REVISTA MATEMÁTICA HISPANO-AMERICANA

2.ª Serie. - Tomo I

MADRID
1926

das de Gauss y la representación conforme de superficies cualesquiera. Termina el capítulo con un párrafo donde inicia algunas cuestiones de la física de los cristales.

Los dos capítulos siguientes, VII y VIII, se refieren, el primero, a problemas que pueden resolverse por métodos de cálculo funcional y ecuaciones integrales, y el segundo, a las teorías moleculares con los teoremas fundamentales de la mecánica estadística y de la cuantista.

El capítulo IX se refiere a métodos gráficos para la integración, la resolución de ecuaciones algebraicas, las interpretaciones y representaciones geométricas de los fenómenos físicos con interpretación, en algunos casos, de las transformaciones geométricas, como ocurre, por ejemplo, en Óptica geométrica al pasar del espacio objeto al imagen. Menciona el método vectorial, y aun de él da ejemplos, terminando con un párrafo, más breve de lo que sería de desear, referente al cálculo con imaginarias complejas, tan útil y fecundo en las cuestiones donde intervenga la corriente alterna.

De cuanto llevamos dicho, es fácil deducir la bondad del libro, si bien nuestro esquema es pálida imagen del que forma su trama, y no dudamos en recomendar su lectura a físicos y matemáticos.

F. LORENTE DE NO.

CARLEMAN: (T.)—*Les fonctions quasi-analytiques*. Leçons professées au Collége de France. (Collection de monograpbies sur la théorie des fonctions, sous la direction de E. Borel). París. Gauthier-Villars et Cie, 1926.

Fué Borel quien hace unos treinta años fundó este nuevo capítulo, tan interesante y fecundo, de la teoría de funciones. Y precisamente por exigencias naturales, al ampliar convenientemente el concepto de función monógena, restringido hasta hace poco por las ideas de Weierstrass. Ya son clásicos los célebres resultados de Borel, en su idea de volver a la primaria noción establecida por Cauchy, demostrando mediante su capital distinción entre dominio (W) y dominio (C) que permite incluir las funciones analíticas en el sentido de Weierstrass, dentro del concepto más amplio de función monógena; en particular, una de estas funciones puede en ciertos casos prolongarse más allá de sus líneas singulares, infranqueables en los dominios (W). Y no sólo en estas investigaciones era urgente el estudio de funciones cuasi-analíticas, completamente determinadas en todo su dominio de definición, por el conocimiento de sus valores en una porción de él tan pequeña como sea; justamente en sus trabajos sobre ecuaciones en derivadas parciales, Hadamard ha podido plantear problemas análogos referentes a las funciones indefinidamente derivables de variables reales. En este libro del bien conocido Profesor Dr. Carleman, se exponen con suma maestría los principales resultados y fundamentales aplicaciones de toda esta teoría, a la cual tanto ha contribuído él con sus valiosas investigaciones personales. A pesar del limitado espacio de que disponemos para estas noticias bibliográficas, forzoso nos será dar una rápida ojeada a los principales capítulos de esta excelente obra, que por su estilo, estructura y claridad, puede servir de modelo de exposición, a la par que por su precisión y brevedad, como introdución para todo aquel que pretenda llevar alguna aportación original a este fecundo capítulo de la nueva teoría de funciones.

Después de una breve introducción en la que se plantean algunos problemas de teoría de funciones y sobre las soluciones de ecuaciones diferenciales, se estudian en los capítulos II y III, algunas propiedades de las cotas superiores de las derivadas sucesivas de las funciones y un importante lema sobre las funciones analíticas, referente a la condición para que sea idénticamente nula una función analítica definida en el semiplano $R(z) \geqq a$ y que satisface a ciertas desigualdades determinadas por dos sucesiones crecientes λ_n y β_n ($\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$) condición que se traduce en el hecho de que la serie $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\beta_\nu}$ sea divergente. Esto sentado, quedamos en situación de atacar y resolver los dos problemas fundamentales de la obra a que nos referimos, a saber: 1.° ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, para que C_A sea una función cuasi-analítica? 2.° Calcular efectivamente una función cuasi-analítica (de clase dada) mediante sus derivadas en un punto dado. Los números positivos $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ son tales que elegida la función $f(x)$ cuasi-analítica, ha de verificarse $|f^{(\nu)}(x)| < K^\nu A_\nu$, siendo K una constante que depende de $f(x)$. Estas clases de funciones las representa Carleman abreviadamente por C_A. Como primer paso para resolver estos problemas, se tienen los teoremas de Denjoy y Borel, cuya demostración es objeto del capítulo IV. Precisamente la respuesta de Denjoy es que la serie $\sum \frac{l}{\sqrt[\nu]{A^\nu}}$ sea divergente; Borel, dando más precisión al anterior resultado, exige que $\sum \frac{l}{\sqrt[n]{M_n}} < K$, siendo M_l la cota superior de $|F^{(l)}(x)|$.

En el capítulo siguiente aborda el estudio de las series asintóticas, demostrando primero la existencia de funciones con un desarrollo asintótico dado y pasando luego a la determinación de tales funciones. Utilizando estos resultados puede dar el Dr. Carleman en el capítulo VI la condición necesaria y suficiente para que sean cuasi-analíticas las funciones indefinidamente derivables de variables reales.

Fallada la primera cuestión planteada, es objeto de casi todo el siguiente capítulo la resolución de la segunda. Así se obtiene en él una representación analítica, mediante una sucesión de funciones acotadas, infinitamente derivables y soluciones de una cierta ecuación integral, planteada al resolver la cuestión de mínimo que el problema propuesto lleva consigo.

Los dos últimos capítulos están dedicados a las aplicaciones de la teoría, a las fracciones continuas de Stieltjes, y en particular, al problema de los momentos (dada una sucesión de constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ hallar una función no decreciente $F(x)$, que tenga una infinidad de puntos de crecimiento, y tal que

$$\int_0^\infty x^n \, dF(x) = c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)),$$

así como sus relaciones con las series $\sum \frac{A_n}{z - d_n}$ que se presentan tan frecuentemente en las investigaciones de Poincaré, Goursat, Pringsheim y otros, sobre la prolongación analítica y para formar funciones con espacios lagunares. Terminan la obra cinco notas en las que se aclaran algunos puntos del texto o se demuestran recursos incidentalmente utilizados en el curso de la exposición.

A pesar de predominar el carácter expositivo en este libro, no falta nunca en los diversos capítulos una enumeración racional de los problemas que con más urgencia reclaman solución, siempre completada con una bibliografía no demasiado abundante, pero fundamental.

T. R. BACHILLER.

GERMAY: (R. H. J.).—*Sur les équations intégrales.* (Extrait des *Mémoires de la Soc. Roy. des Sc. de Liége*, 3.e serie, tome XII). Bruxelles. 1926.

El Dr. Germay logra en esta Memoria demostrar dos importantes teoremas referentes a la convergencia uniforme de las soluciones de un sistema de ecuaciones integrales, cuando éste se obtiene como límite de una sucesión de otros sistemas definidos mediante las dos sucesiones uniformemente convergentes de las funciones que en ellos intervienen. A modo de preámbulo estudia primero detalladamente una forma particular de las ecuaciones, pasando al final a la forma general. En ambos casos establece de antemano con todo rigor la existencia de las soluciones de dichos sistemas. Es sabida la importancia que actualmente tiene en teoría de funciones, sobre todo, después de los memorables trabajos de Lebesgue, Borel y Baire, el estudio de las propiedades y caracteres invariantes en el paso al límite. En efecto, en multitud de problemas de Física-matemática (sobre todo en teoría de oscilaciones), la clave de la cuestión viene dada mediante soluciones de ecuaciones integrales las cuales podrán ser calculadas, demostrados estos teoremas aludidos, por aproximaciones sucesivas definidas por sucesiones de sistemas de ecuaciones integrales que tiendan uniformemente hacia el sistema dado. Se puede felicitar al autor por haber contribuído de manera tan afortunada a hacer más practicable el cálculo efectivo de las soluciones de ecuaciones integrales, y a cuyo estudio ha podido aplicar sus anteriores e interesantes trabajos (ya conocidos de nuestros lectores, por anterior reseña) sobre la teoría de las aproximaciones sucesivas en la integración de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

T. R. BACHILLER.