Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años[1]

Mónica Ramírez García
monica.ramirez@edu.ucm.es
Universidad Complutense de Madrid

Carlos de Castro Hernández
carlos.decastro@uam.es
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *Describimos una trayectoria de aprendizaje de la multiplicación y la división con niños de 4 a 7 años. Para ello, definimos las trayectorias de aprendizaje y valoramos la importancia de su consideración en los primeros años. Después, mostramos las trayectorias a través de una experiencia desarrollada en un colegio con niños de 4 a 7 años. Los niños desarrollan estrategias informales de modelización directa para resolver problemas de multiplicación y división de complejidad creciente, mostrando su evolución en el uso de representaciones, materiales manipulativos y en el proceso de simbolización.*
Palabras clave: *Educación infantil, división, multiplicación, resolución de problemas, trayectorias de aprendizaje.*

Learning trajectories for multiplication and division from four to seven years

Abstract: *We describe a learning trajectory for multiplication and division with children from four to seven years. To this end, we define learning trajectories and value the importance of reflecting on them in the early years. Then we show the trajectories through an experience developed in a school with children from four to seven years. Children develop informal direct modeling strategies to solve multiplication and division problems of increasing complexity, showing their evolution in the use of representations, manipulatives and in the process of symbolization.*
Keywords: *Early childhood, division, multiplication, problem solving, learning trajectories.*

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo trata sobre el aprendizaje de la multiplicación y la división de un modo algo diferente al habitual, pues se centra en el aprendizaje informal de dichas operaciones que tiene lugar (o podría tenerlo) entre los 4 y los 7 años, antes de comenzar con el estudio formal de las mismas.

---

[1] Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 31*(3), 41-56.

Para comenzar, parece oportuno establecer un marco curricular de referencia que centramos, por brevedad, en la multiplicación. Con respecto a esta operación, en el currículo de educación primaria de la Ley Orgánica de Educación (LOE) (MEC, 2007) se proponía la “construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10” (p. 31557) para el primer ciclo de primaria (primer y segundo cursos) y la “construcción y memorización de las tablas de multiplicar” (p. 31559) para el segundo ciclo (tercero y cuarto cursos de primaria). La reciente orden que establece el nuevo currículo de primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte incluye la “iniciación a la construcción de las tablas de multiplicar” (MEC, 2014, p. 34069) en primer curso. Precisando más el contenido de esta “iniciación”, el borrador del currículo de la Comunidad de Madrid propone la memorización de las tablas de multiplicar del 0, 1, 2 y 5 en primer curso de educación primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2014). Resumiendo, la línea que marcan los actuales cambios legislativos es la de adelantar un año la memorización de algunas de las tablas de multiplicar. Esta opción puede resultar polémica, puesto que resulta antitética con otros planteamientos curriculares recientes de gran prestigio, como la propuesta de los *Focos Curriculares* (CCSSI, 2010), donde se recomienda para el cuarto grado de primaria que “los estudiantes usen su comprensión de la multiplicación para desarrollar una recuperación rápida [de la memoria] de las tablas de multiplicar” (p. 16).

Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) indican que los niños son capaces de resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y que la resistencia a presentarles estas situaciones en esta edad, puede provocar que no consigan dotar de significado, más adelante, al algoritmo que aprenderán en primaria (p. 9). Así, los niños deberían tener la oportunidad de construir significados propios de las operaciones aritméticas sin necesidad de (previamente a su) instrucción formal. En línea con este planteamiento, en este artículo describimos una *trayectoria de aprendizaje* que los maestros y maestras de educación infantil y de primer curso de primaria podrán seguir con sus alumnos para que construyan significados de la multiplicación y la división previamente al aprendizaje formal de dichas operaciones en segundo y tercer cursos.

Trayectorias de aprendizaje en educación matemática

Una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes: un objetivo, una progresión a través de la cual los niños van evolucionando hasta lograr dicho objetivo, y una serie de actividades de enseñanza o tareas vinculadas a cada nivel de pensamiento que ayudan a los niños a desarrollar niveles superiores de pensamiento y a alcanzar el objetivo propuesto (Clements y Sarama, 2009). El objetivo, en una trayectoria de aprendizaje, es una de las *grandes ideas matemáticas*, que ocupan un lugar privilegiado en el aprendizaje de las matemáticas, y se describen en importantes documentos curriculares (NAEYC y NCTM, 2013; NCTM, 2003, OCDE, 2005). Por ejemplo, “una gran idea matemática es que el conteo puede usarse para determinar cuántos hay en una colección” (Clements y Sarama, 2009, p. 3). Las progresiones evolutivas describen los pasos que los niños suelen seguir para lograr destreza y comprensión de un determinado tema matemático. Por ejemplo, para resolver problemas aritméticos verbales de estructura aditiva, los niños suelen pasar por estrategias de modelización directa, después de conteo y, finalmente, de uso de hechos numéricos básicos o derivados (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999). Se puede establecer una correspondencia entre estos tipos de estrategias y los niveles evolutivos en el aprendizaje de la adición establecidos por Fuson (1992). Clements y Sarama (2009) se refieren a estas progresiones como *caminos de aprendizaje*. Por último, ligadas estrechamente a los niveles de pensamiento, hay conjuntos de tareas que conformarían un *camino de enseñanza* establecido con el fin de facilitar la progresión de los niños a lo largo del correspondiente *camino de aprendizaje*.

El concepto de trayectoria de aprendizaje ha tenido un largo recorrido en la educación matemática desde su origen en 1995. Se puede profundizar en esta idea, su origen, y sus diferentes acepciones y usos en los trabajos de Gómez, González y Romero (en prensa) y de Gómez y Lupiáñez (2007).

En la posición conjunta sobre el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años (NAEYC y NCTM, 2013, p. 7), entre las orientaciones que se dan para las propuestas para el aula está "asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales". En este punto del documento se hace referencia explícita a la importancia de las trayectorias de aprendizaje como referencia para guiar la enseñanza.

Las trayectorias de aprendizaje y su fundamentación en la investigación

En este apartado queremos incidir en una idea que nos parece relevante: las trayectorias de aprendizaje deben estar sólidamente basadas en la investigación en sus tres componentes (objetivo, camino de aprendizaje y camino de enseñanza). Daro, Mosher y Corcoran (2011) proponen ejemplos de trayectorias de aprendizaje entre las cuales figura un marco para el aprendizaje de la multiplicación (p. 81). En este trabajo, por brevedad, tomamos, a modo de ejemplo, la división para ilustrar la conexión de las trayectorias con los resultados de investigación. Se puede constatar que la experiencia que relataremos en el apartado siguiente está basada en estas referencias teóricas.

Clements (2004) indica que el *particionamiento*, operación de descomponer un conjunto de objetos en varios conjuntos de igual tamaño, es una idea fácilmente comprensible para los niños, que surge en situaciones de reparto alrededor de los 3 años de edad. También a los tres años pueden dividir una colección en conjuntos iguales de un cardinal dado, si los subconjuntos son muy pequeños (división medida). Muchos niños de 4 o 5 años pueden trabajar con números mayores inventando una estrategia de correspondencia uno a uno para dividir la colección inicial en subconjuntos iguales. La idea es fundacional para todos los tipos de situaciones multiplicativas y de división medida (donde se conoce el número de objetos en cada grupo) y de división partitiva (donde se conoce el número de grupos). Pero las complejidades de encontrar soluciones exactas con números mayores, excepto mediante ensayo y error y a través de la reflexión sobre una serie de acciones repetidas, hacen que esta idea sea mejor captada en detalle en cursos superiores (Clements, 2004, pp. 24-25). Precisando acerca del tamaño de las cantidades en los problemas, Clements (2004, p. 36) indica que a los 4 años los niños pueden utilizar estrategias informales para repartir hasta 10 objetos entre dos niños y que a los 5 años son capaces de repartir hasta 20 objetos en partes iguales entre 3, 4 o 5 personas, y de formar, con hasta 20 objetos, grupos iguales de 2 a 5 objetos, determinando el número total de grupos. Con 6 años, manejan cantidades superiores, de hasta 100, repartiéndolas entre hasta 10 personas y agrupándolas en grupos iguales de hasta 10 objetos.

Dentro de nuestra línea de trabajo sobre resolución de problemas aritméticos verbales en educación infantil, hemos observado en trabajos anteriores cómo los niños resuelven problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división medida (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012), problemas de reparto igualatorio (López y De Castro, 2014), de comparación multiplicativa, de multiplicación y división (De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009) y de descomposición factorial (De Castro y Hernández, 2014). Todos estos trabajos se han realizado con niños de 5-6 años, en último curso de educación infantil. Recomendamos su lectura como complemento a este artículo, por versar sobre problemas de tipos diferentes a los del presente trabajo, que no se plantean habitualmente en educación infantil. En este artículo, nuestro objetivo es mostrar una panorámica más amplia en cuanto al rango de edad, sobre los problemas de estructura multiplicativa, abarcando desde los 4 a los 7 años, e incluyendo en primer curso de primaria problemas de multiplicación y división agrupamiento con grupos de diez, para vincular los problemas de estructura multiplicativa con el concepto de decena (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997; Ramírez y De Castro, 2014).

2. DESCRIPCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS A LO LARGO DE TRES CURSOS: 4-5, 5-6 Y 6-7 AÑOS

En este apartado, describimos el desarrollo de varias sesiones de talleres de resolución de problemas, realizadas en el CEIP Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real (Madrid), con niños pertenecientes a tres cursos diferentes, con edades comprendidas entre los cuatro y los siete años. La metodología que seguimos en estos talleres está descrita en trabajos anteriores (De Castro y otros, 2009; De Castro y otros, 2012). De un modo muy sucinto, planteamos problemas aritméticos basados en la lectura de un cuento (para favorecer la comprensión del enunciado), sin enseñanza previa, y dando una libertad absoluta en el uso de materiales para resolver los problemas razonando con la ayuda de objetos (cubos encajables, materiales manipulativos, dibujos, etc.). Al comentar el trabajo de los alumnos, nos hemos centrado en mostrar la evolución que se observa a lo largo de estos tres cursos, de las estrategias, uso de materiales y representaciones para los problemas de multiplicación y división.

Multiplicación en un aula de 4-5 años

En la resolución de problemas con niños de 4 y 5 años es importante que el tamaño de los números sea bajo, para adaptarnos a la capacidad de conteo de los pequeños (Clements, 2004). La referencia que tomamos es que, hasta mitad de curso, no superemos los 6 objetos. En nuestra experimentación, uno de los primeros problemas está basado en la lectura del cuento “Chivos chivones” (González y Fernández, 2007). A lo largo del cuento, los tres chivos, y sus cuernos, aparecen y son mencionados continuamente. La lectura repetida del cuento (en varios días diferentes) permite a los niños imaginar la situación descrita en el enunciado del problema. Así, a partir del cuento, planteamos a los niños el siguiente problema: Si había tres chivos, y cada uno tiene dos cuernos. ¿Cuántos cuernos tienen en total entre los tres? Al trabajar con cantidades tan bajas, que pueden representarse con los dedos, algunos niños resuelven ya el problema en el momento de la lectura y el planteamiento del problema, todavía en la “asamblea” (Figura 1a). Algunos niños resuelven el problema mediante un dibujo. Guillermo representa los cuernos de los chivos utilizando tres colores diferentes para diferenciar qué cuernos corresponden a cada chivo (Figura 1c). En la Figura 1b, vemos cómo la maestra sujeta la hoja de trabajo a Guillermo y le va preguntando sobre el significado de sus representaciones. Con este apoyo, Guillermo va explicando cómo ha resuelto el problema.

Figura 1. Lectura del cuento y momento de explicación de Óscar.

Algunos niños dan el resultado, pero la maestra está interesada en que todos comprendan la situación, y que los que creen que han resuelto el problema, lo comprueben en el trabajo individual, y le expliquen cómo lo han hecho. Se produce la siguiente conversación:

Bea: A ver, ¿alguien se acuerda de cómo era el problema?
Óscar: Éstos [Pone con los dedos seis, que es el resultado].
Bea: Sí. Esa es la solución que tú crees. Seis, ¿no? Pero, ¿cuál era el problema?
Mario: Seis. El problema es seis [De nuevo, se refiere al resultado].
Guillermo: Dos cuernos en cada chivo.
Bea: En cada chivo y, ¿cuántos chivos hay?
Nerea: Seis.
Guillermo: Tres [Corrige a Nerea y lo indica poniendo tres con los dedos].

Bea: Tres, con dos cuernos en cada chivo, ¿cuántos cuernos hay en total entre los tres?
Nerea: Seis [Pone seis con los dedos].
Guillermo: Seis.
Bea: Ahora me decís por qué pensáis que son seis [Con "ahora", la maestra se refiere al momento en que, durante el trabajo individual, pase preguntando a cada niño cómo lo ha hecho].

Óscar resuelve el problema con el rekenrek. Este es un ábaco holandés, inventado en 1991 por Adrian Treffers, del Instituto Freudenthal, que se utiliza como modelo visual para la iniciación al cálculo. Óscar utiliza las cuentas de la varilla superior para representar los cuernos, y las cuentas de la varilla inferior para los chivos. En las dos primeras imágenes de la Figura 2, vemos que levanta dos dedos (cuernos) en su mano derecha y el pulgar de su mano izquierda (chivo). Interpretamos estos gestos con los dedos como una "segunda" representación, que refuerza la representación con el ábaco, y que Óscar hace para comprobar su procedimiento. Después, va añadiendo dos cuentas en la varilla de arriba por cada una en la varilla de abajo. Finalmente, cuando Beatriz (la maestra) pasa a su lado, Óscar separar las cuentas de la varilla inferior, que representan a los tres chivos, para enfatizar y explicar a la maestra la correspondencia dos a uno entre cuernos y chivos (Figura 2d).

Figura 2. Proceso de resolución/explicación de Óscar con el rekenrek.

División en un aula de 4-5 años

Basándonos en la lectura del cuento "¿A qué sabe la luna?" (Grejniec, 2004), planteamos el siguiente problema en el aula de 4-5 años: Si el ratón reparte seis trocitos de luna entre el zorro y la cebra, ¿cuántos trozos le puede dar a cada uno? En este problema damos por válida cualquier descomposición del seis, aunque observaremos ya la tendencia a los repartos equitativos. Enseguida empezamos a oír: "Ocho", "Siete". Beatriz repite el enunciado y de nuevo los niños dan estimaciones o intentan "adivinar el resultado": "Siete, "Dos", "Ocho", "No, no. Seis".

En la Figura 3, vemos el proceso de resolución de Nerea y de Diego. Los dos alumnos, y todos los que resolvieron este problema lo hicieron con cubos encajables, utilizando una estrategia de modelización directa: el "reparto" por unidades. Comienza por la representación del zorro y la cebra con los cubos negro y morado de la Figura 3b (Nerea), y el verde y naranja en la Figura 3d (Diego). A partir de ahí, se representan los trozos de luna con 6 cubos encajables y se van repartiendo uno a uno colocándose alternativamente junto a los cubos que representan al zorro y la cebra. Finalmente, se cuentan los cubos (trozos de luna) que hay junto a cada animal. En la Figura 3d, observamos cómo Diego mantiene ligeramente separados los cubos iniciales, que representan a los animales, de los cubos restantes, que representan trozos de luna, a fin de no confundirlos en el recuento final.

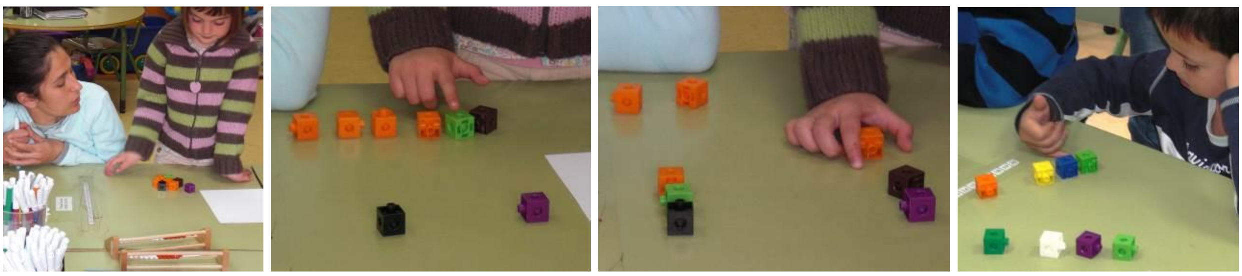

Figura 3. Proceso de resolución/explicación de Nerea y Diego.

Multiplicación en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, se plantea el problema de multiplicación: "¿Cuántos sándwiches de miel tiene que preparar mamá oso si hay seis osos y cada uno quiere dos sándwiches?". Al igual que ocurre en el caso de la división, los niños utilizan la misma estrategia básica que en 4-5 años, pero con números mayores, mayor variedad de materiales, y con presencia de representaciones simbólicas. Un aspecto que destacamos es que, en ausencia de instrucción sobre el proceso de resolución, algunas representaciones tienen un marcado acento personal, que dificulta que las personas que las ven puedan interpretarlas de forma sencilla. Así, en la Figura 4a, Joshua representa los 12 sándwiches y los 6 osos con tres filas de 6 cubos, donde la primera fila representa los osos y las restantes los sándwiches. Por el contrario, en el dibujo de Noelia (Figura 4b), se diferencian perfectamente las representaciones de ambas cantidades, y se aprecia el paso a la representación simbólica, con numerales escritos, de las cantidades.

Figura 4. Estrategia de Joshua y dibujo de Noelia.

Eloy utiliza cuentas con las que va formando un collar de 18 cuentas (Figura 5). Las 12 de la izquierda representan los sándwiches, y las 6 de la derecha representan los osos. En la Figura 5b, se observa la separación entre unas cuentas y otras. En la Figura 5a, Eloy va señalando, por cada cuenta de la derecha (un oso), dos cuentas a la izquierda (sándwiches). En la imagen se ve cómo señala la cuarta cuenta por la derecha con el índice, mientras que abarca las cuentas 7 y 8 con dos dedos. Al igual que en la estrategia de Joshua, observando el collar no resulta fácil imaginar, antes de la explicación de Joshua, cómo se ha utilizado esta representación para resolver el problema.


Figura 5. Estrategia de Eloy.

División en un aula de 5-6 años

En el aula de 5-6 años, planteamos el problema: "Si hay 15 montones de hierba, y 3 chivos, ¿Cuántos montones de hierba se come cada chivo?". Si en 4-5 años repartíamos 6 objetos entre 2, en este caso, el tamaño de dividendo y divisor van aumentando. De nuevo, el enunciado puede interpretarse como problema de división (reparto equitativo) o como problema de descomposición aditiva en tres sumandos. En la Figura 6a, observamos la misma estrategia que vimos en 4-5 años. Los niños tienen, durante dos cursos, varias ocasiones de adquirir el esquema básico de reparto de objetos, representando ambas cantidades que aparecen en el enunciado. No obstante, más allá de esta estrategia básica, comenzamos a ver variaciones interesantes, que dan cuenta del desarrollo infantil en estas edades. Por ejemplo, Lía (Figura 6b), tras aplicar la estrategia de modelización directa de reparto, representa el reparto con un dibujo, cosa que no suele ocurrir con 4 años. Empiezan a surgir soluciones en las que solo se representa una de las dos cantidades del enunciado, el dividendo o cantidad a repartir, formando una barra con 15 cubos y fraccionándola después en 3 barras iguales de 5 cubos. También surgen repartos no equitativos. Shakira representa los tres chivos en la esquina superior izquierda (Figura 6c), y luego da a los chivos mediano, grande y pequeño, cinco, seis y cuatro montones de hierba respectivamente.

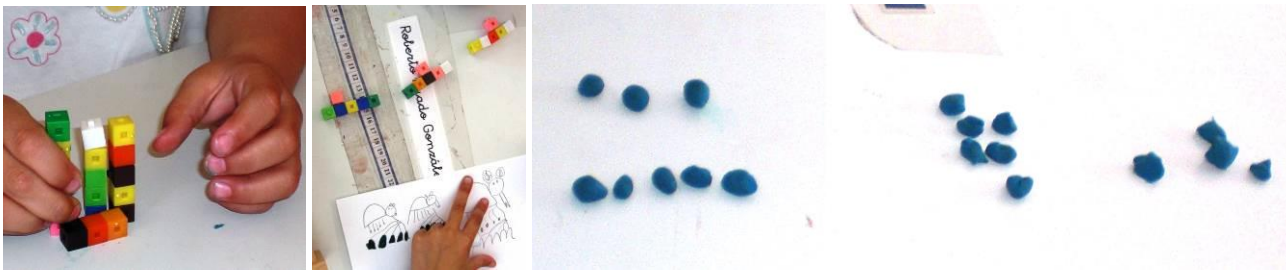

Figura 6. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (I).

A pesar de que la estrategia básica sigue siendo el reparto de objetos, otros materiales comienzan a usarse. Hugo no es capaz de realizar el reparto con la banda numérica (Figura 7a), pero al escuchar a Lía que da la solución de 5, lo comprueba contando 5 casillas, tres veces, hasta llegar a 15. En la Figura 7b, Roberto, tras resolver el problema con los cubos encajables, representa la solución (los tres grupos de 5) en el rekenrek. Más que un proceso de resolución, se trata de una traducción entre sistemas diferentes de representación para escribir el resultado. En la Figura 7c, aparece una carta de un alumno al final del taller a Ares (maestro en prácticas y malabarista, llamado por los pequeños "Ares malabares"). Esta carta muestra cómo el conocimiento de la lectoescritura propio del último curso de educación infantil se une a la capacidad de articular el propio pensamiento, para producir este mensaje escrito.

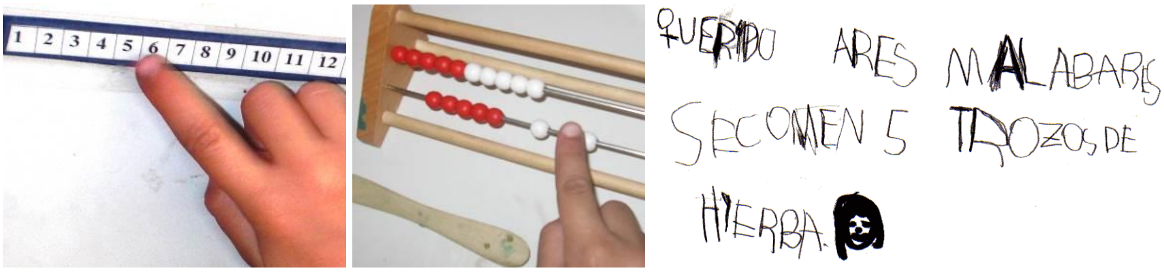

Figura 7. Evolución de las estrategias infantiles en problemas de división-reparto en 5-6 años (II).

Multiplicación en primer curso de primaria (6-7 años)

Ya dentro de la educación primaria, basándonos en el cuento "El gato tragón" (Núñez y Dumas, 2005), el problema planteado es: El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos brazos se comió el gato? La estrategia básica en este problema es de modelización directa (estrategia de *agrupamiento*). En el enunciado se habla de 7 grupos (cada niña cuenta como un "grupo" de dos brazos) con 2 elementos en cada grupo (los brazos). Los niños forman 7 grupos con 2 objetos en cada una y luego cuentan de uno en uno los objetos. Esta estrategia ya la hemos visto desde educación infantil (Figura 4), pero en la Figura 8 podemos observar variaciones de interés que muestran la evolución. Por ejemplo, separar claramente las representaciones de las dos cantidades (de niñas y de brazos) para facilitar el conteo del resultado (Figura 8a) o la escritura de números de dos cifras con la aparición del valor posicional. En la Figura 8b, vemos que el alumno escribe primero 41, que aparece tachado dos veces, para al final escribir el resultado correcto de 14.

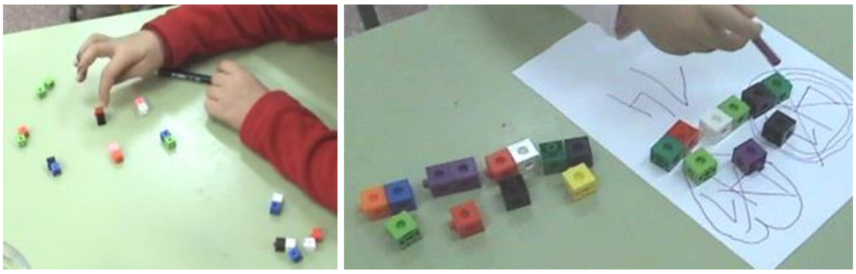

Figura 8. Agrupamiento según el número de grupos

Hay niños que utilizan los dedos para ir construyendo los grupos, añadiendo el número de elementos por grupo cada vez que se considera un grupo. En la Figura 9, un niño va añadiendo 2 dedos cada vez que cuenta una niña hasta completar las siete niñas. Podemos ver, de izquierda a derecha, cómo el alumno pone el dos de los brazos de la primera niña, después va añadiendo dos por cada niña, con lo que tendrá cuatro dedos, acción que no se ve en la secuencia de la Figura 9, y así sucesivamente, seis (otros dos brazos de otra niña), ocho, diez y, ya en la imagen, el doce (para lo cual tiene que quitar los cinco dedos de la mano izquierda), y el catorce, resultado final.

Figura 9. Agrupamiento según el número de grupos con dedos

También vemos esta estrategia en la tabla 100. Por cada niña, se van tapando con dos dedos dos numerales que representan los dos brazos de la niña. Tras repetir esta operación siete veces, el último numeral tapado (14) indica la solución del problema. En la Figura 10 observamos los tres primeros pasos de esta estrategia. El uso de la tabla 100 es un instrumento que facilita la transición de estrategias de modelización directa a estrategias de conteo basadas en la secuencia de numerales.

Figura 10. Agrupamiento según el número de grupos con Tabla 100

Las representaciones gráficas infantiles van evolucionando, incluyendo una mezcla de representaciones icónicas y simbólicas (con numerales) para el proceso de resolución. En la Figura 11a, Sergio representa las niñas con numerales y los brazos con puntos y resuelve el problema contando los puntos. En la derecha, mostramos el trabajo de otro niño donde la representación de las niñas posee un grado mayor de iconicidad. Los brazos aparecen numerados, de modo que el último numeral (14) indica el resultado (Figura 11b).

Figura 11. Estrategia de agrupamiento, gráfica, con símbolos escritos

Otra variedad de esta estrategia consiste en representar con un objeto cada grupo y contar cada objeto el número de veces que indica el número de elementos por grupo. En este problema, algunos niños representaron con 7 objetos el número de grupos (las niñas) y contaron cada uno de ellos dos veces (una por cada brazo) para alcanzar el resultado final.

Algunos alumnos han resuelto este problema mediante modelización directa haciendo 2 grupos de 7. En este problema hay 7 grupos (las niñas) con 2 elementos en cada grupo (los brazos), pero varios niños han representado un grupo de 7 por uno de los brazos de las 7 niñas y otro grupo de 7 por el otro brazo. Esta estrategia la hemos visto aplicada con el rekenrek, poniendo 7 cuentas en cada varilla, y en la tabla 100, saltando de la casilla del 7 a la del 14.

Un problema de división en primer curso de educación primaria

En primer curso de primaria se plantea un problema de estructura multiplicativa, de grupos iguales, de división partitiva. Basado en el cuento “Un regalo diferente”, el enunciado es: Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno? Todos los niños intentaron repartir de forma equitativa los buñuelos, aún sin que el enunciado lo indicase. La estrategia básica es la de *reparto*, de modelización directa (Figura 12).

Figura 12. Reparto de objetos de uno en uno contando inicialmente la cantidad total.

Esta estrategia se aplica con diferentes variaciones. Algunos niños cuentan primero los objetos a repartir, pero otros reparten sin contar inicialmente esta cantidad, y van comprobando, a cada paso del reparto, el total de lo repartido hasta alcanzar el total a repartir. Otra variación es el reparto en grupos, por ejemplo, de dos en dos o de tres en tres y, posteriormente, ajustando el reparto con los objetos sobrantes. Al ser un problema en el que se divide en dos grupos, muchos niños elaboraban una barra con 18 cubos, estimaban el punto medio para partirla en dos partes aproximadamente iguales, y luego comprobaban que en las dos partes resultantes hubiese el mismo número de cubos, comparando la longitud de las barras.

Un problema de multiplicación con grupos de diez en educación primaria

En primer curso de primaria planteamos problemas aritméticos de operaciones combinadas (multiplicación y suma) en los que nos dan el número de decenas y de unidades sueltas y debemos calcular el número total de unidades. Un problema de este tipo es: Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total? La estrategia básica para abordar este tipo de problemas consiste en formar con objetos tantos grupos de diez y unidades sueltas como se indica en el enunciado y después contar uno por uno los objetos. En la Figura 13, vemos la representación manipulativa y gráfica correspondiente a dicha estrategia. En un nivel más avanzado, los niños cuentan de diez en diez los grupos de diez, y luego de uno en uno las unidades sueltas: “10, 20, 30, 40, 41, 42, 43, 44, 45”.

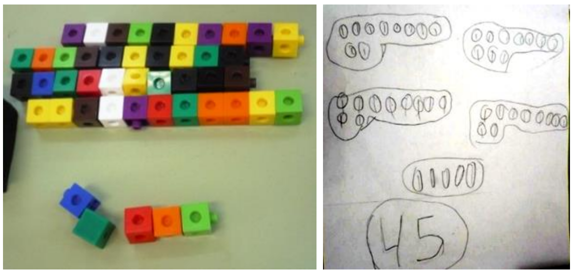

Figura 13. Representación de la estrategia de agrupamiento y juntar todos

Una variante de esta estrategia consiste en representar las cantidades con bloques de base 10. En la Figura 14a un niño ha representado 45 con 4 barras y 5 unidades. Igual que en el caso anterior, inicialmente los niños necesitan contar de uno en uno todas las unidades que componen las decenas como está haciendo el niño de la Figura 14b para saber la cantidad total. Más tarde, los niños cuentan de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades. Con la ayuda de la tabla 100, los niños cuentan de 10 en 10 (Figura 14c) el número de grupos que se indica en el problema, para después avanzar por unidades. Finalmente, las estrategias van evolucionando hasta mostrar un conocimiento del valor posicional y del concepto de decena. Cuatro grupos de 10, y 5 unidades sueltas son 45. Esta es la estrategia óptima esperada en este tipo de problemas que, como vemos, no se aplica desde el principio, sino que es el resultado de una larga evolución.

Figura 14. Agrupamiento y juntar todos con bloques de base 10

Un problema de división con grupos de diez en Educación Primaria

Para terminar, planteamos problemas de división agrupamiento, con grupos de diez, y con resto. Uno de estos problemas es: Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran? La estrategia básica se llama estrategia de medida. Es una estrategia de modelización directa que consiste en tomar 37 objetos, formar grupos de diez, contarlos, y contar después los objetos que quedan sin agrupar. En la Figura 15 seguimos todo el proceso.

Figura 15. Medida contando primero el total de elementos con objetos

Dentro del material de aula que ofrecemos a los alumnos suelen estar las cajas de huevos de diez. Los niños utilizan espontáneamente las cajas para resolver el problema introduciendo un cubo en cada huevo. Esto facilita la formación, el conteo de los grupos, y la visualización del concepto de decena (Figura 16). La misma estrategia se puede llevar a cabo con bloques de base 10, de modo que la solución del problema estará dada por el número de barras (grupos de 10, decenas) y cubos (unidades). Dado que el uso de materiales no está dirigido por los profesores, también se ven soluciones "mixtas", con uso simultáneo de cajas de huevos y bloques de base 10 (Figura 16c).

Otras estrategias para este tipo de problemas se apoyan en la tabla 100, donde se busca el número objetivo (37) y las filas completas representan decenas y las casillas individuales cuentan como unidades sobrantes. Finalmente, como estrategias más avanzadas, hay niños que utilizan el conteo a saltos de diez en diez y el conteo por unidades, sin ayuda de objetos. Para llegar a 37 huevos, cuentan 10, 20, 30, que son 3 cajas, y después 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, que son 7 huevos sueltos, llevando la cuenta de decenas y unidades sueltas con los dedos. La estrategia óptima, igual que en el apartado anterior, consiste en la aplicación directa del conocimiento del valor posicional, para determinar que 37 unidades son 3 decenas y 7 unidades sin agrupar.

Figura 16. Estrategia de *medida* con cajas de huevos de 10.

3. REFLEXIONES FINALES

En los talleres realizados se ha observado que, desde los 4 a los 7 años, la mayoría de los niños resuelven problemas de multiplicación y división utilizando estrategias informales de modelización directa, inventadas por ellos mismos, sin tener ningún conocimiento formal sobre dichas operaciones aritméticas. A través de la resolución de problemas hemos conseguido que los niños razonen y modelicen, y articulen sus ideas para comunicarlas al resto de la clase, pudiendo establecer así relaciones entre los conocimientos que tienen con los de los compañeros.

Los niños siguen, a lo largo de la trayectoria que hemos descrito para el aprendizaje de la multiplicación y la división, un *camino de aprendizaje* jalonado por estrategias de modelización directa, estrategias de conteo y uso del valor posicional (en los problemas con grupos de diez). A través de problemas, en los que se utilizan recursos (como el rekenrek, la tabla 100, las cajas de huevos de 10, o los bloques de base 10), se cuida el tamaño de los números, y se introducen elementos especiales (como los grupos de 10 en los problemas de estructura multiplicativa), se va conformando el *camino de enseñanza* que promueve la evolución de los niños a través del correspondiente camino de aprendizaje. El objetivo final es proporcionar la base informal de conocimiento adecuada para el aprendizaje de la multiplicación y la división, y la comprensión del concepto de decena (Ramírez y De Castro, 2014).

Volviendo a la introducción del artículo, en nuestra línea metodológica, pensamos que es preferible adelantar en el currículo experiencias que ayuden a desarrollar los conocimientos informales, más que anticipar conocimientos formales. Así, más que adelantar la memorización de las tablas de multiplicar a primero de educación primaria, abogamos por introducir situaciones en las de los niños puedan construir significados para la multiplicación y la división, desde los 4 años, para favorecer su posterior comprensión, como las que hemos mostrado en este artículo.

Dentro de los principios del NCTM (2003), el principio de enseñanza señala que “Una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien” (NCTM, 2003, p. 17). Este “conocer lo que los alumnos saben” como punto de partida, evocador de la idea de aprendizaje significativo, puede interpretarse de formas diversas. Cuando un maestro está en tercer curso de educación primaria, iniciando a los alumnos en la multiplicación, puede plantearse cuáles son los conocimientos previos sobre los cuales construir el aprendizaje formal de la división. Sin embargo, a nuestro parecer, el ideal sería que desde los 4 años, e incluso antes, todavía en la educación infantil, los maestros puedan ayudar a los niños a recorrer las trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división que hemos descrito en este trabajo. En este sentido, pensamos que la idea de *trayectoria de aprendizaje*, que hemos tratado de ejemplificar en este artículo, supone una de las aportaciones fundamentales de la didáctica de la matemática en los últimos 20 años, pues permite enfocar el trabajo del aula hacia las ideas matemáticas nucleares, abordándolas de un modo informal, tiempo antes de tener que afrontar su aprendizaje formal, favoreciendo así su aprendizaje significativo.

REFERENCIAS

Arriba, M. y Osuna, R. (2005). *Un regalo diferente*. Pontevedra: Kalandraka.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). Children’s mathematics: Cognitively guided instruction. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Intervention and Understanding in Children’s Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3-30.

Castro, E., Cañadas, M. C. Y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en el Infancia, 2*(2), 1-11.

CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Common Core State Standards Initiative. Recuperado el 15/11/2014 de: http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. In D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid (2014). Borrador del Currículo de Educación Primaria. Recuperado el 15-05-2014 de: http://www.feccoo-madrid.org/comunes/recursos/15708/1823565-Borrador_de_Curriculum_de_Educacion_Primaria.pdf

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. CPRE Research Report #RR-68. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. DOI: 10.12698/cpre.2011.rr68

De Castro C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73*(3), 33-42.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York, NY: Macmillan.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, *1*(2), 79-98.

Gómez, P., González, M.J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *18*(3), 319-338. http://www.ugr.es/local/recfpro/rev183COL7.pdf

González, O. y Fernández, F. (2007). *Chivos chivones*. Pontevedra: Kalandraka.

Grejniec, M. (2004). *¿A qué sabe la luna?* Pontevedra: Kalandraka.

López, M.E. y De Castro, C. (2014). Iniciación a los problemas de reparto igualatorio en educación infantil. *Épsilon, 31*(2), nº 87, 83-98.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE*, *173*, pp. 31487-31566.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, pp. 19349-19420.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014, 1 de mayo). Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa. *BOE, 106*, pp. 33827-34369.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Núñez, M. y Dumas, O. (2005). *El gato tragón*. Pontevedra: Kalandraka.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Revista de Didácticas Específicas, 11*, 40-66.

Ramos, M. (2004). *¡Mamá!* Barcelona: Corimbo.