se debe llevar a cabo una aclaración conceptual del modo en el que se emplea matemáticamente la noción de infinito[84]. Hilbert se propone resolver el "problema del infinito" (*the problem of the infinite*), a saber, la noción de infinito como totalidad[85] empleada en métodos deductivos. Ejemplos de esta noción es la atribución de determinada propiedad a todos los números o la afirmación de que existen números con determinada propiedad: "as when one treats of all real numbers with a certain property or when one argues that there exist real numbers with a certain property". El propósito es eliminar el uso de la idea de totalidad infinita en la deducción lógica. Para realizar esta tarea el objetivo consiste en reducir los métodos deductivos infinitos a procedimientos finitos de tal manera que se obtengan las mismas derivaciones para obtener los mismos teoremas. La consecución de este objetivo supondría el establecimiento de la certidumbre en los procedimientos matemáticos.

La deducción lógica *contentual* no conduce a incorrecciones salvo —según Hilbert (1926)— cuando partimos de definiciones arbitrarias, en particular las que se forman con una cantidad infinita de objetos. Nótese que en este caso Hilbert se refiere al

[84] Estas aclaraciones las realiza Hilbert (1926) en el contexto de un homenaje a Karl Weierstrass, de manera que sus observaciones parten del reconocimiento de la fundamentación que Weierstrass realizó del cálculo infinitesimal.

[85] Hilber (1926) observa que Weierstrass eliminó del análisis "lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño" reduciendo sus enunciados a relaciones entre magnitudes finitas. Ahora bien, lo que no eliminó la noción de totalidad infinita como en la definición de los números reales con series infinitas.

nivel *contentual*. Si la relación de consecuencia lógica *contentual* se aplica sobre estas definiciones, entonces es una aplicación ilegítima. Las precondiciones para el uso legítimo de la deducción lógica *contentual* no son, a su vez, puramente lógicas. Hay una independencia de la lógica y la matemática que queda puesta de manifiesto en la existencia de tales precondiciones[86]. Debe existir algo "dado" en tanto que precondición para la aplicación de la deducción lógica. Esto "dado" son objetos concretos extra-lógicos de los que tenemos conocimiento intuitivo: "As a further precondition for using logical deduction and carrying out logical operations, something must be given in conception, viz., certain extralogical concrete objects which are intuited as directly experienced prior to all thinking" (Hilbert 1926). Tales objetos no reducibles son los símbolos.

Solo al considerar la totalidad de los números nos encontramos ante "the true infinite" y no un mero infinito potencial. El infinito actual debe presentarse a la vez y no aludir a la posibilidad de lo infinitamente grande o pequeño. Así, pues, Hilbert (1926) afirma que la teoría que tiene una mayor proximidad al pensamiento filosófico y que, por tanto, permite aclarar la naturaleza del concepto de infinito es la teoría de conjuntos desarrollada por Cantor. En particular se interesa por los números transfinitos[87]. Ahora bien, a pesar del logro en el tratamiento matemático de la noción de infinito actual, afirma Hilbert que la falta de atención en los procedimientos deductivos generó el surgimiento de las paradojas encontradas por Russell y Zermelo. Pues bien, para evitar las paradojas, Hilbert (1926) propone establecer "the same certitude for our deductions as exists in ordinary elementary number theory". La certidumbre de la aritmética elemental es para Hilbert algo intuitivo de lo que no cabe dudar y de la que no surgen contradicciones. La aritmética finitaria puede reconstruirse en base a consideraciones meramente simbólico-*contentuales*. El infinito no se corresponde con los métodos *contentuales* intuitivos, los cuales son finitarios.

El objetivo no consiste solo en mostrar el aspecto contraintuitivo de la totalidad infinita desde la perspectiva filosófica *contentual*, sino que es necesario disponer de

[86] En este sentido, Hilbert (1926) afirma que se encuentra próximo al pensamiento de Kant y se aleja de Frege y Dedekind.

[87] Hilbert (1926) llega a declarar que "This theory is, I think, the finest product of mathematical genius and one of the supreme achievements of purely intellectual human activity".

recursos con los cuales sustituir una totalidad infinita en términos finitarios: por un lado, "Our principal result is that the infinite is nowhere to be found in reality. It neither exists in nature nor provides a legitimate basis for rational thought", y por otro, "Operating with the infinite can be made certain only by the finitary" (Hilbert 1926). Para mostrarlo, toma el ejemplo del cuantificador existencial y aclara que un enunciado existencial del tipo "existe algún…" es de carácter finitario. Así, pues, "existe algún objetos con determinada propiedad y tal objeto pertenece a una totalidad infinita (como los números naturales)" se adecúa a los procedimientos finitarios en tanto que es un enunciado parcial y más débil que aquel enunciado que pretenda expresar lo mismo mediante una disyunción infinita ("este objeto o este otro objeto o este otro objeto… *ad infinitum*… tiene determinada propiedad"). La disyunción infinita no pertenece a los métodos finitarios. El enunciado existencial no puede comprenderse como una disyunción infinita dado que esta extensión incurre en carencia de significado (intuitivo para Hilbert).

> A statement such as 'there exists' an object with a certain property in a finite totality conforms perfectly to our finitary approach. But a statement like 'either p + 1 or p + 2 or p + 3... or (ad infinitum) ... has a certain property' is itself an infinite logical product. Such an extension into the infinite is, (…), no more permissible than the extension from finite to infinite products in calculus. Such extensions, accordingly, usually lapse into meaninglessness. (Hilbert 1926)

Se trata del mismo problema de introducir infinitas abreviaciones de las teorías matemáticas para considerarlas desde el razonamiento metateórico *contentual*. La solución es, tal como se ha explicado, la formalización de las teorías matemáticas estableciendo a la prueba deductiva como objeto de estudio fundamental. Los objetos concretos pasan a ser las fórmulas en lugar de los símbolos numéricos intuitivos y la prueba intuitivo-*contentual* pasa a ser la derivación de teoremas a partir de reglas y axiomas.

Es importante señalar que en el nivel *contentual* con el finitarismo debemos rechazar muchos recursos que consideramos esenciales. El propio Hilbert (1926) se da cuenta de ello pensando principalmente en la práctica matemática y por este motivo admite que "we must *supplement the finitary statements with ideal statements*". En este sentido distingue dos tipos de expresiones: las elementales con significado y las fórmulas entendidas como "estructuras ideales de la teoría", las cuales carecen de

significado y permiten la validez universal de las leyes lógicas. Carecen de significado precisamente por no ser enunciados finitarios. En este punto es donde se vuelve necesaria la formalización de las operaciones lógicas y de las pruebas, lo cual exige emplear símbolos lógicos para sustituir las relaciones lógicas por fórmulas.

Lo que hace Hilbert es hacer uso del cálculo lógico, el cual ya estaba desarrollado pero con una perspectiva diferente que entiende que es compatible con la concepción finitaria. Con el lenguaje formal del cálculo lógico convierte en fórmulas a los enunciados matemáticos y aplica la deducción en términos de métodos formales. Ni los símbolos lógicos ni las fórmulas formadas a partir de ellos tienen significado, puesto que se trata de estructuras ideales. Este es el vínculo del formalismo con el finitarismo propio del nivel metateórico *contentual* intuitivo. Los métodos formales de prueba a partir de reglas sustituyen a la deducción *contentual*. El objetivo es garantizar la corrección del cálculo a partir del nivel *contentual* y garantizar la operatividad de las totalidades infinitas a partir del cálculo lógico. Lo que proponemos, al margen de Hilbert, es que esta relación la podemos hacer corresponder con las propiedades de la *corrección* y la *completud*, esto es, con la relación entre la semántica y la sintaxis. Esta prueba en el metalenguaje es necesaria precisamente por un problema con el infinito, a saber: nos encontramos ante la imposible tarea —por infinita— de comprobar fórmula a fórmula en cada modelo. Si el cálculo es *correcto*, entonces disponemos de un procedimiento efectivo (discreto y finito) para enumerar recursivamente los enunciados del nivel semántico (las inferencias válidas). Ahora bien, no nos comprometemos con la caracterización "intuitiva" que hace de los objetos del nivel del razonamiento *contentual*. Admitimos meramente el aspecto convencional del *símbolo*.

Este planteamiento abre diversas posibilidades de reinterpretación filosófica sobre los fundamentos de la lógica. Una posibilidad en la comprensión filosófica de los fundamentos de la lógica es la puesta en cuestión de la distinción tan tajante entre semántica y sintaxis. La diferencia es meramente relativa a la capacidad computacional del procedimiento efectivo del que disponemos. Si no nos permite enumerar las fórmulas válidas, entonces es mera semántica. Si nos permite enumerar los teoremas, entonces nos encontramos en el plano sintáctico. Si el conjunto de teoremas está incluido en el conjunto de fórmulas válidas, entonces el cálculo es *correcto* y podemos enumerar las fórmulas válidas. El sistema es *completo* si el conjunto de fórmulas válidas está incluido en el de teoremas. Si, además, el procedimiento efectivo es capaz de

enumerar recursivamente los no-teoremas, entonces es *decidible* y nos encontramos en teoría de la computabilidad. Si un sistema es decidible, como el caso de la lógica clásica de orden cero o el fragmento monádico de primer orden, entonces la distinción entre semántica y sintaxis es meramente conceptual ya que en términos técnico-formales colapsan. Desde nuestro punto de vista esta distinción meramente conceptual exige ser justificada, lo cual resulta una tarea difícilmente resoluble dado nuestro convencionalismo. Afirmar que un procedimiento como las tablas de verdad tiene que ver con la semántica en términos de significado exige una tarea no lógica de difícil solución filosófica, salvo que se trate de una mera cuestión de nomenclatura por aquello a lo que preferimos denominar "significado". Desde nuestro planteamiento, la semántica convencional no tiene que ver con el significado, pues se trata de meros símbolos. En este punto también nos alejamos de Hilbert para el cual el razonamiento *contentual* es el propio del significado.

Una posible confusión que debemos evitar es que no se trata de una comprensión de la completud como decidibilidad. La decidibilidad lo que pregunta es si el sistema lógico tiene capacidad para determinar si una fórmula en particular cualquiera es o no es consecuencia de un conjunto dado de premisas. La completud se predica del cálculo deductivo. $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$[88], donde "$\Rightarrow$" es el condicional material en el metalenguaje. Lo que expresa es que si A es consecuencia semántica de un conjunto de premisas, entonces se puede probar deductivamente. Esto exige que el conjunto de reglas del cálculo deben ser suficientes para establecer algo que en el nivel semántico se entiende como válido. Con $\vDash A \Rightarrow \vdash A$ lo que se demuestra es un control de la nociones semánticas intuitivas como la de verdad lógica a partir de nociones constructivas como la de teorema.

La confusión puede darse en función de la estrategia que se siga para atacar la prueba de completud. Si se empieza de esta forma "$\nvDash A \vee \vdash A$" (ya que es una expresión equivalente a "$\nvDash A \vee \vdash A$"), donde "$\vee$" es la conjunción extensional en el metalenguaje, lo que exige el esquema de la prueba es establecer un procedimiento efectivo para construir el contramodelo. Lo que se expresa en este caso es que o bien se puede

[88] Esta es la expresión de la completud fuerte. La completud débil es la siguiente: $\vDash A \Rightarrow \vdash A$, donde las premisas son el conjunto vacío por lo que A es una verdad lógica porque es verdadera en todos los modelos.

construir una prueba de la verdad lógica, o bien se puede construir un contramodelo. Esta lectura constructiva es equivalente a la solución del problema de la decidibilidad[89] (decidir si una fórmula es o no es un teorema). Ahora bien, la prueba de completud de Gödel diferencia la completud de la decidibilidad en lógica de primer orden. Con esto queremos decir que la interpretación de la completud como decidibilidad no se corresponde con nuestra indistinción conceptual entre el nivel semántico y el sintáctico desde el convencionalismo. Ambos niveles son meras estipulaciones simbólicas, pero sí se distinguen a nivel técnico por la menor capacidad computacional del sistema cuanta mayor capacidad expresiva del lenguaje artificial. La *lectura sintacticista de la semántica* no quiere decir que $\vDash A \Rightarrow \vdash A$ signifique que podamos determinar cuándo A es o no es una verdad lógica.

7.3. Reducción de complejidad: conjuntos de fórmulas como modelos

Un sistema lógico consta de (i) un cierto lenguaje, de (ii) una definición de sus modelos, esto es, de una estructura simbólica que nos permite interpretar las fórmulas como verdaderas y como falsas y de (iii) de un conjunto de reglas de un cálculo que nos permite sistematizar lo que se valida en la consecuencia semántica. Planteado de este modo, la operatividad del trabajo en lógica establece una prioridad de la semántica. Los cálculos deben demostrar que no prueban fórmulas falsas semánticamente (esta es la propiedad de la corrección del cálculo). Como puede observarse, el sistema deductivo tiene la finalidad de sistematizar las fórmulas válidas. Por este motivo es necesaria la propiedad metalógica de la completud, la cual plantea el problema de garantizar que las reglas del cálculo sean suficientes para probar las fórmulas válidas. Los cálculos deben ser correctos con respecto a los modelos introducidos. Dichos modelos constituyen el análisis intuitivo previo del comportamiento de las constantes lógicas. Esto quiere decir que se da por sentada su garantía al definir las reglas semánticas de las constantes.

Este planteamiento que prioriza la semántica se debe a la popularización de la prueba de completud de Henkin en el trabajo de la lógica como disciplina. A pesar de que la prueba de completud de Gödel es de 1929-30 y la prueba de Henkin de 1949, esta última se popularizó debido a que puede implementarse con facilidad a cualquier

[89] Bernays y Behmann atacaron el problema de la completud en estos términos para el fragmento proposicional y el fragmento monádico de primer orden, respectivamente.

sistema lógico. Permite ver que la completud es una propiedad general de cualquier semántica modelo-teórica de cualquier sistema.

El antecedente de este condicional $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$ expresa algo de tipo intuitivo según el cual la fórmula A es consecuencia semántica de ciertas premisas respecto a un determinado conjunto de modelos. El consecuente del condicional expresa una construcción (finitarismo) en virtud de la cual se puede probar A a partir de Γ. Es una reducción de una cantidad infinita no numerable a una cantidad enumerable de las pruebas. En este sentido en la completud hay una reducción de complejidad del mismo modo que Hilbert pretendió hacer respecto al nivel *contentual*. Con esta analogía, en las secciones anteriores defendimos que la reducción es a los meros símbolos estipulados. No obstante, debemos mostrar cómo se produce este paso a la comprensión de los modelos en términos de pruebas y conjuntos de fórmulas bien formadas sintácticamente.

En nuestra analogía establecida en la *lectura semanticista de Hilbert* o *lectura sintacticista de la semántica*, podemos comprender la prueba de completud precisamente como la reducción de complejidad al nivel *contentual* que Hilbert pretendía realizar a través de la formalización de la matemática. La reducción de complejidad es un modo de operativizar las totalidades infinitas cumpliendo, así, la condición del finitarismo, es decir, la del empleo de métodos constructivos. Nuestro objetivo reside en justificar el convencionalismo en el plano de la filosofía de la lógica. El nivel básico metateórico de los modelos no es más que símbolos estipulados y no la descripción de una realidad pre-teórica. Ahora bien, para satisfacer esta reducción no basta con señalar la analogía antedicha, sino que es preciso mostrar el mecanismo por el cual se comprenden formalmente los modelos. Este mecanismo lo encontramos en el *lema de Lindenbaum*, puesto que a partir de él tenemos que los conjuntos máximamente consistentes se comportan en términos operativos como modelos.

La pertinencia del *lema de Lindenbaum* en el nivel de la metateoría se comprende en el esquema de la prueba de completud de Henkin. Lo que se intenta probar es la contrapositiva de $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$, esto es: $\Gamma \nvdash A \Rightarrow \Gamma \nvDash A$. Lo cual quiere decir que si A no es probable a partir de Γ, entonces hay un contramodelo en el que las

premisas son verdaderas y la conclusión falsa. Distinguimos los siguientes pasos principales de este esquema[90]:

1. Partimos de $\Gamma \nvdash A$ como hipótesis.
2. Para tratar $\Gamma \nvdash A$ en términos constructivos, se intenta demostrar que si A no es probable a partir de Γ, entonces hay un conjunto Δ tal que Γ está incluido en Δ y que a partir de Δ se puede probar la negación de A: $\Gamma \nvdash A \Rightarrow \exists\Delta(\Gamma \subseteq \Delta \wedge \Delta \vdash \neg A)$.
3. Si Δ existe, entonces tenemos que también existe un modelo tal que satisface las premisas y la conclusión: $\Delta \vdash \neg A \Rightarrow \exists M \in \mathcal{M}(M \Vdash \Delta \wedge M \Vdash \neg A)$, donde $\mathcal{M}$ es la clase de modelos de la lógica de primer orden.
4. Dado que Γ está incluido en Δ, concluimos que el modelo construido en el paso anterior también satisface las fórmulas de Γ. Además, que dicho modelo hace verdadera la negación de la conclusión quiere decir que hace falsa la conclusión. Así, pues, $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow M \Vdash \Gamma \wedge M \nVdash A$.
5. Dado que hay un modelo M que satisface Γ y que hace falso a A, tenemos $\Gamma \nvDash A$.
6. Si A no es derivable de Γ, entonces existe un contramodelo en virtud del cual A no es consecuencia semántica de Γ: $\Gamma \nvdash A \Rightarrow \Gamma \nvDash A$.

Lo que es importante destacar para nuestros objetivos es el tránsito del paso 3 al paso 4. Hasta el paso 3 simplemente se trabaja con la derivabilidad, pero en el paso 4 se trabaja con modelos. La clave que permite este tránsito es la construcción del conjunto Δ. Este conjunto debe ser *máximamente consistente* y se obtienen con la *construcción de Lindenbaum*. Al ser un conjunto máximamente consistente se puede construir el modelo del paso 3. Esto se debe a que un conjunto máximamente consistente tiene la capacidad para representar en el lenguaje cómo opera un modelo. Se puede entender que un conjunto máximamente tiene tanta "información" como la de un modelo. Esto es lo que permite construir el modelo que satisface las premisas y hace falsa la conclusión. Un modelo puede entenderse como un mundo posible, de modo que un conjunto máximamente consistente es la descripción de un mundo posible en el lenguaje. Un conjunto máximamente consistente determina la capacidad que tiene un lenguaje para describir un mundo posible. Entendemos que un conjunto máximamente consistente

[90] Todas las conectivas están en el metalenguaje.

puede comprenderse filosóficamente como la descripción lingüística de un mundo posible[91].

La definición de un conjunto máximamente consistente Δ responde a dos[92] condiciones[93]:

i. Es consistente, esto es, nunca contiene una fórmula y su negación: $\neg\exists A(A\in\Delta \wedge \neg A\in\Delta)$.
ii. Para cada fórmula, dicha fórmula pertenece al conjunto o su negación pertenece al conjunto: $\forall A(A\in\Delta \vee \neg A\in\Delta)$.

La relación con los modelos es clara: un modelo asigna a cada fórmula uno y solo un valor de verdad y se lo asigna a todas las fórmulas. Un conjunto máximamente consistente se comporta en el lenguaje como un modelo. Con el *lema de Lindenbaum* tenemos el proceso para construir un conjunto máximamente consistente a partir de un conjunto consistente cualquiera. Con el *teorema de Henkin* tenemos la forma en la que se debe trabajar con la "información" del conjunto máximamente consistente en cuestión para obtener un *modelo canónico*. Se debe determinar que si una fórmula pertenece al conjunto máximamente consistente, entonces el modelo la satisface y viceversa. A continuación, detallamos los aspectos técnicos de esta idea. No obstante, es importante tener en cuenta que el objetivo filosófico orientado al convencionalismo semántico es comprender cómo caracterizar sintácticamente a un modelo.

En el paso 2 se establece $\Gamma\nvdash A \Rightarrow \exists\Delta(\Gamma \subseteq \Delta \wedge \Delta \vdash \neg A)$ para poder trabajar en términos constructivos con $\Gamma\nvdash A$, lo cual tiene un carácter ideal-intuitivo. La idea es la siguiente, de partida simplemente tenemos que una fórmula no se sigue de un conjunto de premisas, que no disponemos de "información" suficiente para que A sea consecuencia de Γ, pero no podemos determinar el motivo. Con el consecuente del paso

[91] Es posible relacionar esta idea con la noción de *descripción de estado* de Carnap (1947). Esta relación puede emparentarse con cierta interpretación sintacticista de la semántica.

[92] Para la discusión conceptual nos ceñimos a los aspectos del lenguaje proposicional. No obstante, es preciso tener en cuenta una tercera condición de los conjuntos máximamente consistentes, a saber, el conjunto tiene que ser ejemplificado: para toda fórmula A tipo $\exists x B(x)$, si $A \in \Delta$ entonces existe una constante invidual a tal que $B(x) \in \Delta$.

[93] El conjunto que contiene todas las fórmulas sin cumplir estas condiciones sería el propio lenguaje.

2, al establecer que existe un conjunto que incluye al conjunto de premisas, se explica el motivo por el cual A no se sigue de Γ puesto que también se establece que la negación de A se sigue deductivamente del conjunto Δ que incluye a Γ. Esto quiere decir que la "información" Γ puede completarse hasta formar Δ de tal modo que nos explica por qué A no se sigue de Γ. Se puede interpretar filosóficamente afirmando que el objetivo reside en completar la información hasta el punto de disponer de una descripción total del mundo. Un conjunto que puede cumplir esta funcionalidad es un conjunto máximamente consistente de fórmulas.

Para construir un conjunto máximamente consistente a partir de otro conjunto consistente empezamos considerando que si un conjunto S es máximamente consistente, entonces $A \notin S \Rightarrow S \cup \{A\}$ es inconsistente. Es un modo de comprender una forma maximal de información. Si una fórmula no pertenece a esa descripción se debe a que simplemente no puede pertenecer a ella porque generaría una inconsistencia. Se debe probar esta afirmación. Partimos de $A \notin S$ y, dado que S es máximamente consistente, tenemos que $\neg A \in S$. Además, por reflexividad, si una fórmula pertenece a dicho conjunto, tal fórmula se sigue del conjunto de fórmulas, por lo que tenemos $S \vdash \neg A$. Por el mismo motivo tenemos $S \cup \{A\} \vdash A$, lo cual es equivalente a $S, A \vdash A$. Ahora bien, por monotonía y tomando $S \vdash \neg A$, obtenemos $S, A \vdash \neg A$. De lo anterior y de $S, A \vdash A$ se sigue $S, A \vdash A \wedge \neg A$. Se concluye, por tanto, que $S \cup \{A\}$ es inconsistente. Con ello se está probando que los conjuntos máximamente consistentes son maximales.

También se puede probar que si S es un conjunto máximamente consistente, entonces $\forall A, A \in S \Leftrightarrow S \vdash A$. Este punto nos interesa en tanto que expresa que un conjunto máximamente consistente se comporta como una teoría. La pertenencia de una fórmula a un conjunto máximamente consistente es intercambiable con el hecho de que dicha fórmula sea una consecuencia en el sistema deductivo de S. Esto quiere decir, a su vez, que el procedimiento para construir un conjunto máximamente consistente es precisamente el cálculo. Se completa la "información" asegurando que las consecuencias deductivas de S se encuentren ya en S. La prueba de la parte del bicondicional de izquierda a derecha es elemental por reflexividad. Nos centramos en la parte de derecha a izquierda: $S \vdash A \Rightarrow A \in S$. Procedemos por reducción al absurdo: partimos de $S \vdash A$ y suponemos $A \notin S$. Dado que S es máximamente consistente y que A no pertenece a él, tenemos que la negación de A pertenece a S: $\neg A \in S$. De lo anterior se

sigue que S ⊢¬A, lo cual entra en contradicción con la hipótesis de partida S ⊢A. Se concluye que A tiene que pertenecer a S. Con A∈S ⇔ S ⊢A tenemos una lectura sintacticista de la semántica[94].

En este punto disponemos de "A∉S ⇒ S∪{A} es inconsistente" y de "A∈S ⇔ S ⊢A", es decir, que un conjunto S máximamente consistente es un conjunto máximo de "información" y se comportan como teorías completas, respectivamente. Ahora se debe mostrar cómo se construye un conjunto máximamente consistente a partir de un conjunto consistente. Empezamos por la siguiente condición: si el conjunto T es consistente, entonces T∪{A} es consistente o T∪{¬A} es consistente. Si probamos esto, lo que garantizamos un conjunto consistente puede ampliarse en general. En este punto aún no se explica cómo se amplía, sino que lo que interesa es aclarar primero es que no hay fórmulas que impidan esta extensión. Para probarlo necesitamos un resultado previo, a saber: de un conjunto consistente T se sigue deductivamente la fórmula A sii la unión de T con la negación de A es inconsistente. Dicho de otro modo: T ⊢A ⇔ T∪{¬A} es inconsistente. La prueba del bicondicional de derecha a izquierda es elemental, pero para probar la conversa necesitamos cierto desarrollo. Para probar T∪{¬A} es inconsistente ⇒ T ⊢ A empezamos con T∪{¬A} es inconsistente. Esto implica que de este conjunto se sigue una fórmula cualquiera y su negación, por lo que tenemos T, ¬A ⊢ B y T, ¬A ⊢ ¬B. Aplicando el metateorema de deducción obtenemos T ⊢ ¬A ⊃ B y T ⊢ ¬A ⊃ ¬B y, por tanto, T ⊢ ¬A ⊃ B ∧ ¬B. Con lo anterior se puede derivar que de T se sigue A, completando la prueba.

Al tener el lema "T ⊢A ⇔ T∪{¬A} es inconsistente", podemos probar que si el conjunto T es consistente, entonces T∪{A} es consistente o T∪{¬A} es consistente. Procedemos por reducción al absurdo, por lo que suponemos que T∪{A} es inconsistente y T∪{¬A} es inconsistente. El lema anterior permite derivar que de T se sigue ¬A y de T se sigue A: T ⊢ ¬A y T ⊢ A. Así, pues, T es inconsistente, contrariamente a lo que se suponía de partida. Se concluye que si T es consistente, entonces T∪{A} es consistente o T∪{¬A} es consistente. Con este resultado se garantiza que es posible añadir a un conjunto consistente una fórmula o su negación. Por tanto, tenemos que es posible construir un conjunto máximamente consistente, ahora es necesario exponer cómo. Lo que nos permite explicar el procedimiento es el *lema de Lindenbaum*: a partir de cualquier conjunto consistente de fórmulas T puede construirse un

[94] Es importante señalar que en la semántica en el plan australiano cabe la posibilidad de que estos conjuntos pueden ser inconsistentes e incompletos.

conjunto máximamente consistente S tal que T $\subseteq$ S. El resultado anterior probaba que a cualquier conjunto consistente se le puede añadir cualquier fórmula o su negación, y el *lema de Lindenbaum* explica cómo construir un conjunto máximamente consistente a partir de un conjunto consistente. El procedimiento es la *construcción de Lindenbaum*[95].

Ya se probó que si el conjunto T es consistente, entonces T$\cup${A} es consistente o T$\cup${$\neg$A} es consistente. Ahora, lo que nos interesa es ordenar este proceso de adición de fórmulas. Para que el proceso esté bien ordenado debemos construir una aplicación del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ al conjunto FBF del vocabulario extendido con parámetros individuales[96]. Se trata de una función *en* de enumeración *en*(i) = A_i, donde A es la i-ésima fórmula e $i \in \mathbb{N}$. Al introducir un número la función arroja una fórmula[97]. Disponiendo de esta enumeración se establece con una función recursiva cómo opera cada paso de un conjunto consistente a uno máximamente consistente:

i. La cláusula de base de la función recursiva es la siguiente: S_0 = S, donde S es el conjunto consistente de partida y se toma a S_0 como dicho conjunto.
ii. Se pasa de un conjunto al siguiente mediante tres instrucciones:

[95] Nótese que el término "construcción" no refiere a un procedimiento constructivo tal como lo entendíamos en la discusión sobre el finitarismo.

[96] Al probar A$\in$S $\Leftrightarrow$ S $\vdash$A, donde S es un conjunto máximamente consistente, tenemos que en la derivabilidad formal se emplean elementos que no pertenecen al vocabulario básico, los cuales son parámetros individuales $p_1,\ldots,p_n$. Con los parámetros individuales se pueden eliminar los cuantificadores a través de casos de individuos para aplicar las reglas del cálculo deductivo en el nivel sentencial. Esto lo mencionamos debido a que lo primero que se debe realizar es enriquecer el vocabulario. Los parámetros individuales nombran a individuos del dominio. Tenemos tres tipos de términos, a saber, las variables, las constantes y los parámetros. Con este enriquecimiento tenemos que si $i_0,\ldots,i_n$ es una secuencia tal que cada i_j es una variable individual o una constante individual o un parámetro individual, entonces $R^n{}_j i_0,\ldots,i_n$ es una FBF del lenguaje extendido. Con esto se asume que no se admiten modelos con dominio de cardinalidad mayor a la del conjunto de números naturales.

[97] Se puede suponer simplemente que *en* existe. No obstante, según el grado de aceptación del finitarismo se debe construir dicha función de tal modo que se construya un procedimiento efectivo tal que dado un número podamos determinar cuál es la fórmula A_i. Con esto se está discutiendo la noción misma de *alfabeto* y el orden del lenguaje. Ahora bien, si meramente se apela a la existencia de la función *en*, entonces se está empleando el *axioma de elección* con el cual se apelan a objetos de cierto tipo, dado que no es posible probar sin contradicción que tales objetos no existen, pero no ofrece la construcción de dichos objetos.

- $S_{i+1} = S_i$ si $S_i \cup \{ A_i\}$ es inconsistente
- $S_{i+1} = S_i \cup \{A_i\}$ si $S_i \cup \{A_i\}$ es consistente y $A_i \neq \exists x B$
- $S_{i+1} = S_i \cup \{A_i, B(x, p_n)\}$, donde el parámetro p_n no aparece en S_i ni en A_i. Este es el caso para las fórmulas existenciales (a diferencia de la instrucción anterior). Por este motivo se introduce una instancia de control del cuantificador existencial $B(x, p_n)$. Se añade la fórmula existencial y se ofrece un caso.

iii. $S' = \bigcup S_i$

Las tres instrucciones de (ii) son exhaustivas y consistentes. Estas instrucciones quieren decir que si al añadir una fórmula el conjunto se convierte en inconsistente, entonces no se añade; si al añadirla sigue siendo consistente y no es una fórmula existencial, entonces se añade; y si al añadirla sigue siendo consistente y es una fórmula existencial, entonces se añade y se da un ejemplo. Así, pues, no se añade ninguna fórmula, se añade una fórmula o se añaden dos fórmulas, de modo que si se parte de un conjunto finito, se obtiene un conjunto finito. Ahora bien, un conjunto finito no puede ser máximamente consistente porque en ese caso existirán fórmulas tales que ni ellas ni sus negaciones pertenezcan a dicho conjunto. Por este motivo necesitamos el paso (iii) que define S' como la unión generalizada de todos los S_i. Por consiguiente, lo que se necesita probar es que el conjunto S' obtenido mediante la *construcción de Lindenbaum*[98] es máximamente consistente. Esto último es específicamente lo que prueba el *lema de Lindenbaum*.

Dispuestos así los elementos, podemos formular el *lema de Lindenbaum* del siguiente modo: a partir de cualquier conjunto consistente S se puede construir un conjunto máximamente consistente S' tal que $S \subseteq S'$. Para probar que el límite proyectivo S' obtenido mediante la *construcción de Lindenbaum* es máximamente consistente se debe probar que S' es consistente y que S' es máximo. La prueba de consistencia de S' es sencilla en tanto que S' se obtiene de la unión generalizada de una

[98] En último término el criterio para añadir o no una fórmula consiste en que la consistencia se conserve. Para poder determinar con métodos finitarios que se preserva la consistencia al ser añadida una fórmula, es requerido que la lógica de primer orden sea decidible, pero no lo es. Esto quiere decir que la "construcción" de Lindenbaum no es constructiva o finitaria.

colección de conjuntos consistentes cada uno de los cuales incluye al anterior mediante una enumeración.

Para probar que S' es máximo procedemos por reducción al absurdo. Partimos, pues, de que S' no es máximo. Por tanto, existe alguna fórmula tal que ni ella ni su negación pertenece a S': $\exists B(B \notin S' \wedge \neg B \notin S')$. En este punto hacemos uso de la construcción. Dada la enumeración suponemos que tenemos la incorporación de B en el *i*-ésimo paso para comprobar si la podemos añadir: dado *en*, *en*(*i*) = B. Si la fórmula B no pertenece al conjunto final se debe a que $S_i \cup \{B\}$ es inconsistente. En los sucesivos pasos de la construcción no se podrá añadir B. Esto quiere decir que en todo paso posterior en la construcción se conserva la "información" que impide añadir B de manera consistente: $\forall k > i$, $S_k \cup \{B\}$ es inconsistente. Esta consideración es útil para el paso en el que se tenga que analizar si se puede añadir ¬B. Supongamos *en*(*j*) = ¬B, donde $j > i$. Dado que $S_j \cup \{B\}$ es inconsistente podemos concluir que $S_j \cup \{\neg B\}$ es consistente puesto que, tal como previamente se probó, que si el conjunto T es consistente, entonces $T \cup \{A\}$ es consistente o $T \cup \{\neg A\}$ es consistente. Tenemos, pues, que $S_{j+1} = S_j \cup \{\neg B\}$, de lo que se sigue que $\neg B \in S'$, lo cual entra en contradicción con $\exists B(B \notin S' \wedge \neg B \notin S')$. Se concluye, por tanto que S' es máximo. El núcleo de la prueba es la función de enumeración *en*.

A continuación, se debe demostrar que un conjunto máximamente consistente es una descripción en el lenguaje de un modelo. Para ello se parte de un conjunto máximamente consistente Δ para generar un *modelo canónico* M' de Δ tal que $A \in \Delta$ sii $M' \Vdash A$. El teorema de Henkin prueba que todo conjunto meramente consistente de fórmulas tiene un modelo de cardinalidad enumerable que satisface a las fórmulas del conjunto. Esto quiere decir que con el lenguaje de la lógica de primer orden, con sus reglas sintácticas, se posible describir cómo son los modelos de la lógica de primer orden.

Con los recursos disponibles se puede probar que todo conjunto consistente de fórmulas tiene un modelo de cardinal enumerable. Por tanto, entendemos que cualquier conjunto consistente describe parcialmente (porque no es máximo) a un modelo. Describe todo modelo que satisface sus fórmulas. El hecho de considerar la capacidad "descriptiva" del lenguaje de la lógica de primer orden no nos compromete con una visión realista o *descriptivista* (en nuestros términos) según la cual dicho lenguaje no

sería una mera construcción, sino que posee cierto grado de existencia independiente. Por el contrario, debido a que en términos técnicos la operatividad de un conjunto máximamente consistente y la de un modelo es la misma, defendemos que su distinción responde a aspectos conceptuales externos al funcionamiento lógico, el cual puede mantenerse como meras estipulaciones simbólicas. Desde nuestra perspectiva convencionalista un conjunto máximamente consistente no *describe* un "mundo" intuitivo pre-teórico, sino que, al ser operacionalmente equivalentes, el modelo se entiende en términos sintácticos como un conjunto de fórmulas y reglas de derivabilidad. En el modelo no se construye el mundo tal como se describe en el conjunto máximamente consistente, sino que simplemente se muestra que se puede sustituir por dicho conjunto.

Para probar que todo conjunto consistente de fórmulas tiene un modelo de cardinal enumerable, necesitamos probar un lema previo: para todo conjunto máximamente consistente Δ, existe un modelo M' tal que $\forall A$, $A \in \Delta$ sii M' $\Vdash$ A. M' es el modelo canónico del conjunto máximamente consistente Δ. El *teorema de Henkin* resulta de este lema y el *lema de Lindenbaum*. El teorema de completud resulta del *teorema de Henkin* y el *lema de Lindenbaum*. Un modelo M es un par <D, *I*> formado por un dominio y una función de interpretación. El dominio D' del modelo canónico M' está formado por los parámetros individuales p_i tales que aparecen en las fórmulas que pertenecen al conjunto máximamente consistente Δ. Expresado de otro modo: D' $\coloneqq \{p_i \mid A(p_i) \in \Delta\}$. Los parámetros individuales[99] se introdujeron para "verbalizar" los individuos del modelo. Ahora bien, en este punto lo que se está estableciendo es que vamos a tratar con aquellos individuos que aparecen en las fórmulas pertenecientes a Δ. El cardinal de D' es infinito enumerable. Respecto a la función *I* ':

- Si un término *t* es un parámetro individual, entonces $I'(p_i) = p_i$. Esto quiere decir que asigna lo mismo. En la parte izquierda se lo toma como formando parte del lenguaje y en la parte derecha se lo toma como formando parte al dominio del modelo.
- Si $t \neq t' \Rightarrow I'(t) \neq I'(t')$. Con esta condición se establece que constantes individuales diferentes designan individuos diferentes. Estamos considerando un lenguaje sin identidad, por lo que basta con esta condición.

[99] También denominados "testigos".

– Para las variables de relación se establece que si tenemos en una fórmula parámetros individuales que están en una relación determinada $Rp_1p_2 \in \Delta$, entonces la *n*-tupla en la que consiste la relación pertenece a la interpretación de la variable de relación en cuestión $<p_1, p_2> \in I$ '(R). Expresado de otro modo: R_i^n es una variable relacional *n*-aria, entonces $<t_1^{M'},\ldots, t_n^{M'}> \in I$ '(R_i^n) sii R_i^n $t_1,\ldots, t_n \in \Delta$.

Ahora se puede probar que si Δ es un conjunto máximamente consistente y M' es su modelo canónico, entonces $A \in \Delta \Leftrightarrow M' \Vdash A$. La prueba requiere el uso del principio de inducción[100] y para ordenar el conjunto de fórmulas se emplea el grado lógico *gr*[101]. Al asociar la escala numérica de complejidad a las fórmulas del lenguaje se puede aplicar de forma sencilla el esquema de inducción. La base inductiva consiste en probar que el lema se cumple para las fórmulas de grado lógico 0, esto es, las fórmulas atómicas. La hipótesis inductiva consiste en probar que si el lema se cumple para fórmulas de grado lógico *n*, entonces también se cumple para las fórmulas de grado lógico *n* + 1. Los casos de la hipótesis son relativos a las conectivas. Tomando como ejemplo la negación, suponiendo que el lema se cumple para la fórmula B y que *gr*(B) = *n*, debemos demostrar que el lema se cumple para ¬B.

Nos fijamos en que la cláusula $<t_1^{M'},\ldots, t_n^{M'}> \in I$ '(R_i^n) sii $M' \Vdash R_i^n$ $t_1,\ldots, t_n$ es la que hace verdadera a la fórmula atómica en cuestión en el modelo canónico M'. Por tanto, si tomamos la tercera condición de la función de interpretación (la condición relativa a las variables relacionales), podemos sustituir la parte izquierda del condicional y obtenemos: $M' \Vdash R_i^n$ $t_1,\ldots, t_n \Leftrightarrow R_i^n$ $t_1,\ldots, t_n \in \Delta$. Con ello tenemos que el lema se cumple para fórmulas atómicas. Ahora se tiene que evitar que el cálculo sea incompleto respecto a las fórmulas compuestas, esto es, que una fórmula compuesta sea inconsistente para Δ pero verdadera para M'. En el paso de inducción se prueba que si el lema se cumple para una fórmula A_i de grado *n*, entonces se cumple para una fórmula A'_i de grado *n* + 1. Para probarlo se supone que se da el antecedente y se demuestra que

[100] $(P(0) \wedge \forall x(P(x) \supset P(x+1))) \supset \forall x P(x)$. "P(0)" es la base de inducción y "$\forall x(P(x) \supset P(x+1))$" es la hipótesis de inducción.

[101] Es la complejidad de una fórmula respecto a las constantes que aparecen en ella. Si no tienen constantes, su grado lógico es 0. Si A es una fórmula atómica *gr*(A) = 0; *gr*(¬A) = *gr*(A) + 1; *gr*(A ⊃ B) = max(*gr*(A), *gr*(B)) + 1; *gr*(∃*x*A) = *gr*(A) + 1.

el consecuente también se da. No nos detenemos en los tres casos, simplemente analizamos el caso de la negación como ejemplo. Dado A = ¬B y *gr*(B) = *n*, lo que se debe probar es, por consiguiente, A ∈ Δ ⇔ M' ⊩ A. Para probar ¬B ∈ Δ ⇒ M' ⊩ ¬B suponemos ¬B ∈ Δ. De lo anterior tenemos por consistencia que B ∉ Δ. Dada la base de inducción tenemos que el lema se cumple para, ya que *gr*(B) = *n*. Por tanto, si B no pertenece al conjunto máximamente consistente se debe a que es falso en el modelo canónico: M'⊮ B. Aplicamos la condición semántica de la negación y obtenemos que M' ⊩ ¬B. Para probar M' ⊩ ¬B ⇒ ¬B ∈ Δ suponemos M' ⊩ ¬B. Por las condición semántica de la negación tenemos que M'⊮ B. Dada la hipótesis de inducción y que *gr*(B) = *n*, el lema se cumple para B por lo cual tenemos que B ∉ Δ. Por consistencia, tenemos ¬B ∈ Δ.

Para concluir la prueba de completud se necesita el *teorema de Henkin* en virtud del cual todo conjunto consistente de fórmulas tiene un modelo de cardinal enumerable[102]. Simplemente reunimos los pasos anteriores. Empezamos tomando un conjunto consistente Γ. Por el *lema Lindenbaum* tenemos que existe un conjunto Δ máximamente consistente tal que Γ ⊆ Δ. De lo cual derivamos que existe un modelo M' tal que A∈ Δ ⇔ M' ⊩ A. Dado que Γ ⊆ Δ, se sigue que ∀B ∈ Γ sii M' ⊩ B. Así, pues, el modelo M' es también un modelo de Γ. Ahora, la prueba del *teorema de completud* Γ⊨A ⇒ Γ⊢A parte de Γ⊮A. De lo anterior tenemos que Γ∪{¬A} es consistente. Suponemos que Γ_0 = Γ∪{¬A}. Por el *lema de Lindenbaum* obtenemos el conjunto Δ máximamente consistente tal que Γ ⊆ Δ. Por tanto, tenemos que ¬A ∈ Δ, por lo que Δ ⊢ ¬A. Aplicando el *teorema de Henkin* generamos el modelo canónico de Γ: ∃M'∈ $\mathcal{M}$(M' ⊩ Δ). También obtenemos que M' ⊩ Γ y M' ⊩¬A. El modelo M' hace verdaderas las premisas y falsa la conclusión, obteniendo Γ⊭A a partir de Γ⊮A, lo cual es equivalente a Γ⊨A ⇒ Γ⊢A, concluyendo la prueba de la completud fuerte[103] de la lógica de primer orden.

[102] Esto se debe a que los individuos que se usan para construir el modelo canónico de un conjunto máximamente consistente son los parámetros individuales y que el conjunto de los parámetros individuales es infinito enumerable.

[103] La completud débil es un corolario de este resultado en el que Γ es el conjunto vacío.

7.4. SÍNTESIS DE RESULTADOS

Con la prueba de completud tenemos que la complejidad de las fórmulas válidas (o verdades lógicas en el caso de la completud débil) no es mayor que la complejidad de los teoremas. Lo entendemos como una reducción de la complejidad. Ahora bien, es importante destacar que en el desarrollo de la prueba se establece que "existe" un modelo y no que éste se pueda construir mediante un procedimiento efectivo. En ese caso tendríamos una prueba de la fórmula en cuestión o un contramodelo construible de modo efectivo, con lo cual se reduce la completud a decidibilidad. En ese caso se podría establecer mediante dicho procedimiento efectivo si cada fórmula es consecuencia de un conjunto dado de premisas o no lo es. No tenemos la decidibilidad de la lógica clásica de primer orden, pero sí su completud. Lo que nos interesa mostrar a través a través de la prueba de completud de Henkin consiste en que tanto la decidibilidad como la completud son reducciones de complejidad cuya diferencia en su capacidad computacional es relativa a las estipulaciones lingüístico-formales y no a realidades intuitivo-conceptuales. Mediante el *lema de Lindenbaum* comprobamos cómo un conjunto máximamente consistente de fórmulas es sustituible por un modelo. Tanto los modelos, las verdades, los teoremas, las reglas, los procedimientos y el lenguaje son convenciones simbólicas. Simplemente ocurre que a mayor capacidad expresiva del lenguaje, menor capacidad computacional.

El menor grado de complejidad de un conjunto de fórmulas se da si es posible determinar si cualquier fórmula del lenguaje pertenece o no a tal conjunto. En ese caso es decidible, recursivo o computable, puesto que dispondríamos de un procedimiento efectivo que permite esta determinación. Con la completud tenemos mayor grado de complejidad pero con cierta "organización". Lo que la completud permite es probar una fórmula que pertenece al conjunto de fórmulas dado. Esto quiere decir que el procedimiento efectivo del cálculo deductivo permite enumerar recursivamente las fórmulas válidas del conjunto. En ambos casos se trata de una reducción de complejidad, pero con diferente capacidad computacional. Asimismo, ambos casos los podemos comprender a partir de un conjunto de fórmulas formadas a partir de unas reglas sintácticas de formación estipuladas y un vocabulario compuesto de símbolos convencionales, sin la necesidad de aludir a realidades pre-teóricas. Al hablar en los siguientes términos "si sabemos que es una verdad o que pertenece a la case de las verdades, entonces podemos probarlo" podemos incurrir en la confusión del

descubrimiento de realidades externas. Por este motivo es preferible tratarlo en términos meramente sintácticos. La noción de verdad en una estructura es otra relación estipulada meramente simbólica.

En lo relativo a la relevancia lógica, aclaramos que la prueba de Henkin, a partir de la cual justificamos nuestra lectura sintacticista de los modelos y la primacía de la semántica en el trabajo de la lógica como disciplina, se realiza con un metalenguaje clásico. Ahora bien, debemos mencionar que Routley y Meyer (1973) probaron la completud de **R** con la semántica en el plan australiano considerando, por tanto, conjuntos inconsistentes e incompletos. Asimismo, Meyer (1985) probó la completud de **R** haciendo uso de un metalenguaje relevante. Nos ceñimos a la prueba de Henkin puesto que es más accesible y lo que nos interesa en este punto es mostrar la estrategia seguida.

Destacamos una última observación concerniente a la noción de relevancia lógica. Desde nuestro planteamiento de la semántica convencional, un sistema no *es* relevante por incorporar la idea intuitiva de la relevancia pre-lógica de las premisas en la conclusión. Simplemente *denominamos* "relevante" a todo sistema en el que las Paradojas del Condicional Material fallan o a aquel en el que se introducen restricciones en la regla estructural de la atenuación. Nos resulta más fundamental la segunda condición, por lo que nos interesa resaltar el carácter subestructural de las lógicas relevantes. La idea básica es la formulación relevante de la relación de consecuencia semántica. El uso del vocablo "relevante" se debe a la tradición cuya motivación sí era de carácter intuitivo.

8. ARITMÉTICA RELEVANTE

Reconstruimos el proyecto de la aritmética relevante diferenciando dos dimensiones teóricas: los resultados técnicos y la interpretación filosófica de la lógica y la aritmética. Se trata de una distinción analítica orientada a nuestros propósitos, puesto que en el desarrollo teórico de Meyer se encuentran intrínsecamente relacionadas. Respecto a la dimensión técnica distinguimos los resultados dirigidos a probar los teoremas de la teoría de números con lógica relevante y la estrategia dirigida a evitar el segundo teorema de incompletud. Con relación a esto último será importante el tratamiento que lleva a cabo Meyer del nivel metalógico. Respecto a la dimensión filosófica analizaremos el *descriptivismo aritmético* que consideramos que sostiene Meyer.

Como puede observarse, el análisis del proyecto de la aritmética relevante de Meyer entronca directamente con nuestros temas centrales de investigación. Por un lado, abre una posible vía de justificación de cierto monismo relevante relacionada con la interpretación de la pretendida elusión del segundo teorema de incompletud. Por otro lado, pone de manifiesto el carácter fundamental de la discusión sobre la naturaleza de la lógica, la cual discusión la orientaremos hacia la comprensión de la semántica formal bajo nuestra concepción convencionalista. El objetivo es ofrecer una lectura convencionalista del proyecto de Meyer que abra la posibilidad —no demostrada, pero tampoco cerrada— de un *monismo relevante*.

8.1. PROYECTO DE MEYER

Antes de pasar a la explicación, es conveniente sintetizar por adelantado los principales resultados relacionados con el proyecto de la aritmética relevante. Ahora bien, es muy importante tener en cuenta que tanto el vocabulario usado como los recursos técnicos empleados para su justificación y la comprensión de su pertinencia filosófico-conceptual serán explicados a lo largo de la presente sección[104] y discutidos en las siguientes. Simplemente consideramos que es expositivamente provechoso tenerlos en cuenta con carácter previo para no perderlos de vista en el desarrollo de los comentarios. En síntesis, Meyer (2021b, pp.377-378) prueba que:

[104] Con algunas remisiones al apéndice 6.

- $\mathbf{R}^{\#}$ es incompleto respecto a la negación. Lo hace empleando la fórmula de Gödel de tal modo que sea aritméticamente verdadera y que exprese su propia indemostrabilidad.
- A su vez, si $\mathbf{R}^{\#}$ es inconsistente respecto a la conectiva *c*, entonces ¬Göd*c*Göd*x* es aritméticamente verdadero y $\nvdash_{\mathbf{R}\#}$ Göd*c*Göd*x* y $\nvdash_{\mathbf{R}\#}$ *c*Göd*c*Göd*x*[105].
- Sean R*x* y C*x* fórmulas de clase que expresan débilmente los conjuntos de teoremas de $\mathbf{R}^{\#}$ y $\mathbf{C}^{\#}$, respectivamente. Si R*x* y C*x* son fórmulas tipo τA[106], entonces expresan débilmente los mismos conjuntos en $\mathbf{C}^{\#}$ y $\mathbf{R}^{\#}$.
- $\mathbf{R}^{\#}$ es e)-consistente sii es f)-consistente. Esto quiere decir que $\vdash_{\mathbf{R}\#} \bot$ sii ∃A tal que $\vdash_{\mathbf{R}\#}$A y $\vdash_{\mathbf{R}\#}$¬A. Este último resultado quiere decir que la consistencia respecto a la negación significa e)-consistencia y/o f)-consistencia[107].

8.1.1. Teoría de números en sistema relevante

Meyer (2021a) emplea **R** para formular **PA** (aritmética de Peano) de primer orden con el objetivo de probar dos propiedades fundamentalmente:

i. La aritmética relevante es consistente en términos absolutos y, además, lo es trivialmente.
ii. La aritmética relevante así formulada contiene a $\mathbf{C}^{\#}$ de primer orden.

La aritmética relevante en cuestión es la axiomática de Peano expresada bajo los principios relevantes establecidos en el sistema **R** en primer orden. La teoría de números que resulta es $\mathbf{R}^{\#}$. $\mathbf{C}^{\#}$ es la formulación clásica de la axiomática de Peano. En esta mima investigación, Meyer construye un cálculo de deducción natural para $\mathbf{R}^{\#}$ para poder realizar derivaciones aritméticas[108].

Al dar cuenta de las motivaciones para la aritmética relevante, Meyer (2021a, p.155) señala, además de las falacias de la irrelevancia en general, a la confección de

[105] Véase §8.2.2.

[106] Véase apéndice 6.5.

[107] Los diferentes tipos de consistencia se definen en §8.1.2.

[108] Meyer (2021a), además, explora las expresiones de la aritmética de Peano en otros sistemas: clásico, intuicionista y **RM3**, de lo cual resultan las teorías $\mathbf{C}^{\#}$, $\mathbf{J}^{\#}$ y $\mathbf{RM3}^{\#}$, respectivamente.

una teoría matemática que sea "inconsistente" (paraconsistente, más bien) y, a su vez, que no conduzca a la trivialidad. En este sentido, Meyer (2021a, p.155) menciona que el mayor problema de las falacias de la irrelevancia se encuentra en el principio de explosión: "The most persistent dissatisfaction, in fact, has lain in the familiar license to pass from a contradiction to any statement whatsoever, which rules out non-trivial inconsistent theories". Meyer pretende remediar la carencia de una "non-trivial inconsistent mathematical theory" con la aritmética relevante.

A pesar de centrarse en la relación de consecuencia, el razonamiento relevante también se orienta, bajo la perspectiva de Meyer, al nivel de los teoremas intuitivos que se deben obtener formalmente: "when one thinks relevantly, there is a question not only as to which formal theorems follow, but also as to which formal theorems express which intuitive theorems" (Meyer 2021a, p.157). Como puede observarse, Meyer mantiene una concepción descriptivista en los dos niveles. En cualquier caso, a Meyer le interesa explicar que el vocabulario extensional de la lógica clásica permite dar cuenta de los hechos sobre los números, pero no elabora adecuadamente las expresiones que dan cuenta de las leyes que permiten obtener tales hechos. En este sentido relaciona al condicional material con la expresión de hechos y al condicional relevante con la expresión de las conexiones de tales hechos. Para mostrar la importancia de esta distinción Meyer (2021a, p.157) emplea el siguiente ejemplo en el que aritméticamente la ley es falsa aunque pueda darse un caso en el que el hecho es verdadero:

> we should expect to find $A \supset B$ provable on some number-theoretic occasions when $A \rightarrow B$ is unprovable. And this happens. $0 = 2$, being arithmetically false, materially implies everything. But if we hypothetically overloaded arithmetic so as to identify 0 and 2, it's just gratuitous to suppose that we should thereby have identified, say, 0 and 1. Indeed, when we take the integers modulo 2, we do identify 0 and 2, without going on to identify 0 and 1.

Meyer (2021a, p.156) considera que los sistemas formales explican cómo se obtiene el conocimiento de la validez de las inferencias. En este sentido considera que los sistemas relevantes tal y como han sido tratados por Anderson y Belnap (1975) tienen que ver con restricciones epistemológicas relativas a la validez de los argumentos. Esta reflexión la realiza para diferenciar filosóficamente la propuesta relevante de la intuicionista, la cual respondería bajo este planteamiento a una propuesta ontológica ya que se debe mostrar el procedimiento constructivo (número finito de

pasos a partir de los números naturales) de las entidades matemáticas para determinar su existencia.

Lenguaje

El lenguaje $L^{\#}$ de primer orden de $\mathbf{R}^{\#}$ consta de:

i. Las variables *x*, *y*, *z*…
ii. La constante "0"
iii. La operación monádica "*s*"
iv. Las operaciones diádicas "+" y "○"[109]
v. El predicado diádico "="
vi. La conectiva monádica "¬"
vii. Las conectivas diádicas "∧" y "→"
viii. El cuantificador universal "∀"

A continuación, Mayer (2021a, p.161) introduce en su lenguaje lo que denomina "categorías gramaticales" representadas por los siguientes conjuntos:

- FV ≔ el conjunto de las variables (formales).
- FI ≔ el conjunto de individuos (formales). Es un conjunto unitario cuyo elemento es 0.
- FA ≔ el conjunto de átomos (formales). Es la unión FV ∪ FI.
- FT ≔ el conjunto de términos (formales). Se genera a partir de los elementos del conjunto FO de operaciones formales {*s*,+,○} y de FA. Todos los términos se componen de átomos y se construyen de forma única a partir de ellos.
- AF ≔ el conjunto de fórmulas atómicas. Se construye a partir del predicado "=" en tanto que función definida sobre FT ×[110] FT cuyo rango es el conjunto de fórmulas atómicas. AF es el conjunto de las ecuaciones. "=" pertenece al conjunto FP de predicados (formales).
- FF ≔ el conjunto de fórmulas del lenguaje. FF está cerrado bajo los elementos del conjunto FC de conectivas {∧,→,∀}.

[109] Es muy importante advertir que usamos este símbolo "○" para el operador de la multiplicación para evitar la confusión el símbolo "×" que hemos empleado a lo largo de la tesis para la fusión.

[110] En este caso "×" es el producto cartesiano conjuntista.

Es importante notar que Meyer considera que $L^{\#}$ es un lenguaje abstracto y no una representación o un fragmento de un lenguaje natural como el inglés. Por este motivo le interesa destacar que los elementos de las categorías gramaticales son formales. Asimismo, el conjunto de números naturales se define del siguiente modo: 0 ≔ 0, 1 ≔ *s*0, 2 ≔ s1…, donde *s* es el sucesor. *s* es un operador aritmético, pero + y ○ no lo son. + y ○ no son operaciones sobre el conjunto de números naturales, de modo que, por ejemplo, 1+1 no es un número natural. + y ○ no se corresponden con la adición y la multiplicación aritméticas. Atendiendo a esta circunstancia, Meyer (2021a, p.164) realiza las siguientes distinciones:

- $\mathbb{N} \subset$ FT es el conjunto de números naturales.
- $Q\mathbb{N} \subset$ FT es el conjunto de cuasi-números. Siguiendo el ejemplo, 1 + 1 es un elemento de $Q\mathbb{N}$. $Q\mathbb{N}$ está cerrado bajo los elementos de FO y parte de la constante 0.
- $\mathbb{N}$EQ es el conjunto de las ecuaciones numéricas.
- $\mathbb{N}$EQQ es el conjunto de las ecuaciones cuasi-numéricas.

2 ○ (3 + *s*5) es un término numérico y *x* ○ (3 + *sy*) es un término[111]. Dados los términos *T* y *U*, *T* = *U* es una ecuación. Si *T* y *U* son números, entonces *T* = *U* ∈ $\mathbb{N}$EQ. Si *T* y *U* son términos numéricos, entonces *T* = *U* ∈ $\mathbb{N}$EQQ. Meyer (2021b, p.302) denomina al conjunto $\mathbb{N}$EQQ ecuaciones numéricas (*numerical equations*) y al conjunto $\mathbb{N}$EQ ecuaciones de números (*number equations*). Las ecuaciones pertenecen al conjunto FOR de fórmulas[112], el cual está cerrado bajo el conjunto {∧,→,¬,∀}. Una *fórmula numérica* es aquella que no tiene variables. Una *sentencia* es aquella fórmula sin variables libres, como es habitual.

Para el proyecto de Meyer (2021a, p.164) el propósito mínimo de la teoría de números formalizada de este modo reside en derivar como teoremas a las ecuaciones cuasi-numéricas correctas. Las ecuaciones cuasi-numéricas *correctas* son aquellos elementos de $\mathbb{N}$EQQ que son *verdaderos* de acuerdo a un procedimiento computacional

[111] El conjunto de *términos numéricos* es el cierre de $\mathbb{N}$ bajo {*s*,+,○}. El conjunto de *términos* es el cierre del conjunto constituido por la unión de FV y el conjunto de *términos numéricos*, la cual unión está cerrada bajo {*s*,+,○}.

[112] Seguiremos usando las letras latinas mayúsculas empezando desde la A como variables de fórmulas.

(el cual debe especificarse: infra teorema 1). Lo mismo para ℕEQ. Las ecuaciones incorrectas son no-teoremas. Esto quiere decir que tienen que poder probar los teoremas mediante algún procedimiento constructivo. Lo que está Meyer exigiendo como condición mínima es un cálculo correcto, esto es, que los teoremas estén incluidos en el conjunto de fórmulas válidas.

Meyer (2021a, p.165) introduce las definiciones básicas:

- $A \vee B \coloneqq \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $\exists x A \coloneqq \neg \forall x \neg A$
- $A \leftrightarrow B \coloneqq (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- $A \supset B \coloneqq \neg A \vee B$
- $A \times B \coloneqq \neg(A \rightarrow \neg B)$
- $T \neq U \coloneqq \neg(T = U)$, donde T y U son términos
- $T \leq U \coloneqq \exists x(T + x = U)$
- $T < U \coloneqq \exists x(T + sx = U)$

En el apéndice 6 presentamos los axiomas, los principios de la identidad y el cálculo deductivo de deducción natural que emplea Meyer para su sistema relevante. El sistema de deducción natural es precisamente el procedimiento efectivo para probar las ecuaciones correctas.

Demostración de teoremas clásicos en $\mathbf{R}^{\#}$

Meyer (2021a, §VIII) prueba con su método de deducción natural los principales teoremas intuitivamente admitidos en la teoría de números en $\mathbf{R}^{\#}$, teniendo como referencia las demostraciones de Kleene (1952). Tomamos un ejemplo elemental: la distribución de ○ sobre +[113].

[113] Véase el sistema deductivo en el apéndice 6.

1.	$\top \leq (y + z) \circ 0 = y \circ 0 + z \circ 0$	A17, A15, P3
2.	$\alpha = (y + z) \circ x = y \circ x + z \circ x$	Asunción
3.	$\top \leq (y + z) \circ sx = (y + z) \circ x + (y + z)$	A18
4.	$\top \leq y \circ sx + z \circ sx = y \circ x + y + (z \circ x + z)$	A18, P3, P4
5.	$\alpha \leq (y + z) \circ sx = y \circ x + z \circ x + (y + z)$	2, 3, P3, tran=[114]
6.	$\alpha \leq (y + z) \circ sx = y \circ sx + z \circ sx$	5, P1, P2, P3, 4, tran=
7.	$\top \leq (y + z) \circ x = y \circ x + z \circ x$	1, 2, 6, R5

Para solidificar las intuiciones aritméticas Meyer (2021a, pp.251-254) demuestra los siguientes cuatro teoremas elementales:

Teorema 1. Para toda A ∈ ℕEQQ, A es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$.

Para todo *i* ∈ Qℕ, *i* puede transformare en un *i*' ∈ Qℕ mediante los axiomas de =, + y ○ tal que *i* = *i*' es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$. Dada la condición del uso de métodos finitarios, con este método solo se obtiene un *i*' ∈ Qℕ. Una A ∈ ℕEQQ es correcta sii: si A≔ *i* = *j*, entonces *i*' y *j*' son el mismo número. De la corrección de A se sigue que *j* = *j*', *i* = *i*' y *j*' = *i*' son teoremas de $\mathbf{R}^{\#}$.

Teorema 2. Para toda A ∈ ℕEQ correcta, A es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$.

Para mostrar que A ∈ ℕEQ es correcta tomamos un término T construido a partir de + y ○. Dadas las propiedades de tales operaciones diádicas es posible transformar T en T'≔ $T_1 + \ldots + T_n$, tal que T_j≔ $i \circ x_1 \circ \ldots \circ x_m$, tal que x_k son variables y *m* es un número. Para todo T ∈ $L^{\#}$, existe un T' correspondiente a T. T = T' es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$. Una A ∈ ℕEQ es correcta sii: si A≔ T = U, entonces T' y U' son el mismo término.

Teorema 3. Para toda A ∈ ℕEQQ falsa, ¬A es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$.

Dado el principio de sustracción y el teorema 1, se sigue que de cualquier A ∈ ℕEQQ falsa se deriva que existe un número *k* tal que 0 = *sk*. De lo anterior se puede probar ¬A aplicando el *modus tollens* y el axioma $\mathbf{R}_{\#}$ A12.

Teorema 4. Para toda A ∈ ℕEQ incorrecta, ∃¬A y ¬∀A son teoremas de $\mathbf{R}^{\#}$.

Sea ∀A≔ $\forall x_1 \ldots \forall x_n$A y sea ∃A≔ $\exists x_1 \ldots \exists x_n$A la clausura universal y existencial de A, respectivamente. Las variables libres de la fórmula en cuestión están en

[114] Transitividad de la identidad. Véase regla 46 en el apéndice 6.4.

$x_1 \ldots x_n$. Meyer (2021a, p.253) muestra que si $A[x_1 \ldots x_n]$ es una ecuación incorrecta, entonces existen números $i_1 \ldots i_n$ con los que $A[i_1 \ldots i_n] \in \mathbb{N}EQQ$ es falsa. Si se aplica el teorema 2, entonces obtenemos el teorema $\neg A[i_1 \ldots i_n]$. Si aplicamos la generalización existencial, entonces obtenemos el teorema $\exists x \neg A[x_1 \ldots x_n]$, de lo cual derivamos $\neg \forall x A[x_1 \ldots x_n]$.

Es importante mencionar que Meyer (2021a, §IX) prueba teoremas que se sostienen *materialmente* pero no *relevantemente*. Sin embargo, lo que destaca es que puede llegar a los mismos resultados aritméticos con recursos distintos que, aun siendo menos económicos, no emplean la regla γ. (Este optimismo se va a poner en cuestión en Meyer (2021b) y Friedman y Meyer (1992)). Asimismo, Meyer (2021a, §IX) obtiene entre sus resultados destacados la existencia de una traducción de $\mathbf{C}^{\#}$ en $\mathbf{R}^{\#}$ en virtud de la cual los teoremas de $\mathbf{C}^{\#}$ también lo son de $\mathbf{R}^{\#}$. Este resultado es importante en tanto que "This has immediate import for the formal properties of $\mathbf{R}^{\#}$, since it means that the considerable amount of technical research into $\mathbf{C}^{\#}$ is applicable to $\mathbf{R}^{\#}$ as well" (Meyer 2021a, p.276), lo cual es empleado en el análisis de las propiedades metalógicas. Ahora bien, no se trata de una traducción directa, puesto que para ello se requeriría la regla γ.

Nos encontramos ante una traducción entre lenguajes *L* y *L*', tal que la traducción es una función *tr* que se aplica de todas las fórmulas $A \in L$ a *L*'. Las nociones de traducción que Meyer (2021a, p.277) emplea las define del siguiente modo:

- Traducción del idiota (*idiot's translation*): si $L \subseteq L'$, entonces *tr* aplica cada fórmula a sí misma. Es, por tanto, una función de identidad.
- Traducción buena (*good translation*): dados los sistemas S y S' con lenguajes *L* y *L*' respectivamente, *tr* es una buena traducción entre S y S' si para cualquier $A \in L$ si $A \in S$ entonces $tr(A) \in S'$. Esto quiere decir que *tr* conserva los teoremas en S.
- Traducción justa (*fair translation*): *tr* es una traducción justa entre S y S' si para cualquier $A \in L$ si $tr(A) \in S'$ entonces $A \in S$. Esto quiere decir que *tr* conserva los no-teoremas en S.
- Traducción exacta (*exact translation*): *tr* es una traducción exacta entre S y S' si conserva los teoremas y conserva los no-teoremas.
- Traducción directa (*direct translation*): *tr* es una traducción directa de $\mathbf{C}^{\#}$ a $\mathbf{R}^{\#}$ si sobre cada $A \in L^{\#}$ (Meyer 2021a, p.278):

- *tr*A es A si A:≔ T = U
- *tr*(¬B) es ¬*tr*B
- *tr*(B ∧ C) es *tr*B ∧ *tr*C
- *tr*(B → C) es *tr*B ⊃ *tr*C
- *tr*(∀*x*B) es ∀*xtr*B

Es importante notar que en las nociones de traducción Meyer confunde (deliberadamente) la noción de sistema con su conjunto de teoremas. Siendo estrictos, deberíamos decir que usa el término sistema de modo impropio. Denominamos $\mathbf{C}^{R}$ a la aritmética clásica que usa el sublenguaje clásico L^{C} de $L^{\#}$. Denominamos $\mathbf{R}^{C}$ a la aritmética relevante que usa el sublenguaje clásico L^{C} de $L^{\#}$. Tenemos que $\mathbf{R}^{C} \coloneqq L^{C} \cap \mathbf{R}^{\#}$, lo cual quiere decir que $\mathbf{R}^{C}$ es el fragmento clásico de $\mathbf{R}^{\#}$. Meyer (2021a, pp.278-281) prueba los siguientes teoremas:

i. **Teorema 5**.
   - La traducción del idiota *tr*: $\mathbf{R}^{\#} \longrightarrow \mathbf{C}^{\#}$ es una buena traducción.
   - La traducción del idiota *tr*: $\mathbf{C}^{\#} \longrightarrow \mathbf{R}^{\#}$ es una traducción justa.

ii. **Teorema 6**.
   - La traducción directa *tr*: $\mathbf{C}^{\#} \longrightarrow \mathbf{C}^{R}$ es una traducción exacta.
   - La traducción directa *tr*: $\mathbf{C}^{\#} \longrightarrow \mathbf{R}^{C}$ es una traducción justa.

iii. **Teorema 7**. Asumiendo la admisibilidad de γ en $\mathbf{R}^{\#}$, la traducción directa *tr*: $\mathbf{C}^{\#} \longrightarrow \mathbf{R}^{\#}$ es una traducción exacta. El conjunto de teoremas de $\mathbf{C}^{R}$ y de $\mathbf{R}^{C}$ son coincidentes.

Para el análisis de las propiedades metalógicas Meyer (2021a, p.282) emplea la teoría de modelos tarskiana y asume que $M^{\#} \coloneqq <\mathbb{N},0,s,+,\circ>$ es el modelo de los números naturales. Del mismo modo, asume que cada teorema de $\mathbf{C}^{\#}$ es verdadero en una estructura. De este presupuesto se sigue la ω-consistencia[115] de $\mathbf{C}^{\#}$. Dada la traducción del idiota $\mathbf{R}^{\#}$ está contenido en $\mathbf{C}^{\#}$, de modo que $\mathbf{R}^{\#}$ también es ω-consistente y posee las metapropiedades que Kleene (1952) demostró para $\mathbf{C}^{\#}$. Dados sus definiciones y

[115] Decimos que S es *consistente* sii no existe una fórmula A tal que A y ¬A son teoremas de S. Decimos que S es *ω-consistente* sii no existe un predicado P tal que ∃*x*P(*x*), ¬P(0), ¬P(1), ¬P(2),… sean a la vez teoremas. Si S es *ω*-consistente entonces es consistente, pero no la conversa.

teoremas relativos a la traducción y dadas las presuposiciones antedichas, Meyer (2021a, §IX) prueba los siguientes teoremas:

> **Teorema 8**. $\mathbf{R}^{\#}$ es incompleto: $\exists A \in L^{\#}$ sin variables libres tal que A y $\neg A$ no son teoremas de $\mathbf{R}^{\#}$ (habiendo asumido que todo teorema de $\mathbf{R}^{\#}$ es verdadero en una interpretación).
> Dado el teorema 5, por la traducción del idiota y la incompletud de $\mathbf{C}^{\#}$ por el primer teorema de incompletud de Gödel, tenemos que $\mathbf{R}^{\#}$ también es incompleto.

> **Teorema 9**. $\mathbf{R}^{\#}$ es indecidible: no existe un procedimiento efectivo que se aplique a las fórmulas de $L^{\#}$ de tal manera que distinga los teoremas y los no teoremas de $\mathbf{R}^{\#}$.
> Dada la indecidibilidad de $\mathbf{C}^{\#}$, procedemos por reducción al absurdo del siguiente modo: suponemos la decidibilidad de $\mathbf{R}^{\#}$, de la traducción delta[116] obtenemos que $\mathbf{C}^{\#}$ es decidible. Además, Meyer (2021a, pp.282-283) demuestra que no existe un procedimiento de decisión que sea consistente con la negación para cualquier extensión de $\mathbf{R}^{\#}$. Toda extensión decidible de $\mathbf{R}^{\#}$ es inconsistente.

> **Teorema 10**. No existe una extensión recursivamente axiomatizable de $\mathbf{R}^{\#}$ tal que $\forall A \in L^{C}$ sin variables libres, $M^{\#}$ satisface a A sii A es un teorema de la extensión de $\mathbf{R}^{\#}$. No se pueden axiomatizar bajo principios relevantes las verdades aritméticas.

> **Teorema 11**. Sea S un conjunto recursivamente enumerable de números naturales, $\exists A \in L^{\#}$ con una variable libre x tal que $\forall i \in \mathbb{N}$:
>
> $i \in S$ sii $A[i]$ es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$
>
> Meyer (2021a, p.283) lo formula diciendo que S es *expresable* en $\mathbf{R}^{\#}$ de forma débil.

> **Teorema 12**. Sea S un conjunto recursivo de números naturales, $\exists A \in L^{\#}$ con una variable libre x tal que $\forall i \in \mathbb{N}$:

[116] Meyer (2021a, p.279) define una traducción delta con la que prueba un teorema en virtud del cual cualquier $A \in L^{\#}$ es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$, su traducción delta es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$ y su traducción delta es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$, y se obtiene que la traducción delta de $\mathbf{C}^{\#}$ a $\mathbf{R}^{C}$ es exacta. El objetivo es conseguir que, asumiendo γ, la traducción directa *tr*: $\mathbf{C}^{\#} \longrightarrow \mathbf{R}^{\#}$ sea una traducción exacta y buena.

$i \in$ S sii A[i] es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$

$i \notin$ S sii ¬A[i] es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$

Meyer (2021a, p.284) lo formula diciendo que S es *expresable* en $\mathbf{R}^{\#}$ de forma fuerte.

Los teoremas se apoyan en la dependencia de la aritmética clásica. Para nuestros objetivos es suficiente, no obstante, Meyer (2021a, pp.285-286) prueba la incompletud de $\mathbf{R}^{\#}$ (teorema 8) usando medios específicos de $\mathbf{R}^{\#}$. El teorema 8 se corresponde con el primer teorema de incompletud de Gödel. Ahora bien, una de las grandes motivaciones del proyecto de la aritmética relevante reside en el segundo teorema de incompletud, más precisamente en la posibilidad de evitarlo. El interés estriba en la posibilidad de evitar la *imposibilidad* en virtud de la cual, dada la consistencia de la axiomática de teoría de números, el enunciado que expresa dicha consistencia en esa teoría no es demostrable en tal axiomática.

> the status of Gödel's famous second theorem, which asserts that any system containing a suitable fragment of arithmetic can only be proved consistent by means stronger than those formulated by the system itself, is both more interesting and more dubious, relevantly speaking. Accordingly, we devote the next section to this and related topics. [Typescript Ends.] (Meyer 2021a, p.286)

8.1.2. Evitar el segundo teorema de incompletud

Consistencia y fiabilidad

La imposibilidad de $\mathbf{C}^{\#}$ para probar su propia consistencia la encuentra Meyer en su falta de vocabulario, puesto que no se estableció para expresar su propia consistencia. En el contexto lógico actual nos resulta familiar, pero previamente a Hilbert y Gödel "nobody ever expected $\mathbf{C}^{\#}$ to be muttering introspectively about itself at all" (Meyer 2021b, p.292). Además, la negación se encuentra en el centro de la problemática de la formulación técnica del segundo teorema de incompletud. El enunciado que expresa en $\mathbf{C}^{\#}$ la consistencia de $\mathbf{C}^{\#}$ hará uso de la negación.

El núcleo del proyecto radica en la noción de consistencia, la cual está intrínsecamente ligada a la conectiva unaria de la negación: "Let us hurry on, now, to the crux of the matter. That crux lies in the little sign ¬" (Meyer 2021b, p.290). Dicho

símbolo considera Meyer que significa lo que intuitivamente entendemos por "no". El problema lo encuentra en el significado de "¬" dentro de los distintos sistemas. Si el comportamiento de "¬" dentro de un sistema es tal que en determinada situación A es falso y no es el caso que ¬A es verdadero, entonces se dirá que la situación es incompleta. Ahora bien, se podrían ofrecer otras razones además de la incompletud, por ejemplo, que no disponemos de los recursos técnicos necesarios para hacer que "¬" se comporte como la negación "no" del lenguaje ordinario. Este es el problema ante el que nos encontramos al no tener que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\neg P i$ es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$ sii A^i no es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$ (en el siguiente epígrafe se explica esta notación).

La idea intuitiva de la fiabilidad la define en términos técnicos mediante la consistencia. No obstante, se trata de nociones conceptualmente distintas: "Consistency is a formal property of formal systems (…). Reliability is an intuitive property, measuring a formal system against the purposes for which it was designed" (Meyer 2021b, p.294). La consistencia de un sistema la entiende como la garantía de la su fiabilidad. Meyer (2021b, p.295) distingue siete formulaciones de consistencia:

a) $\mathbf{C}^{\#}$ es consistente sii $\exists$A tal que no puede probarse en $\mathbf{C}^{\#}$, donde A es una fórmula.
b) $\mathbf{C}^{\#}$ es consistente sii no puede probarse $0 = 1$ en $\mathbf{C}^{\#}$.
c) $\mathbf{C}^{\#}$ es consistente sii $\forall ij \in \mathbb{N}$, no puede probarse $i = j$ en $\mathbf{C}^{\#}$, siendo i y j distintos.
d) $\mathbf{C}^{\#}$ es consistente sii $\forall TU \in \mathbb{N}$, no puede probarse $T = U$ en $\mathbf{C}^{\#}$, siendo T y U polinomios distintos.
e) $\mathbf{C}^{\#}$ es consistente sii no puede probarse $0 \neq 0$ en $\mathbf{C}^{\#}$.
f) $\mathbf{C}^{\#}$ es consistente sii $\forall$A no puede probarse A en $\mathbf{C}^{\#}$ o no puede probarse ¬A en $\mathbf{C}^{\#}$.
g) $\mathbf{C}^{\#}$ es consistente sii $\forall$A si puede probarse A en $\mathbf{C}^{\#}$, entonces A es verdadero en $<\mathbb{N},0,s,+,\circ>$.

La definición g) es la única que involucra un aspecto semántico, las demás son definiciones sintácticas. La definición g) no es constructiva. Además, si un sistema es consistente tal como establece f), entonces también es consistente tal como establecen las demás definiciones, salvo g). Si se posee g) también se posee f). Meyer entiende la posesión de a) - g) como indicio de la fiabilidad de $\mathbf{C}^{\#}$. Además, hay un orden de menor a mayor de a) a g), respectivamente. Es importante remarcar que lo propio del proyecto

no es la consistencia del sistema, sino la prueba de consistencia puesto que sería una prueba formal de los indicios de su fiabilidad. La consistencia de la aritmética se da por sentada. Meyer se propone mostrar que su sistema de aritmética relevante es trivialmente consistente en tanto que posee las propiedades a) – d) y, en este sentido, es un sistema fiable. El problema de no poseer la propiedad f) se encuentra en el principio de explosión.

La prueba de consistencia de $\mathbf{R}^{\#}$ parte de poner de manifiesto que dicho sistema contiene una fórmula que no puede ser probada en él. Esto quiere decir que posee la propiedad a). Tal fórmula no probable es 0 = 1, de tal modo que posee la propiedad b). Además, extiende la prueba de tal modo que muestra que $i = j$ y $Q = O$ no son probables, obteniendo así las propiedades c) y d). Se trata de un resultado elemental que no lo distingue de $\mathbf{C}^{\#}$. Es importante insistir en que la corrección del "error" del segundo teorema de incompletud es de carácter filosófico. Lo que se debe destacar no es una novedad en lo que se prueba, sino en que en $\mathbf{C}^{\#}$ no se tienen recursos para distinguir la consistencia formulada en g) de las otras formulaciones. Meyer (2021b, p.300) recuerda que el segundo teorema de incompletud lo formuló Gödel como la prueba de a) para $\mathbf{C}^{\#}$ en $\mathbf{C}^{\#}$ y no en términos de g). Posteriormente muestra lo que se requiere para probar g) en $\mathbf{R}^{\#}$ y en $\mathbf{C}^{\#}$.

Teoremas de fiabilidad

Existen propiedades aritméticas que no son expresables en $L^{\#}$, pero se asume que toda fórmula con una variable libre de $L^{\#}$ expresa una propiedad. Que Meyer (2021b, pp.315-316) dé por asentada esta presuposición es problemático dado que supone la aceptación del principio de comprehensión en $\mathbf{R}^{\#}$ de segundo orden: $\exists \mathrm{P}, \forall x(\mathrm{P}x \leftrightarrow \mathrm{A})$, donde la propiedad P está ligada en A. Este principio permitiría probar como teoremas algunas falacias de la irrelevancia. Además, esto supondría que existiría una conexión relevante entre todo individuo y cada enunciado en el que cada individuo posee esa propiedad. Es una conexión relevante análoga a la que existe entre el antecedente y el consecuente de una fórmula condicional (relevante) probada como teorema. Meyer (2021b, p.316) considera que esta condición tiene un carácter metafísico difícil de asumir.

Meyer (2021b, p.291) asume el recurso técnico de la gödelización o numeración de Gödel: existe una biyección de los números naturales en las fórmulas de tal modo

que se asigna un número natural a cada fórmula. A^i es una fórmula con su correspondiente número. Del mismo modo se puede decir que la fórmula A^i es el número *i*. Asimismo, destaca un predicado probatorio P*x* de $\mathbf{C}^{\#}$ donde *x* no está ligada. Con esto tenemos que (Meyer 2021b, p.291) $\forall i \in \mathbb{N}$, P*i* es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$ sii A^i es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$. Además, para el modelo $<\mathbb{N}, s, +, \circ>$: $\forall i \in \mathbb{N}$, P*i* es verdadero en $\mathbf{C}^{\#}$ sii A^i es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$. Sobre la negación, de lo anterior[117] tenemos que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\neg$P*i* es verdadero en $\mathbf{C}^{\#}$ sii A^i no es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$. Ahora bien, dada la incompletud no tenemos que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\neg$P*i* es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$ sii A^i no es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$.

Tal como explica Meyer (2021b, p.323), una ecuación de números correcta tiene la forma $i = i$. En una ecuación numérica todo término de número *K* debe poder reducirse a un número *i*. Por ejemplo, $K \coloneqq s(3 \circ 2) + 1$ se reduce a $i \coloneqq 8$. Para esquematizar la reducción Meyer establece la aplicación $r(K) = i$. Por tanto, la ecuación numérica $K = L$ es correcta sii $r(K) = r(L)$.

Meyer (2021b, §V) prueba los siguientes teoremas:

Teorema 13. Dada la ecuación numérica $K = L$, si es correcta, entonces puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$.

La prueba es sencilla aplicando la inducción sobre $r(K)$. Lo problemático se encuentra en establecer que las ecuaciones incorrectas no son probables.

Teorema 14. Dada la inecuación numérica $K \neq L$, si es correcta, entonces puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$.

Esta es la conversa del teorema 13. Tal como establece Meyer (2021b, p.324) una inecuación es correcta sii su correspondiente ecuación es incorrecta. Para probar el teorema 14 se necesita emplear axiomas aritméticos, mientras que para el teorema 13 no es necesario.

Teorema 15. Dada la fórmula numérica A que no contiene un condicional,

- Si A es correcta, entonces puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$
- Si es incorrecta, entonces $\neg$A puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$
- Al menos una de las fórmulas A o $\neg$A puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$. Esto quiere decir que $\mathbf{R}^{\#}$ es completo en el conjunto de las fórmulas numéricas.

Es una prueba por inducción sobre A, en la cual los teoremas 13 y 14 son la base y el paso inductivo son las propiedades de las funciones de verdad. Es

[117] Y asumiendo el comportamiento semántico habitual de la negación.

importante destacar que para Meyer (2021b, p.324) en este punto aún existe una correspondencia entre *correcto* e *intuitivamente verdadero*. Esta correspondencia se ve truncada con las ecuaciones no-numéricas, ya que se trata de fórmulas con variables libres. En este caso habría que condicionar la correspondencia del siguiente modo: una ecuación correcta es *intuitivamente satisfecha* por todos los valores numéricos de sus variables no ligadas.

Meyer (2021b, p.326) generaliza teorema 13 con términos polinómicos estándar probando un teorema análogo al 13 con ecuaciones polinómicas estándar. Del mismo modo Meyer (2021b, p.327) hace una generalización parcial del teorema 14. Ahora bien, debemos remarcar la parcialidad de la extensión dado que no es posible extender la corrección a las inecuaciones en general (porque no es decidible o recursivamente resoluble). En este sentido Meyer (2021b, p.327) prueba que existe una inecuación que no se puede probar en $\mathbf{R}^{\#}$ y que no existe una extensión[118] de $\mathbf{R}^{\#}$ tal que posea la propiedad f) y se puedan probar todas las inecuaciones válidas.

Tales limitaciones las comprende Meyer (2021b, p.328) como fallos de la superestructura lógica relacionados con la negación. Con esta revisión pretende probar teoremas que garanticen la fiabilidad de $\mathbf{R}^{\#}$ (*reliability theorems*). Lo que tiene la intención de probar reside en que $\mathbf{R}^{\#}$ no es inconsistente con respecto a la propiedad d), probando la generalización completa (no parcial) del teorema 14 con términos polinómicos. En este sentido su intención es probar "an effective guarantee that no incorrect equations at all will be theorems of $\mathbf{R}^{\#}$" (Meyer 2021b, p.329). Esto se entiende en tanto que no basta con probar la corrección, sino que es preciso evitar la incorrección.

8.2. DISCUSIÓN

En esta sección nos proponemos mostrar la insuficiencia de los dos objetivos de la aritmética relevante Meyer. Por un lado, ponemos de relieve las insuficiencias presentes en las propias investigaciones de Meyer. Esta tarea es importante en tanto que en el propio curso de su investigación va reconsiderando los problemas, así como la obtención de sus resultados[119]. Nosotros propondremos una lectura que hace patente la

[118] Extensión recursivamente axiomatizable.

[119] No siempre es claro cuándo dice ser exitoso y cuándo no.

consecución meramente parcial de tales objetivos. Por otro lado, nos interesa formular la concepción de Meyer bajo nuestros criterios de comprensión de la lógica. En este sentido, consideramos que se trata de un *descriptivismo aritmético* que restringe la semántica a una comprensión "mitológica". Nuestra finalidad es establecer el planteamiento propicio que dé pie a la discusión de nuestros objetivos generales sobre la semántica y el monismo relevante.

8.2.1. Problemas de la inclusión de $\mathbf{C}^{\#}$ en $\mathbf{R}^{\#}$

Problema

El desiderátum consiste en que los conjuntos de teoremas de $\mathbf{R}^{C}$ y $\mathbf{C}^{R}$ sean coextensionales. No obstante, no hay que perder de vista que el trabajo se desarrolla en relación con los *teoremas de fiabilidad* 13-15 relacionados con la cuestión de la consistencia.

Meyer introduce la disyunción intensional "$\oplus$"[120] definida del siguiente modo: $A \oplus B \coloneqq \neg A \rightarrow B$. De la misma manera introduce una relación de reglas y teoremas en $\mathbf{R}^{\#}$ para ▲ y ▼ (véanse las definiciones de ▼ y ▲ en el apéndice 6.2.).

Es importante remarcar que $A \leftrightarrow \blacktriangledown A$ y $A \leftrightarrow \blacktriangle A$ no se pueden probar en $\mathbf{R}^{\#}$, siendo las fórmulas atómicas de $\mathbf{R}^{\#}$ ecuaciones[121]. No obstante, el primer esquema funciona para fórmulas que no son ecuaciones de tal modo que $T=U \leftrightarrow \blacktriangledown(T=U)$; y el segundo esquema funciona para cualquier inecuación de tal modo que $T \neq U \leftrightarrow \blacktriangle(T \neq U)$. A las fórmulas con las cuales $A \leftrightarrow \blacktriangledown A$ puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$ las denomina Meyer (2021b, p.345) *ecuaciones secundarias*. Del mismo modo, a las fórmulas con las cuales $A \leftrightarrow \blacktriangle A$ puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$ las denomina *inecuaciones secundarias*[122].

[120] Usamos el símbolo "$\oplus$" para no confundir la disyunción intensional con la operación aritmética "+".

[121] $A \leftrightarrow \blacktriangle A$ es el principio de explosión.

[122] Por tanto, tenemos que $A \rightarrow \top$ es un teorema sii A es una ecuación secundaria y $\bot \rightarrow A$ es un teorema sii A es una inecuación secundaria. $\bot \rightarrow \top$ es un teorema sii existe una fórmula A tal que es una ecuación secundaria y una inecuación secundaria. Para que $\mathbf{R}^{\#}$ sea consistente respecto a la negación es necesario que de $\top$ no se siga $\bot$.

El conjunto de fórmulas secundarias es un conjunto cerrado bajo las conectivas clásicas[123]. Así, pues, si las fórmulas atómicas son fórmulas secundarias, entonces cualquier fórmula clásica (desde la perspectiva de $\mathbf{R}^{\#}$) es una fórmula secundaria. Recordemos que el conjunto de las fórmulas atómicas de L^{C} están cerradas bajo $\{\neg,\wedge,\forall\}$ y que $\mathbf{C}^{R}$ intercambia $\supset$ por $\rightarrow$ en las reglas y axiomas de $\mathbf{C}^{\#}$. Meyer (2021b, p.346) se cuestiona por las propiedades clásicas de $\mathbf{R}^{C}$ que se conservan en $\mathbf{R}^{\#}$ y prueba que, si A es un teorema de $\mathbf{R}^{C}$, entonces es un teorema de $\mathbf{C}^{R}$. Lo cual quiere decir que los teoremas en vocabulario clásico de $\mathbf{R}^{\#}$ también lo son de $\mathbf{C}^{\#}$. Probando la conversa tendríamos que en $\mathbf{R}^{\#}$ está incluida la aritmética clásica de Peano de primer orden. Ahora bien, Meyer no puede probar que los conjuntos de teoremas de $\mathbf{R}^{C}$ y $\mathbf{C}^{R}$ son coincidentes. No obstante, consigue un resultado parcial orientado en esa misma dirección: prueba que cualquier fórmula formada con el sub-lenguaje clásico de $\mathbf{R}^{\#}$[124] es un teorema de la aritmética de Peano de primer orden sii puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$ $A\vee\bot$. Esto puede realizarse probando que son equivalentes las siguientes cláusulas[125]. Dada la fórmula $A \in L^{C}$:

A es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$
▲A es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$
▲A es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$
▲▼A es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$
▲▼A es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$
▼▲A es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$
▼▲A es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$

Debemos realizar tres aclaraciones sobre las limitaciones de este resultado. Primero, lo idóneo para el proyecto sería incluir entre las cláusulas equivalentes la siguiente "A es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$", pero no puede probarse con métodos finitarios. Segundo, la equivalencia de "A es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$" y "▲A es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$" supone que desde la perspectiva de $\mathbf{R}^{\#}$ se establece que A es un teorema o, en lo que

[123] Dadas las fórmulas secundarias A y B, $\neg A$, $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\supset B$, $A\equiv B$, $\forall xA$ y $\exists xB$ son fórmulas secundarias. Véase la prueba en Meyer (2021b, p.346).

[124] "Que $\mathbf{R}^{\#}$ reconoce como clásica" en términos de Meyer (2021b, p.347).

[125] Tal como demuestra Meyer (2021b, pp.347-350)

concierne a la negación, $\mathbf{C}^{\#}$ es inconsistente (esto es, se prueba $\perp$). Esto permite aplicar resultados de $\mathbf{C}^{\#}$ en $\mathbf{R}^{\#}$. Tercero, Meyer (2021b, p.350) prueba que una inecuación secundaria formada en L^{C} es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$ si es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$. El desiderátum es obtener la conversa de este último teorema. Los teoremas 13 y 15 son resultados parciales orientados en esa dirección.

Así, pues, Meyer (2021b, §VII) ofrece tres estrategias orientadas a la consecución de este objetivo. La primera estrategia consiste en establecer, mediante el análisis de las propiedades de ▼ y ▲, una traducción de $\mathbf{C}^{R}$ en $\mathbf{R}^{\#}$ con la que obtener métodos probatorios en $\mathbf{R}^{\#}$ para teoremas de $\mathbf{C}^{R}$. La segunda estrategia pretende probar que coinciden los conjuntos de teoremas de $\mathbf{R}^{C}$ y $\mathbf{C}^{R}$ mediante una reformulación de $\mathbf{C}^{R}$ tal que en $\mathbf{R}^{\#}$ se puedan probar sus axiomas y se puedan admitir sus reglas. Par ello Meyer (2021b, p.359) propone una reformulación en cálculo de secuentes. La tercera estrategia consiste en probar la regla γ. Nos centraremos en la tercera estrategia. El análisis de la primera estrategia[126] puede verse en el apéndice 6.5. La segunda estrategia es la menos desarrollada y no la consideramos.

Admisibilidad de la regla γ

La tercera estrategia consiste en probar la regla γ de Ackermann en $\mathbf{R}^{\#}$. Con los recursos desarrollados hasta ahora, esta regla puede ser formulada de las dos siguientes formas equivalentes:

$(A \supset B) \wedge A \vdash B$

$\blacktriangle A \vdash A$

[126] Debemos, cuanto menos, mencionar el motivo de la insuficiencia de la primera estrategia analizado en el apéndice 6.5. El método para discernir las fórmulas tipo ▼A y las fórmulas tipo ▲A se puede formular como un método de tablas de verdad para las fórmulas de L^{C} de tal modo que para cualquier fórmula clásica se puede determinar si es una fórmula tipo ▲A o no lo es. Con este procedimiento se contribuye a la efectividad del teorema según el cual una inecuación secundaria formada en L^{C} es un teorema de $\mathbf{C}^{\#}$ sii es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$. Con este método se pueden probar importantes teoremas de $\mathbf{C}^{R}$ en $\mathbf{R}^{\#}$, no obstante, el desiderátum de que los conjuntos de teoremas de $\mathbf{R}^{C}$ y $\mathbf{C}^{R}$ sean coextensionales todavía no se ha alcanzado.

Si se admite γ, entonces se podría probar[127] que:

- $\mathbf{R}^{\#}$ contiene a $\mathbf{C}^{R}$.
- $\mathbf{R}^{\#}$ es consistente respecto a la negación (*negation-consistent*): no existe una fórmula tal que pueda probarse ella y su negación.
- $\mathbf{C}^{R}$ es consistente respecto a la negación.

En relación con el comportamiento de ▲[128] se puede comprender el surgimiento del problema de la admisibilidad de la regla γ. Esta regla es el *modus ponens* del condicional material o regla de eliminación de ⊃. Si se admite la regla de eliminación de ▲, es decir ▲A⊢A, entonces se deriva la regla γ en $\mathbf{R}^{\#}$. Meyer (2021a, p.223) comprueba esta conexión haciendo uso de su sistema de deducción natural[129] para $\mathbf{R}^{\#}$:

1. $\top \leq A \supset B$
2. $\top \leq A$
3. $\alpha = \neg\blacktriangle B$ Asunción
4. $\alpha \leq \top \wedge \neg B$ Por 3 y def. ▲,⊤,¬∨
5. $\alpha \leq A \wedge \neg B$ Por reemplazo directo en 2 y 4
6. $\top \times \alpha \leq \bot$ Por 1, 5, def. ⊃ e introducción de ⊥
7. ▲B Por 3, 6 e introducción de ¬

Si aplicamos la eliminación de ▲ al paso 7, entonces tenemos que B es un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$. Pero la eliminación de ▲ es precisamente el punto controvertido, puesto que ella misma es la regla γ. Ahora bien, no parece adecuada a la relevancia lógica la admisión de la regla γ. En un primer momento, Mayer (2021a, p.223) atisba el problema pero cree poder encajarlo:

> Question: is γ admissible for $\mathbf{R}^{\#}$?
>
> Answer: I don't know; I suppose so, since γ has been shown admissible for an ever wider class of relevant logics and theories; (…).

[127] Véase prueba en Meyer (2021b, p.361).

[128] Véase apéndice 6.2 y 5.

[129] Véase apéndice 6.4.

> (…) even if for some good reason γ turns out *not* to be admissible for $\mathbf{R}^{\#}$, it might be the case that it is not wanted. (…)
>
> Anyway, being prepared for the worst case, we must adjust our proof techniques in $\mathbf{R}^{\#}$ so that they do not assume γ.

La admisibilidad de γ afecta a la consecución de los objetivos básicos del proyecto, puesto que el principal problema que encontró la *motivación radical*[130] —esto es, la pretensión de probar la corrección de $\mathbf{R}^{\#}$ haciendo uso de métodos finitarios— es la imposibilidad de admitirla. Para probar los teoremas de la aritmética clásica es necesaria la regla γ. Sin embargo, Friedman y Meyer (1992) probaron la inadmisibilidad de γ en $\mathbf{R}^{\#}$ y plantearon la teoría $\mathbf{R}^{\#\#}$ que consiste en una extensión de la anterior que se obtiene al añadir una regla ω. Ahora bien, una regla ω es infinitaria y si se la emplea, entonces $\mathbf{C}^{\#}$ estaría incluida en $\mathbf{R}^{\#\#}$. Hay que tener en cuenta, además, que si tenemos γ y alguna contradicción, entonces también perdemos los medios finitarios para garantizar la fiabilidad del sistema.

Meyer (2021a) deja deliberadamente abierta la cuestión de la (in)admisibilidad de la regla γ en la aritmética relevante. Más adelante, Meyer (2021b, p.361) conjetura la admisibilidad de γ, pero está abierto a la posibilidad de que esta regla falle. Meyer (2021b, p.365) entiende γ como una *condición de normalidad*, antes que como una regla primitiva. No sabemos de partida si un sistema es normal y "is most unreasonable that we should have to answer effective questions ineffectively". Lo importante para Meyer (2021b, p.366) es que γ es suficiente pero no necesaria para probar los tres teoremas antedichos. Para establecer el segundo y el tercero es suficiente con probar el primero. No obstante, no consigue hacer efectiva técnicamente esta afirmación general. Parece que γ sí es necesaria. Recordemos que, dado el teorema 7, para probar que el conjunto de teoremas de $\mathbf{C}^{R}$ y $\mathbf{R}^{C}$ son coincidentes se necesita γ.

Para el éxito del proyecto de Meyer sobre la aritmética relevante se necesita construir un sistema relevante que exprese la teoría de números, el cual admita la regla γ y emplee solo métodos finitarios. Este sistema debe ser uno intermedio entre $\mathbf{R}^{\#}$ y $\mathbf{R}^{\#\#}$: "is there an effectively axiomatizable system intermediate between $\mathbf{R}^{\#}$ and $\mathbf{R}^{\#\#}$, which does formalize arithmetic on relevant principles, but also admits γ in a natural way?"

[130] Infra §9.2.1.

(Friedman y Meyer 1992). Se trata de una vía abierta aún no probada ni descartada. Por consiguiente, el éxito del programa de la aritmética relevante reside en el sistema $\mathbf{R}^{\#1/2}$. El sistema $\mathbf{R}^{\#1/2}$ con métodos finitarios y γ no ha sido construido, por lo que uno de los objetivos básicos de la aritmética relevante no se ha conseguido: probar todos los teoremas de la aritmética clásica.

8.2.2. Problemas en la elusión del segundo teorema de incompletud

Para el análisis metalógico de $\mathbf{R}^{\#}$ empleamos los números naturales como nombres de números (numerales) y como fórmulas con el método de codificación en virtud del cual a cada número natural le corresponde una única fórmula. Recordemos[131] que la fórmula A^i es el número *i*. En esta línea, Meyer (2021b, pp.367-368) introduce las siguientes convenciones:

- $A^i j$ es la fórmula generada al sustituir con el número *j* las apariciones libres de la variable *x* en $A^i x$.
- *r* es una función sobre ℕ tal que para todo $i,j \in \mathbb{N}$, $j \in r(i)$ sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}} A^i j$.
- Se dice que *un número expresa débilmente* un conjunto S de números naturales si $\exists i \in \mathbb{N}$: $S = r(i)$.
- A*x* es una fórmula de clase (*class formula*) si cumple que:
  es una fórmula de L^C,
  x no es una variable ligada y
  no hay más variables libres que *x*.

Dadas las convenciones previas, Meyer (2021b, pp.367-368) prueba que son equivalentes las siguientes cláusulas:

- S es recursivamente enumerable
- S es débilmente expresable en $\mathbf{C}^{\#}$
- S es débilmente expresable en $\mathbf{C}^{R}$
- S es débilmente expresable en $\mathbf{R}^{\#}$
- S es débilmente expresable en $\mathbf{R}^{\#}$ por alguna fórmula de clase
- S es débilmente expresable en $\mathbf{C}^{R}$ por alguna fórmula de clase

[131] Supra §8.1.2.

Con estas cláusulas Meyer (2021b, p.368) puede establecer en $\mathbf{R}^{\#}$ la existencia de una *fórmula de Gödel*, la cual afirma su propia no-probabilidad. Para ello definimos el *conjunto de Gödel* como un conjunto G de números naturales tal que $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \in$ G sii $i \in r(i)$. Ahora bien, dado que $j \in r(i)$ sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}} A^i j$, tenemos que $i \in$ G sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}} A^i i$. Dado que G es recursivamente enumerable y esto es equivalente a que un conjunto de números naturales es débilmente expresable en $\mathbf{R}^{\#}$ por alguna fórmula de clase, tenemos que $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \in$ G sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ Gödi. Dicho de otro modo, existe una fórmula de clase Gödx que expresa débilmente al conjunto G en $\mathbf{R}^{\#}$.

Con las convenciones de Meyer (2021b, p.369) la *fórmula de Gödel* la podemos expresar del siguiente modo: ¬Göd¬Gödx. Es importante aclarar que se trata de una fórmula bien formada dada la notación de Meyer. Esto se entiende en tanto que ¬Gödx es un número que puede sustituir a x en la fórmula de clase ¬Gödx, ya que según la codificación establecida la fórmula A^i es el número i.

Avanzando en el proceso, a partir de $i \in$ G sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}} A^i i$ obtenemos que ¬Göd$x \in$ G sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ ¬Göd¬Gödx. Más aún, a partir de $i \in$ G sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ Gödi obtenemos que ¬Göd$x \in$ G sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ Göd¬Gödx. De los dos resultados anteriores derivamos que $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ Göd¬Gödx sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ ¬Göd¬Gödx.

Nos encontramos ante el núcleo de la cuestión. Si $\mathbf{R}^{\#}$ es consistente respecto a la negación, esto es, que $\mathbf{R}^{\#}$ es consistente sii $\forall$A no puede probarse A en $\mathbf{R}^{\#}$ o no puede probarse ¬A en $\mathbf{R}^{\#}$, entonces la fórmula de Gödel no puede probarse y la negación de la fórmula de Gödel no puede probarse. Esto quiere decir que si es consistente, es incompleto. Dada la consistencia de $\mathbf{R}^{\#}$ tenemos que ¬Göd $\notin$ Göd.

El objetivo es establecer en $\mathbf{R}^{\#}$ una fórmula que tenga las propiedades de la conocida fórmula de Gödel. Este objetivo lo consigue Meyer (2021b, p.369) asumiendo la consistencia respecto a la negación de $\mathbf{R}^{\#}$, a partir de lo cual se obtiene que[132]:

[132] Entre los presupuestos de Meyer (2021b, p.370) debemos destacar tres:

- Todo conjunto recursivamente enumerable es débilmente expresable en $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$.
- Para toda *fixed formula* Ax, es recursivamente enumerable el conjunto de teoremas tipo Aj de $\mathbf{R}^{\#}$.
- $\mathbf{R}^{\#}$ es consistente respecto a la negación.

$\neg$Göd$x \notin$ G $\wedge \nvdash_{\mathbf{R}^{\#}} \neg$Göd$\neg$Göd$x \wedge \nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ Göd$\neg$Gödx[133]

Un *punto fijo* (*fixed point*) es un valor que es asignado a sí mismo por una función. En este caso el valor pertenece al dominio y al recorrido de la función de modo que *fa* = *a*. Un *fixed point combinator* es una función *f* que al aplicarse a un valor *a* arroja una función *fa* que es un *punto fijo* de *a*: *fa* = *a*(*fa*), lo cual permite iteración. La negación tiene este comportamiento por la fórmula de Gödel y por la consistencia de $\mathbf{R}^{\#}$.

Lo anterior sirve para relativizar la centralidad de la negación. Así, con cualquier conectiva monádica *c* con el comportamiento de un *fixed point combinator*[134] podemos generalizar $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ Göd$\neg$Gödx sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}} \neg$Göd$\neg$Göd$x$ de tal modo que $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ GödcGödx sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ cGödcGödx. Del mismo modo generaliza el teorema "si $\mathbf{R}^{\#}$ es consistente respecto a la negación, entonces la fórmula de Gödel no puede probarse y la negación de la fórmula de Gödel no puede probarse" de tal modo que si $\mathbf{R}^{\#}$ es *c*-consistente, entonces $\mathbf{R}^{\#}$ es *c*-incompleto (Meyer 2021b, p.371). Respecto a *c*, si $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$A y $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}c$A tenemos inconsistencia y si $\nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}$A y $\nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}c$A tenemos incompletud. Así, pues, si no existe un A $\in$ $L^{\#}$ tal que $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$A y $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}c$A, entonces existe un B $\in$ $L^{\#}$ tal que $\nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}$B y $\nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}c$B, donde B $\coloneqq$ GödcGödx.

Para mostrar que la *fórmula de Gödel* es verdadera en el modelo $\mathrm{M}^{\#} \coloneqq$ $<\mathbb{N},0,s,+,\circ>$ pero no-probable en $\mathbf{R}^{\#}$ —esto es, $\mathrm{M}^{\#} \Vdash$ cGödcGödx pero $\nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ cGödcGödx— necesitamos la noción que Meyer (2021b, p.373) denomina *True expressibility*. Con la mera expresividad débil tenemos dos niveles de interpretación:

i. El nivel de los números naturales del sub-lenguaje L^{C}. Los enunciados formados con L^{C} son enunciados verdaderos o falsos en $\mathrm{M}^{\#}$. En este nivel Göd$\neg$Gödx y $\neg$Göd$\neg$Gödx no son probables pero al menos una de ellas es verdadera en $\mathrm{M}^{\#}$ (aunque no podamos establecer cuál).
ii. El nivel de lo que Meyer (2021b, p.373) denomina *significado metamatemático*. En este nivel Gödx expresa débilmente G. Gödi expresa que A^{i} pertenece a G.

[133] Nótese que la conjunción está en el metalenguaje y $\nvdash$ es "no $\vdash$".

[134] Se puede comprender como una función monádica definida sobre $\mathbb{N}$ dado que, debido a la codificación, las fórmulas son elementos de $\mathbb{N}$.

Ahora bien, según lo anteriormente expuesto, tenemos que ¬Göd*x* no pertenece a G, de lo cual se sigue que ¬Göd¬Göd*x* es verdadero.

Dado que ¬Göd¬Göd*x* afirma su propia indemostrabilidad en G, tenemos que la *fórmula de Gödel* es verdadera en el segundo nivel, pero puede ser falsa en el primer nivel en tanto que enunciado aritmético. Para evitar esta disonancia Meyer (2021b, p.374) introduce la *expresividad verdadera* definida del siguiente modo: la fórmula de clase $\mathrm{A}^i x \in L^{\mathrm{C}}$ expresa verdaderamente a S si:

$r(i) = \mathrm{S}$
$\forall j \in \mathbb{N}, \vdash_{\mathbf{R}^{\#}} \mathrm{A}^i j$ sii $\mathrm{M}^{\#} \Vdash \mathrm{A}^i j$

Con esta definición son equivalentes las cláusulas:

- S es recursivamente enumerable
- Existe una fórmula de clase $\mathrm{A}^i x$ que expresa verdaderamente a S en $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$
- Existe una fórmula de clase $\mathrm{A}^i x \in L^{\mathrm{C}}$ que expresa verdaderamente a S en $\mathbf{R}^{\#}$

Por consiguiente, si expresa Göd*x* verdaderamente a G, entonces Göd¬Göd*x* es un enunciado aritmético verdadero sii $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ Göd¬Göd*x*. Ahora bien, tal como anteriormente hemos mostrado, Göd¬Göd*x* no es probable en $\mathbf{R}^{\#}$ y, por tanto, la *fórmula de Gödel* es un enunciado aritmético verdadero que no puede ser probado en $\mathbf{R}^{\#}$. Esto soluciona la disonancia entre los niveles interpretativos. Ahora bien, bajo la perspectiva de Meyer (2021b, p.375) se trata de una solución parcial. Si bien es cierto que, extensionalmente tenemos que $\nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}$¬Göd¬Göd*x* y $\mathrm{M}^{\#} \Vdash$ ¬Göd¬Göd*x*, lo que no tenemos a nivel intensional es que la *fórmula de Gödel* exprese verdaderamente su indemostrabilidad en $\mathbf{R}^{\#}$.

Más allá de la interpretación intensional, la limitación que se constata reside en la imposibilidad de expresar en $\mathbf{R}^{\#}$ el complemento del conjunto G (a nivel extensional) a pesar de poder expresar G. No podemos determinar que una fórmula ¬Göd*i* verdadera e indemostrable expresa $i \notin$ G. Para hacerlo necesitaríamos lo que Meyer (2021b, p.376) llama "extrinsic mythology". Meyer insiste en que el problema no se encuentra en la aritmética de la que tenemos conocimiento intuitivo, sino en el sistema lógico desde el cual expresamos la teoría de números. En este caso se llama la atención sobre conectivas como la negación. No obstante, las mismas limitaciones pueden relacionarse

con los cuantificadores o incluso con el condicional relevante. Se destaca la negación por la idea semántica intuitiva según la cual no deben ser falsas a la vez. A este respecto, Meyer (2021b p.376) habla de "semantic faith".

En definitiva, lo que tenemos es, por un lado, que $\mathbf{R}^{\#}$ es e)-consistente sii es f)-consistente, lo cual quiere decir que $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}\bot$ sii $\exists$A tal que $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}$A y $\vdash_{\mathbf{R}^{\#}}\neg$A. Por tanto, la consistencia respecto a la negación significa e)-consistencia y/o f)-consistencia. Por otro lado, $\mathbf{R}^{\#}$ es incompleto respecto a la negación en tanto que la *fórmula de Gödel* es aritméticamente verdadera y expresa su propia indemostrabilidad. La limitación tiene su efecto cuando se hace uso de recursos lógicos y no aritméticos. Lo importante a destacar es que se trata de una inconsistencia respecto a la conectiva de la negación, lo cual se puede generalizar a la mencionada conectiva *c* tal que ¬Göd*c*Göd*x* es aritméticamente verdadero y $\nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ Göd*c*Göd*x* y $\nvdash_{\mathbf{R}^{\#}}$ *c*Göd*c*Göd*x*. Defendemos que la idea fundamental del proyecto de Meyer reside en que la aritmética relevante es trivialmente consistente, esto es, posee las propiedades a) – d) y tiene recursos suficientes para que estas propiedades no colapsen con e) y f).

La "corrección filosófica" que propone Meyer del "error" que supone el segundo teorema de incompletud se refiere a que la consistencia de la aritmética necesite ser demostrada. La consistencia trivial a) - d) es adecuada a las necesidades de la aritmética. El segundo teorema de incompletud afecta a la superestructura lógica con la que se expresa la teoría de números. Por este motivo debemos contar con recursos expresivos suficientes para que no colapsen todas las definiciones de consistencia de tal modo que queden indiferenciados los campos de lo lógico y de lo aritmético. En este sentido el segundo teorema de incompletud *es* un error, pero no hay un error *en* la prueba del segundo teorema de incompletud. La corrección del error no es una prueba, en un sistema consistente que contiene a la aritmética, de una fórmula que expresa la consistencia del sistema. No consigue una auto-fundamentación. Ahora bien, esta estrategia de evitar el segundo teorema de incompletud se basa en dos puntos discutibles:

- Una concepción de la lógica en virtud de la cual: (i) la semántica se excluye a una dimensión de creencias injustificadas, (ii) tenemos conocimiento intuitivo de la aritmética y (iii) la sintaxis debe expresar adecuadamente la aritmética y sus limitaciones se consideran errores. A esta concepción la denominamos

descriptivismo aritmético para comprenderla bajo nuestros parámetros (supra §2).

- Es necesario probar que en $\mathbf{R}^{\#}$ las definiciones a) – d) y e) - f) no colapsan. Esta prueba no está presente en las investigaciones de Meyer.

8.2.3. Descriptivismo aritmético

Tal como hemos analizado, Meyer (2021b) establece como objetivo de su investigación una prueba de la consistencia de la teoría de números expresada en el sistema relevante de primer orden **R**. Al sistema que resulta de introducir los axiomas de Peano en **R** lo llama $\mathbf{R}^{\#}$. Este proyecto pretende ser de una envergadura enorme: "In plain English, this paper repeals Gödel's famous second theorem" (Meyer 2021b p.289). Más aún, considera que el segundo teorema de incompletud es un error (*mistake*) y la posibilidad de evitar el segundo teorema de incompletud rehabilita el programa formalista hilbertiano. Es importante destacar dos aspectos: por un lado, se trata de una rehabilitación parcial del programa hilbertiano en tanto que no puede evitar el primer teorema de incompletud y, por otro lado, el objetivo es de carácter filosófico-intuitivo ya que con ello pretende probar la propia fiabilidad (*reliability*) de la aritmética intuitiva a través de métodos finitarios y efectivos. Los métodos finitarios son los que confieren el carácter intuitivo al objetivo de probar la propia fiabilidad de la aritmética relevante. La importancia del proyecto es de naturaleza filosófica y la prueba de consistencia es muy elemental.

Es importante recalcar el carácter filosófico del proyecto de la aritmética relevante de Meyer. El segundo teorema de incompletud lo entiende como un error, pero no como un error técnico. Por tanto, no hay una corrección del mismo de tal modo que se pruebe el enunciado que expresa la consistencia de $\mathbf{C}^{\#}$ en $\mathbf{C}^{\#}$. Antes bien, se trata de una corrección conceptual: "What is offered, rather, is a philosophical correction" (Meyer 2021b, p.290) en un doble sentido: corrige la idea de que la consistencia de $\mathbf{C}^{\#}$ debe ser probada y prueba la consistencia de $\mathbf{R}^{\#}$. "we are so strongly convinced that arithmetic is consistent (…), that demonstrating its consistency is just a game" (Meyer 2021b, p.293). El error se encuentra en usar la lógica clásica como sistema subyacente a la aritmética y en no tomar la teoría de números usual como una teoría intuitivamente consistente de partida. Es la lógica que lo expresa la que debe ser alterada. El problema

no es la fiabilidad de la aritmética de la que tenemos conocimiento intuitivo, sino que es la fiabilidad del sistema lógico con el que se reconstruye.

En este sentido, Meyer (2021b, p.297) distingue de forma tajante lo lógico de lo aritmético. Y bajo esta comprensión, la negación pertenece al ámbito de lo lógico. El problema con $\mathbf{C}^{\#}$, según explica Meyer, reside en que no diferencia la "anomalía" *lógica* del segundo teorema de incompletud del ámbito de la teoría de números. Dos cosas cabe decir sobre esta indistinción: por un lado, desde la perspectiva de Meyer, conduce a interpretaciones distorsionadas y exageradas sobre la aritmética y, por otro lado, tiene su razón de ser en la incapacidad de $\mathbf{C}^{\#}$ para dar cuenta de la relevancia en las inferencias aritméticas. Desde esta concepción, los teoremas de incompletud no ponen en cuestión la fiabilidad de la aritmética, sino de la "superestructura lógica" (Meyer 2021b, p.297). En este marco de comprensión los teoremas de incompletud no suponen una incertidumbre epistémica sobre la aritmética. Por este motivo afirma Meyer (2021b, p.298) que "Elementary arithmetic is safe; we knew that before we began to apply logic to it". Ante esta problemática, la tarea que se propone Meyer no consiste en cambiar la lógica subyacente (o superestructura lógica), sino en comprender mejor dicha lógica. En nuestros términos decimos que se trata de una tarea de describir formalmente el razonamiento intuitivo preexistente: "Intuitive arithmetic, at least at its elementary levels, we took to be prelogically given" (2021b, p.312). En este marco de comprensión pretende Meyer haber esquivado el segundo teorema de incompletud y haber abierto un nuevo programa de fundamentación.

Parte del problema se debe al uso de la negación para expresar leyes y, a su vez, expresar hechos. En un principio, la expresión de leyes se previó para el condicional relevante en detrimento del condicional material. En el caso de la negación no hay una distinción tan clara. Dada la *fe* semántica, independientemente de que se pruebe ¬A en $\mathbf{R}^{\#}$, ¬A es verdadero al tener que A es falso. Para Meyer (2021b, p.376) el problema es con la negación formal y no con el conocimiento intuitivo, además, la *fe* semántica no es un procedimiento probatorio. Por este motivo considera que es una exageración asumir que los teoremas de incompletud de Gödel suponen la constatación de que no es posible incluir en un mismo sistema distintos procedimientos probatorios que intuitivamente admitimos. Es una exageración puesto que se da por sentado la *fe* en el comportamiento semántico de la negación formal:

> the semantic faith embodied in our understanding of negation is not part of the argument (…). Again, we must not confuse semantic faith with deductive reason. Faith is not a proof procedure, valid or otherwise; rather it embodies our guiding ideals, to which we seek to make rational proof procedures conform. (Meyer 2021b, p.376).

Meyer es un descriptivista de la realidad pre-lógica de la teoría de números. Los procedimientos probatorios (con los que se estudia la consistencia) sirven para expresar la aritmética. En caso de fallo lo que se debe revisar es la esta superestructura lógica. Ahora bien, las condiciones semánticas de los operadores lógicos son ideales que pueden guiar la creación de procedimientos de prueba, pero no son ellos mismos probatorios. Bajo esta concepción comprende el error del condicional material: el error es entender que una implicación material verdadera justifica la admisión de un procedimiento probatorio del condicional material (Meyer 2021b, p.376-377).

La condición según la cual las fórmulas atómicas son verdaderas o falsas y que la formación de fórmulas compuestas sigue un procedimiento veritativo-funcional pertenece al ámbito de la *fe semántica*. Esta creencia nos orienta a asumir que las inferencias válidas son hechos preexistentes, la lógica es la ciencia que las descubre y dados los teoremas de limitación no disponemos de un procedimiento efectivo para descubrirlas todas. Para Meyer (2021b, p.377) esta es una concepción teológica: "The view, indeed, seems to be that God keeps most of the good arguments for himself, but that, in his infinite kindness, he lets us find a few of them. (…) it is about time to abandon theological validity as a criterion of good reasoning".

La admisibilidad de la regla γ también es un problema relacionado con la concepción filosófica del proyecto de Meyer. No se trata de una mera cuestión técnica. La regla γ es necesaria para probar los teoremas de $\mathbf{C}^{\#}$ en $\mathbf{R}^{\#}$. Pero la envergadura del problema se entiende si se toma en consideración otra de las asunciones de Meyer: la práctica matemática, en este caso de la aritmética, es previa a la lógica. "One of the fundamental assumptions at the heart of Meyer's project is that mathematical practice is in many ways prior to logic; if the number theorist finds that there are theorems that fail in $\mathbf{R}^{\#}$" (Ferguson y Priest 2021, p.136). La teoría de números es un dato dado y la lógica (clásica o relevante) debe probar sus teoremas. Si no se consigue, entonces el fallo es del sistema lógico y no de la aritmética.

Lo que le interesa a Meyer (2021a, p.222) es contar con el condicional relevante para establecer que con él se constituyen las conexiones estructurales entre las fórmulas de la aritmética: "For we continue to see → of $\mathbf{R}^{\#}$, for present purposes, as the underlying implication on wich arithmetic is built up". Ahora bien, esto no supone la exclusión de otros principios no relevantes, de hecho, introduce "▼" para poder expresar formulaciones de consecuencia menos restrictivas que la relevante pero que se puedan relacionar con la noción relevante. Asimismo, introduce un tercer condicional distinto del material "⊃" y el relevante "→", a saber, un condicional "↠" con propiedades intuicionistas. Le interesa mantener el condicional relevante para expresar las conexiones entre hechos pertenecientes al universo del discurso ya constituido por los números naturales. La construcción de los números naturales se establece con conexiones relevantes, pero la conexión de los hechos no es siempre estructural.

En esta línea, Meyer (2021a, p.224) entiende que γ es un principio factual que no expresa relaciones estructurales de la aritmética. Las relaciones estructurales conciernen a la inferencia y deben ser relevantes. Por su parte, los hechos de un dominio pueden expresarse materialmente. Las leyes aritméticas deben ser relevantes y los hechos aritméticos pueden ser materiales. Y en este sentido γ varía según las asunciones. Los Axiomas de Peano formalizan el conocimiento intuitivo que de los números naturales tenemos. Los principios relevantes son los que se precisan para construir los números naturales en sus primeros principios y en las derivaciones entre enunciados aritméticos. Tales derivaciones dependen de la forma en la que expresamos formalmente los primeros principios, por lo que esta expresión es la que debe ser relevante.

En definitiva, distinguimos tres componentes de la concepción de la lógica de Meyer, a la cual denominamos *descriptivismo aritmético*. Se trata de una reconstrucción propia de la concepción de la lógica subyacente que está operando en el proyecto de la aritmética relevante de Meyer. Es una reconstrucción a partir de nuestros criterios teóricos y orientada a nuestros focos de discusión. En este sentido, admitimos que es susceptible de ser debatida. No obstante, no nos interesamos en la cuestión exegética de los textos de Meyer, sino en la referencia crítica a una concepción pertinente para nuestros propósitos.

1. La aritmética es una realidad dada, esto es, una realidad pre-lógica de la que tenemos conocimiento intuitivo. Hay una distinción terminante entre la lógica y

la aritmética y los problemas de consistencia afectan a la lógica que expresa la aritmética. La consistencia de la aritmética es también algo dado y no es cuestionable para Meyer. Debemos contar con recursos suficientes para distinguir entre los dos planos.

2. La caracterización axiomática con un lenguaje lógico y un sistema deductivo sirven para expresar la realidad pre-lógica que constituye la aritmética. Las limitaciones propias de la axiomática no son imputables a la aritmética, sino que son un indicio de que estamos empleando una mala caracterización de la lógica. Debemos describir mejor el razonamiento que empleamos para caracterizar la aritmética.
3. La realidad pre-lógica no es la validez. Las condiciones semánticas son ideales que orientan el establecimiento de procedimientos probatorios. Para expresar la aritmética necesitamos procedimientos probatorios y la semítica, tal como entiende Meyer, no tiene este carácter. Entender que las fórmulas atómicas son verdaderas o falsas es una creencia a la que Meyer denomina *fe semántica*. La tarea de la lógica no consiste en descubrir inferencias válidas.

Sobre estos componentes realizamos tres comentarios, respectivamente:

1. No sostenemos una tesis sobre la concepción de las matemáticas. No obstante, nos orientamos hacia una concepción convencionalista próxima a la concepción que mantenemos sobre la lógica. Defender esta concepción sobre las matemáticas supondría elaborar argumentos concernientes a aspectos matemáticos específicos no relacionados con la relación de consecuencia. Simplemente destacamos que nos centramos en la concepción de la lógica y no entramos en la discusión sobre la naturaleza de la aritmética aunque tengan relaciones.
2. Si la lógica, en tanto que sintaxis, describe a la aritmética y hay una demarcación entre lógica y aritmética, esta tarea descriptiva no es suficiente para dar cuenta de los conceptos centrales de la lógica tales como la relación de consecuencia. Asumiendo el descriptivismo, puede asumirse como condición necesaria la representación de la aritmética para establecer *la* lógica adecuada. No obstante, la relación de consecuencia es una realidad de otro tipo. Sin ser explícito, parece que Meyer asume que la lógica es un razonamiento intuitivo en tanto que no pretende “hacer un cambio de sistema lógico” para evitar el “error” del segundo

teorema de incompletud. Antes bien, su objetivo es describir mejor *la* lógica (verdadera) ya que la caracterización que usamos (la clásica) es errónea al ser afectada por el segundo teorema de incompletud.

3. En nuestro planteamiento asumimos la prioridad de la semántica en la definición de los sistemas lógicos. Meyer la excluye al ámbito de las creencias mitológicas dado que carece de carácter probatorio. Ahora bien, consideramos que la crítica de Meyer es efectiva sii se mantiene una concepción intuitiva de la semántica en tanto que representación del fenómeno de la significación. Nosotros, por el contrario, defendemos una concepción convencionalista (también) de la semántica de modo que incluimos como pertinente a la discusión lógica la definición g)[135] de consistencia, la cual es excluida en el planteamiento de Meyer por involucrar la dimensión semántica. La g)-consistencia permite comprender mejor la cuestión de la *fiabilidad* del sistema lógico que expresa la aritmética. En este sentido, la exclusión que hace Meyer de la g)-consistencia supone una deficiencia en su comprensión filosófica de la *fiabilidad* de los sistemas lógicos.

   Consideramos que la crítica de Meyer a la "fe" semántica es válida. Por tanto, para recuperar la dimensión semántica proponemos una concepción convencionalista de la misma que escape a la crítica de Meyer. Este convencionalismo semántico es un *tratamiento sintacticista* de la teoría de modelos. Ahora bien, este *tratamiento sintacticista* no debe confundirse con una comprensión errónea de la semántica como procedimiento efectivo para realizar pruebas. Tampoco debe confundirse con la tesis en virtud de la cual el significado se encuentra en las reglas de inferencia (como defiende Read). Antes bien, consideramos a la semántica formal como meras estipulaciones algebraicas lingüístico-formales. Esta concepción se aparta de la convicción habitual según la cual la semántica formal capta el fenómeno del significado. Queda restringida a plano lingüístico estipulativo simbólico.

[135] $\mathbf{C}^{\#}$ es consistente sii $\forall A$ si puede probarse A en $\mathbf{C}^{\#}$, entonces A es verdadero en $<\mathbb{N},0,s,+,\circ>$. De hecho esto es precisamente lo que nos interesa para la reducción de complejidad que se encuentra en el núcleo de nuestra tesis de la semántica convencional (supra §7).

9. LA POSIBILIDAD DE UN MONISMO CONVENCIONALISTA RELEVANTE

Dada la concepción convencionalista definida a partir de la *lectura sintacticista de la semántica*, obtenemos una comprensión convencionalista de la relevancia lógica. El criterio fundamental es el fallo de las Paradojas del Condicional Material a partir de la definición relevante de consecuencia, considerando la regla estructural de la atenuación. A diferencia de la propuesta de Read (1988) sobre la prioridad de una teoría sintáctica del significado, nuestro convencionalismo nos conduce hacia una prioridad de una semántica formal sin significado. Con esta perspectiva no se trata de representar aquello que *es* la relevancia de las premisas para la conclusión y del antecedente para el consecuente, sino de *calificar* o simplemente denominar "relevante" a cualquier sistema que cumpla estas condiciones estrictamente formales. Es la relación de nuestros dos objetos básicos de investigación cuya direccionalidad va *del convencionalismo a la relevancia*. Con la relación en esta dirección obtenemos una noción no descriptivista de relevancia, lo cual se encuentra en contraposición con la motivación básica de la tradición de investigación en las lógicas relevantes dirigida a una noción intuitiva.

Así planteado, el convencionalismo relevante se sitúa en la posición del convencionalismo pluralista de nuestra taxonomía de las posiciones posibles respecto al problema de la pluralidad de lógicas (supra §2.3.). No obstante, en este capítulo nos interesa explorar la posibilidad de un monismo convencionalista que favorezca a **R**. La propia idea de "monismo convencionalista" parece una posición vacía. Si la lógica es un conjunto de estipulaciones simbólicas (lenguaje, modelos, cálculo), ¿Por qué restringir las estipulaciones a un único sistema? La pluralidad de lógicas es un hecho: existen sistemas divergentes (tal como defendimos en §3.). ¿Cómo se puede justificar que un sistema relevante es "la única" lógica sin recurrir a la descripción de una realidad pre-teórica privilegiada? Nuestro propósito en este capítulo es plantear coherentemente esta posibilidad a partir del proyecto de la aritmética relevante de Meyer interpretado bajo nuestra postura convencionalista. Defendemos que esta interpretación convencionalista de la aritmética relevante permite plantear la posibilidad de un *monismo convencionalista relevante*. Así, pues, en este capítulo convergen los dos capítulos anteriores.

En primer lugar, mostramos que existe un equilibrio argumentativo entre la posibilidad de un monismo clásico y uno relevante. Los problemas y ventajas de uno

son coincidentes con los del otro. En segundo lugar, planteamos las posibles interpretaciones del proyecto de la aritmética relevante y nos centramos en la alternativa monista. En tercer lugar, aclaramos la idea del monismo convencionalista a partir de la concepción de la semántica convencional (supra §7), analizamos la noción de incompletud y, finalmente, evaluamos el éxito relativo de la aritmética relevante bajo los parámetros del monismo convencionalista. Tal como mostramos en el capítulo anterior (supra §8), desde nuestra perspectiva, la aritmética relevante no consiguió sus objetivos de (i) evitar el segundo teorema de incompletud ni de (ii) contener la aritmética clásica. No obstante, respectivamente, (i) abre la posibilidad de una consistencia trivial que no colapsa con la afectada por la incompletud permitiendo ciertas garantías de "fiabilidad" y (ii) abre la posibilidad técnica de construir un sistema $\mathbf{R}^{\#1/2}$. En conclusión, no obtenemos el argumento concluyente deseado y debemos mantener que el monismo relevante no es más (ni menos) plausible que el clásico, pero observamos que la aritmética relevante como proyecto permite plantear determinadas vías interpretativas filosóficamente fértiles orientadas hacia el monismo relevante.

9.1. LÓGICA RELEVANTE RELEVANTE

Como hemos analizado (supra §5.1.1.), la semántica para las lógicas relevantes en el plan australiano añade a la semántica de mundos posibles una relación ternaria de accesibilidad para dar cuenta del comportamiento del condicional, un operador conocido como *estrella de Routley* para la negación y mundos (o situaciones en tanto que partes de mundos) que pueden ser inconsistentes e incompletos. Girard y Weber (2015, p.93) consideran que esta semántica implica una "metafísica barroca" cuya extravagancia es producto de la discordancia entre la metateoría clásica y una teoría no clásica de objetos. Por este motivo su preferencia se inclina hacia una semántica "uniformemente relevante" con una metafísica tan aceptable como la clásica.

Desde nuestra perspectiva convencionalista la semántica formal es una estipulación simbólica que no es el reflejo dependiente de una cosmovisión en particular. Los mundos incompletos e inconsistentes o situaciones son meros índices de valuación de fórmulas sin correlato metafísico más allá del empleo instrumental que se pueda hacer de ellos. Girard y Weber (2015) se refieren a ellos como "mundos malos" (*bad worlds*), los cuales han sido objeto de crítica, por ejemplo, por parte de Read (2006) y Copeland (1979). Por lo tanto, no adoptamos una metafísica considerada

plausible por Girard y Weber (2015) propia de la semántica relevante, o al menos tan plausible como la metafísica de la semántica clásica. Antes bien, lo que nos interesa del argumento de Girard y Weber (2015) al proponer una semántica relevante es su respuesta a la objeción de circularidad. A partir de ello, defendemos que basta un lenguaje con capacidad computacional suficiente para contenerse a sí mismo para no "ir más allá" de la estipulación simbólica y evitar la necesidad de apelar a una metafísica pre-lógica.

Girard y Weber (2015) construyen una semántica de mundos posibles con una relación binaria de accesibilidad (como la semántica kripkeana tradicional) para los sistemas relevantes. No obstante, en lugar de usar un metalenguaje clásico como en el plan australiano, emplean un metalenguaje relevante en la fabricación de modelos y en la constitución de definiciones semánticas. De este modo se evita, además, la admisión de los "mundos malos": "Instead of modeling non-classical objects in a classical framework and introducing esoterica to block irrelevance, a relevant framework can have models with only normal worlds, all enjoying their equal status as 'possible' " (Girard y Weber 2015, p.93). Visto desde esta perspectiva, el operador estrella, la relación ternaria y los mundos inconsistentes e incompletos son mecanismos extravagantes del que el metalenguaje clásico debe hacer uso para poder dar cuenta de objetos no clásicos.

En este sentido se distinguen una *lógica relevante clásica* y una *lógica relevante relevante*, esto es, una lógica relevante con una semántica en metalenguaje clásico (como el plan australiano) y una lógica relevante con una semántica en metalenguaje relevante (como el plan escocés de Read (1988) y Meyer (1985)). La lógica relevante relevante parece incurrir en una explicación circular. Ahora bien, el argumento general consiste en mostrar que la lógica clásica incurre en el mismo problema, de modo que la lógica relevante es tan (i)legítima como la clásica.

Nuestro propósito, a partir de la viabilidad de un metalenguaje relevante para la semántica de los sistemas relevantes, consiste en mostrar que no hay una realidad pre-lógica que "explicar", la cual presuntamente debiera ser representada por la semántica en cuestión. Antes bien, se trata de meras estipulaciones simbólicas que dejan de ser problemáticas si constituyen un lenguaje con capacidad computacional suficiente para contenerse a sí mismo. No se trata de una solución dogmática al problema, sino de la

disolución del problema. Por el contrario, Girard y Weber (2015) admiten la circularidad de un sistema explicándose a sí mismo, pero muestran que esta circularidad es inevitable tanto para el metalenguaje relevante como para el metalenguaje clásico (y cualquier otro). Sus esfuerzos se dirigen a confeccionar una semántica con una metafísica más intuitiva y atribuyen el barroquismo del plan australiano a la perspectiva clásica.

Para evitar la necesidad de los *mundos malos* en un metalenguaje clásico Girard y Weber (2015, p.95) asumen un conjunto de mundos posibles, los cuales se entienden del modo habitual (conjuntos máximamente consistentes de FBF: para toda A, $A \in w \vee A \notin w$ y $\neg(A \in w \wedge A \notin w)$, y una relación binaria de accesibilidad. No obstante, en el metalenguaje usan teoría de conjuntos (con la axiomática ZFC) empleando el condicional relevante. Ahora bien, dado que la teoría de conjuntos del metalenguaje es paraconsistente, Girard y Weber (2015, p.96) observan que es posible que existan fórmulas del tipo $A \in w \wedge A \notin w$ y $\neg(A \in w \vee A \notin w)$ sin que se transgredan la completud y la consistencia de los mundos.

Para la definición de la relación de satisfacibilidad se usa un metalenguaje conjuntista, de modo que las condiciones semánticas de la conjunción y la disyunción se establecen del modo clásico, pero el bicondicional ("sii") del metalenguaje es relevante. Es posible definir la negación relevante sin el operador estrella si se admite que $\nvDash$ supone una negación con el comportamiento de la negación de algún sistema relevante como **R**, el cual es el que Girard y Weber (2015) toman de referencia. La consecuencia se define en términos de conservación de la verdad en los mundos posibles de los modelos. De este modo tenemos que:

- $w \Vdash$[136] $A \wedge B \leftrightarrow (w \Vdash A) \wedge (w \Vdash B)$
- $w \Vdash A \vee B \leftrightarrow (w \Vdash A) \vee (w \Vdash B)$
- $w \Vdash \neg A \leftrightarrow w \nvDash A$
- $w \Vdash A \rightarrow B \leftrightarrow \forall w'(wRw'): (w' \Vdash A) \rightarrow (w' \Vdash B)$[137]

[136] En sentido estricto lo que satisface a las fórmulas es la función de interpretación. En este caso abreviamos para aclarar el punto conceptual que estamos tratando.

[137] Nótese que "↔", "∀" y las conectivas "∧", "∨" y "→" de las partes derechas de los bicondicionales corresponden al metalenguaje.

El principio de explosión falla y la interpretación metafísica es más intuitiva, lo cual es lo que buscan Girard y Weber (2015, p.96). El mundo en el que el principio de explosión falla puede ser el actual: "it may be that both the Liar sentence and its negation hold in the real world, without 'Gore became the US president in 2001' holding". Esto no exige que sea un *mundo malo*. A continuación, nos centramos en la cuestión de la petición de principio.

- Crítica a la circularidad que supone emplear un metalenguaje relevante: respuesta de Girard y Weber (2015)

Dado el metalenguaje relevante para establecer el comportamiento de las conectivas del lenguaje objeto relevante se incurre en una circularidad que no explica las propiedades de las conectivas. Nos interesa particularmente el condicional: si se emplea el condicional relevante para establecer la regla semántica del condicional relevante, entonces no se está explicando su comportamiento, sino meramente enunciando sus propiedades. Sin un conocimiento previo e independiente de la lógica relevante no es posible determinar los principios que son adecuados para construir los modelos. Girard y Weber (2015, p.97) formulan la objeción del siguiente modo:

> You do not have independent knowledge of what relevant logic is. How do you know which principles are acceptable in constructing models and defining semantics? To be blunt, the approach is viciously circular. You define the semantics for a conditional using the conditional itself. Properties of the conditional are just asserted!

La primera parte de la respuesta de Girard y Weber (2015, p.97) al desafío de la circularidad consiste en una consideración cognoscitiva general: ya sabemos qué es la lógica relevante lo suficiente como para construir modelos y establecer las condiciones semánticas. Ya disponemos de descripciones axiomáticas de los sistemas relevantes. Ya disponemos de los principios matemáticos de los sistemas relevantes.

En la segunda parte de la respuesta Girard y Weber (2015, p.98) admiten que la circularidad está presente en su propuesta de la *lógica relevante relevante*. No obstante, se trata de una circularidad no viciosa. El motivo consiste en señalar que se trata del proceder habitual en la caracterización de los sistemas lógicos. Si pensamos en la lógica clásica tenemos que su semántica es definida con un metalenguaje clásico. En este caso la táctica argumentativa para eludir la acusación de circularidad consiste en explicar que las cláusulas recursivas describen un metalenguaje natural elemental. Sin embargo, lo

mismo se podría decir del metalenguaje relevante. Además, la lógica clásica tiene serias dificultades en ciertas correspondencias con el lenguaje natural, entre ellas destacan las Paradojas del Condicional Material las cuales son precisamente la motivación de la lógica relevante.

Sin embargo, la respuesta de Girard y Weber (2015, p.98) va en otra dirección. Ellos observan que la circularidad se puede transformar en un problema de regresión al infinito poniendo como ejemplo la regla semántica del condicional:

$w \Vdash A \rightarrow B \leftrightarrow \forall w'$: $(w' \Vdash A) \rightarrow (w' \Vdash B)$

$w \Vdash A \rightarrow B \leftrightarrow \forall w'w''$: $(w'' \Vdash (w' \Vdash A)) \rightarrow (w' \Vdash (w' \Vdash B))$

... ad infinitum

Ahora bien, se "debe empezar en alguna parte" ("*gotta start somewhere*") y es tan problemática o no problemática la *lógica relevante relevante* como la *lógica clásica clásica*. Si la circularidad es un impedimento para la caracterización de la lógica relevante con metalenguaje relevante, también lo es para la caracterización de la lógica clásica con metalenguaje clásico. Por consiguiente, Girard y Weber (2015, p.98) afirman que

> Here we just offer that, insofar as it is standard to use a material conditional and Boolean negation to build the semantics for the material conditional and Boolean negation, it is as straightforward to use relevant paraphernalia to build a semantics of relevance. If the latter is problematic, then so too is the former. Methodologically, there is no difference, as far as circularity goes.

En definitiva, con el metalenguaje relevante la semántica de la lógica relevante (desde la concepción descriptivista) no se compromete con una metafísica que involucra *mundos malos*, un operador estrella y una relación ternaria. A su vez, el metalenguaje relevante para el análisis metalógico es tan problemático como el uso del metalenguaje clásico. Metodológicamente mantienen los mismos problemas si se los emplea de manera uniforme con el lenguaje objeto. Las dificultades surgen cuando se rompe la uniformidad y se emplea un metalenguaje clásico para dar cuenta de un sistema no clásico, como en el caso del plan australiano.

- Crítica de petición de principio a la concepción descriptivista: respuesta convencionalista

Girard y Weber (2015) no resuelven el problema de la circularidad. Simplemente ponen de manifiesto que es tan problemático o no problemático en lógica relevante como en lógica clásica. Ahora bien, desde nuestra perspectiva una regla semántica es una estipulación y no una explicación. Los modelos no son situaciones metafísicas ni descripciones de situaciones metafísicas. Los modelos también son estipulaciones simbólicas que pueden usarse o no con criterios instrumentalistas. Esta posición es la única que permite evitar la petición de principio de la explicación del comportamiento de una realidad pre-teórica. Más aún, no es una forma de dogmatismo en la solución dado que disuelve el problema. Se necesita un metalenguaje para definir la relación de consecuencia, estudiar las metapropiedades y establecer las condiciones semánticas. La fusión que empleamos en la noción relevante de consecuencia es su regla semántica estipulada. No hay una fusión pre-lógica.

La primera respuesta de Girard y Weber (2015, p.97) a la objeción de circularidad no parece ser satisfactoria si el objetivo reside en explicar unos principios pre-lógicos relevantes. Si definimos el condicional relevante con el condicional relevante, entonces no se está explicando el mismo condicional relevante con el razonamiento condicional pre-lógico. Nuestra estrategia no consiste en buscar un vínculo privilegiado del lenguaje formal con cierta "realidad lógica" de la que tenemos un presunto conocimiento intuitivo, sino de eliminar la supuesta realidad pre-lógica. La asunción de una "realidad lógica" pre-teórica no solo incurre en el problema de explicar la relación del formalismo con la realidad, sino que incurre en un problema mayor: una segunda petición de principio al determinar como "lógica" a aquella presunta realidad pre-teórica. Para poder identificarla como lógica es preciso disponer de una definición previa de la relación de consecuencia. En las ciencias formales se trata de estipulaciones formales aplicables instrumentalmente a distintos campos empíricos. No se trata de describir realidades materiales concretas.

Debemos distinguir el problema de la petición de principio de la (i) explicación de la fusión o el condicional relevante y la petición de principio de la (ii) determinación de la realidad lógica pre-teórica. (i) Es un problema para el uso de metalenguaje relevante y se soluciona con el convencionalismo. (ii) Es un problema para el

descriptivismo y se soluciona con el convencionalismo. Otro problema es explicar el fallo de las falacias de la irrelevancia, el cual se soluciona incorporando la relevancia en la definición misma de consecuencia sin tratarlas como condiciones distintas.

Meyer (1985) explica que la lógica relevante con metalenguaje clásico tenía como propósito "to "preach to the Gentiles in their own tongue". (…) preaching in Classicalese to the Classicalists or it is they, and not we, who hold the view that only Classicalese makes sense; and that, for anything else to make sense, it must have a Classicalese translation". La prueba de completud de **R** que realiza Meyer (1985) es a partir de principios relevantes, pero hay que decir que los modelos los fabrica con lógica clásica.

9.2. INTERPRETACIÓN DE LA ARITMÉTICA RELEVANTE

9.2.1. Proyecto de Meyer

El proyecto de la aritmética relevante de Meyer tiene dos objetivos principales, a saber: expresar la teoría de números en el sistema relevante **R** y evitar el segundo teorema de incompletud de Gödel con esta aritmética relevante. Ahora bien, debemos insistir en que el proyecto de Meyer es esencialmente filosófico, principalmente en lo que respecta al segundo objetivo. La estrategia con la cual pretende evitar el segundo teorema de incompletud no consiste en probar que, dada la consistencia del sistema aritmético relevante, el enunciado que expresa la consistencia del sistema sí es demostrable en el sistema. Antes bien, la estrategia de Meyer involucra la intervención de nociones filosóficas relacionadas con la consistencia y el rol desempeñado por la lógica en general y, en particular, por la conectiva de la negación. Este ejercicio interpretativo exige hacer explícita la concepción que se tiene de la lógica y de la propia aritmética.

Tal como explican Ferguson y Priest (2021, p.133) el proyecto de la aritmética relevante consiste en expresar la teoría de números en un sistema relevante: "A relevant arithmetic is any formal theory in which number theory may be expressed that is based on a relevant logic". Este planteamiento admite diversas formulaciones según el sistema relevante y la axiomática de la teoría de números. La propuesta que Meyer investigó en su proyecto fue el de los axiomas de Peano junto con el esquema de inducción en el

sistema **R**. A esta teoría formal le atribuyó la nomenclatura $\mathbf{R}^{\#}$. La motivación de investigar $\mathbf{R}^{\#}$ es, según Ferguson y Priest (2021, p.134), doble:

- Motivación conservadora: $\mathbf{R}^{\#}$ es preferible en la práctica matemática a la formulación clásica de la axiomática de Peano ($\mathbf{C}^{\#}$) puesto que $\mathbf{C}^{\#}$ tiene menor capacidad expresiva, lo cual conlleva el colapso de distinciones matemáticas importantes. Esto se debe a que $\mathbf{C}^{\#}$ solo cuenta con el condicional material y en $\mathbf{R}^{\#}$ es posible distinguir el condicional material del condicional relevante. Desde la perspectiva de Meyer (2021a) el condicional material es una conectiva de hechos en un enunciado. El condicional relevante expresa una conexión *de iure*. Lo que se quiere decir es que en la práctica matemática se apela a una implicación no basada en el condicional material, sino en el relevante.
- Motivación radical: Meyer (2021b) considera que se puede probar la corrección de $\mathbf{R}^{\#}$ y evitar el segundo teorema de incompletud de Gödel. Meyer (2021b) recupera el programa hilbertieno y, en particular, la pretensión de probar la corrección de la aritmética empleando solo medios finitarios. Bajo esta perspectiva, en (Meyer y Mortensen 2021) probó junto con Mortensen a partir de la construcción de modelos finitos la Post-consistencia de $\mathbf{R}^{\#}$.

9.2.2. Interpretaciones posibles

Nos apoyamos en Weber (2021, pp.581-582) para sintetizar las posibles interpretaciones del proyecto de la aritmética relevante de Meyer:

- Respuesta *monista positiva*: la aritmética relevante es la única aritmética verdadera. Por consiguiente, la formulación clásica de la aritmética de Peano no es realmente aritmética. El criterio que permite distinguir a la aritmética relevante de la aritmética clásica como verdadera y falsa, respectivamente, es el segundo teorema de incompletud de Gödel. Esto se debe a que la aritmética relevante puede garantizar su propia fiabilidad.
- Respuesta *pluralista positiva*: entiende que el segundo teorema de incompletud de Gödel se circunscribe a cada uno de los diferentes sistemas lógicos. La aritmética depende de los sistemas formales. No hay una aritmética *simpliciter*. Esto supone que los teoremas de incompletud tampoco son absolutamente verdaderos. Por tanto, nos encontraríamos ante dos resultados: El segundo

teorema de Gödel en aritmética clásica y el segundo teorema de Gödel en aritmética relevante.

- Respuesta *monista negativa*: existe una única aritmética verdadera pero no es la relevante. No se trata de un error formal en el proyecto de Meyer, sino de que el sistema en el que realiza las pruebas no es realmente aritmética: "Meyer proved that there is a formal system that has a finitary nontriviality proof, but that formal system is not arithmetic" (Weber 2021, p.582). Este tipo de monismo tampoco se compromete necesariamente con la aritmética clásica y el segundo teorema de incompeltud, simplemente consideran que debe existir una prueba finitaria para probar la "fiabilidad" de la aritmética.
- Respuesta *pluralista negativa*: también entiende que el segundo teorema de incompletud de Gödel se circunscribe a cada uno de los diferentes sistemas lógicos. Además, considera que los significados en los distintos sistemas lógicos son inconmensurables. No hay un significado compartido y se habla de materias diferentes. La aritmética relevante no evita el segundo teorema de incompletud porque no hay algo que evitar: "There is just Gödel-in-L for different values of L, and the fact that the words look the same should not mislead us into thinking there is some overlap" (Weber 2021, p.582).

Estas posibilidades no toman en consideración la distinción entre las concepciones descriptivista y convencionalista (supra §2). En contraposición a la concepción descriptivista de Meyer (supra §8.2.3.), comprendemos su proyecto de la aritmética relevante bajo una comprensión convencionalista. Si el proyecto resulta ser exitoso y es capaz de garantizar su propia consistencia, entonces cumple la condición de garantizar su propio funcionamiento sin recurrir a argumentaciones circulares que apelan a realidades lógicas pre-teóricas que deben ser descritas.

La respuesta monista positiva se puede mantener como proyecto de investigación abierto. El aspecto abierto del proyecto se encuentra en la construcción del sistema $\mathbf{R}^{\#1/2}$ con métodos finitarios y γ para probar en **R** los teoremas de la aritmética clásica. Desde nuestra concepción consideramos conveniente conservar la exigencia de recursos técnicos para distinguir entre lógica y matemática. Asimismo, preservamos la restricción metodológica de los métodos finitarios y nos aproximamos a cierta lectura del programa formalista hilbertiano (véase el apéndice 5). No obstante, reinterpretamos el proyecto desde las coordenadas del convencionalismo semántico de

tal modo que no se busca caracterizar una "lógica verdadera" que describa una realidad pre-teórica o un razonamiento intuitivo que permita expresar la aritmética. Antes bien, nos orientamos a seleccionar un sistema lógico con capacidad para conservar las garantías de fiabilidad en términos de consistencia para la teoría de números. Ahora bien, respecto a este monismo, es importante notar que:

i. Se trata de un planteamiento abierto que admite la posibilidad de un pluralismo si en otros sistemas se puede realizar con éxito un proyecto análogo.
ii. El monismo se encuentra en el desenlace de la investigación en la intersección de la concepción convencionalista y la noción de relevancia lógica. No es una tesis que se sostenga *a priori*.

9.2.3. Monismo descriptivista relevante

Podemos especificar la idea informal de la condición en virtud de la cual un sistema puede garantizar su propio funcionamiento sin recurrir a elementos pre-teóricos formulándola en términos de consistencia. Así, nos encontraríamos bajo un convencionalismo formalista de tal modo que si un sistema es capaz de probar su propia consistencia, entonces basta con que tenga capacidad computacional suficiente para expresar sus propias condiciones, las cuales pueden ser estipuladas. Más aún, si solo un sistema es capaz de realizarlo entonces nos aproximaríamos a una conclusión monista dentro de una concepción convencionalista. El proyecto de la *aritmética relevante de Meyer* tiene la pretensión de evitar el segundo teorema de incompletud de Gödel, el cual prueba precisamente la imposibilidad de esta pretensión.

Dado el segundo teorema de incompletud de Gödel, si la aritmética de Peano es consistente, entonces la fórmula que enuncia su consistencia no se puede demostrar en la aritmética de Peano. De modo simple, la aritmética de Peano *clásica* no puede demostrar su propia consistencia. Se puede comprender el proyecto de Meyer como aquel en el que la aritmética relevante $\mathbf{R}^{\#}$ puede demostrar su propia consistencia absoluta usando métodos finitarios. Weber (2021, p.576) considera que esta concepción supone un *pluralismo matemático* en tanto que el segundo teorema de incompletud de Gödel se sostiene en la formalización clásica de la aritmética de Peano pero podría no sostenerse en otra formalización tal como la relevante. Dado el pluralismo matemático, Weber (2021, p.578) observa que el proyecto de la aritmética relevante de Meyer no

cuestiona el segundo teorema de incompletud de Gödel, puesto que afecta a la aritmética clásica.

Weber (2021, p.576) comprende al pluralismo matemático de la misma manera que al pluralismo lógico. La idea central consiste en que distintos sistemas lógicos no son rivales y son igualmente legítimos: "Like logical pluralism, they all circle around the idea that difrerent and apparently rival mathematics may be in fact non-rivalrous, and are at least equally legitimate qua mathematics". Por consiguiente, Weber (2021, p.576) distingue entre un pluralismo que puede ser considerado moderado y otro radical. El primero afirma que existen diversos modelos independientes y consistentes sin transgredir la matemática habitual. Además, se pueden examinar distintos modelos sin necesidad de emplear un metalenguaje no clásico en la teoría de conjuntos que se emplee en esta teoría. El segundo hace uso de lógicas no clásicas para reconocer matemáticas no habituales. Es posible, por ejemplo, emplear un metalenguaje paraconsistente en teoría de conjuntos. Nótese que para decir que son rivales en este sentido se tiene que aceptar que hablan de lo mismo, lo cual supone un descriptivismo (tal como discutimos en §3).

Asimismo, Weber (2021, p.577) distingue entre una práctica y un lenguaje. Una práctica se realiza en un lenguaje determinado, pero del hecho de que tal lenguaje pueda traducirse a otro no se sigue que la práctica realizada en el lenguaje traducido pueda reducirse a otra práctica. Hace esta observación para oponerse a la idea según la cual si el razonamiento relevante se formaliza en un metalenguaje clásico como en la semántica del plan australiano, entonces se sigue dependiendo de la lógica clásica. Admitimos que la lógica es una práctica, a saber, seguir reglas convencionales, sin embargo, nuestra perspectiva es distinta: compartimos con Read (2005) la idea según la cual se privilegia la lógica del metalenguaje.

Sobre la noción de verdad, en el pluralismo Weber (2021, p.577) se considera que es indiscutible que existen múltiples formalizaciones de una disciplina matemática como la aritmética o la geometría, pero nos enfrentamos a una cuestión diferente si preguntamos cuál de ellas es la "verdadera". Esta noción de verdad puede especificarse como una descripción del mundo actual o a una práctica argumentativa. Un pluralista podría justificarse apelando a la existencia de distintas verdades. Desde nuestra taxonomía (supra §2.3.) se trata de una noción de verdad entendida como descripción, la

cual se especifica en sus distintas variantes. Un descriptivismo empirista puede referirse al mundo o a alguna práctica. No obstante, es necesario diferenciar analíticamente la cuestión de la naturaleza de la lógica de la cuestión de la pluralidad de lógicas, dado que un monista también congenia con el descriptivismo.

Weber (2021, p.578) comprenden el monismo matemático como aquella posición en virtud de la cual las preguntas matemáticas tienen respuestas inequívocas y los términos tienen referencias inequívocas: "The key thing about monism, as I will understand it, is that unqualied mathematical questions have unambiguous answers (if they have answers at all), and mathematical singular terms have unambiguous meanings or referents". Esta postura es compatible con un platonismo que considera que existe un universo de objetos abstractos que deben ser descritos, pero también es compatible con un nominalismo o una visión deflacionaria que describe una práctica unificada. Un monista entiende que una de las formalizaciones de la aritmética, por ejemplo, es "la correcta".

Weber (2021, p.578) indica que la visión que predomina es la que tiene por correcta la axiomática ZFC, la aritmética de Peano como su subteoría y el sistema clásico en lógica. No obstante, no se trata de un compromiso necesario. El proyecto de la aritmética relevante de Meyer (supra §8.) pretende detallar la "verdadera aritmética" que capta de forma intuitiva. En este sentido, la aritmética de Peano clásica no es una formalización adecuada. Según Weber (2021, p.579) "Meyer sees formal logic as something imposed upon intuitive arithmetic, an attempt to interpret or describe the 'logical superstructure' of the arithmetic facts".

Desde esta perspectiva monista se pueden tomar a los teoremas de incompletud de Gödel en tanto que criterios de la lógica en cuestión como formalismo adecuado para fundamentar la aritmética. "A decent logic should avoid Gödel's theorems, Meyer seems to think" (Weber 2021, p.579). Por el contrario, conseguir evitar los teoremas de incompletud se puede comprender como un criterio para una lógica que contenga un razonamiento aritmético. Esto quiere decir que los teoremas de incompletud de Gödel se conciben como "anomalías" propias de una lógica errónea y no como propias de la aritmética.

El proyecto de Meyer sobre la aritmética relevante es un monismo descritpivista que pretende ofrecer la formalización lógica adecuada de un razonamiento aritmético

natural. Asimismo, siguiendo la estela hilbertiana, considera que deben emplearse métodos finitarios que conectan con un conocimiento intuitivo. No se cuestiona el razonamiento aritmético (natural) debido a teoremas (de limitación como los de incompletud) de un sistema lógico (clásico) incuestionable. Antes bien, se trata del procedimiento contrario, a saber, se cuestiona el formalismo lógico que impide sostener el razonamiento aritmético intuitivo. Meyer (1976, p.18) entiende que su proyecto no consiste en modificar la "superestructura lógica", sino en describirla formalmente de forma más clara. Pretende explicitar aspectos de una lógica intuitiva. Se trata, por tanto, de describir la lógica intuitiva de la aritmética con el formalismo adecuado. Dado que en la lógica clásica se sostienen los teoremas de incompletud de Gödel, Meyer (2021b) propone a la lógica relevante dado que es capaz de evitar el segundo teorema de incompletud y, a su vez, mantener el carácter intuitivo-natural de la aritmética. Weber (2021, p.579) afirma sobre la interpretación monista del proyecto de la aritmética relevante de Meyer que:

> If a formalization of arithmetic cannot be shown to be reliable through elementary, finitary means that everyone can recognize, then it is not a successful formalization, because intuitive mathematics should admit of a formalization, on pain of mysticism.

9.3. MONISMO CONVENCIONALISTA

Para plantear un criterio formal que permita establecer un monismo lógico bajo una concepción convencionalista, nos apoyamos en la comprensión de la completud como reducción de complejidad de unas estipulaciones simbólicas semánticas a otras estipulaciones sintácticas demostrativas (supra §7). Esta metapropiedad no es un atributo de un objeto (un sistema lógico), sino que se trata de determinada capacidad computacional de un procedimiento efectivo estipulado. Es un criterio formal que no recurre a intuiciones sobre realidades pre-teóricas. La idea es la siguiente: un sistema lógico debe tener la capacidad suficiente para realizar esta reducción de complejidad mediante el cálculo y la incapacidad de hacerlo es un defecto en su constitución como tal sistema. No se trata de establecer el sistema "perfecto" decidible en todos los órdenes expresivos del lenguaje en cuestión, sino de observar que, si mediante la aritmética relevante se puede evitar cierta incompletud, entonces es un sistema con menos defectos.

Los resultados de limitación de Gödel establecen que, en primer lugar, en determinada axiomática de la teoría de números existen fórmulas indecidibles, asumiendo que la axiomática es consistente, dado que de lo contrario cualquier fórmula se podría probar trivialmente. La indecidibilidad en este caso hace referencia a la imposibilidad de probar una fórmula ni su negación. Se trata de una incompletud. El concepto de teorema no coincide con la noción (formal o informal) de verdad, la cual exige que una expresión formulada en un lenguaje característico sea verdadera o falsa y su negación sea falsa o verdadera, respectivamente. Los métodos probatorios no permiten enumerar recursivamente las verdades. Gödel prueba en su primer teorema de incompletud que la axiomatización de la teoría de números elemental es incompleta. Más aún, este resultado es extensivo en el sentido de que cualquier teoría con capacidad para contener la aritmética también es incompleta. Si la aritmética de Peano es consistente, entonces existen fórmulas de la aritmética de Peano tales que ellas mismas no son teoremas de la aritmética de Peano y sus negaciones tampoco lo son.

En segundo lugar, una de las fórmulas indecidibles antedichas es precisamente la fórmula que expresa la consistencia de la teoría de números elemental. El impacto de este segundo resultado sobre la filosofía formalista finitarista pone de manifiesto que la formulación de la aritmética en la que esta limitación opera contiene los métodos probatorios finitarios. Lo que Gödel demuestra es que no es posible elaborar una prueba (finitaria) de la consistencia de la teoría de números, asumiendo que la aritmética es consistente. Si la aritmética de Peano es consistente, entonces no se puede probar en la aritmética de Peano la fórmula que expresa la consistencia de la aritmética de Peano en la aritmética de Peano.

Antes de los resultados de 1931 para operar con la autorreferencialidad en el análisis de la consistencia, según explica Alonso (2007), Gödel introduce el axioma de extensionalidad y el axioma de comprehensión a la axiomática de Peano (con un refuerzo del principio de inducción). Por extensionalidad tenemos que $\forall x(x \in S \equiv x \in T) \supset S = T$ y por comprehensión tenemos que $\exists S \forall x(x \in S \equiv Px)$, donde P es un predicado y S y T son conjuntos. Entendemos que la necesidad de controlar la noción de verdad surge de la presencia del axioma de comprehensión. La exigencia se encuentra en la pretensión de expresar los números reales a través de conjuntos de números naturales: el conjunto $\{Pi, Pj\ldots\}$ expresa un número real, esto es, se obtiene mediante los naturales que satisfacen un determinado predicado numérico P, los naturales que hacen verdadero

a P. Lo necesario es un predicado que se satisfaga para las fórmulas verdaderas, es decir, que se pueda *definir* el predicado de verdad V en la axiomática de Peano con los añadidos de Gödel. Así es cómo el análisis de la consistencia se puede formular como intrínsecamente vinculado a la *definibilidad* dentro de la teoría de un predicado semántico perteneciente al ámbito meta-teórico.

La *definibilidad* de V depende del establecimiento de una correspondencia entre cada fórmula con un símbolo tal que: (i) tenga capacidad para representar fórmulas y (ii) al ser predicado por V arroje una fórmula de la axiomática correspondiente. Aquí se encuentra la autorreferencialidad, la cual implica no solo un método para representar fórmulas, sino también que tales representantes sean objetos de la misma teoría a la que pertenecen las fórmulas que representan. Los símbolos en cuestión son secuencias numéricas y V se debe construir de tal modo que sea un predicado de la axiomática de Peano con los añadidos de Gödel. La definibilidad de V es una hipótesis dado que no disponemos de su construcción en teoría de números y da lugar a la paradoja del mentiroso. Insistimos en que la importancia de la definibilidad de V se debe al axioma de comprehensión y este último adquiere su importancia para la prueba de consistencia parcial del análisis a partir de la teoría de números. No obstante, tal como explica Alonso (2007) en su análisis histórico, el objetivo cambia y se centra directamente en la definibilidad de determinados predicados numéricos.

Un predicado construido es el de prueba Pr en la axiomática de Peano con los añadidos de Gödel, el cual puede representarse con su correspondiente secuencia numérica. Mediante una función de sustitución se obtiene que una paradoja similar a la del mentiroso afecta a Pr. Se trata del enunciado que expresa que él mismo no es demostrable en la axiomática de Peano con los añadidos de Gödel. Lo podemos expresar del siguiente modo: $A^i \equiv \neg Pr(i)$. Dado que Pr es definible en la axiomática de Peano con los añadidos de Gödel, la forma de evitar la inconsistencia es mostrando que A^i no es un teorema de la aritmética de Peano con los añadidos de Gödel. Y con un razonamiento similar también concluye que $\neg A^i$ tampoco es un teorema de la axiomática de referencia, obteniendo la primera fórmula indecidible.

Tras esta constatación Gödel se propuso obtener el mismo resultado en la aritmética de Peano sin los axiomas añadidos. Esta tarea exige poner a prueba la capacidad de la aritmética elemental para operar con predicados numéricos con

contenido autorreferencial. La tarea exige, por tanto, formular un enunciado indecidible en la axiomática de Peano con las expresiones propias de la axiomática, esto es: solo con los números naturales se deben expresar los conceptos metateóricos pertinentes. El método de codificación es el actualmente conocido como *gödelización*, el cual consiste en un procedimiento de codificación de la sintaxis de la aritmética. Un número de Gödel es un número natural que representa una fórmula. Dado este mecanismo, se puede obtener como resultado una fórmula indecidible en teoría de números de primer orden. El predicado numérico que se construye es el predicado de derivación *Beweisbar*, análogo a Pr (seguiremos usando la misma abreviación "Pr" aunque en sentido estricto es otro predicado). Al aplicarse a un número natural, se predica de la fórmula codificada en dicho número que es derivable en aritmética de Peano.

Debemos mencionar que los predicados recursivos se definen a través del conjunto de funciones recursivas. Un predicado es recursivo si puede establecer a través de una función recursiva si un número lo satisface. Esta recursividad se necesita para codificar la sintaxis de la aritmética en predicados aritméticos. Las propiedades meta-lógicas deben representarse mediante predicados recursivos dentro del sistema (nótese que *Beweisbar* no es recursivo).

La intención es construir con estos recursos una formulación aritmética de la paradoja del mentiroso. Se comprueba que Göd ≡ ¬Pr(*i*) es un teorema de la aritmética de Peano, donde *i* es el número de Gödel de Göd y esta última es la fórmula que expresa que ella misma no se puede probar en la axiomática de Peano. Si la axiomática de Peano es consistente, entonces Göd y ¬Göd no son teoremas de la axiomática de Peano. La propia consistencia de la axiomática de Peano se puede expresar en una fórmula *Cons*. Por consiguiente, del primer resultado podemos derivar que, asumiendo la consistencia de la aritmética de Peano, la fórmula *Cons* ⊃ ¬Pr(*i*) ∧ ¬Pr(¬*i*) es un teorema de la axiomática de Peano, donde *i* sigue siendo el número de Gödel de Göd. Esto quiere decir que la fórmula que expresa la consistencia de la axiomática de Peano no es derivable en esta misma axiomática.

Sin la convicción (o *fe*) semántica en que un enunciado es verdadero si su negación es falsa y viceversa, la incompletud no tendría un efecto filosóficamente grave. El comportamiento de la negación se establece como condición semántica en el metalenguaje. El propósito es que las verdades se puedan obtener con medios

probatorios. Tener recursos con capacidad para decidir todos los problemas formulados en un sistema, al menos los matemáticos. Se pueden interpretar los resultados de limitación como el sometimiento a examen de los procedimientos para expresar dentro del propio sistema las convicciones semánticas metateóricas. La idea es conseguir que la mera sintaxis de la aritmética permita operar probatoriamente dentro del sistema con las nociones metateóricas que se atribuyen al propio sistema (codificación de la sintaxis de la aritmética con recursos de la aritmética que realiza mediante la *gödelización*). En otros términos, que el cálculo arroje como resultados las verdades. Que las fórmulas válidas se puedan enumerar recursivamente mediante un mecanismo deductivo.

Es importante destacar que esta interpretación no es obvia ni incontrovertible dado que los resultados tienen la misma efectividad bajo una concepción meramente sintacticista. Consideramos que esta interpretación se debe principalmente al procedimiento que Henkin (supra §7.3.) puso en marcha en su prueba de completud y el tratamiento formal que Tarski realizó sobre la semántica. Defendemos que sin el componente semántico los resultados no tienen el mismo impacto y, a su vez, no consideramos conveniente excluir la semántica al ámbito de las creencias injustificadas ni de las intuiciones de supuestas realidades metafísicas. La salida que encontramos es la concepción filosófica convencionalista de la teoría de modelos como meras estipulaciones algebraicas.

Siguiendo las convenciones notacionales establecidas hasta el momento, podemos reconstruir informalmente el esquema de las pruebas de las limitaciones del siguiente modo[138]. Asumimos la ω-consistencia[139] de la aritmética de Peano.

i. Asumimos que tenemos Pr(*i*) es un teorema de la aritmética de Peano si A^i es un teorema de la aritmética de Peano.
ii. Asumimos que Göd ≡ ¬Pr(*i*) es un teorema de la aritmética de Peano, donde *i* es el número de Gödel de Göd.
iii. Hipótesis: la fórmula Göd es derivable en la axiomática de Peano.
iv. Por lo establecido en el paso (i) tenemos que Pr(*i*) es un teorema de la aritmética de Peano.

[138] Nos apoyamos, en parte, en la estructura de las demostraciones que expone Alonso (2007).

[139] Con las variantes de Rosser no se necesita la ω-consistencia, sino solo la consistencia.

v. Por lo establecido en los pasos (ii) y (iv) tenemos que ¬Göd es un teorema de la aritmética de Peano.

vi. Por lo establecido en los pasos (iii) y (v) tenemos que la aritmética de Peano es inconsistente, puesto que tanto ¬Göd como Göd son teoremas.

vii. Por reducción al absurdo la hipótesis del paso (iii) es falsa. Esto quiere decir que si la aritmética de Peano es ω-consistente, entonces Göd no es un teorema de la aritmética de Peano.

viii. Hipótesis: la fórmula ¬Göd es derivable en la axiomática de Peano.

ix. Por lo establecido en el paso (ii) tenemos que Pr(*i*) es un teorema de la aritmética de Peano.

x. Por lo establecido en el paso (ix) tenemos que hay un número natural tal que codifica una prueba de la fórmula Göd. Lo expresamos del siguiente modo: $\exists j$ Q(*j*,*i*), donde $i,j \in \mathbb{N}$, *i* es el número de Gödel de Göd y Q es un predicado para expresar esta prueba[140].

xi. Por lo establecido en el paso (x) y por la ω-consistencia de la aritmética de Peano tenemos que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que Q(*k*,*i*) es un teorema de la axiomática de Peano.

xii. Por lo establecido en el paso (xi) tenemos que Göd es un teorema de la aritmética de Peano.

xiii. Por lo establecido en los pasos (viii) y (xii) tenemos que la aritmética de Peano es inconsistente, puesto que tanto ¬Göd como Göd son teoremas.

xiv. Por reducción al absurdo la hipótesis del paso (viii) es falsa. Esto quiere decir que si la aritmética de Peano es ω-consistente, entonces ¬Göd no es un teorema de la aritmética de Peano.

xv. Con la *gödelización* de lo obtenido en los pasos (vii) y (xiv) tenemos que *Cons* ⊃ ¬Pr(*i*) es un teorema de la aritmética de Peano, donde *i* es el número de Gödel de Göd.

xvi. Hipótesis: *Cons* es un teorema de la axiomática de Peano.

xvii. Por lo establecido en los pasos (xv) y (xvi) tenemos que ¬Pr(*i*) es un teorema de la axiomática de Peano.

[140] Es importante destacar que por razones expositivas no hemos distinguido entre el predicado *Beweisbar* y Pr, aun siendo diferentes. Tampoco hay que confundir entre Q y Pr.

xviii. Por lo establecido en los pasos (xvii) y (ii) tenemos que Göd es un teorema de la axiomática de Peano.

xix. Por reducción al absurdo la hipótesis del paso (xvi) es falsa. Esto quiere decir que si la aritmética de Peano es consistente, entonces la fórmula que expresa la consistencia de la aritmética de Peano no es un teorema de la aritmética de Peano.

El primer teorema de incompletud está constituido por los pasos (vii) y (xiv). El segundo teorema de incompletud es el paso (xix). El paso (xix) da por sentada la consistencia de la teoría de números, pero impide la prueba de la fórmula que lo expresa. En nuestros términos, impide la auto-justificación por procedimientos meramente formales. Este resultado es efectivo tanto en la aritmética clásica como en la relevante (supra §8.). La elusión del segundo teorema de incompletud de la aritmética relevante de Meyer no consiste en una demostración en $\mathbf{R}^{\#}$ de la fórmula que expresa su consistencia. De hecho, se prueba que en $\mathbf{R}^{\#}$ esta limitación sigue siendo efectiva. Su estrategia consiste en distinguir definiciones de consistencia y defender que la consistencia involucrada en el segundo teorema de incompletud es una *consistencia respecto a la negación*. La negación es propia de la lógica y no de la aritmética y con el lenguaje relevante se pueden distinguir de tal modo que la consistencia de la aritmética queda incuestionada. La aritmética relevante es, por tanto, trivialmente consistente: posee las propiedades a) - d) (supra §8.1.2.). La consistencia es la representación formal de la idea intuitiva de *fiabilidad* de un sistema.

Así, pues, nos encontramos ante la disyuntiva de un desiderátum de auto-fundamentación formalista o una garantía débil —solo las propiedades a) - d)— de fiabilidad, esto es, de una idea intuitiva. La justificación en una idea intuitiva era precisamente lo que buscábamos evitar al introducirnos en la aritmética relevante. No obstante, consideramos que el planteamiento de Meyer sigue teniendo una ventaja: la idea intuitiva de fiabilidad supone un compromiso epistémico muy reducido, mientras que la elusión del segundo teorema de incompletud relacionado con la consistencia respecto de la negación (propiedades e) – g)) supondría una novedad lógico-técnica extraordinaria. Si admitimos una limitación básica en el proyecto de auto-fundamentación convencionalista, incorporar solo la idea intuitiva de fiabilidad en tanto que consistencia trivial es la menor forma de concesión al descriptivismo. Esto se debe a que la idea intuitiva de fiabilidad, por un lado, está explicada formalmente a partir de

las propiedades a) – d) y, por otro lado, es un compromiso epistémico mínimo. En definitiva, el convencionalismo tiene problemas, pero con él se solventan problemas del descriptivismo de mayor envergadura (salto injustificado a una metafísica y petición de principio, supra §2.4.) que aquellos que admite al incorporar la idea intuitiva de fiabilidad.

10. CONCLUSIÓN

El objetivo principal de la tesis consistía en analizar las relaciones mutuas entre el problema de la pluralidad de lógicas y la idea de relevancia lógica. No se trata de una relación *simpliciter*, sino que para investigar la incidencia del primero sobre el segundo y viceversa propusimos una tesis convencionalista de la semántica formal. A partir de estos fundamentos conceptuales defendimos una respuesta al problema de la expresión formal de la relevancia lógica y planteamos la viabilidad de una posible línea para defender un monismo convencionalista que favorezca al sistema relevante principal **R**.

Por un lado, defendimos que la expresión formal de la relevancia lógica no debe ser una condición añadida a la relación de consecuencia, sino que debe formar parte de la misma definición de consecuencia, ya que estamos hablando de relevancia "lógica". Asimismo, dada la tesis convencionalista, la finalidad no reside en describir una realidad pre-lógica, una relación de consecuencia "real" pre-existente, sino en estipular una definición formal de la definición de uso habitual en el trabajo de la lógica como disciplina, esto es, la definición en términos de conservación de la verdad: una inferencia es válida sii no se dan premisas verdaderas en conjunción con una conclusión falsa. Como resultado obtuvimos que la mejor definición es aquella que usa operadores intensionales en el metalenguaje. En particular empleamos la conjunción intensional o fusión para plantear la imposibilidad de premisas verdaderas y (fusión) conclusión falsa. Sea "×" la fusión, tenemos que B es consecuencia de A sii "A × B" tal que no puede darse que A sea verdadero y B falso. En esta línea, A es *lógicamente relevante* para B si no es posible que sea verdadero "$(A \times \neg B) \wedge (B \times \neg A)$".

Por otro lado, defendimos que tiene sentido el planteamiento de un monismo convencionalista. Es un cruce que *prima facie* parece una posición vacía. Si la naturaleza de la lógica es convencional, ¿cómo se puede admitir una sola convención sin apelar a la descripción de una realidad pre-teórica? Para la viabilidad de esta postura se necesita la tesis de la semántica convencionalista. Comprendemos la completud como la garantía de una reducción de complejidad. No se trata de la relación de una dimensión de la lógica con significado con un cálculo, sino de la existencia de un procedimiento efectivo (el cálculo completo) con capacidad computacional suficiente para enumerar recursivamente el conjunto de fórmulas válidas, siendo estas últimas expresiones formales estipuladas de igual manera que las fórmulas correctas. Se trata de un criterio

formal y bajo esta concepción analizamos las ventajas de la aritmética relevante. De esta manera queda claro que la completud es un requisito meramente formal, y que no nos salimos del enfoque convencionalista cuando favorecemos una lógica o una aritmética en base a él.

Pluralidad de lógicas

Para establecer un cuadro clasificatorio de las posiciones que respondan al problema de la pluralidad de lógicas cruzamos dos ejes. El primero de ellos es el relativo a las concepciones de la lógica y el segundo es el concerniente a la admisión de uno o diversos sistemas lógicos. Respecto al primer problema distinguimos dos grandes posturas: el convencionalismo y el descriptivismo. El convencionalismo entiende que los sistemas lógicos son estipulaciones formales en torno a la relación de consecuencia. La propia relación de consecuencia es una mera estipulación simbólica. El descriptivismo sostiene que los sistemas lógicos son descripciones abstractas de realidades preexistentes a los propios sistemas. El descriptivismo pretende representar formalmente una relación de consecuencia pre-teórica. Subdividimos el descriptivismo, a su vez, en tres posturas en función del estatuto ontológico de la relación de consecuencia pre-teórica: el empirismo, el platonismo y el mentalismo. El empirismo considera que la relación de consecucioncita es una práctica argumentativa o un sistema físico cuya estructura es equivalente a la relación de consecuencia propia del sistema lógico en cuestión. El platonismo considera que la relación de consecuencia descrita es una realidad ideal no simbólica (ficticia o metafísica). El mentalismo considera que la relación de consecuencia se encuentra en el funcionamiento psicológico o neuropsicológico.

Respecto a la admisión de uno o diversos sistemas lógicos distinguimos tres tesis: monismo, pluralismo y unitarismo. La tesis monista solo admita un sistema lógico y la tesis pluralista admite dos o más sistemas lógicos divergentes. La tesis unitarista afirma que existen varios sistemas lógicos, pero existe un marco común que permite unificarlos. Cruzando las posturas de los dos ejes obtenemos un total de doce espacios. Debemos aclarar que estos espacios son extremos ideales que nos permiten sistematizar tesis existentes. Este cuadro clasificatorio también considera espacios vacíos y espacios aún no desarrollados explícitamente (como, por ejemplo, la diferencia entre un unitarismo convencionalista y un unitarismo descriptivista). Un ejemplo de monismo

empirista es (bajo nuestra denominación) el monismo de la lógica relevante de Read (1988), quien defiende que la lógica relevante describe el razonamiento intuitivo del lenguaje natural y la lógica clásica es simplemente una lógica errada que debemos corregir. La descripción de la relación de consecuencia presente en el razonamiento intuitivo ligado al lenguaje natural es el criterio para admitir o rechazar los sistemas lógicos.

Ante este cuadro debemos hacer dos aclaraciones. Por un lado, antes de definir la postura convencionalista, en este punto expresamos un rechazo de la postura descriptivista. Desde nuestra perspectiva, el problema del descriptivismo se encuentra en la siguiente disyuntiva: (i) incurre en una petición de principio puesto que el tratamiento racional de la "realidad lógica" pre-teórica exige el uso previo de una relación de consecuencia o (ii) existe un salto injustificado en la pretendida adecuación del lenguaje formal a los fenómenos reales. Por otro lado, la pluralidad de lógicas solo es un problema a considerar si existen de hecho diversos sistemas lógicos. Para justificar esta afirmación debemos contar con un criterio de divergencia lógica. Desde nuestra perspectiva, dado el rechazo del descriptivismo, este criterio de divergencia debe ser meramente formal. Sean L_1 y L_2 dos lenguajes artificiales, FBF el conjunto de fórmulas bien formadas y VAL el conjunto de fórmulas válidas, el criterio de divergencia es el siguiente: $\mathrm{FBF}(L_2) = \mathrm{FBF}(L_1)$, pero $\mathrm{VAL}(L_2) \neq \mathrm{VAL}(L_1)$. No obstante, desde nuestro convencionalismo también admitimos la extensión y la cuasi-divergencia, respectivamente: $\mathrm{FBF}(L_2) \subset \mathrm{FBF}(L_1)$, $\mathrm{VAL}(L_2) \subset \mathrm{VAL}(L_1)$ y $\forall x \in \mathrm{VAL}(L_1) - \mathrm{VAL}(L_2)$, x emplea vocabulario adicional que no pertenece a L_2; $\mathrm{FBF}(L_2) \subset \mathrm{FBF}(L_1)$, $\mathrm{TEO}(L_2) \neq \mathrm{TEO}(L_1)$ y los teoremas no coincidentes pueden ser aquellos que emplean el vocabulario adicional de L_1 como los que emplean el vocabulario común.

Relevancia lógica

El programa de investigación de las lógicas relevantes se inició bajo una concepción que bajo nuestros parámetros denominamos descriptivista. Esto se entiende en tanto que el problema fundamental reside en que en la lógica clásica existen ciertas verdades lógicas que en el nivel del razonamiento intuitivo se consideran inadmisibles. El motivo de la inadmisión de estas verdades lógicas estriba en la falta de relevancia de las premisas en la conclusión y la falta de relevancia del antecedente en el consecuente. Los razonamientos condicionales problemáticos son las denominadas Paradojas del

Condicional Material. Desde nuestra perspectiva reconsideramos esta problemática desde una concepción convencionalista de tal modo que nos interesa encontrar una expresión formal de la idea de relevancia lógica sin apelar a una realidad preexistente de la que tengamos conocimiento intuitivo. Cabe decir que esta perspectiva es contraria a la motivación del programa de investigación en lógicas relevantes y pocos "relevantistas" admitirían.

Visto desde la teoría de la prueba, consideramos que la formulación más económica para caracterizar los sistemas relevantes es a partir de la familia de las lógicas subestructurales. Las lógicas subestructurales son aquellas que resultan de introducir restricciones en las reglas estructurales en el cálculo de secuentes. En esta línea, la metodología más eficiente para caracterizar las lógicas relevantes consiste en restringir la regla estructural de la atenuación. Dado el secuente $\Gamma \vdash \Delta$, la regla de la atenuación (de izquierda) permite introducir premisas añadidas a Γ tal que $A, \Gamma \vdash \Delta$ sigue siendo correcto. Esto quiere decir que se pueden introducir premisas irrelevantes para la conclusión en tanto que no se utilizan como hipótesis para la derivación. Es precisamente esta regla la que da lugar a las Paradojas del Condicional Material.

Esto tiene un efecto en las reglas operacionales. Estas reglas entrañan una ambigüedad expresiva en la que su sentido extensional y su sentido intensional colapsan en las conectivas clásicas. Con las restricciones en las reglas estructurales se disuelve esta ambigüedad expresiva. Si nos fijamos en la conjunción (que es la que emplearemos más adelante, la eliminación de la regla de a la atenuación la escinde en la conjunción extensional y la conjunción intensional o fusión "×" cuyas reglas de derecha e izquierda son, respectivamente de arriba abajo:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Pi \vdash \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, A \times B}$$

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \times B, \Gamma \vdash \Delta}$$

Metodológicamente asumimos una prioridad de la semántica formal para la caracterización de los sistemas lógicos en el trabajo de la lógica como disciplina. Por tanto, el núcleo de la caracterización de las lógicas relevantes reside en el desarrollo de una semántica formal adecuada. Las dos primeras propuestas que surgieron fueron el plan australiano y el plan americano. El primero de ellos consiste en una versión de la

semántica de mundos posibles pero añadiendo un operador estrella, un conjunto de mundos normales (consistentes y completos) y una relación ternaria de accesibilidad entre mundos. La idea es que dispongamos de mundos "imposibles" inconsistentes e incompletos que permitan probar el fallo de las Paradojas del Condicional Material. Técnicamente se consigue mediante la condición semántica de la negación estipulada empleando el operador estrella: $v_s(\neg A) = 1$ sii $v_{s*}(A) = 0$, en cualquier otro caso $v_s(\neg A) = 0$. Por su parte, el plan americano, para conseguir el mismo objetivo, estableció una semántica con cuatro valores veritativos con condiciones de verdad y de falsedad en la que una fórmula puede ser verdadera y falsa o ni verdadera ni falsa, además de solo verdadera y solo falsa.

Las disputas entre los planes americano y australiano se centraron en la negación, en el carácter intensional de ciertos operadores en el lenguaje objeto en el plan australiano y en los cuatro valores de verdad del plan americano. Ante esta polémica surgió el plan escocés que situó el debate en el nivel metalingüístico para centrarse en la definición de la relación de consecuencia. El propósito consistía en desarrollar una definición relevante de validez o consecuencia semántica de tal manera que la relevancia no sea una condición añadida a la validez, sino que se encuentre en su propia definición. Tanto el plan americano como el plan australiano conservan la definición clásica de validez empleando un metalenguaje clásico. Para conseguir esta definición unificada de relevancia y consecuencia hace falta emplear operadores intensionales en le metalenguaje. En particular se usa la fusión para la definición de consecuencia en términos de conservación de la verdad. Así, pues, la definición relevante de validez es la siguiente: $\Gamma \vDash A$ sii no es posible que para cualquier $B \in \Gamma$: B sea verdadero × A sea falso.

La perspectiva descriptivista del plan escocés tiene el problema de explicar la fusión en términos de realidades intuitivas. Además de la dificultad de explicar la (supuesta) "realidad" de la fusión, este descriptivismo debe defender que el uso ordinario de la conjunción es intensional. Asimismo, si es un descriptivismo del razonamiento intuitivo ligado al lenguaje natural tiene el problema del fallo del Silogismo Disyuntivo, la cual es una inferencia de uso ordinario irrenunciable para el razonamiento intuitivo. Desde la perspectiva convencionalista la fusión no es un problema de deba ser explicado conceptualmente, sino que se trata de una regla meramente estipulada. El problema no se resuelve, sino que se disuelve. El uso de

operadores intensionales en el metalenguaje para definir la noción de validez tiene la ventaja de ventaja de unificar relevancia lógica y consecuencia lógica y evita las Paradojas del Condicional Material. Bajo esta concepción convencionalista simplemente denominamos "relevante" a aquel sistema en el que fallan las Paradojas del Condicional Material o que rechaza la regla estructural de la atenuación. No decimos que un sistema *es* relevante por describir una relevancia intuitiva de las premisas en la conclusión. Mantenemos el término "relevante" por la tradición en la que se encuentra, pero sin su motivación intuitiva original. Lo fundamental reside en la formulación relevante de la noción de validez. Insistimos en que este convencionalismo alejado de la referencia al razonamiento intuitivo es ajeno a la motivación original del programa de investigación de las lógicas relevantes. Un relevantista monista podría incluso rechazar esta perspectiva del contexto de la relevancia. No obstante, tal como expusimos al principio, en esta perspectiva decimos que A es *lógicamente relevante* para B si no es posible que sea verdadero "$(A \times \neg B) \wedge (B \times \neg A)$", al igual que en el plan escocés.

Desde la exigencia del uso de metalenguaje relevante para definir la noción relevante de validez discutimos la propuesta de pluralismo lógico de Beall y Restall (2006). Estos autores proponen la *Tesis de Tarski Generalizada* (TTG) según la cual una inferencia es *válida*$_x$ sii la conclusión es verdadera en cada *caso*$_x$ donde las premisas son verdaderas. Desde nuestra perspectiva, los casos son índices de valuación de fórmulas, los cuales pueden ser de distinto tipo según sus características: mundos posibles, situaciones, construcciones, etc. Especificando el tipo de caso se genera una particularización de la TTG. El pluralismo lógico se obtiene al admitir distintas particularizaciones de la TTG. No obstante, allende las particularizaciones, observamos que el fundamento de la relación de consecuencia está expresado en la TTG, la cual es una versión general de la noción clásica de consecuencia formulada con metalenguaje clásico. En este marco, la caracterización de las lógicas relevantes que admite el pluralismo de la TTG es el de la semántica en el plan australiano en el que la particularización de los casos son las situaciones. Ahora bien, dado el análisis previo, la caracterización más conveniente exige el empleo de un metalenguaje relevante. Esto último impide la admisión de las lógicas relevantes en el pluralismo de la TTG.

Monismo convencionalista relevante

La concepción convencionalista de la lógica la definimos la definimos en términos de una semántica convencional. Tomamos como referencia la prueba de completud de Henkin para el trabajo operativo de la Lógica (o incluso "del lógico"). Con esta asunción metodológica tenemos que el objetivo básico consiste en las reglas de un cálculo puedan sistematizar el conjunto de fórmulas válidas. El núcleo de los sistemas lógicos se encuentra en la definición de sus modelos, puesto que son las estructuras que permiten interpretar las fórmulas como verdaderas o falsas. Por este motivo requerimos un cálculo completo, a saber, para enumerar recursivamente el conjunto de "verdades" ya que ir comprobando fórmula a fórmula es una tarea infinita irrealizable. Metodológicamente adoptamos esta prioridad de la semántica y a partir de ella defendemos que los modelos son meras estipulaciones simbólicas no concernientes al significado de realidades intuitivas pre-teóricas. Para esta tesis convencionalista de la semántica nos apoyamos en una lectura semanticista del formalismo de Hilbert (o bien, una lectura sintacticista de la semántica) y en una interpretación filosófica de los modelos a partir del rol que desempeña el *lema de Lindenbaum* en la prueba de completud de Henkin.

Al igual que el nivel *contentual* de Hilbert, el nivel básico semántico está constituido por meras estipulaciones simbólicas ("in the beginning was the sign"). Lo que aporta un cálculo completo es un procedimiento efectivo para la reducción de complejidad del conjunto de fórmulas válidas. No es la relación de un nivel sintáctico con un nivel semántico relativo al significado referido a parcelas de la realidad. La diferencia no es conceptual, sino que solo concierne a la capacidad computacional del procedimiento efectivo en cuestión sin salir del terreno de las estipulaciones simbólicas. Lo importante es la reducción de una cantidad infinita no numerable a una cantidad enumerable de pruebas. Se trata de una comprensión análoga a la reducción al nivel *contentual* que Hilbert llevó a cabo mediante la formalización de la matemática.

Para mostrar el tránsito en la comprensión de los modelos en tanto que pruebas y conjuntos de fórmulas bien formadas sintácticamente recurrimos al *lema de Lindenbaum*. Con este lema mostramos que operativamente los conjuntos máximamente consistentes se comportan como modelos. La forma en la que opera un modelo puede representarse lingüístico-formalmente con las fórmulas de un conjunto máximamente

consistente. Con ello tenemos una caracterización sintáctica de un modelo. Con el *lema de Lindenbaum* tenemos que a partir de cualquier conjunto consistente S se puede construir un conjunto máximamente consistente S' tal que $S \subseteq S'$. Esto se necesita para demostrar que un conjunto máximamente consistente es una descripción en el lenguaje de un modelo. Para ello se parte de un conjunto máximamente consistente Δ para generar un *modelo canónico* M' de Δ tal que $A \in \Delta$ sii M' $\Vdash$ A. El teorema de Henkin prueba que todo conjunto meramente consistente de fórmulas tiene un modelo de cardinalidad enumerable que satisface a las fórmulas del conjunto. Esto quiere decir que con el lenguaje de la lógica de primer orden, con sus reglas sintácticas, se posible describir cómo son los modelos de la lógica de primer orden.

La tesis de la semántica convencional permite platear una propuesta monista y, a la vez, convencionalista. El criterio formal para admitir una lógica es la ejecución de la reducción de complejidad. No se trata de un monismo *a priori*, sino que si diversos sistemas cumplen el criterio, entonces se admitirán diversas lógicas. Tampoco es un programa de máximos, sino que se preferirá un sistema frente a otro según la mayor capacidad computacional del procedimiento efectivo que permite realizar esta reducción de complejidad. El objetivo no es eliminar todas las limitaciones, sino favorecer el sistema que tenga menos. Asimismo, es un programa ligado al finitarismo y, por tanto, también a la teoría elemental de números. Necesitamos probar sus teoremas, por lo que no nos podemos quedar con el cálculo proposicional solo por ser un sistema decidible. Necesitamos mayor capacidad expresiva. En este contexto consideramos el proyecto de la aritmética relevante, puesto que su objetivo reside precisamente en evitar el segundo teorema de incompletud de Gödel y probar los teoremas fundamentales de la teoría elemental de números. Para conseguirlo se necesita elaborar un sistema $\mathbf{R}^{\#1/2}$ el cual admita la regla γ y emplee solo métodos finitarios. Actualmente este sistema no se ha podido desarrollar. Concluimos, por tanto, que el monismo convencionalista es un planteamiento viable respecto al problema de la pluralidad de lógicas, pero es un planteamiento no conseguido (aún).

APÉNDICES

APÉNDICE 1: FAMILIA DE LÓGICAS SUBESTRUCTURALES EN CÁLCULO DE SECUENTES TIPO RESTALL

Restall (2000) ofrece una caracterización sintáctico-algebraica de los secuentes. Empleamos los secuentes para representar el esquema notacional en el que se organizan las premisas y las conclusiones. Tal como el propio Restall (2000, p.19) expresa "To define consecutions we need a way of collecting formulae together to form a structured collection". Restall denomina "estructura"[141] a la colección estructurada en la que las fórmulas de un lenguaje formal se toman conjuntamente. Emplearemos las letras mayúsculas {X, Y, Z,…} para denotar estructuras. Los *signos de puntuación* son los elementos algebraicos que se emplean para conectar proposiciones y construir las estructuras. En este sentido, un signo de puntuación opera en las estructuras de forma sintácticamente análoga a como lo hacen las conectivas en las fórmulas. El punto y coma tiene las propiedades de la unión conjuntista[142]. El símbolo p y su aridad $a(p) \in \mathbb{N}$ es un signo de puntuación. Por consiguiente, el conjunto $E(L,P)$ de estructuras se constituye a partir del lenguaje formal L y del conjunto P de signos de puntuación, y cumple que:

i. $FOR(L) \subseteq E(L,P)$
ii. Se pueden construir estructuras por inducción a partir de signos de puntuación. Esto quiere decir que empleando signos de puntuación es posible construir estructuras conectando otras estructuras existentes.

Una subestructura se define para las estructuras de forma análoga al modo en el que lo hacen las subfórmulas para las fórmulas. De este modo, se cumple que:

i. Toda estructura es una subestructura de ella misma.
ii. Dada la estructura X construida a partir del signo p como $p(X_1,\ldots, X_{a(p)})$, toda subestructura de X_i es una subestructura de X.

[141] No debe confundirse con la noción de estructura en teoría de modelos. El contexto permite desambiguar la expresión en cada caso.

[142] No sigue un orden o secuencia, por eso Restall (2000, p.9) sigue a Anderson y Belnap al usar el nombre "consecution" y no "sequent"

Dadas estas condiciones, las fórmulas pueden ser estructuras y subestructuras pero las subfórmulas de tales fórmulas no son subestructuras: “the substructures of a structure go down only to the formulae out of which the structure is made — not to the subformulae of those formulae” (Restall 2000, p.20). La expresión X(Y) hace referencia a que la estructura X tiene una subestructura Y.

Dada la caracterización antedicha de las estructuras, un secuente se construye sobre el conjunto S de estructuras siguiendo el esquema “$X \vdash A$” donde el consecuente es $A \in FOR(L)$ y el antecedente es $X \in S$. El cálculo de secuentes es un método deductivo que permite probar la corrección de los secuentes. En este método se parte de secuentes correctos (axiomas o secuentes derivados demostrados) y sobre ellos se opera con reglas que conservan la corrección. El esquema de la demostración es tipo árbol conformado por nodos. Una inferencia se define como un par en el que uno de sus elementos es un conjunto de secuentes denominado premisas y el otro elemento del par es un secuente denominado conclusión. Si las premisas son el conjunto vacío, entonces la inferencia es un axioma.

El sistema deductivo nos permite establecer cuáles son las pruebas correctas en él. Un sistema deductivo está constituido por (i) una colección de reglas, las cuales son conjuntos de inferencias que emplean los elementos de E, (ii) un conjunto E de estructuras y (iii) un lenguaje *L*. La prueba de un secuente es un árbol que tiene a tal secuente como raíz, la cual es el nodo del final del árbol, y en el que todas las inferencias son una instancia de alguna de las reglas del sistema deductivo. Todas las ramas del árbol deben ser finitas y una rama es cada línea de nodos desde la raíz hasta el final. Las hojas son los nodos finales de las ramas.

Las reglas del cálculo de secuentes son de dos tipos: estructurales y operacionales. Las reglas estructurales las podemos definir siguiendo el siguiente esquema:

$$\frac{X \vdash A}{X' \vdash A}$$

Este conjunto de inferencias debe estar cerrado bajo sustitución de fórmulas para ser una regla estructural. X’ se obtiene de una reorganización de las estructuras de X. Así pues, se puede sustituir la aparición de una fórmula en X o X’ por una estructura

cualquiera. Tras la sustitución sigue siendo una instancia correcta de la regla. El consecuente de los secuentes de la regla también puede sustituirse por cualquier otra fórmula. Dado el anterior esquema, Restall (2000, p.24) explica que

> given any instance of the rule, and any formula B appearing in either X or X' (or both), and given any structure Y you like, then the result of replacing every instance of B in X and X' by Y is still an inference of the rule. Similarly, the A in the consequent can be replaced by any formula you like, resulting in another instance of the rule.

Siguiendo a Restall (2000, p.25) empleamos la expresión " $X \leftrightarrow X'$ " para denotar aquellas reglas en las que se puede sustituir X por X' de tal modo que se deduce $X' \vdash A$ de $X \vdash A$. Las reglas estructurales del tipo $X \leftrightarrow X'$ no permiten la reorganización de subestructuras, sino solo del antecedente completo del secuente. Para expresar aquellas reglas estructurales en las que sí es posible sustituir cualquier estructura por una subestructura en una regla empleamos la expresión "$X \Leftarrow X'$". Por consiguiente, las reglas estructurales del tipo $X \Leftarrow X'$ siguen el siguiente esquema:

$$\frac{Y(X) \vdash A}{Y(X') \vdash A}$$

Las reglas estructurales más importantes las presentamos en el siguiente cuadro. Cabe señalar que no se trata de todas las posibles y que sus denominaciones y simbolizaciones no sólo siguen el inglés, sino la tradición de la lógica combinatoria dado que nos apoyamos en la notación de Restall (2000, p.26, tabla 2.2).

$X \Leftarrow X;Y$	Atenuación	K
$X \Leftarrow Y;X$	Atenuación conmutada	K'
$X;(Y;Z) \Leftarrow (X;Y);Z$	Asociatividad	B
$X;(Y;Z) \Leftarrow (Y;X);Z$	Asociatividad invertida	B'
$(X;Y);Z \Leftarrow X(Y;Z)$	Asociatividad conversa	B^c
$(X;Y);Z \Leftarrow (X;Z);Y$	Conmutatividad fuerte	C
$X;Y \Leftarrow Y;X$	Conmutatividad débil	CI
$(X;Y);Y \Leftarrow X;Y$	Contracción fuerte	W
$X;X \Leftarrow X$	Contracción débil	WI
$X \Leftarrow X;X$	Mezcla	M

Las reglas estructurales definen las propiedades de los signos de puntuación del sistema deductivo, en este caso de $; \in P$. Las reglas operacionales son las relativas a las

conectivas del lenguaje formal en cuestión. Las reglas del condicional "de izquierda a derecha" para ; ∈ P son una regla de introducción y otra de eliminación. Sus esquemas respectivos son:

$$\frac{X;A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B}$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X;Y \vdash B}$$

Asimismo, podemos definir las reglas de introducción y eliminación del condicional "de derecha a izquierda" para ; ∈ P:

$$\frac{A;X \vdash B}{X \vdash B \leftarrow A}$$

$$\frac{X \vdash B \leftarrow A \qquad Y \vdash A}{Y;X \vdash B}$$

Las reglas para ; ∈ P de introducción y eliminación de la fusión "×" son, respectivamente:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X;Y \vdash A \times B}$$

$$\frac{X \vdash A \times B \qquad Y(A;B) \vdash C}{Y(X) \vdash C}$$

Con tales reglas podemos comprobar que la fórmula A × B y la estructura A;B son equivalentes.

Es importante distinguir el nivel del sistema y el nivel del lenguaje contenido en el sistema. En el nivel del sistema un teorema consiste en una fórmula que se sigue de nada, de modo que ⊢ A. No obstante, tal como se ha caracterizado el cálculo de secuentes, un secuente debe tener en las premisas al menos una estructura, tal que X ⊢ A. Para solventar esta situación Restall (2000, p.30) introduce el símbolo 0 ∈ P, el cual es un signo de puntuación 0-ario. Por consiguiente, para establecer que la fórmula A es un teorema empleamos la expresión "0 ⊢ A". El signo 0 es la identidad y se define mediante cuatro reglas estructurales para ; ∈ P:

	Izquierda	Derecha
Push	$X \Leftarrow 0;X$	$X \Leftarrow X;0$
Pop	$0;X \Leftarrow X$	$X;0 \Leftarrow X$

Si tenemos un sistema que cuente con las reglas de la identidad de izquierda y con las reglas del condicional, entonces tenemos que $A \vdash B$ se puede probar sii $0 \vdash A \rightarrow B$ también se puede probar. Esto sigue el esquema del teorema de deducción, por lo cual la noción de consecuencia para el lenguaje en cuestión puede ser definida a partir de los elementos del sistema que se han mencionado. En la prueba partimos de un razonamiento en el que $A \vdash B$ ya ha sido probado:

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash B}{0;A \vdash B}\ [X \Leftarrow 0;X]}{0 \vdash A \rightarrow B}\ \text{[Introducción del condicional de izquierda a derecha]}$$

Del mismo modo, partimos de un razonamiento en el que $0 \vdash A \rightarrow B$ ya ha sido probado:

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad 0 \vdash A \rightarrow B}{0;A \vdash B}\ \text{[Eliminación del condicional de izquierda a derecha]}}{0;A \vdash B}\ [X \Leftarrow 0;X]$$

QED

En el nivel del lenguaje objeto podemos introducir una conectiva 0-aria *t* con las mismas propiedades que el signo de puntuación 0. Con *t* introducimos una constante para representar los teoremas. Así, pues, nos apoyamos en Restall (2000, p.32) para establecer que *t* es la constante de la verdad, la cual consiste en una conectiva 0-aria para $0 \in P$ tal que cumple las reglas de introducción y eliminación de *t*:

Introducción	Eliminación
$0 \vdash t$	$\dfrac{X \vdash t \qquad Y(0) \vdash A}{Y(X) \vdash A}$

En este contexto es importante distinguir la constante de la verdad *t* de la constante de la verdad trivial $\top$, la cual es una constante proposicional que cumple la regla "$X \vdash \top$" (Restall 2000, p.32). La pertinencia de esta distinción se entiende en tanto que la equivalencia entre $\top$ y *t* se demuestra a partir de la regla estructural de la

atenuación K, la cual no se admite en los sistemas relevantes. Asimismo, tenemos la falsedad trivial ⊥ que cumple la regla:

$$\frac{X \vdash \bot}{Y(X) \vdash A}$$

La conjunción extensional ∧ es una constante binaria que se define mediante una regla de introducción y dos reglas de eliminación:

$$\frac{X \vdash A \quad X \vdash B}{X \vdash A \wedge B} \qquad \frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \qquad \frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B}$$

La disyunción extensional ∨ es una constante binaria que se define mediante dos reglas de introducción y una regla de eliminación:

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \qquad \frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \qquad \frac{Y(A) \vdash C \quad Y(B) \vdash C \quad X \vdash A \vee B}{Y(X) \vdash C}$$

Para demostrar la propiedad distributiva de las conectivas ∧ y ∨, se necesitan las reglas K, K' y WI. No obstante, tal y como se ha mencionado, la regla de la atenuación no es correcta en los sistemas relevantes. Ahora bien, es posible probar[143] la distribución de la conjunción sobre la disyunción extensionales sin modificar las reglas de →, ×, *t* y ;. Para ello se necesita introducir un nuevo signo de puntuación "," en el sistema. La coma , ∈ P permite construir estructuras de tal modo que sus propiedades sintácticas son las equivalentes a la conjunción extensional en el lenguaje. Restall (2000, p.35) explica de esta manera la diferencia entre "," y ";": "Recall that in the functional interpretation an object is of type X;Y if and only if it is an object of type X applied to an object of type Y. Well, the comma is simpler. An object is of type X,Y if and only if it is an object of type X as well as an object of type Y". Las reglas estructurales de la coma son las siguientes:

[143] Tal como hizo Dunn (1974).

$X \Leftarrow X,Y$	Atenuación	eK
$X,(Y,Z) \Leftarrow (X,Y),Z$	Asociatividad	eB
$X,Y \Leftarrow Y,X$	Conmutatividad débil	eCI
$X,X \Leftarrow X$	Contracción débil	eWI

Seguimos la notación de Restall (2000, p.36) al emplear la letra "e" delante de la abreviatura de la regla para señalar que es una regla estructural extensional. Las reglas del ; ∈ P son intensionales.

La regla del corte es una regla estructural que permite evitar la aparición del término medio en la conclusión. Así, pues:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y(A) \vdash B}{Y(X) \vdash B}$$

Seguimos la convención establecida por Restall (2000, p.39) según la cual la nomenclatura de un sistema lógico depende de las reglas estructurales que usa. Si se emplea , ∈ P además de ; ∈ P, entonces se añade la letra "D" a la nomenclatura del sistema. Esto indicaría que en ese sistema rige la ley de la distribución de la conjunción sobre la disyunción. La letra P indica que el sistema en cuestión cumple las reglas del Push y del Pop tanto de izquierda como de derecha. rP indica que cumple solo las reglas del Push y del Pop de derecha y lP indica las reglas correspondientes de izquierda. Si se le añade el sufijo "u" u "o" entonces el sistema solo sigue la regla del Push o del Pop, respectivamente.

El sistema lógico que no cumple ninguna regla estructural es el sistema subestructural básico y se denomina "BSub". Asimismo, si a la nomenclatura se le añaden corchetes dentro de los cuales aparecen determinadas conectivas, entonces dicho sistema cumple las reglas exclusivamente de tales conectivas. Si no se indican conectivas entre corchetes, entonces cumple las reglas de todas las conectivas indicadas. Por ejemplo "DBC[×]" es el sistema que cumple las reglas de la asociatividad , la conmuntatividad fuerte, la fusión, la coma y el punto y coma. Restall (2000, p.40, tabla 2.4) establece la correspondencia entre algunas lógicas subestructurales significativas, su abreviatura habitual y su nomenclatura siguiendo el método antedicho. La ventaja del método de la nomenclatura de Restall reside en que permite identificar las reglas que cada sistema sigue.

Cálculo Lambek asociativo	**L**	$BB^C[\rightarrow,\leftarrow,\times]$
Cálculo Lambek asociativo con identidad	**LI**	$BB^CP[\rightarrow,\leftarrow,\times,t]$
Entrañamiento positivo de Ticket sin contracción	$\mathbf{TW}^+$	DBBlP'$[\rightarrow,\times,t,\wedge,\vee]$
Entrañamiento positivo de Ticket	$\mathbf{T}^+$	DBBlP'W$[\rightarrow,\times,t,\wedge,\vee]$
Entrañamiento positivo	$\mathbf{E}^+$	DBB'lPrPuW$[\rightarrow,\times,t,\wedge,\vee]$
Lógica relevante positiva	$\mathbf{R}^+$	DBCW
Lógica relevante positiva con mezcla	$\mathbf{RM}^+$	DBCWM
Lógica lineal aditiva multiplicativa positiva	$\mathbf{MALL}^+$	BC
Lógica afín positiva	**BCK**	BCK
Lógica intuicionista	**J**	BCWK
Lógica mínima		BCWK$[\rightarrow,\wedge,\vee]$

Para introducir las conectivas monádicas en la teoría de la prueba del cálculo de secuentes tipo Restall asumimos que tales constantes son modalidades de distinto tipo: "These unary connectives are *modalities* of various sorts. They modify the content of the formula upon which they operate" (Restall 2000, p.47). Nuestro interés reside en la negación, no obstante, en el marco general de las modalidades Restall (2000, §3) distingue entre modalidades positivas, negativas y no normales[144]. Una modalidad positiva es una conectiva monádica *c* tal que la siguiente regla es correcta para cualesquiera fórmulas A,B:

$$\frac{A \vdash B}{cA \vdash cB}$$

Una modalidad negativa es una conectiva monádica *c* tal que la siguiente regla es correcta para cualesquiera fórmulas A,B:

$$\frac{A \vdash B}{cB \vdash cA}$$

[144] Las modalidades no normales son aquellas que no poseen las propiedades distributivas que ostentan las modalidades positivas. No obstante, no son pertinentes para nuestro estudio.

La posibilidad y la necesidad son los ejemplos más característicos de las modalidades positivas[145]. Los ejemplos paradigmáticos que representan las modalidades negativas son las conectivas de la negación. Dada una fórmula falsa *f*, definimos dos conectivas para la negación a partir de los condicionales previamente definidos: (i) ~A ≔ A → *f* y (ii) ¬A ≔ *f* ⟵ A. Si los condicionales son verdaderos, entonces en "A → *f*" el antecedente debe ser verdadero y en "*f* ⟵ A" el consecuente debe ser verdadero. Ambas conectivas de negación cumplen el esquema de las modalidades negativas.

[145] Para definir las reglas de tales operadores en el lenguaje debemos introducir un signo monádico al sistema: • ∈ P. Las reglas para introducir y eliminar el operador modal de la necesidad □ son, respectivamente:

$$\frac{\bullet X \vdash A}{X \vdash \Box A} \qquad \frac{X \vdash \Box A}{\bullet X \vdash A}$$

Las reglas para introducir y eliminar el operador modal de la posibilidad ◊ son, respectivamente:

$$\frac{X \vdash A}{\bullet X \vdash \Diamond A} \qquad \frac{X \vdash \Diamond A \qquad Y(\bullet A) \vdash B}{Y(X) \vdash B}$$

Cabe destacar dos aspectos. Por un lado, la relación entre la necesidad y la posibilidad es la siguiente: ◊A ⊢ B es un teorema sii A ⊢ □B es un teorema. Por otro lado, las propiedades de • en el sistema son las mismas que las de ◊ en el lenguaje objeto. El comportamiento de los operadores modales puede caracterizarse con diversas reglas según las ideas de necesidad y posibilidad que se pretendan expresar. El signo • ∈ P nos permite establecer las reglas estructurales de la familia modal:

T	$\bullet X \Leftarrow X$	$A \vdash \Box A$
4	$\bullet X \Leftarrow \bullet\bullet X$	$\Box A \vdash \Box\Box A$
Kr	$0 \Leftarrow \bullet 0$	$t \vdash \Box t \qquad \Diamond t \vdash t$
Kr^c	$\bullet 0 \Leftarrow \bullet 0$	$\Box t \vdash t \qquad t \vdash \Diamond t$
mMP	$\bullet X; \bullet Y \Leftarrow \bullet(X;Y)$	$\Box(A \to B) \vdash \Box A \to \Box B$
mWI	$\bullet X; \bullet X \Leftarrow \bullet X$	$\Box A \vdash \Box(A \times A)$
mK	$X \Leftarrow \bullet X;Y$	$A \times \Diamond B \vdash A$
m2t	$\bullet X \Leftarrow X;0$	$\Box A \vdash t \to A$
t2m	$X;0 \Leftarrow \bullet X$	$t \to A \vdash \Box A$
m2⊤	$\bullet X \Leftarrow X;Y$	$\Box A \vdash \top \to A$
⊤2m	$X;\top \Leftarrow \bullet X$	$\top \to A \vdash \Box A$

Las dos primeras columnas (Restall 2000, p.51, tabla 3.1) expresan las propiedades de • ∈ P junto con su denominación habitual. La tercera columna presenta las propiedades de los operadores modales que se pueden probar a partir de las reglas estructurales correspondientes de •.

Ahora bien, mediante el cálculo de secuentes tipo Restall para las lógicas subestructurales es posible caracterizar las negaciones de forma independiente de los condicionales. En primer lugar, se establece la siguiente equivalencia: A ⊢ ~B es equivalente a B ⊢ ¬A. Dicha equivalencia se establece mediante las reglas de la *negación dividida*[146] (Restall, 2000, p.62):

$$\frac{A \vdash {\sim}B \qquad X \vdash B}{X \vdash \neg A} \qquad \frac{A \vdash \neg B \qquad X \vdash B}{X \vdash {\sim}A}$$

Asimismo, es posible colapsar ambas conectivas en una única negación simple "¬" mediante la regla:

$$\frac{A \vdash \neg B \qquad X \vdash B}{X \vdash \neg A}$$

La negación de De Morgan es aquella negación simple que cumple (Restall 2000, p.65):

- Las leyes de De Morgan:
  $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$
  $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$
  $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
  $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

- La regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash \neg\neg A}$$

- La regla de la eliminación de la doble negación:

$$\frac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A}$$

El sistema relevante **R** emplea la negación de De Morgan. Sin embargo, en los sistemas relevantes no se admite la regla del *Ex falso quodlibet*:

[146] Véase Hartonas y Dunn (1997).

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash \bot}$$

La orto-negación es la negación de De Morgan junto con *Ex falso quodlibet*. La negación booleana es la orto-negación junto con la ley distributiva de la conjunción en la disyunción. La negación también está relacionada con ; ∈ P:

$$\frac{X;A \vdash {\sim}B \qquad Y \vdash B}{X;Y \vdash \neg A} \qquad \frac{X;A \vdash \neg B \qquad Y \vdash B}{X;Y \vdash {\sim}A}$$

Se denomina negación estricta de De Morgan a la negación de De Morgan que cumple la regla de la negación dividida para ; ∈ P. Respecto a los operadores modales cabe señalar que ◊ no se caracteriza como ¬□¬.

APÉNDICE 2: ANÁLISIS SEMÁNTICO DE LAS EXTENSIONES DE **B** Y DE **B** CUANTIFICADO EN EL PLAN AUSTRALIANO

Nos apoyamos en la estrategia de Priest (2008, §10) para el análisis semántico de las extensiones de **B** en el plan australiano. Para ello añadimos a la interpretación una relación binaria $\sqsubseteq$ entre situaciones reflexiva y transitiva, de tal modo que $<S, @, *, R, \sqsubseteq, v>$. Dado $s \sqsubseteq s'$, la relación satisface que:

i. Si $v_s(p) = 1$, entonces $v_{s'}(p) = 1$

ii. $s'^* \sqsubseteq s^*$

iii. Si $Rs's_1s_2$, entonces $(s' \in N \wedge s_1 \sqsubseteq s_2) \vee (s \notin N \wedge Rss_1s_2)$, donde $N \sqsubseteq D$[147].

Dada la relación $\sqsubseteq$ podemos introducir restricciones sobre la relación ternaria de tal modo que se establezcan las condiciones semánticas de las extensiones de **B**.

T1. Si $Rabc$, entonces Rac^*b^*

T2. Si $\exists s \in S$: $Rabs \wedge Rscd$, entonces $\exists s' \in S$: $Racs' \wedge Rbs'd$

T3. Si $\exists s \in S$: $Rabs \wedge Rscd$, entonces $\exists s' \in S$: $Rbcs' \wedge Ras'd$

T4. Si $Rabc$, entonces $\exists s \in S$: $Rabs \wedge Rsbc$

T5. Si $Rabc$, entonces $\exists s(a \sqsubseteq s)$: $Rbsc$

T6. Si $a \in N$, entonces $a^* \sqsubseteq a$

T7. (Si $a \in N$, entonces $a^* \sqsubseteq a$) $\wedge$ ($a \in S - N$, entonces Raa^*a)

T8. Si $Rabc$, entonces $a \sqsubseteq c$

T9. Si $Rabc$, entonces $a \sqsubseteq c \vee b \sqsubseteq c$

Las restricciones T1-9 hacen que los axiomas A8-16 sean verdades lógicas, respectivamente.

Una interpretación para un lenguaje de primer orden es un par $<D, v>$ donde D es el dominio de cuantificación. Las *n*-tuplas de los miembros del dominio es el conjunto $D^n = \{<d_1, \ldots, d_n>: d_1, \ldots, d_n \in D\}$. *v* es una aplicación que cumple que:

[147] Hay que incluir un conjunto N de situaciones normales (consistentes y completas). Para nuestros objetivos basta con considerar que $N \sqsubseteq D$. Kripke (1965b) introdujo el uso semántico de los mundos no normales. Para un análisis del concepto de "mundo no normal" véase Priest (1992). Para un análisis del concepto de "mundo imposible" en lógicas relevantes véase Berto y Jago (2019, §6).

i. Dada una constante k, $v(k) \in D$.

ii. Dado un predicado P n-ádico, $v(P) \subseteq D^n$.

Es preciso extender el lenguaje para de tal manera que cada elemento del dominio tenga un nombre en el lenguaje. Así pues, para cada $d \in D$ se agrega una constante k_d que cumple $v(k_d) = d$. Con ello se pueden estipular las condiciones de verdad.

Para analizar la semántica de **B** cuantificado establecemos que una interpretación es una estructura <D, S, @, *, R, v> donde S, @, *, R, v son iguales que en el fragmento proposicional y $D \neq \emptyset$ es el dominio de cuantificación. Además, a cada constante c, v le asigna un elemento del dominio: $v(c) \in D$. Del mismo modo, a cada predicado P n-ádico v le asigna una extensión incluida en el dominio en cada configuración: $v_s(P) \subseteq D^n$. Dadas cualesquiera fórmula A y situación s se cumplen las siguientes reglas semánticas (además de las del fragmento proposicional):

i. Fórmulas atómicas: $v_s(Pa_1,\ldots, a_n)= 1$ sii $<v(a_1),\ldots, v(a_n)> \in v_s(P)$.

ii. Cuantificadores:

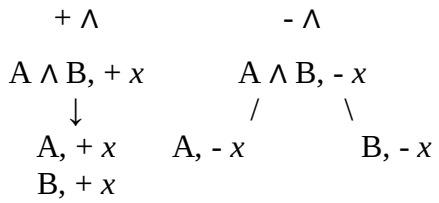
- $v_s(\forall xA)= 1$ sii para cada $d \in D$: $v_s(A_x(k_d))= 1$
- $v_s(\exists xA)= 1$ sii existe algún $d \in D$: $v_s(A_x(k_d))= 1$

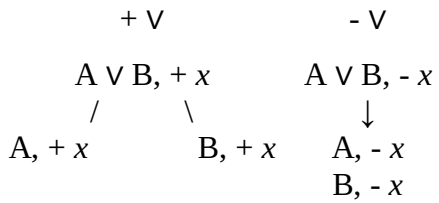
Además de los cuantificadores, para obtener **R** se deben introducir las correspondientes restricciones a la relación ternaria y la condición (i) de la relación $\sqsubseteq$ no se aplica a variables proposicionales sino a fórmulas atómicas.

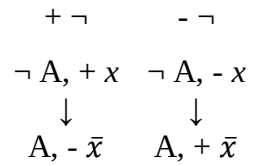
A pesar de ser un detalle técnico que no afecta a nuestros objetivos generales, es destacable que dada la formulación axiomática de la familia de los sistemas relevantes y la semántica (con dominio constante) de la relación ternaria junto con el operador estrella, Fine (1989) descubrió que aquellos sistemas que tienen a A9 como axioma son incompletos. Esta demostración afecta a la caracterización que hemos realizado de **R**. No obstante, el propio Fine (1988) había desarrollado una semántica con la cual los sistemas axiomáticos relevantes con A9 son completos. Para conseguir que las lógicas relevantes cuantificadas sean completas Fine (1988, p.31) desarrolló modelos más complejos técnicamente que los de la semántica del plan australiano. Routley (1980) probó la completud de la formulación axiomática de **B**.

APÉNDICE 3: REGLAS DE TABLAS SEMÁNTICAS PARA **B**

Seguimos la presentación que hace Priest (2008, p.190) de las reglas de las tablas semánticas para **B**:

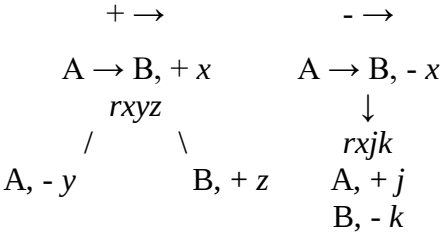






Regla de normalidad
(RN)

r@xx



En todas las reglas *x* es un número natural *i*, el cual puede ser la situación estrella "s*" de *i*, a la que representamos así: $i^{\#}$. En las reglas de la negación la *x* con la

barra encima quiere decir que si la situación es *i*, entones la situación con la barra es $i^{\#}$, y viceversa. En la regla "+ →" *y* y *z* son cualquier situación con la forma *j* o $j^{\#}$ que ya han aparecido en la rama. En la regla "- →" *j* y *k* son situaciones nuevas en la rama y por la condición de normalidad si *x* es @, entonces *j* y *k* deben ser el mismo mundo. En la regla de normalidad *x* es una situación *j* o $j^{\#}$ que ya ha aparecido en la rama (pero *r@xx* no ha aparecido). Es importante notar que RN la aplicamos para poder aplicar + →. Una rama de la tabla se cierra si tenemos nodos con la forma "A, + *x*" y "A, - *x*", siendo A lo mismo en los dos nodos y *x* la misma situación en los dos nodos.

APÉNDICE 4: TEORÍA SINTÁCTICA DEL SIGNIFICADO

Read (2012, p.150) denomina homofónico al principio según el cual las condiciones semánticas de las conectivas son las mismas en el lenguaje objeto y en el metalenguaje. Dada una conectiva *c*, "*c*A_1,…, A_n" es verdadero sii *c*(A_1 es verdadero,…, A_n es verdadero). La conectiva de la derecha da el significado a la conectiva de la izquierda. Si el principio homofónico se sostiene, entonces ambas mantienen el mismo significado. En el plan australiano, por ejemplo, no se mantiene el principio homofónico. Read (2012, p.151) considera que para evitar la crítica quineana del cambio de significado se debe (i) construir la semántica en un metalenguaje relevante y (ii) mantener el principio homofónico del significado de las conectivas.

Meyer (1985) construyó una metalógica relevante para **R**. Read (2012, p.151) observa que al asumir este metalenguaje con la noción relevante de validez (el principio SemEnt de Meyer (1985)) son prescindibles el operador estrella, los índices y la relación ternaria de accesibilidad para establecer el significado de las conectivas de **R**. Siguiendo la notación de Read (2012, p.151) y Meyer (1985) asumimos el principio homofónico y formulamos la condición semántica de la negación del siguiente modo: $[\neg A]x \coloneqq \neg[A]x$, donde [A]x denota que A es verdadero en *x*.

Apoyándose en la estrategia de Meyer (1985), Read (2012, §8.5) desarrolla una teoría *homofónica* de la verdad para **R**. La idea básica consiste en que la definición de verdad se apoya en una traducción de **R** en el metalenguaje relevante para **R**. Este es el metalenguaje del sistema relevante **MR**, cuyo vocabulario es el siguiente:

- Constantes individuales $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\ldots$
- Variables proposicionales P, Q, R…
- Predicado monádico de verdad V
- Operadores F, f, ∧, ∨, →, ×

Una variable proposicional es una FBF atómica, una constante individual con el predicado V es una fórmula atómica y dadas las FBF A y B, también son FBF: F, f, (A ∧ B), (A ∨ B), (A → B) y (A × B). F y f son operadores 0-ádicos. ¬A≔ A → f. Lo interesante consiste en que las constantes individuales nombran fórmulas atómicas de **R** y las variables proposicionales traducen las fórmulas atómicas de **R**. Es importante

destacar que las siguientes condiciones semánticas son para el sistema deductivo de **R** en cálculo de secuentes tal como Read (2012, §4.5) lo caracteriza (estilo *bunches*).

La condición semántica básica es $V\overline{p_i} \leftrightarrow P_i$. Así pues, dadas las FBF *a* y *b* de **R** la verdad se caracteriza homofónicamente del siguiente modo:

- $V(\bar{f})$:= f y t:= ¬f
- $V(\bar{F})$:= F y T:= ¬F
- La verdad es distributiva sobre los operadores binarios:
  - $V(\overline{a \wedge b})$:= $V\bar{a} \wedge V\bar{b}$
  - $V(\overline{a \vee b})$:= $V\bar{a} \vee V\bar{b}$
  - $V(\overline{a \rightarrow b})$:= $V\bar{a} \rightarrow V\bar{b}$
  - $V(\overline{a \times b})$:= $V\bar{a} \times V\bar{b}$

Read (2012, p.153) demuestra que $\vdash_{\mathbf{MR}} V\bar{a} \leftrightarrow$ A, lo que muestra que para toda FBF *a* de **R** con variables proposicionales al nivel del lenguaje objeto hay una FBF A de **MR** con variables proposicionales al nivel del metalenguaje. Cada fórmula del lenguaje objeto de **R** tiene su traducción (o fórmula que la traduce) en el metalenguaje de **MR**. Con esto tenemos que se puede probar en **MR** cada V-fórmula.

Para definir la relación de consecuencia Read (2012, p.154) introduce el operador modal de posibilidad "◊" en $\mathbf{MR}^{148}$ para cumplir el objetivo de expresar la noción relevante de consecuencia en un metalenguaje relevante, esto es, la imposibilidad de la fusión de premisas verdaderas y una conclusión falsa. Establece las siguientes dos definiciones:

- Dadas las FBF A y B de $\mathbf{MR}^{\Diamond}$, A ► B:= ¬◊(A × ¬B)
- CONSEC$(\overline{a, b})$:= $V(\bar{a})$ ► $V(\bar{b})$

El predicado diádico CONSEC expresa la idea de la relación de consecuencia lógica entre unos enunciados y otros, dado que es imposible que las premisas sean verdaderas fusión la conclusión falsa. Read (2012, p.155, proposición 8.2) demuestra que $\vdash_{\mathbf{MR}\Diamond}$A→B sii $\vdash_{\mathbf{MR}\Diamond}$A►B. El metalenguaje de $\mathbf{MR}^{\Diamond}$ no tiene capacidad expresiva para capturar la noción de conservación de la verdad en modelos. No obstante, Read

[148] Read (2012, p.155, proposición 8.3) demuestra que $\mathbf{MR}^{\Diamond}$ es un extensión conservadora de **MR**.

(2012, p.157) considera que esta observación no puede entenderse como una objeción ya que la noción de conservación de la verdad está presente en el predicado CONSEC sin necesidad de recurrir a modelos. Todo ello no consiste en una defensa de R, sino de aclarar formalmente la noción relevante de consecuencia: "Its interest lies in its making clear in formal terms what the notions of truth and consequence are" (Read 2012, p.157).

El principio homofónico junto con la noción clásica de validez exige que la función de valuación asigne simultáneamente la verdad y la falsedad a una fórmula para no incurrir en las PCM. Para Read (2012, p.158) la asignación contradictoria de valores veritativos es inaceptable y con la noción relevante de validez junto con el principio homofónico no es necesario asumirla. No obstante, el problema de la asignación contradictoria persiste en el nivel del metalenguaje. Para evitarlo Read intenta explicar sintácticamente (en teoría de la prueba) el significado de las partículas lógicas.

El problema quineano de la no rivalidad por el cambio de significado lo pretende evitar Read mediante la concepción de las conectivas lógicas como designadores rígidos y mediante una semántica que cumple el principio homofónico con la cual establecer el significado de las conectivas desde el metalenguaje. Esto traslada y enfoca el problema a la cuestión de la semántica y al modo adecuado de establecer una semántica para los sistemas relevantes. Read (2012, p.160) diferencia entre la semántica formal y la teoría del significado. Para comprenderlo ofrece el ejemplo de la lógica modal y afirma que el significado de "necesario" y "posible" es previo a la semántica de mundos posibles tipo Kripke. El significado es algo concerniente a la teoría del significado y la semántica formal permite obtener resultados técnicos. Esta comprensión se deriva explícitamente de su concepción descriptivista-falibilista. Read (2012, p.161) considera que la semántica formal no determina el significado puesto que se basa en un mapeo de fórmula sobre valores veritativos. Esto es una traducción de un lenguaje a otro, lo cual no resuelve el problema del significado si no sabemos el significado del lenguaje al que se traduce.

El significado de un lenguaje solo puede determinarse en su contexto de uso. Y en este sentido debe considerarse, según Read (2012, p.160), el significado de las conectivas lógicas. Esto le lleva a discutir con Prior (1960 y 1964) quien considera que las conectivas deben determinar su significado a partir de las condiciones de verdad con

independencia de su uso en prácticas argumentativas puesto que, de lo contrario, no sería posible distinguir los argumentos válidos de los inválidos en las argumentaciones reales De este modo, las reglas de inferencia se siguen del significado, el cual reside en la asignación de sus condiciones de verdad. El argumento de Prior es una reducción al absurdo a partir del operador Tonk. Suponemos que el significado de Tonk depende de sus reglas de inferencia (y no de la semántica formal), las cuales son:

- $A \vdash A\mathit{Tonk}B$
- $A\mathit{Tonk}B \vdash B$

Con tales reglas inferenciales tenemos el resultado trivial de que cualquier enunciado se deriva de cualquier otro enunciado: de A obtenemos A*Tonk*B por la primera regla y de este último derivamos B por la segunda regla. Ante esto Read (2012, p.163) observa que no es preciso que sean veritativo-funcionales las condiciones que establecen las condiciones veritativas de un enunciado. De este modo expresa que "What is wrong, however, is not the very attempt to explain the meaning of a connective in terms of its use, but the particularly simple and careless way in which that connection was expressed" (Read, p.2012, p.163). Read pretende establecer una teoría del significado no apoyada en la semántica formal, sino en las reglas de inferencia o usos de inferencia.

Read (2012, p.165) se apoya en Prawitz (1977) para defender que el significado de un enunciado se fundamenta en las condiciones en las que dicho enunciado puede ser aseverado. En sus *condiciones de aserción* reside el significado de un enunciado. Las condiciones de aserción de una expresión son propias del uso de una lengua cuyos hablantes adquieren y comparten. De modo que al aplicar la idea del significado basada en las condiciones de aserción a las partículas lógicas se obtiene que su significado reside en el uso de su aserción. El uso lo liga Read a las reglas inferenciales, de modo esta teoría del significado de las conectivas lógicas es sintacticista o dependiente de sus condiciones de derivabilidad o condiciones de prueba: "When applied to the logical particles, the claim that assertibility is the primary semantic notion, and that the meaning of an expression is given by the conditions for its use in assertion, becomes what we may call a 'proof- conditional' theory of meaning" (Read 2012, p.166). El núcleo no son las condiciones de verdad, sino las condiciones de prueba o derivabilidad presentes pre-teóricamente en contextos de argumentación y prueba.

El significado de una partícula lógica reside en las condiciones de aserción de un enunciado compuesto por tal partícula lógica. De estos fundamentos de la aserción dependen las consecuencias que se siguen de tal aserción. La conclusión está contenida en el significado de las premisas. Este es el criterio que impide la regla inferencial de la eliminación de Tonk. Con la introducción no hay problema puesto que el uso de aserción se encuentra en la regla de introducción: "the sense of a connective is given by its introduction rule" (Read 2012, p.179).

Se puede considerar el uso de una conectiva desde dos perspectivas: sus condiciones de aserción contenidas en las reglas de introducción y las condiciones que permiten extraer conclusiones a partir de la aserción del enunciado, lo cual está contenido en las reglas de eliminación de la conectiva del enunciado. Debe existir una armonía entre ambas y, dada la teoría del significado basado en el uso relacionado con las condiciones de aserción, hay una prioridad de la regla de introducción de una conectiva a partir de la cual se debe establecer la regla de eliminación siguiendo los cauces del sistema deductivo en cuestión, en este caso el cálculo de secuentes.

> The elimination rules can then be given as consequences of the introduction rules in the usual way. For the introduction rule for a connective gives the conditions under which it may be asserted —it makes the meaning of the proposition containing that connective manifest. (Read 2012, p.182)

Read asume tres condiciones en su teoría del significado de las conectivas lógicas:

i. El significado depende de las condiciones de aserción en el uso de los enunciados compuestos por las conectivas en un contexto argumentativo existente pre-lógico.
ii. La condición de aserción de una conectiva está contenida en su regla de introducción.
iii. La regla de eliminación es una consecuencia de la regla de introducción y debe ser construida de acuerdo a las pautas del sistema deductivo.

La regla de eliminación de Tonk es una consecuencia de la aserción de Tonk. Y la regla que ofrece Prior no es correcta de acuerdo al cálculo de secuentes. La regla adecuada a la introducción de Tonk sería la siguiente:

$$\frac{X \vdash A\mathit{Tonk}B \qquad Y(A) \vdash C}{Y(X) \vdash C}$$

Así pues, para obtener B a partir de A*Tonk*B se necesita probar que A ⊢ B, lo cual es precisamente lo que no tenemos. Se podría objetar que con esta regla ya no nos encontramos ante la conectiva Tonk. Sin entrar en la discusión específica sobre Tonk, lo que Read pretende evitar es la crítica de Prior y defender la primacía de la sintaxis sobre la semántica para determinar el significado de las conectivas lógicas.

APÉNDICE 5: TÉCNICA DE REINTERPRETACIÓN PARA LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA EN EL ENFOQUE FORMALISTA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO COMO ANTECEDENTE DE LA TEORÍA DE MODELOS

1. ENFOQUE FORMALISTA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO

Antes del giro metodológico de Hilbert, las propiedades básicas o fundamentos de la matemática eran asunciones de una naturaleza heterogénea a la matemática y no susceptible de ser objeto de la investigación matemática. El fundamento era más bien epistemológico o metafísico y el recurso habitual es la intuición. Según Bernays (1922, p.1) esto representaba una unidireccionalidad de la filosofía a la matemática que se vio desbordada por el desarrollo contemporáneo de esta última. La filosofía de la matemática relativa a su fundamentación es ella misma matemática: "Mathematics no longer allowed philosophy to prescribe the method and the bounds of its research" (Bernays 1922, p.3). Este cambio metodológico exige una concepción filosófica formalista cuyo protagonista fue Hilbert. Dicho giro formalista permitió una mayor precisión en las relaciones lógicas de los axiomas y en la estructura formal de las inferencias relativas a las teorías matemáticas.

Este giro metodológico lo propuso Hilbert por vez primera en sus *Fundamentos de geometría* de 1899 los cuales analizan la geometría en un sistema axiomático siguiendo la simplicidad y la completud. Analiza la construcción lógica de la geometría a partir de los diferentes grupos de axiomas. Lo novedoso no reside en el contenido presentado en el área de la geometría, sino en el "new methodological turn that was given to the idea of axiomatics" (Bernays 1922, p.5). Lo que se busca es el desarrollo lógico de una ciencia a partir de axiomas. De las proposiciones básicas se derivan mediante reglas de inferencia los teoremas. Es importante remarcar que este método no es una novedad introducida por Hilbert, lo novedoso radica en la comprensión de dicha metodología deductiva. Antes de Hilbert (salvo excepciones) la caracterización se apoyaba en el aspecto epistemológico según el cual la verdad de los axiomas asumida *a priori* garantiza la verdad de los teoremas derivados. Es frecuente que en esta perspectiva epistemológica la verdad de los axiomas provenga de la intuición ya sea sensible o intelectual. En este sentido Bernays (1922, p.5) menciona a Kant: "still Kant held the view that the success and the fruitfulness of the axiomatic method in geometry and mechanics essentially rested on the fact that in these sciences one could proceed

from a priori knowledge (the axioms of pure intuition and the principles of pure understanding)".

El giro metodológico de Hilbert en el sistema axiomático no se compromete con la idea de los axiomas entendidos como la expresión de conocimientos *a priori*. Así, pues, la geometría no es una ciencia que parta de un conocimiento empírico contenido en sus axiomas. Bernays (1922, p.6) considera que la caracterización epistémica de los axiomas mostró su insuficiencia explicativa debido a la abstracción matemática que, en el caso de la geometría, tomaba distancia de las intuiciones espaciales y permitía desarrollar sistemas más amplios incluían a la geometría euclídea con la misma justificación matemática que a otras geometrías. Esto generó una escisión entre la epistemología y el formalismo matemático en lo relativo a los fundamentos de los sistemas axiomáticos. En esta línea Bernays (1922, p.7) afirma que:

> The important thing, then, about Hilbert's "Foundations of Geometry" was that here, from the beginning and for the first time, in the laying down of the axiom system, the separation of the mathematical and logical [spheres] from the spatial-intuitive [sphere], and with it from the epistemological foundation of geometry, was completely carried out and expressed with complete rigor.

Es posible admitir que los grupos de axiomas de la geometría expresen hechos recogidos por la intuición, no obstante, lo relevante consiste en observar que este problema no concierne a la construcción axiomática y a la prueba de los teoremas, lo cual se realiza al margen de cualquier intuición espacial. Tanto las pruebas como los axiomas no mantienen una dependencia epistemológica respecto a la intuición espacial. En este sentido se comprende que los términos "punto", "línea" y "plano" son meros nombres para tipos de objetos sin un contenido determinado (espacial o de ningún tipo). Las expresiones que contienen estos términos no tienen un significado intuitivo a pesar de aquello que los vocablos empleados sugieran. Lo que designan dichas expresiones en las que ocurren los términos en cuestión son las relaciones establecidas de forma implícita en los axiomas.

Los axiomas no son juicios susceptibles de ser verdaderos. Los axiomas tienen sentido en el conjunto de la estructura lógica del sistema axiomático, pero el sistema tampoco tiene carácter significativo. El sistema axiomático es estrictamente hipotético. De este modo, Bernays (1922, pp.8-9) afirma que "the axiomatic treatment of geometry

consists in separating the purely mathematical part of knowledge from geometry, considered as a science of spatial figures, and investigating it on its own in isolation". Los axiomas pueden ser enunciados veritativos si se establece una asignación de nombres a objetos, esto es, si se interpretan, ahora bien, el sistema axiomático no expresa un contenido fenoménico. Por tanto, las relaciones espaciales en geometría pueden proyectarse hacia el sistema formal de la estructura de las relaciones lógicas, las cuales son netamente matemáticas. Ahora bien, lo relevante del sistema axiomático reside en sus propiedades internas puramente formales. Las relaciones lógicas del sistema no contienen verdades fácticas.

La metodología formalista de Hilbert del sistema axiomático es susceptible de ser aplicada a diferentes dominios y no circunscribirse meramente a la geometría. Los principios metodológicos de su investigación axiomática los presentó Hilbert en 1917 en *Axiomatisches Denken*[149]. Se trata, para Hilbert, del procedimiento científico cuya aplicación puede realizarse donde exista un marco conceptual establecido. Si se puede desarrollar lógicamente una teoría a partir ciertos enunciados, entonces es posible fundamentar axiomáticamente dicha teoría. Se trataría de una fundamentación formal y no epistemológica de la teoría en cuestión en tanto que objeto de una investigación axiomática. La idea de axiomática adquiere un carácter universal de tal modo que el pensamiento axiomático ofrece una visión clara y sistemática de cualquier conocimiento científico. Cualquier teoría científica es objeto de la investigación axiomática si puede llevar a cabo una construcción lógica de una teoría.

Para la fundamentación matemática o lógica formal de una teoría mediante la investigación axiomática se exigen ciertas condiciones. La consistencia es la primera condición: no deben incurrir en contradicción las relaciones lógicas que los axiomas expresan. Lo cual exige dar solución al problema de probar la consistencia del sistema axiomático. El problema de la consistencia no era propio de la metodología epistemológica en tanto que presuponía la verdad de los axiomas en tanto que enunciados veritativos. De la consistencia depende la conexión de relaciones dentro del sistema, puesto que de lo contrario habría incompatibilidad. La segunda condición consiste en examinar la dependencia lógica que los teoremas puedan mantener entre sí. Por consiguiente, se debe analizar la dependencia de los axiomas, esto es, que se puedan

[149] Curso publicado en 1918.

derivar unos de otros. Asimismo, se debe probar si los axiomas son reducibles a enunciados más fundamentales.

La prueba de la consistencia de una teoría de un dominio en particular es una prueba de consistencia relativa, la cual exige como condición de posibilidad la consistencia del propio análisis matemático. Es preciso construir una teoría axiomática del análisis y probar la consistencia del análisis. Este giro metodológico permitió plantear el enfoque dentro del cual probar la consistencia de la axiomática y de la matemática. En 1904 Hilbert presentó este enfoque en *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*[150]. La estrategia no consistió en determinar la posibilidad lógica de un sistema de objetos asumido en el análisis, sino en centrar la atención en el tipo de inferencias del análisis. Así, pues, el objetivo reside en probar que a partir de los axiomas y mediante las reglas de inferencias del análisis matemático no se deriva una contradicción. En este sentido Bernays (1922, p.13) expresa que "Here it is not a question of the possibility of a continuous, infinite manifold of certain properties, but of the impossibility of a mathematical proof with determinate properties". El enfoque se basa en la idea de prueba lógica en tanto que el objeto que se investiga son las pruebas mismas y no los objetos a los que aluden las pruebas en el análisis.

En este sentido la relación de la lógica con los fundamentos de la matemática es clara, a saber: la estructura de las inferencias lógicas son determinantes en lo que concierne a la forma de las pruebas matemáticas[151]. "The general forms of logical inference are decisive for the structure of mathematical proofs. That is why the required investigation of mathematical proofs also concerns the logical forms of inference" (Bernays 1922, p.14). La atención se orienta a los sistemas lógicos deductivos en (lo que actualmente denominamos) teoría de la prueba. Del mismo modo que en los fundamentos de la geometría, Hilbert aplicó el enfoque formalista a la lógica

[150] Ponencia en congreso publicado en 1905.

[151] Tal como explica Sieg (2013, p.16), los *Principia Mathematica* ayudaban a la representación formal de la matemática que pretendía Hilbert. En esta línea Hilbert trabajó en lógica con el objetivo en los fundamentos de la matemática y en colaboración con Bernays, Behman y Ackermann realizó diversas aportaciones. Así, pues, Hilbert (1918) expuso la lógica de primer orden que más tarde desarrollaron Hilbert y Ackermann (1928).

matemática de tal manera que los desvinculó de su contenido relativo a la intuición intelectual.

> In adopting the procedure of mathematical logic, Hilbert reinterpreted it as he had done with the axiomatic method. Just as he had formerly stripped the basic relations and axioms of geometry of their intuitive content, he now eliminates the intellectual content of the inference from the proofs of arithmetic and analysis that he makes the object of his investigation. (Bernays 1922, p.15)

Por consiguiente, se sustituyen las pruebas del análisis por la aplicación meramente formal de reglas de inferencia sobre cierta secuencia de símbolos (que pueden ser interpretados). Los sistemas de fórmulas bien formadas que en el cálculo deductivo expresan las pruebas del análisis matemático son el objeto de la investigación y su significado no es pertinente para este estudio. Este es el grado más alto del formalismo del giro metodológico hilbertieno. El pensamiento axiomático de Hilbert permite traducir todo lo teoréticamente cognoscible a sus métodos lógicos deductivos meramente formales. En este sentido "Mathematics turns out to be the general theory of formalisms, and by understanding it as such, its universal meaning also becomes clear" (Bernays 1922, p.16). En último término, el formalismo consiste en una concepción filosófica de las matemáticas que permite plantear un programa de fundamentación.

2. TÉCNICA DE REINTERPRETACIÓN PARA LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA

Los *Fundamentos de Geometría* de Hilbert (1899) aportaron un enfoque moderno respecto al método axiomático y a la investigación metalógica sobre la consistencia y la independencia. El enfoque de los axiomas en cuestión es un enfoque formal empleado en las diversas pruebas de independencia y consistencia parcial de su objeto de estudio que, en este caso, se trataba de la geometría. La novedad residió en el enfoque formal del método axiomático y en las pruebas de las propiedades metalógicas. En el anterior epígrafe nos centramos en el enfoque formal del método axiomático y en este epígrafe abordamos la técnica para las pruebas de consistencia relativa. Nuestro objetivo es presentar una interpretación de esta técnica como un antecedente de la teoría de modelos, lo cual se adecúa a nuestro formalismo. Para ello nos apoyamos en la lectura de Blanchette (2018 y 1996).

El objetivo de *Fundamentos de Geometría* de Hilbert (1899) reside en precisar el conjunto de axiomas de la geometría euclídea y en demostrar sus relaciones mutuas y sus relaciones con algunos teoremas fundamentales. En el desarrollo de su trabajo demuestra la consistencia de diversos subconjuntos de axiomas y la independencia de ciertos axiomas. La idea de *independencia* hace referencia a que un axioma no es probable a partir de un conjunto de axiomas. Así, pues, un axioma es independiente de un conjunto de axiomas sii no puede ser derivado a partir de ellos, no es consecuencia lógica de ellos, no se sigue de ellos. De modo análogo, la idea de consistencia quiere decir que no es posible probar una contradicción a partir de un conjunto de axiomas. Esto quiere decir que un conjunto de axiomas es consistente sii ninguna contradicción es consecuencia lógica de tal conjunto. Ambas ideas están relacionadas: un conjunto de axiomas es consistente sii toda contradicción es independiente de dicho conjunto. Del mismo modo, un axioma es independiente de un conjunto de axiomas sii es consistente la unión (conjuntista) de la negación del axioma independiente y el mencionado conjunto de axiomas.

Las pruebas que realiza Hilbert (1899) son pruebas de consistencia relativa en tanto que su técnica consiste en reducir un conjunto C de axiomas (geométricos) a una teoría T de tal modo que C es consistente si T es consistente. Tal como explica Blanchette (2018), se trata de una técnica de *reinterpretación* en virtud de la cual los elementos de C expresan teoremas de T. Lo que se reinterpreta son los términos geométricos. El esquema de las pruebas de consistencia relativa mediante la técnica de la reinterpretación es, por tanto, el siguiente: suponemos que C es inconsistente, luego de C se sigue una contradicción; se sigue una contradicción también de la reinterpretación de C dado que la consecuencia lógica no es dependiente de los contenidos de los elementos de C (en este caso términos geométricos como "punto" o "línea"); por consiguiente, una contradicción se sigue del conjunto de teoremas T, lo cual quiere decir que T es inconsistente. No obstante, partimos de que T es consistente, por lo cual la suposición de partida es falsa y C es consistente. Es una reducción al absurdo. La independencia de un axioma A se prueba mediante la prueba de consistencia de $C \cup \{\neg A\}$ a partir de su reducción a T.

Lo relevante de este tratamiento metalógico estriba en el cambio de centro de interés del contenido de los términos geométricos a las relaciones lógicas entre los términos establecidas por los axiomas. En este sentido, una teoría es un esquema

constituido por conceptos formales y sus relaciones lógicas. Y este formalismo puede aplicarse al contenido de cualesquiera términos que se quieran tomar como elementales. Dada la infinitud de las posibles "reinterpretaciones" de los términos de los axiomas, los axiomas pasan a comprenderse como definiciones implícitas.

Blanchette (2018) observa en este enfoque un antecedente de la teoría de modelos en el siguiente sentido. El conjunto C de axiomas define de manera implícita una relación *n*-ádica R^n, donde *n* es el número de términos contenidos en C. Blanchette (2018) explica que en R^n están incluidas las *n*-tuplas que hacen "verdaderos" a los términos reinterpretables de C[152]. R^n es el esquema formal que puede aplicarse sobre cualquier *n*-tupla con la que se reinterpretan los términos de C. Las pruebas de consistencia relativa de Hilbert (1899) elaboran *n*-tuplas que cumplen (o satisface[153]) la relación R^n entre los términos de los axiomas y definida por tales axiomas. En definitiva, tenemos que se parte de la asunción de la consistencia de una teoría de referencia T, la cual se emplea para reinterpretar los términos (geométricos en caso de Hilbert (1899)) del conjunto C de axiomas de tal modo que los términos de C expresan teoremas de T. Esta reinterpretación la entiende Blanchette (2018 y 1996) como una satisfacción de la relación R^n definida por los axiomas de C mediante una *n*-tupla. Así, pues, mediante la satisfacción de R^n se demuestra la consistencia o la independencia de C relativa a T.

Los enunciados reinterpretables en tanto que estructuras instanciables de diversas maneras se enfrentan a la concepción de un dominio preestablecido sobre el cual los axiomas son expresiones verdaderas[154]. Blanchette (2018) aclara que la técnica

[152] Nos apoyamos en la terminología y las expresiones de Blanchette (2018 y 1996) aunque sea muy próxima a la teoría de modelos, dado que la formulación original de Hilbert (1899) no es tan clara. No obstante, es importante tener en cuenta que no se trata de teoría de modelos en sentido tarskiano aunque pueda entenderse como un antecedente.

[153] Blanchette (2018) afirma que "The relation of satisfiability described here is an ancestor of the modern Tarskian notion, differing from it in relying on an intuitive understanding of the idea of a sentence expressing a truth under an interpretation"

[154] Frege reaccionó contra el enfoque formal del método axiomático de Hilbert. La postura fregeana, además de su relevancia histórica por su controversia con Hilbert, puede servir como contrapunto para comprender el formalismo hilbertiano a partir de las diferencias en los enfoques. Destacamos tres puntos:

hilbertiana de la reinterpretación basta para probar la consistencia relativa de C, al entender que la prueba no depende del contenido significativo de los términos de C.

---

1. Si el aspecto primario es el contenido expresado en los enunciados, el cual contenido es verdadero o falso respecto a un tema en cuestión, entonces la independencia y la consistencia es relativa a estos contenidos, los cuales no son reinterpretables. En este sentido al aplicar la técnica de la reinterpretación lo que se obtiene son dos conjuntos distintos de axiomas. Se cambian los "pensamientos" expresados en el conjunto C. Así lo expresa Blanchette (2018): "And the fact that the reinterpreted sentences express truths about real numbers has little to do, from Frege's perspective, with the consistency and independence questions that arise for the original thoughts about points, lines, and planes".
2. Si se asume que el conjunto C de axiomas de una teoría es un conjunto de contenidos verdaderos, entonces no es necesaria una prueba de consistencia dado que la verdad de los axiomas supone la consistencia del conjunto. Blanchette (2018) afirma que "On Frege's view, the axioms of a theory always form a collection of true thoughts; and since truth implies consistency, the consistency of a collection of axioms is never in need of demonstration".
3. Desde el enfoque hilbertiano para la existencia de los objetos matemáticos de una teoría es suficiente la consistencia. Desde la perspectiva fregeana la consistencia no es una condición suficiente, puesto que sería necesaria la referencia a principios más elementales.

El enfrentamiento de enfoques consiste en, por un lado, la comprensión de los axiomas como expresiones verdaderas sobre un contenido y, por otro lado, como enunciados reintepretables "expressing multiply-instantiable conditions" (Blanchette 2018). Desde la perspectiva fregeana la inferencia de la consistencia de la teoría consistente T a la consistencia del conjunto C o de la satisfacibilidad de R^n a la consistencia de C es a lo que debe ser probado. Desde la perspectiva de Hilbert no es necesario probar esta inferencia en tanto que la distinción entre el conjunto de axiomas C y los distintos conjuntos de pensamientos no es pertinente. Esto se debe a que la consistencia es algo concerniente no al contenido, sino al esquema formal de las relaciones definidas por C. Los conjuntos de contenidos son instanciaciones de un esquema formal. Llanamente, no hay inferencia que probar. Por tanto, "Frege's rejection of Hilbert's technique must involve, then, either some confusion about what Hilbert has established, or a different understanding of what is at issue in claims of consistency and independence".

APÉNDICE 6: RECURSOS PARA LA ARITMÉTICA RELEVANTE

1. AXIOMAS

Meyer (2021a, p.166 y 2021b, pp.306-307) describe axiomáticamente $\mathbf{R}^{\#}$. Distingue tres conjuntos de axiomas: el fragmento proposicional $\mathbf{R}_p$, cuantificado $\mathbf{R}_\forall$ y aritmético $\mathbf{R}^{\#}$. Para identificar los axiomas A y las reglas R los combinamos con la nomenclatura $\mathbf{R}_p$, $\mathbf{R}_\forall$ y $\mathbf{R}_{\#}$, respectivamente.

$\mathbf{R}_p$ A1. $A \to B \to (B \to C \to (A \to C))$

$\mathbf{R}_p$ A2. $A \to (A \to B \to B)$

$\mathbf{R}_p$ A3. $A \wedge B \to A$

$\mathbf{R}_p$ A4. $A \wedge B \to B$

$\mathbf{R}_p$ A5. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$

$\mathbf{R}_p$ A6. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$\mathbf{R}_p$ A7. $\neg\neg A \to A$

$\mathbf{R}_p$ A8. $A \to \neg B \to (B \to \neg A)$

$\mathbf{R}_p$ A9. $A \to \neg A \to \neg A$

$\mathbf{R}_\forall$ A10. $\forall x A[x] \to A[T]$, se sustituye el término T por las apariciones libres de x en A.

$\mathbf{R}_{\#}$ A11. $sx = sy \to x = y$

$\mathbf{R}_{\#}$ A12. $sx \neq 0$

$\mathbf{R}_{\#}$ A13. $x = y \to sx = sy$

$\mathbf{R}_{\#}$ A14. $x = y \to (x = z \to y = z)$

$\mathbf{R}_{\#}$ A15. $x + 0 = x$

$\mathbf{R}_{\#}$ A16. $x + sy = s(x + y)$

$\mathbf{R}_{\#}$ A17. $x \circ 0 = 0$

$\mathbf{R}_{\#}$ A18. $x \circ sy = (x \circ y) + x$

$\mathbf{R}_p$ R1. $A \to B \vdash (A \vdash B)$

$\mathbf{R}_p$ R2. $A, B \vdash A \wedge B$

$\mathbf{R}_\forall$ R3. $A \to (B \vee C) \vdash A \to (\forall x B \vee C)$, donde x es variable ligada en A o C (es una versión de la generalización universal del condicional)

$\mathbf{R}_\forall$ R4. $\forall x A x \to AT$ (2021b, p.307)

$\mathbf{R}_{\#}$ R5. A[0], A[x] → A[sx] ⊢ A[x], es una regla de inducción matemática relevante[155]

Meyer (2021a, §VIII) prueba las propiedades aritméticas elementales de + y ○. Entre ellas destacamos:

P1. Asociatividad: $x + y + z = x + (y + z)$

P2. Conmutatividad con asociatividad: $x + y + z = x + z + y$

P3. Monotonía de derecha: $x = y \rightarrow x + z = y + z$

P4. Monotonía de izquierda: $x = y \rightarrow z + x = z + y$

2. ▼▲

Meyer (2021a, p.220) introduce las siguientes definiciones[156]:

i. $\top \coloneqq 0 = 0$

ii. $\bot \coloneqq \neg\top \coloneqq 0 \neq 0$

iii. $\blacktriangledown A \coloneqq \top \wedge A$

iv. $\blacktriangle A \coloneqq \bot \vee A$

v. $A \equiv B \coloneqq (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

vi. $A \twoheadrightarrow B \coloneqq \blacktriangledown A \rightarrow B$

vii. $A \leftrightarrow B \coloneqq (A \twoheadrightarrow B) \wedge (B \twoheadrightarrow A)$

viii. $F \coloneqq 0 = 1$

ix. $T \coloneqq \neg F \coloneqq 0 \neq 1$

x. $\multimap A \coloneqq A \twoheadrightarrow F$

A partir de estas definiciones se pueden probar dos teoremas en $\mathbf{R}^{\#}$:

$\blacktriangledown A \leq A$

$(A \twoheadrightarrow B) \wedge \blacktriangledown A \leq B$

Y se añaden tres reglas:

$A \vdash \blacktriangledown A$

[155] Se puede formular como un axioma: A[0] ∧ ∀x(A[x] → A[sx]) → ∀xA[x].

[156] Adaptamos la notación original orientada a nuestros propósitos. "⟜" y "↠" son la negación y el condicional intuicionistas, respectivamente.

$(A \wedge B) \twoheadrightarrow C \vdash A \twoheadrightarrow (B \twoheadrightarrow C)$

$A \twoheadrightarrow (B \twoheadrightarrow C) \vdash (A \wedge B) \twoheadrightarrow C$

3. IDENTIDAD

Tal como prueba Meyer (2021a, §VI), la identidad[157] en $\mathbf{R}^{\#}$ cumple los siguientes principios:

R=. $x = x$

S=’. $x = y \rightarrow (A[x] \rightarrow A[y])$, tal que $A[x]$ es una fórmula atómica donde x es libre.

S=. $x = y \rightarrow (A[x] \rightarrow A[y])$, para cualquier fórmula $A[x]$.

T=. $y = z \rightarrow (T[y] \rightarrow T[z])$, tal que $T[x]$ es cualquier término y $T[y]$ es la sustitución de cada x por y en $T[x]$.

Meyer (2021b, p.320) establece las siguientes propiedades para la identidad:

$x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$

$x = y \rightarrow y = x$

$x = y \rightarrow z = z$[158]

$x = y \rightarrow \top$

$\top \rightarrow (A \rightarrow A)$

$A \leftrightarrow \top \rightarrow A$

$y = z \rightarrow Ty = Tz$, donde y y z son variables libres en el término T

$y = z \rightarrow (Ay = Az)$, donde y y z son variables libres en la fórmula A

Como puede observarse, la identidad en $\mathbf{R}^{\#}$ posee propiedades que también posee en lógica clásica.

[157] En la tesis no hemos examinado la temática de la identidad en las lógicas relevantes. Remitimos a los siguientes análisis: Kremer (1999), Mares (1992) y Standefer (2021).

[158] $x = y \rightarrow z = z$ es problemático para la relevancia. Su prueba depende del principio de inducción y de $\mathbf{R}_{\forall}$ R4. No obstante, no profundizamos en esta cuestión.

4. DEDUCCIÓN NATURAL

A toda fórmula que aparezca en una fórmula le es asignada una carga positiva o negativa. A la fórmula B se le asigna + o – si B es una subfórmula que aparece en A: A[B]. La carga se asigna recursivamente:

i. Sea A una fórmula, A_+.
ii. Si $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \times B$, $C \rightarrow A$, $C \supset A$, $\forall xA$ y $\exists xA$, entonces la caga de A y B es la misma que la carga de la subfórmula en cuestión.
iii. Si $A \rightarrow B$, $A \supset B$ y $\neg A$ son subfórmulas, entonces la carga de A es la contraria de la carga de la subfórmula en cuestión.

Atendiendo a la asignación de cargas y a la sustitución de la aparición de subfórmulas, Meyer (2021a, p.179) formula los siguientes *teoremas de reemplazo* (TR):

- TR Directo: sea $A \rightarrow B$ un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$, si $C[A_+]$ también es un teorema, entonces $C[B_+]$ es un teorema. Si $C[B_-]$ es un teorema, entonces $C[A_-]$ también es un teorema. Si $C[A_+, B_-]$ es un teorema, entonces $C[B_+, A_-]$ también es un teorema.
- TR Indirecto: sea $A \leftrightarrow B$ un teorema de $\mathbf{R}^{\#}$, cualquier sustitución en un teorema de A por B genera un teorema.

En este contexto el metateorema de deducción se formula con la fusión y el condicional relevante. La fusión agrupa las premisas de un modo más fuerte que la conjunción clásica (extensional), de tal modo que exige que se usen para derivar la conclusión (que sean relevantes para la conclusión). Meyer (2021a, p.183) lo formula del siguiente modo:

- Metateorema de deducción: $((A \times B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

Meyer (2021a, p.184) introduce la siguiente convención relacional: $A \leq B$ quiere decir que $A \rightarrow B$ es un teorema del sistema en cuestión. Del mismo modo, $A \simeq B$ quiere decir que $A \leftrightarrow B$ es un teorema del sistema en cuestión. Teniendo en consideración el metateorema de deducción, A se comprende como un conjunto de premisas $A_1,\ldots,A_n$ agrupadas por la fusión y a partir de las cuales se deduce B. Asimismo, introduce la constante proposicional t como símbolo primitivo descrito por el axioma:

$(t \times A) \leftrightarrow A$

Con t se puede formular el esquema de teoremas:

$(t \rightarrow A) \leftrightarrow A$

Así, pues, para cualquier fórmula se puede expresar su teorema con t:

$t \leq A$

Para probar teoremas Meyer (2021a, § IV) construye un sistema de deducción natural. Meyer (2021a, p.177) distingue tres categorías en el cálculo deductivo: procedimientos para introducir hipótesis, reglas que permiten derivar conclusiones de las hipótesis asumidas y procedimientos de descarga de hipótesis.

- Los enunciados básicos de la deducción natural de Meyer (2021a, p.188) son enunciados tipo $A \leq B$. Esto opera en un nivel de abstracción mayor del habitual dado que A es una etiqueta (*tag*) que es susceptible de ser manipulada. Por ello introduce la siguiente convención: $\alpha = A$[159] para aclarar que α y A son la misma fórmula. A se introduce como hipótesis y α es la etiqueta con la que se marca el rastro que permite identificar la dependencia de una conclusión con la correspondiente hipótesis. Los *procedimientos de introducción de hipótesis* operan mediante los enunciados tipo $\alpha = A$. Es sencillo observar que $\alpha \leq A$.
- El TR directo es necesario para aplicar reglas de derivación bajo hipótesis. Las reglas pueden ser de una o de varias premisas. Las reglas de una premisa posibilitan la manipulación de una fórmula etiquetada. Así, por ejemplo, si tenemos el teorema $B \leq C$ y tenemos que $\Gamma \leq B$ (la fórmula B etiquetada por Γ), podemos derivar $\Gamma \leq C$. Esta inferencia de C a partir de B es posible dado que lo que se sustituye es una fórmula B con carga positiva por una fórmula C con carga positiva. También es posible usar TR directo para la sustitución de etiquetas de una misma fórmula (Meyer 2021a, p.196): dados $\Delta \leq B$ y $\Gamma \leq \Delta$, si Δ tiene una carga negativa y aplicamos TR directo obtenemos $\Gamma \leq B$. Por otro lado, para reglas con varias premisas, si las premisas tienen asunciones distintas, se componen las hipótesis (en tanto que etiquetas) con la misma conectiva con la

[159] Esta identidad "=" no es la de $L^{\#}$.

que se compone la conclusión[160]. Así, por ejemplo, para introducir la conjunción: dadas $\Gamma \leq A$ y $\Delta \leq B$, obtenemos $\Gamma \wedge \Delta \leq A \wedge B$.

- Los *procedimientos de descarga de hipótesis* consisten en descargar la hipótesis que se introdujo de partida soltando la etiqueta que identifica la dependencia a la hipótesis al derivar una conclusión. Se puede comprender con el siguiente ejemplo. Se introduce la hipótesis $\alpha = A$ y suponemos que en algún paso se llega al enunciado $\Gamma \times \alpha \leq B$. Se concluye B a partir de la hipótesis, por eso para mostrar su dependencia se etiqueta a B con α (y otras asunciones contenidas en Γ que no son pertinentes en nuestro ejemplo). Ahora, para descargar la hipótesis A se debe eliminar α del rastro de asunciones: aplicando el teorema de deducción obtenemos $\Gamma \leq A \rightarrow B$ (que sigue dependiendo de las asunciones Γ). Esta es la regla de la introducción del condicional.

A continuación, exponemos las principales reglas para $\mathbf{R}^{\#}$ en forma de fórmulas condicionales y bicondicionales probables, sintetizando la sistematización de Meyer (2021a, §IV). Llamaremos simplemente condicional al condicional relevante.

Reglas con una premisa:

1. Conmutatividad de la fusión: $A \times B \simeq B \times A$
2. Asociatividad de la fusión: $A \times (B \times C) \simeq (A \times B) \times C$
3. Incremento al cuadrado[161]: $A \leq A \times A$
4. Eliminación de la conjunción: $A \wedge B \leq A$

   $A \wedge B \leq B$
5. Conmutatividad de la conjunción: $A \wedge B \simeq B \wedge A$
6. Asociatividad de la conjunción: $A \wedge (B \wedge C) \simeq (A \wedge B) \wedge C$
7. Idempotencia de la conjunción: $A \simeq A \wedge A$

[160] En cambio, los subíndices que Anderson y Belnap (1975) emplean en su técnica para rastrear la carga de hipótesis son conjuntos y, por tanto, la composición de índices se lleva a cabo con los operadores conjuntistas.

[161] Anderson y Belnap (1975) identifican la fusión con la unión conjuntista. Meyer (2021a) insiste en distinguir la fusión de la unión, lo cual arroja propiedades distintas: la unión es idempotente y la fusión es semi-idempotente.

8. Introducción de la disyunción: $A \leq A \vee B$

$$B \leq A \vee B$$

9. Introducción y eliminación de la doble negación: $\neg\neg A \simeq A$
10. Distribución de la conjunción en la disyunción: $A \wedge (B \vee C) \simeq (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
11. Distribución de la disyunción en la conjunción: $A \vee (B \wedge C) \simeq (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
12. Conmutatividad de la disyunción: $A \vee B \simeq B \vee A$
13. Asociatividad de la disyunción: $A \vee (B \vee C) \simeq (A \vee B) \vee C$
14. Idempotencia de la disyunción: $A \simeq A \vee A$
15. Distribución de la negación en la conjunción: $\neg(A \wedge B) \simeq \neg A \vee \neg B$
16. Distribución de la negación en la disyunción: $\neg(A \vee B) \simeq \neg A \wedge \neg B$
17. Distribución del condicional en la conjunción: $A \rightarrow (B \wedge C) \simeq (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$
18. Distribución de la disyunción en el condicional: $A \vee (B \rightarrow C) \simeq (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
19. Sufijo: $A \rightarrow B \leq B \rightarrow C \rightarrow (A \rightarrow C)$
20. Prefijo: $B \rightarrow C \leq A \rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$
21. $A \leq (A \rightarrow B) \rightarrow B$
22. $A \wedge (A \rightarrow B) \leq B$
23. Reducción del condicional: $A \rightarrow \neg A \leq \neg A$

$$A \rightarrow (B \wedge \neg B) \leq \neg A$$

$$A \rightarrow (B \times \neg B) \leq \neg A$$

24. Distribución del condicional en la negación: $A \rightarrow \neg B \leq B \rightarrow \neg A$
25. Distribución del condicional en el condicional: $A \rightarrow (B \rightarrow C) \leq A \rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$
26. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \leq A \rightarrow B$
27. Distribución de la fusión en la conjunción: $A \times (B \wedge C) \leq (A \times B) \wedge (A \times C)$
28. Reducción de la conjunción en la fusión: $A \wedge B \leq A \times B$
29. Reducción del condicional en el condicional material: $A \rightarrow B \leq A \supset B$
30. $t \leq A \rightarrow A$
31. $t \leq B$, donde B es un teorema
32. $A \rightarrow f \simeq \neg A$

33. $\forall x\mathrm{A}[x] \leq \mathrm{A}[\mathrm{T}]$, donde T es un término que sustituye las apariciones de x en A.
34. $\mathrm{A}[\mathrm{T}] \leq \exists x\mathrm{A}[x]$
35. $\forall x(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \simeq \forall x\mathrm{A} \wedge \forall x\mathrm{B}$
36. $\exists x(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \simeq \exists x\mathrm{A} \vee \exists x\mathrm{B}$
37. $\forall x\mathrm{A} \times \forall x\mathrm{B} \leq \forall x(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$
38. $\forall x(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \leq \forall x\mathrm{A} \rightarrow \forall x\mathrm{B}$
39. $\forall x(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \leq \exists x\mathrm{A} \rightarrow \exists x\mathrm{B}$
40. $\neg\forall x\mathrm{A} \simeq \exists x\neg\mathrm{A}$
41. $\neg\exists x\mathrm{A} \simeq \forall x\neg\mathrm{A}$

Reglas con varias premisas:

42. Introducción de la conjunción: $\Gamma \leq \mathrm{A}, \Delta \leq \mathrm{B} \vdash \Gamma \wedge \Delta \leq \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$
43. Eliminación de la disyunción: $\Gamma \leq \mathrm{A}, \Delta \leq \mathrm{B} \vdash \Gamma \vee \Delta \leq \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
44. Introducción de la fusión: $\Gamma \leq \mathrm{A}, \Delta \leq \mathrm{B} \vdash \Gamma \times \Delta \leq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$
45. Eliminación del condicional: $\Gamma \leq \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}, \Delta \leq \mathrm{A} \vdash \Gamma \times \Delta \leq \mathrm{B}$
46. Transitividad de la identidad: $\Gamma \leq \mathrm{T} = \mathrm{U}, \Delta \leq \mathrm{U} = \mathrm{V} \vdash \Gamma \times \Delta \leq \mathrm{U} = \mathrm{V}$, donde T, U, V son términos

5. Traducción de $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ en $\mathbf{R}^{\#}$ mediante el análisis de las propiedades de ▼ y ▲

La primera estrategia se lleva a cabo mediante el análisis de las propiedades de ▼ y ▲. El objetivo reside en establecer una traducción de $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ en $\mathbf{R}^{\#}$ con la que obtener métodos probatorios en $\mathbf{R}^{\#}$ para teoremas de $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$. El problema que ataca Meyer (2021b, p.355) es si existen ecuaciones secundarias que puedan ser probadas en $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ pero no en $\mathbf{R}^{\mathrm{C}}$. Tres aclaraciones previas:

- Hay que distinguir dos subconjuntos del conjunto de fórmulas secundarias, a saber, "the *ideal* of secondary equations and the *filter* of secondary unequations" (Meyer 2021b, p.351). Mantenemos la denominación en inglés y definimos el conjunto ⊤-*ideal* como aquel al que pertenecen las fórmulas de $L^{\#}$ que en $\mathbf{R}^{\#}$

tienen ⊤ como consecuencia. El conjunto ⊥-*filter* se define como aquel al que pertenecen las fórmulas de $L^{\#}$ que en $\mathbf{R}^{\#}$ son consecuencia de ⊥[162].

- Por otro lado, Meyer (2021b, p.353) denomina fórmula secundaria fuerte a cada fórmula tipo ▼▲A o ▲▼A. Las primeras son equivalentes a ⊤∧(A∨⊥) y todas son consecuencia de ⊤∧⊥, la cual es equivalente a ▼▲⊥. ⊤ es una fórmula tipo ▼▲A dado que es equivalente a ▼▲⊤. El conjunto de fórmulas tipo ▼▲A está linealmente ordenado por la consecuencia sintáctica de $\mathbf{R}^{\#}$. El conjunto de fórmulas secundarias fuertes está cerrado bajo las conectivas clásicas.
- Dado el tratamiento anterior de las fórmulas secundarias fuertes, $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ es un subsistema de $\mathbf{R}^{\#}$ ya que permite establecer una traducción de $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ a $\mathbf{R}^{\mathrm{C}}$. Meyer (2021b, p.355) define la traducción τ del siguiente modo. Dada una fórmula A ∈ L^{C}, si A es una ecuación, entonces:
  - τA es ▲A
  - τ(A∧B) es τA∧τB
  - τ(¬A) es τ ¬A
  - τ(∀*x*A) es ∀*x* τA

No existen ecuaciones secundarias que puedan ser probadas en $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ pero no en $\mathbf{R}^{\mathrm{C}}$ si se demuestra que toda ecuación secundaria que se pueda probar en $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ es una fórmula secundaria en $\mathbf{R}^{\#}$. Dada la traducción τ, Meyer (2021b, pp.355, 356) prueba que para toda A ∈ L^{C} son equivalentes las cláusulas:

- A se puede probar en $\mathbf{C}^{\#}$
- τA se puede probar en $\mathbf{C}^{\#}$
- τA se puede probar en $\mathbf{R}^{\#}$

Este conjunto de cláusulas equivalentes es, a diferencia del anterior conjunto de cláusulas equivalentes, un homomorfismo del álgebra de L^{C} a sí mismo que permite conservar el conjunto de teoremas y el de no-teoremas de $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ en $\mathbf{R}^{\mathrm{C}}$ mediante la traducción. No obstante, es el anterior conjunto de cláusulas equivalentes con el que se pueden identificar las divergencias entre $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ y $\mathbf{R}^{\mathrm{C}}$.

[162] Por el contrario, el conjunto ⊤-*filter* es el conjunto de teoremas de $\mathbf{R}^{\#}$ y el conjunto ⊥-*ideal* es el de fórmulas refutables. La incompletud de la aritmética puede formularse como la existencia de fórmulas que no pertenecen a ⊤-*filter* ni a ⊥-*ideal*.

El siguiente paso que da Meyer (2021b, pp.356-358) consiste en establecer un método para discriminar las fórmulas tipo ▼A de las fórmulas tipo ▲A. Identifica el conjunto ⊤-*ideal* con el conjunto de fórmulas tipo ▼A y el conjunto ⊥-*filter* con el de fórmulas tipo ▲A. Para establecer el método, Meyer (2021b, pp.356-357) define una *asignación canónica* α de las fórmulas de $L^{\#}$ a {+1, -1}. Para la definición de α emplea el mínimo ⊓ y el máximo ⊔ y la inversa - aritméticos:

- Si A es una fórmula atómica tipo $T = U$, entonces αA = -1
- α(¬A) = -αA
- α(A∧B) = αA ⊓ αB
- α(A∨B) = αA ⊔ αB
- α(A⊃B) = -αA ⊔ αB
- α(∀xA) = αA
- α(∃xB) = αA
- α(A×B) = αA, si αA = αB
- α(A→B) = αB, si αA ≠ αB

Con la asignación canónica Meyer (2021b, pp.357-358) prueba como teorema que, dada una fórmula A ∈ $L^{\#}$:

- Si αA = -1, entonces A es una fórmula tipo ▼A
- Si αA = +1, entonces A es una fórmula tipo ▲A

Y si A ∈ L^{C}, entonces:

- αA = -1 sii A es una fórmula tipo ▼A
- αA = +1 sii A es una fórmula tipo ▲A
- Si αA = +1 sii, entonces A puede probarse en $\mathbf{C}^{\#}$ sii puede probarse en $\mathbf{R}^{\#}$.

BIBLIOGRAFÍA

Ackermann, W. (1956). Begrundung einer strengen Implik. *Journal of Symbolic Logic*, 21, pp. 113-128.

Alonso, E. (2007). *Sócrates en Viena. Una biografía intelectual de Kurt Gödel*. España: Montesinos.

Anderson, A. R. (1959). Completeness theorems for the systems E of entailment and EQ of entailment with quantification. *Technical Report*, 6, Contracto SAR/Nonr-609(16), Office of Naval Research, New Haven.

Anderson, A. R. y Belnap, N. D. (1962). The Pure Calculus of Entailment. *The Journal of Symbolic Logic*, 27(1), pp. 19-52.

Anderson, A. R. y Belnap, N. D. (1975). *Entailment: The Logic of Relevance and Neccessity*. Vol. I. Princeton: Princeton University Press.

Barwise, J. (1993). Constraints, channels and flow of information. En Aczel, P., Katagiri, Y. y Peters, S. (eds.) *Situation Theory and its Applications*. Vol. III. Stanford: CSLI.

Barwise, J. y Perry, J. (1983). *Situations and Attitudes*. Cambridge: MIT Press.

Beall, J. C. y Restall, G. (2000). Logical pluralism. *Australasian Journal of Philosophy*, 78(4), 475-493.

Beall, J. C. y Restall, G. (2001). Defending Logical Pluralism. En Woods, J. y Brown, B. (eds.). *Logical Consequence: Rival Approaches Proceedings of the 1999 Conference of the Society of Exact Philosophy*. Stanmore: Hermes. 1-22.

Beall, J. C. y Restall, G. (2006). *Logical pluralism*. Oxford: Clarendon Press.

Belnap, N. D. (1960). Entailment and Relevance. *The Journal of Symbolic Logic*, 25(2), pp. 144-146.

Belnap, N. D. (1960). EQ and the first order functional calculus. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 6, pp.217-218.

Belnap, N.D. y Dunn, J.M. (1981). Entailment and the disjunctive syllogism. En Fløistad, G. (ed.) *Contemporary philosophy. A new survey*. Dordrechr: Martinus Nijhoff Publishers. 337-366.

Bernays, P. (1922). Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik. *Die Naturwissenschaften*, 10, pp. 93-99. Trad en Mancosu, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert; The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Nueva York: Oxford University Press.

Berto, F. y Jago, M. (2019). *Impossible worlds*. Oxford: Oxford University Press.

Berto, F. y Restall, G. (2019). Negation on the Australian Plan. *Journal of Philosophical Logic*, 48(6), pp.1119-1144.

Blanchette, P. (1996). Frege and Hilbert on Consistency. *Journal of Philosophy*, 93(7), pp.317-336.

Blanchette, P. (2018). The Frege-Hilbert Controversy. En Zalta, E. (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Bolzano, B. (1972 [1837]). *Theory of Science*. Berkeley: University of California Press.

Bueno, O. y Shalkowski, S. (2009). Modalism and logical pluralism. *Mind*, 118, pp. 295-321.

Burgess, J. P. (1981). Relevance: A fallacy? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22, pp.97-104.

Carnap, R. (1934). *Logische Syntax der Sprache*. Viena: Springer.

Carnap, R. (1947). *Meaning and Necessity*. Chicago: The University of Chicago Press.

Carnap, R. (1950). Empiricism, semantics, and ontology. *Revue Internationale de Philosophie*, 4, pp. 20-40.

Church, A. (1951). The Weak Theory of Implication. En Menne, A. Wilhelmy, A. y Angsil, H. (eds.) *KontrolIiertes Denken: Untersuchungen zum Logikkalkül und der Logik der Einzelwissenschaften*. Múnich: Kommissions-verlag Karl Alber. pp. 22-37.

Copeland, B. J. (1979). On when a semantics is not a semantics: Some reasons for disliking the Routley-Meyer semantics for relevance logic. *Journal of Philosophical Logic*, 8(1), pp.399-413.

Dunn, M. (1974). A 'Gentzen' System for Positive Relevant Implication. *Journal of Symbolic Logic*, 38, pp.356-357.

Dunn, M. (1976). Intuitive semantics for first-degree entailments and 'coupled trees'. *Philosophical Studies*, 29, 149–168.

Dunn, M. (1993). Star and perp. *Philosophical Perspectives*, 7, pp.331-357.

Epstein, R. (1979). Relatedness and Implication. *Philosophical Studies*, 36, pp.137-173.

Ferguson, T. M y Priest, G. (2021). Meyer's Relevant Arithmetic: Introduction to the Special Issue. *Australasian Journal of Logic*, 18(2), pp.132-145.

Fine, K. (1988). Semantics for Quantified Relevance Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 17, pp.27-59.

Fine, K. (1989). Incompleteness for Quantified Relevance Logic. En Norman, J. y Sylvan, R. (eds.) *Directions in Relevant Logic*. Dordrecht: Kluwer.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a. S.: Louis NebertFriedman.

Friedman, H. y Meyer, R. M. (1992). Whither relevant arithmetic? *Journal of Symbolic Logic*, 57(3), pp.824-831.

Gabbay, D. M. (1996). *Labelled Deductive Systems*. Oxford: Oxford University Press.

Girard, P. y Weber, Z. (2015). Bad Worlds. *Thought: A Journal of Philosophy*, 4(2), pp.93-101.

Goldblatt, R. (1974). Semantic analysis of orthologic. *Journal of Philoophical Logic*, 3, pp.19-35.

Grice, J. P. (1975). Logic and Conversation. En Davidson, D. y Harman, G. (eds.) *The Logic of Grammar*. California: Dickenson Publishing Company.

Haack, S. (1996). *Deviant Logic, Fuzzy Logic. Beyond the Formalism*. Chicago: The University of Chicago Press.

Harré, R. y Sagüillo, J. M. (2001). *El movimiento antimetafísico del siglo XX*. Madrid: Akal.

Hartonas, C. y Dunn, M. (1997). Stone Duality for Lattices. *Algebra Universalis*, 37, pp.391-401.

Henkin, L. (1949). The Completeness of the First-Order Functional Calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 14(3), pp.159-166.

Heyting, A. (1930). Die formalen Regeln der intuitionistischen Logic. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenchaften*, pp.42-56.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner.

Hilbert, D. (1905). Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. En Krazer, A. (ed.) *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*. Leipzig: Teubner.

Hilbert, D. (1918). Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen*, 78, pp.405-415.

Hilbert, D. (1922). Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung. *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, 1, pp.157-177. Trad. en Ewald, W. B., Jr. y Ewald, W. B. (2007). *From Kant to Hilbert*. Vol. 2. Oxford: Oxford University Press.

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95, pp. 161–190.

Hilbert, D. y Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlín: Springer.

Israel, D. y Perry, J. (1990). What is information? En Hanson, P. P. (ed.) *Information, Language and Cognition*. Vancouver: University of British Columbia Press.

Kleene, S. C. (1952). *Introduction to Metamathematics*. North-Holland: NewYork.

Kremer, P. (1999). Relevant identity. *Journal of Philosophical Logic*, 28(2), pp.199-222.

Kripke, S. (1963). Semantical Analysis of Modal Logic I. Normal Propositional Calculi. *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9(5-6), pp. 67-96.

Kripke, S. (1965a). Semantical analysis if intuitionist logic I. En Crossley, J. N. y Dummett, M. (eds.) *Formal Systems and Recursive Functions*. Ámsterdam: North Holland.

Kripke, S. (1965b). Semantical analysis if intuitionist logic II. En Addison, J., Henkin, L. y Tarski, A. (eds.) *The Theory of Models*. Ámsterdam: North Holland.

Lewis, C I. y Langford, C. H. (1932). *Symbolic logic*. Nueva York: The Century Co.

Lewis, D. (1986). *On the Plurality of Worlds*. Oxford: Oxford University Press.

MacFarlane, J. (2005). Making sense of relative truth. *Proceedings of the Aristotelian Society*, 105, pp. 321-39.

MacFarlane, J. (2009). Nonindexical contextualism. *Synthese*, 166, pp. 231-50.

MacFarlane, J. (2014). *Assessment Sensitivity: Relative truth and its applications*. Oxford: Oxford University Press.

Manzano, M. (1996). *Extensions of First Order Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Manzano, M. (2004). *Lógica, lógicas y logicidad*. Proyecto Summa Logicae en el Siglo XXI.

Manzano, M. y Aranda, V. (2022). Many-Sorted Logic. En Zalta, E. y Nodelman, U. (eds.) T*he Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Mares, E. (1995). A star-free semantics for **R**. *The Journal of Symbolic Logic*, 60, pp.579-590.

Mares, E. (2000). Even dialetheists should hate contradictions. *Australasian Journal of Philosophy*, 78, pp.503-516.

Mares, E. (2004). *Relevant Logic: A Philosophical Interpretation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mares, E. D. (1992). Semantics for relevance logic with identity. *Studia Logica*, 51(1), pp.1-20.

Meyer, R K. (1998). ⊃E Is Admissible in "True" Relevant Arithmetic. *Journal of Philosophical Logic*, 27(4), pp.327-351.

Meyer, R. K. (1974). New axiomatics for relevant logics, I. *Journal of Philosophical Logic*, 3(1/2), pp.53-86.

Meyer, R. K. (1976). Relevant arithmetic. *Bulletin of the Section of Logic*, 5, pp.133-137.

Meyer, R. K. (1985). Proving semantical completeness "relevantly" for R. *Logic Research Paper RSSS Australian National University*, 23.

Meyer, R. K. (2021a). Arithmetic Formulated Relevantly. *The Australasian Journal of Logic*, 18(5), pp.154-288.

Meyer, R. K. (2021b). The Consistency of Arithmetic. *The Australasian Journal of Logic*, 18(5), pp.289-379.

Meyer, R. K. y Martin, E. (1986). Logic on the australian plan. *Journal of Philosophical Logic*, 15 (3), 305-332.

Meyer, R. K. y Mortensen, C. (2021). Inconsistent Models for Relevant Arithmetics. *The Australasian Journal of Logic*, 18(5), pp.380-400.

Meyer, R. y Routley, R. (1973). Classical relevant logic I. *Studia Logica*, 32, pp.51-68.

Moh, S.-K. (1950). The deduction theorems and two new logical systems. *Methodos*, 2(5), pp. 56–75.

Paoli, F. (2002). *Substructural Logics: A Primer*. Dordrecht: Kluwer.

Paoli, F. (2007). Implicational paradoxes and the meaning of logical constants. *Australasian Journal of Philosophy*, 85(4), 553–579.

Prawitz, D. (1977). Meaning and Proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic, *Theoria*, 43, pp.2-40.

Priest, G. (1992). What is a Non-Normal World? *Logique et Analyse* 35, pp.291-302.

Priest, G. (2001). Logic: One or Many? En Woods, J. y Brown, B. (eds.). *Logical Consequence: Rival Approaches Proceedings of the 1999 Conference of the Society of Exact Philosophy*. Stanmore: Hermes. 23-28.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is*. Cambridge: Cambridge University Press.

Priest, G. y Sylvan, R. (1992), Simplified Semantics for Basic Relevant Logics. *Journal of Philosophical Logic*, 21, 217–32.

Prior, A. N. (1960). The Runabout Inference-Ticket. *Analysis*, 21, pp.38-39.

Prior, A. N. (1964). Conjunction and Contonktion Revisited. *Analysis*, 24, pp.191-195.

Putnam, H. (1968). Is Logic Empirical? *Boston Studies in the Philosophy of Science*, 5, 216-241.

Quine, W. V. O. (1951). Two dogmas of Empiricism. *Philosophical Review*, 60, pp.20-43.

Quine, W. V. O. (1960). *Word and Object*. Nueva York: Wiley.

Quine, W. V. O. (1960a). Carnap and Logical Truth. *Synthese*, 12.

Quine, W. V. O. (1968). Ontological Relativity. *Journal of Philosophy*, 65, pp.185-212.

Quine, W. V. O. (1970). *Philosophy of Logic*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Read, S. (1981). Validity and the intensional sense of 'and'. *Australasian Journal of Philosophy*, 59, 301-307.

Read, S. (1983). Burgess on Relevance: A Fallacy Indeed. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(4), 473-481.

Read, S. (1988). *Relevant Logic: A Philosophical Examination of Inference*. Oxford: Wiley-Blackwell.

Read, S. (2006). Monism: The One True Logic. En Vidi, D. y Kenyon, T. (eds.), *A Logical Approach to Philosophy: Essays in Memory of Graham Solomon*. Países Bajos: Springer.

Read, S. (2012). *Relevant Logic: A Philosophical Examination of Inference*. [Edición electrónica y corregida de Read (1988)]

Restall, G. (1996). Information flow and relevant logics. En Seligman, J. y Westerstoahl, D. (eds.) *Logic, Language and Computation*. Vol. I. Stanford: CSLI.

Restall, G. (2000). *An Introduction to Substructural Logics*, Londres: Routledge.

Restall, G. (2006). Relevant and Substructural Logics. En Gabbay, D. y Woods, J. *Handbook of the History and Philosophy of Logic: Logic and the Modalities in the Twentieth Century*. Vol. 7. Ámsterdam: Elsevier. 289-398.

Routley, R. (1980). Problems and Solutions in the Semantics of Quantified Relevant Logics, I. En Arruda, A., Chaqui, R. y da Costa, N. (eds.) *Mathematical Logic in North America*. Ámsterdam: North-Holland.

Routley, R. (1984). The American plan completed: Alternative classical-style semantics, without stars, for relevant and paraconsistent logics. *Studia Logica*, 43, 131–158.

Routley, R. and Routley, V. (1972), The Semantics of First Degree Entailment. *Noûs*, 6, 335-95.

Routley, R. y Meyer, R.K. (1972a). The Semantics of Entailment II. *Journal of Symbolic Logic*, 1(1), 53-73.

Routley, R. y Meyer, R.K. (1972b). The Semantics of Entailment III. *Journal of Symbolic Logic*, 1(2), 192-208.

Routley, R. y Meyer, R.K. (1973). The Semantics of Entailment. En Leblanc, H. (ed.), *Truth, Syntax and Modality: Proceedings Of The Temple University Conference On Alternative Semantics*. Ámsterdam: North-Holland. 199-242.

Shapiro, S. (2014). *Varieties of Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Sieg, W. (2013). *Hilbert's Programs and Beyond*. Nueva York: Oxford University Press.

Standefer, S. (2021). Identity in Mares-Goldblatt Models for Quantified Relevant Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 50(6), pp.1389-1415.

Swoyer, C. (2010). Relativism. En Zalta, E. (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Tarski (1933 [1983]). The Concept of Truth in Formalized Languages. En Tarski, A. (aut.) y Corcoran (ed.) *Logic, Semantics and Metamathematics*. Indianapolis: Hackett.

Tarski, A. (1936 [1983]). On the concept of logical consequence. En Tarski, A. (aut.) y Corcoran (ed.) *Logic, Semantics and Metamathematics*. Indianapolis: Hackett.

Tarski, A. y Vaught, R. (1956). Arithmetical extensions of relational systems. *Compositio Mathematica*, 13, pp. 81-102.

Terrés Villalonga, P. (2019). *Substructural Logics and Pragmatic Enrichment*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

Urquhart, A. (1972). Semantics for relevant logics. *The Journal of Symbolic Logic*, 37, pp.159-169.

van Benthem, J. (1979). What is dialectical logic? *Erkenntnis*, 14, pp.333-347.

Walton, D. (1982). *Topical Relevance in Argumentation*. Filadelfia: John Benjamins Publishing Co.

Walton, D. (1996). *Argumentation Schemes for Presumptive Reasoning*. Nueva Jersey: Erlbaum.

Walton, D. (2004). *Relevance in Argumentation*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Weber, Z. (2021). Relevant Arithmetic and Mathematical Pluralism. *The Australasian Journal of Logic*, 18(5), pp.569-596.

Williamson, T. (1994). *Vagueness*. Londres: Routledge Publishing Company.

Wittgenstein, L. (2013). *Tractatus lógico-philosophicus*. Madrid: Tecnos.

Wright, C. (2008). Relativism about truth itself: haphazard thoughts about the very idea. En García-Carpintero, M. y Kölbel, M. (eds.) *Relative Truth*. Oxford: Oxford University Press.