

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa I



TESIS DOCTORAL

Inferencia estadística basada en medidas de divergencia para modelos loglineales con restricciones de desigualdad: aplicación en ensayos clínicos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Raquel Mata Crespo

Directores

Leandro Pardo Llorente
Nirian Martín Apaolaza

Madrid, 2014

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I

SEPTIEMBRE 2014



Inferencia Estadística basada en Medidas de Divergencia
para Modelos Loglineales con Restricciones de Desigualdad:
Aplicación en Ensayos Clínicos.

Tesis Doctoral realizada por:

Raquel Mata Crespo

Bajo la dirección de:

Dr. Leandro Pardo Llorente
Dra. Nirian Martín Apaolaza



D. Leandro Pardo Llorente, Catedrático del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense de Madrid y D^a. Nirian Martín Apaolaza, Profesora Visitante del Departamento de Estadística de la Universidad Carlos III de Madrid,

AUTORIZAN:

La presentación de la Tesis Doctoral titulada “INFERENCIA ESTADÍSTICA BASADA EN MEDIDAS DE DIVERGENCIA PARA MODELOS LOGLINEALES CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD: APLICACIÓN EN ENSAYOS CLÍNICOS.” realizada por D^a. Raquel Mata Crespo, Licenciada en Matemáticas, bajo nuestra dirección en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa y que presenta para la obtención del grado de Doctor por la Universidad Complutense de Madrid.

En Madrid, a 19 de Septiembre de 2014

Dr. Leandro Pardo Llorente

Dra. Nirian Martín Apaolaza

Este trabajo de investigación se ha realizado con la Ayuda concedida por el Ministerio de Investigación, Ciencia e Innovación con referencia **BES-2010-037885** vinculada al proyecto de investigación **MTM2009-10072**, cuyo Investigador Principal es el Prof. Dr. Leandro Pardo Llorente, Catedrático de la Universidad Complutense de Madrid.

Agradecimientos

En esta sección quiero dar las gracias a todas aquellas personas que me han ayudado y han confiado en mí.

En primer lugar, deseo expresar mi reconocimiento a los directores de esta tesis, los prof. Leandro Pardo y Nirian Martín, por su gran ayuda en el aprendizaje de conocimientos matemáticos y estadísticos que he tenido que adquirir para llevar a cabo la presente investigación. Han estado siempre cercanos, orientándome y mostrando sugerencias en algunos problemas prácticos que han ido surgiendo a lo largo de esta tesis doctoral. Sólo puedo tener palabras de agradecimiento por su paciencia, esfuerzo y dedicación, junto con una actitud comprensiva, amable y generosa durante estos últimos años.

Quiero destacar mi agradecimiento al Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Complutense de Madrid, todos sus componentes resultan una gran familia, pero más todavía cuando tienes lejos a la tuya. En particular, debo agradecer cada uno de los momentos compartidos con mis compañeros Rosa, Martín, Karina, Paola, Elena, Grego y Tingo.

De una forma especial, quiero agradecer a mis padres su constante estímulo y ayuda moral de forma incondicional, ya que todo su cariño ha sido mi mejor apoyo. Todo esto no hubiera sido posible sin su ayuda porque sus consejos siempre están presentes en mi vida laboral y académica.

Acknowledgements

In this section I would like to thank everyone who has supported and trusted me.

First of all, I would like to express my acknowledgements to my advisors, Leandro Pardo and Nirian Martín, for help me learn the necessary mathematical and statistical skills in order to carry out my present research. They have always been very close to me and have given me much guidance and suggesting solutions in order to resolve certain issues that have come up throughout this doctorate thesis. I am deeply grateful for their patience, effort and total dedication, not to mention their understanding, kind and generous attitudes towards me during the last few years.

I want to emphasize the assistance provided by the Department of Statistics and Operations Research (Complutense University of Madrid). They are like family and it is particularly appreciated when living far away from own family. Specifically, I would like to thank to Rosa, Martín, Karina, Paola, Elena, Grego and Tingo for all the good times.

Last, but not least, I would like to offer my special thanks to my parents for their constant encouragement and unconditional moral support, knowing that their affection have been the greatest support. This work would not have been possible without their help because their advice is always present in my work life.

*No hay ninguna rama de la matemática
por abstracta que sea
que no pueda aplicarse algún día
a los fenómenos del mundo real.*

NIKOLÁI IVÁNOVICH LOBACHEVSKI
1 de Diciembre de 1792 - 24 de Febrero de 1856
Matemático ruso del siglo XIX.

Índice general

Abstract	V
Índice de figuras	XVI
Índice de tablas	XXIV
1. Dependencia monótona con variables categóricas ordinales	1
1.1. Introducción	1
1.2. Órdenes estocásticos y su relación con los odds ratios generalizados	2
1.2.1. Orden Estocástico Simple	3
1.2.2. Orden Estocástico Uniforme	4
1.2.3. Orden Estocástico Global	5
1.2.4. Orden Estocástico de Razón de Verosimilitudes	7
1.2.5. Relación entre los distintos tipos de órdenes estocásticos, simple, uniforme, global y de razón de verosimilitudes	8
1.3. La distribución Ji-barra Cuadrado	10
1.4. Medidas de ϕ -divergencia. Definición y propiedades	16
1.5. Objetivos de la memoria	21

2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales	23
2.1. Formulación del problema en términos de un modelo loglineal	23
2.2. Estadísticos phi-divergencia. Distribución asintótica	31
2.3. Aplicación numérica	44
2.4. Estudio de simulación	52
3. Contraste monótono de proporciones cuando subyace un modelo tipo dosis-respuesta	99
3.1. Planteamiento del modelo	99
3.2. Estadísticos phi-divergencia y su distribución asintótica	104
3.3. Aplicación numérica	112
3.4. Estudio de simulación	116
4. Estadísticos phi-divergencia en tablas $2 \times J$	129
4.1. Planteamiento del problema	129
4.2. Estadísticos phi-divergencia	139
4.3. Distribución asintótica de los estadísticos phi-divergencia	142
4.4. Aplicación numérica	173
4.5. Estudio de simulación	177
4.6. Conclusiones del estudio de simulación	246
5. El orden del cociente de verosimilitudes en tablas $I \times J$	249
5.1. Estadísticos phi-divergencia en tablas $I \times J$	249
5.2. Estadísticos phi-divergencia	255

Índice general	III
5.3. Distribución asintótica de los estadísticos phi-divergencia	257
5.4. Aplicación numérica	272
5.5. Estudio de simulación	276
5.6. Conclusiones del estudio de simulación	317
6. Algunas extensiones y trabajos futuros	319

Abstract

Chapter 1 introduces the connection between ordinal contingency table parametrizations and positive dependence properties of cross-classified variables. The relationships are established through generalized odds ratios in a contingency table. In the modeling of ordinal contingency tables, the ordered structure of the levels of the cross-classifying variables is usually translated into a related ordering constraint on the corresponding model parameters.

Chapter 2 deals with I independent binomial random variables related to an increasing ordered categorical variable. It is well-known that for such data it is not possible to use the classical test-statistics such as chi-square or likelihood ratio with chi-squared asymptotic distribution, but there exist appropriate order-restricted test-statistics with chi-squared-bar asymptotic distribution. This chapter provides an appropriate analysis that takes into account the ordered categories of a variable as rows of a $I \times 2$ contingency table. A new family of test statistics based on phi-divergence measures is introduced and studied, using loglinear models, for the important problem of testing hypothesis that involves inequality order constraint on proportions when the sample comes from independent binomial random variables. As a particular case of phi-divergence based test-statistics, the classical likelihood ratio test is considered. In addition, it is considered a modification of an example given in Silvapulle and Sen (2005) in order to analyze the performance of phi-divergence based test-statistics and Wald type statistics. A simulation study points out the importance of the family of test statistics introduced and studied in this chapter.

In Chapter 3 an important objective is to assess the existence of a monotonic dose-response relationship between a disease and an ordered exposure, that is a relationship in which disease risk increases with each increment of exposure. A common way for a researcher to handle this, is to construct a generalized linear model with binary data in which X (dose) has a linear effect on some scale, on a response variable Y . One of the most frequently used test-statistic to solve the statistical problem consisting a monotone trend in binomial proportions at the same or

opposite direction of the doses is, by far, the Cochran-Armitage test. When an underlying logit based order dose-response model the Cochran-Armitage (CA) test represents the most efficient test in the framework of the test-statistics applied with asymptotic distributions for testing monotone proportions. The Wald and likelihood ratio test (LRT) have much worse behaviour in type error I in comparison with the CA test. It suffers, however, from the weakness of not maintaining the nominal size. The strong point of this chapter is the new family of test-statistics based on ϕ -divergence measures, and also the asymptotic distribution under the null hypothesis, which is obtained either for one-sided or two-sided hypothesis testing. Indeed, the asymptotic distribution is the same as the LRT, that even corrects the weakness in the preservation of the nominal size and maintain similar properties in power. A numerical example based on real data illustrates that the proposed test-statistics are simple for computation and moreover, the necessary goodness-of-fit test-statistic are easily calculated from them. The simulation study shows that the test based on the Cressie and Read divergence measure usually provides a better nominal size than the CA test for small and moderate sample sizes.

Chapter 4 sets out the issue in a $2 \times J$ contingency table. In this case the example takes account of the results of an experiment to compare two treatments for ulcer. The main interest concerns the possibility that the treatment is better than the control. New families of test statistics are introduced and studied for the problem of comparing this two treatments in terms of the likelihood ratio order. The considered families are based on phi-divergence measures and arise as natural extensions of the classical likelihood ratio test and Pearson test statistics. It is proven that their asymptotic distribution is a common chi-bar random variable. Through a simulation study it is shown that some members of this new family of test-statistic display clearly better performance with respect to the power in comparison to the classical likelihood ratio and the Pearson's chi-square test, while the exact size remains closed to the nominal size. In view of the exact powers and significance levels, the study also shows that the Wilcoxon test-statistic is not as good as the two classical test-statistics.

Chapter 5 generalizes about $I \times J$ contingency tables. When some treatments are ordered according to the categories of an ordinal categorical variable (e.g., extent of side effects) in a monotone order, the interest could be focussed on knowing whether the treatments are equally effective or not. One way to do that is to test if the likelihood ratio order is strictly verified. Focussed on loglinear modeling, the theory associated with the asymptotic distribution of the phi-divergence test-statistics is developed. An illustrative example motivates the procedure and a simulation study, for small and moderate sample sizes, shows that it is possible to find ϕ -divergence test-statistic with an exact size closer to nominal size and higher power in comparison with the classical likelihood ratio.

Índice de figuras

1.1.	Esquema de los odds ratios “acumulativos” definidos en (1.3).	4
1.2.	Esquema de los odds ratios “de continuación” definidos en (1.6).	5
1.3.	Esquema de los odds ratios “globales” definidos en (1.9).	6
1.4.	Esquema de los odds ratios “locales” definidos en (1.12).	8
1.5.	V -proyección de un vector Z sobre el cono \mathcal{C} y el cono polar \mathcal{C}^0	13
2.1.	Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario A de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$	70
2.2.	Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario A de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$	70
2.3.	Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario B de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$	71
2.4.	Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario B de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$	71
2.5.	Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario C de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$	72

- 2.6. Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario C de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$. 72
- 2.7. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario A y $\pi_0 = 0.05$ 74
- 2.8. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario B y $\pi_0 = 0.05$ 74
- 2.9. Eficiencias relativas $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario C y $\pi_0 = 0.05$ 75
- 2.10. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario A y $\pi_0 = 0.05$ 75
- 2.11. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario B y $\pi_0 = 0.05$ 76
- 2.12. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario C y $\pi_0 = 0.05$ 76
- 2.13. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario A y $\pi_0 = 0.05$. 77
- 2.14. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario B y $\pi_0 = 0.05$. 78
- 2.15. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario C y $\pi_0 = 0.05$. 78
- 2.16. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario A y $\pi_0 = 0.05$. 79
- 2.17. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario B y $\pi_0 = 0.05$. 79
- 2.18. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario C y $\pi_0 = 0.05$. 80

2.31. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta}), H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario D y $\pi_0 = 0.35$.	88
2.32. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta}), H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario E y $\pi_0 = 0.35$.	88
2.33. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta}), H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario F y $\pi_0 = 0.35$.	89
2.34. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta}), H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario D y $\pi_0 = 0.35$.	90
2.35. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta}), H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario E y $\pi_0 = 0.35$.	91
2.36. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta}), H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario F y $\pi_0 = 0.35$.	91
2.37. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.05$, en el Escenario A.	93
2.38. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.05$, en el Escenario B.	94
2.39. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.05$, en el Escenario C.	95
2.40. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.35$, en el Escenario D.	96
2.41. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.35$, en el Escenario E.	97
2.42. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.35$, en el Escenario F.	98
3.1. Función logit $\pi(x_i)$.	101
3.2. Probabilidad de error de tipo I para el contraste unilateral. Escenario 1.	122
3.3. Probabilidad de error de tipo I para el contraste bilateral. Escenario 1.	122
3.4. Probabilidad de error de tipo I para el contraste unilateral. Escenario 2.	123
3.5. Probabilidad de error de tipo I para el contraste bilateral. Escenario 2.	123
3.6. Probabilidad de error de tipo I para el contraste unilateral. Escenario 3.	124

3.7. Probabilidad de error de tipo I para el contraste bilateral. Escenario 3.	124
3.8. Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste unilateral. Escenario 1.	125
3.9. Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste bilateral. Escenario 1.	125
3.10. Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste unilateral. Escenario 2.	126
3.11. Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste bilateral. Escenario 2.	126
3.12. Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste unilateral. Escenario 3.	127
3.13. Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste bilateral. Escenario 3.	127
4.1. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario A de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	218
4.2. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario A de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	218
4.3. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario B de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	219
4.4. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario B de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	219
4.5. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario C de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	220
4.6. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario C de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	220
4.7. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario D de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	221
4.8. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario D de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	221
4.9. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario E de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	222

4.10. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario E de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	222
4.11. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario F de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	223
4.12. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario F de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	223
4.13. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario G de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	224
4.14. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario G de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W.	224
4.15. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario A.	225
4.16. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario A.	225
4.17. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario B.	226
4.18. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario B.	227
4.19. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario C.	227
4.20. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario C.	228
4.21. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario D.	228
4.22. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario D.	229

4.23. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario E.	229
4.24. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario E.	230
4.25. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario F.	230
4.26. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario F.	231
4.27. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario G.	231
4.28. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario G.	232
4.29. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a X^2 para el Escenario A.	232
4.30. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a X^2 para el Escenario A.	233
4.31. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a X^2 para el Escenario B.	233
4.32. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a X^2 para el Escenario B.	234
4.33. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a X^2 para el Escenario C.	234
4.34. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a X^2 para el Escenario C.	235
4.35. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a X^2 para el Escenario D.	235

4.36. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario D.	236
4.37. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario E.	236
4.38. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario E.	237
4.39. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario F.	237
4.40. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario F.	238
4.41. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario G.	238
4.42. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario G.	239
4.43. Potencias para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y W en el Escenario A.	239
4.44. Potencias para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y W en el Escenario B.	240
4.45. Potencias para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y W en el Escenario C.	241
4.46. Potencias para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y W en el Escenario D.	242
4.47. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario E.	243
4.48. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario F.	244
4.49. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario G.	245
5.1. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 1 de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$	301
5.2. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 1 de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$	301

5.3. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 2 de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.	302
5.4. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 2 de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.	302
5.5. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 3 de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.	303
5.6. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 3 de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.	303
5.7. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 4 de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.	304
5.8. Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 4 de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.	304
5.9. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 1.	305
5.10. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 1.	305
5.11. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 2.	306
5.12. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 2.	306
5.13. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 3.	307
5.14. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 3.	307
5.15. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 4.	308

5.16. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 4.	308
5.17. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 1.	309
5.18. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 1.	309
5.19. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 2.	310
5.20. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 2.	310
5.21. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 3.	311
5.22. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 3.	311
5.23. Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 4.	312
5.24. Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 4.	312
5.25. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario 1.	313
5.26. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario 2.	314
5.27. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario 3.	315
5.28. Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario 4.	316

Índice de tablas

2.1. Malformaciones congénitas de los órganos genitales en los descendientes en relación con el consumo materno de alcohol.	24
2.2. Estadísticos de contraste con medidas de divergencia de Cressie-Read y estadísticos de contraste tipo Wald con sus correspondientes p -valores asintóticos. . . .	51
2.3. Escenarios del estudio de simulación.	53
2.4. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario A.	55
2.5. Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario A.	56
2.6. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario B.	57
2.7. Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario B.	58
2.8. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario C.	59
2.9. Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario C.	60
2.10. Niveles de significación y potencias simuladas para $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenarios A, B y C.	61

2.11. Niveles de significación y potencias simuladas para $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenarios D, E y F.	61
2.12. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario D.	62
2.13. Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario D.	63
2.14. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario E.	64
2.15. Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario E.	65
2.16. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario F.	66
2.17. Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario F.	67
2.18. Eficiencia del estadístico de Bartholomew con respecto al estadístico del cociente de verosimilitudes.	92
3.1. Datos del estudio en Paris y otros (2009) y EMV de proporciones afectadas.	113
3.2. Contrastes de hipótesis unilateral y bilateral para proporciones monótonas en los datos de Paris y otros (2009).	115
3.3. Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 1.	118
3.4. Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 1.	118
3.5. Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 2.	119
3.6. Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 2.	119

3.7. Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 3.	120
3.8. Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 3.	120
3.9. Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 1.	121
3.10. Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 1.	121
3.11. Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 2.	121
3.12. Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 2.	121
3.13. Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 3.	121
3.14. Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 3.	121
4.1. Mejorías en la úlcera.	130
4.2. Probabilidades condicionadas teóricas.	130
4.3. Estadísticos de contraste basados en la familia de divergencias de Cressie-Read y sus p-valores asintóticos.	176
4.4. Escenarios del estudio de simulación.	178
4.5. Odd ratios locales teóricos del estudio de simulación.	180
4.6. Niveles de significación y potencias simuladas para el estadístico de Wilcoxon.	180
4.7. Niveles de significación simulados para $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), W\}_{\lambda \in \Lambda}$ en los escenarios de la Tabla 4.4.	182
4.8. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$. Escenario A.	183
4.9. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario A.	184

4.23. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Escenario D.	198
4.24. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario D.	199
4.25. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario D.	200
4.26. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario D.	201
4.27. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario D.	202
4.28. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Escenario E.	203
4.29. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario E.	204
4.30. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario E.	205
4.31. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario E.	206
4.32. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario E.	207
4.33. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Escenario F.	208
4.34. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario F.	209
4.35. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario F.	210

4.36. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario F.	211
4.37. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario F.	212
4.38. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$. Escenario G.	213
4.39. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario G.	214
4.40. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario G.	215
4.41. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario G.	216
4.42. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario G.	217
5.1. Extensión de los efectos colaterales para los cuatro tratamientos.	250
5.2. Estadísticos de contraste basados en la familia de divergencias de Cressie-Read y sus p-valores asintóticos.	275
5.3. Odds ratios locales teóricos para el estudio de simulación.	278
5.4. $\hat{\alpha}_T$, para $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in \Lambda}$ en los Escenarios 1, 2, 3 y 4.	278
5.5. $\hat{\beta}_T$, para $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in \Lambda}$ en los Escenarios 1, 2, 3 y 4.	279
5.6. Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$. Escenario 1.	280
5.7. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario 1.	281
5.8. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario 1.	282

5.22. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario 4.	296
5.23. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario 4.	297
5.24. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario 4.	298
5.25. Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario 4.	299

Capítulo 1

Dependencia monótona con variables categóricas ordinales

1.1. Introducción

En los últimos años se han incrementado espectacularmente los métodos estadísticos para analizar datos cualitativos. Quizá esto se haya debido en parte a la gran demanda por parte de las Ciencias médicas (particularmente en relación a estudios epidemiológicos), sociales y en general del comportamiento de técnicas estadísticas específicas para el tratamiento de la gran cantidad de datos cualitativos de que disponían. El amplio y específico desarrollo de técnicas específicas para el tratamiento de datos cualitativos o categóricos ha permitido descartar por innecesarios y muchas veces inapropiados muchas de las técnicas para variables continuas que se venían utilizando para este tipo de datos. El Análisis de Datos Cualitativos se puede definir como un conjunto de técnicas estadísticas para el estudio de las relaciones entre variables cualitativas, que son aquellas cuyos valores son cualidades no medibles de los individuos sujetos a estudio. Mientras que en gran parte de las ciencias empíricas es posible medir con una escala el grado de presencia de las variables de interés, la dificultad inherente a la realidad social es que la mayoría de los comportamientos sociales, como por ejemplo la reacción ante un determinado estímulo, la opinión frente a un tema de actualidad, etc., no son cuantificables, con lo que el investigador se encuentra con un conjunto de cualidades para las que como mucho podrá ordenar sus distintas modalidades (variables cualitativas ordinales) o simplemente, formar grupos excluyentes y exhaustivos (variables cualitativas nominales).

Al no ser susceptibles de medida, este tipo de variables no pueden ser analizadas con la metodología estadística convencional para datos cuantitativos. Esto ha dado origen a una parte de la estadística que se conoce comúnmente con los nombres de Análisis cualitativo, Análisis de datos categorizables, Análisis de datos categóricos o Análisis de datos discretos como popularizaron Bishop, Fienberg y Holland en su libro de 1975. El tratamiento matemático de estas variables se hace a partir de su único aspecto cuantificable: el número de veces que se presenta cada combinación de las modalidades de las variables estudiadas en una muestra, es decir, las frecuencias observadas. Estas frecuencias se presentan en una tabla de contingencia.

Esta memoria se encuadra en el contexto en el que al menos una de las variables bajo estudio sea ordinal. Los beneficios que se obtienen al tener en cuenta órdenes entre las categorías de las clasificaciones en las tablas de contingencia han sido importantes, sobre todo en relación a la potencia de los contrastes de hipótesis que ignoran información ordinal.

1.2. Órdenes estocásticos y su relación con los odds ratios generalizados

Sean X e Y dos variables categóricas cuyas categorías, simbolizadas mediante $i = 1, \dots, I$ y $j = 1, \dots, J$, se encuentran ordenadas de acuerdo a un criterio concreto, estando sus correspondientes datos muestrales recogidos en tablas de contingencia bidimensionales ordinales siendo el muestreo multinomial por categorías de la variable X (por filas), existiendo independencia entre las distintas muestras multinomiales, es decir producto-multinomial.

Una hipótesis de dependencia monótona de Y dada X establece que las distribuciones de probabilidad condicionadas de Y se pueden ordenar de acuerdo a un criterio de dominancia estocástica en forma coherente en relación con el orden de las categorías de la variable X . Se pueden utilizar diversos “órdenes estocásticos” a la hora de formalizar el concepto de dependencia “positiva”, es decir cuando Y tiende a ser estocásticamente más grande que X cuando X crece. Aquí se señalarán cuatro de ellos por ser los más usados:

- Orden Estocástico Simple;
- Orden Estocástico Uniforme;
- Orden Estocástico Global;
- Orden Estocástico de Razón de Verosimilitudes.

Cada tipo de orden va a ser caracterizado en términos de ciertos odds ratios (o productos cruzados de razón de verosimilitudes) generalizados.

1.2.1. Orden Estocástico Simple

Los odds ratios “acumulativos” o “locales-globales” de una tabla de contingencia $I \times J$ lo forman los $(I - 1)(J - 1)$ valores de la matriz

$$\Xi^C = (\vartheta_{ij}^C)_{i=1,\dots,I-1; j=1,\dots,J-1}, \quad (1.1)$$

tal que

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij}^C &= \frac{P(Y \leq j/X = i) P(Y > j/X = i + 1)}{P(Y \leq j/X = i + 1) P(Y > j/X = i)} \\ &= \frac{\sum_{k \leq j} \pi_{ik} \sum_{k > j} \pi_{i+1,k}}{\sum_{k \leq j} \pi_{i+1,k} \sum_{k > j} \pi_{ik}}, \quad (i, j) \in \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\}, \end{aligned}$$

siendo $\pi_{ij} = P(Y = j/X = i)$, $j = 1, \dots, J$ las probabilidades asociadas a la i -ésima muestra multinomial. Tomando en consideración la distribución conjunta de las variables X e Y , $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, de la definición de probabilidad condicionada

$$\pi_{ij} = P(Y = j/X = i) = \frac{P(X = i, Y = j)}{P(X = i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, \quad (1.2)$$

se obtiene la siguiente definición alternativa

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij}^C &= \frac{P(X = i, Y \leq j) P(X = i + 1, Y > j)}{P(X = i + 1, Y \leq j) P(X = i, Y > j)} \\ &= \frac{\sum_{k \leq j} p_{ik} \sum_{k > j} p_{i+1,k}}{\sum_{k \leq j} p_{i+1,k} \sum_{k > j} p_{ik}}, \quad (i, j) \in \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

En la Figura 1.1 se muestra esquemáticamente cómo se calcula la expresión (1.3), haciendo énfasis en las celdas que corresponden a las probabilidades conjuntas que intervienen. El color negro representa las probabilidades conjuntas correspondientes al numerador, mientras que la zona rayada representa las probabilidades conjuntas correspondientes al denominador de (1.3).

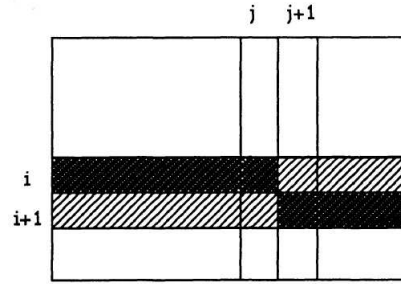


Figura 1.1: Esquema de los odds ratios “acumulativos” definidos en (1.3).

Siendo $\mathbf{1}_{a \times b}$ la matriz $a \times b$ de unos, el Orden Estocástico Simple se puede formalizar mediante (1.1) de la siguiente forma

$$\Xi^C \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)},$$

es decir

$$\vartheta_{ij}^C \geq 1, \quad \text{para cada } (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}. \quad (1.4)$$

1.2.2. Orden Estocástico Uniforme

Los odds ratios “de continuación” de una tabla de contingencia $I \times J$ lo forman los $(I-1)(J-1)$ valores de la matriz

$$\Xi^{CO} = (\vartheta_{ij}^{CO})_{i=1, \dots, I-1; j=1, \dots, J-1}, \quad (1.5)$$

tal que

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij}^{CO} &= \frac{P(Y = j/X = i) P(Y > j/X = i+1)}{P(Y = j/X = i+1) P(Y > j/X = i)} \\ &= \frac{\pi_{ij} \sum_{k>j} \pi_{i+1,k}}{\pi_{i+1,j} \sum_{k>j} \pi_{ik}}, \quad (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}, \end{aligned}$$

siendo $\pi_{ij} = P(Y = j/X = i)$, $j = 1, \dots, J$ las probabilidades asociadas a la i -ésima muestra multinomial. Tomando en consideración la distribución conjunta de las variables X e Y , $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, de la definición de probabilidad condicionada dada en (1.2), se obtiene la

siguiente definición alternativa

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij}^{CO} &= \frac{P(X = i, Y = j) P(X = i + 1, Y > j)}{P(X = i + 1, Y = j) P(X = i, Y > j)} \\ &= \frac{p_{ij} \sum_{k>j} p_{i+1,k}}{p_{i+1,j} \sum_{k>j} p_{ik}}, \quad (i, j) \in \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

En la Figura 1.2 se muestra esquemáticamente cómo se calcula la expresión (1.6), haciendo énfasis en las celdas que corresponden a las probabilidades conjuntas que intervienen. El color negro representa las probabilidades conjuntas correspondientes al numerador, mientras que la zona rayada representa las probabilidades conjuntas correspondientes al denominador de (1.6).

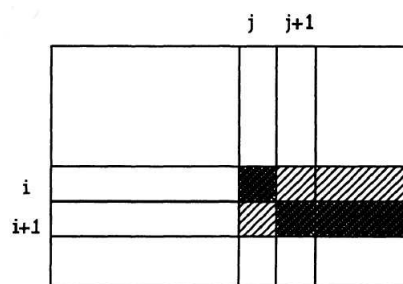


Figura 1.2: Esquema de los odds ratios “de continuación” definidos en (1.6).

El Orden Estocástico Uniforme se puede formalizar mediante (1.1) de la siguiente forma

$$\Xi^{CO} \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)},$$

es decir

$$\vartheta_{ij}^{CO} \geq 1, \quad \text{para cada } (i, j) \in \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\}. \quad (1.7)$$

1.2.3. Orden Estocástico Global

Los odds ratios “globales” de una tabla de contingencia $I \times J$ lo forman los $(I - 1)(J - 1)$ valores de la matriz

$$\Xi^G = (\vartheta_{ij}^G)_{i=1, \dots, I-1; j=1, \dots, J-1}, \quad (1.8)$$

tal que

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij}^G &= \frac{P(Y \leq j/X \leq i) P(Y > j/X > i)}{P(Y > j/X \leq i) P(Y \leq j/X > i)} \\ &= \frac{\sum_{h \leq i} \sum_{k \leq j} \pi_{hk} \sum_{h > i} \sum_{k > j} \pi_{hk}}{\sum_{h \leq i} \sum_{k > j} \pi_{hk} \sum_{h > i} \sum_{k \leq j} \pi_{hk}}, \quad (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}, \end{aligned}$$

siendo $\pi_{ij} = P(Y = j/X = i)$, $j = 1, \dots, J$ las probabilidades asociadas a la i -ésima muestra multinomial. Tomando en consideración la distribución conjunta de las variables X e Y , $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, de la definición de probabilidad condicionada dada en (1.2), se obtiene la siguiente definición alternativa

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij}^G &= \frac{P(X \leq i, Y \leq j) P(X > i, Y > j)}{P(X \leq i, Y > j) P(X > i, Y \leq j)} \\ &= \frac{\sum_{h \leq i} \sum_{k \leq j} p_{hk} \sum_{h > i} \sum_{k > j} p_{hk}}{\sum_{h \leq i} \sum_{k > j} p_{hk} \sum_{h > i} \sum_{k \leq j} p_{hk}}, \quad (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

En la Figura 1.3 se muestra esquemáticamente cómo se calcula la expresión (1.9), haciendo énfasis en las celdas que corresponden a las probabilidades conjuntas que intervienen. El color negro representa las probabilidades conjuntas correspondientes al numerador, mientras que la zona rayada representa las probabilidades conjuntas correspondientes al denominador de (1.9).

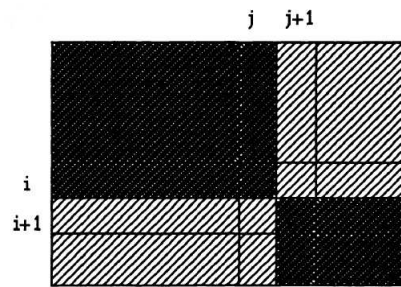


Figura 1.3: Esquema de los odds ratios “globales” definidos en (1.9).

El Orden Estocástico Global se puede formalizar mediante (1.8) de la siguiente forma

$$\Xi^G \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)},$$

es decir

$$\vartheta_{ij}^G \geq 1, \quad \text{para cada } (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}. \quad (1.10)$$

1.2.4. Orden Estocástico de Razón de Verosimilitudes

A lo largo de la memoria jugará un papel importante el Orden Estocástico de Razón de Verosimilitudes. No se debe olvidar que este orden es una adaptación a tablas de contingencia del concepto más general dado por Lehmann (1966) para variables aleatorias continuas: Dadas dos variables aleatorias X e Y con densidad conjunta $f(x, y)$ se dice que X e Y verifican el orden del cociente de verosimilitudes si se verifica:

$$f(x, y) f(x', y') \geq f(x', y) f(x, y'), \quad \forall x \leq x', y \leq y'.$$

Los odds ratios “locales” o simplemente odds ratios de una tabla de contingencia $I \times J$ lo forman los $(I-1)(J-1)$ valores de la matriz

$$\Xi^L = (\vartheta_{ij}^L)_{i=1, \dots, I-1; j=1, \dots, J-1}, \quad (1.11)$$

tal que

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij}^L &= \frac{P(Y = j/X = i) P(Y = j/X = i+1)}{P(Y = j/X = i+1) P(Y = j/X = i)} \\ &= \frac{\pi_{ij} \pi_{i+1, j+1}}{\pi_{i+1, j} \pi_{i, j+1}}, \quad (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}, \end{aligned}$$

siendo $\pi_{ij} = P(Y = j/X = i)$, $j = 1, \dots, J$ las probabilidades asociadas a la i -ésima muestra multinomial. Tomando en consideración la distribución conjunta de las variables X e Y , $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, de la definición de probabilidad condicionada dada en (1.2), se obtiene la siguiente definición alternativa

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij}^L &= \frac{P(X = i, Y = j) P(X = i+1, Y = j)}{P(X = i+1, Y = j) P(X = i, Y = j)} \\ &= \frac{p_{ij} p_{i+1, j+1}}{p_{i+1, j} p_{i, j+1}}, \quad (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En la Figura 1.4 se muestra esquemáticamente cómo se calcula la expresión (1.12), haciendo énfasis en las celdas que corresponden a las probabilidades conjuntas que intervienen. El color negro representa las probabilidades conjuntas correspondientes al numerador, mientras que la

zona rayada representa las probabilidades conjuntas correspondientes al denominador de (1.12).

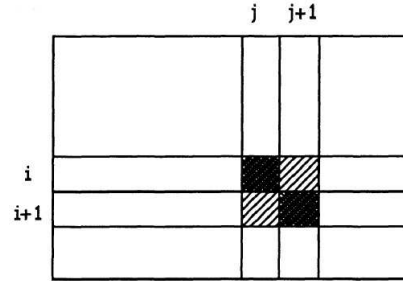


Figura 1.4: Esquema de los odds ratios “locales” definidos en (1.12).

El Orden Estocástico de Razón de Verosimilitudes se puede formalizar mediante (1.11) de la siguiente forma

$$\Xi^L \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)},$$

es decir

$$\vartheta_{ij}^L \geq 1, \quad \text{para cada } (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}. \quad (1.13)$$

1.2.5. Relación entre los distintos tipos de órdenes estocásticos, simple, uniforme, global y de razón de verosimilitudes

Sea el vector de probabilidades conjuntas en una tabla de contingencia $I \times J$, $\mathbf{p} = (p_{11}, \dots, p_{1J}, \dots, p_{ij}, \dots, p_{I1}, \dots, p_{IJ})^T$ y

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{p} : 0 < p_{ij} < 1, i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J, \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} = 1 \right\} \quad (1.14)$$

el conjunto de las distribuciones de probabilidad definidas sobre un espacio muestral

$$\mathcal{X} = \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\}.$$

que son cada una de las celdas posibles en una tabla de contingencia $I \times J$.

Por construcción se ha establecido que las filas de la tabla de contingencia son independientes, pero en una tabla de contingencia bidimensional puede interesar saber si las filas y las columnas son independientes. La siguiente proposición permite establecer tal hipótesis en términos de cualquier tipo de orden estocástico (ver Silvapulle y Sen (2005), Proposición 6.4.3).

Las condiciones $\Xi^C = \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$, $\Xi^{CO} = \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$, $\Xi^G = \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$, $\Xi^L = \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$ son equivalentes y representan el “modelo de independencia”. Dichas condiciones se denotarán en adelante como $\Xi^\bullet = \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$, siendo Ξ^\bullet la matriz de odds ratios generalizados arbitrario una tabla de contingencia $I \times J$, según sea $\bullet \in \{C, CO, G, L\}$.

Considérese el conjunto de probabilidades bajo independencia

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ \mathbf{p} : 0 < p_{ij} < 1, i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J, \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} = 1, \Xi^\bullet = \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)} \right\}, \quad (1.15)$$

y los conjuntos de probabilidades verificando cada uno de los cuatro órdenes estocásticos:

- Orden Estocástico Simple,

$$\mathcal{P}_s = \left\{ \mathbf{p} : 0 < p_{ij} < 1, i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J, \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} = 1, \Xi^C \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)} \right\}; \quad (1.16)$$

- Orden Estocástico Uniforme,

$$\mathcal{P}_u = \left\{ \mathbf{p} : 0 < p_{ij} < 1, i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J, \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} = 1, \Xi^{CO} \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)} \right\}; \quad (1.17)$$

- Orden Estocástico Global,

$$\mathcal{P}_g = \left\{ \mathbf{p} : 0 < p_{ij} < 1, i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J, \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} = 1, \Xi^G \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)} \right\}; \quad (1.18)$$

- Orden Estocástico de Razón de Verosimilitudes.

$$\mathcal{P}_r = \left\{ \mathbf{p} : 0 < p_{ij} < 1, i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J, \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} = 1, \Xi^L \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)} \right\}. \quad (1.19)$$

La siguiente proposición nos permite establecer una jerarquía entre los cuatro tipos de órdenes según sean más fuertes las condiciones que las definen. Para más detalles ver Douglas y otros (1990).

Los conjuntos de probabilidad (1.15)-(1.19) se encuentran anidados de la siguiente forma

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_r \subset \mathcal{P}_u \subset \mathcal{P}_s \subset \mathcal{P}_g \subset \mathcal{P},$$

lo cual quiere decir que el orden estocástico más fuerte es el de Razón de Verosimilitudes, mientras que el más débil es el orden estocástico global. Con fuerte/débil se quiere decir que

- a) $\Xi^L \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)} \Rightarrow \Xi^{CO} \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$, y la implicación inversa no necesariamente se verifica;
- b) $\Xi^{CO} \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)} \Rightarrow \Xi^C \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$, y la implicación inversa no necesariamente se verifica;
- c) $\Xi^C \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)} \Rightarrow \Xi^G \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$, y la implicación inversa no necesariamente se verifica.

En todos los tipos de órdenes descritos, $\Xi^\bullet \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$ representará un orden “creciente” siempre que X e Y estén ordenados según el mismo criterio (X creciente– Y creciente; X decreciente– Y decreciente), mientras que $\Xi^\bullet \leq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$ representará un orden “creciente” siempre que X e Y estén ordenados con criterios opuestos (X decreciente– Y creciente; X creciente– Y decreciente). De forma similar, si X e Y están ordenados según el mismo criterio, $\Xi^\bullet \leq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$ representará el orden “decreciente”, mientras que si X e Y están ordenados con criterios opuestos, $\Xi^\bullet \geq \mathbf{1}_{(I-1) \times (J-1)}$ representará el orden “decreciente”. En esta memoria, salvo en el Capítulo 2, en donde Y es dicotómica, el resto de los capítulos consideran que X e Y estén ordenados según el mismo criterio.

1.3. La distribución Ji-barra Cuadrado

La familia de distribuciones ji-barra cuadrado, $\bar{\chi}^2$, juega un papel importante cuando en la hipótesis nula y/o alternativa de un contraste de hipótesis aparecen los parámetros del modelo bajo consideración sometidos a restricciones del tipo desigualdad. El papel de las distribuciones $\bar{\chi}^2$ en los problemas de contrastes de hipótesis es similar al de las distribuciones ji-cuadrado, χ^2 , cuando se utiliza el estadístico de cociente de verosimilitudes para contrastar la hipótesis $\theta = \mathbf{0}$ frente a $\theta \neq \mathbf{0}$.

Existe una relación entre las restricciones de los parámetros que intervienen en el contraste de hipótesis considerado en el estudio y los conos convexos. Por tanto es necesaria la definición de cono en un espacio paramétrico de dimensión dada. Un cono es un subconjunto cerrado \mathcal{C} de \mathbb{R}^p que cumple $t\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ y para todo escalar $t \geq 0$. Mediante s restricciones

de igualdad y $t - s$ de desigualdad, el cono \mathcal{C} se suele definir de la siguiente manera

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} : \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \dots, s; \quad \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq 0, \quad i = s + 1, \dots, t\}. \quad (1.20)$$

Sea $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$ un vector de dimensión p , donde \mathbf{V} es una matriz definida positiva, y sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^p$ un cono convexo cerrado. Se considera la variable aleatoria

$$\overline{X}^2 = \mathbf{Z}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z} - \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}) \quad (1.21)$$

y se dice que una variable aleatoria sigue una distribución $\bar{\chi}^2$ si su distribución coincide con la distribución de la variable aleatoria \overline{X}^2 . Se prueba (ver Silvapulle y Sen (2005), Teorema 3.4.2), que la distribución de la variable aleatoria \overline{X}^2 viene dada por

$$P(\overline{X}^2 \geq c) = \sum_{i=0}^p w_i P(X_i^2 \geq c), \quad (1.22)$$

donde X_i^2 es una variable aleatoria ji-cuadrado con i grados de libertad, χ_i^2 , $X_0^2 = 0$ c.s., y w_i son unos pesos, no-negativos, que verifican $w_0 + \dots + w_p = 1$. Los pesos $w_i = w_i(p, \mathbf{V}, \mathcal{C})$ dependen de p , \mathbf{V} y \mathcal{C} y por tanto también la distribución,

$$\overline{X}^2 \sim \bar{\chi}^2 = \bar{\chi}^2(p, \mathbf{V}, \mathcal{C}).$$

En los primeros trabajos de Bartholomew (1959, 1961) aparecen ya casos particulares del resultado (1.22). Sin embargo, los resultados más destacables vienen de la mano de Kudô (1963) y de Nüesch (1964, 1966), ya que ambos probaron de forma independiente el resultado para el ortante no-negativo $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+^p$. Más tarde, su teoría fue extendida por Kudô y Choi (1975) y por último Saphiro (1985) realizó una demostración válida para cualquier cono convexo \mathcal{C} .

Dados \mathbf{x} e \mathbf{y} en \mathbb{R}^p se considera la norma inducida por el producto escalar, con respecto a la matriz \mathbf{V} ,

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{V}} = (\mathbf{x}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

y la distancia entre \mathbf{x} e \mathbf{y} ,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbf{V}} = [(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{\frac{1}{2}}.$$

A continuación se dará una interpretación geométrica de \overline{X}^2 . Se puede considerar

$$\overline{X}^2 = \|\pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C})\|_{\mathbf{V}}^2,$$

donde $\pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C})$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$ sobre \mathcal{C} que asigna a $\boldsymbol{\theta}$ el punto más próximo en \mathcal{C} desde \mathbf{Z} , es decir

$$\pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}) = \arg \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}). \quad (1.23)$$

Obsérvese que

$$(\mathbf{Z} - \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}))^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}))$$

es distancia entre \mathbf{Z} y \mathcal{C} .

Dado un cono \mathcal{C} definido por (1.20), el cono polar \mathcal{C}^0 se genera mediante combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{V}\mathbf{a}_i$, $i = s + 1, \dots, t$ con coeficientes no-negativos, y de los vectores $\mathbf{V}\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, s$ sin restricciones en los coeficientes. Por lo tanto, dado el cono \mathcal{C} definido por (1.20), se define el cono polar asociado a \mathcal{C} como

$$\mathcal{C}^0 = \{\mathbf{y} : \mathbf{x}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \leq 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

Si \mathcal{C} es cerrado y convexo, se verifica que $(\mathcal{C}^0)^0 = \mathcal{C}$ y para todo \mathbf{Z}

$$\mathbf{Z} - \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}) = \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}^0). \quad (1.24)$$

Como consecuencia de que \mathcal{C} sea un cono convexo cerrado también se tiene que \mathcal{C}^0 sea un cono convexo cerrado, ya que los vectores que componen el cono \mathcal{C}^0 forman ángulos obtusos con cada vector del cono \mathcal{C} , es decir $\mathbf{x}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \leq 0$.

A partir de la definición de cono dada en (1.20), en (1.23) se tiene un problema de programación cuadrática. Dykstra y Robertson (1982) y Dykstra (1983) propusieron un algoritmo interesante que utiliza las características específicas del problema planteado en (1.23). Adicionalmente, Mitchell, Demyanov y Malozemov (1974) y Wolfe (1976), plantearon el problema en términos de encontrar el punto más próximo a un polítopo, que implica la generalización a cualquier dimensión de un poliedro.

Los pesos de una distribución ji-barra cuadrado también se pueden interpretar en términos de la proyección de una distribución normal centrada de dimensión p , \mathbf{Z} , con matriz de varianzas-covarianzas \mathbf{V} no singular, sobre un cono cerrado y convexo en \mathbb{R}^p , \mathcal{C} , tal que

$$w_i(p, \mathbf{V}, \mathcal{C}) = P(\pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}) \in \mathbb{R}_+^p(i)), \quad (1.25)$$

donde $\mathbb{R}_+^p(i)$ es un subconjunto de \mathbb{R}_+^p verificando que cada vector p -dimensional tiene i componentes estrictamente positivas y $p - i$ nulas.

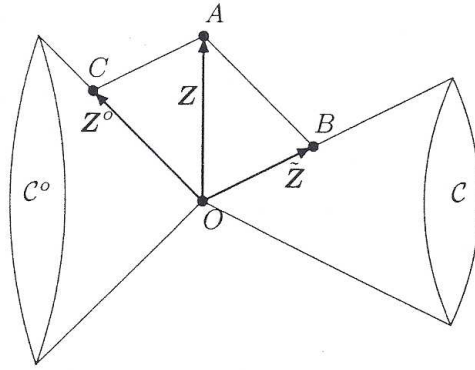


Figura 1.5: \mathbf{V} -proyección de un vector \mathbf{Z} sobre el cono \mathcal{C} y el cono polar \mathcal{C}^0 .

La Figura 1.5 proporciona un diagrama esquemático de la \mathbf{V} -proyección de un vector \mathbf{Z} sobre el cono \mathcal{C} y el cono polar \mathcal{C}^0 . Se considera un vector cualquiera \mathbf{Z} representado por \overrightarrow{OA} , B es el punto del cono \mathcal{C} que es el más próximo a A , tomando la distancia con respecto a la matriz \mathbf{V} , y $\tilde{\mathbf{Z}} = \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C})$ viene representada por el vector \overrightarrow{OB} . De esta forma, en la Figura 1.5 se tiene que la distancia entre el vector \mathbf{Z} y al cono \mathcal{C} , (1.23), viene representada mediante $\|\overrightarrow{AB}\|_{\mathbf{V}}$. Por otro lado, $\mathbf{Z}^0 = \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}^0) = \mathbf{Z} - \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C})$ viene representada por el vector \overrightarrow{OC} . Se puede observar que el vector $\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}$ es \mathbf{V} -ortogonal a $\tilde{\mathbf{Z}}$, es decir, \overrightarrow{AB} es \mathbf{V} -ortogonal a \overrightarrow{OB} . Por lo tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo \widehat{OBA} , se tiene que

$$\|\overrightarrow{OA}\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\overrightarrow{OB}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\overrightarrow{BA}\|_{\mathbf{V}}^2.$$

Identificando $\mathbf{Z} = \overrightarrow{OA}$ y $\tilde{\mathbf{Z}} = \overrightarrow{OB}$, se tiene

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{V}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} + \inf_{\theta \in \mathcal{C}} (\mathbf{Z} - \theta)^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \theta),$$

donde $\inf_{\theta \in \mathcal{C}} (\mathbf{Z} - \theta)^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \theta) = (\mathbf{Z} - \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}))^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \pi_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}))$, y por lo tanto, según

(1.21) se tiene

$$\overline{X}^2 = \mathbf{Z}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z} - \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}) = \tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{V}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} = \|\overrightarrow{OB}\|_{\mathbf{V}}^2.$$

Se puede hacer un razonamiento paralelo observando que $\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^0$ es \mathbf{V} -ortogonal a \mathbf{Z}^0 , es decir, \overrightarrow{CA} es \mathbf{V} -ortogonal a \overrightarrow{OC} , con lo que aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo \widehat{OCA} , se tiene que

$$\|\overrightarrow{OA}\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\overrightarrow{OC}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\overrightarrow{CA}\|_{\mathbf{V}}^2.$$

Identificando $\mathbf{Z} = \overrightarrow{OA}$ y $\mathbf{Z}^0 = \overrightarrow{OC}$, se tiene

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{0T} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z}^0 + \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^0} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}),$$

donde $\inf_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^0} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}^0))^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}^0))$, y por lo tanto, como $\|\overrightarrow{CA}\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\overrightarrow{OB}\|_{\mathbf{V}}^2$ se tiene

$$\overline{X}^2 = \|\overrightarrow{CA}\|_{\mathbf{V}}^2 = \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^0} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{Z} - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathcal{C}^0)\|_{\mathbf{V}}^2, \quad (1.26)$$

que era previsible según (1.24). Esta dualidad de \overline{X}^2 se puede extender también a los pesos de las distribuciones ji-barra cuadrado correspondientes a los conos polares, como aparece reflejado en el trabajo de Saphiro (1985)

$$w_i(p, \mathbf{V}, \mathcal{C}^0) = w_{p-i}(p, \mathbf{V}, \mathcal{C}) = w_{p-i}, \quad i = 0, \dots, p.$$

Cuando \mathcal{C} es el ortante positivo

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}_+^p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

siguiendo (1.25), se tiene

$$\begin{aligned} w_i(p, \mathbf{V}) &= w_i(p, \mathbf{V}, \mathbb{R}_+^p) = P(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}|\mathbb{R}_+^p) \in \mathbb{R}_+^p(i)) \\ &= P(\arg \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}_+^p} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}_+^p(i)), \quad i = 0, \dots, p. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la función a optimizar en (1.27) y que al ser \mathbf{V}^{-1} una matriz simétrica se tiene

$$(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\theta} - 2\mathbf{Z}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Z}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z},$$

que justifica que los pesos $w_i(p, \mathbf{V})$ se puedan obtener mediante el siguiente algoritmo.

Los pesos $w_i(p, \mathbf{V})$ de una distribución ji-barra cuadrado se pueden obtener mediante simulación de la siguiente forma:

PASO 1: Para $i = 0, \dots, p$, inicializar $N(i) := 0$.

PASO 2: Repetir los siguientes pasos R veces (R es un entero grande):

PASO 2.1: Generar una observación, \mathbf{z} , de $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}_p, \mathbf{V})$. Se pueden utilizar las subrutinas G05CBF, G05EAF, y G05EZF de la librería NAG de Fortran.

PASO 2.2: Computar $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z}) = \arg \inf_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}_+^p} \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\theta} - (\mathbf{V}^{-1} \mathbf{z})^T \boldsymbol{\theta}$. Se puede utilizar la subrutina DQPROG de la librería IMSL de Fortran.

PASO 2.3: Contar en i , el número de componentes estrictamente positivas contenidas en $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{z})$, y hacer $N(i) := N(i) + 1$.

PASO 3: Calcular $w_i(p, \mathbf{V}) := \frac{N(i)}{R}$ para $i = 0, \dots, p$.

Pese a que el anterior algoritmo es válido para cualquier valor de $p \in \mathbb{N}$, para cuando $p \leq 3$, conviene utilizar las siguientes expresiones explícitas:

- Para $p = 1$,

$$w_0(p, \mathbf{V}) = w_1(p, \mathbf{V}) = 0.5.$$

- Para $p = 2$,

$$\begin{aligned} w_0(p, \mathbf{V}) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arccos \rho_{12} \\ w_1(p, \mathbf{V}) &= \frac{1}{2} \\ w_2(p, \mathbf{V}) &= \frac{1}{2\pi} \arccos \rho_{12}, \end{aligned}$$

donde

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}, \quad (1.28)$$

es el coeficiente de correlación entre la componente i -ésima y j -ésima de una variable aleatoria tridimensional centrada con matriz de varianzas-covarianzas \mathbf{V} .

- Para $p = 3$,

$$\begin{aligned}
w_0(p, \mathbf{V}) &= \frac{1}{4\pi} (2\pi - \arccos \rho_{12} - \arccos \rho_{13} - \arccos \rho_{23}) \\
w_1(p, \mathbf{V}) &= \frac{1}{4\pi} (3\pi - \arccos \rho_{12:3} - \arccos \rho_{13:2} - \arccos \rho_{23:1}) \\
w_2(p, \mathbf{V}) &= \frac{1}{2} - w_0(p, \mathbf{V}) \\
w_3(p, \mathbf{V}) &= \frac{1}{2} - w_1(p, \mathbf{V})
\end{aligned} \tag{1.29}$$

donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación (1.28) y

$$\rho_{ij:k} = \frac{\rho_{ij} - \rho_{ik}\rho_{kj}}{\sqrt{(1-\rho_{ik}^2)(1-\rho_{kj}^2)}},$$

es el coeficiente de correlación parcial entre la componente i -ésima y j -ésima de una variable aleatoria tridimensional, dado un valor de la componente k -ésima, siendo \mathbf{V} la matriz de varianzas-covarianzas.

En el caso particular de que \mathbf{V} sea la matriz identidad, $\mathbf{V} = \mathbf{I}$, se tiene

$$w_i(p, \mathbf{I}) = \frac{2^{-p} p!}{i!(p-i)!}, \quad i = 0, \dots, p.$$

1.4. Medidas de ϕ -divergencia. Definición y propiedades

La medida de ϕ -divergencia entre los vectores de probabilidad

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= (p_{11}, \dots, p_{1J}, \dots, p_{ij}, \dots, p_{I1}, \dots, p_{IJ})^T, \\
\mathbf{q} &= (q_{11}, \dots, q_{1J}, \dots, q_{ij}, \dots, q_{I1}, \dots, q_{IJ})^T,
\end{aligned}$$

pertenecientes a \mathcal{P} , se define mediante

$$d_\phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \phi\left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}}\right), \quad \phi \in \Phi^*, \tag{1.30}$$

donde Φ^* es la clase de las funciones convexas $\phi(x)$, $x \geq 0$ tales que en $x = 1$, $\phi(1) = 0$, en $x = 0$, $0\phi\left(\frac{0}{0}\right) = 0$ y $0\phi\left(\frac{p}{0}\right) = p \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi(u)}{u}$, para $p \neq 0$.

Es interesante observar que siendo $\phi \in \Phi^*$ una función diferenciable en $x = 1$, la función

$$\psi(x) = \phi(x) - \phi'(1)(x - 1)$$

también pertenece a Φ^* y tiene la propiedad adicional de que $\psi'(1) = 0$. Esta propiedad, junto con la convexidad, implica que $\psi(x) \geq 0$, para cualquier $x \geq 0$. Además,

$$\begin{aligned} d_\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \left(\phi \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) - \phi'(1) \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} - 1 \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \phi \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \\ &= d_\phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Dado que las dos medidas de divergencia coinciden, podemos considerar el conjunto Φ^* como equivalente al conjunto

$$\Phi = \Phi^* \cap \{\Phi : \Phi'(1) = 0\}.$$

La medida de divergencia de Kullback-Leibler se obtiene para $\psi(x) = x \log x - x + 1$ o bien para $\phi(x) = x \log x$. Sustituyendo en (1.30) la función $\psi(x) = x \log x - x + 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} d_\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \psi \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}} - \frac{p_{ij}}{q_{ij}} + 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}}. \end{aligned}$$

Análogamente, sustituyendo la función $\phi(x) = x \log x$ en (1.30) se llega a

$$\begin{aligned} d_\phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \phi \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}}. \end{aligned}$$

Obsérvese que tomando $\psi(x) = \phi(x) - \phi'(1)(x - 1)$ se tiene

$$d_{Kullback}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}}. \quad (1.31)$$

En la página 6 de Pardo (2006) se muestran en una tabla las medidas de ϕ -divergencia obtenidas a partir de (1.30) que han jugado un papel más relevante en aplicaciones estadísticas. Antes de seguir dando ejemplos de medidas de ϕ -divergencia que jugarán un papel relevante a lo largo de esta memoria, se va a poner de manifiesto una de las propiedades más importantes de las medidas de ϕ -divergencia en lo que concierne a esta memoria. Siendo \mathbf{p} y \mathbf{q} , pertenecientes a \mathcal{P} , y $\phi \in \Phi^*$ una función diferenciable en $x = 1$, se tiene que

$$0 \leq d_{\phi}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq \phi(0) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r}$$

con $d_{\phi}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

Desde un punto de vista estadístico, la familia de medidas de ϕ -divergencia más importante es la familia de divergencias introducidas por Cressie y Read (1984) y que son un caso particular de la familia de ϕ -divergencias considerada en (1.30). Esta familia de ϕ -divergencias se define tomando

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}(x^{\lambda+1} - x - \lambda(x-1)), & \lambda \neq 0, \lambda \neq -1 \\ \phi_{(0)}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_{(\lambda)}(x) = x \log x - x + 1, & \lambda = 0 \\ \phi_{(-1)}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow -1} \phi_{(\lambda)}(x) = -\log x + x - 1, & \lambda = -1, \end{cases} \quad (1.32)$$

que da lugar a la siguiente familia de divergencias

$$d_{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}}{q_{ij}^{\lambda}} - 1 \right), \quad (1.33)$$

sustituyendo en (1.30) la función

$$\phi_{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}(x^{\lambda+1} - x - \lambda(x-1))$$

para $-\infty < \lambda < \infty$ y $\lambda \neq 0, \lambda \neq -1$, es decir

$$\begin{aligned}
d_{\phi_{(\lambda)}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \phi_{(\lambda)} \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \left(\frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(\left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right)^{\lambda+1} - \frac{p_{ij}}{q_{ij}} - \lambda \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} - 1 \right) \right) \right) \\
&= \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}}{q_{ij}^{\lambda}} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Los casos particulares de $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$ se obtienen aplicando el límite en la definición anterior, es decir.

$$\begin{aligned}
d_{\phi_{(0)}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}}{q_{ij}^{\lambda}} - 1 \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}}{q_{ij}^{\lambda}} - 1 \right)}{\frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda(1+\lambda))} \\
&= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}} = d_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{\phi_{(-1)}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \lim_{\lambda \rightarrow -1} \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}}{q_{ij}^{\lambda}} - 1 \right) = \lim_{\lambda \rightarrow -1} \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}}{q_{ij}^{\lambda}} - 1 \right)}{\frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda(1+\lambda))} \\
&= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \log \frac{q_{ij}}{p_{ij}} = d_{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\lambda = 0$, se obtiene $d_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_{Kullback}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ y para $\lambda = -1$, $d_{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_{Kullback}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Esta familia de divergencias, la familia de divergencias de Cressie y Read, jugará un papel muy importante a lo largo de la presente memoria.

Es importante observar que para $\lambda = 1$, se tiene

$$d_{\lambda=1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(p_{ij} - q_{ij})^2}{q_{ij}} = d_{Pearson}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (1.34)$$

ya que

$$\begin{aligned}
d_{\lambda=1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^2}{q_{ij}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^2}{q_{ij}} - 2 + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^2}{q_{ij}} - 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij} q_{ij}}{q_{ij}} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{q_{ij}^2}{q_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(p_{ij} - q_{ij})^2}{q_{ij}} = d_{Pearson}(\mathbf{p}, \mathbf{q}),
\end{aligned}$$

siendo $d_{Pearson}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ la distancia de Pearson entre los vectores de probabilidad \mathbf{p} y \mathbf{q} . Se concluye por tanto que tanto la medida de divergencia de Kullback-Leibler como la distancia de Pearson están incluidas en la familia de divergencias de Cressie y Read. Para $\lambda = -\frac{1}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
d_{\lambda=-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\frac{1}{2}}}{q_{ij}^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) = 4 \left(1 - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij}^{\frac{1}{2}} q_{ij}^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(p_{ij}^{\frac{1}{2}} - q_{ij}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= 2d_{Hellinger}(\mathbf{p}, \mathbf{q})^2, \tag{1.35}
\end{aligned}$$

siendo $d_{Hellinger}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ la distancia de Hellinger entre los vectores de probabilidad \mathbf{p} y \mathbf{q} . Esta medida de divergencia fue considerada por primera vez por Hellinger (1909). Es interesante recordar que $d_{Hellinger}$ es la única medida de divergencia que es una métrica. Otras medidas de divergencia bien conocidas que se obtienen como caso particular de $d_{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, son:

- Para $\lambda = -2$, la medida de divergencia modificada de Pearson, cuya expresión es

$$\begin{aligned}
d_{\lambda=-2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{(-2)(-1)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{-1}}{q_{ij}^{-2}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{q_{ij}^2}{p_{ij}} - 2 + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(p_{ij} - q_{ij})^2}{p_{ij}}
\end{aligned}$$

- Para $\lambda = -1$, la medida de divergencia modificada de Kullback-Leibler que viene dada por

$$d_{\lambda=-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_{Kullback}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \log \frac{q_{ij}}{p_{ij}}.$$

1.5. Objetivos de la memoria

Supongamos que se dispone de n individuos para llevar a cabo un experimento. Estos n individuos se disponen en I grupos de forma que en el grupo i -ésimo se tienen en estudio n_i individuos con $n_1 + \dots + n_I = n$. A cada grupo se le suministra una determinada dosis de medicamento A. Si al grupo i -ésimo se le asigna una dosis d_i , se supondrá que

$$d_1 \leq d_2 \dots \leq d_I.$$

Sea Y_i , $i = 1, \dots, I$, la variable aleatoria que indica el número de “éxitos” al aplicar la dosis d_i a un grupo de n_i individuos. En realidad se dispone de I poblaciones binomiales $B(n_i, \pi_i)$, $i = 1, \dots, I$ y el objetivo que se persigue es el de contrastar

$$H_0 : \pi_1 = \dots = \pi_I \text{ frente a } H_1 : \pi_1 \leq \pi_2 \leq \dots \leq \pi_I \quad (1.36)$$

con al menos una desigualdad estricta.

En este tipo de contrastes, multitud de autores han puesto de manifiesto la ineficiencia de los procedimientos clásicos de contraste, basados bien en el estadístico clásico de la ji-cuadrado de Pearson, bien en el estadístico clásico del cociente de verosimilitudes, ya que es necesario incorporar el orden estocástico que aparece en la hipótesis alternativa. El ejemplo de la Sección 2.1 clarificará convenientemente la importancia de este problema. El Capítulo 2 está dedicado a introducir nuevas familias de estadísticos basadas en medidas de divergencia, y a estudiar su comportamiento frente a los estadísticos de la ji-cuadrado y del cociente de verosimilitudes, consideradas para abordar el problema de contraste planteado en (1.36).

Si la variable respuesta binaria la denotamos por Y hemos dicho anteriormente que parece razonable esperar que

$$P(Y = 1/D = d),$$

la probabilidad de éxito cuando la dosis de medicamento es d , se incrementa al incrementarse d . A veces, uno puede pensar en un comportamiento lineal de D en alguna escala. Por ejemplo,

se puede utilizar un modelo logit

$$\text{logit}(P(Y = 1/D = d_i)) = \alpha + \beta d_i$$

con $\text{logit}(p) = \log(p/(1-p))$. Esta nueva formulación del problema se llevará a cabo en el Capítulo 3 y se introducirán los estadísticos basados en medidas de divergencia para abordar este tipo de problemas.

Los problemas considerados anteriormente, y estudiados en los Capítulos 2 y 3, se pueden considerar asociados a tablas de contingencia $I \times 2$. Inicialmente se podría pensar que los problemas asociados a tablas de contingencia $2 \times J$ se podrían resolver de forma análoga a los anteriores, sin embargo el problema que subyace en este caso es muy distinto en el sentido de que ahora estamos interesados en comparar dos poblaciones multinomiales y no I binomiales. Este problema, el de las tablas $2 \times J$, se abordará en el Capítulo 4 y servirá para ver la forma de abordar el problema más general el problema de las tablas $I \times J$ considerado en el Capítulo 5. Finalmente en el Capítulo 6 se plantean algunas extensiones y futuras líneas de investigación.

Capítulo 2

Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

El objetivo de este Capítulo es el de presentar una resolución al problema de contraste de hipótesis formulado en (1.36) mediante los estadísticos ϕ -divergencia. Se comenzará con un ejemplo con el fin de clarificar convenientemente todos los elementos del problema bajo consideración.

2.1. Descripción del problema y formulación en términos de un modelo loglineal

Se considerará un ejemplo que aparece en Silvapulle y Sen (2005). La Tabla 2.1 contiene un conjunto de datos relativos a un estudio de la influencia del alcoholismo materno en las malformaciones congénitas de los órganos genitales en los descendientes.

Las mujeres rellenaban previamente un cuestionario, los datos completos de este estudio, incluyendo otros detalles, se pueden consultar en Graubard y Korn (1987). En el cuestionario se preguntaba a las mujeres por su consumo de alcohol durante los tres primeros meses de su embarazo y la respuesta se clasificaba en cuatro categorías: sin consumo de alcohol ($i = 1$), un consumo medio entre cero y una bebida alcohólica al día ($i = 2$), entre una y tres bebidas alcohólicas diarias ($i = 3$) y tres o más bebidas alcohólicas al día ($i = 4$). Una vez terminado el embarazo se registraron los datos que se reflejan en la Tabla 2.1, que contiene los datos relativos

24 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

a las malformaciones sexuales congénitas clasificadas en relación al consumo materno de alcohol.

i (dosis de alcohol)	n_i (total)	n_{i1} (n° de malformaciones)	n_{i2} (n° de no malformaciones)
1 (no consumen)	17114	48	17066
2 ((0, 1) en promedio)	14502	38	14464
3 ([1, 3) en promedio)	793	5	788
4 (≥ 3 en promedio)	165	2	163

Tabla 2.1: Malformaciones congénitas de los órganos genitales en los descendientes en relación con el consumo materno de alcohol.

En lo sucesivo se considerará como “éxito” tener malformaciones congénitas y se denotará por π_i la probabilidad del suceso éxito asociado a la i -ésima dosis de alcohol, $i = 1, 2, 3$ y 4.

Ahora se plantean algunas cuestiones de inferencia estadística que pueden surgir en este ejemplo y en otros similares con probabilidades binomiales y que se analizarán y resolverán en base a las familias de estadísticos phi-divergencia a lo largo de este Capítulo de la presente memoria de investigación.

1. ¿Existe alguna evidencia de que el consumo materno de alcohol esté relacionado con la malformación congénita de los órganos genitales? Para responder a esta pregunta, la hipótesis nula y alternativa pueden formularse como

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 \text{ frente a } H_1 : \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \text{ no son iguales,}$$

respectivamente. Sin embargo, esta formulación no es muy apropiada pues el asunto de interés es el posible incremento en la probabilidad de malformación a medida que aumenta el consumo de alcohol.

2. ¿Existe alguna evidencia de que un incremento en el consumo de alcohol esté relacionado con un incremento en la probabilidad de malformación? Esta cuestión podría formularse de la siguiente manera

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 \tag{2.1}$$

$$H_1 : \pi_1 \leq \pi_2 \leq \pi_3 \leq \pi_4, \text{ al menos con una desigualdad estricta.}$$

Para abordar este problema se introducirán y analizarán en esta memoria dos familias de estadísticos de contraste para resolver contrastes de hipótesis como el que se tiene en (2.1). Las dos

familias de estadísticos de contraste están basadas en medidas de ϕ -divergencia y serán sendas generalizaciones del estadístico del cociente de verosimilitudes y del estadístico de la ji-cuadrado de Pearson, habitualmente utilizados para abordar este problema. También se considerarán tres estadísticos del tipo Wald, que aparecen en la resolución de problemas generales en el libro de Silvapulle y Sen (2005), y que se han adaptado en esta memoria para abordar el problema bajo consideración.

Pasemos a plantear en términos generales el modelo que se estudiará en este Capítulo.

Se considera un experimento con I dosis ordenadas de forma creciente. Se someten a estudio n individuos, de los cuales n_i son los individuos a los que se les somete al nivel i -ésimo de dosis. Se define la variable aleatoria N_{i1} como el número de éxitos ($Y = 1$) asociado a la dosis i -ésima en n_i ensayos independientes y $N_{i2} = n - N_{i1}$ el número de fracasos, $i = 1, \dots, I$. Si se denota por $\pi_i = P(Y = 1/X = i)$ la probabilidad de éxito asociada a la dosis i -ésima, se tiene que N_{i1} es una variable aleatoria Binomial con parámetros n_i y π_i , $i = 1, \dots, I$, es decir, $N_{i1} \equiv B(n_i, \pi_i)$, $i = 1, \dots, I$. Las observaciones que se obtienen de $\mathbf{N}_i = (N_{i1}, N_{i2})^T$ con $i = 1, \dots, I$ se pueden representar en una tabla de contingencia de dos columnas de la siguiente manera

n_1	n_{11}	$n_{12} = n_1 - n_{11}$
\vdots	\vdots	\vdots
n_i	n_{i1}	$n_{i2} = n_i - n_{i1}$
\vdots	\vdots	\vdots
n_I	n_{I1}	$n_{I2} = n_I - n_{I1}$

donde $n_1 + n_2 + \dots + n_I = n$ y n_{i1} es el número de éxitos asociados a la variable aleatoria Binomial N_{i1} , $i = 1, \dots, I$.

El contraste de hipótesis que se plantea en este Capítulo es,

$$\begin{aligned} H_0 : \pi_1 = \dots = \pi_I \\ H_1 : \pi_1 \leq \dots \leq \pi_I \text{ al menos con una desigualdad estricta.} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Para formular este contraste de hipótesis en términos de un modelo loglineal se comenzará

26 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

introduciendo el siguiente vector de probabilidades,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) &= (p_{11}(\boldsymbol{\theta}), p_{12}(\boldsymbol{\theta}), p_{21}(\boldsymbol{\theta}), p_{22}(\boldsymbol{\theta}), \dots, p_{I1}(\boldsymbol{\theta}), p_{I2}(\boldsymbol{\theta}))^T \\ &= \left(\frac{n_1}{n} \pi_1, \frac{n_1}{n} (1 - \pi_1), \dots, \frac{n_I}{n} \pi_I, \frac{n_I}{n} (1 - \pi_I) \right)^T \end{aligned} \quad (2.3)$$

y se supondrá

$$\log p_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = u + u_{1(i)} + \theta_{2(j)} + \theta_{12(ij)}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, 2 \quad (2.4)$$

siendo

$$u_{1(I)} = 0, \quad \theta_{2(2)} = 0, \quad \theta_{12(i2)} = 0, \quad i = 1, \dots, I - 1, \quad \theta_{12(Ij)} = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.5)$$

las condiciones de identificabilidad.

La siguiente Proposición establece que el vector de parámetros desconocidos del modelo loglineal dado en (2.4) es $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{2(1)}, \theta_{12(11)}, \dots, \theta_{12(I-1,1)})^T$, ya que tanto $u(\boldsymbol{\theta})$ como $u_{1(i)}(\boldsymbol{\theta})$, $i = 1, \dots, I - 1$ son parámetros redundantes.

Proposición 1 *Dado el modelo loglineal (2.4), con las condiciones de identificabilidad (2.5), el vector de parámetros desconocidos es*

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_{2(1)}, \theta_{12(11)}, \dots, \theta_{12(I-1,1)})^T.$$

Demostración. Si se tiene en cuenta que

$$p_{I1}(\boldsymbol{\theta}) + p_{I2}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n_I}{n}$$

y que $u_{1(I)} = \theta_{12(I1)} = \theta_{12(I2)} = 0$, se llega a

$$\begin{aligned} p_{I1}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp(u + u_{1(I)} + \theta_{2(1)} + \theta_{12(I1)}) = \exp(u + \theta_{2(1)}) \\ p_{I2}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp(u). \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{n_I}{n} = \exp(u)(\exp(\theta_{2(1)}) + 1)$$

y en consecuencia

$$u = u(\boldsymbol{\theta}) = \log \frac{\frac{n_I}{n}}{1 + \exp(\theta_{2(1)})}$$

luego $u = u(\boldsymbol{\theta})$ será un parámetro redundante si se considera que $\theta_{2(1)}$ es un parámetro del modelo.

Por otro lado, al ser

$$p_{i1}(\boldsymbol{\theta}) + p_{i2}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, \dots, I$$

con

$$\begin{aligned} p_{i1}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp(u + u_{1(i)} + \theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)}) \\ p_{i2}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp(u + u_{1(i)} + \theta_{2(2)} + \theta_{12(i2)}) \end{aligned}$$

se tiene

$$\frac{n_i}{n} = p_{i1}(\boldsymbol{\theta}) + p_{i2}(\boldsymbol{\theta}) = \exp(u_{1(i)}) \exp(u) (\exp(\theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)}) + 1),$$

luego

$$\log \frac{n_i}{n} = u_{1(i)} + u + \log(1 + \exp(\theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)})),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} u_{1(i)}(\boldsymbol{\theta}) &= \log \left(\frac{n_i}{n} \right) - \log \frac{\frac{n_I}{n}}{1 + \exp(\theta_{2(1)})} - \log(1 + \exp(\theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)})) \\ &= \log \frac{\frac{n_i}{n} (1 + \exp(\theta_{2(1)}))}{\frac{n_I}{n} (1 + \exp(\theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)}))} \\ &= \log \frac{n_i (1 + \exp(\theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)}))}{n_I (1 + \exp(\theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)}))}. \end{aligned}$$

Así se llega a que $u_{1(i)}(\boldsymbol{\theta})$, $i = 1, \dots, I-1$, son parámetros redundantes y el vector de parámetros desconocidos del modelo loglineal bajo consideración es

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_{2(1)}, \theta_{12(11)}, \dots, \theta_{12(I-1,1)})^T.$$

■

28 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

El contraste dado en (2.2) se puede formular equivalentemente como

$$\begin{aligned} H_0 : \pi_1 = \dots = \pi_I & \quad (2.6) \\ H_1 : \frac{\pi_i(1-\pi_{i+1})}{\pi_{i+1}(1-\pi_i)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, I-1, \text{ y } \frac{\pi_i(1-\pi_{i+1})}{\pi_{i+1}(1-\pi_i)} < 1 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, I-1\} \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \pi_i \leq \pi_{i+1} & \Leftrightarrow \pi_i - \pi_i\pi_{i+1} \leq \pi_{i+1} - \pi_i\pi_{i+1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \pi_i(1-\pi_{i+1}) \leq \pi_{i+1}(1-\pi_i) \\ & \Leftrightarrow \frac{\pi_i(1-\pi_{i+1})}{\pi_{i+1}(1-\pi_i)} \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, I-1. \end{aligned}$$

Si se denotan

$$\vartheta_i^* = \frac{\pi_i(1-\pi_{i+1})}{\pi_{i+1}(1-\pi_i)}, \quad i = 1, \dots, I-1, \quad (2.7)$$

los “ odds ratio ” o “razón de productos cruzados” locales, el contraste dado en (2.6) se puede expresar mediante

$$H_0 : \vartheta_i^* = 1, \quad i = 1, \dots, I-1 \text{ frente a } H_1 : \vartheta_i^* \leq 1, \quad i = 1, \dots, I-1 \quad (2.8)$$

y $\vartheta_i^* < 1$ para algún $i \in \{1, \dots, I-1\}$.

En consecuencia se está expresando que bajo la hipótesis alternativa, se verifica el “orden de razón de verosimilitudes”, considerado en (1.13) del Capítulo 1.

Proposición 2 *Las hipótesis (2.8) las podemos formular mediante*

$$\begin{aligned} H_0 : \theta_{12(11)} = \theta_{12(21)} = \dots = \theta_{12(I-1,1)} = 0, & \quad (2.9) \\ H_1 : \theta_{12(11)} \leq \theta_{12(21)} \leq \dots \leq \theta_{12(I-1,1)} \text{ al menos con una desigualdad estricta.} \end{aligned}$$

Demostración. Al ser

$$p_{i1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n_i}{n} \pi_i, \quad p_{i2}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n_i}{n} (1 - \pi_i), \quad i = 1, \dots, I$$

los “ odds ratio ” locales considerados en (2.7) se pueden expresar mediante

$$\vartheta_i^* = \frac{p_{i1}(\boldsymbol{\theta})p_{i+1,2}(\boldsymbol{\theta})}{p_{i+1,1}(\boldsymbol{\theta})p_{i,2}(\boldsymbol{\theta})}, \quad i = 1, \dots, I-1,$$

y el contraste dado en (2.8) se puede escribir en forma matricial mediante

$$H_0 : \boldsymbol{\vartheta}^* = \mathbf{1}_{I-1}, \text{ frente a } H_1 : \boldsymbol{\vartheta}^* \leq \mathbf{1}_{I-1} \text{ y } \boldsymbol{\vartheta}^* \neq \mathbf{1}_{I-1}$$

donde $\mathbf{1}_a$ es el vector de dimensión a y cuyas componentes son 1 y $\boldsymbol{\vartheta}^* = (\vartheta_1^*, \dots, \vartheta_{I-1}^*)^T$.

Ahora bien,

$$p_{i1}(\boldsymbol{\theta})p_{i+1,2}(\boldsymbol{\theta}) = p_{i+1,1}(\boldsymbol{\theta})p_{i,2}(\boldsymbol{\theta}), \quad i = 1, \dots, I-1$$

es equivalente a

$$\log p_{i1}(\boldsymbol{\theta}) + \log p_{i+1,2}(\boldsymbol{\theta}) = \log p_{i+1,1}(\boldsymbol{\theta}) + \log p_{i,2}(\boldsymbol{\theta})$$

y por (2.4)

$$\begin{aligned} u + u_{1(i)} + \theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)} + u + u_{1(i+1)} + \theta_{2(2)} + \theta_{12(i+1,2)} &= \\ = u + u_{1(i+1)} + \theta_{2(1)} + \theta_{12(i+1,1)} + u + u_{1(i)} + \theta_{2(2)} + \theta_{12(i2)}. \end{aligned}$$

Simplificando se llega a

$$\theta_{12(i1)} = \theta_{12(i+1,1)}, \quad i = 1, \dots, I-1.$$

■

Observación 1 *El parámetro $\theta_{2(1)}$ no interviene en (2.9) y además bajo la hipótesis nula*

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_I = \pi_0$$

se tiene

$$\begin{aligned} p_{i1}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp(u) \exp(u_{1(i)}) \exp(\theta_{2(1)}) \\ &= \frac{\frac{n_I}{n}}{1 + \exp(\theta_{2(1)})} \frac{n_i}{n_I} \frac{1 + \exp(\theta_{2(1)})}{1 + \exp(\theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)})} \exp(\theta_{2(1)}) \end{aligned}$$

y como bajo H_0 , $\theta_{12(i1)} = 0$, se llega a

$$\frac{n_i}{n} \pi_i = \frac{n_i}{n} \frac{\exp(\theta_{2(i)})}{1 + \exp(\theta_{2(1)})}.$$

Luego

$$I\pi_0 = I \frac{\exp(\theta_{2(i)})}{1 + \exp(\theta_{2(1)})}$$

con lo cual

$$\theta_{2(1)} = \log \frac{\pi_0}{1 - \pi_0} = \text{logit}(\pi_0) \quad (2.10)$$

y contiene toda la información acerca del vector de probabilidad homogéneo.

Observación 2 Con el fin de poder seguir una notación matricial el modelo loglineal (2.4) se puede expresar en la forma

$$\log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 & \mathbf{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde por $\log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$ se entiende el vector

$$(\log p_{11}(\boldsymbol{\theta}), \log p_{12}(\boldsymbol{\theta}), \dots, \log p_{I1}(\boldsymbol{\theta}), \log p_{I2}(\boldsymbol{\theta})),$$

y las matrices \mathbf{W}_0 y \mathbf{W} vienen dadas mediante

$$\mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que del modelo loglineal “saturado” dado en (2.11) se tiene,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 & \mathbf{W} \end{pmatrix}^{-1} \log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.12)$$

puesto que el número de filas es igual al número de columnas en la matriz de diseño.

En (2.11) y (2.12) por \otimes se está denotando el producto de Kronecker (ver Capítulo 16 de Harville (2008)), \mathbf{I}_a es la matriz identidad de orden a y $\mathbf{0}_a$ es el vector nulo de a componentes.

Si se denota por \mathbf{G}_{I-1} la matriz cuadrada de orden $I - 1$ definida mediante

$$\mathbf{G}_{I-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(I-1) \times (I-1)}$$

se tiene que las hipótesis dadas en (2.9) se pueden escribir en la forma

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{I-1} \tag{2.13}$$

$$H_1 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{0}_{I-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}_{I-1},$$

siendo $\mathbf{R} = (\mathbf{0}_{I-1}, \mathbf{G}_{I-1})$.

En lo que hace referencia a los espacios paramétricos involucrados en el problema bajo consideración se tienen

$$\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^I : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{I-1}\}$$

que es el espacio paramétrico bajo la hipótesis nula,

$$\tilde{\Theta} = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^I : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{0}_{I-1}\}$$

que es el espacio paramétrico restringido y finalmente el espacio paramétrico Θ .

Es claro que

$$\Theta_0 \subset \tilde{\Theta} \subset \Theta = \mathbb{R}^I.$$

2.2. Estadísticos phi-divergencia. Distribución asintótica

El siguiente resultado establece la expresión de la matriz de información de Fisher del modelo loglineal (2.4).

Teorema 1 Si se denota por

$$\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}_0)$$

donde $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta_0$, y $\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}$, $i = 1, \dots, I$, se tiene

$$\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) = \pi_0(1 - \pi_0) \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{I-1} \\ \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{I-1} & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{I-1} \end{pmatrix}$$

Demstración. Se consideran las matrices

$$\mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1^{(i+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & \end{pmatrix}_{2 \times I} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{i,1}^T \\ \mathbf{W}_{i,2}^T \end{pmatrix}$$

$i = 1, \dots, I - 1$ y la matriz

$$\mathbf{W}_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{2 \times I} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{I,1}^T \\ \mathbf{W}_{I,2}^T \end{pmatrix}.$$

El modelo loglineal dado en (2.4) se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} \log \begin{pmatrix} \frac{n_i}{n} \pi_i \\ \frac{n_i}{n} (1 - \pi_i) \end{pmatrix} &= (u + u_{1(i)}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta}, \quad i = 1, \dots, I - 1 \\ \log \begin{pmatrix} \frac{n_I}{n} \pi_I \\ \frac{n_I}{n} (1 - \pi_I) \end{pmatrix} &= u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{W}_I \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ahora se obtendrá la matriz de información de Fisher para el modelo loglineal dado en (2.4). La matriz de información de Fisher será

$$\mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} E \left[\left(\frac{\partial \log \mathcal{L}(N_{11}, \dots, N_{I1})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^2 \right],$$

siendo

$$\mathcal{L}(N_{11}, \dots, N_{I1}) = \prod_{i=1}^I \binom{n_i}{N_{i1}} \pi_i^{N_{i1}} (1 - \pi_i)^{n_i - N_{i1}}.$$

Es claro que

$$E \left[\frac{\partial \log \mathcal{L}(N_{11}, \dots, N_{I1})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] = 0,$$

luego

$$\mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \text{Var} \left[\frac{\partial \log \mathcal{L}(N_{11}, \dots, N_{I1})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right].$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(N_{11}, \dots, N_{I1}) &= \sum_{i=1}^I \left\{ \log \binom{n_i}{N_{i1}} + N_{i1} \log \pi_i + (n_i - N_{i1}) \log (1 - \pi_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^I \ell_i(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} \log \frac{n_i}{n} \pi_i &= u + u_{1(i)} + \mathbf{W}_{i,1}^T \boldsymbol{\theta}, \quad i = 1, \dots, I-1 \\ \log \frac{n_i}{n} (1 - \pi_i) &= u + u_{1(i)} + \mathbf{W}_{i,2}^T \boldsymbol{\theta}, \quad i = 1, \dots, I-1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \log \frac{n_I}{n} \pi_I &= u + \mathbf{W}_{I,1}^T \boldsymbol{\theta}, \\ \log \frac{n_I}{n} (1 - \pi_I) &= u + \mathbf{W}_{I,2}^T \boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= N_{i1} \mathbf{W}_{i,1}^T + (n_i - N_{i1}) \mathbf{W}_{i,2}^T \\ &= (N_{i1}, n_i - N_{i1}) \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{i,1}^T \\ \mathbf{W}_{i,2}^T \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{N}_i^T \mathbf{W}_i, \quad i = 1, \dots, I \end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}(N_{11}, \dots, N_{I1})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^I \mathbf{N}_i^T \mathbf{W}_i.$$

Así se llega a,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{n} \text{Var} \left[\sum_{i=1}^I \mathbf{N}_i^T \mathbf{W}_i \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \mathbf{W}_i^T \text{Cov}(\mathbf{N}_i^T) \mathbf{W}_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \mathbf{W}_i^T n_i \begin{pmatrix} \pi_i(1 - \pi_i) & -\pi_i(1 - \pi_i) \\ -\pi_i(1 - \pi_i) & \pi_i(1 - \pi_i) \end{pmatrix} \mathbf{W}_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \mathbf{W}_i^T n_i \boldsymbol{\Sigma}_{\pi_i} \mathbf{W}_i \\ &= \mathbf{W}^T \text{diag} \left\{ \frac{n_i}{n} \boldsymbol{\Sigma}_{\pi_i} \right\}_{i=1, \dots, I} \mathbf{W}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

siendo $\mathbf{W}^T = (\mathbf{W}_1^T, \dots, \mathbf{W}_I^T)$. Obsérvese que la matriz \mathbf{W} se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

En la expresión anterior de la matriz de información de Fisher se ha establecido que

$$\text{Cov}(\mathbf{N}_i^T) = n_i \boldsymbol{\Sigma}_{\pi_i}.$$

En efecto, es claro que

$$\text{Var}(N_{i1}) = \text{Var}(n_i - N_{i1}) = n_i \pi_i (1 - \pi_i)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N_{i1}, n_i - N_{i1}) &= E [N_{i1}(n_i - N_{i1})] - E [N_{i1}] E [n_i - N_{i1}] \\ &= n_i^2 \pi_i - n_i \pi_i (1 - \pi_i) - n_i^2 \pi_i^2 - n_i \pi_i (n_i - n_i \pi_i) \\ &= n_i^2 \pi_i - n_i \pi_i (1 - \pi_i) - n_i^2 \pi_i^2 - n_i^2 \pi_i + n_i^2 \pi_i^2 \\ &= -n_i \pi_i (1 - \pi_i). \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis nula, $\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_I = \pi_0$, se tiene

$$\mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{W}^T \text{diag} \left\{ \frac{n_i}{n} \boldsymbol{\Sigma}_{\pi_0} \right\}_{i=1, \dots, I} \mathbf{W}.$$

Ahora bien, haciendo uso de la forma que tiene la matriz \mathbf{W} en (2.16) se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix}^T \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right) \text{diag} \left\{ \frac{n_i}{n} \boldsymbol{\Sigma}_{\pi_0} \right\}_{i=1}^I \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix}^T \text{diag} \left\{ \frac{n_i}{n} \right\}_{i=1}^I \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{\Sigma}_{\pi_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n & n_1 & n_2 & \cdots & n_{I-1} \\ n_1 & n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{I-1} & 0 & 0 & \cdots & n_{I-1} \end{pmatrix} \pi_0 (1 - \pi_0), \end{aligned}$$

■

En lo que sigue se denotará por $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ y $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ los estimadores de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, estando $\boldsymbol{\theta}$ en Θ_0 , $\tilde{\Theta}$ y Θ respectivamente.

Silvapulle y Sen (2005) definen una serie de estadísticos de contraste para abordar los problemas de contraste de hipótesis con restricciones.

Definición 1 *Asociados al modelo loglineal (2.11) se definen los tres siguientes estadísticos de contraste de tipo Wald*

$$W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = n \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{R}^T \left(\mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{R}^T \right)^{-1} \mathbf{R} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.17)$$

$$H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = n (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.18)$$

$$D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = n (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) - n (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.19)$$

donde la matriz $\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta})$ es la matriz de información de Fisher obtenida en el Teorema 1 y cuya expresión evaluada en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ viene dada por

$$\mathcal{I}_F(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{\pi}_0 (1 - \hat{\pi}_0) \begin{pmatrix} 1 & (\hat{\boldsymbol{\lambda}}^*)^T \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}^* & \text{diag}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}^*) \end{pmatrix}$$

36 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

con $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^* = (\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_{I-1}}{n})^T$. Si se evalúa en $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$, se tiene

$$\mathcal{I}_F(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{X}^T \text{diag}\{\widehat{\lambda}_i \widetilde{\pi}_i (1 - \widetilde{\pi}_i)\}_{i=1}^I \mathbf{X},$$

siendo

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix}.$$

La siguiente proposición presenta una manera de expresar $W(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}})$ en forma más explícita.

Proposición 3 *El estadístico tipo Wald, $W(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}})$, definido en (2.17), se puede expresar en la forma*

$$W(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^*)^T \boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^*} \widetilde{\boldsymbol{\theta}}^* \widehat{\pi}_0 (1 - \widehat{\pi}_0).$$

con $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^* = (\widetilde{\theta}_{12(11)}, \dots, \widetilde{\theta}_{12(I-1,1)})^T$.

Demostración. Al ser

$$\mathcal{I}_F(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \widehat{\pi}_0 (1 - \widehat{\pi}_0) \begin{pmatrix} 1 & (\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^*)^T \\ \widehat{\boldsymbol{\lambda}}^* & \text{diag}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^*) \end{pmatrix}$$

con $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^* = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_{I-1})^T$, se tiene,

$$\mathcal{I}_F^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{\widehat{\pi}_0 (1 - \widehat{\pi}_0)} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{C}^* \\ \mathbf{B}^* & \mathbf{D}^* \end{pmatrix}.$$

No es necesario calcular los elementos \mathbf{a}^* , \mathbf{C}^* y \mathbf{B}^* . El elemento \mathbf{D}^* viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= (\mathbf{D} - \mathbf{BC})^{-1} \\ &= (\text{diag}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^*) - \widehat{\boldsymbol{\lambda}}^* \widehat{\boldsymbol{\lambda}}^{*T})^{-1} \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^*}^{-1} \end{aligned}$$

con $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}^* = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_{I-1})^T$.

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{I}_F^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{R}^T &= \frac{1}{\widehat{\pi}_0(1-\widehat{\pi}_0)}(\mathbf{0}_{I-1}, \mathbf{G}_{I-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{C}^* \\ \mathbf{B}^* & \mathbf{D}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{I-1} \\ \mathbf{G}_{I-1}^T \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\widehat{\pi}_0(1-\widehat{\pi}_0)}(\mathbf{G}_{I-1}\mathbf{B}^*, \mathbf{G}_{I-1}\mathbf{D}^*) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{I-1} \\ \mathbf{G}_{I-1}^T \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\widehat{\pi}_0(1-\widehat{\pi}_0)}\mathbf{G}_{I-1}\mathbf{D}^*\mathbf{G}_{I-1}^T \end{aligned}$$

y la inversa de esta matriz toma la expresión

$$(\mathbf{R}\mathcal{I}_F^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{R}^T)^{-1} = \widehat{\pi}_0(1-\widehat{\pi}_0)\mathbf{G}_{I-1}^{-T}(\mathbf{D}^*)^{-1}\mathbf{G}_{I-1}^{-1}.$$

Por otro lado

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{R}^T = (\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{2(1)}, (\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^*)^T) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{I-1} \\ \mathbf{G}_{I-1}^T \end{pmatrix} = (\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^*)^T \mathbf{G}_{I-1}^T$$

con $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^* = (\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{12(11)}, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{12(I-1,1)})^T$. Luego

$$W(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}) = n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^*)^T \Sigma_{\widehat{\lambda}^*} \widetilde{\boldsymbol{\theta}}^* \widehat{\pi}_0(1-\widehat{\pi}_0). \quad (2.20)$$

■

Los estadísticos (2.17), (2.18) y (2.19) tienen la misma distribución asintótica, más adelante se hará referencia a ella, y jugarán un papel importante cuando se obtenga la distribución asintótica de los estadísticos phi-divergencia que se introducirán al final de esta Sección.

Se tienen fórmulas explícitas para los estimadores de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ y \mathbf{p} bajo la hipótesis nula,

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\theta}} &= (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{2(1)}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{12(11)}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{12(I-1,1)})^T = \left(\log \frac{\widehat{\pi}_0}{1-\widehat{\pi}_0}, 0, \dots, 0 \right)^T \\ &= (\text{logit}(\widehat{\pi}_0), 0, \dots, 0)^T. \\ \widehat{\mathbf{p}} &= \left(\frac{n_1}{n}\widehat{\pi}_0, \frac{n_1}{n}(1-\widehat{\pi}_0), \frac{n_2}{n}\widehat{\pi}_0, \frac{n_2}{n}(1-\widehat{\pi}_0), \dots, \frac{n_I}{n}\widehat{\pi}_0, \frac{n_I}{n}(1-\widehat{\pi}_0) \right)^T. \end{aligned}$$

En relación a $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = (\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{2(1)}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{12(11)}, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{12(I-1,1)})^T$ y $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\boldsymbol{\theta}}_{2(1)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{12(11)}, \dots, \bar{\boldsymbol{\theta}}_{12(I-1,1)})^T$, es más fácil obtener primero los estimadores de máxima verosimilitud de $\widetilde{\boldsymbol{\pi}} = (\widetilde{\pi}_1, \widetilde{\pi}_2, \dots, \widetilde{\pi}_I)^T$ y

38 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

$\bar{\boldsymbol{\pi}} = (\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_I)^T$ y luego utilizar la expresión $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{X}^{-1} \text{logit}(\boldsymbol{\pi})$ para obtener $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ y $\bar{\boldsymbol{\theta}}$. El vector $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ tiene expresión explícita, viene dado por

$$\bar{\boldsymbol{\pi}} = \left(\frac{N_{11}}{n_1}, \frac{N_{21}}{n_2}, \dots, \frac{N_{I1}}{n_I} \right)^T \quad (2.21)$$

y para calcular $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ se utilizará el algoritmo PAVA que se describe a continuación.

Algoritmo 1 Estimación de probabilidades con restricciones de orden

El EMV del vector $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_I)^T$ con la restricción $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \dots \leq \pi_I$, es decir, el vector $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ se calcula de la siguiente manera

ETAPA 1: Computar $\tilde{\boldsymbol{\pi}} := \bar{\boldsymbol{\pi}}$, siendo $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ el vector definido en (2.21).

ETAPA 2: Mientras no se verifique la condición $\tilde{\pi}_i \leq \tilde{\pi}_{i+1}, \forall i = 1, \dots, I-1$ hacer

Para $i = 1, \dots, I-1$, Si $\tilde{\pi}_i \not\leq \tilde{\pi}_{i+1}$ hacer $\tilde{\pi}_i := \frac{n_i}{n} \tilde{\pi}_i + \frac{n_{i+1}}{n} \tilde{\pi}_{i+1}$ y tomar $\tilde{\pi}_{i+1} := \tilde{\pi}_i$.

El estadístico clásico del cociente de verosimilitudes para contrastar (2.2), (2.6) o (2.8) viene dado por

$$G^2 = 2 \sum_{i=1}^I \left(N_{i1} \log \frac{\tilde{\pi}_i}{\hat{\pi}_0} + (n_i - N_{i1}) \log \frac{1 - \tilde{\pi}_i}{1 - \hat{\pi}_0} \right), \quad (2.22)$$

ver por ejemplo Mancuso y otros (2001).

Dados los vectores de probabilidad $\mathbf{p} = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{I1}, p_{I2})^T$ y $\mathbf{q} = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{I1}, q_{I2})^T$ la divergencia de Kullback-Leibler, definida en (1.31), entre \mathbf{p} y \mathbf{q} viene dada por

$$d_{Kull}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^I \left(p_{i1} \log \left(\frac{p_{i1}}{q_{i1}} \right) + p_{i2} \log \left(\frac{p_{i2}}{q_{i2}} \right) \right).$$

Es un simple ejercicio comprobar que

$$G^2 = 2n(d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))), \quad (2.23)$$

con

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) &= \left(\frac{n_1}{n} \bar{\pi}_1, \frac{n_1}{n} (1 - \bar{\pi}_1), \frac{n_2}{n} \bar{\pi}_2, \frac{n_2}{n} (1 - \bar{\pi}_2), \dots, \frac{n_I}{n} \bar{\pi}_I, \frac{n_I}{n} (1 - \bar{\pi}_I) \right)^T \\
&= \left(\frac{N_{11}}{n}, \frac{N_{12}}{n}, \frac{N_{21}}{n}, \frac{N_{22}}{n}, \dots, \frac{N_{I1}}{n}, \frac{N_{I2}}{n} \right)^T \\
\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= \left(\frac{n_1}{n} \tilde{\pi}_1, \frac{n_1}{n} (1 - \tilde{\pi}_1), \frac{n_2}{n} \tilde{\pi}_2, \frac{n_2}{n} (1 - \tilde{\pi}_2), \dots, \frac{n_I}{n} \tilde{\pi}_I, \frac{n_I}{n} (1 - \tilde{\pi}_I) \right)^T \\
\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \left(\frac{n_1}{n} \hat{\pi}_0, \frac{n_1}{n} (1 - \hat{\pi}_0), \frac{n_2}{n} \hat{\pi}_0, \frac{n_2}{n} (1 - \hat{\pi}_0), \dots, \frac{n_I}{n} \hat{\pi}_0, \frac{n_I}{n} (1 - \hat{\pi}_0) \right)^T.
\end{aligned}$$

El estadístico clásico de la ji-cuadrado para contrastar (2.2), (2.6) o (2.8), conocido en la literatura estadística como estadístico de Bartholomew, viene dado por

$$X^2 = \frac{1}{\hat{\pi}_0(1 - \hat{\pi}_0)} \sum_{i=1}^I n_i (\tilde{\pi}_i - \hat{\pi}_0)^2, \quad (2.24)$$

y no es difícil establecer que

$$X^2 = 2n \, d_{\text{Pearson}}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), \quad (2.25)$$

donde la distancia de Pearson entre dos vectores de probabilidad \mathbf{p} y \mathbf{q} fue definida en (1.34). Detalles acerca de X^2 pueden verse en Fleiss y otros (2003, Sección 9.3).

Si en (2.23) se reemplaza la medida de divergencia de Kullback-Leibler por una medida de phi-divergencia, definida en (1.30), se tiene la familia T_ϕ de estadísticos de contraste,

$$\begin{aligned}
T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= \frac{2n}{\phi''(1)} \left(d_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) \right) \\
&= \frac{2}{\phi''(1)} \left\{ \sum_{i=1}^I n_i \left(\hat{\pi}_0 \phi \left(\frac{N_{i1}}{n_i \hat{\pi}_0} \right) - \tilde{\pi}_i \phi \left(\frac{N_{i1}}{n_i \tilde{\pi}_i} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 - \hat{\pi}_0) \phi \left(\frac{n_i - N_{i1}}{n_i (1 - \hat{\pi}_0)} \right) - (1 - \tilde{\pi}_i) \phi \left(\frac{n_i - N_{i1}}{n_i (1 - \tilde{\pi}_i)} \right) \right) \right\}.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Es claro que si en (2.26) se toma $\phi(x) = x \log x - x + 1$ se tiene el estadístico del cociente de verosimilitudes G^2 definido en (2.23).

40 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

Si en (2.25) se reemplaza la medida de divergencia de Pearson por una medida de phi-divergencia, definida en (1.30), se tiene la familia S_ϕ de estadísticos de contraste,

$$\begin{aligned} S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= \frac{2n}{\phi''(1)} d_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \\ &= \frac{2}{\phi''(1)} \left\{ \sum_{i=1}^I n_i \left(\hat{\pi}_0 \phi\left(\frac{\tilde{\pi}_i}{\hat{\pi}_0}\right) + (1 - \hat{\pi}_0) \phi\left(\frac{1 - \tilde{\pi}_i}{1 - \hat{\pi}_0}\right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Es claro que si en (2.27) se toma $\phi(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$ se tiene el estadístico de la ji-cuadrado, X^2 , dado en (2.25).

El Teorema siguiente establece las distribuciones de las familias de estadísticos de contraste $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y estadísticos de contraste tipo Wald.

Teorema 2 *La distribución asintótica de los estadísticos phi-divergencia $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ definidos en (2.26) y (2.27), y los estadísticos tipo Wald $W(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ definidos en (2.17), (2.18) y (2.19), bajo la hipótesis nula dada en (2.13), es la misma y coincide con la distribución de la variable aleatoria ξ que viene dada por*

$$P(\xi \leq x) = \sum_{i=0}^{I-1} w_i(I-1, \mathbf{V}) P(\chi_i^2 \leq x),$$

con

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})^{-1} \mathbf{B}^T \quad (2.28)$$

siendo

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}^*, \lambda_I)^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_I)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{G}_{I-1}, -\mathbf{e}_{I-1}).$$

Los pesos $w_i(I-1, \mathbf{V})$, $i = 0, \dots, I-1$ son no-negativos y cumplen que $\sum_{i=0}^{I-1} w_i(I-1, \mathbf{V}) = 1$.

Demostración. Se considera la función

$$g(\boldsymbol{\theta}) = d_\phi(\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})).$$

El desarrollo en serie de Taylor de segundo orden en torno a $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ viene dado por

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}) &= g(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} g(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} + \\ &+ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} g(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Se comprueba que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} g(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \mathbf{0}_{I-1}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} g(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \phi''(1) \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned}$$

con $\mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta})$ definida en (2.15).

Derivando

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}) &= d_\phi(\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \\ &= \sum_{i=1}^I \left(p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \phi \left(\frac{p_{i1}(\boldsymbol{\theta})}{p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) + p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \phi \left(\frac{p_{i2}(\boldsymbol{\theta})}{p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right) \end{aligned}$$

con respecto a $\boldsymbol{\theta}$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} g(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \sum_{i=1}^I \left[p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \phi' \left(\frac{p_{i1}(\boldsymbol{\theta})}{p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{p_{i1}(\boldsymbol{\theta})}{p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} + \right. \\ &\quad \left. p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \phi' \left(\frac{p_{i2}(\boldsymbol{\theta})}{p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{p_{i2}(\boldsymbol{\theta})}{p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right] \\ &= \mathbf{0}_{I-1}, \end{aligned}$$

pues $\phi'(1) = 0$.

Derivando dos veces en la función $g(\boldsymbol{\theta})$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} g(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} g(\boldsymbol{\theta}) \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^2 p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \phi' \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right] \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
 &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^2 p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\phi' \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
 &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^2 p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\phi'' \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \phi' \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
 &= \phi''(1) \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^2 p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \left(\frac{p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right] \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
 &= \phi''(1) \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^2 \frac{1}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \frac{\partial p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial p_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
 &= \phi''(1) \left(\frac{\partial \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^T \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \text{diag} \left(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
 &= \phi''(1) \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}),
 \end{aligned}$$

con

$$\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \text{diag} \left(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1/2} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}.$$

Aplicando la Proposición 5.1, del libro Pardo (2006), página 225, se tiene que

$$\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

es la matriz de información de Fisher bajo el modelo considerado. Pero el vector $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$ está determinado por el modelo loglineal dado en (2.14) y la matriz de información de Fisher para este modelo viene dada en el Teorema 1. Por tanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} g(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \phi''(1) \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Sea $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$ el modelo loglineal saturado con $p_{ij}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$ dado por

$$p_{ij}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \exp\{u(\bar{\boldsymbol{\theta}}) + u_{1(i)}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) + \bar{\theta}_{2(j)} + \bar{\theta}_{(ij)}\} \quad i = 1, \dots, I, j = 1, 2.$$

A partir del desarrollo en serie de Taylor dado en (2.29) se tiene para $\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}}$

$$g(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{\phi''(1)}{2} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right) \quad (2.30)$$

y para $\boldsymbol{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}$

$$d_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{\phi''(1)}{2} (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right). \quad (2.31)$$

Si se considera la función $f(\boldsymbol{\theta}) = d_\phi(\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))$ y se desarrolla alrededor de $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ de forma similar al desarrollo dado en (2.29) se tiene

$$d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{\phi''(1)}{2} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right).$$

Ahora bien por (2.27), y teniendo en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta})$, se tiene

$$\begin{aligned} S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= \frac{2n}{\phi''(1)} d_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \\ &= n(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o_P(1) \\ &= H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o_P(1) \end{aligned} \quad (2.32)$$

y por (2.26), teniendo en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta})$, se tiene

$$\begin{aligned} T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= \frac{2n}{\phi''(1)} \left(d_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) \right) \\ &= n(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) - n(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}) + o_P(1) \\ &= D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o_P(1). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aplicando la Proposición 4.4.1 en Silvapulle y Sen (2005) se tiene que

$$G^2 = D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o_P(1) = H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o_P(1) = W(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o_P(1),$$

por lo tanto

$$W(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad \text{y} \quad D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

tienen la misma distribución asintótica y a su vez la misma distribución asintótica que G^2 . Luego por (2.32) y (2.33) la distribución asintótica de $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ coincide con la distribución asintótica de G^2 y por (6.14) en Silvapulle y Sen (2005) se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(G^2 \leq x) = \sum_{i=0}^{I-1} w_i(I-1, \mathbf{V})P(\chi_i^2 \leq x),$$

con

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} \text{diag}(\boldsymbol{\lambda})^{-1} \mathbf{B}^T$$

siendo

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}^*, \lambda_I)^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_I)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{G}_{I-1}, -\mathbf{e}_{I-1}).$$

■

2.3. Aplicación numérica

En esta Sección se desarrollará el ejemplo que sirvió al principio de la Sección 2.1 para motivar el problema que se ha abordado en este Capítulo. En dicho ejemplo se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, n_{31}, n_{32}, n_{41}, n_{42})^T \\ &= (48, 17066, 38, 14464, 5, 788, 2, 163)^T. \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los vectores estimados

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\pi}} &= \left(\frac{48}{17114}, \frac{38}{14502}, \frac{5}{793}, \frac{2}{165} \right)^T = (0.0028, 0.0026, 0.0063, 0.0121)^T, \\ \tilde{\boldsymbol{\pi}} &= \left(\frac{43}{15808}, \frac{43}{15808}, \frac{5}{793}, \frac{2}{165} \right)^T = (0.0027, 0.0027, 0.0063, 0.0121)^T, \\ \hat{\pi}_0 &= \frac{48 + 38 + 5 + 2}{32574} = \frac{93}{32574} = 0.0029, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta (2.3) y (2.12), se pueden obtener $\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

En consecuencia

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u \\ u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \\ \theta_{2(1)} \\ \theta_{12(11)} \\ \theta_{12(21)} \\ \theta_{12(31)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \log p_{11}(\theta) \\ \log p_{12}(\theta) \\ \log p_{21}(\theta) \\ \log p_{21}(\theta) \\ \log p_{31}(\theta) \\ \log p_{32}(\theta) \\ \log p_{41}(\theta) \\ \log p_{42}(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log p_{11}(\theta) \\ \log p_{12}(\theta) \\ \log p_{21}(\theta) \\ \log p_{21}(\theta) \\ \log p_{31}(\theta) \\ \log p_{32}(\theta) \\ \log p_{41}(\theta) \\ \log p_{42}(\theta) \end{pmatrix}, \\
 \\
 \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_{(1)} \\ \bar{u}_{(2)} \\ \bar{u}_{(3)} \\ \bar{\theta}_{2(1)} \\ \bar{\theta}_{12(11)} \\ \bar{\theta}_{12(21)} \\ \bar{\theta}_{12(31)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log\left(\frac{48}{17114} \frac{17114}{32574}\right) \\ \log\left(\left(1 - \frac{48}{17114}\right) \frac{17114}{32574}\right) \\ \log\left(\frac{38}{14502} \frac{14502}{32574}\right) \\ \log\left(\left(1 - \frac{38}{14502}\right) \frac{14502}{32574}\right) \\ \log\left(\frac{5}{793} \frac{793}{32574}\right) \\ \log\left(\left(1 - \frac{5}{793}\right) \frac{793}{32574}\right) \\ \log\left(\frac{2}{165} \frac{165}{32574}\right) \\ \log\left(\left(1 - \frac{2}{165}\right) \frac{165}{32574}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -5.2975 \\ 4.6511 \\ 4.4857 \\ 1.5757 \\ -4.4006 \\ -1.473 \\ -1.5412 \\ -0.65946 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

46 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

Es decir que $\bar{\theta}_{2(1)} = -4.4006$, $\bar{\theta}_{12(11)} = -1.473$, $\bar{\theta}_{12(21)} = -1.5412$ y $\bar{\theta}_{12(31)} = -0.65946$.

En relación a $\tilde{\theta}_{2(1)}$, $\tilde{\theta}_{12(11)}$, $\tilde{\theta}_{12(21)}$ y $\tilde{\theta}_{12(31)}$ se tiene

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{u}_{(1)} \\ \tilde{u}_{(2)} \\ \tilde{u}_{(3)} \\ \tilde{\theta}_{2(1)} \\ \tilde{\theta}_{12(11)} \\ \tilde{\theta}_{12(21)} \\ \tilde{\theta}_{12(31)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log\left(\frac{43}{15808} \frac{17114}{32574}\right) \\ \log\left(\left(1 - \frac{43}{15808}\right) \frac{17114}{32574}\right) \\ \log\left(\frac{43}{15808} \frac{14502}{32574}\right) \\ \log\left(\left(1 - \frac{43}{15808}\right) \frac{14502}{32574}\right) \\ \log\left(\frac{5}{793} \frac{793}{32574}\right) \\ \log\left(\left(1 - \frac{5}{793}\right) \frac{793}{32574}\right) \\ \log\left(\frac{2}{165} \frac{165}{32574}\right) \\ \log\left(\left(1 - \frac{2}{165}\right) \frac{165}{32574}\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{u}_{(1)} \\ \tilde{u}_{(2)} \\ \tilde{u}_{(3)} \\ \tilde{\theta}_{2(1)} \\ \tilde{\theta}_{12(11)} \\ \tilde{\theta}_{12(21)} \\ \tilde{\theta}_{12(31)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.2975 \\ 4.6512 \\ 4.4856 \\ 1.5757 \\ -4.4006 \\ -1.5037 \\ -1.5037 \\ -0.65946 \end{pmatrix},$$

luego, $\tilde{\theta}_{2(1)} = -4.4006$, $\tilde{\theta}_{12(11)} = -1.5037$, $\tilde{\theta}_{12(21)} = -1.5037$ y $\tilde{\theta}_{12(31)} = -0.65946$.

En definitiva

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \mathbf{X}^{-1} \text{logit}(\bar{\boldsymbol{\pi}}) = (-4.4006, -1.473, -1.5412, -0.65946)^T, \\ \tilde{\theta} &= \mathbf{X}^{-1} \text{logit}(\tilde{\boldsymbol{\pi}}) = (-4.4006, -1.5037, -1.5037, -0.65946)^T, \\ \hat{\theta} &= (\text{logit}(\hat{\boldsymbol{\pi}}_0), 0, 0, 0)^T = \left(\log \frac{\hat{\boldsymbol{\pi}}_0}{1 - \hat{\boldsymbol{\pi}}_0}, 0, 0, 0\right)^T = (-5.8558, 0, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

En relación a la matriz $\Sigma_{\hat{\lambda}^*}$ se tiene

$$\Sigma_{\hat{\lambda}^*} = \begin{pmatrix} \frac{17114}{32574} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{14502}{32574} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{793}{32574} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{17114}{32574} \\ \frac{14502}{32574} \\ \frac{793}{32574} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17114}{32574} \\ \frac{14502}{32574} \\ \frac{793}{32574} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{66145610}{265266369} & -\frac{20682269}{88422123} & -\frac{111241}{8697258} \\ -\frac{20682269}{88422123} & \frac{7280004}{29474041} & -\frac{31421}{2899086} \\ -\frac{111241}{8697258} & -\frac{31421}{2899086} & \frac{6773}{285156} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} W(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) &= 32574 \times \frac{93}{32574} \times \left(1 - \frac{93}{32574}\right) \times \begin{pmatrix} -1.5037 & -1.5037 & -0.65946 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \frac{66145610}{265266369} & -\frac{20682269}{88422123} & -\frac{111241}{8697258} \\ -\frac{20682269}{88422123} & \frac{7280004}{29474041} & -\frac{31421}{2899086} \\ -\frac{111241}{8697258} & -\frac{31421}{2899086} & \frac{6773}{285156} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.5037 \\ -1.5037 \\ -0.65946 \end{pmatrix} \\ &= 2.5976. \end{aligned}$$

Ahora se calculará $\mathcal{I}_F(\hat{\theta})$. Se sabe que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_F(\hat{\theta}) &= \hat{\pi}_0 (1 - \hat{\pi}_0) \begin{pmatrix} 1 & \hat{\lambda}^{*T} \\ \hat{\lambda}^* & \text{diag}(\hat{\lambda}^*) \end{pmatrix} \\ &= \frac{93}{32574} \times \left(1 - \frac{93}{32574}\right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{17114}{32574} & \frac{14502}{32574} & \frac{793}{32574} \\ \frac{17114}{32574} & \frac{17114}{32574} & 0 & 0 \\ \frac{14502}{32574} & 0 & \frac{14502}{32574} & 0 \\ \frac{793}{32574} & 0 & 0 & \frac{793}{32574} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.8469 \times 10^{-3} & 1.4957 \times 10^{-3} & 1.2674 \times 10^{-3} & 6.9306 \times 10^{-5} \\ 1.4957 \times 10^{-3} & 1.4957 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 1.2674 \times 10^{-3} & 0 & 1.2674 \times 10^{-3} & 0 \\ 6.9306 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 6.9306 \times 10^{-5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} H(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) &= 32574 \times \begin{pmatrix} 1.4552 & -1.5037 & -1.5037 & -0.65946 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 2.8469 \times 10^{-3} & 1.4957 \times 10^{-3} & 1.2674 \times 10^{-3} & 6.9306 \times 10^{-5} \\ 1.4957 \times 10^{-3} & 1.4957 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 1.2674 \times 10^{-3} & 0 & 1.2674 \times 10^{-3} & 0 \\ 6.9306 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 6.9306 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.4552 \\ -1.5037 \\ -1.5037 \\ -0.65946 \end{pmatrix} \\ &= 2.6410. \end{aligned}$$

48 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

Ahora es necesario calcular $\mathcal{I}_F(\tilde{\theta})$. Se tiene

$$\mathcal{I}_F(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{7375\ 452\ 919}{2591\ 384\ 178\ 240} & \frac{1933\ 582\ 505}{1356\ 668\ 358\ 656} & \frac{1638\ 472\ 215}{1356\ 668\ 358\ 656} & \frac{1970}{12\ 915\ 591} \\ \frac{1933\ 582\ 505}{1356\ 668\ 358\ 656} & \frac{1933\ 582\ 505}{1356\ 668\ 358\ 656} & 0 & 0 \\ \frac{1638\ 472\ 215}{1356\ 668\ 358\ 656} & 0 & \frac{1638\ 472\ 215}{1356\ 668\ 358\ 656} & 0 \\ \frac{1970}{12\ 915\ 591} & 0 & 0 & \frac{1970}{12\ 915\ 591} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{I}_F(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} \frac{17114}{32\ 574} \frac{43}{15\ 808} \left(1 - \frac{43}{15\ 808}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{14502}{32\ 574} \frac{43}{15\ 808} \left(1 - \frac{43}{15\ 808}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{793}{32\ 574} \frac{5}{793} \left(1 - \frac{5}{793}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{165}{32\ 574} \frac{2}{165} \left(1 - \frac{2}{165}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7375\ 452\ 919}{2591\ 384\ 178\ 240} & \frac{1933\ 582\ 505}{1356\ 668\ 358\ 656} & \frac{1638\ 472\ 215}{1356\ 668\ 358\ 656} & \frac{1970}{12\ 915\ 591} \\ \frac{1933\ 582\ 505}{1356\ 668\ 358\ 656} & \frac{1933\ 582\ 505}{1356\ 668\ 358\ 656} & 0 & 0 \\ \frac{1638\ 472\ 215}{1356\ 668\ 358\ 656} & 0 & \frac{1638\ 472\ 215}{1356\ 668\ 358\ 656} & 0 \\ \frac{1970}{12\ 915\ 591} & 0 & 0 & \frac{1970}{12\ 915\ 591} \end{pmatrix}.$$

Ahora se calcula

$$D_1(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) = n (\bar{\theta} - \hat{\theta})^T \mathcal{I}_F(\hat{\theta}) (\bar{\theta} - \hat{\theta}).$$

Se tiene,

$$D_1(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) = 32\ 574 \times \frac{93}{32\ 574} \times \left(1 - \frac{93}{32\ 574}\right) \times \begin{pmatrix} 1.455\ 2 & -1.473 & -1.541\ 2 & -0.659\ 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{17114}{32\ 574} & \frac{14502}{32\ 574} & \frac{793}{32\ 574} \\ \frac{17114}{32\ 574} & \frac{17114}{32\ 574} & 0 & 0 \\ \frac{14502}{32\ 574} & 0 & \frac{14502}{32\ 574} & 0 \\ \frac{793}{32\ 574} & 0 & 0 & \frac{793}{32\ 574} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.455\ 2 \\ -1.473 \\ -1.541\ 2 \\ -0.659\ 46 \end{pmatrix}$$

$$= 2.745.$$

Por otro lado

$$D_2(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) = n (\bar{\theta} - \tilde{\theta})^T \mathcal{I}_F(\tilde{\theta}) (\bar{\theta} - \tilde{\theta}),$$

luego

$$\begin{aligned} D_2(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) &= 32574 \times \begin{pmatrix} 0 & 3.0705 \times 10^{-2} & -3.7484 \times 10^{-2} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \frac{7375452919}{2591384178240} & \frac{1933582505}{1356668358656} & \frac{1638472215}{1356668358656} & \frac{1970}{12915591} \\ \frac{1933582505}{1356668358656} & \frac{1933582505}{1356668358656} & 0 & 0 \\ \frac{1638472215}{1356668358656} & 0 & \frac{1638472215}{1356668358656} & 0 \\ \frac{1970}{12915591} & 0 & 0 & \frac{1970}{12915591} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3.0705 \times 10^{-2} \\ -3.7484 \times 10^{-2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 9.9045 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) &= D_1(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) - D_2(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta}) \\ &= 2.745 - 9.9045 \times 10^{-2} = 2.6460. \end{aligned}$$

Para poder obtener los pesos $w_i(\hat{\theta})$ se necesita obtener la matriz \hat{V} definida en (2.28). Ésta viene dada por

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 83774.0156250 & -14428.7177734 & 0 \\ -14428.7177734 & 15217.7109375 & -788.9927979 \\ 0 & -788.9927979 & 1457.5666504 \end{pmatrix},$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \rho_{12}(\hat{\theta}) &= \frac{-14428.7177734}{\sqrt{83774.0156250 \times 15217.7109375}} = -0.40411, \\ \rho_{13}(\hat{\theta}) &= 0, \\ \rho_{23}(\hat{\theta}) &= \frac{-788.9927979}{\sqrt{15217.7109375 \times 1457.5666504}} = -0.16753. \end{aligned}$$

$$\rho_{12\bullet 3}(\hat{\theta}) = -0.4099, \quad \rho_{13\bullet 2}(\hat{\theta}) = -0.075072, \quad \rho_{23\bullet 1}(\hat{\theta}) = -0.18315.$$

50 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

A partir de aquí, y según se vio en la Sección 1.3 dedicada a la distribución Ji-barra, se tiene

$$\begin{aligned} w_0(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{4\pi} (2\pi - \arccos(-0.40411) - \arccos(0) - \arccos(-0.16753)) = 0.07850, \\ w_1(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{4\pi} (3\pi - \arccos(-0.4099) - \arccos(-7.5072 \times 10^{-2}) - \arccos(-0.18315)) = 0.32075, \\ w_2(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= 0.5 - w_0(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.5 - 0.07850 = 0.4215, \\ w_3(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= 0.5 - w_1(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.5 - 0.32075 = 0.17925, \end{aligned}$$

$$\{w_i(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\}_{i=0}^{I-1} = \{0.0785, 0.32075, 0.4215, 0.17925\}. \quad (2.34)$$

A partir de estos pesos el cuantil de orden 0.05, 5.02, se calcula fácilmente siguiendo un método de bisección.

A continuación se consideran las familias de estadísticos de Cressie y Read (CR), particularizando la función ϕ por la función $\phi_\lambda(x)$ definida en (1.32). La expresión de los estadísticos de CR es

$$\begin{aligned} T_\lambda(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) &= 2n(d_\lambda(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\lambda(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))) \\ &= \frac{2n}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\overline{p}_{i1}^{\lambda+1}}{p_{i1}^\lambda(\widehat{\boldsymbol{\theta}})} + \frac{\overline{p}_{i2}^{\lambda+1}}{p_{i2}^\lambda(\widehat{\boldsymbol{\theta}})} - \frac{\overline{p}_{i1}^{\lambda+1}}{p_{i1}^\lambda(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} - \frac{\overline{p}_{i2}^{\lambda+1}}{p_{i2}^\lambda(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

y

$$S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = 2nd_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^I \left(\frac{p_{i1}^{\lambda+1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{i1}^\lambda(\widehat{\boldsymbol{\theta}})} + \frac{p_{i2}^{\lambda+1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{i2}^\lambda(\widehat{\boldsymbol{\theta}})} \right) - 1 \right), \quad (2.36)$$

para $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$, y

$$T_\lambda(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \lim_{\ell \rightarrow \lambda} T_\ell(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})),$$

$$S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \lim_{\ell \rightarrow \lambda} S_\ell(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})),$$

para $\lambda \in \{0, -1\}$, es decir

$$\begin{aligned}
T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= 2n(d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))) \\
&= 2n \sum_{i=1}^I \left(\bar{p}_{i1} \log \left(\frac{p_{i1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) + \bar{p}_{i2} \log \left(\frac{p_{i2}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right), \tag{2.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{-1}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= 2n(d_{Kull}(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \bar{\mathbf{p}}) - d_{Kull}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \bar{\mathbf{p}})) \\
&= 2n \sum_{i=1}^I \left(p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\bar{p}_{i1}} \right) + p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\bar{p}_{i2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - p_{i1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{i1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\bar{p}_{i1}} \right) - p_{i2}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{i2}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\bar{p}_{i2}} \right) \right) \tag{2.38}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
S_0(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= 2nd_{Kull}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \\
&= 2n \sum_{i=1}^I \left(p_{i1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{i1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) + p_{i2}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{i2}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right), \tag{2.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{-1}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= 2nd_{Kull}(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) \\
&= 2n \sum_{i=1}^I \left(p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{i1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{p_{i1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \right) + p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{i2}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{p_{i2}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right). \tag{2.40}
\end{aligned}$$

En la Tabla 2.2, se muestran los estadísticos de contraste con medidas de divergencia de Cressie-Read y estadísticos de contraste tipo Wald, con sus correspondientes p -valores asintóticos.

Estadísticos de contraste	$\lambda = -1.5$	$\lambda = -1$	$\lambda = -0.5$	$\lambda = 0$	$\lambda = \frac{2}{3}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$
$T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$	3.3068	3.8173	4.4920	5.4057	7.2076	8.4895	11.1549	15.1820
p -valor($T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$)	0.1177	0.0911	0.0650	0.0413	0.0169	0.0090	0.0024	0.0003
$S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$	3.2993	3.8124	4.4896	5.4057	7.2107	8.4942	11.1617	15.1911
p -valor($S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$)	0.1181	0.0913	0.0651	0.0413	0.0169	0.0090	0.0024	0.0003

$W(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$	2.5979	$H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$	2.6363	$D(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$	2.6462
p -valor($W(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$)	0.1686	p -valor($H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$)	0.1653	p -valor($D(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$)	0.1645

Tabla 2.2: Estadísticos de contraste con medidas de divergencia de Cressie-Read y estadísticos de contraste tipo Wald con sus correspondientes p -valores asintóticos.

Con un nivel de significación de 0.05 no se puede rechazar la hipótesis nula de que no hay tendencia en las probabilidades cuando $\lambda \in \{-1.5, -1, -0.5\}$ y para $W(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, mientras que se rechaza para $\lambda \in \{0, \frac{2}{3}, 1, 1.5, 2\}$. Por lo tanto, no se puede rechazar la hipótesis nula para $W(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$, $D(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, $T_{-1.5}(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $T_{-1}(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $T_{-0.5}(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $S_{-1.5}(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $S_{-1}(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $S_{-0.5}(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y se rechaza la hipótesis nula para $T_0(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $T_{2/3}(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $T_1(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $S_0(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $S_{2/3}(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_1(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$.

En particular, no se puede aceptar esta ausencia de tendencia en probabilidades binomiales cuando el estadístico de contraste es el estadístico del cociente de verosimilitudes ($G^2 = T_0(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$) o el estadístico de Bartholomew ($X^2 = S_1(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$).

Para analizar el comportamiento exacto de los estadísticos de contraste basados en la ϕ -divergencia resulta muy útil realizar un estudio de simulación para decidir qué estadístico tiene mejor comportamiento en cuanto al nivel de significación y potencia.

2.4. Estudio de simulación

Se comenzará detallando el experimento de simulación que se ha utilizado. El estudio se centra en el comportamiento de los estadísticos considerados (2.35)-(2.40), obtenidos a partir de las medidas de divergencia de Cressie-Read, así como en los estadísticos tipo Wald definidos en (2.17), (2.18) y (2.19), en función de las potencias y los niveles de significación simulados de cada uno de ellos.

Se considerarán en el estudio cuatro variables aleatorias Binomiales, $I = 4$, de parámetros (n_i, π_i) , $i = 1, 2, 3$ y 4 que son independientes. Bajo la hipótesis nula se supondrá

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_0.$$

Se considerarán dos valores distintos para π_0 , $\pi_0 = 0.05$ y $\pi_0 = 0.35$ y diferentes tamaños muestrales que se denominarán escenarios. La Tabla 2.3 presenta los distintos escenarios, tanto cuando la hipótesis nula es $\pi_0 = 0.05$, como cuando es $\pi_0 = 0.35$. Si $\pi_0 = 0.05$, en la Tabla 2.3, el escenario B representa que bajo la hipótesis nula se consideran las Binomiales $B(60, 0.05)$, $B(45, 0.05)$, $B(30, 0.05)$ y $B(15, 0.05)$. Análogamente, si $\pi_0 = 0.35$, el escenario B representa que bajo la hipótesis nula se consideran las Binomiales $B(20, 0.35)$, $B(15, 0.35)$, $B(10, 0.35)$ y $B(5, 0.35)$. En relación con las hipótesis alternativas se considerarán para cada escenario y cada

valor de π_0 tres hipótesis alternativas. Así, en relación a $\pi_0 = 0.05$, se considerarán las hipótesis alternativas

$$H_1 : (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0.05, 0.1, 0.1, 0.1) \quad (2.41)$$

$$H_1^* : (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0.05, 0.1, 0.125, 0.125) \quad (2.42)$$

$$H_1^{**} : (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0.05, 0.1, 0.125, 0.135). \quad (2.43)$$

En el caso de $\pi_0 = 0.35$, se considerarán las tres hipótesis alternativas siguientes

$$H_1 : (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0.35, 0.40, 0.40, 0.40) \quad (2.44)$$

$$H_1^* : (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0.35, 0.40, 0.425, 0.425) \quad (2.45)$$

$$H_1^{**} : (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0.35, 0.40, 0.425, 0.435). \quad (2.46)$$

$\pi_0 = 0.05$	n_1	n_2	n_3	n_4	$\pi_0 = 0.35$	n_1	n_2	n_3	n_4
Esc. A	40	30	20	10	Esc. D	10	8	5	3
Esc. B	60	45	30	15	Esc. E	20	15	10	5
Esc. C	100	75	50	25	Esc. F	60	45	40	15

Tabla 2.3: Escenarios del estudio de simulación.

Para cada uno de los escenarios de la Tabla 2.3, tomando una muestra aleatoria \mathbf{N} , se calculan los p -valores de cada estadístico de contraste $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}$, $\lambda \in [-1.5, 3]$, $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ utilizando el siguiente algoritmo, y se repite $R = 50000$ veces este proceso de forma independiente. Se obtienen los valores de los estadísticos $T_\lambda^{(k)}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ (respectivamente $S_\lambda^{(k)}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, $k = 1, 2, \dots, R$), así como $W^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H^{(k)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D^{(k)}(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, $k = 1, 2, \dots, R$.

Será necesario obtener también los correspondientes pesos $w_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $i = 1, 2, 3$, que permitirán obtener el p -valor asociado a cada estadístico $T_\lambda^{(k)}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, $S_\lambda^{(k)}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, $W^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H^{(k)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D^{(k)}(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, $k = 1, 2, \dots, R$.

54 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

La obtención de los p -valores se realiza con el siguiente algoritmo:

Algoritmo 2 Cálculo del p -valor

Sea $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta})), \lambda \in [-1.5, 3], W(\tilde{\theta}, \hat{\theta}), H(\tilde{\theta}, \hat{\theta}), D(\tilde{\theta}, \hat{\theta}, \hat{\theta})\}$. Una vez que se han obtenido los pesos $\{w_i(\hat{\theta})\}_{i=0}^{I-1}$, se calcula el correspondiente p -valor en las siguientes etapas : ETAPA 1: Calcular $\mathbf{p}(\hat{\theta})$.

ETAPA 2: Utilizando $\mathbf{p}(\hat{\theta})$ calcular el valor t del estadístico de contraste T mediante la correspondiente expresión en (2.35)-(2.40) y (2.17), (2.18), (2.19).

ETAPA 3: Inicializar $p\text{-valor}(T) := 0$. Si $T \leq 0$ entonces $p\text{-valor}(T) := 1$ FIN, sino $p\text{-valor}(T) := 0$.

ETAPA 4: Para $i = 0, \dots, I - 2$, hacer $p\text{-valor}(T) := p\text{-valor}(T) + w_i(\hat{\theta})P(\chi_{(I-1)-i}^2 > t)$.

Se utiliza la subrutina NAG 'G01ECF' de la librería de Fortran.

Conviene recordar que $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ ($\lambda = 0$ en $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$) coincide con el estadístico del cociente de verosimilitudes, mientras que $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ ($\lambda = 1$ en $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$) coincide con el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson. Esta observación, como posteriormente se verá, será importante a la hora de diseñar el procedimiento de comparación de los diferentes estadísticos.

La potencia exacta simulada se obtiene, fijado un valor nominal teórico $\alpha = 0.05$, mediante

$$\hat{\beta}_T = \frac{\text{Número de iteraciones de } T \text{ en las cuales el } p\text{-valor es menor que } \alpha}{R},$$

y se calcularán para las alternativas H_1, H_1^*, H_1^{**} descritas anteriormente.

De forma análoga, el nivel de significación simulado se obtiene mediante

$$\hat{\alpha}_T = \frac{\text{Número de iteraciones de } T \text{ en las cuales el } p\text{-valor es menor que } \alpha}{R}. \quad (2.47)$$

En primer lugar se analizará la situación con $\pi_0 = 0.05$. En las Tablas 2.4-2.10 aparecen las potencias y los niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\lambda \in [-1.5, 3]$, $W(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\tilde{\theta}, \hat{\theta}, \hat{\theta})$.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.50	0.3354	0.1394	0.05	0.0629	0.0629	1.55	0.1170	0.0922
-1.45	0.3347	0.1394	0.10	0.0631	0.0630	1.60	0.1260	0.0922
-1.40	0.3340	0.1372	0.15	0.0631	0.0670	1.65	0.1268	0.0966
-1.35	0.3340	0.1361	0.20	0.0654	0.0635	1.70	0.1286	0.1019
-1.30	0.3338	0.1361	0.25	0.0637	0.0577	1.75	0.1324	0.1041
-1.25	0.3189	0.1361	0.30	0.0638	0.0578	1.80	0.1343	0.1041
-1.20	0.3176	0.1361	0.35	0.0603	0.0554	1.85	0.1415	0.1043
-1.15	0.3001	0.1361	0.40	0.0625	0.0554	1.90	0.1453	0.1043
-1.10	0.2891	0.1353	0.45	0.0597	0.0509	1.95	0.1465	0.1043
-1.05	0.2638	0.1353	0.50	0.0613	0.0523	2.00	0.1534	0.1044
-1.00	0.2342	0.1353	0.55	0.0615	0.0530	2.05	0.1540	0.1044
-0.95	0.2047	0.1353	0.60	0.0640	0.0530	2.10	0.1566	0.1044
-0.90	0.1995	0.1368	0.65	0.0651	0.0531	2.15	0.1628	0.1125
-0.85	0.1823	0.1268	0.70	0.0669	0.0557	2.20	0.1644	0.1133
-0.80	0.1616	0.1274	0.75	0.0670	0.0597	2.25	0.1669	0.1133
-0.75	0.1357	0.1279	0.80	0.0691	0.0598	2.30	0.1768	0.1182
-0.70	0.1344	0.1279	0.85	0.0691	0.0603	2.35	0.1786	0.1182
-0.65	0.1202	0.1279	0.90	0.0730	0.0636	2.40	0.1825	0.1219
-0.60	0.1137	0.1054	0.95	0.0748	0.0636	2.45	0.1831	0.1297
-0.55	0.1108	0.1045	1.00	0.0748	0.0636	2.50	0.1836	0.1297
-0.50	0.1048	0.1008	1.05	0.0752	0.0643	2.55	0.1839	0.1297
-0.45	0.0912	0.1008	1.10	0.0752	0.0643	2.60	0.1916	0.1359
-0.40	0.0887	0.1008	1.15	0.0776	0.0643	2.65	0.1999	0.1536
-0.35	0.0829	0.0899	1.20	0.0807	0.0673	2.70	0.2005	0.1538
-0.30	0.0780	0.0763	1.25	0.0861	0.0725	2.75	0.2118	0.1542
-0.25	0.0764	0.0763	1.30	0.0914	0.0725	2.80	0.2122	0.1547
-0.20	0.0763	0.0765	1.35	0.0944	0.0772	2.85	0.2132	0.1572
-0.15	0.0685	0.0774	1.40	0.1061	0.0921	2.90	0.2133	0.1572
-0.10	0.0668	0.0687	1.45	0.1087	0.0921	2.95	0.2255	0.1584
-0.05	0.0626	0.0628	1.50	0.1138	0.0921	3.00	0.2273	0.1585
0.00	0.0627	0.0627						

Tabla 2.4: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario A.

56 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$
-1.50	0.3075	0.3639	0.3798	0.2763	0.3467	0.3598	0.80	0.2058	0.2926	0.3117	0.1760	0.2652	0.2866
-1.45	0.3012	0.3593	0.3752	0.2763	0.3467	0.3598	0.85	0.2062	0.2931	0.3122	0.1774	0.2670	0.2885
-1.40	0.2966	0.3539	0.3701	0.2600	0.3343	0.3482	0.90	0.2107	0.2979	0.3170	0.1780	0.2679	0.2895
-1.35	0.2966	0.3539	0.3701	0.2535	0.3268	0.3412	0.95	0.2125	0.2997	0.3192	0.1780	0.2679	0.2895
-1.30	0.2942	0.3518	0.3680	0.2535	0.3268	0.3412	1.00	0.2125	0.2998	0.3192	0.1780	0.2679	0.2895
-1.25	0.2925	0.3497	0.3658	0.2520	0.3236	0.3377	1.05	0.2153	0.3017	0.3208	0.1798	0.2713	0.2930
-1.20	0.2900	0.3477	0.3637	0.2520	0.3236	0.3377	1.10	0.2152	0.3015	0.3203	0.1798	0.2713	0.2930
-1.15	0.2869	0.3463	0.3624	0.2519	0.3232	0.3373	1.15	0.2231	0.3108	0.3295	0.1799	0.2714	0.2931
-1.10	0.2788	0.3398	0.3559	0.2452	0.3169	0.3307	1.20	0.2287	0.3162	0.3354	0.1851	0.2758	0.2980
-1.05	0.2717	0.3360	0.3522	0.2452	0.3169	0.3307	1.25	0.2331	0.3199	0.3393	0.1861	0.2763	0.2984
-1.00	0.2659	0.3309	0.3472	0.2452	0.3169	0.3307	1.30	0.2387	0.3248	0.3443	0.1878	0.2781	0.3006
-0.95	0.2609	0.3276	0.3441	0.2452	0.3169	0.3307	1.35	0.2412	0.3274	0.3471	0.1913	0.2811	0.3037
-0.90	0.2563	0.3242	0.3406	0.2454	0.3170	0.3308	1.40	0.2473	0.3332	0.3527	0.1999	0.2892	0.3120
-0.85	0.2507	0.3205	0.3370	0.2448	0.3168	0.3305	1.45	0.2517	0.3378	0.3573	0.1999	0.2892	0.3120
-0.80	0.2436	0.3160	0.3325	0.2455	0.3176	0.3315	1.50	0.2545	0.3413	0.3609	0.2005	0.2902	0.3134
-0.75	0.2398	0.3129	0.3296	0.2462	0.3182	0.3321	1.55	0.2617	0.3487	0.3682	0.1964	0.2879	0.3113
-0.70	0.2383	0.3108	0.3274	0.2462	0.3182	0.3321	1.60	0.2670	0.3531	0.3727	0.1967	0.2883	0.3118
-0.65	0.2332	0.3062	0.3228	0.2462	0.3180	0.3319	1.65	0.2712	0.3583	0.3779	0.1948	0.2851	0.3086
-0.60	0.2308	0.3046	0.3214	0.2427	0.3165	0.3309	1.70	0.2727	0.3604	0.3801	0.2039	0.2950	0.3185
-0.55	0.2252	0.2980	0.3149	0.2290	0.3034	0.3188	1.75	0.2755	0.3633	0.3829	0.2074	0.2991	0.3230
-0.50	0.2233	0.2970	0.3137	0.2277	0.3024	0.3180	1.80	0.2806	0.3691	0.3890	0.2074	0.2991	0.3230
-0.45	0.2194	0.2944	0.3117	0.2277	0.3024	0.3180	1.85	0.2862	0.3765	0.3963	0.2097	0.3032	0.3273
-0.40	0.2182	0.2937	0.3105	0.2268	0.3003	0.3160	1.90	0.2882	0.3777	0.3976	0.2097	0.3032	0.3273
-0.35	0.2155	0.2920	0.3087	0.2227	0.2980	0.3139	1.95	0.2932	0.3820	0.4017	0.2099	0.3036	0.3279
-0.30	0.2150	0.2919	0.3085	0.2178	0.2941	0.3103	2.00	0.2957	0.3842	0.4039	0.2109	0.3048	0.3292
-0.25	0.2149	0.2916	0.3082	0.2178	0.2941	0.3103	2.05	0.2964	0.3851	0.4047	0.2112	0.3063	0.3308
-0.20	0.2138	0.2899	0.3064	0.2153	0.2914	0.3075	2.10	0.3011	0.3893	0.4089	0.2113	0.3063	0.3308
-0.15	0.2083	0.2865	0.3032	0.2163	0.2926	0.3089	2.15	0.3098	0.3978	0.4174	0.2200	0.3147	0.3397
-0.10	0.2072	0.2862	0.3030	0.2099	0.2888	0.3053	2.20	0.3144	0.4029	0.4226	0.2267	0.3210	0.3464
-0.05	0.2052	0.2856	0.3026	0.2066	0.2875	0.3043	2.25	0.3169	0.4054	0.4251	0.2267	0.3210	0.3464
0.00	0.2033	0.2834	0.3003	0.2033	0.2834	0.3003	2.30	0.3250	0.4114	0.4306	0.2284	0.3225	0.3478
0.05	0.2043	0.2852	0.3020	0.2038	0.2844	0.3013	2.35	0.3288	0.4145	0.4335	0.2285	0.3230	0.3484
0.10	0.2054	0.2871	0.3040	0.2051	0.2861	0.3032	2.40	0.3367	0.4231	0.4415	0.2300	0.3238	0.3492
0.15	0.2060	0.2876	0.3046	0.2061	0.2871	0.3042	2.45	0.3378	0.4244	0.4429	0.2315	0.3251	0.3505
0.20	0.2048	0.2846	0.3014	0.2035	0.2827	0.2997	2.50	0.3417	0.4269	0.4453	0.2315	0.3251	0.3505
0.25	0.2026	0.2840	0.3010	0.1930	0.2761	0.2938	2.55	0.3470	0.4340	0.4527	0.2338	0.3299	0.3552
0.30	0.2064	0.2897	0.3076	0.1962	0.2805	0.2993	2.60	0.3532	0.4396	0.4579	0.2349	0.3310	0.3565
0.35	0.1980	0.2826	0.3012	0.1851	0.2709	0.2907	2.65	0.3549	0.4412	0.4594	0.2407	0.3366	0.3621
0.40	0.1995	0.2844	0.3029	0.1852	0.2710	0.2908	2.70	0.3552	0.4415	0.4598	0.2451	0.3412	0.3671
0.45	0.1988	0.2840	0.3026	0.1821	0.2685	0.2883	2.75	0.3603	0.4473	0.4654	0.2475	0.3452	0.3710
0.50	0.2010	0.2866	0.3054	0.1822	0.2676	0.2880	2.80	0.3642	0.4520	0.4701	0.2503	0.3495	0.3756
0.55	0.2017	0.2876	0.3066	0.1828	0.2683	0.2888	2.85	0.3682	0.4563	0.4747	0.2571	0.3593	0.3856
0.60	0.2032	0.2891	0.3080	0.1828	0.2683	0.2888	2.90	0.3689	0.4579	0.4764	0.2572	0.3595	0.3859
0.65	0.2056	0.2932	0.3125	0.1855	0.2741	0.2951	2.95	0.3768	0.4637	0.4825	0.2619	0.3633	0.3901
0.70	0.2043	0.2914	0.3106	0.1748	0.2637	0.2850	3.00	0.3821	0.4687	0.4872	0.2639	0.3657	0.3926
0.75	0.2052	0.2932	0.3126	0.1770	0.2660	0.2875							

Tabla 2.5: Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario A.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.50	0.2117	0.0817	0.05	0.0567	0.0566	1.55	0.1027	0.0849
-1.45	0.2101	0.0766	0.10	0.0569	0.0566	1.60	0.1090	0.0862
-1.40	0.2095	0.0748	0.15	0.0567	0.0549	1.65	0.1095	0.0863
-1.35	0.2095	0.0748	0.20	0.0575	0.0556	1.70	0.1134	0.0888
-1.30	0.2092	0.0752	0.25	0.0581	0.0545	1.75	0.1152	0.0907
-1.25	0.2057	0.0752	0.30	0.0564	0.0529	1.80	0.1165	0.0971
-1.20	0.2000	0.0735	0.35	0.0564	0.0533	1.85	0.1207	0.0974
-1.15	0.1895	0.0739	0.40	0.0569	0.0517	1.90	0.1228	0.0974
-1.10	0.1760	0.0739	0.45	0.0578	0.0535	1.95	0.1243	0.0974
-1.05	0.1550	0.0739	0.50	0.0592	0.0542	2.00	0.1272	0.0974
-1.00	0.1439	0.0739	0.55	0.0585	0.0542	2.05	0.1280	0.0992
-0.95	0.1325	0.0745	0.60	0.0606	0.0554	2.10	0.1303	0.0997
-0.90	0.1241	0.0745	0.65	0.0622	0.0538	2.15	0.1317	0.0997
-0.85	0.1112	0.0739	0.70	0.0630	0.0539	2.20	0.1382	0.1100
-0.80	0.1002	0.0739	0.75	0.0658	0.0582	2.25	0.1404	0.1101
-0.75	0.0908	0.0738	0.80	0.0662	0.0604	2.30	0.1468	0.1133
-0.70	0.0873	0.0743	0.85	0.0680	0.0618	2.35	0.1484	0.1133
-0.65	0.0805	0.0713	0.90	0.0688	0.0623	2.40	0.1550	0.1142
-0.60	0.0782	0.0677	0.95	0.0717	0.0644	2.45	0.1572	0.1158
-0.55	0.0750	0.0687	1.00	0.0740	0.0659	2.50	0.1584	0.1162
-0.50	0.0732	0.0688	1.05	0.0757	0.0659	2.55	0.1598	0.1162
-0.45	0.0682	0.0688	1.10	0.0760	0.0668	2.60	0.1652	0.1168
-0.40	0.0669	0.0688	1.15	0.0780	0.0668	2.65	0.1668	0.1170
-0.35	0.0652	0.0641	1.20	0.0800	0.0664	2.70	0.1693	0.1222
-0.30	0.0623	0.0612	1.25	0.0844	0.0717	2.75	0.1725	0.1230
-0.25	0.0607	0.0612	1.30	0.0864	0.0718	2.80	0.1738	0.1230
-0.20	0.0608	0.0607	1.35	0.0878	0.0706	2.85	0.1771	0.1271
-0.15	0.0576	0.0607	1.40	0.0906	0.0744	2.90	0.1774	0.1310
-0.10	0.0566	0.0566	1.45	0.0966	0.0823	2.95	0.1830	0.1339
-0.05	0.0561	0.0553	1.50	0.1016	0.0834	3.00	0.1851	0.1354
0.00	0.0566	0.0566						

Tabla 2.6: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario B.

58 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$
-1.50	0.2790	0.3788	0.4027	0.2978	0.4026	0.4217	0.80	0.2582	0.3793	0.4037	0.2374	0.3595	0.3865
-1.45	0.2742	0.3737	0.3979	0.2854	0.3922	0.4125	0.85	0.2597	0.3805	0.4052	0.2391	0.3615	0.3886
-1.40	0.2732	0.3731	0.3974	0.2825	0.3904	0.4109	0.90	0.2617	0.3827	0.4073	0.2391	0.3615	0.3886
-1.35	0.2733	0.3735	0.3977	0.2826	0.3904	0.4110	0.95	0.2624	0.3833	0.4078	0.2407	0.3628	0.3900
-1.30	0.2713	0.3711	0.3952	0.2822	0.3895	0.4100	1.00	0.2653	0.3864	0.4109	0.2441	0.3670	0.3939
-1.25	0.2712	0.3710	0.3952	0.2823	0.3896	0.4100	1.05	0.2674	0.3883	0.4126	0.2427	0.3652	0.3921
-1.20	0.2691	0.3702	0.3945	0.2793	0.3875	0.4080	1.10	0.2686	0.3897	0.4141	0.2443	0.3672	0.3942
-1.15	0.2662	0.3682	0.3925	0.2781	0.3859	0.4064	1.15	0.2713	0.3918	0.4160	0.2445	0.3673	0.3945
-1.10	0.2652	0.3682	0.3926	0.2782	0.3862	0.4067	1.20	0.2764	0.3977	0.4216	0.2388	0.3646	0.3925
-1.05	0.2626	0.3666	0.3910	0.2782	0.3862	0.4067	1.25	0.2785	0.4001	0.4240	0.2405	0.3658	0.3936
-1.00	0.2601	0.3640	0.3885	0.2782	0.3862	0.4067	1.30	0.2807	0.4022	0.4259	0.2411	0.3667	0.3945
-0.95	0.2581	0.3630	0.3876	0.2787	0.3870	0.4076	1.35	0.2829	0.4041	0.4280	0.2393	0.3663	0.3947
-0.90	0.2534	0.3597	0.3845	0.2782	0.3863	0.4071	1.40	0.2866	0.4080	0.4317	0.2413	0.3674	0.3960
-0.85	0.2536	0.3616	0.3862	0.2795	0.3882	0.4090	1.45	0.2900	0.4111	0.4349	0.2428	0.3684	0.3970
-0.80	0.2523	0.3605	0.3850	0.2801	0.3885	0.4095	1.50	0.2959	0.4177	0.4412	0.2449	0.3704	0.3990
-0.75	0.2500	0.3592	0.3837	0.2741	0.3827	0.4041	1.55	0.2976	0.4193	0.4426	0.2425	0.3684	0.3969
-0.70	0.2482	0.3579	0.3825	0.2705	0.3800	0.4012	1.60	0.3019	0.4230	0.4464	0.2441	0.3705	0.3992
-0.65	0.2437	0.3532	0.3779	0.2565	0.3678	0.3901	1.65	0.3032	0.4241	0.4479	0.2467	0.3741	0.4027
-0.60	0.2444	0.3536	0.3778	0.2564	0.3678	0.3901	1.70	0.3066	0.4268	0.4503	0.2474	0.3748	0.4035
-0.55	0.2433	0.3525	0.3768	0.2559	0.3672	0.3897	1.75	0.3086	0.4295	0.4530	0.2486	0.3755	0.4041
-0.50	0.2444	0.3536	0.3776	0.2564	0.3679	0.3904	1.80	0.3110	0.4319	0.4554	0.2502	0.3774	0.4061
-0.45	0.2441	0.3539	0.3779	0.2564	0.3679	0.3904	1.85	0.3173	0.4382	0.4615	0.2526	0.3796	0.4086
-0.40	0.2438	0.3538	0.3775	0.2553	0.3657	0.3882	1.90	0.3202	0.4408	0.4639	0.2483	0.3762	0.4052
-0.35	0.2418	0.3534	0.3769	0.2481	0.3587	0.3810	1.95	0.3249	0.4454	0.4679	0.2485	0.3765	0.4054
-0.30	0.2420	0.3530	0.3767	0.2481	0.3588	0.3812	2.00	0.3275	0.4470	0.4692	0.2485	0.3765	0.4054
-0.25	0.2430	0.3539	0.3776	0.2481	0.3588	0.3812	2.05	0.3320	0.4517	0.4740	0.2514	0.3791	0.4083
-0.20	0.2444	0.3554	0.3789	0.2468	0.3569	0.3801	2.10	0.3354	0.4547	0.4769	0.2531	0.3807	0.4099
-0.15	0.2456	0.3559	0.3793	0.2468	0.3569	0.3801	2.15	0.3362	0.4557	0.4779	0.2534	0.3812	0.4104
-0.10	0.2461	0.3566	0.3799	0.2461	0.3567	0.3799	2.20	0.3436	0.4621	0.4846	0.2561	0.3840	0.4135
-0.05	0.2455	0.3564	0.3799	0.2452	0.3563	0.3797	2.25	0.3524	0.4697	0.4920	0.2582	0.3872	0.4171
0.00	0.2457	0.3567	0.3802	0.2457	0.3567	0.3802	2.30	0.3563	0.4733	0.4956	0.2653	0.3942	0.4237
0.05	0.2466	0.3583	0.3817	0.2457	0.3567	0.3803	2.35	0.3581	0.4746	0.4969	0.2653	0.3942	0.4237
0.10	0.2474	0.3594	0.3827	0.2448	0.3555	0.3789	2.40	0.3635	0.4783	0.5004	0.2665	0.3958	0.4252
0.15	0.2477	0.3598	0.3828	0.2378	0.3523	0.3762	2.45	0.3683	0.4827	0.5048	0.2665	0.3959	0.4253
0.20	0.2492	0.3635	0.3871	0.2400	0.3558	0.3804	2.50	0.3708	0.4857	0.5080	0.2695	0.3999	0.4294
0.25	0.2501	0.3652	0.3891	0.2396	0.3566	0.3813	2.55	0.3747	0.4892	0.5113	0.2700	0.4012	0.4309
0.30	0.2487	0.3646	0.3885	0.2290	0.3460	0.3715	2.60	0.3774	0.4919	0.5138	0.2701	0.4014	0.4312
0.35	0.2493	0.3656	0.3893	0.2309	0.3487	0.3741	2.65	0.3790	0.4944	0.5160	0.2725	0.4040	0.4341
0.40	0.2525	0.3692	0.3933	0.2321	0.3506	0.3762	2.70	0.3837	0.4988	0.5210	0.2740	0.4051	0.4355
0.45	0.2523	0.3701	0.3941	0.2312	0.3507	0.3764	2.75	0.3873	0.5033	0.5257	0.2801	0.4126	0.4431
0.50	0.2527	0.3721	0.3960	0.2330	0.3529	0.3787	2.80	0.3912	0.5059	0.5282	0.2801	0.4129	0.4434
0.55	0.2511	0.3713	0.3950	0.2336	0.3539	0.3797	2.85	0.3968	0.5117	0.5345	0.2838	0.4161	0.4471
0.60	0.2529	0.3727	0.3967	0.2339	0.3541	0.3798	2.90	0.3985	0.5139	0.5364	0.2897	0.4216	0.4524
0.65	0.2540	0.3748	0.3992	0.2352	0.3574	0.3839	2.95	0.4027	0.5174	0.5399	0.2917	0.4227	0.4536
0.70	0.2554	0.3764	0.4009	0.2357	0.3578	0.3843	3.00	0.4084	0.5237	0.5462	0.2965	0.4289	0.4598
0.75	0.2574	0.3781	0.4027	0.2372	0.3594	0.3864							

Tabla 2.7: Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario B.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.50	0.0994	0.0537	0.05	0.0515	0.0501	1.55	0.0868	0.0767
-1.45	0.0991	0.0528	0.10	0.0520	0.0516	1.60	0.0892	0.0767
-1.40	0.0986	0.0523	0.15	0.0523	0.0516	1.65	0.0911	0.0785
-1.35	0.0982	0.0526	0.20	0.0527	0.0513	1.70	0.0926	0.0785
-1.30	0.0978	0.0527	0.25	0.0527	0.0513	1.75	0.0953	0.0804
-1.25	0.0969	0.0516	0.30	0.0527	0.0507	1.80	0.0969	0.0815
-1.20	0.0930	0.0515	0.35	0.0525	0.0510	1.85	0.0993	0.0825
-1.15	0.0892	0.0515	0.40	0.0539	0.0520	1.90	0.1012	0.0846
-1.10	0.0859	0.0515	0.45	0.0548	0.0533	1.95	0.1035	0.0847
-1.05	0.0821	0.0514	0.50	0.0557	0.0535	2.00	0.1054	0.0849
-1.00	0.0789	0.0516	0.55	0.0573	0.0551	2.05	0.1071	0.0854
-0.95	0.0729	0.0517	0.60	0.0580	0.0546	2.10	0.1093	0.0905
-0.90	0.0665	0.0514	0.65	0.0602	0.0559	2.15	0.1099	0.0905
-0.85	0.0630	0.0490	0.70	0.0611	0.0572	2.20	0.1117	0.0930
-0.80	0.0589	0.0487	0.75	0.0626	0.0579	2.25	0.1162	0.0945
-0.75	0.0568	0.0491	0.80	0.0648	0.0594	2.30	0.1184	0.0947
-0.70	0.0544	0.0474	0.85	0.0656	0.0611	2.35	0.1213	0.0954
-0.65	0.0527	0.0470	0.90	0.0671	0.0615	2.40	0.1230	0.0975
-0.60	0.0519	0.0472	0.95	0.0692	0.0627	2.45	0.1261	0.0975
-0.55	0.0515	0.0473	1.00	0.0698	0.0627	2.50	0.1298	0.0985
-0.50	0.0512	0.0479	1.05	0.0711	0.0653	2.55	0.1309	0.0998
-0.45	0.0503	0.0475	1.10	0.0730	0.0654	2.60	0.1346	0.1015
-0.40	0.0501	0.0485	1.15	0.0742	0.0655	2.65	0.1373	0.1026
-0.35	0.0504	0.0493	1.20	0.0754	0.0663	2.70	0.1388	0.1045
-0.30	0.0502	0.0490	1.25	0.0772	0.0670	2.75	0.1408	0.1095
-0.25	0.0501	0.0501	1.30	0.0794	0.0692	2.80	0.1423	0.1095
-0.20	0.0500	0.0503	1.35	0.0801	0.0697	2.85	0.1450	0.1115
-0.15	0.0500	0.0505	1.40	0.0820	0.0702	2.90	0.1481	0.1149
-0.10	0.0502	0.0504	1.45	0.0827	0.0703	2.95	0.1493	0.1158
-0.05	0.0501	0.0501	1.50	0.0849	0.0736	3.00	0.1535	0.1176
0.00	0.0507	0.0507						

Tabla 2.8: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario C.

60 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$
-1.500	0.3444	0.5043	0.5342	0.3780	0.5344	0.5586	0.80	0.3601	0.5257	0.5554	0.3331	0.5028	0.5360
-1.45	0.3424	0.5028	0.5330	0.3780	0.5344	0.5586	0.85	0.3623	0.5272	0.5571	0.3323	0.5023	0.5357
-1.40	0.3414	0.5020	0.5322	0.3727	0.5300	0.5545	0.90	0.3654	0.5302	0.5601	0.3346	0.5051	0.5387
-1.35	0.3387	0.5000	0.5304	0.3727	0.5300	0.5545	0.95	0.3667	0.5318	0.5620	0.3355	0.5064	0.5404
-1.30	0.3388	0.5000	0.5305	0.3727	0.5301	0.5546	1.00	0.3679	0.5334	0.5635	0.3326	0.5035	0.5377
-1.25	0.3369	0.4980	0.5286	0.3727	0.5299	0.5545	1.05	0.3697	0.5346	0.5649	0.3347	0.5054	0.5398
-1.20	0.3364	0.4981	0.5287	0.3654	0.5246	0.5501	1.10	0.3705	0.5349	0.5652	0.3368	0.5072	0.5416
-1.15	0.3333	0.4957	0.5267	0.3629	0.5229	0.5485	1.15	0.3718	0.5367	0.5670	0.3387	0.5089	0.5433
-1.10	0.3316	0.4948	0.5257	0.3619	0.5216	0.5471	1.20	0.3731	0.5379	0.5680	0.3392	0.5096	0.5439
-1.05	0.3314	0.4950	0.5259	0.3616	0.5216	0.5471	1.25	0.3755	0.5407	0.5707	0.3379	0.5098	0.5443
-1.00	0.3307	0.4943	0.5252	0.3609	0.5207	0.5463	1.30	0.3775	0.5421	0.5719	0.3391	0.5109	0.5454
-0.95	0.3306	0.4945	0.5253	0.3611	0.5210	0.5466	1.35	0.3777	0.5430	0.5729	0.3397	0.5123	0.5468
-0.90	0.3299	0.4942	0.5253	0.3589	0.5184	0.5449	1.40	0.3803	0.5454	0.5751	0.3403	0.5131	0.5478
-0.85	0.3305	0.4950	0.5262	0.3554	0.5162	0.5431	1.45	0.3815	0.5462	0.5757	0.3403	0.5133	0.5481
-0.80	0.3298	0.4943	0.5255	0.3543	0.5154	0.5426	1.50	0.3822	0.5466	0.5760	0.3355	0.5090	0.5438
-0.75	0.3305	0.4955	0.5268	0.3545	0.5152	0.5426	1.55	0.3836	0.5473	0.5768	0.3361	0.5094	0.5443
-0.70	0.3294	0.4943	0.5256	0.3550	0.5163	0.5438	1.60	0.3847	0.5483	0.5777	0.3361	0.5094	0.5443
-0.65	0.3290	0.4938	0.5254	0.3479	0.5120	0.5405	1.65	0.3869	0.5506	0.5797	0.3367	0.5094	0.5446
-0.60	0.3303	0.4955	0.5269	0.3479	0.5123	0.5409	1.70	0.3902	0.5533	0.5823	0.3373	0.5101	0.5454
-0.55	0.3320	0.4970	0.5283	0.3484	0.5129	0.5416	1.75	0.3923	0.5553	0.5840	0.3386	0.5112	0.5467
-0.50	0.3320	0.4968	0.5282	0.3456	0.5099	0.5392	1.80	0.3946	0.5571	0.5856	0.3399	0.5128	0.5483
-0.45	0.3341	0.4986	0.5300	0.3464	0.5106	0.5400	1.85	0.3975	0.5599	0.5885	0.3409	0.5146	0.5501
-0.40	0.3356	0.5000	0.5311	0.3472	0.5116	0.5410	1.90	0.4008	0.5624	0.5911	0.3425	0.5159	0.5514
-0.35	0.3354	0.4999	0.5310	0.3443	0.5087	0.5383	1.95	0.4045	0.5666	0.5954	0.3436	0.5173	0.5530
-0.30	0.3369	0.5014	0.5323	0.3446	0.5091	0.5386	2.00	0.4087	0.5703	0.5989	0.3444	0.5180	0.5537
-0.25	0.3361	0.5013	0.5323	0.3451	0.5096	0.5394	2.05	0.4130	0.5736	0.6016	0.3459	0.5206	0.5561
-0.20	0.3370	0.5024	0.5333	0.3439	0.5086	0.5386	2.10	0.4151	0.5755	0.6036	0.3462	0.5208	0.5564
-0.15	0.3382	0.5040	0.5348	0.3441	0.5089	0.5389	2.15	0.4166	0.5769	0.6048	0.3472	0.5217	0.5576
-0.10	0.3382	0.5039	0.5345	0.3439	0.5086	0.5385	2.20	0.4187	0.5785	0.6064	0.3473	0.5221	0.5580
-0.05	0.3355	0.5024	0.5332	0.3388	0.5045	0.5352	2.25	0.4229	0.5818	0.6094	0.3493	0.5234	0.5593
0.00	0.3373	0.5037	0.5344	0.3373	0.5037	0.5344	2.30	0.4266	0.5853	0.6129	0.3500	0.5248	0.5607
0.05	0.3385	0.5051	0.5357	0.3338	0.5023	0.5333	2.35	0.4314	0.5894	0.6169	0.3508	0.5257	0.5615
0.10	0.3371	0.5040	0.5348	0.3331	0.5012	0.5326	2.40	0.4344	0.5919	0.6194	0.3546	0.5291	0.5649
0.15	0.3371	0.5048	0.5356	0.3324	0.5007	0.5323	2.45	0.4372	0.5946	0.6220	0.3552	0.5304	0.5661
0.20	0.3385	0.5063	0.5369	0.3329	0.5013	0.5330	2.50	0.4410	0.5971	0.6245	0.3562	0.5318	0.5677
0.25	0.3390	0.5068	0.5376	0.3329	0.5010	0.5328	2.55	0.4446	0.6007	0.6280	0.3585	0.5347	0.5709
0.30	0.3405	0.5080	0.5387	0.3330	0.5014	0.5332	2.60	0.4501	0.6052	0.6323	0.3546	0.5321	0.5690
0.35	0.3413	0.5090	0.5398	0.3336	0.5022	0.5343	2.65	0.4523	0.6072	0.6343	0.3552	0.5330	0.5699
0.40	0.3422	0.5104	0.5410	0.3339	0.5027	0.5347	2.70	0.4559	0.6098	0.6368	0.3568	0.5339	0.5710
0.45	0.3443	0.5124	0.5430	0.3347	0.5036	0.5358	2.75	0.4571	0.6112	0.6383	0.3609	0.5374	0.5744
0.50	0.3466	0.5144	0.5448	0.3299	0.5009	0.5334	2.80	0.4595	0.6140	0.6412	0.3618	0.5393	0.5764
0.55	0.3471	0.5157	0.5462	0.3311	0.5024	0.5351	2.85	0.4635	0.6171	0.6443	0.3649	0.5420	0.5791
0.60	0.3505	0.5184	0.5486	0.3320	0.5034	0.5361	2.90	0.4659	0.6189	0.6460	0.3660	0.5434	0.5804
0.65	0.3522	0.5198	0.5498	0.3320	0.5026	0.5354	2.95	0.4686	0.6209	0.6481	0.3660	0.5434	0.5804
0.70	0.3544	0.5217	0.5516	0.3318	0.5024	0.5354	3.00	0.4707	0.6237	0.6508	0.3663	0.5440	0.5810
0.75	0.3566	0.5229	0.5527	0.3317	0.5018	0.5350							

Tabla 2.9: Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenario C.

$\pi_0 = 0.05$	Esc. A	Esc. B	Esc. C
$\widehat{\alpha}_W$	0.1366	0.0781	0.0484
$\widehat{\beta}_W, H_1$	0.2678	0.2889	0.3652
$\widehat{\beta}_W, H_1^*$	0.3351	0.3874	0.5184
$\widehat{\beta}_W, H_1^{**}$	0.3457	0.4047	0.5407
$\widehat{\alpha}_H$	0.1377	0.0815	0.0563
$\widehat{\beta}_H, H_1$	0.2777	0.3135	0.3889
$\widehat{\beta}_H, H_1^*$	0.3476	0.4118	0.5378
$\widehat{\beta}_H, H_1^{**}$	0.3588	0.4287	0.5604
$\widehat{\alpha}_D$	0.3187	0.2093	0.1017
$\widehat{\beta}_D, H_1$	0.3027	0.2801	0.3428
$\widehat{\beta}_D, H_1^*$	0.3582	0.3776	0.4989
$\widehat{\beta}_D, H_1^{**}$	0.3731	0.4007	0.5287

Tabla 2.10: Niveles de significación y potencias simuladas para $W(\widehat{\theta}, \widetilde{\theta})$, $H(\widetilde{\theta}, \widehat{\theta})$ y $D(\overline{\theta}, \widetilde{\theta}, \widehat{\theta})$, con $\pi_0 = 0.05$. Escenarios A, B y C.

Análogamente, para la segunda hipótesis nula considerada, $\pi_0 = 0.35$ se presentan las potencias y los niveles de significación simulados para $T_\lambda(\widehat{p}, p(\widehat{\theta}))$, $S_\lambda(p(\widetilde{\theta}), p(\widehat{\theta}))$, con $\lambda \in [-1.5, 3]$, $W(\widehat{\theta}, \widetilde{\theta})$, $H(\widetilde{\theta}, \widehat{\theta})$ y $D(\overline{\theta}, \widetilde{\theta}, \widehat{\theta})$ en los Escenarios D, E y F.

$\pi_0 = 0.35$	Esc. D	Esc. E	Esc. F
$\widehat{\alpha}_W$	0.0904	0.0667	0.0488
$\widehat{\beta}_W, H_1$	0.1277	0.1106	0.1313
$\widehat{\beta}_W, H_1^*$	0.1486	0.1360	0.1879
$\widehat{\beta}_W, H_1^{**}$	0.1549	0.1419	0.1990
$\widehat{\alpha}_H$	0.0904	0.0674	0.0492
$\widehat{\beta}_H, H_1$	0.1278	0.1111	0.1319
$\widehat{\beta}_H, H_1^*$	0.1486	0.1366	0.1890
$\widehat{\beta}_H, H_1^{**}$	0.1549	0.1426	0.2001
$\widehat{\alpha}_D$	0.1586	0.0779	0.0496
$\widehat{\beta}_D, H_1$	0.1751	0.1178	0.1292
$\widehat{\beta}_D, H_1^*$	0.1953	0.1429	0.1862
$\widehat{\beta}_D, H_1^{**}$	0.2021	0.1496	0.1976

Tabla 2.11: Niveles de significación y potencias simuladas para $W(\widehat{\theta}, \widetilde{\theta})$, $H(\widetilde{\theta}, \widehat{\theta})$ y $D(\overline{\theta}, \widetilde{\theta}, \widehat{\theta})$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenarios D, E y F.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.50	0.1737	0.0957	0.05	0.0696	0.0697	1.55	0.0637	0.0623
-1.45	0.1714	0.0957	0.10	0.0697	0.0696	1.60	0.0639	0.0623
-1.40	0.1707	0.0957	0.15	0.0697	0.0696	1.65	0.0666	0.0638
-1.35	0.1687	0.0948	0.20	0.0689	0.0696	1.70	0.0672	0.0638
-1.30	0.1687	0.0916	0.25	0.0655	0.0663	1.75	0.0686	0.0642
-1.25	0.1607	0.0916	0.30	0.0650	0.0663	1.80	0.0729	0.0700
-1.20	0.1591	0.0916	0.35	0.0641	0.0646	1.85	0.0729	0.0700
-1.15	0.1476	0.0873	0.40	0.0641	0.0607	1.90	0.0734	0.0700
-1.10	0.1387	0.0862	0.45	0.0617	0.0597	1.95	0.0743	0.0700
-1.05	0.1315	0.0862	0.50	0.0618	0.0597	2.00	0.0757	0.0700
-1.00	0.1278	0.0862	0.55	0.0611	0.0597	2.05	0.0778	0.0700
-0.95	0.1195	0.0844	0.60	0.0615	0.0589	2.10	0.0787	0.0725
-0.90	0.1119	0.0830	0.65	0.0612	0.0600	2.15	0.0791	0.0751
-0.85	0.1020	0.0830	0.70	0.0603	0.0612	2.20	0.0834	0.0751
-0.80	0.0981	0.0830	0.75	0.0597	0.0624	2.25	0.0835	0.0751
-0.75	0.0937	0.0830	0.80	0.0600	0.0624	2.30	0.0854	0.0751
-0.70	0.0922	0.0830	0.85	0.0586	0.0624	2.35	0.0882	0.0751
-0.65	0.0905	0.0830	0.90	0.0592	0.0623	2.40	0.0882	0.0751
-0.60	0.0875	0.0827	0.95	0.0591	0.0623	2.45	0.0882	0.0751
-0.55	0.0873	0.0827	1.00	0.0591	0.0623	2.50	0.0885	0.0751
-0.50	0.0859	0.0825	1.05	0.0599	0.0623	2.55	0.0920	0.0779
-0.45	0.0851	0.0822	1.10	0.0599	0.0623	2.60	0.0954	0.0799
-0.40	0.0848	0.0822	1.15	0.0605	0.0623	2.65	0.0968	0.0848
-0.35	0.0830	0.0820	1.20	0.0605	0.0623	2.70	0.0984	0.0858
-0.30	0.0820	0.0816	1.25	0.0603	0.0621	2.75	0.1007	0.0869
-0.25	0.0782	0.0773	1.30	0.0613	0.0617	2.80	0.1009	0.0871
-0.20	0.0781	0.0772	1.35	0.0621	0.0617	2.85	0.1013	0.0929
-0.15	0.0764	0.0759	1.40	0.0621	0.0622	2.90	0.1056	0.0993
-0.10	0.0755	0.0759	1.45	0.0637	0.0622	2.95	0.1057	0.0993
-0.05	0.0737	0.0745	1.50	0.0630	0.0622	3.00	0.1071	0.0998
0.00	0.0709	0.0709						

Tabla 2.12: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario D.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$
-1.50	0.1870	0.2066	0.2134	0.1325	0.1539	0.1603	0.80	0.0830	0.0976	0.1018	0.0849	0.1007	0.1052
-1.45	0.1838	0.2031	0.2098	0.1325	0.1539	0.1603	0.85	0.0798	0.0937	0.0978	0.0830	0.0982	0.1026
-1.40	0.1829	0.2022	0.2090	0.1325	0.1539	0.1603	0.90	0.0801	0.0939	0.0979	0.0827	0.0979	0.1023
-1.35	0.1815	0.2009	0.2076	0.1308	0.1515	0.1578	0.95	0.0800	0.0938	0.0978	0.0827	0.0979	0.1023
-1.30	0.1815	0.2009	0.2076	0.1286	0.1494	0.1557	1.00	0.0799	0.0937	0.0978	0.0827	0.0979	0.1023
-1.25	0.1758	0.1951	0.2018	0.1286	0.1494	0.1557	1.05	0.0803	0.0941	0.0982	0.0827	0.0979	0.1023
-1.20	0.1740	0.1933	0.2000	0.1286	0.1494	0.1557	1.10	0.0802	0.0940	0.0981	0.0827	0.0979	0.1023
-1.15	0.1662	0.1861	0.1929	0.1233	0.1442	0.1506	1.15	0.0806	0.0944	0.0984	0.0827	0.0979	0.1023
-1.10	0.1602	0.1802	0.1870	0.1225	0.1434	0.1498	1.20	0.0806	0.0944	0.0984	0.0827	0.0979	0.1023
-1.05	0.1558	0.1756	0.1824	0.1225	0.1434	0.1498	1.25	0.0802	0.0940	0.0979	0.0825	0.0976	0.1020
-1.00	0.1533	0.1735	0.1803	0.1225	0.1434	0.1498	1.30	0.0813	0.0953	0.0993	0.0818	0.0968	0.1011
-0.95	0.1453	0.1663	0.1731	0.1201	0.1408	0.1472	1.35	0.0818	0.0957	0.0997	0.0818	0.0968	0.1011
-0.90	0.1392	0.1605	0.1672	0.1187	0.1393	0.1457	1.40	0.0818	0.0957	0.0997	0.0820	0.0971	0.1014
-0.85	0.1324	0.1544	0.1610	0.1187	0.1393	0.1457	1.45	0.0836	0.0972	0.1012	0.0821	0.0968	0.1013
-0.80	0.1299	0.1520	0.1585	0.1187	0.1393	0.1457	1.50	0.0830	0.0964	0.1005	0.0821	0.0968	0.1013
-0.75	0.1270	0.1491	0.1556	0.1187	0.1393	0.1457	1.55	0.0833	0.0966	0.1006	0.0821	0.0968	0.1013
-0.70	0.1264	0.1485	0.1550	0.1187	0.1393	0.1457	1.60	0.0834	0.0967	0.1007	0.0821	0.0968	0.1013
-0.65	0.1251	0.1474	0.1538	0.1187	0.1393	0.1457	1.65	0.0858	0.0993	0.1033	0.0835	0.0983	0.1028
-0.60	0.1228	0.1450	0.1513	0.1186	0.1392	0.1456	1.70	0.0863	0.0998	0.1039	0.0835	0.0983	0.1028
-0.55	0.1224	0.1444	0.1507	0.1185	0.1391	0.1455	1.75	0.0880	0.1017	0.1060	0.0842	0.0991	0.1037
-0.50	0.1212	0.1429	0.1493	0.1184	0.1390	0.1454	1.80	0.0931	0.1073	0.1117	0.0894	0.1045	0.1094
-0.45	0.1200	0.1418	0.1481	0.1178	0.1383	0.1447	1.85	0.0931	0.1073	0.1117	0.0894	0.1045	0.1094
-0.40	0.1199	0.1412	0.1476	0.1178	0.1383	0.1447	1.90	0.0934	0.1077	0.1121	0.0894	0.1045	0.1094
-0.35	0.1176	0.1388	0.1451	0.1173	0.1376	0.1439	1.95	0.0946	0.1089	0.1132	0.0894	0.1045	0.1094
-0.30	0.1169	0.1379	0.1441	0.1168	0.1370	0.1432	2.00	0.0956	0.1097	0.1141	0.0894	0.1045	0.1094
-0.25	0.1116	0.1315	0.1374	0.1106	0.1301	0.1360	2.05	0.0971	0.1112	0.1156	0.0894	0.1045	0.1094
-0.20	0.1115	0.1313	0.1372	0.1105	0.1299	0.1358	2.10	0.0978	0.1119	0.1163	0.0914	0.1066	0.1115
-0.15	0.1087	0.1280	0.1337	0.1085	0.1276	0.1333	2.15	0.0980	0.1120	0.1165	0.0932	0.1083	0.1132
-0.10	0.1082	0.1276	0.1333	0.1085	0.1276	0.1333	2.20	0.1016	0.1156	0.1202	0.0932	0.1083	0.1132
-0.05	0.1064	0.1252	0.1309	0.1068	0.1254	0.1310	2.25	0.1016	0.1157	0.1202	0.0932	0.1083	0.1132
0.00	0.1020	0.1199	0.1252	0.1020	0.1199	0.1252	2.30	0.1029	0.1170	0.1214	0.0932	0.1083	0.1132
0.05	0.0992	0.1167	0.1216	0.0994	0.1170	0.1220	2.35	0.1063	0.1204	0.1249	0.0932	0.1083	0.1132
0.10	0.0992	0.1164	0.1214	0.0993	0.1168	0.1217	2.40	0.1063	0.1204	0.1249	0.0932	0.1083	0.1132
0.15	0.0990	0.1163	0.1213	0.0993	0.1168	0.1217	2.45	0.1063	0.1204	0.1249	0.0932	0.1083	0.1132
0.20	0.0979	0.1151	0.1201	0.0993	0.1167	0.1217	2.50	0.1066	0.1206	0.1251	0.0932	0.1083	0.1132
0.25	0.0924	0.1089	0.1137	0.0945	0.1112	0.1160	2.55	0.1098	0.1241	0.1287	0.0967	0.1121	0.1171
0.30	0.0912	0.1073	0.1121	0.0945	0.1112	0.1160	2.60	0.1139	0.1289	0.1335	0.0991	0.1152	0.1203
0.35	0.0897	0.1055	0.1099	0.0910	0.1072	0.1117	2.65	0.1160	0.1314	0.1361	0.1057	0.1230	0.1284
0.40	0.0897	0.1055	0.1099	0.0858	0.1020	0.1065	2.70	0.1184	0.1342	0.1391	0.1073	0.1248	0.1302
0.45	0.0857	0.1009	0.1053	0.0831	0.0989	0.1035	2.75	0.1200	0.1359	0.1407	0.1081	0.1258	0.1312
0.50	0.0853	0.1005	0.1049	0.0831	0.0989	0.1035	2.80	0.1203	0.1363	0.1411	0.1084	0.1261	0.1315
0.55	0.0845	0.0995	0.1039	0.0831	0.0989	0.1035	2.85	0.1207	0.1368	0.1416	0.1125	0.1298	0.1352
0.60	0.0846	0.0996	0.1039	0.0826	0.0984	0.1029	2.90	0.1236	0.1397	0.1446	0.1160	0.1329	0.1384
0.65	0.0842	0.0989	0.1033	0.0832	0.0989	0.1035	2.95	0.1239	0.1400	0.1449	0.1160	0.1329	0.1384
0.70	0.0833	0.0979	0.1022	0.0840	0.0997	0.1043	3.00	0.1257	0.1421	0.1470	0.1164	0.1334	0.1389
0.75	0.0827	0.0972	0.1016	0.0849	0.1007	0.1052							

Tabla 2.13: Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario D.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.50	0.0851	0.0753	0.05	0.0541	0.0541	1.55	0.0621	0.0591
-1.45	0.0846	0.0727	0.10	0.0542	0.0542	1.60	0.0622	0.0604
-1.40	0.0832	0.0722	0.15	0.0542	0.0542	1.65	0.0633	0.0623
-1.35	0.0819	0.0707	0.20	0.0542	0.0542	1.70	0.0637	0.0631
-1.30	0.0804	0.0707	0.25	0.0541	0.0532	1.75	0.0644	0.0631
-1.25	0.0790	0.0700	0.30	0.0542	0.0534	1.80	0.0655	0.0631
-1.20	0.0780	0.0700	0.35	0.0543	0.0534	1.85	0.0660	0.0632
-1.15	0.0768	0.0685	0.40	0.0543	0.0534	1.90	0.0664	0.0632
-1.10	0.0760	0.0678	0.45	0.0540	0.0534	1.95	0.0676	0.0655
-1.05	0.0746	0.0677	0.50	0.0540	0.0530	2.00	0.0679	0.0657
-1.00	0.0726	0.0644	0.55	0.0540	0.0528	2.05	0.0685	0.0657
-0.95	0.0708	0.0639	0.60	0.0539	0.0528	2.10	0.0696	0.0665
-0.90	0.0690	0.0636	0.65	0.0544	0.0533	2.15	0.0700	0.0665
-0.85	0.0665	0.0617	0.70	0.0544	0.0523	2.20	0.0710	0.0678
-0.80	0.0652	0.0615	0.75	0.0546	0.0518	2.25	0.0729	0.0688
-0.75	0.0632	0.0600	0.80	0.0544	0.0523	2.30	0.0737	0.0688
-0.70	0.0624	0.0600	0.85	0.0546	0.0526	2.35	0.0751	0.0700
-0.65	0.0618	0.0593	0.90	0.0552	0.0537	2.40	0.0762	0.0718
-0.60	0.0612	0.0594	0.95	0.0552	0.0557	2.45	0.0769	0.0725
-0.55	0.0600	0.0587	1.00	0.0557	0.0564	2.50	0.0776	0.0730
-0.50	0.0595	0.0587	1.05	0.0563	0.0569	2.55	0.0780	0.0735
-0.45	0.0591	0.0587	1.10	0.0572	0.0569	2.60	0.0791	0.0735
-0.40	0.0588	0.0584	1.15	0.0573	0.0569	2.65	0.0799	0.0741
-0.35	0.0586	0.0584	1.20	0.0576	0.0568	2.70	0.0806	0.0751
-0.30	0.0578	0.0563	1.25	0.0581	0.0572	2.75	0.0811	0.0751
-0.25	0.0561	0.0547	1.30	0.0588	0.0572	2.80	0.0827	0.0777
-0.20	0.0557	0.0550	1.35	0.0591	0.0572	2.85	0.0839	0.0777
-0.15	0.0548	0.0544	1.40	0.0599	0.0573	2.90	0.0849	0.0778
-0.10	0.0544	0.0541	1.45	0.0601	0.0573	2.95	0.0880	0.0799
-0.05	0.0540	0.0541	1.50	0.0614	0.0581	3.00	0.0891	0.0799
0.00	0.0541	0.0541						

Tabla 2.14: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario E.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$
-1.50	0.1255	0.1514	0.1586	0.1199	0.1457	0.1524	0.80	0.0880	0.1094	0.1143	0.0853	0.1072	0.1121
-1.45	0.1251	0.1509	0.1580	0.1169	0.1428	0.1492	0.85	0.0877	0.1088	0.1137	0.0854	0.1073	0.1122
-1.40	0.1237	0.1493	0.1562	0.1163	0.1419	0.1483	0.90	0.0883	0.1094	0.1143	0.0865	0.1085	0.1135
-1.35	0.1222	0.1476	0.1544	0.1146	0.1401	0.1462	0.95	0.0883	0.1094	0.1143	0.0879	0.1102	0.1154
-1.30	0.1208	0.1463	0.1531	0.1145	0.1400	0.1461	1.00	0.0887	0.1100	0.1149	0.0882	0.1105	0.1156
-1.25	0.1188	0.1443	0.1509	0.1134	0.1388	0.1449	1.05	0.0890	0.1105	0.1154	0.0889	0.1113	0.1165
-1.20	0.1177	0.1430	0.1495	0.1134	0.1388	0.1449	1.10	0.0900	0.1115	0.1165	0.0889	0.1113	0.1165
-1.15	0.1148	0.1398	0.1461	0.1101	0.1347	0.1407	1.15	0.0900	0.1115	0.1165	0.0888	0.1112	0.1164
-1.10	0.1138	0.1388	0.1451	0.1085	0.1331	0.1391	1.20	0.0900	0.1115	0.1165	0.0887	0.1110	0.1162
-1.05	0.1131	0.1376	0.1439	0.1083	0.1329	0.1388	1.25	0.0904	0.1119	0.1169	0.0889	0.1111	0.1163
-1.00	0.1113	0.1358	0.1419	0.1048	0.1294	0.1351	1.30	0.0909	0.1125	0.1175	0.0889	0.1111	0.1163
-0.95	0.1100	0.1347	0.1408	0.1039	0.1281	0.1338	1.35	0.0912	0.1126	0.1177	0.0889	0.1111	0.1163
-0.90	0.1080	0.1328	0.1388	0.1038	0.1279	0.1336	1.40	0.0917	0.1130	0.1181	0.0891	0.1113	0.1165
-0.85	0.1048	0.1295	0.1353	0.1007	0.1246	0.1301	1.45	0.0919	0.1132	0.1183	0.0891	0.1112	0.1164
-0.80	0.1037	0.1283	0.1340	0.1006	0.1244	0.1298	1.50	0.0931	0.1147	0.1198	0.0899	0.1123	0.1176
-0.75	0.1012	0.1253	0.1308	0.0980	0.1214	0.1268	1.55	0.0936	0.1152	0.1203	0.0906	0.1131	0.1184
-0.70	0.0999	0.1237	0.1292	0.0980	0.1214	0.1268	1.60	0.0936	0.1152	0.1203	0.0918	0.1146	0.1200
-0.65	0.0995	0.1235	0.1290	0.0974	0.1207	0.1260	1.65	0.0946	0.1162	0.1213	0.0930	0.1157	0.1211
-0.60	0.0987	0.1226	0.1281	0.0974	0.1207	0.1260	1.70	0.0950	0.1167	0.1219	0.0940	0.1167	0.1221
-0.55	0.0974	0.1208	0.1262	0.0965	0.1196	0.1248	1.75	0.0956	0.1173	0.1225	0.0940	0.1167	0.1221
-0.50	0.0971	0.1204	0.1258	0.0965	0.1196	0.1248	1.80	0.0967	0.1187	0.1239	0.0940	0.1167	0.1221
-0.45	0.0968	0.1200	0.1253	0.0965	0.1196	0.1248	1.85	0.0971	0.1191	0.1243	0.0940	0.1167	0.1221
-0.40	0.0960	0.1190	0.1243	0.0958	0.1186	0.1238	1.90	0.0973	0.1195	0.1246	0.0941	0.1167	0.1222
-0.35	0.0959	0.1189	0.1242	0.0958	0.1186	0.1238	1.95	0.0988	0.1210	0.1263	0.0964	0.1189	0.1245
-0.30	0.0951	0.1179	0.1231	0.0943	0.1168	0.1218	2.00	0.0997	0.1221	0.1274	0.0972	0.1198	0.1255
-0.25	0.0929	0.1153	0.1204	0.0919	0.1142	0.1191	2.05	0.1005	0.1229	0.1282	0.0972	0.1198	0.1255
-0.20	0.0921	0.1141	0.1192	0.0916	0.1136	0.1186	2.10	0.1018	0.1239	0.1294	0.0976	0.1202	0.1259
-0.15	0.0911	0.1130	0.1179	0.0907	0.1122	0.1171	2.15	0.1022	0.1244	0.1298	0.0976	0.1202	0.1259
-0.10	0.0905	0.1122	0.1170	0.0898	0.1110	0.1158	2.20	0.1038	0.1264	0.1318	0.0994	0.1225	0.1282
-0.05	0.0897	0.1108	0.1157	0.0898	0.1110	0.1158	2.25	0.1067	0.1295	0.1350	0.1012	0.1243	0.1302
0.00	0.0898	0.1110	0.1158	0.0898	0.1110	0.1158	2.30	0.1075	0.1302	0.1358	0.1012	0.1243	0.1302
0.05	0.0898	0.1110	0.1158	0.0898	0.1110	0.1158	2.35	0.1089	0.1316	0.1371	0.1025	0.1256	0.1315
0.10	0.0898	0.1110	0.1158	0.0898	0.1110	0.1158	2.40	0.1108	0.1341	0.1397	0.1038	0.1268	0.1328
0.15	0.0898	0.1109	0.1157	0.0898	0.1110	0.1158	2.45	0.1115	0.1349	0.1405	0.1055	0.1291	0.1351
0.20	0.0897	0.1108	0.1156	0.0898	0.1110	0.1158	2.50	0.1125	0.1360	0.1417	0.1060	0.1296	0.1356
0.25	0.0889	0.1100	0.1149	0.0878	0.1091	0.1139	2.55	0.1127	0.1362	0.1418	0.1071	0.1310	0.1370
0.30	0.0889	0.1100	0.1149	0.0878	0.1091	0.1140	2.60	0.1138	0.1370	0.1426	0.1071	0.1310	0.1370
0.35	0.0889	0.1099	0.1148	0.0878	0.1091	0.1140	2.65	0.1146	0.1378	0.1435	0.1080	0.1321	0.1382
0.40	0.0889	0.1099	0.1148	0.0878	0.1091	0.1140	2.70	0.1155	0.1390	0.1448	0.1091	0.1336	0.1399
0.45	0.0886	0.1096	0.1144	0.0878	0.1091	0.1140	2.75	0.1161	0.1396	0.1455	0.1091	0.1336	0.1399
0.50	0.0886	0.1094	0.1143	0.0873	0.1086	0.1135	2.80	0.1176	0.1412	0.1472	0.1121	0.1366	0.1431
0.55	0.0882	0.1090	0.1138	0.0869	0.1083	0.1132	2.85	0.1188	0.1427	0.1488	0.1121	0.1366	0.1431
0.60	0.0880	0.1088	0.1136	0.0868	0.1083	0.1131	2.90	0.1200	0.1442	0.1503	0.1124	0.1369	0.1434
0.65	0.0884	0.1093	0.1141	0.0870	0.1085	0.1133	2.95	0.1235	0.1478	0.1541	0.1142	0.1388	0.1453
0.70	0.0884	0.1093	0.1141	0.0852	0.1065	0.1114	3.00	0.1242	0.1483	0.1547	0.1142	0.1388	0.1453
0.75	0.0884	0.1095	0.1143	0.0844	0.1058	0.1107							

Tabla 2.15: Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario E.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.50	0.0521	0.0517	0.05	0.0502	0.0501	1.55	0.0545	0.0538
-1.45	0.0519	0.0517	0.10	0.0502	0.0501	1.60	0.0548	0.0538
-1.40	0.0517	0.0516	0.15	0.0502	0.0499	1.65	0.0549	0.0540
-1.35	0.0516	0.0513	0.20	0.0502	0.0500	1.70	0.0550	0.0540
-1.30	0.0515	0.0511	0.25	0.0502	0.0500	1.75	0.0555	0.0545
-1.25	0.0513	0.0511	0.30	0.0503	0.0503	1.80	0.0558	0.0549
-1.20	0.0512	0.0508	0.35	0.0503	0.0501	1.85	0.0561	0.0551
-1.15	0.0512	0.0508	0.40	0.0504	0.0501	1.90	0.0563	0.0552
-1.10	0.0511	0.0508	0.45	0.0502	0.0500	1.95	0.0566	0.0554
-1.05	0.0509	0.0508	0.50	0.0503	0.0502	2.00	0.0569	0.0565
-1.00	0.0508	0.0507	0.55	0.0504	0.0501	2.05	0.0575	0.0567
-0.95	0.0507	0.0507	0.60	0.0506	0.0508	2.10	0.0578	0.0569
-0.90	0.0506	0.0506	0.65	0.0508	0.0508	2.15	0.0581	0.0570
-0.85	0.0504	0.0505	0.70	0.0510	0.0510	2.20	0.0584	0.0572
-0.80	0.0503	0.0502	0.75	0.0513	0.0511	2.25	0.0587	0.0578
-0.75	0.0500	0.0499	0.80	0.0512	0.0510	2.30	0.0591	0.0579
-0.70	0.0499	0.0499	0.85	0.0516	0.0512	2.35	0.0595	0.0582
-0.65	0.0500	0.0499	0.90	0.0516	0.0510	2.40	0.0599	0.0582
-0.60	0.0499	0.0500	0.95	0.0518	0.0511	2.45	0.0603	0.0584
-0.55	0.0498	0.0500	1.00	0.0521	0.0513	2.50	0.0606	0.0586
-0.50	0.0499	0.0500	1.05	0.0523	0.0514	2.55	0.0609	0.0589
-0.45	0.0499	0.0499	1.10	0.0524	0.0516	2.60	0.0614	0.0599
-0.40	0.0499	0.0499	1.15	0.0526	0.0516	2.65	0.0619	0.0599
-0.35	0.0499	0.0499	1.20	0.0527	0.0520	2.70	0.0622	0.0599
-0.30	0.0499	0.0500	1.25	0.0529	0.0520	2.75	0.0631	0.0605
-0.25	0.0499	0.0500	1.30	0.0532	0.0524	2.80	0.0637	0.0617
-0.20	0.0499	0.0499	1.35	0.0535	0.0532	2.85	0.0646	0.0623
-0.15	0.0500	0.0499	1.40	0.0538	0.0534	2.90	0.0651	0.0624
-0.10	0.0500	0.0499	1.45	0.0540	0.0535	2.95	0.0657	0.0628
-0.05	0.0501	0.0500	1.50	0.0543	0.0537	3.00	0.0662	0.0629
0.00	0.0501	0.0501						

Tabla 2.16: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario F.

λ	$\widehat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\widehat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\widehat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$	λ	$\widehat{\beta}_{T_\lambda H_1}$	$\widehat{\beta}_{T_\lambda H_1^*}$	$\widehat{\beta}_{T_\lambda H_1^{**}}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda H_1}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda H_1^*}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda H_1^{**}}$
-1.50	0.1323	0.1902	0.2019	0.1342	0.1924	0.2037	0.80	0.1281	0.1836	0.1948	0.1271	0.1824	0.1937
-1.45	0.1320	0.1898	0.2015	0.1338	0.1919	0.2033	0.85	0.1285	0.1841	0.1953	0.1274	0.1828	0.1941
-1.40	0.1319	0.1892	0.2010	0.1338	0.1917	0.2030	0.90	0.1285	0.1844	0.1956	0.1267	0.1824	0.1938
-1.35	0.1315	0.1887	0.2004	0.1328	0.1905	0.2020	0.95	0.1287	0.1847	0.1960	0.1270	0.1826	0.1940
-1.30	0.1311	0.1879	0.1996	0.1323	0.1893	0.2006	1.00	0.1290	0.1850	0.1964	0.1272	0.1829	0.1944
-1.25	0.1308	0.1874	0.1990	0.1320	0.1886	0.1999	1.05	0.1290	0.1851	0.1965	0.1275	0.1833	0.1949
-1.20	0.1304	0.1868	0.1983	0.1313	0.1877	0.1990	1.10	0.1293	0.1853	0.1967	0.1276	0.1837	0.1952
-1.15	0.1303	0.1867	0.1982	0.1312	0.1877	0.1989	1.15	0.1296	0.1855	0.1968	0.1276	0.1837	0.1952
-1.10	0.1302	0.1864	0.1979	0.1311	0.1875	0.1988	1.20	0.1295	0.1855	0.1968	0.1277	0.1838	0.1953
-1.05	0.1301	0.1864	0.1978	0.1310	0.1875	0.1987	1.25	0.1298	0.1858	0.1970	0.1277	0.1838	0.1953
-1.00	0.1300	0.1862	0.1976	0.1310	0.1875	0.1987	1.30	0.1302	0.1862	0.1974	0.1281	0.1843	0.1957
-0.95	0.1298	0.1861	0.1975	0.1310	0.1875	0.1987	1.35	0.1305	0.1864	0.1976	0.1284	0.1844	0.1958
-0.90	0.1295	0.1859	0.1972	0.1307	0.1869	0.1981	1.40	0.1307	0.1866	0.1978	0.1285	0.1844	0.1959
-0.85	0.1290	0.1852	0.1966	0.1306	0.1868	0.1981	1.45	0.1308	0.1869	0.1980	0.1285	0.1845	0.1959
-0.80	0.1286	0.1847	0.1961	0.1293	0.1855	0.1968	1.50	0.1311	0.1871	0.1983	0.1287	0.1847	0.1962
-0.75	0.1280	0.1838	0.1952	0.1283	0.1841	0.1954	1.55	0.1312	0.1875	0.1987	0.1291	0.1852	0.1966
-0.70	0.1280	0.1837	0.1950	0.1283	0.1841	0.1954	1.60	0.1316	0.1880	0.1992	0.1283	0.1848	0.1964
-0.65	0.1279	0.1836	0.1949	0.1283	0.1841	0.1954	1.65	0.1317	0.1882	0.1994	0.1286	0.1850	0.1966
-0.60	0.1278	0.1835	0.1948	0.1280	0.1838	0.1951	1.70	0.1319	0.1884	0.1996	0.1286	0.1851	0.1967
-0.55	0.1278	0.1834	0.1947	0.1279	0.1837	0.1950	1.75	0.1324	0.1888	0.2000	0.1290	0.1854	0.1971
-0.50	0.1278	0.1834	0.1948	0.1279	0.1837	0.1950	1.80	0.1329	0.1893	0.2006	0.1295	0.1857	0.1975
-0.45	0.1277	0.1834	0.1948	0.1277	0.1835	0.1948	1.85	0.1333	0.1896	0.2010	0.1298	0.1861	0.1979
-0.40	0.1276	0.1832	0.1945	0.1277	0.1833	0.1946	1.90	0.1335	0.1899	0.2013	0.1300	0.1862	0.1980
-0.35	0.1276	0.1831	0.1944	0.1277	0.1833	0.1946	1.95	0.1341	0.1902	0.2017	0.1305	0.1867	0.1985
-0.30	0.1276	0.1832	0.1944	0.1277	0.1833	0.1946	2.00	0.1347	0.1907	0.2022	0.1311	0.1877	0.1994
-0.25	0.1276	0.1831	0.1944	0.1277	0.1833	0.1945	2.05	0.1351	0.1914	0.2029	0.1315	0.1879	0.1998
-0.20	0.1276	0.1829	0.1941	0.1277	0.1831	0.1943	2.10	0.1353	0.1916	0.2032	0.1318	0.1882	0.2000
-0.15	0.1276	0.1829	0.1941	0.1277	0.1830	0.1942	2.15	0.1357	0.1923	0.2038	0.1319	0.1884	0.2003
-0.10	0.1277	0.1830	0.1941	0.1277	0.1830	0.1942	2.20	0.1362	0.1929	0.2043	0.1320	0.1887	0.2006
-0.05	0.1279	0.1830	0.1941	0.1278	0.1830	0.1941	2.25	0.1367	0.1937	0.2052	0.1327	0.1894	0.2014
0.00	0.1279	0.1830	0.1941	0.1279	0.1830	0.1941	2.30	0.1374	0.1944	0.2059	0.1329	0.1896	0.2016
0.05	0.1278	0.1831	0.1942	0.1279	0.1831	0.1942	2.35	0.1380	0.1952	0.2069	0.1331	0.1898	0.2020
0.10	0.1278	0.1830	0.1941	0.1279	0.1831	0.1942	2.40	0.1382	0.1955	0.2071	0.1331	0.1898	0.2020
0.15	0.1277	0.1829	0.1940	0.1273	0.1824	0.1935	2.45	0.1386	0.1958	0.2075	0.1332	0.1899	0.2021
0.20	0.1275	0.1826	0.1936	0.1270	0.1821	0.1933	2.50	0.1390	0.1964	0.2083	0.1337	0.1906	0.2030
0.25	0.1275	0.1827	0.1937	0.1270	0.1821	0.1933	2.55	0.1397	0.1973	0.2093	0.1343	0.1915	0.2040
0.30	0.1274	0.1827	0.1937	0.1271	0.1822	0.1933	2.60	0.1404	0.1979	0.2099	0.1352	0.1925	0.2050
0.35	0.1275	0.1827	0.1938	0.1270	0.1822	0.1933	2.65	0.1409	0.1982	0.2103	0.1353	0.1930	0.2054
0.40	0.1275	0.1829	0.1941	0.1270	0.1822	0.1935	2.70	0.1412	0.1985	0.2106	0.1355	0.1932	0.2057
0.45	0.1272	0.1827	0.1939	0.1268	0.1820	0.1933	2.75	0.1418	0.1991	0.2114	0.1358	0.1935	0.2061
0.50	0.1272	0.1828	0.1939	0.1270	0.1824	0.1937	2.80	0.1424	0.1998	0.2121	0.1370	0.1949	0.2076
0.55	0.1274	0.1830	0.1942	0.1268	0.1823	0.1936	2.85	0.1436	0.2015	0.2139	0.1375	0.1955	0.2084
0.60	0.1275	0.1832	0.1943	0.1271	0.1824	0.1938	2.90	0.1442	0.2023	0.2146	0.1377	0.1958	0.2087
0.65	0.1275	0.1832	0.1944	0.1273	0.1825	0.1939	2.95	0.1448	0.2032	0.2157	0.1384	0.1970	0.2099
0.70	0.1280	0.1835	0.1947	0.1274	0.1826	0.1940	3.00	0.1453	0.2039	0.2165	0.1384	0.1970	0.2099
0.75	0.1281	0.1837	0.1949	0.1275	0.1828	0.1942							

Tabla 2.17: Potencias simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\pi_0 = 0.35$. Escenario F.

68 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

Las gráficas de las Figuras 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6 representan los niveles de significación y potencias simuladas para las familias de estadísticos $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$, $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$, definidas en (2.35) y (2.36), así como para los estadísticos de contraste $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, para los escenarios A, B, C y las tres hipótesis alternativas H_1, H_1^*, H_1^{**} consideradas en (2.41), (2.42) y (2.43).

En algunos escenarios se observa que el nivel de significación simulado no está próximo al nivel nominal teórico fijado, $\alpha = 0.05$. En estos casos es necesario considerar algún procedimiento que permita, al comparar las potencias simuladas, quitar el efecto de los distintos niveles de significación simulados. Obsérvese que si los niveles de significación simulados están muy próximos al valor nominal teórico $\alpha = 0.05$ únicamente será necesario comparar directamente las potencias. En el caso reseñado anteriormente de mucha variabilidad entre los niveles de significación simulados se recurrirá al criterio de Dale que se especificará a continuación:

ETAPA 1: Se fijan unos intervalos razonables para los niveles de significación simulados de forma que se descartarán todos aquellos estadísticos de contraste cuyo nivel de significación simulado se encuentre fuera del intervalo considerado. Se comprueba que los estadísticos que verifican el criterio de Dale (1986) son aquellos cuyos niveles de significación simulados verifican

$$|\text{logit}(1 - \hat{\alpha}_T) - \text{logit}(1 - \alpha)| \leq e \quad (2.48)$$

donde

$$\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right),$$

siendo $\hat{\alpha}_T$ el nivel de significación definido en (2.47).

Dale consideró dos valores de e , $e = 0.35$ y $e = 0.7$. En el primer caso se considera que están “próximas” y en el segundo como “casi próximas”. Si se toma $e = 0.35$ solamente se considerarán válidos aquellos estadísticos de contraste para los cuales su nivel de significación simulado verifique

$$\hat{\alpha}_T \in [0.0357, 0.0695] \quad (2.49)$$

y si se toma $e = 0.7$ únicamente se considerarán válidos aquellos estadísticos de contraste cuyo nivel de significación simulado verifique

$$\hat{\alpha}_T \in [0.0254, 0.0959]. \quad (2.50)$$

Este criterio ha sido tomado como referencia por varios autores, Cressie y otros (2003) y Martín y Pardo (2012), entre otros. En las gráficas de las Figuras 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6 los casos que cumplen esta condición corresponden a los valores de los parámetros cuyos niveles de significación simulados se encuentran en la banda punteada, y la línea de puntos en el interior de la banda punteada representa el nivel de significación fijado inicialmente.

ETAPA 2: Una vez seleccionados los estadísticos que para todos los escenarios verifican (2.49), y si en algún caso no hubiera ningún estadístico se pasaría al criterio dado en (2.50), se analiza, mediante la potencia, si es posible encontrar bien en las familias $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, bien dentro de $\{W(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}), H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}), D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\}$ estadísticos de contraste con mayor potencia que los del cociente de verosimilitudes $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y de la ji-cuadrado de Pearson $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$. Al hacer estas comparaciones se quitará el efecto que tiene el nivel de significación definiendo las denominadas eficiencias relativas: Así,

$$\rho_T = \frac{(\hat{\beta}_T - \hat{\alpha}_T) - (\hat{\beta}_{T_0} - \hat{\alpha}_{T_0})}{\hat{\beta}_{T_0} - \hat{\alpha}_{T_0}},$$

representará las eficiencias relativas para comparar $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ con el estadístico del cociente de verosimilitudes $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y

$$\rho_T^* = \frac{(\hat{\beta}_T - \hat{\alpha}_T) - (\hat{\beta}_{S_1} - \hat{\alpha}_{S_1})}{\hat{\beta}_{S_1} - \hat{\alpha}_{S_1}},$$

las eficiencias relativas para comparar $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ con el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$.

Análogamente se definen las eficiencias relativas de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ con respecto a $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$.

En primer lugar se analizarán los estadísticos cuyos niveles de significación verifican el criterio de Dale con $e = 0.35$ y simultáneamente para todos los escenarios. Las gráficas 2.1, 2.3, 2.5 indican que para la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ hay que restringirse al intervalo $(-0.1, 0.75)$ y para la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ al intervalo $(-0.1, 1.25)$. Mientras que para $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ el intervalo es vacío. Así pues en el estudio que se llevará a acabo a continuación únicamente se tendrán en cuenta los estadísticos cuyos niveles de significación simulados se encuentren en los intervalos reseñados anteriormente.

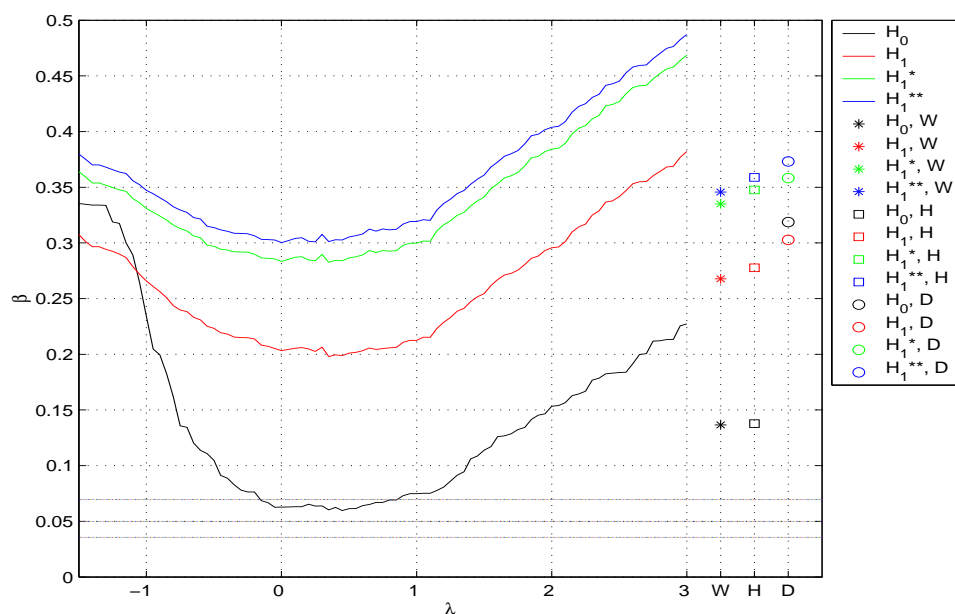


Figura 2.1: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario A de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$.

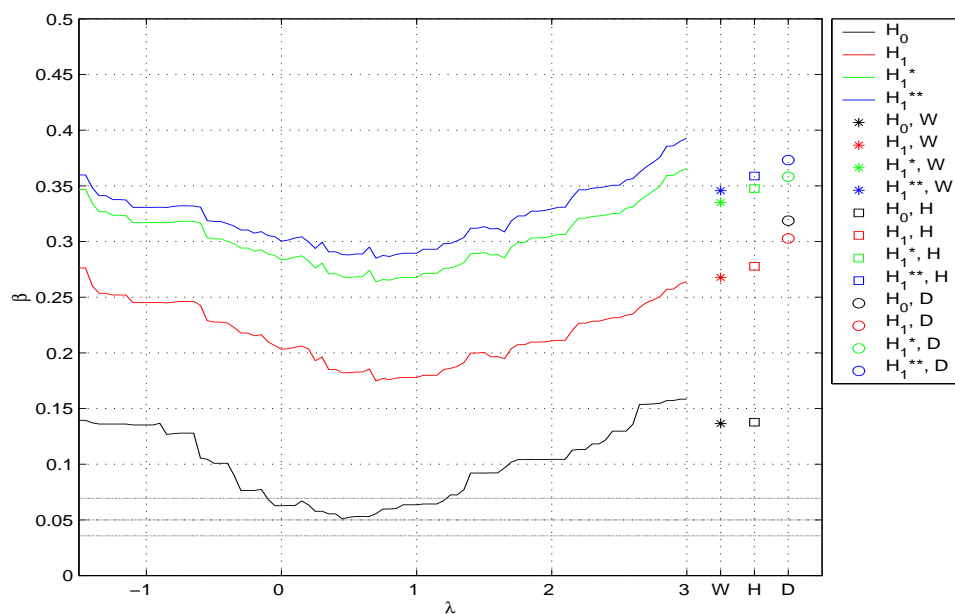


Figura 2.2: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario A de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$.

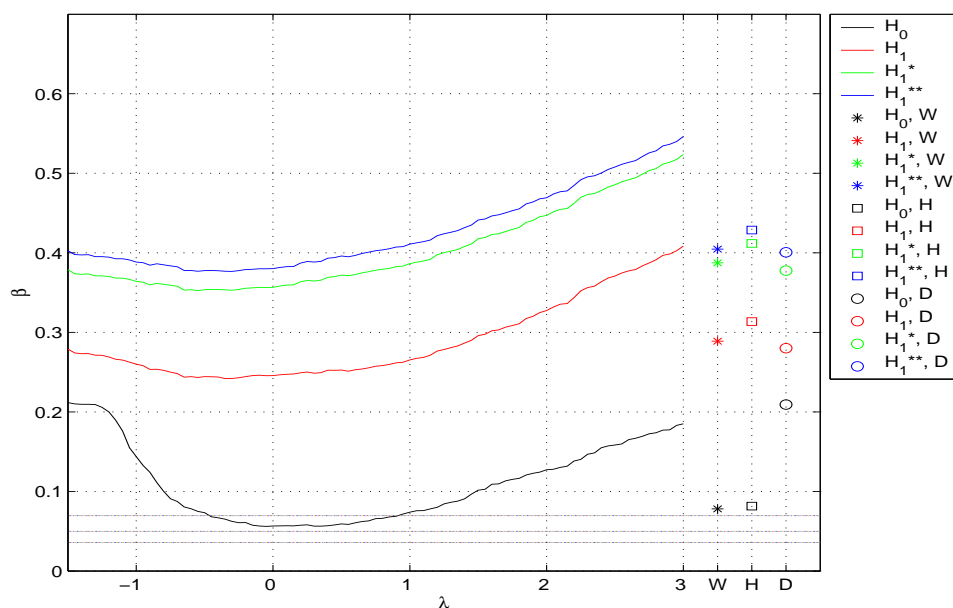


Figura 2.3: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario B de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$.

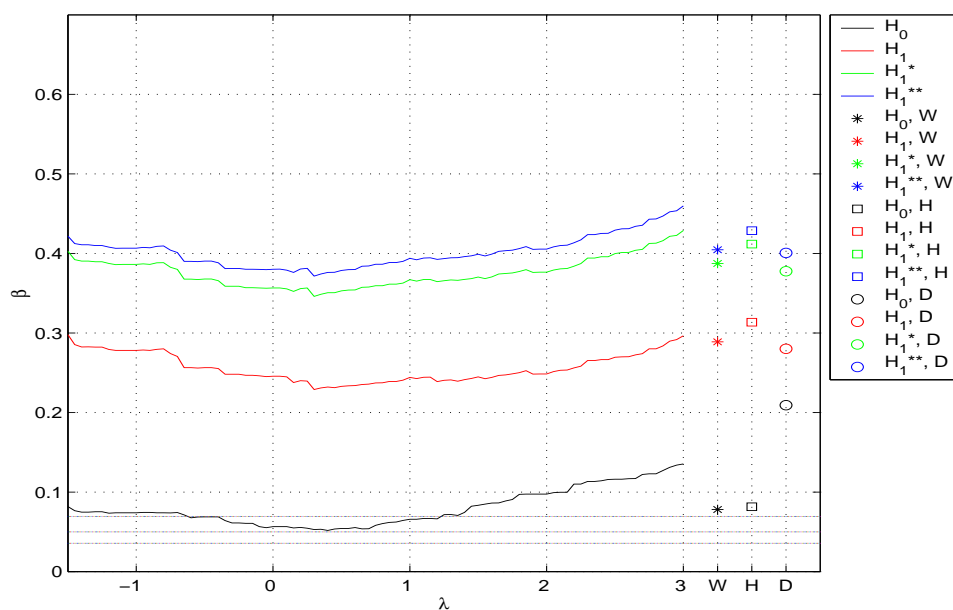


Figura 2.4: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario B de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$.

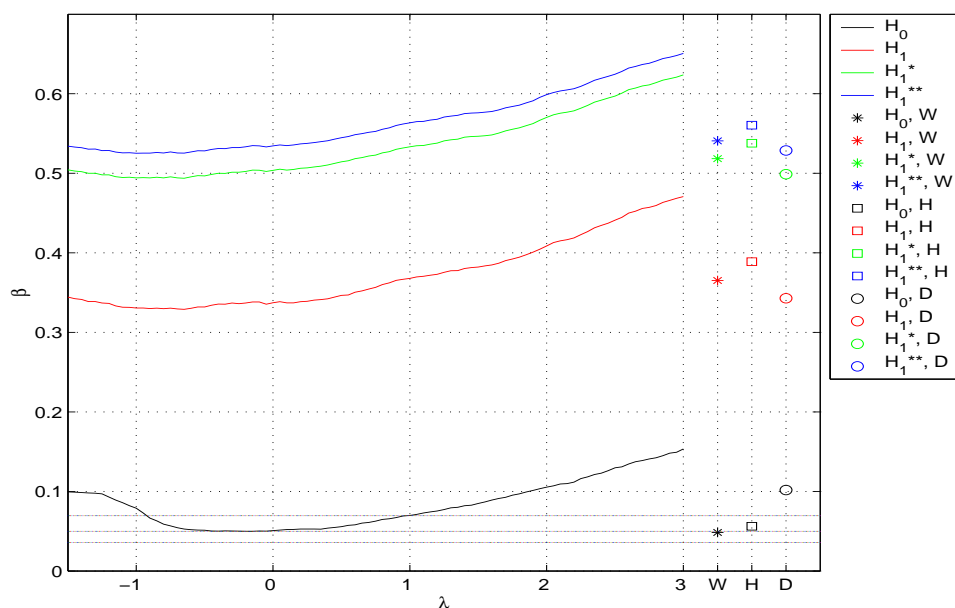


Figura 2.5: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario C de la familia $\{T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\tilde{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $D(\hat{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$.

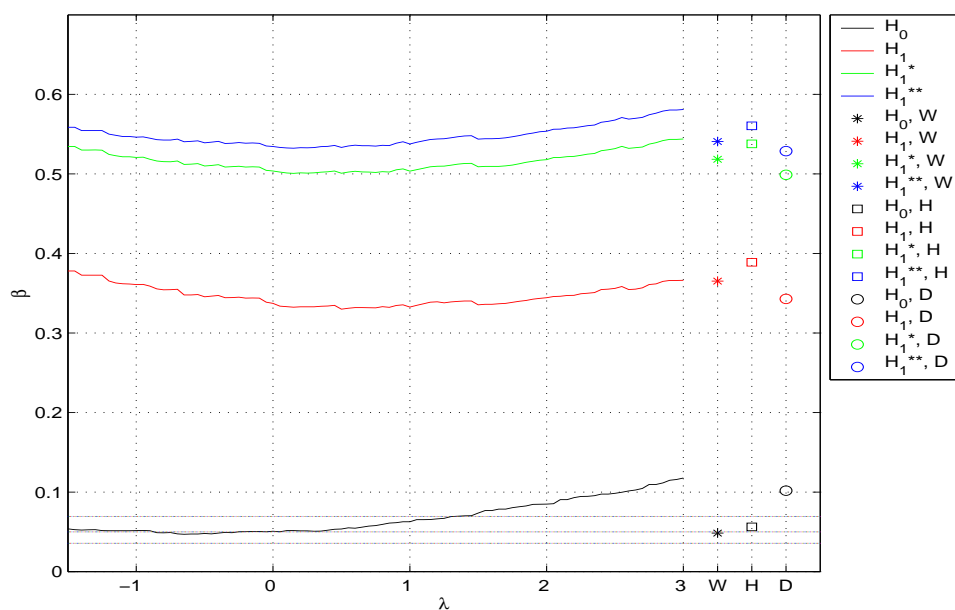


Figura 2.6: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.05$, para el Escenario C de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\tilde{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $D(\hat{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$.

Las gráficas de las Figuras 2.7, 2.8 y 2.9 presentan las eficiencias relativas de la familia de estadísticos $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto al estadístico del cociente de verosimilitudes $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ (G^2). Se observa que para el Escenario A, dentro del intervalo en el que se ha centrado el estudio, los estadísticos cuyo valor de $\lambda \in (0, 0.75)$ son tan buenos o incluso mejores que G^2 . Se debe tener presente que solamente se están comparando aquellos cuyo nivel de significación está en el intervalo $(-0.1, 0.75)$. Si se hace lo mismo para el Escenario B, Figura 2.8, todos los estadísticos cuyo valor $\lambda \in (0, 1)$ son tan buenos o incluso mejores que el G^2 y de acuerdo a la Figura 2.9 todos los estadísticos del intervalo $(0.25, 0.75)$ son mejores que el estadístico del cociente de verosimilitudes G^2 .

En resumen, todos los estadísticos $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ con $\lambda \in (0.25, 0.75)$ son mejores que el estadístico del cociente de verosimilitudes, G^2 . Obsérvese que dentro de este intervalo se encuentra $\lambda = \frac{2}{3}$, que es el valor de λ que ha aparecido en muchos trabajos como el estadístico de contraste con muy buenas propiedades en relación al test de la ji-cuadrado de Pearson y el test del cociente de verosimilitudes. En definitiva el estadístico de contraste que se propone dentro de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ es el $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ cuya expresión viene dada por

$$T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{9n}{5} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\bar{p}_{i1}^{\frac{2}{3}+1}}{p_{i1}^{\frac{2}{3}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} + \frac{\bar{p}_{i2}^{\frac{2}{3}+1}}{p_{i2}^{\frac{2}{3}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} - \frac{\bar{p}_{i1}^{\frac{2}{3}+1}}{p_{i1}^{\frac{2}{3}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} - \frac{\bar{p}_{i2}^{\frac{2}{3}+1}}{p_{i2}^{\frac{2}{3}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \right).$$

Se analizarán ahora las eficiencias relativas que permiten comparar la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con el estadístico de Pearson $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, (X^2). Las gráficas de las Figuras 2.16, 2.17 y 2.18, presentan las eficiencias relativas de los estadísticos $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 . Haciendo un estudio similar al señalado anteriormente, se puede observar que todos los estadísticos $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ cuyo valor de λ se encuentra en el intervalo $(-0.1, 1)$ son mejores que el test de la X^2 . Dentro de este intervalo se encuentran el $S_0(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y el $S_{\frac{2}{3}}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y se puede afirmar que estos dos estadísticos son mejores que el X^2 .

En consecuencia, dentro de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ se ha encontrado que el $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ es preferido al G^2 ($T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, estadístico del cociente de verosimilitudes) y dentro de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ el $S_0(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y el $S_{\frac{2}{3}}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ son mejores que el X^2 ($S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, el estadístico de Pearson).

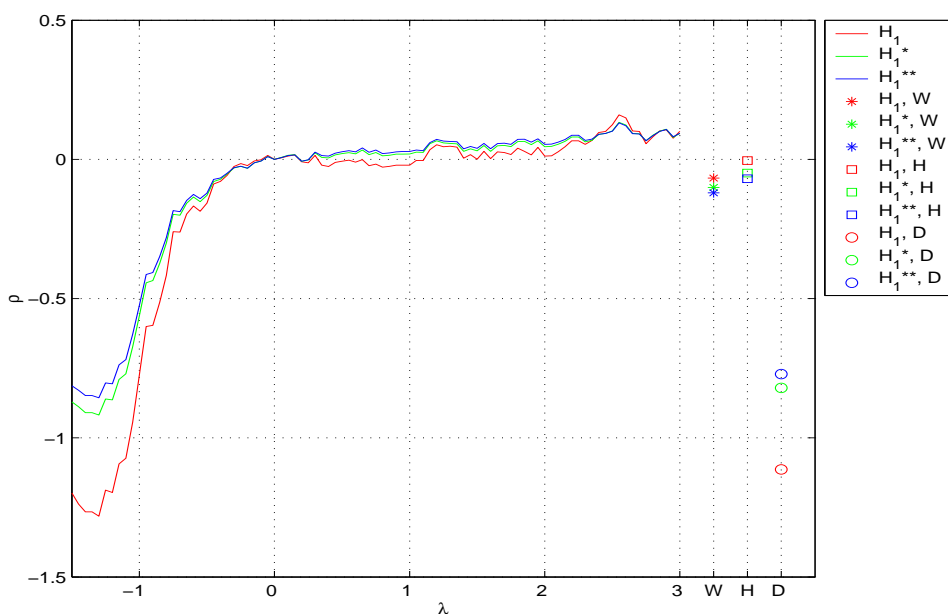


Figura 2.7: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, con respecto a G^2 para el Escenario A y $\pi_0 = 0.05$.

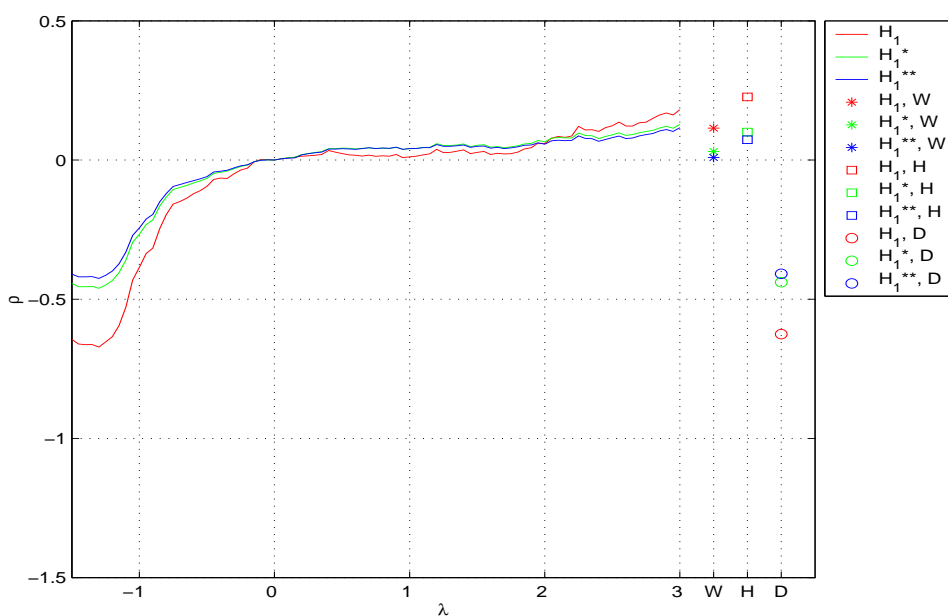


Figura 2.8: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, con respecto a G^2 para el Escenario B y $\pi_0 = 0.05$.

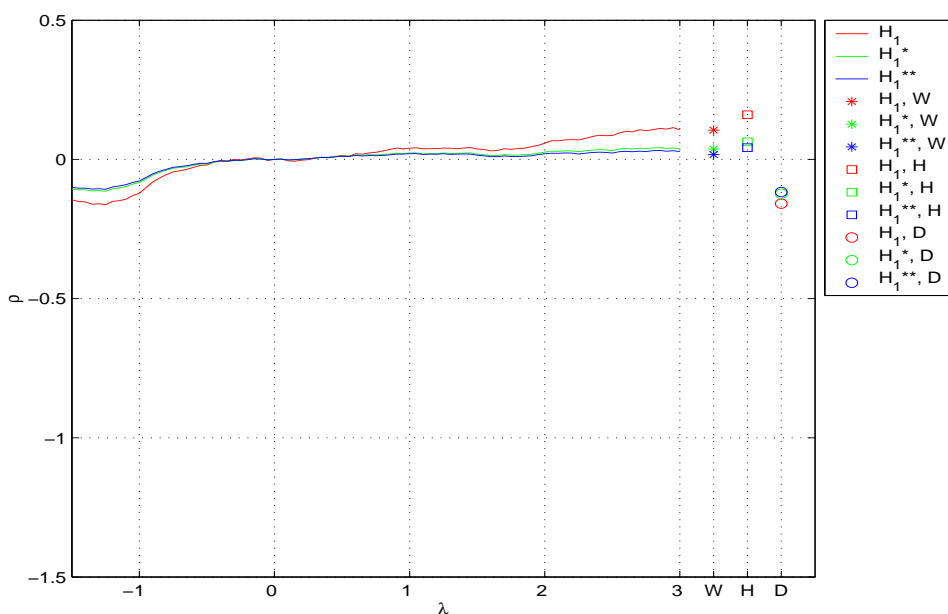


Figura 2.9: Eficiencias relativas $\{T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario C y $\pi_0 = 0.05$.

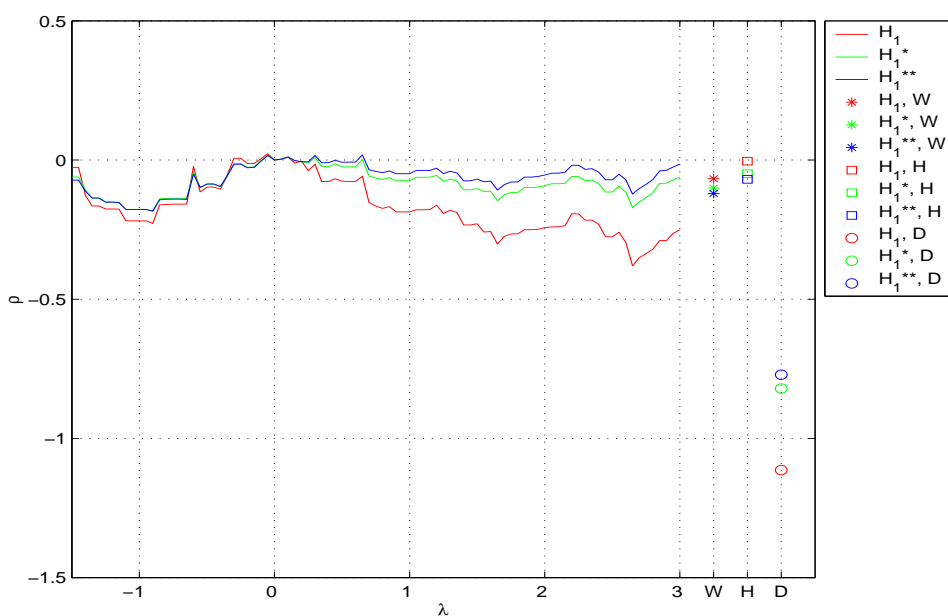


Figura 2.10: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario A y $\pi_0 = 0.05$.

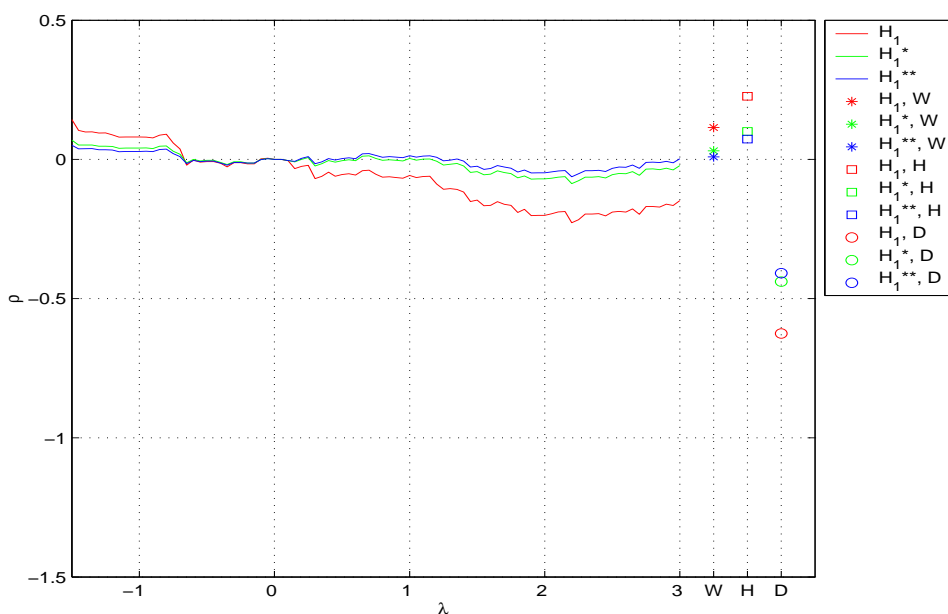


Figura 2.11: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario B y $\pi_0 = 0.05$.

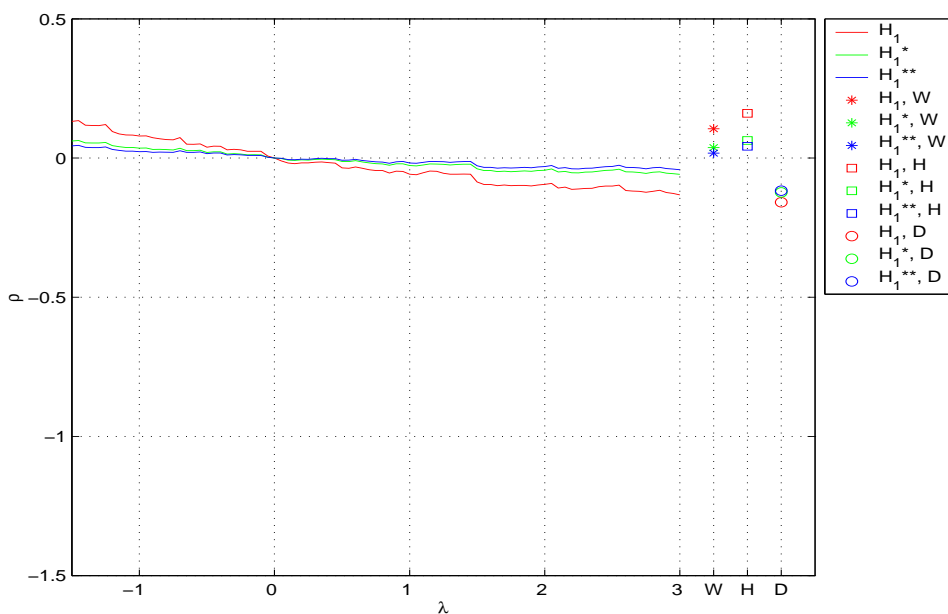


Figura 2.12: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a G^2 para el Escenario C y $\pi_0 = 0.05$.

Ahora se analizarán las eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, es decir, con respecto a X^2 . Estas eficiencias relativas se presentan en las gráficas de las Figuras 2.13, 2.14 y 2.15, y se observa que G^2 es preferido a X^2 por lo tanto

$$T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$$

es preferido a G^2 y G^2 a X^2 .

Las gráficas de las Figuras 2.10, 2.11 y 2.12 representan las eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 . Se observa que no hay ningún $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ con $\lambda > 0$ que sea mejor que G^2 . Por lo tanto, G^2 es preferido a S_0 y a $S_{\frac{2}{3}}$ y, como consecuencia, al ser $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ preferido a G^2 , será también preferido a S_0 y a $S_{\frac{2}{3}}$. En definitiva para valores pequeños de π_0 ($\pi_0 = 0.05$) y grandes, por simetría, el estadístico de contraste $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ es el preferido.

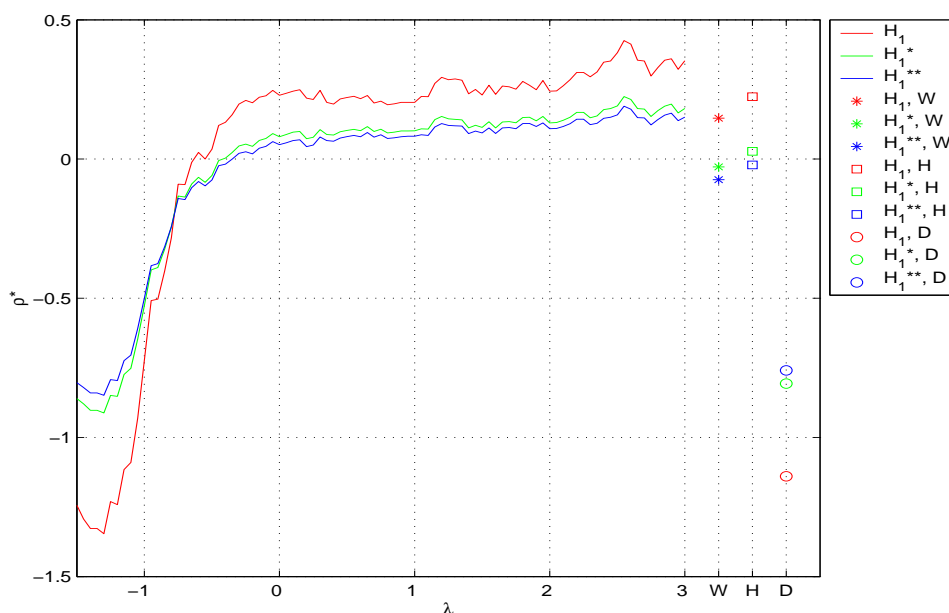


Figura 2.13: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\tilde{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \tilde{\theta})$ y $D(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}, \tilde{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario A y $\pi_0 = 0.05$.

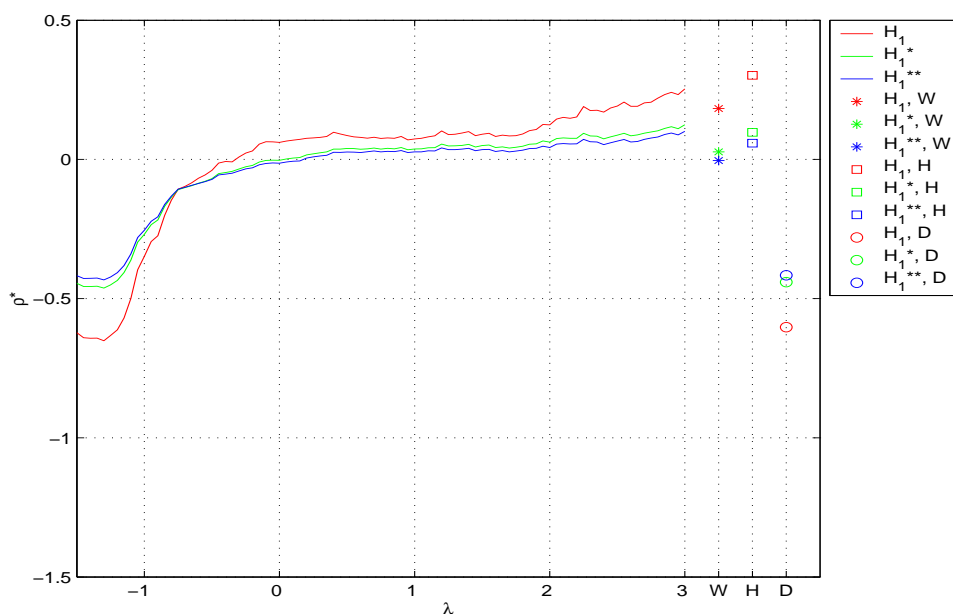


Figura 2.14: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario B y $\pi_0 = 0.05$.

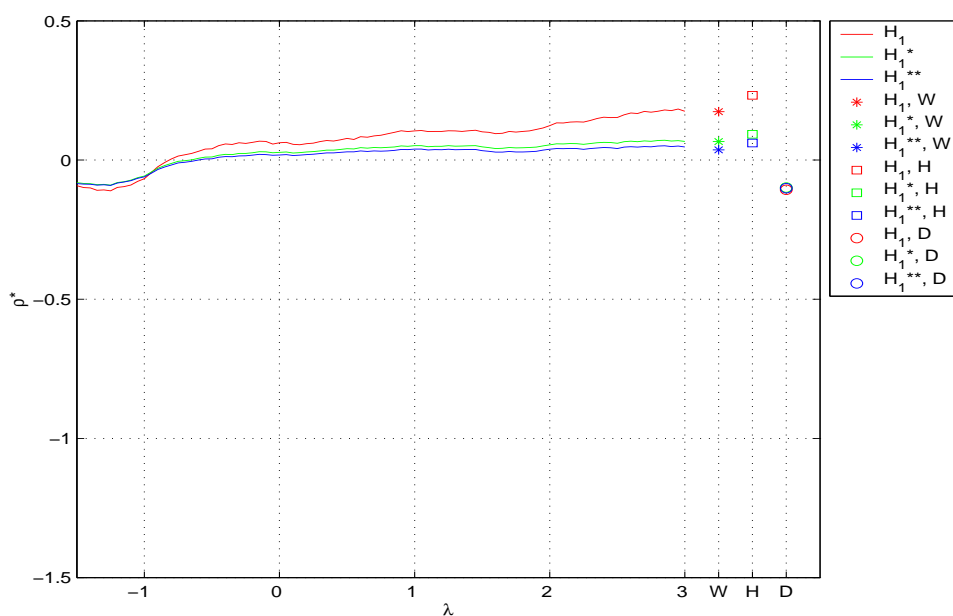


Figura 2.15: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario C y $\pi_0 = 0.05$.

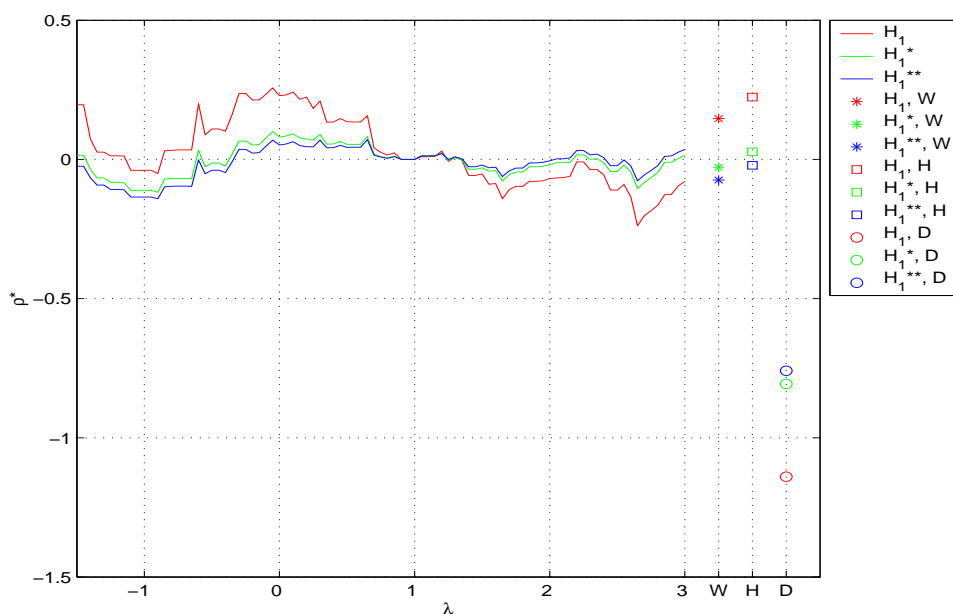


Figura 2.16: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario A y $\pi_0 = 0.05$.

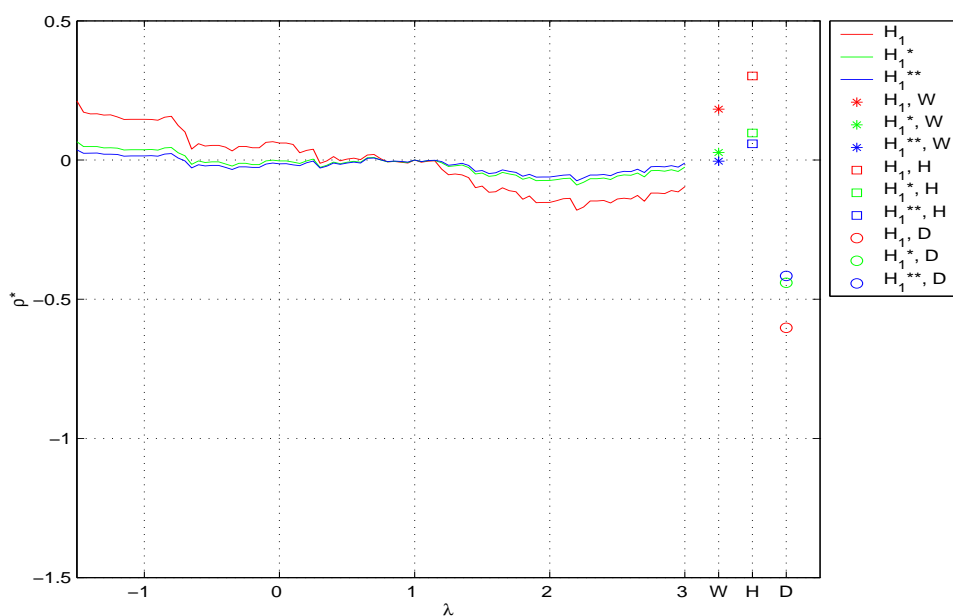


Figura 2.17: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario B y $\pi_0 = 0.05$.

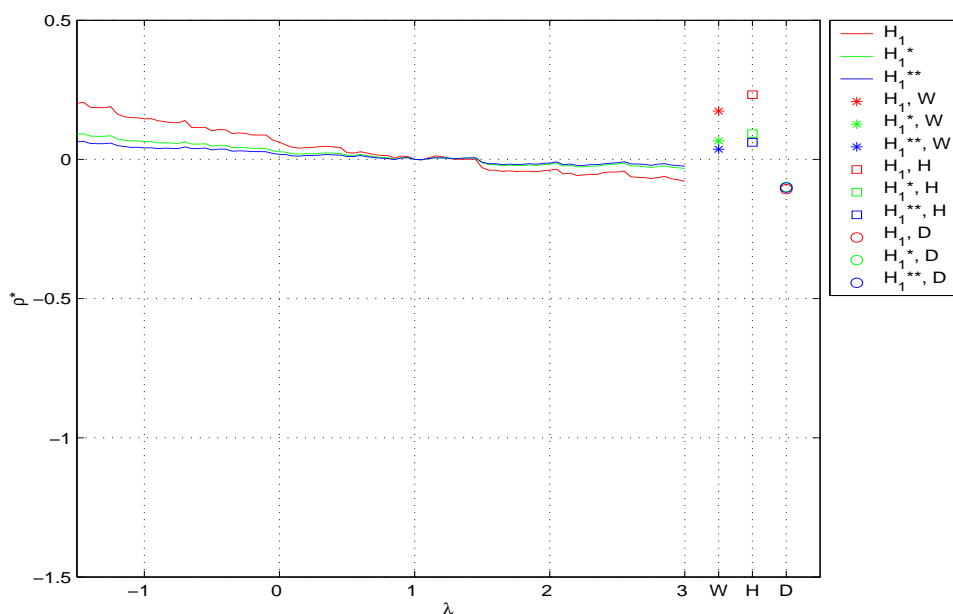


Figura 2.18: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario C y $\pi_0 = 0.05$.

A continuación se analizará la situación correspondiente a $\pi_0 = 0.35$. Las gráficas de las Figuras 2.19-2.24 representan los niveles de significación y potencias simuladas para las familias de estadísticos $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$, $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$, definidas en (2.35) y (2.36), así como para los estadísticos de contraste $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$ definidos en (2.17), (2.18) y (2.19), para los escenarios D, E, F y las tres hipótesis alternativas H_1, H_1^*, H_1^{**} descritas en (2.44), (2.45) y (2.46).

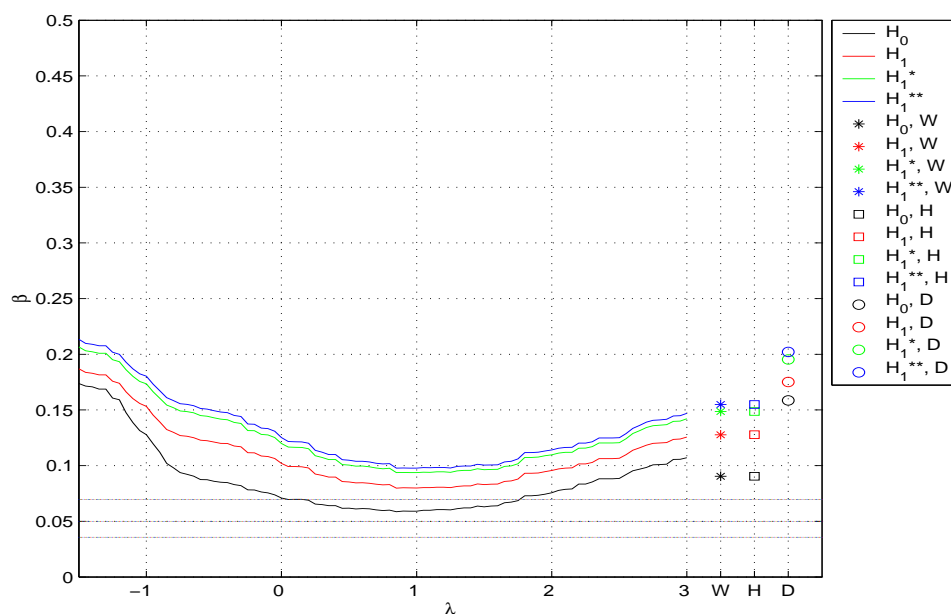


Figura 2.19: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.35$, para el Escenario D de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$.

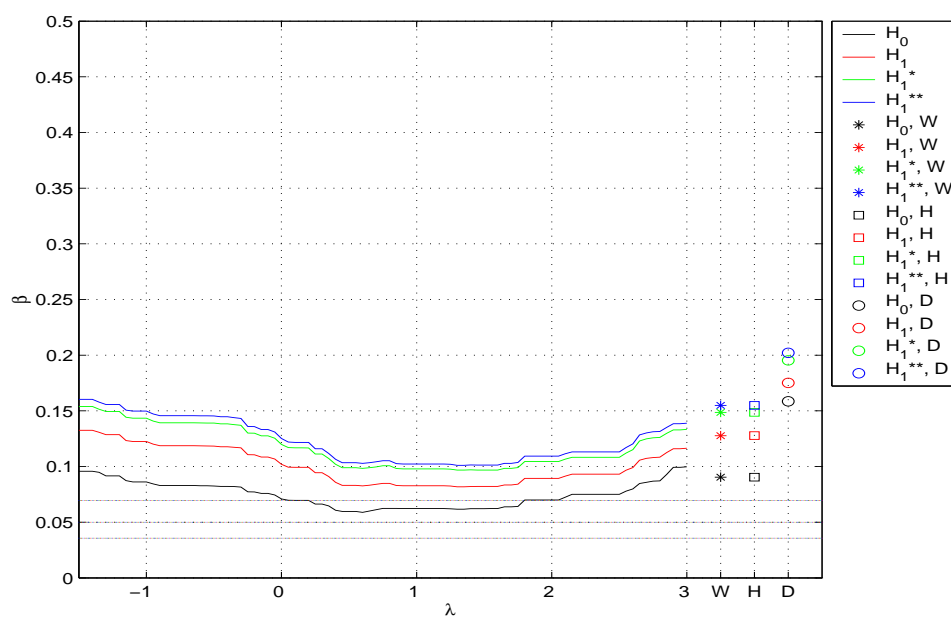


Figura 2.20: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.35$, para el Escenario D de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$.

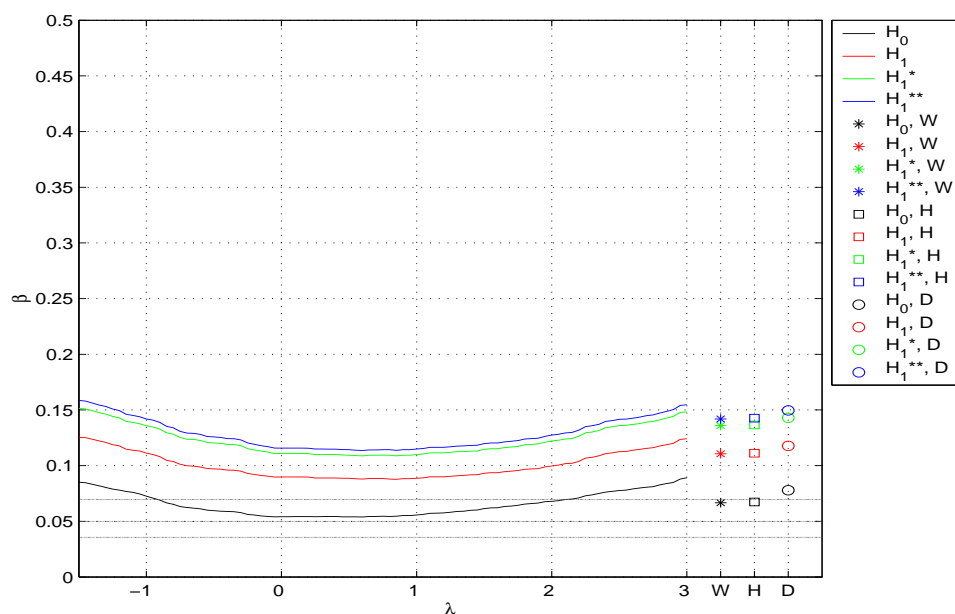


Figura 2.21: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.35$, para el Escenario E de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $D(\hat{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$.

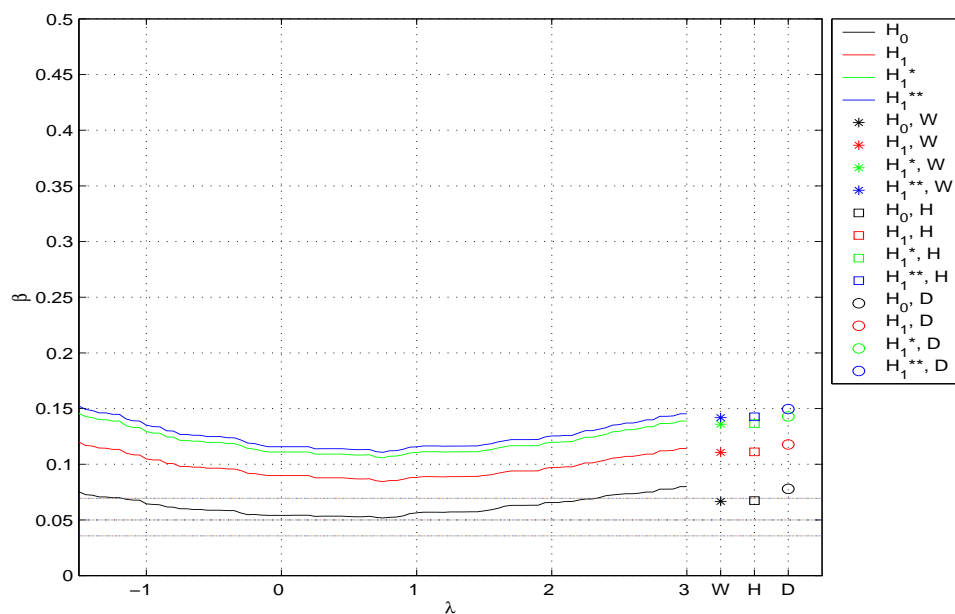


Figura 2.22: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.35$, para el Escenario E de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\tilde{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $D(\hat{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$.

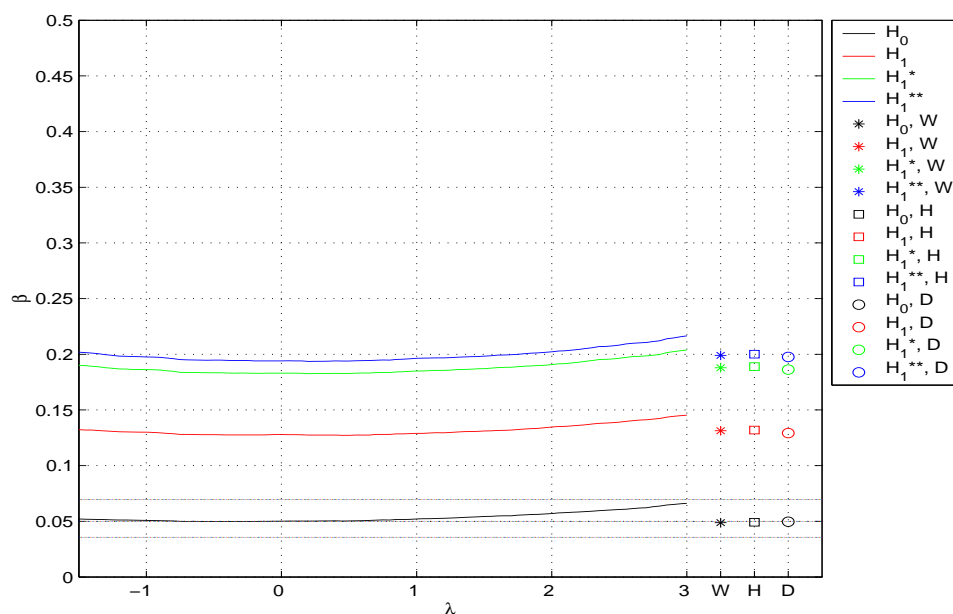


Figura 2.23: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.35$, para el Escenario F de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$.

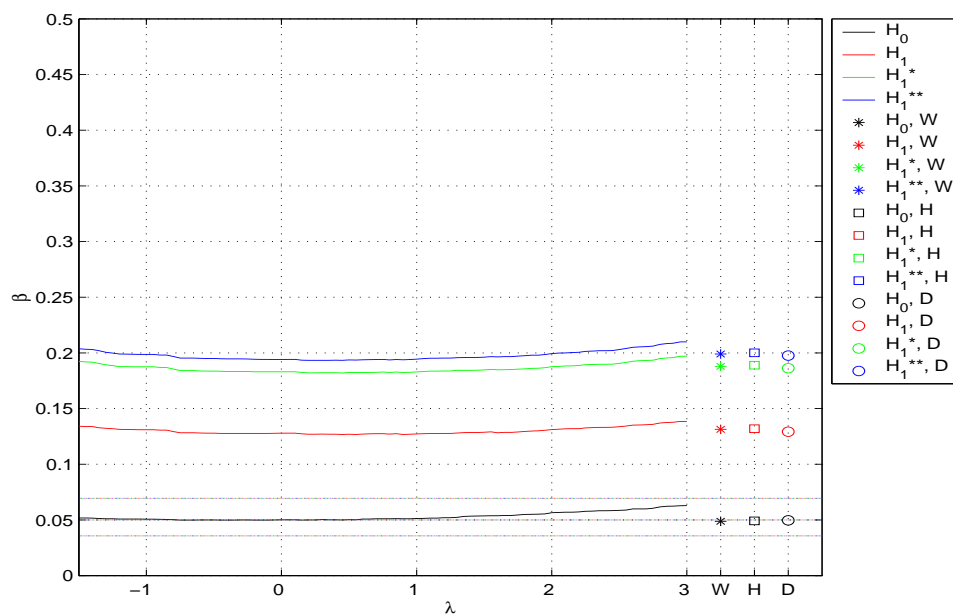


Figura 2.24: Niveles de significación y potencias simuladas para $\pi_0 = 0.35$, para el Escenario F de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$.

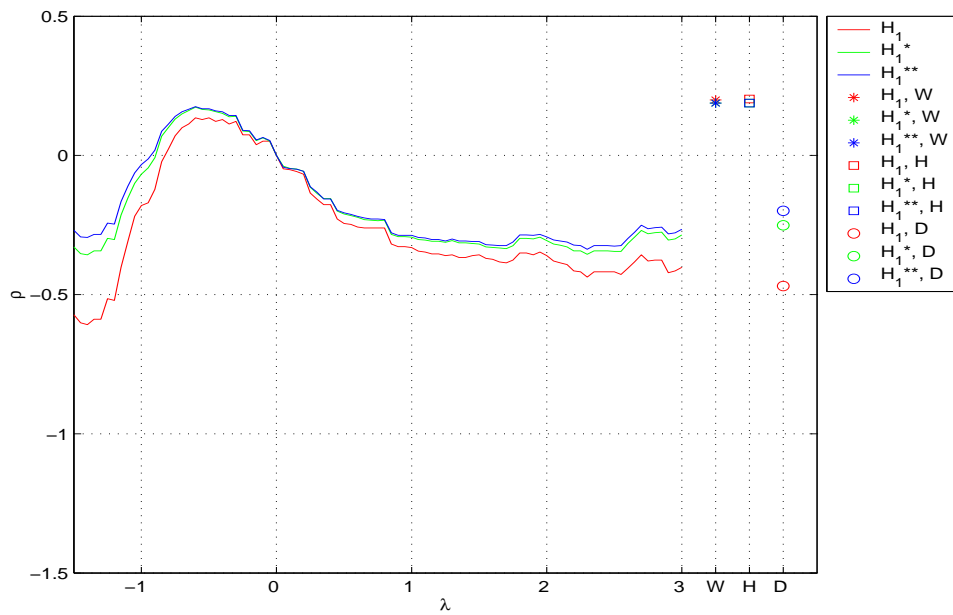


Figura 2.25: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (G^2) para el Escenario D y $\pi_0 = 0.35$.

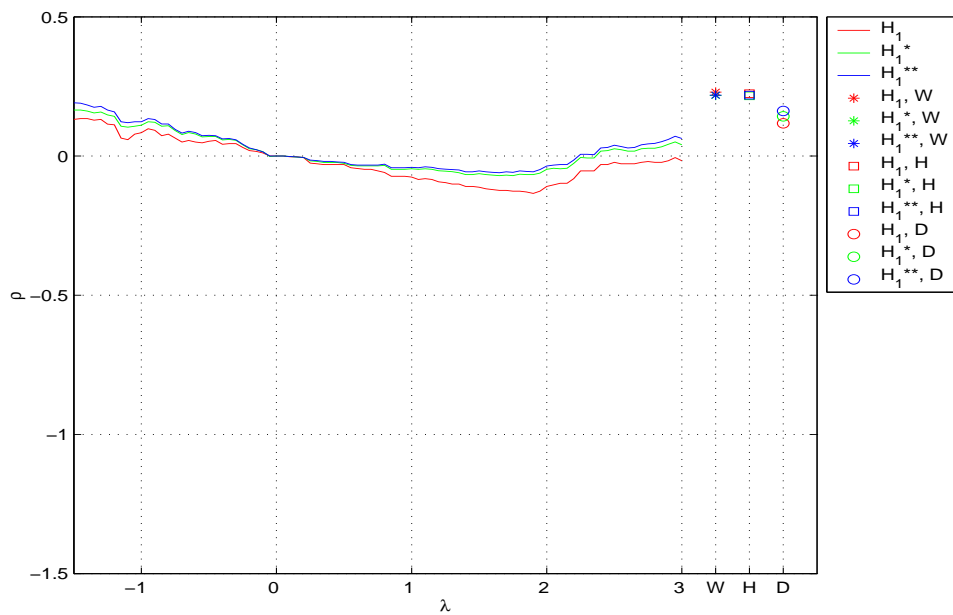


Figura 2.26: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (G^2) para el Escenario E y $\pi_0 = 0.35$.

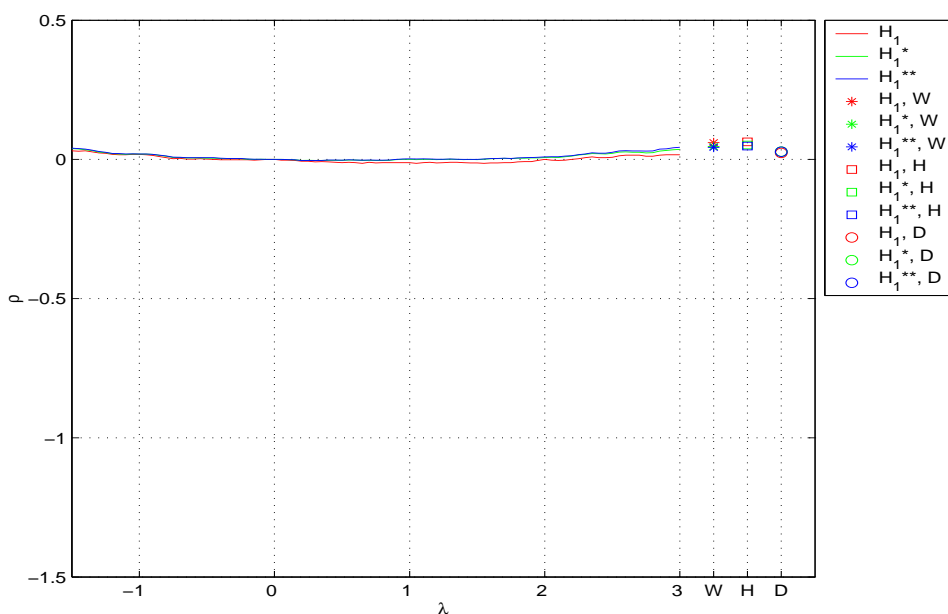


Figura 2.27: Eficiencias relativas $\{T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $T_0(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ (G^2) para el Escenario F y $\pi_0 = 0.35$.

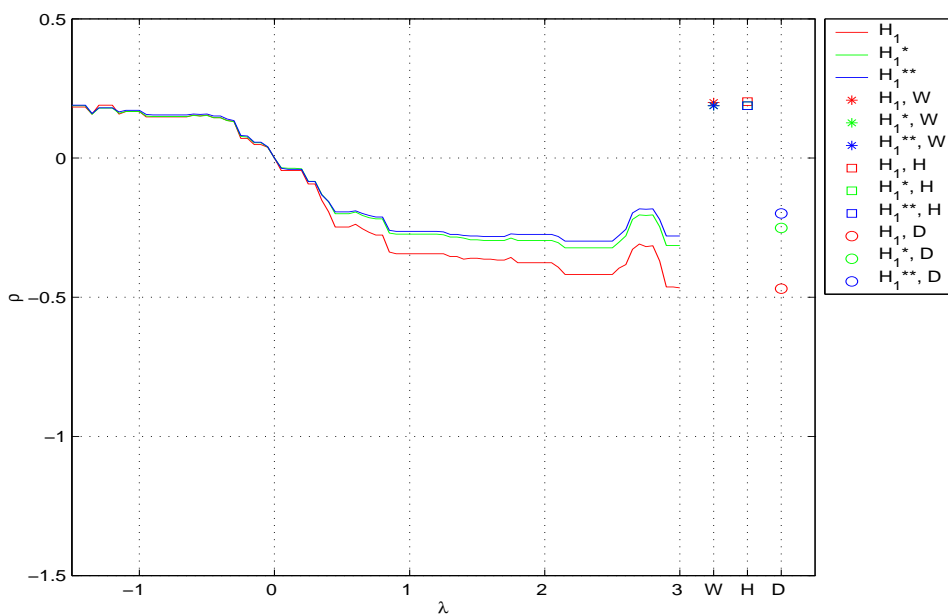


Figura 2.28: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $T_0(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ (G^2) para el Escenario D y $\pi_0 = 0.35$.

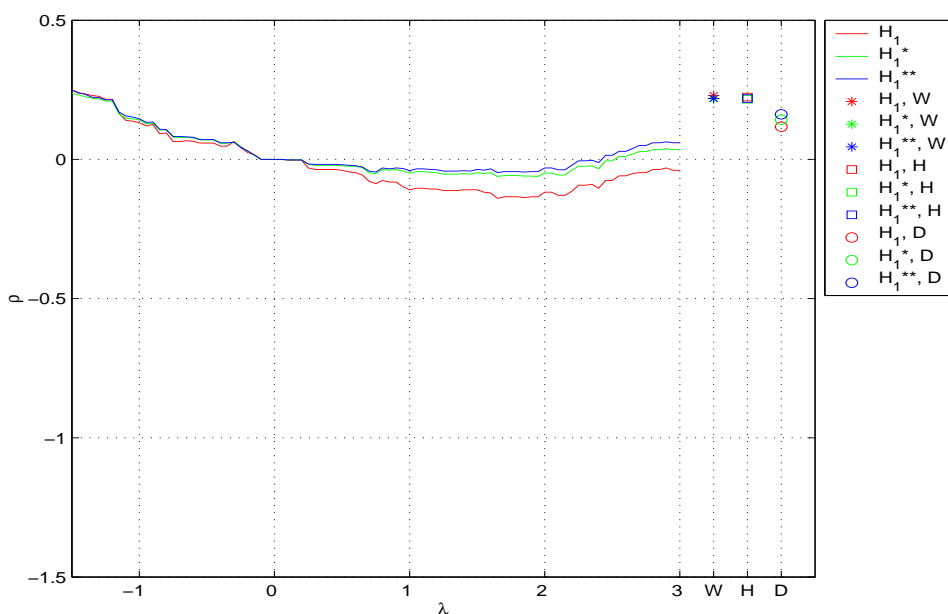


Figura 2.29: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (G^2) para el Escenario E y $\pi_0 = 0.35$.

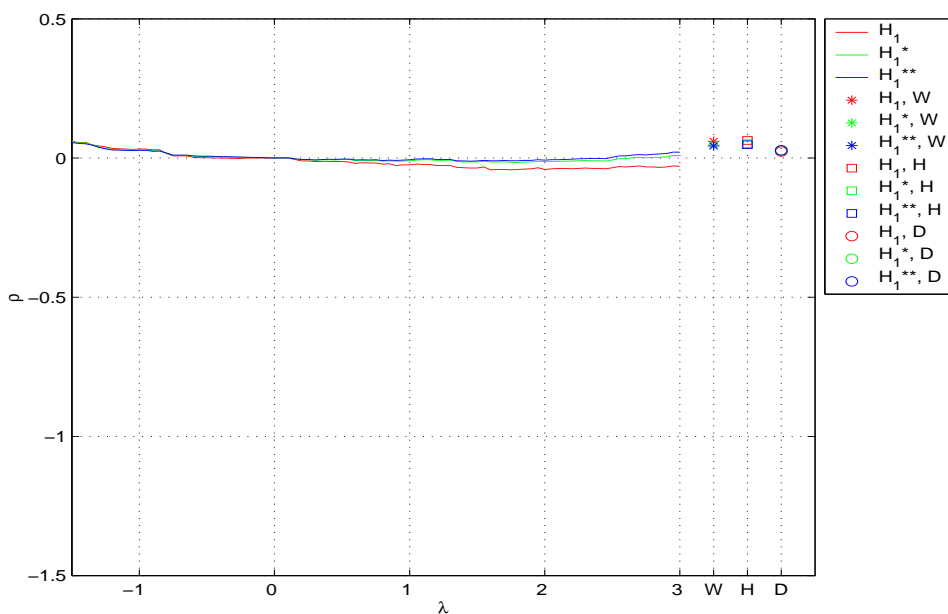


Figura 2.30: Eficiencias relativas $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (G^2) para el Escenario F y $\pi_0 = 0.35$.

Las gráficas de las Figuras 2.25, 2.26 y 2.27 representan gráficamente las eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Si en el Escenario D se toma $e = 0.35$ los niveles de significación simulados de los estadísticos $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ que verifican el criterio de Dale son todos aquellos para los que $\lambda \in (0, 1.75)$, mientras que en la gráfica de la Figura 2.26 los mejores que el $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ son todos los $\lambda \in (-0.9, 0)$, junto con $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$. Es decir no hay ninguno mejor que el $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ en el intervalo que estamos interesados. Se analizará, meramente por motivos de curiosidad, lo que ocurre si se toma $e = 0.70$. En este caso, se llega a que todos los del intervalo $(-0.9, 0)$ junto con $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ son mejores que el $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Para los Escenarios E y F, se puede operar con $e = 0.35$. En el caso del Escenario E todos los $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ con $\lambda \in (-0.75, 0)$ junto con $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ son mejores que $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, como puede verse en la Figura 2.26. Para el Escenario F la diferencia es muy pequeña pero todos los $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ con $\lambda \in (-1.5, 0) \cup (1.5, 3)$ junto con $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ son mejores que $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, ver Figura 2.27. En definitiva se puede concluir que para el Escenario D no hay ningún estadístico mejor que el $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, mientras que para los Escenarios E y F todos los $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ con $\lambda \in (-0.75, 0)$ junto con $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ son mejores que $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Dentro de la familia de los estadísticos de contraste $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ mejores que $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ se destacará el correspondiente a $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Ahora se analizarán las eficiencias relativas que permitan comparar la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con el estadístico de Pearson $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, es decir, con respecto a X^2 . Las gráficas de las Figuras 2.34, 2.35 y 2.36 presentan las eficiencias relativas de los estadísticos $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Haciendo un estudio similar al realizado anteriormente se puede observar que todos los estadísticos $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ cuyo valor de λ se encuentra en el intervalo $[0, 1)$ son mejores que el test de la X^2 . Dentro de este intervalo se encuentra el $S_0(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y el $S_{\frac{2}{3}}(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y se puede afirmar que estos dos estadísticos son mejores que el $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$.

Resumiendo, dentro de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ se ha encontrado que el $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ es el preferido para $e = 0.35$, pero si se considera $e = 0.70$ el estadístico $T_{-\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ es preferido al $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, estadístico del cociente de verosimilitudes, para los Escenarios E y F junto con $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$, y dentro de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1, 3]}$ el $S_0(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y el $S_{\frac{2}{3}}(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ son mejores que el $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$.

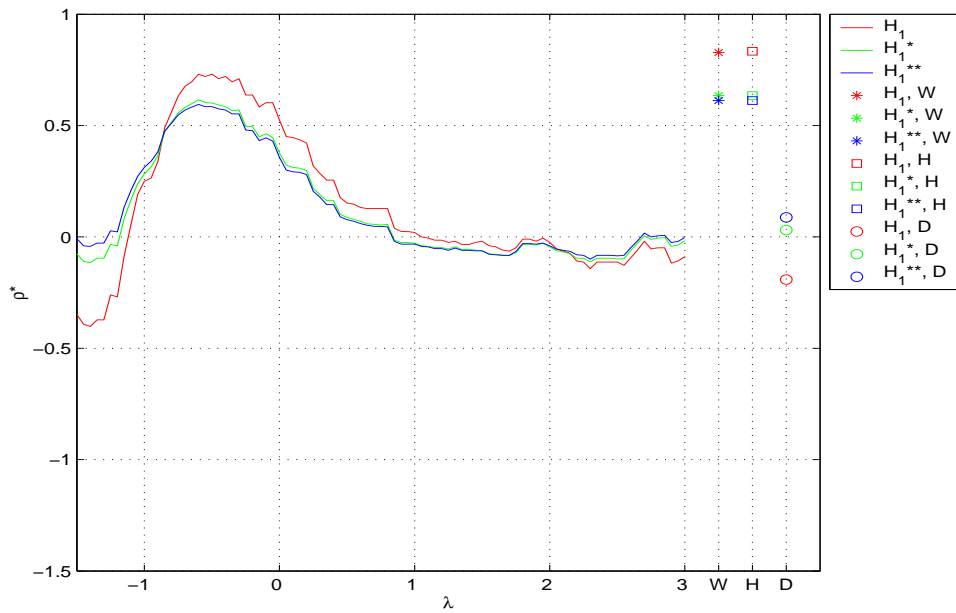


Figura 2.31: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario D y $\pi_0 = 0.35$.

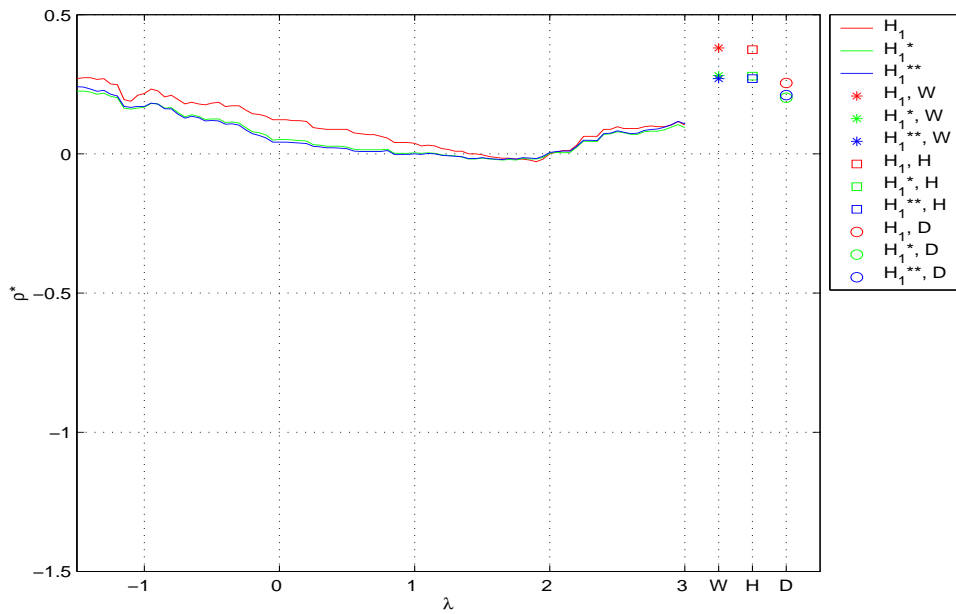


Figura 2.32: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario E y $\pi_0 = 0.35$.

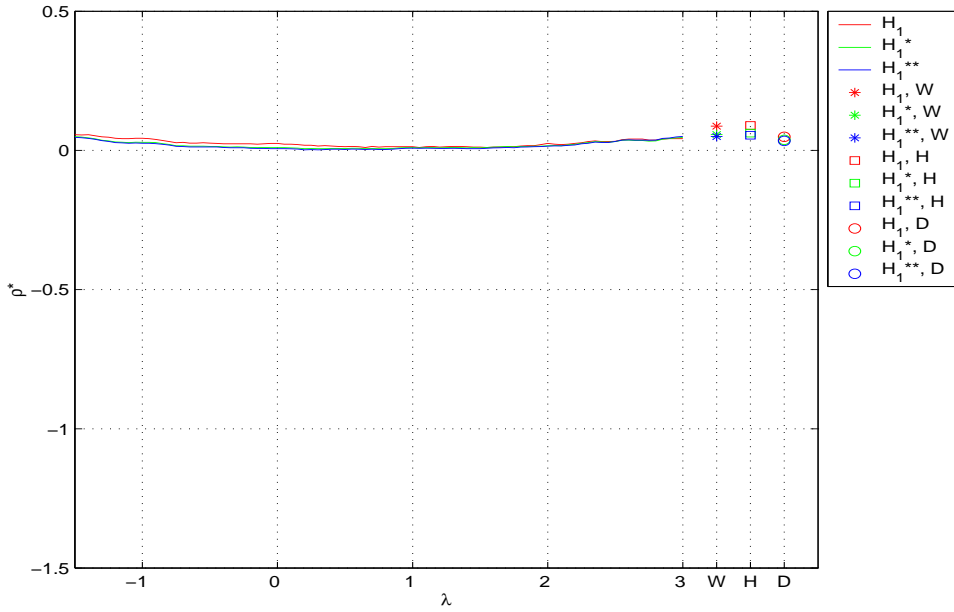


Figura 2.33: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\tilde{\theta}, \hat{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario F y $\pi_0 = 0.35$.

Ahora se analizarán las eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, es decir, con respecto a X^2 . Estas eficiencias relativas se presentan en las gráficas de las Figuras 2.31, 2.31 y 2.32. Se observa que $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ es preferido a $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y a la vez $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ son también preferidos a $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, por lo tanto $T_{-\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ son preferidos a $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$.

El siguiente paso es comparar los estadísticos $T_{-\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $S_0(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $S_{\frac{2}{3}}(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$.

Las Figuras 2.28, 2.29 y 2.30 representan las eficiencias de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 . Se observa que ningún $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ con $\lambda \geq 0$ es mejor que $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ excepto $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$. Luego al ser $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ mejor que $S_0(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_{\frac{2}{3}}(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, y $T_{-\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ mejor que $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ se puede concluir que $T_{-\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, junto con $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ son los mejores estadísticos.

Conviene resaltar que dentro de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ para los dos valores de π_0 considerados, tanto el estadístico $S_0(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ como el estadístico $S_{\frac{2}{3}}(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ son mejores que el $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, mientras que para la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$,

90 **Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales**

si $\pi_0 = 0.05$ el mejor estadístico es el $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y si $\pi_0 = 0.35$ el mejor estadístico es el $T_{-\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, junto con $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. Este resultado permite concluir que si π_0 es pequeña (o grande por simetría) se aconseja el estadístico $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y si π_0 está próxima al valor 0.5 se aconseja el estadístico $T_{-\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, junto con $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$.

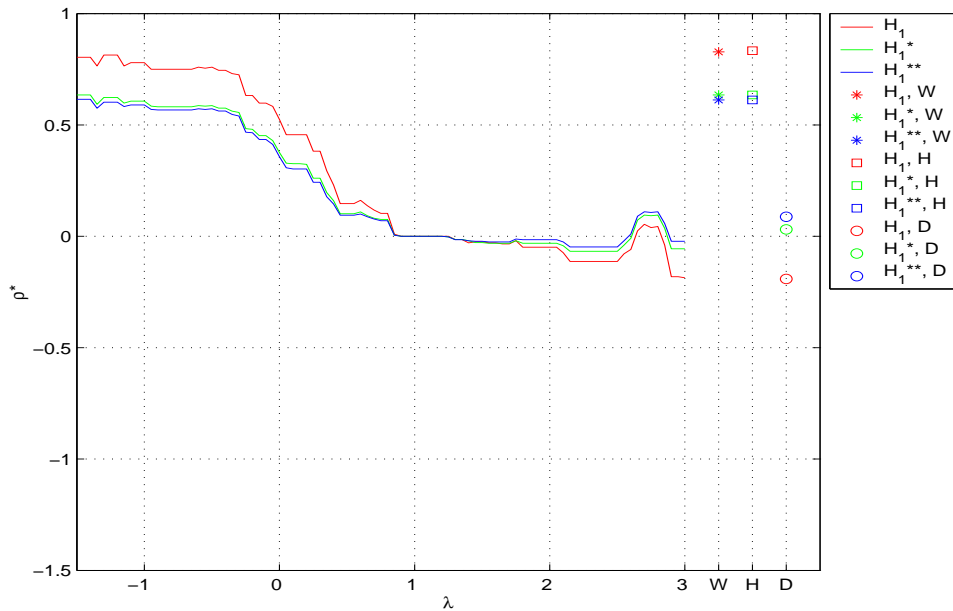


Figura 2.34: Eficiencias relativas de $\{S_{\lambda}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $H(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $D(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ (X^2) para el Escenario D y $\pi_0 = 0.35$.

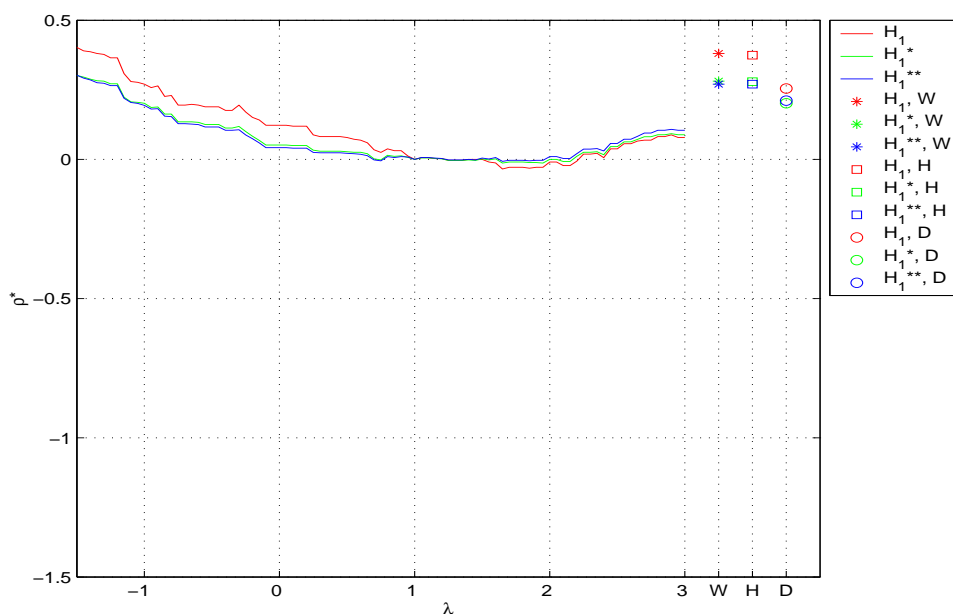


Figura 2.35: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario E y $\pi_0 = 0.35$.

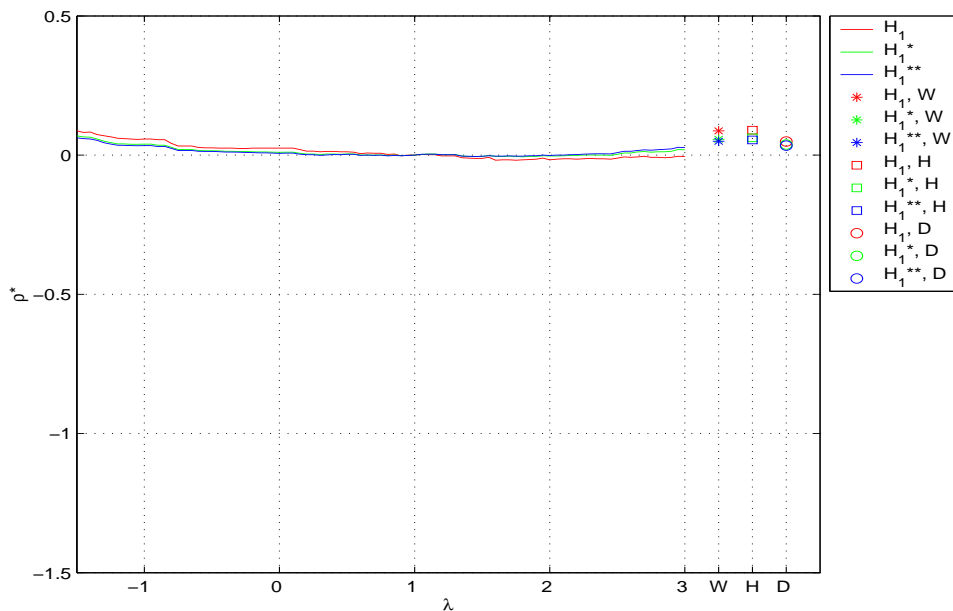


Figura 2.36: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de $W(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y $D(\bar{\theta}, \tilde{\theta}, \hat{\theta})$, con respecto a $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ (X^2) para el Escenario F y $\pi_0 = 0.35$.

92 Capítulo 2. Estadísticos phi-divergencia y tipo Wald en poblaciones binomiales

En la Tabla 2.18, se compara la eficiencia de $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ con respecto a $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Si se verifica que $\rho_{S_1} < 0$, se tiene que $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ es mejor que $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y las eficiencias quedan bien representadas con las gráficas de ρ para esos escenarios, sin embargo si $\rho_{S_1} > 0$ conviene estudiar las eficiencias representadas con las gráficas de ρ^* para esos escenarios, en este caso para el Escenario B.

	Esc. A	Esc. B	Esc. C	Esc. D	Esc. E	Esc. F
H_1	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$
H_1^*	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} > 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$
H_1^{**}	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} > 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$	$\rho_{S_1} < 0$

Tabla 2.18: Eficiencia del estadístico de Bartholomew con respecto al estadístico del cociente de verosimilitudes.

Se puede concluir del estudio de simulación que es posible proponer estadísticos de contraste con mejor comportamiento en comparación con $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Seguidamente se presentan todas las gráficas juntas con el fin de que se pueda analizar mejor todo lo dicho anteriormente. A partir de las Figuras 2.37, 2.38 y 2.39 se concluye que el estadístico de contraste de Cressie-Read, $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ es el apropiado para $\pi_0 = 0.05$, es decir para proporciones pequeñas (o grandes por simetría) para tamaños muestrales tanto pequeños como moderados (Escenarios A, B y C). Por otra parte, los estadísticos recomendados para proporciones intermedias que puedan estar cercanas al valor 0.5, es decir $\pi = 0.35$, son $W(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$, $H(\tilde{\theta}, \hat{\theta})$ y el estadístico de contraste basado en la distancia de Hellinger, $T_{-\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ con tamaños muestrales moderados (Escenarios E y F), sin embargo para tamaños muestrales pequeños (Escenario D) el estadístico del cociente de verosimilitudes $G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ sigue siendo el mejor.

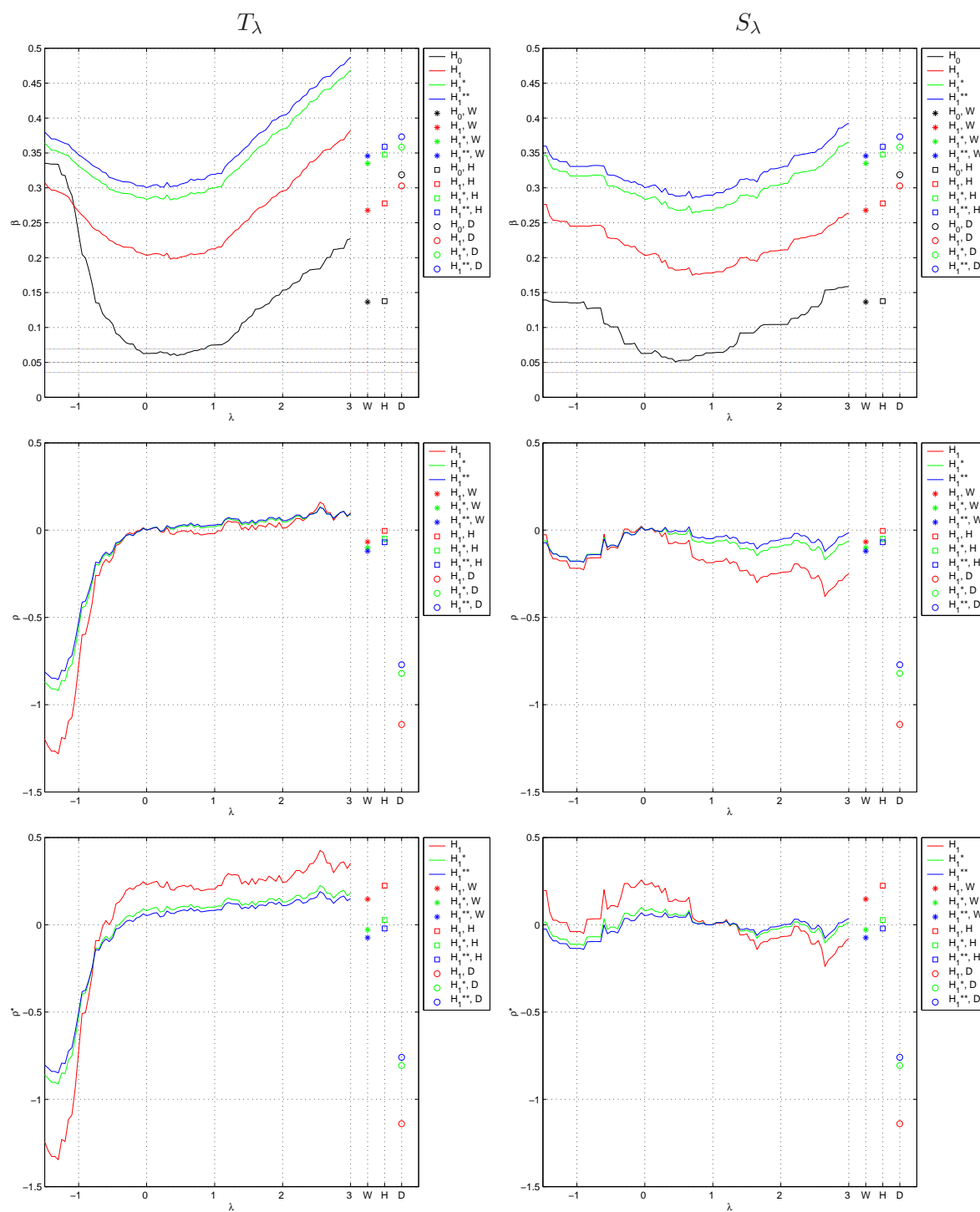


Figura 2.37: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.05$, en el Escenario A.

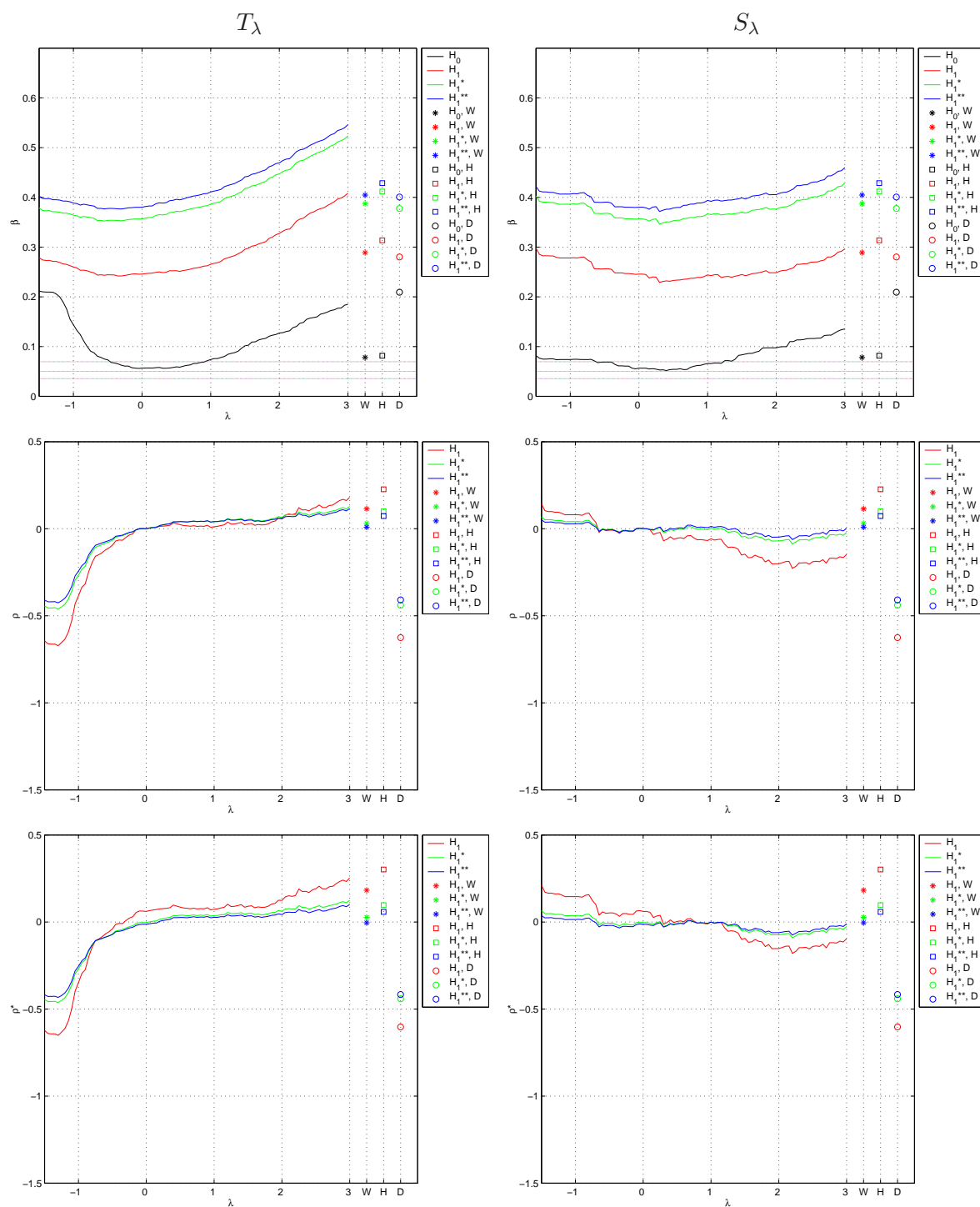


Figura 2.38: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.05$, en el Escenario B.

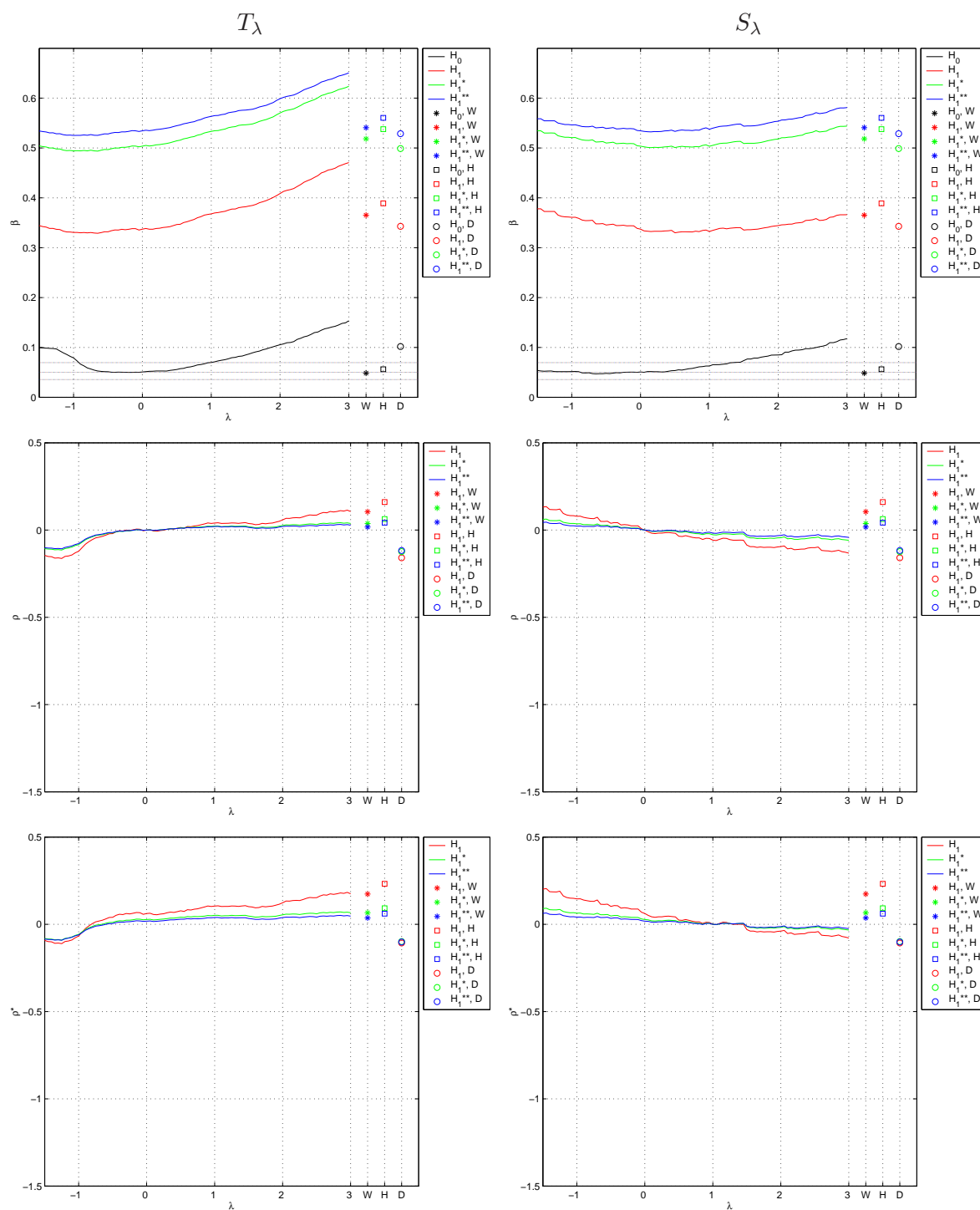


Figura 2.39: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.05$, en el Escenario C.

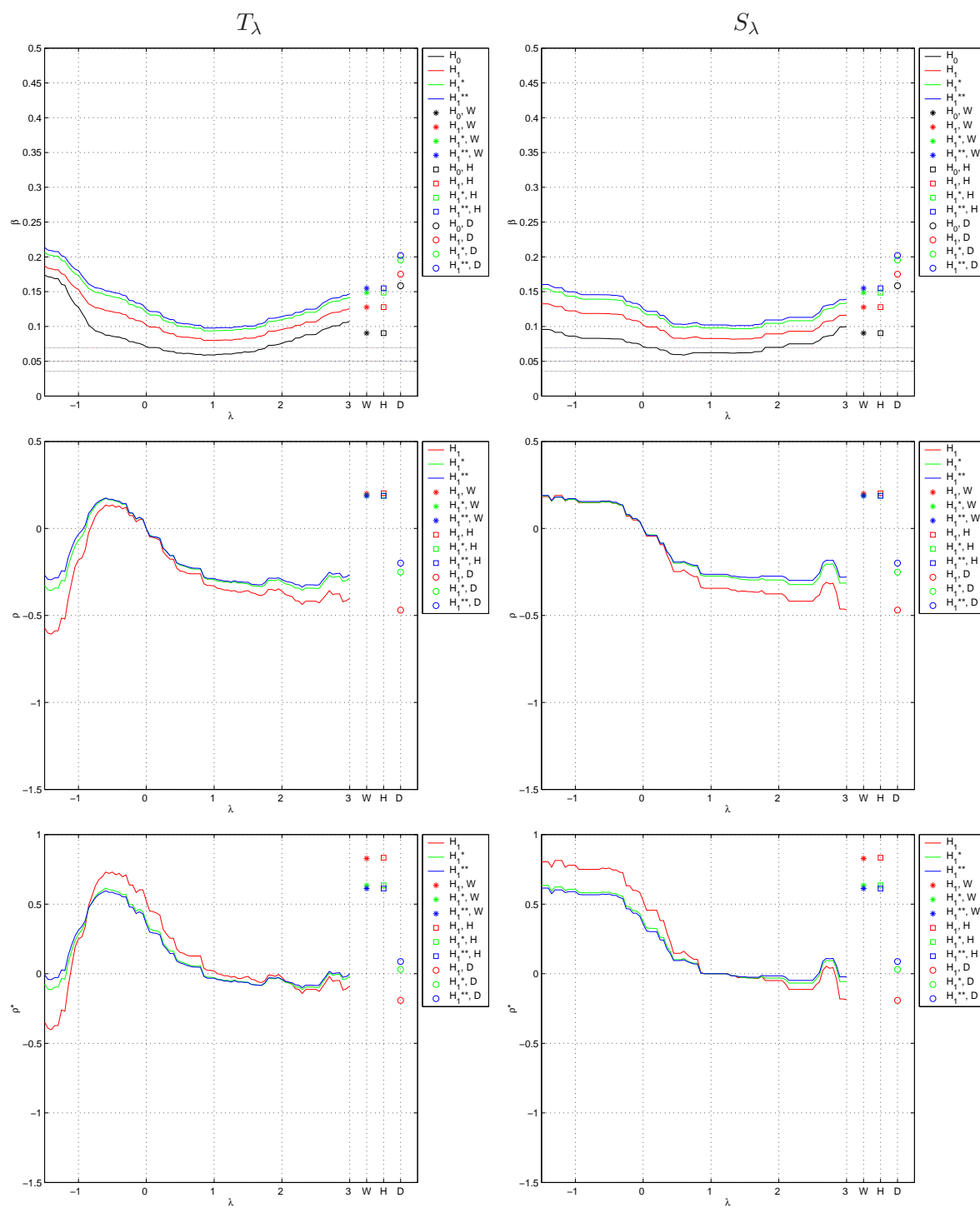


Figura 2.40: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.35$, en el Escenario D.

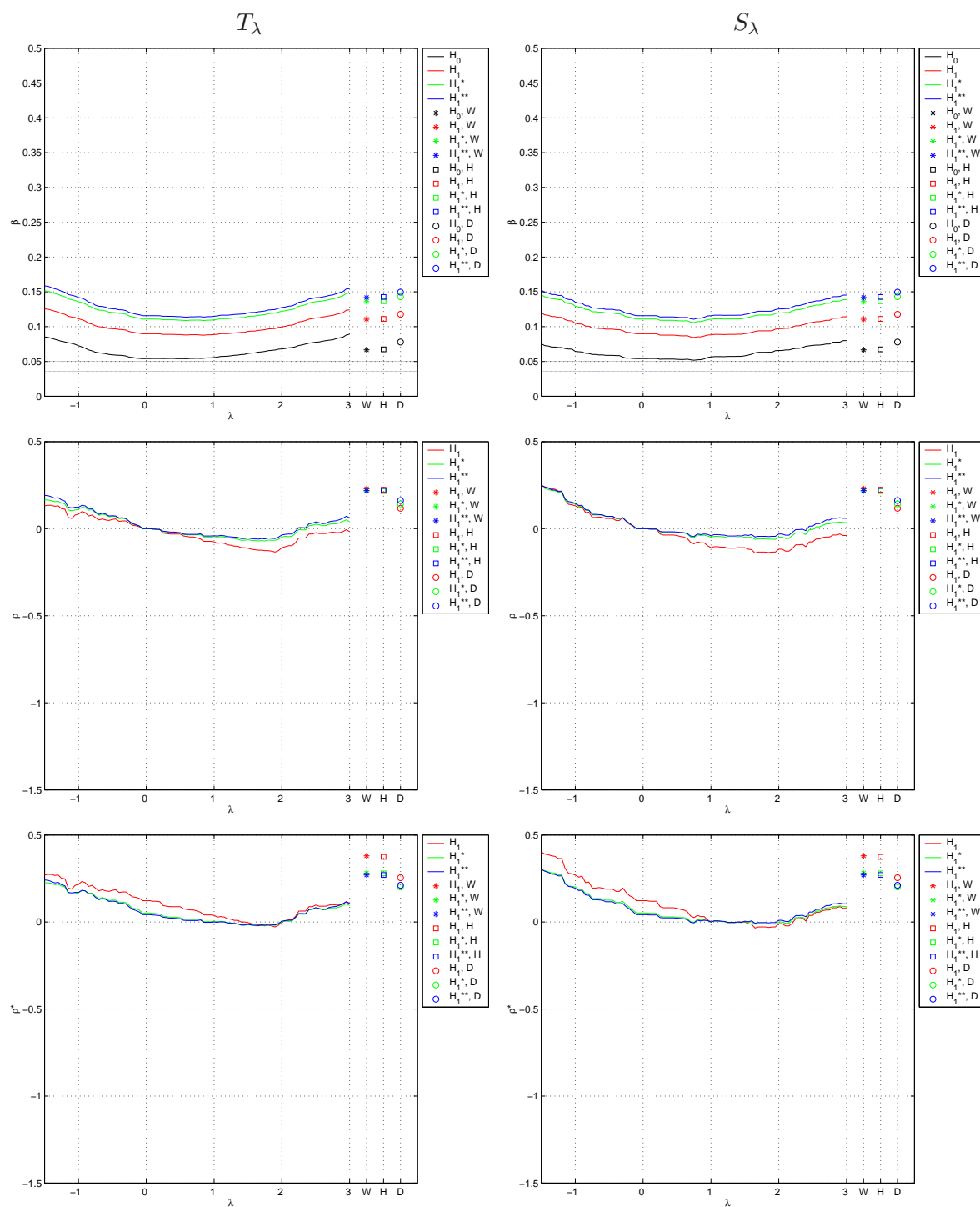


Figura 2.41: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.35$, en el Escenario E.

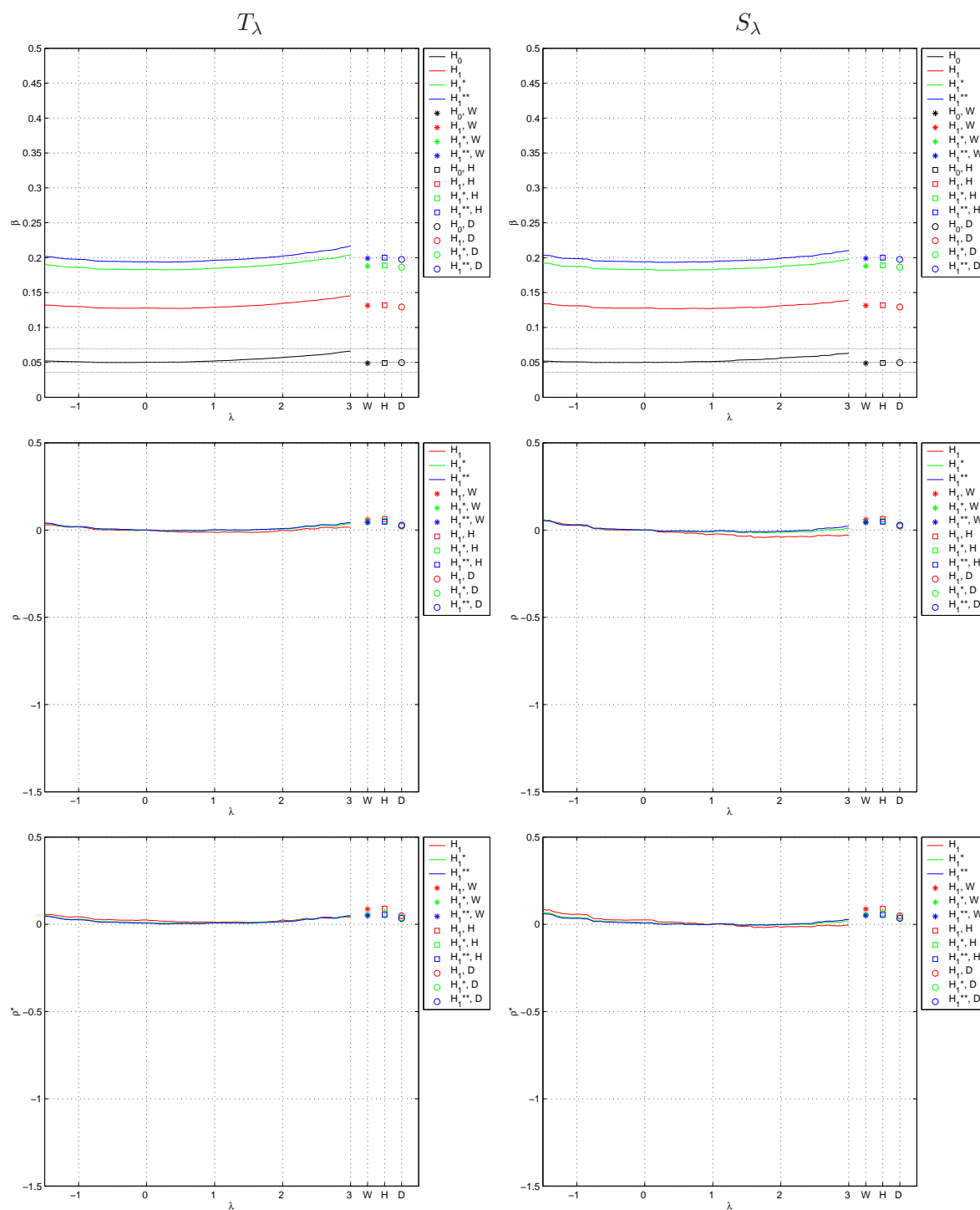


Figura 2.42: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ , con $\pi_0 = 0.35$, en el Escenario F.

Capítulo 3

Contraste monótono de proporciones cuando subyace un modelo tipo dosis-respuesta

3.1. Planteamiento del modelo

Los estudios epidemiológicos, también llamados estudios de investigación médica, son los procedimientos de análisis en los que se basa la investigación médica. La epidemiología los aplica para encontrar las causas que determinan la enfermedad o los factores de riesgo que hacen más probable que una persona se enferme, o bien para determinar los factores protectores o terapéuticos (como los fármacos) que permiten sanar a la persona o prevenir la enfermedad.

Los estudios epidemiológicos permiten establecer la relación entre las causas de la enfermedad (variable independiente) y la influencia de éstas sobre el comportamiento de la enfermedad (variable dependiente). Por lo tanto, resulta natural estudiar la relación entre ambas variables, por ejemplo la existencia de una relación directa de forma que “Y tienda a crecer a medida que X aumenta”. El resultado de un modelo estimativo de regresión es la estimación del coeficiente de la variable de interés.

La interacción y la confusión son dos conceptos importantes cuando se usan los modelos de regresión estimativos, tienen que ver con la interferencia que una o varias variables pueden realizar en la asociación entre otras y pueden enmascarar el efecto objeto de estudio.

Existe confusión cuando la asociación entre dos variables difiere significativamente según que se considere, o no, otra variable, a esta última variable se le denomina “variable de confusión” para la asociación, ya que distorsiona la medida de la asociación entre las otras dos variables.

Existe interacción cuando la asociación entre dos variables varía según los diferentes niveles de otra u otras variables. Las “variables de interacción o modificadoras de efecto”, cuyos valores cambian la intensidad o el sentido de la relación entre el factor de estudio (exposición) y la variable dependiente (respuesta).

Es muy importante distinguir entre confusión e interacción, y tener en cuenta de que ambos fenómenos pueden estar presentes. El análisis estratificado puede servir para detectar una interacción por una tercera variable (variable modificadora de efecto) en la relación de dos variables (una exposición y otra resultado).

En muchos estudios clínicos o epidemiológicos, un objetivo importante es señalar la existencia de una relación dosis-respuesta monótona entre una enfermedad y una exposición llevada a cabo de forma monótona, es decir, una relación en la que el riesgo de enfermedad aumenta a medida que la exposición se incrementa. Una forma de manejar esto es construir un modelo lineal generalizado con datos binarios en el cual la variable explicativa X (dosis) tiene un efecto lineal, en alguna escala, sobre una variable respuesta Y . Para una respuesta Y binaria, se denota por

$$\pi(x) = P(Y = 1/X = x)$$

la probabilidad de un suceso dada una dosis x , para cuyos valores desconocidos se desea tomar decisiones. Se consideran I dosis $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_I$ y cada una de ellas se da a n_i individuos, $i = 1, \dots, I$ respectivamente. Por lo tanto se tienen I variables aleatorias binomiales independientes

$$N_{i1}/X = x_i \sim \mathcal{B}(n_i, \pi(x_i)), \quad i = 1, \dots, I,$$

representando el número de éxitos en los n_i ensayos cuando el nivel del predictor, la dosis, es x_i , $i = 1, \dots, I$. La información de interés, cuando se tiene una realización de una muestra, se puede resumir como

x_1	n_1	n_{11}	$n_{12} = n_1 - n_{11}$,
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
x_i	n_i	n_{i1}	$n_{i2} = n_i - n_{i1}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
x_I	n_I	n_{I1}	$n_{I2} = n_I - n_{I1}$	

donde $n_1 + n_2 + \dots + n_I = n$ y n_{i1} es el número de éxitos asociados a la variable aleatoria Binomial $N_{i1}/X = x_i$ $i = 1, \dots, I$.

Obsérvese que se representa por $\pi(x_i)$ la probabilidad de éxito en la binomial i -ésima para indicar que esa probabilidad de éxito depende de la dosis x_i . Además, frecuentemente se hace la hipótesis adicional de que $\pi(x_i)$ admite la siguiente representación

$$\pi(x_i) = \frac{e^{\alpha + \beta x_i}}{1 + e^{\alpha + \beta x_i}}, \quad (3.1)$$

es decir, que se puede modelizar la probabilidad de éxito a través de un modelo de regresión logística. El modelo 3.1 se puede representar, como es bien conocido, a través de la función logit

$$\text{logit } \pi(x_i) = \log \frac{\pi(x_i)}{1 - \pi(x_i)} = \log \left(\frac{e^{\alpha + \beta x_i}}{1 + e^{\alpha + \beta x_i}} \frac{1 + e^{\alpha + \beta x_i}}{1} \right) = \alpha + \beta x_i. \quad (3.2)$$

La función logit $\pi(x_i)$ es una función simétrica en $(0, 1)$ con $\text{logit } \pi(x_i) = 0$ si $\pi(x_i) = 0.5$.

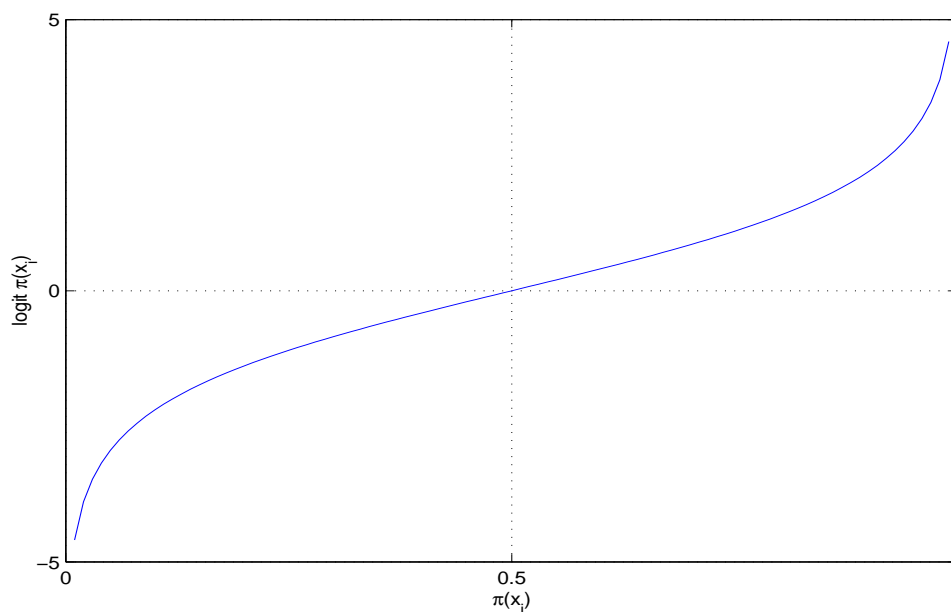


Figura 3.1: Función logit $\pi(x_i)$.

Se observa que (3.2) se puede expresar como

$$g(\pi(x_i)) = \alpha + \beta x_i$$

con $g(\pi(x_i)) = \text{logit } \pi(x_i)$. En general, en este tipo de modelos que se van a estudiar, no es necesario suponer

$$g(\pi(x_i)) = \text{logit } \pi(x_i)$$

sino que cualquier función monótona g y dos veces diferenciable en el intervalo $[x_1, x_I]$ es válida. Así se supondrá, en general, que

$$g(\pi(x_i)) = \alpha + \beta x_i$$

y se dirá que $\pi(x_i)$ está conectada con el predictor lineal g .

Independientemente de la función g elegida, la verosimilitud asociada al modelo bajo consideración es

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^I \binom{n_i}{n_{i1}} \pi(x_i)^{n_{i1}} (1 - \pi(x_i))^{n_i - n_{i1}},$$

donde la forma de $\pi(x_i)$ dependerá de la forma de la función g que se ha adoptado.

En definitiva se tiene una tabla de contingencia $I \times 2$, expresada en notación matricial mediante

$$\mathbf{N} = (\mathbf{N}_1^T, \dots, \mathbf{N}_i^T, \dots, \mathbf{N}_I^T)^T$$

donde $\mathbf{N}_i = (N_{i1}, N_{i2})^T$, siendo $N_{i2} = n_i - N_{i1}$ el número de fracasos en los n_i ensayos, con $i = 1, \dots, I$. Como se tiene una muestra Producto-Binomial de variables aleatorias binomiales, se verifica que $\mathbf{N}_i^T \mathbf{1}_2 = n_i$ y $\mathbf{N}^T \mathbf{1}_{I2} = n$, donde

$$n \equiv \sum_{i=1}^I n_i$$

y $n_i, i = 1, \dots, I$ son valores conocidos, fijados previamente.

El problema estadístico que consiste en contrastar la igualdad de I proporciones binomiales frente a una tendencia monótona en las proporciones, en la misma u opuesta dirección de las dosis, se ha estudiado ampliamente en diferentes marcos de investigación. Uno de los estadísticos de contraste utilizados frecuentemente es el estadístico de Cochran-Armitage (CA), definido

como

$$T_{n,CA} = \frac{\sum_{i=1}^I N_{i1}(x_i - \bar{x})}{\left(\bar{p}_{\bullet 1}(1 - \bar{p}_{\bullet 1}) \sum_{i=1}^I N_{i1}(x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.3)$$

donde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I n_i x_i \quad \text{y} \quad \bar{p}_{\bullet 1} = \frac{\sum_{i=1}^I N_{i1}}{n}.$$

Fue introducido por Cochran (1954) y Armitage (1955), y discutido en Mantel (1963) como un caso especial del estadístico de Mantel-Haenszel (MH) para varias tablas de contingencia $I \times 2$, cada una de ellas correspondiendo a una categoría de una variable de confusión. El estadístico de Cochran-Armitage puede expresarse de distintas formas, pero (3.3) se corresponde con la dada en Tarone y Gart (1980), al final de la Sección 2. Se supone que el parámetro $\pi(x)$ está conectado con el predictor lineal

$$g(\pi) = \alpha + \beta x, \quad (3.4)$$

donde, como ya se ha indicado anteriormente, la función de enlace, g , es monótona y dos veces diferenciable en el intervalo $[x_1, x_I]$.

El cuadrado del estadístico de Cochran-Armitage es un estadístico del tipo “score” (Rao (1973)), donde bajo $H_0 : \beta = 0$ se reemplaza el parámetro α por el estimador de máxima verosimilitud (EMV) y, a diferencia de otros estadísticos de contraste como el de Wald y el del cociente de verosimilitudes (G^2), no depende de la forma de la función g . Teniendo en cuenta esta propiedad, Cox (1970) consideró que es un tipo de estadístico de contraste no-paramétrico. En Cox (1957) y Mantel (1963) se utiliza la función logit

$$g(\pi(x_i)) = \text{logit } \pi(x_i), \quad (3.5)$$

como función de enlace y en Tarone y Gart (1980) se encontró que es una función óptima en términos de la eficiencia relativa asintótica de Pitman.

En la literatura existente acerca de los modelos dosis-respuesta se hace distinción entre técnicas basadas en el modelo (procedimiento paramétrico) y regresión isotónica o técnicas con restricciones de orden (procedimiento no-paramétrico). Para obtener información más detallada acerca de ambos tipos de procedimientos se puede consultar Barlow y otros (1992), Robertson y otros (1988) o Silvapulle y Sen (2004). Leuraud y Benichou (2001) hacen estudios de compa-

ración para ambos tipos de estadísticos de contraste (estadístico de Cochran-Armitage, CA y regresión isotónica entre otros), en cuanto al error tipo I y a la potencia, para tamaños muestrales pequeños y moderados. Su conclusión es muy similar a la dada en Agresti y Coull (1998), para el estadístico del cociente de verosimilitudes, basado en el modelo logit y con restricciones de orden se tiene que el estadístico basado en el modelo es bueno en cuanto al error tipo I y potencia, pero deben cumplirse las hipótesis en las que se basa el modelo, es decir, es necesario realizar un contraste adicional de bondad de ajuste para el modelo logit lineal.

Los métodos mencionados se basan en las distribuciones asintóticas de los estadísticos de contraste. En Hirji Tang (1998), Tang y otros (2000) y Shan y otros (2012) se han propuesto métodos exactos que resuelven una carencia importante asociada a los métodos asintóticos empleados usualmente: para tamaños muestrales pequeños y moderados, el nivel de significación simulado del estadístico no se suele mantener. Es decir, el nivel de significación tiende a superar por amplio margen el nivel de significación simulado, en el caso del estadístico de Wald y el del cociente de verosimilitudes (G^2). Este problema se abordó de forma teórica en Kang y Lee (2007) para el contraste bilateral de Cochran-Armitage, CA.

Este Capítulo se centra en encontrar una nueva familia de estadísticos de contraste, utilizando la función de enlace logit, con la misma distribución asintótica que el estadístico del cociente de verosimilitudes (G^2) (véase Agresti y Coull (1998)) que corrige la carencia de la preservación del nivel de significación simulado y mantiene propiedades similares en cuanto a potencia. El estadístico de CA es útil como guía de comparación, puesto que tiene el mejor comportamiento entre los estadísticos de contraste asintóticos.

En la Sección 3.2 se presentan los estadísticos propuestos y se encuentra su distribución asintótica, tanto para la hipótesis alternativa unilateral como para la hipótesis alternativa bilateral. La Sección 3.3 se dedica a ilustrar, mediante un ejemplo, el método con datos reales. En la Sección 3.4 se realiza un estudio de simulación para estudiar el comportamiento del error tipo I y la potencia del estadístico propuesto y se compara con el estadístico de Cochran-Armitage, CA.

3.2. Estadísticos phi-divergencia y su distribución asintótica

Bajo la hipótesis del modelo dada en (3.5), la probabilidad condicionada del vector \mathbf{N} viene dada por

$$\boldsymbol{\pi}(\alpha, \beta) = (\pi_{11}(\alpha, \beta), \pi_{12}(\alpha, \beta), \dots, \pi_{I1}(\alpha, \beta), \pi_{I2}(\alpha, \beta))^T,$$

donde

$$\pi_{ij}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \pi(x_i), & j = 1 \\ 1 - \pi(x_i), & j = 2 \end{cases},$$

y el vector de probabilidad conjunta de \mathbf{N}

$$\mathbf{p}(\alpha, \beta) = (p_{11}(\alpha, \beta), p_{12}(\alpha, \beta), \dots, p_{I1}(\alpha, \beta), p_{I2}(\alpha, \beta))^T, \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} p_{i1}(\alpha, \beta) &= (X = x_i, Y = j) = P(Y = j/X = x_i)P(X = x_i) \\ &= \pi_{ij}(\alpha, \beta) \frac{n_i}{n} = \begin{cases} \frac{n_i}{n} \pi(x_i), & j = 1 \\ \frac{n_i}{n} (1 - \pi(x_i)), & j = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Se debe contrastar la hipótesis nula de que no haya relación entre la respuesta binaria Y y una variable explicativa X (dosis) categórica ordenada (ordinal), frente a la hipótesis alternativa unilateral H_1 de un incremento de la relación dosis-respuesta entre una variable respuesta Y y X (dosis), es decir:

$$H_0 : \pi(x_1) \geq \pi(x_2) \geq \dots \geq \pi(x_{I-1}) \geq \pi(x_I), \quad (3.7a)$$

$$H_1 : \pi(x_1) < \pi(x_2) < \dots < \pi(x_{I-1}) < \pi(x_I). \quad (3.7b)$$

Teniendo en cuenta

$$\beta > 0 \iff \beta(x_{i+1} - x_i) > 0 \iff \underbrace{\frac{\exp(\alpha + \beta x_{i+1})}{1 + \exp(\alpha + \beta x_{i+1})}}_{=\pi(x_{i+1})} > \underbrace{\frac{\exp(\alpha + \beta x_i)}{1 + \exp(\alpha + \beta x_i)}}_{=\pi(x_i)},$$

se puede ver que (3.7a)-(3.7b) es equivalente al contraste unilateral en términos de β

$$H_0 : \beta \leq 0 \text{ frente a } H_1 : \beta > 0. \quad (3.8)$$

Es importante mencionar que a veces la hipótesis nula en (3.7a) y H_0 en (3.8) se expresan en términos de igualdad (por ejemplo en Shan y otros (2012)), pero el procedimiento utilizado para el estadístico de contraste es equivalente, ya que la forma y la distribución asintótica del estadístico de contraste es la misma.

Es preferible utilizar esta forma puesto que es más coherente para justificar más adelante la

bondad del ajuste.

También se considera la hipótesis alternativa bilateral H'_1 , de crecimiento o decrecimiento en la relación dosis-respuesta entre una variable respuesta Y y la dosis X ,

$$H'_0 : \pi(x_1) = \pi(x_2) = \cdots = \pi(x_{I-1}) = \pi(x_I), \quad (3.9a)$$

$$H'_1 : (\pi(x_1) \leq \pi(x_2) \leq \cdots \leq \pi(x_{I-1}) \leq \pi(x_I) \text{ y } \pi(x_1) < \pi(x_I)) \quad (3.9b)$$

$$\text{o } (\pi(x_1) \geq \pi(x_2) \geq \cdots \geq \pi(x_{I-1}) \geq \pi(x_I) \text{ y } \pi(x_1) > \pi(x_I)),$$

que es equivalente al contraste bilateral planteado en términos de β

$$H'_0 : \beta = 0 \text{ frente a } H'_1 : \beta \neq 0. \quad (3.10)$$

La distribución asintótica del estadístico de contraste CA, (3.3), bajo la hipótesis nula H_0 dada en (3.8) y bajo la hipótesis nula H'_0 dada en (3.10), es una distribución Normal de media cero y desviación típica 1, es decir, $T_{n,CA} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En la práctica, es preferible utilizar el cuadrado del estadístico de CA $T_{n,CA}^2$ con el contraste bilateral, pues su distribución asintótica es una ji-cuadrado con 1 grado de libertad, χ_1^2 .

Sea $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ el EMV de los parámetros en el modelo logit lineal (3.5) y $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ el EMV en el modelo logit lineal (3.5) imponiendo la restricción $\beta \leq 0$. Si se tiene $\hat{\beta} > 0$, el estadístico del cociente de verosimilitudes, para el contraste unilateral dado en (3.8), viene dado por

$$G^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^I N_{i1} \log \left(\frac{\pi_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\pi_{i1}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} \right) + \sum_{i=1}^I N_{i2} \log \left(\frac{\pi_{i2}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\pi_{i2}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} \right) \right). \quad (3.11)$$

Sin embargo, si $\hat{\beta} \leq 0$, entonces se tiene que $\hat{\beta} = \tilde{\beta}$ y el estadístico del cociente de verosimilitudes, para el contraste unilateral dado en (3.8), viene dado por $G^2 = 0$, por lo tanto se aceptaría siempre la hipótesis nula (ausencia de monotonicidad positiva). En este caso, se realizaría el contraste opuesto tomando como hipótesis nula $H_0 : \beta \geq 0$ frente a la alternativa $H_1 : \beta < 0$, para demostrar monotonicidad negativa. Si se tiene $\hat{\beta} > 0$, entonces $\tilde{\beta} = 0$ y el estadístico del cociente de verosimilitudes, para el contraste unilateral dado en (3.8) viene dado por

$$G^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^I N_{i1} \log \left(\frac{\pi_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0)} \right) + \sum_{i=1}^I N_{i2} \log \left(\frac{\pi_{i2}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\pi_{i2}(\tilde{\alpha}, 0)} \right) \right), \quad (3.12)$$

donde

$$\pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0) = \bar{p}_{\bullet 1} = \frac{\sum_{i=1}^I N_{i1}}{n}, \quad \pi_{i2}(\tilde{\alpha}, 0) = 1 - \pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0),$$

$$\pi_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{\exp\{\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i\}}{1 + \exp\{\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i\}} \quad \text{y} \quad \pi_{i2}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 1 - \pi_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}).$$

La distribución asintótica del estadístico del cociente de verosimilitudes para el contraste unilateral dado en (3.8), cuando n tiende hacia infinito, es ji-barra cuadrado con dos sumandos $\frac{1}{2}\chi_0^2 + \frac{1}{2}\chi_1^2$ (para más detalles se puede consultar Agresti y Coull (1998)). El estadístico del cociente de verosimilitudes para el contraste bilateral dado en (3.10) también viene dado por (3.12) y su distribución asintótica es χ_1^2 .

Ahora se construye una nueva familia de estadísticos de contraste, ya que el estadístico del cociente de verosimilitudes (3.12) se puede expresar, al igual que se ha visto en el Capítulo 2 para otros problemas, en términos de la medida de divergencia de Kullback entre los vectores de probabilidad conjunta empírica y de probabilidad conjunta del modelo:

$$G^2 = 2 \left(d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0)) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})) \right), \quad (3.13)$$

donde $\bar{\mathbf{p}}$ es el vector de probabilidad conjunta empírico de \mathbf{N} , $\bar{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{N}}{n}$, es decir,

$$\bar{\mathbf{p}} = (\bar{p}_{11}, \bar{p}_{12}, \dots, \bar{p}_{I1}, \bar{p}_{I2})^T, \quad \text{con} \quad \bar{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{n},$$

$$\mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \left(p_{11}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}), p_{12}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}), \dots, p_{I1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}), p_{I2}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \right)^T, \quad \text{con} \quad p_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{n_i}{n} \pi_{ij}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

es el EMV del vector de probabilidad conjunta,

$$\mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0) = (p_{11}(\tilde{\alpha}, 0), p_{12}(\tilde{\alpha}, 0), \dots, p_{I1}(\tilde{\alpha}, 0), p_{I2}(\tilde{\alpha}, 0))^T, \quad \text{con} \quad p_{i1}(\tilde{\alpha}, 0) = \frac{n_i}{n} \pi_{ij}(\tilde{\alpha}, 0)$$

es el EMV del vector de probabilidad conjunta cuando las probabilidades son homogéneas.

Es interesante observar que $2d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0))$, en (3.13), es el estadístico del cociente de verosimilitudes para las probabilidades condicionadas homogéneas ($\beta = 0$) y $2d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$ es el estadístico del cociente de verosimilitudes para la bondad de ajuste del modelo logit, el contraste que se debería realizar antes del contraste de monotonicidad de probabilidades.

Utilizando la misma técnica del Capítulo anterior se puede definir una familia de estadísticos

ϕ -divergencia que contenga al estadístico del cociente de verosimilitudes como caso particular. Así, se tiene

$$T_{n,\phi}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})) = \frac{2}{\phi''(1)} \left(d_{\phi}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0)) - d_{\phi}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})) \right), \quad (3.14)$$

siendo $d_{\phi}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ la ϕ -divergencia entre los vectores \mathbf{p} y \mathbf{q} introducida en el Capítulo 1.

Ahora se establece la distribución asintótica de la familia de estadísticos ϕ -divergencia dada en (3.14).

Teorema 3 *La distribución asintótica de la familia de estadísticos basada en la medida de ϕ -divergencia d_{ϕ} y dada en (3.14),*

$$T_{n,\phi} = Q_{n,\phi}^1(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0)) - Q_{n,\phi}^2(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})), \quad (3.15)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{n,\phi}^1 &= \frac{2}{\phi''(1)} d_{\phi}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0)), \\ Q_{n,\phi}^2 &= \frac{2}{\phi''(1)} d_{\phi}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})), \end{aligned} \quad (3.16)$$

es ji-cuadrado con un grado de libertad (χ_1^2) para el contraste bilateral dado en (3.10), y ji-barra cuadrado con dos sumandos ($\frac{1}{2}\chi_0^2 + \frac{1}{2}\chi_1^2$) para el contraste unilateral dado en (3.8).

Demostración. Considerando tres modelos, el modelo loglineal saturado (no-paramétrico), el modelo logit lineal (añadiendo restricciones al modelo no-paramétrico) y el modelo independiente (el modelo loglineal sin parámetro de interacción), los vectores de probabilidad estimados para estos tres modelos son $\bar{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ y $\mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0)$ respectivamente.

Se tiene que

$$\log \frac{p_{i1}(\alpha, \beta)}{p_{i2}(\alpha, \beta)} = \log \frac{\pi_{i1}(\alpha, \beta)}{\pi_{i2}(\alpha, \beta)},$$

por lo tanto, el modelo logit lineal se puede expresar en términos de probabilidades conjuntas o de probabilidades condicionadas. En este caso resulta interesante trabajar con probabilidades conjuntas, de forma que

$$\log \frac{p_{i1}(\alpha, \beta)}{p_{i2}(\alpha, \beta)} = \alpha + \beta x_i.$$

Las probabilidades conjuntas en términos de un modelo loglineal saturado vienen dadas por

$$\begin{aligned}\log p_{i1}(\alpha, \beta) &= \theta_{1(i)} + \theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)} \\ \log p_{i2}(\alpha, \beta) &= \theta_{1(i)},\end{aligned}\tag{3.17}$$

considerando sin pérdida de generalidad

$$\theta_{2(2)} = \theta_{12(i2)} = 0 \text{ y } \theta_{12(I1)} = \frac{x_I}{x_1} \theta_{12(11)}.$$

Una vez obtenidos los valores de α y β , se calculan $\theta_{1(i)}$, $i = 1, \dots, I$ teniendo en cuenta que

$$p_{i1}(\alpha, \beta) + p_{i2}(\alpha, \beta) = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, \dots, I.$$

Restando las ecuaciones de (3.17) se llega a

$$\log \frac{p_{i1}(\alpha, \beta)}{p_{i2}(\alpha, \beta)} = \theta_{2(1)} + \theta_{12(i1)}.$$

Por lo tanto, igualando términos, se tiene que $\theta_{2(1)} = \alpha$, $\theta_{12(i1)} = \beta x_i$. De esta forma el modelo logit se puede reparametrizar mediante un modelo loglineal saturado sujeto a la restricción lineal

$$x_1 \theta_{12(i1)} - x_i \theta_{12(11)} = 0, \quad i = 2, \dots, I - 1.\tag{3.18}$$

En notación matricial el modelo loglineal saturado viene dado por

$$\log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\theta}_1 + \mathbf{W}_{12} \boldsymbol{\theta}_{12} + \mathbf{w}_2 \theta_{2(1)} = \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\theta}_1 + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta},\tag{3.19}$$

donde $\boldsymbol{\theta}_1 = (\theta_{1(1)}, \dots, \theta_{1(I-1)})^T$, $\boldsymbol{\theta}_{12} = (\theta_{12(11)}, \dots, \theta_{12(I-1,1)})^T$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_{12}^T, \theta_{2(1)})^T$,

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}_I \otimes \mathbf{1}_2, \quad \mathbf{W}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{I-1} \\ \frac{x_I}{x_1} \mathbf{e}_1^T \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{1}_I \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = (\mathbf{W}_{12}, \mathbf{w}_2),$$

\otimes es el producto de Kronecker (ver Capítulo 16 de Harville (2008)), \mathbf{I}_a la matriz identidad de orden a , $\mathbf{1}_a$ es el vector de 1's de dimensión a , \mathbf{e}_i es el vector i -ésimo de la base canónica y

$$\theta_{1(i)} = \log \left(\frac{n_i}{n} \right) - \log(\mathbf{1}_2 \exp\{(\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{e}_i^T) \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}\}).$$

Esta última expresión es similar a la fórmula para obtener el término independiente en un muestreo Producto-Multinomial.

Las restricciones (3.18) en notación matricial vienen dadas por

$$(x_1 \mathbf{1}_{I-2}, -diag\{x_i\}_{i=2}^{I-1}, \mathbf{0}_{I-2})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{I-2}.$$

En este contexto, para el modelo logit lineal, el contraste dado en (3.8) es equivalente al contraste unilateral

$$\begin{aligned} H_0 : \theta_{12(11)} = 0, \quad x_1 \theta_{12(i1)} - x_i \theta_{12(11)} = 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \\ H_1 : \theta_{12(11)} > 0, \quad x_1 \theta_{12(i1)} - x_i \theta_{12(11)} = 0, \quad i = 2, \dots, I-1, \end{aligned}$$

para el modelo loglineal saturado.

Para este contraste unilateral se tienen tres espacios paramétricos

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^I : \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\theta} \leq 0, \quad (x_1 \mathbf{1}_{I-2}, -diag\{x_i\}_{i=2}^{I-1}, \mathbf{0}_{I-2})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{I-2}\}, \\ \Theta(F) &= \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^I : (x_1 \mathbf{1}_{I-2}, -diag\{x_i\}_{i=2}^{I-1}, \mathbf{0}_{I-2})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{I-2}\}, \\ \Theta &= \Theta(\emptyset) = \mathbb{R}^I, \end{aligned}$$

y se verifica que $\Omega(E) \subset \Theta(F) \subset \Theta$. Este problema se puede enmarcar en el contexto del artículo de Martín y Balakrishnan (2011), de forma que el contraste unilateral

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Omega(E) \text{ frente a } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta(F) - \Omega(E)$$

pertenece al tipo B que aparece en la fórmula (12) de la página 5 del artículo, en el que se consideran tres tipos de contrastes: tipo O, tipo A y tipo B. El conjunto de índices que hacen activa la restricción es el mismo para la hipótesis nula y para la hipótesis alternativa, $E = F = \{i \in \{2, \dots, I-1\} : h_i(\boldsymbol{\theta}) = 0\}$, con $h_i(\boldsymbol{\theta}) = x_1 \theta_{12(i1)} - x_i \theta_{12(11)} = 0$, $i = 2, \dots, I-1$. El estadístico del cociente de verosimilitudes se formula según (20) en la página 6 del artículo de Martín y Balakrishnan (2011) y éste es un caso particular del segundo estadístico dado en la Definición 16 de la página 12. La distribución asintótica para el contraste dado en (3.8) se obtiene a partir del Teorema 17 en Martín y Balakrishnan (2011), de forma que el número máximo de posiciones en el parámetro β que verifican $\beta = 0$ es 1 (si $\hat{\beta} > 0$, entonces $\tilde{\beta} > 0$), por lo tanto la distribución ji-barra cuadrado del contraste dado en (3.8) tiene dos sumandos con pesos igual a $\frac{1}{2}$.

Para el contraste bilateral se tienen tres espacios paramétricos

$$\begin{aligned}\Theta(E') &= \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^I : \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\theta} = 0, \quad (x_1 \mathbf{1}_{I-2}, -\text{diag}\{x_i\}_{i=2}^{I-1}, \mathbf{0}_{I-2}) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{I-2}\}, \\ \Theta(F') &= \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^I : (x_1 \mathbf{1}_{I-2}, -\text{diag}\{x_i\}_{i=2}^{I-1}, \mathbf{0}_{I-2}) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{I-2}\}, \\ \Theta &= \Theta(\emptyset) = \mathbb{R}^I,\end{aligned}$$

y se verifica que $\Theta(E') \subset \Theta(F') \subset \Theta$. Este problema se puede enmarcar en el contexto del artículo de Martín y Balakrishnan (2011), de forma que el contraste bilateral

$$H'_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta(E') \text{ frente a } H'_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta(F') - \Theta(E')$$

pertenece al tipo O que aparece en la fórmula (10) de la página 5 del artículo. El conjunto de índices que hacen activa la restricción para la hipótesis nula es $E' = \{i \in \{1, 2, \dots, I-1\} : h_i(\boldsymbol{\theta}) = 0\}$, con $h_1(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\theta}$, $h_i(\boldsymbol{\theta}) = x_1 \theta_{12(i1)} - x_i \theta_{12(11)} = 0, i = 2, \dots, I-1$ y para la hipótesis alternativa, $F' = F$. El estadístico del cociente de verosimilitudes se formula según (18) en la página 6 del artículo de Martín y Balakrishnan (2011) y éste es un caso particular del segundo estadístico dado en la Definición 7 de la página 9. Por lo tanto, la distribución asintótica para el contraste bilateral dado en (3.10) se obtiene a partir del Teorema 8 en Martín y Balakrishnan (2011), y es una distribución ji cuadrado de $\text{card}(E' - F')$ grados de libertad. En este caso $\text{card}(E') - \text{card}(F') = 1$, entonces la distribución asintótica es ji cuadrado con un grado de libertad. ■

Anteriormente ya se había comentado que antes de realizar el contraste de monotonicidad de las probabilidades es necesario comprobar la bondad de ajuste del modelo logit que se considera como hipótesis. Su estadístico de contraste es el segundo sumando en (3.15), $Q_{n,\phi}^2$, y esto supone una ventaja en el cálculo pues se pueden calcular ambos a la vez. En el siguiente teorema se proporciona su distribución asintótica como contraste preliminar del contraste unilateral (3.8) o del contraste bilateral (3.10).

Teorema 4 *La distribución asintótica de los estadísticos de contraste basados en medidas de ϕ -divergencia $Q_{n,\phi}^2(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}))$, dado en (3.16), cuando n tiende hacia infinito, es χ_{I-2}^2 bajo la hipótesis nula del modelo logit.*

Demostración. Siguiendo los mismos pasos que para la demostración del Teorema 3, en este

caso para el contraste bilateral, los espacios paramétricos son

$$\begin{aligned}\Theta(E'') &= \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^I : (x_1 \mathbf{1}_{I-2}, -\text{diag}\{x_i\}_{i=2}^{I-1}, \mathbf{0}_{I-2})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{I-2}\}, \\ \Theta(F'') &= \Theta = \Theta(\emptyset) = \mathbb{R}^I,\end{aligned}$$

y se verifica que $\Theta(E'') \subset \Theta(F'') = \Theta$. Este problema se puede enmarcar en el contexto del artículo de Martín y Balakrishnan (2011), de forma que el contraste bilateral

$$H'_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta(E'') \text{ frente a } H'_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta(F'') - \Theta(E'')$$

pertenece al tipo O que aparece en la fórmula (10) de la página 5 del artículo. El conjunto de índices que hacen activa la restricción para la hipótesis nula es $E'' = E = F$ y para la hipótesis alternativa, $F'' = \emptyset$ (el modelo saturado no considera restricciones). El estadístico del cociente de verosimilitudes se formula según (18) en la página 6 del artículo de Martín y Balakrishnan (2011) y éste es un caso particular del segundo estadístico dado en la Definición 7 de la página 9. Por lo tanto, la distribución asintótica para el contraste bilateral dado en (3.10) se obtiene a partir del Teorema 8 en Martín y Balakrishnan (2011), y es una distribución ji cuadrado de $\text{card}(E'' - F'')$ grados de libertad. En este caso $\text{card}(E'') - \text{card}(F'') = I - 2$, entonces la distribución asintótica es ji cuadrado con $I - 2$ grados de libertad, bajo la hipótesis nula del modelo logit. ■

3.3. Aplicación numérica

Recientemente, en Paris y otros (2009) se aplicaron los modelos “dosis-respuesta” y “tiempo-respuesta” para estudiar en qué medida influyen algunas variables en dos enfermedades respiratorias: placas pleurales y asbestosis.

En un estudio organizado en Francia desde 2003 a 2005 se consideraron $n = 5545$ trabajadores expuestos regularmente al asbesto. El asbesto pertenece a un grupo de fibras, que se presenta en la naturaleza en minerales que se encuentran en el suelo y en las rocas, y puede ser separado e hilado en largas fibras. Estas fibras algodonosas son increíblemente fuertes y resistentes al calor, ácidos y álcalis y a la conducción eléctrica. Debido a estas características, el asbesto se utiliza como material a prueba de fuego, aislamiento acústico y térmico, aislamiento de tubería y naves, así como para la fabricación de papel. Puede encontrarse en losas del techo (uralita), linóleo, pinturas, zapatas para frenos de automóviles y almohadillas de embragues, así como en vigas estructurales. Hay distintas enfermedades relacionadas con el contacto directo con el asbesto,

especialmente asbestosis o fibrosis pulmonar y el cáncer. En el artículo original, se realizaron cuatro contrastes Cochran-Armitage bilaterales considerando respectivamente cuatro variables: el tiempo desde la primera exposición (en años), la duración de la exposición (en años), el nivel de exposición (bajo, moderado, alto y total, codificado como 0, 1, 2 y 3 respectivamente), y el índice de exposición acumulativa en relación con las dos enfermedades citadas anteriormente. La última variable se obtiene multiplicando los valores de las dos variables previas y se puede considerar una combinación de ellas.

Sin embargo, en este ejemplo de aplicación numérica, sólo se van a considerar dos variables, la duración de la exposición (DE) y el índice de exposición acumulativa (IEA). Se tienen cuatro niveles de exposición (bajo, moderado, alto y total, codificado como 1, 2, 3 y 4, respectivamente), por lo tanto $I = 4$ para cada una de las variables, duración de la exposición (DE) e índice de exposición acumulativa (IEA). Dividiendo el intervalo total en cuatro intervalos se tiene aproximadamente un 25% de frecuencias observadas. En la Tabla 3.1 se considera el punto medio del intervalo como representante del intervalo.

i	x_i	n_i	placas pleurales			asbestosis		
	DE		N_{i1}	$\pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0)$	$\pi_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	N_{i1}	$\pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0)$	$\pi_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$
1	10.0	1321	179	0.1591	0.1214	71	0.0676	0.0550
2	24.5	1324	170	0.1591	0.1495	88	0.0676	0.0645
3	32.5	1408	226	0.1591	0.1673	100	0.0676	0.0704
4	43.0	1492	307	0.1591	0.1931	116	0.0676	0.0789
	IEA		N_{i1}	$\pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0)$	$\pi_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	N_{i1}	$\pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0)$	$\pi_{i1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$
1	15.0	1306	150	0.1591	0.1121	50	0.0676	0.0465
2	41.0	1386	200	0.1591	0.1466	105	0.0676	0.0617
3	61.0	1380	228	0.1591	0.1692	99	0.0676	0.0720
4	85.0	1473	304	0.1591	0.2029	121	0.0676	0.0878

Tabla 3.1: Datos del estudio en Paris y otros (2009) y EMV de proporciones afectadas.

En la Tabla 3.2, aparte del estadístico de contraste CA unilateral $T_{n,CA}$ y el estadístico de contraste CA bilateral $T_{n,CA}^2$, se estudia la familia de estadísticos basados en la familia de medidas de divergencias de Cressie-Read (es decir, la familia de estadísticos ϕ -divergencia en

donde se ha considerado la función ϕ definida en (1.32)) $T_\lambda = Q_{n,\lambda}^1 - Q_{n,\lambda}^2$, donde

$$Q_{n,\lambda}^1 = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 N_{ij} \left(\frac{N_{ij}}{n_i \pi_{ij}(\tilde{\alpha}, 0)} \right)^\lambda - n \right),$$

$$Q_{n,\lambda}^2 = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 N_{ij} \left(\frac{N_{ij}}{n_i \pi_{ij}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \right)^\lambda - n \right)$$

con $\lambda \in \{-0.5, \frac{2}{3}, 1, 1.5, 2\}$ y también $G^2 = T_0$ y T_{-1} donde

$$Q_{n,0}^1 = 2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 N_{ij} \log \left(\frac{N_{ij}}{n_i \pi_{ij}(\tilde{\alpha}, 0)} \right), \quad Q_{n,0}^2 = 2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 N_{ij} \log \left(\frac{N_{ij}}{n_i \pi_{ij}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \right),$$

$$Q_{n,-1}^1 = 2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 n_i \pi_{ij}(\tilde{\alpha}, 0) \log \left(\frac{n_i \pi_{ij}(\tilde{\alpha}, 0)}{N_{ij}} \right), \quad Q_{n,-1}^2 = 2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 n_i \pi_{ij}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \log \left(\frac{n_i \pi_{ij}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{N_{ij}} \right).$$

Los EMV de las probabilidades homogéneas son

$$\pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0) = \frac{\sum_{i=1}^4 N_{i1}}{n}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \text{y} \quad \pi_{i2}(\tilde{\alpha}, 0) = 1 - \pi_{i1}(\tilde{\alpha}, 0), \quad i = 1, \dots, 4,$$

mientras que las probabilidades monótonas se ajustan a un modelo logístico binario. Por lo tanto, computar $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$ es equivalente a computar $T_{n,CA}$.

También se han calculado los estadísticos de contraste de bondad de ajuste para el modelo logit lineal, $Q_{n,\lambda}^2$, $\lambda \in \{-1, -0.5, 0, \frac{2}{3}, 1, 1.5, 2\}$. Para todos ellos, se han calculado los p -valores teniendo en cuenta que la distribución asintótica bajo la hipótesis nula es $T_{n,CA} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (contraste unilateral), $T_\lambda \sim \frac{1}{2}\chi_0^2 + \frac{1}{2}\chi_1^2$, $T_{n,CA}^2, T_\lambda \sim \chi_1^2$ (contraste bilateral), $Q_{n,\lambda}^2 \sim \chi_2^2$ (contraste de bondad de ajuste).

Placas pleurales en función de la DE							
λ	-1	-0.5	0	$\frac{2}{3}$	1	1.5	2
T_λ	28.2839	28.6098	29.0024	29.6344	29.9992	30.6104	31.3022
$p\text{-val}(T_\lambda)$ Unilateral	5×10^{-8}	5×10^{-8}	4×10^{-8}	3×10^{-8}	2×10^{-8}	2×10^{-8}	1×10^{-8}
$p\text{-val}(T_\lambda)$ Bilateral	1×10^{-7}	9×10^{-8}	7×10^{-8}	5×10^{-8}	4×10^{-8}	3×10^{-8}	2×10^{-8}
$Q_{n,\lambda}^2$	9.3539	9.2922	9.2358	9.1689	9.1389	9.0981	9.0622
$p\text{-val}(Q_{n,\lambda}^2)$	0.0093	0.0096	0.0099	0.0010	0.0010	0.0010	0.0011
$T_{n,CA}$ Unilateral	5.3419						
$p\text{-val}(T_{n,CA})$ Unilateral	5×10^{-8}						
$T_{n,CA}^2$ Bilateral	28.536						
$p\text{-val}(T_{n,CA}^2)$ Bilateral	9×10^{-8}						
Asbestosis en función de la DE							
λ	-1	-0.5	0	$\frac{2}{3}$	1	1.5	2
T_λ	6.9869	6.8712	6.7664	6.6430	6.5878	6.5130	6.4472
$p\text{-val}(T_\lambda)$ Unilateral	0.0041	0.0044	0.0046	0.0050	0.0051	0.0053	0.0055
$p\text{-val}(T_\lambda)$ Bilateral	0.0082	0.0088	0.0093	0.0099	0.0103	0.0107	0.0111
$Q_{n,\lambda}^2$	0.1572	0.1573	0.1575	0.1577	0.1578	0.1580	0.1582
$p\text{-val}(Q_{n,\lambda}^2)$	0.9244	0.9243	0.9242	0.9242	0.9241	0.9240	0.9239
$T_{n,CA}$ Unilateral	2.5842						
$p\text{-val}(T_{n,CA})$ Unilateral	0.0049						
$T_{n,CA}^2$ Bilateral	6.6779						
$p\text{-val}(T_{n,CA}^2)$ Bilateral	0.0098						
Placas pleurales en función del IEA							
λ	-1	-0.5	0	$\frac{2}{3}$	1	1.5	2
T_λ	46.5311	46.1887	45.9821	45.9119	45.9632	46.1473	46.4600
$p\text{-val}(T_\lambda)$ Unilateral	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$
$p\text{-val}(T_\lambda)$ Bilateral	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$	$< 10^{-10}$
$Q_{n,\lambda}^2$	0.4247	0.4246	0.4246	0.4245	0.4245	0.4244	0.4244
$p\text{-val}(Q_{n,\lambda}^2)$	0.8087	0.8087	0.8087	0.8088	0.8088	0.8088	0.8088
$T_{n,CA}$ Unilateral	6.7109						
$p\text{-val}(T_{n,CA})$ Unilateral	$< 10^{-10}$						
$T_{n,CA}^2$ Bilateral	45.0362						
$p\text{-val}(T_{n,CA}^2)$ Bilateral	$< 10^{-10}$						
Asbestosis en función del IEA							
λ	-1	-0.5	0	$\frac{2}{3}$	1	1.5	2
T_λ	24.0869	21.9928	20.1874	18.1522	17.2695	16.0884	15.0561
$p\text{-val}(T_\lambda)$ Unilateral	0.46×10^{-6}	1.4×10^{-6}	3.5×10^{-6}	10.2×10^{-6}	16.2×10^{-6}	30.2×10^{-6}	52.2×10^{-6}
$p\text{-val}(T_\lambda)$ Bilateral	0.92×10^{-6}	2.7×10^{-6}	7.0×10^{-6}	20.4×10^{-6}	32.4×10^{-6}	60.4×10^{-6}	104.4×10^{-6}
$Q_{n,\lambda}^2$	7.0258	7.0810	7.1465	7.2506	7.3100	7.4085	7.5187
$p\text{-val}(Q_{n,\lambda}^2)$	0.0298	0.0290	0.0281	0.0266	0.0259	0.0246	0.0233
$T_{n,CA}$ Unilateral	4.43892						
$p\text{-val}(T_{n,CA})$ Unilateral	4.5×10^{-6}						
$T_{n,CA}^2$ Bilateral	19.7040						
$p\text{-val}(T_{n,CA}^2)$ Bilateral	9.0×10^{-6}						

Tabla 3.2: Contrastes de hipótesis unilateral y bilateral para proporciones monótonas en los datos de Paris y otros (2009).

Dos de los cuatro estadísticos de contraste para los contrastes de bondad de ajuste rechazan la hipótesis nula de que el modelo sea logit lineal, por lo tanto, no todos los contrastes de tendencia son significativos. Incluso se podría decir que no es posible considerar ni la homogeneidad ni la monotonicidad creciente en las probabilidades de placas pleurales en función de la duración de la exposición (DE), ni tampoco en las probabilidades de la asbestosis en función del índice de exposición acumulativa (IEA), ya que los p -valores del estadístico de contraste $Q_{n,\lambda}^2$ son muy pequeños.

Sin embargo, la hipótesis nula de que el modelo sea un modelo logit lineal se verifica para los otros dos modelos, probabilidades de la asbestosis en función la duración de la exposición (DE) y placas pleurales en función del índice de exposición acumulativa (IEA), ya que los p -valores del estadístico de contraste $Q_{n,\lambda}^2$ son muy grandes y por tanto es posible realizar el contraste de monotonicidad para sus probabilidades.

A partir de la Tabla 3.1 se puede ver que en el caso de existir tendencia en las probabilidades, se tiene tendencia creciente, puesto que $\pi_{11}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) < \pi_{21}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) < \pi_{31}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) < \pi_{41}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, esto es, $\hat{\beta} > 0$, y por tanto se consideraría el contraste unilateral planteado en (3.8).

En vista de que, tanto en los contrastes unilaterales como en los contrastes bilaterales, se obtienen p -valores muy pequeños, se rechaza la hipótesis nula y se puede concluir que la probabilidad de placas pleurales aumenta cuando se incrementa el índice de exposición acumulativa y la probabilidad de asbestosis aumenta cuando se incrementa la duración de la exposición.

Se puede destacar que los p -valores obtenidos en general son muy pequeños o muy grandes, y esto podría ser así porque los resultados se obtienen con un tamaño de muestra muy grande. También es interesante mencionar que aunque dos variables explicativas no tengan influencia monótona en la probabilidad de la enfermedad, es posible que esta probabilidad no esté influenciada por la conexión logit lineal. Incluso se ha probado que ambas enfermedades aumentan cuando se incrementan dos variables explicativas distintas.

3.4. Estudio de simulación

Para estudiar el comportamiento de la familia de estadísticos propuestos $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$ junto con el estadístico de Cochran-Armitage $T_{n,CA}$, se realiza un estudio de simulación con $R = 200\,000$ repeticiones comparando la probabilidad del error de tipo I y la potencia simulada, con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, tanto para el contraste

unilateral como bilateral.

Se toman los datos de la Tabla 3.1 correspondientes a la probabilidad de asbestosis en función de la duración de la exposición (DE), es decir, se toma $I = 4$, $x_1 = 10.0$, $x_2 = 24.5$, $x_3 = 32.5$, $x_4 = 43.0$. Puesto que el tamaño muestral de los datos del ejemplo considerado en la Sección 3.3 es grande, y resulta interesante estudiar el comportamiento para tamaños muestrales pequeños y moderados, se consideran los siguientes escenarios en el estudio de simulación:

- Escenario 1: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 25$
- Escenario 2: $n_1 = 30$, $n_2 = 40$, $n_3 = 35$, $n_4 = 25$
- Escenario 3: $n_1 = 50$, $n_2 = 60$, $n_3 = 55$, $n_4 = 45$

El Escenario 1 corresponde a tamaños muestrales iguales y muy pequeños, mientras que los Escenarios 2 y 3 hacen referencia a tamaños muestrales distintos, en el primer caso pequeños y en el segundo caso moderados.

Las Figuras 3.2-3.7 muestran gráficamente las probabilidades de error de tipo I en función de $p = \pi_{11}(\alpha, 0) = \pi_{21}(\alpha, 0) = \pi_{31}(\alpha, 0) = \pi_{41}(\alpha, 0)$, tanto para el contraste unilateral como bilateral. Se toman 29 valores de p en el intervalo $(0, 1)$ y se consideran los estadísticos de contraste $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$, con $\lambda \in \{0, \frac{2}{3}, 1\}$, y el estadístico de Cochran-Armitage $T_{n,CA}$.

Se observa simetría con respecto a $p = 0.5$ en las gráficas correspondientes al contraste bilateral, Figuras 3.3, 3.5 y 3.7, porque es equivalente realizar un contraste bilateral cuando el verdadero valor del parámetro es p_0 o cuando el verdadero valor del parámetro es $1 - p_0$, permutando el número de éxitos por el número de fracasos. Sin embargo en las gráficas de las Figuras 3.2, 3.4 y 3.6, correspondientes al contraste unilateral, no se aprecia simetría con respecto a $p = 0.5$, la justificación se encuentra en la hipótesis alternativa, porque si el verdadero valor del parámetro es p_0 y se tiene tendencia creciente en las probabilidades $\pi_{11}(\alpha, 0) < \pi_{21}(\alpha, 0) < \pi_{31}(\alpha, 0) < \pi_{41}(\alpha, 0)$ entonces para $1 - p_0$ tiende a ocurrir $1 - \pi_{11}(\alpha, 0) > 1 - \pi_{21}(\alpha, 0) > 1 - \pi_{31}(\alpha, 0) > 1 - \pi_{41}(\alpha, 0)$. De forma asintótica no se apreciaría la diferencia, sin embargo sí que se aprecia para muestras pequeñas y moderadas.

En todos los escenarios y para los dos tipos de contrastes, tanto unilateral como bilateral, se observa un comportamiento inestable en los extremos del intervalo, es decir, cuando el valor de p está próximo a 0 o a 1.

p	Err T_0	Err $T_{2/3}$	Err T_1	Err T_{CA}
0.0333	0.0345	0.0277	0.0277	0.0329
0.0667	0.0516	0.0443	0.0441	0.0458
0.1000	0.0538	0.0479	0.0475	0.0482
0.1333	0.0537	0.0477	0.0481	0.0492
0.1667	0.0531	0.0479	0.0486	0.0494
0.2000	0.0531	0.0484	0.0489	0.0497
0.2333	0.0529	0.0494	0.0492	0.0498
0.2667	0.0527	0.0498	0.0491	0.0498
0.3000	0.0524	0.0499	0.0492	0.0497
0.3333	0.0517	0.0495	0.0489	0.0496
0.3667	0.0518	0.0498	0.0490	0.0501
0.4000	0.0519	0.0501	0.0493	0.0506
0.4333	0.0523	0.0506	0.0500	0.0512
0.4667	0.0515	0.0500	0.0494	0.0506
0.5000	0.0524	0.0508	0.0502	0.0518
0.5333	0.0508	0.0493	0.0490	0.0504
0.5667	0.0507	0.0493	0.0490	0.0504
0.6000	0.0512	0.0501	0.0498	0.0511
0.6333	0.0510	0.0496	0.0493	0.0509
0.6667	0.0512	0.0497	0.0493	0.0512
0.7000	0.0511	0.0494	0.0488	0.0512
0.7333	0.0516	0.0497	0.0488	0.0517
0.7667	0.0515	0.0496	0.0483	0.0517
0.8000	0.0517	0.0502	0.0483	0.0518
0.8333	0.0520	0.0500	0.0478	0.0521
0.8667	0.0528	0.0476	0.0466	0.0529
0.9000	0.0532	0.0460	0.0465	0.0531
0.9333	0.0526	0.0442	0.0455	0.0522
0.9667	0.0395	0.0333	0.0336	0.0393

Tabla 3.3: Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 1.

p	Err T_0	Err $T_{2/3}$	Err T_1	Err T_{CA}
0.0333	0.0537	0.0372	0.0361	0.0356
0.0667	0.0588	0.0404	0.0404	0.0454
0.1000	0.0557	0.0431	0.0437	0.0491
0.1333	0.0542	0.0457	0.0460	0.0496
0.1667	0.0538	0.0477	0.0473	0.0503
0.2000	0.0532	0.0486	0.0483	0.0502
0.2333	0.0522	0.0483	0.0479	0.0500
0.2667	0.0527	0.0491	0.0486	0.0505
0.3000	0.0523	0.0492	0.0487	0.0505
0.3333	0.0518	0.0489	0.0485	0.0503
0.3667	0.0515	0.0488	0.0483	0.0502
0.4000	0.0515	0.0492	0.0487	0.0504
0.4333	0.0520	0.0496	0.0492	0.0508
0.4667	0.0516	0.0494	0.0491	0.0503
0.5000	0.0520	0.0498	0.0494	0.0507
0.5333	0.0515	0.0493	0.0490	0.0502
0.5667	0.0520	0.0496	0.0492	0.0508
0.6000	0.0515	0.0492	0.0487	0.0504
0.6333	0.0515	0.0488	0.0483	0.0502
0.6667	0.0518	0.0489	0.0485	0.0503
0.7000	0.0523	0.0492	0.0487	0.0505
0.7333	0.0527	0.0491	0.0486	0.0505
0.7667	0.0522	0.0483	0.0479	0.0500
0.8000	0.0532	0.0486	0.0483	0.0502
0.8333	0.0538	0.0477	0.0473	0.0503
0.8667	0.0542	0.0457	0.0460	0.0496
0.9000	0.0556	0.0430	0.0436	0.0490
0.9333	0.0573	0.0389	0.0389	0.0439
0.9667	0.0432	0.0259	0.0248	0.0243

Tabla 3.4: Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 1.

p	Err T_0	Err $T_{2/3}$	Err T_1	Err T_{CA}
0.0333	0.0643	0.0493	0.0522	0.0385
0.0667	0.0554	0.0451	0.0484	0.0480
0.1000	0.0531	0.0480	0.0510	0.0492
0.1333	0.0524	0.0489	0.0500	0.0501
0.1667	0.0521	0.0492	0.0495	0.0500
0.2000	0.0521	0.0497	0.0499	0.0498
0.2333	0.0520	0.0503	0.0501	0.0501
0.2667	0.0518	0.0505	0.0506	0.0503
0.3000	0.0517	0.0503	0.0504	0.0503
0.3333	0.0519	0.0508	0.0508	0.0508
0.3667	0.0514	0.0501	0.0498	0.0503
0.4000	0.0511	0.0500	0.0496	0.0502
0.4333	0.0517	0.0506	0.0503	0.0508
0.4667	0.0515	0.0501	0.0498	0.0506
0.5000	0.0528	0.0512	0.0509	0.0519
0.5333	0.0511	0.0493	0.0490	0.0503
0.5667	0.0510	0.0491	0.0487	0.0503
0.6000	0.0515	0.0495	0.0490	0.0509
0.6333	0.0505	0.0486	0.0480	0.0501
0.6667	0.0511	0.0491	0.0486	0.0509
0.7000	0.0510	0.0486	0.0480	0.0511
0.7333	0.0504	0.0477	0.0471	0.0505
0.7667	0.0508	0.0478	0.0471	0.0512
0.8000	0.0510	0.0473	0.0464	0.0513
0.8333	0.0512	0.0475	0.0462	0.0515
0.8667	0.0515	0.0466	0.0451	0.0518
0.9000	0.0518	0.0443	0.0445	0.0520
0.9333	0.0514	0.0416	0.0430	0.0515
0.9667	0.0440	0.0341	0.0344	0.0440

Tabla 3.5: Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 2.

p	Err T_0	Err $T_{2/3}$	Err T_1	Err T_{CA}
0.0333	0.0526	0.0445	0.0557	0.0514
0.0667	0.0540	0.0442	0.0453	0.0500
0.1000	0.0525	0.0454	0.0463	0.0493
0.1333	0.0528	0.0473	0.0476	0.0500
0.1667	0.0529	0.0481	0.0480	0.0502
0.2000	0.0522	0.0479	0.0477	0.0498
0.2333	0.0523	0.0482	0.0483	0.0504
0.2667	0.0516	0.0483	0.0484	0.0498
0.3000	0.0517	0.0487	0.0486	0.0501
0.3333	0.0517	0.0490	0.0487	0.0503
0.3667	0.0510	0.0485	0.0480	0.0498
0.4000	0.0517	0.0496	0.0491	0.0506
0.4333	0.0515	0.0492	0.0489	0.0505
0.4667	0.0520	0.0496	0.0492	0.0508
0.5000	0.0519	0.0496	0.0490	0.0508
0.5333	0.0520	0.0496	0.0492	0.0508
0.5667	0.0515	0.0492	0.0489	0.0505
0.6000	0.0517	0.0496	0.0491	0.0506
0.6333	0.0510	0.0485	0.0480	0.0498
0.6667	0.0516	0.0489	0.0486	0.0502
0.7000	0.0517	0.0487	0.0486	0.0501
0.7333	0.0516	0.0483	0.0484	0.0498
0.7667	0.0523	0.0482	0.0483	0.0504
0.8000	0.0522	0.0479	0.0477	0.0498
0.8333	0.0529	0.0481	0.0480	0.0502
0.8667	0.0528	0.0473	0.0476	0.0500
0.9000	0.0525	0.0454	0.0463	0.0493
0.9333	0.0532	0.0435	0.0443	0.0493
0.9667	0.0407	0.0323	0.0328	0.0394

Tabla 3.6: Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 2.

p	Err T_0	Err $T_{2/3}$	Err T_1	Err T_{CA}
0.0333	0.0546	0.0437	0.0421	0.0454
0.0667	0.0534	0.0484	0.0494	0.0493
0.1000	0.0520	0.0488	0.0486	0.0491
0.1333	0.0517	0.0497	0.0494	0.0493
0.1667	0.0515	0.0499	0.0500	0.0498
0.2000	0.0520	0.0509	0.0509	0.0505
0.2333	0.0505	0.0496	0.0498	0.0493
0.2667	0.0514	0.0505	0.0507	0.0501
0.3000	0.0518	0.0511	0.0512	0.0509
0.3333	0.0512	0.0508	0.0506	0.0504
0.3667	0.0502	0.0497	0.0496	0.0495
0.4000	0.0506	0.0500	0.0499	0.0500
0.4333	0.0511	0.0504	0.0501	0.0506
0.4667	0.0510	0.0503	0.0500	0.0504
0.5000	0.0511	0.0504	0.0502	0.0507
0.5333	0.0496	0.0488	0.0486	0.0493
0.5667	0.0501	0.0492	0.0490	0.0500
0.6000	0.0505	0.0497	0.0495	0.0505
0.6333	0.0499	0.0488	0.0485	0.0499
0.6667	0.0495	0.0484	0.0481	0.0496
0.7000	0.0497	0.0485	0.0482	0.0499
0.7333	0.0501	0.0487	0.0483	0.0505
0.7667	0.0499	0.0482	0.0476	0.0504
0.8000	0.0504	0.0486	0.0480	0.0511
0.8333	0.0513	0.0486	0.0480	0.0517
0.8667	0.0509	0.0483	0.0474	0.0514
0.9000	0.0511	0.0481	0.0469	0.0516
0.9333	0.0518	0.0452	0.0447	0.0522
0.9667	0.0512	0.0417	0.0419	0.0512

Tabla 3.7: Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 3.

p	Err T_0	Err $T_{2/3}$	Err T_1	Err T_{CA}
0.0333	0.0577	0.0449	0.0491	0.0483
0.0667	0.0530	0.0452	0.0463	0.0492
0.1000	0.0520	0.0476	0.0477	0.0496
0.1333	0.0516	0.0490	0.0486	0.0498
0.1667	0.0516	0.0489	0.0488	0.0504
0.2000	0.0515	0.0491	0.0491	0.0502
0.2333	0.0511	0.0490	0.0487	0.0498
0.2667	0.0511	0.0493	0.0492	0.0501
0.3000	0.0508	0.0496	0.0496	0.0501
0.3333	0.0510	0.0497	0.0494	0.0503
0.3667	0.0500	0.0486	0.0481	0.0493
0.4000	0.0509	0.0497	0.0494	0.0502
0.4333	0.0507	0.0493	0.0489	0.0497
0.4667	0.0507	0.0495	0.0492	0.0498
0.5000	0.0514	0.0500	0.0497	0.0503
0.5333	0.0507	0.0495	0.0492	0.0498
0.5667	0.0507	0.0493	0.0489	0.0497
0.6000	0.0509	0.0497	0.0494	0.0502
0.6333	0.0500	0.0486	0.0481	0.0493
0.6667	0.0510	0.0497	0.0494	0.0503
0.7000	0.0508	0.0496	0.0496	0.0501
0.7333	0.0511	0.0495	0.0493	0.0500
0.7667	0.0511	0.0489	0.0487	0.0498
0.8000	0.0515	0.0491	0.0491	0.0502
0.8333	0.0525	0.0502	0.0501	0.0514
0.8667	0.0516	0.0491	0.0486	0.0498
0.9000	0.0520	0.0476	0.0476	0.0496
0.9333	0.0530	0.0452	0.0463	0.0492
0.9667	0.0547	0.0419	0.0461	0.0463

Tabla 3.8: Probabilidad de Error de tipo I para los estadísticos T_0 , $T_{2/3}$, T_1 y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 3.

β	Pot $T_{2/3}$	Pot T_{CA}
-0.0250	0.0008	0.0008
-0.0200	0.0022	0.0022
-0.0150	0.0063	0.0065
-0.0100	0.0133	0.0138
-0.0050	0.0273	0.0285
0.0000	0.0497	0.0519
0.0050	0.0814	0.0847
0.0100	0.1240	0.1278
0.0150	0.1754	0.1802
0.0200	0.2315	0.2397
0.0250	0.2859	0.2993

Tabla 3.9: Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 1.

β	Pot $T_{2/3}$	Pot T_{CA}
-0.0250	0.0006	0.0007
-0.0200	0.0020	0.0021
-0.0150	0.0049	0.0051
-0.0100	0.0117	0.0124
-0.0050	0.0255	0.0271
0.0000	0.0469	0.0500
0.0050	0.0809	0.0864
0.0100	0.1256	0.1343
0.0150	0.1801	0.1918
0.0200	0.2423	0.2564
0.0250	0.3044	0.3220

Tabla 3.11: Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 2.

β	Pot $T_{2/3}$	Pot T_{CA}
-0.0250	0.0001	0.0001
-0.0200	0.0005	0.0005
-0.0150	0.0022	0.0022
-0.0100	0.0074	0.0078
-0.0050	0.0205	0.0212
0.0000	0.0494	0.0513
0.0050	0.0971	0.1007
0.0100	0.1675	0.1738
0.0150	0.2539	0.2633
0.0200	0.3478	0.3608
0.0250	0.4436	0.4575

Tabla 3.13: Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste unilateral. Escenario 3.

β	Pot $T_{2/3}$	Pot T_{CA}
-0.0250	0.3072	0.3093
-0.0200	0.2100	0.2120
-0.0150	0.1361	0.1375
-0.0100	0.0850	0.0859
-0.0050	0.0568	0.0579
0.0000	0.0490	0.0505
0.0050	0.0563	0.0587
0.0100	0.0774	0.0805
0.0150	0.1085	0.1136
0.0200	0.1465	0.1551
0.0250	0.1882	0.2014

Tabla 3.10: Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 1.

β	Pot $T_{2/3}$	Pot T_{CA}
-0.0250	0.3426	0.3443
-0.0200	0.2324	0.2336
-0.0150	0.1477	0.1483
-0.0100	0.0900	0.0905
-0.0050	0.0595	0.0599
0.0000	0.0477	0.0493
0.0050	0.0565	0.0594
0.0100	0.0786	0.0840
0.0150	0.1132	0.1212
0.0200	0.1568	0.1684
0.0250	0.2044	0.2197

Tabla 3.12: Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 2.

β	Pot $T_{2/3}$	Pot T_{CA}
-0.0250	0.5320	0.5318
-0.0200	0.3650	0.3646
-0.0150	0.2209	0.2204
-0.0100	0.1202	0.1200
-0.0050	0.0662	0.0663
0.0000	0.0495	0.0503
0.0050	0.0629	0.0651
0.0100	0.1043	0.1091
0.0150	0.1651	0.1718
0.0200	0.2427	0.2514
0.0250	0.3274	0.3377

Tabla 3.14: Protencia de los estadísticos $T_{2/3}$ y T_{CA} en el contraste bilateral. Escenario 3.

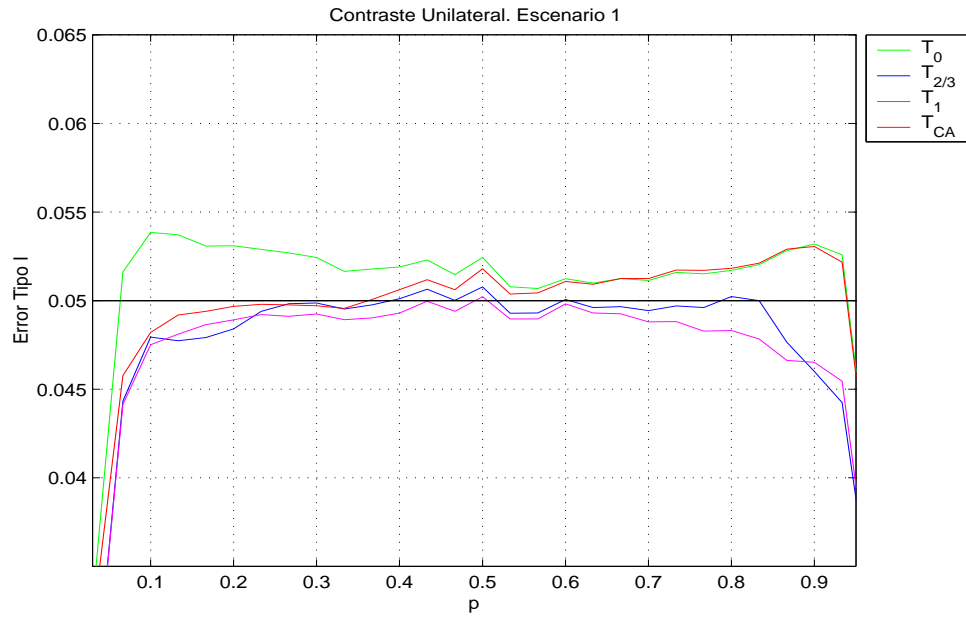


Figura 3.2: Probabilidad de error de tipo I para el contraste unilateral. Escenario 1.

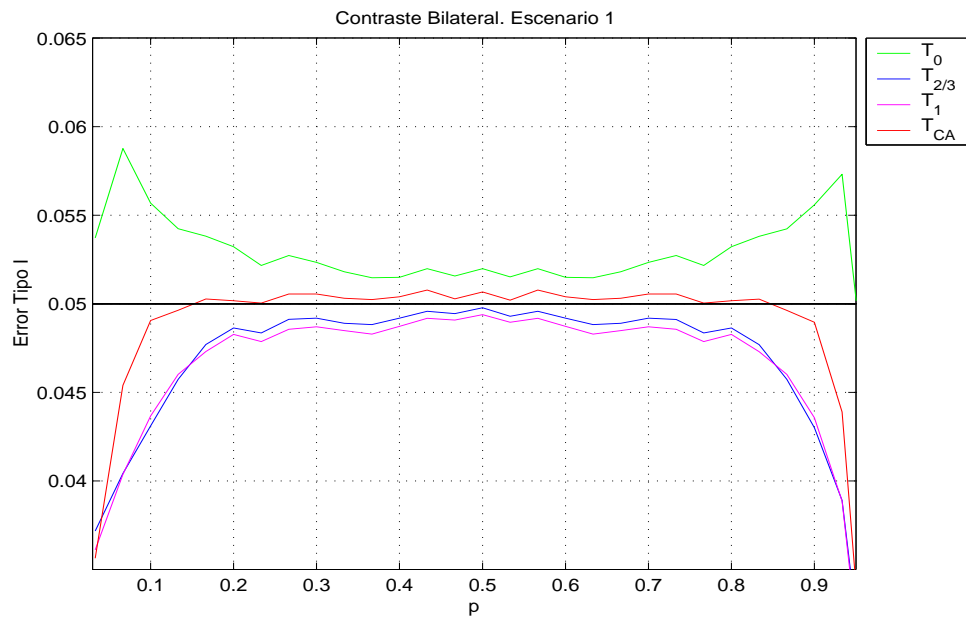


Figura 3.3: Probabilidad de error de tipo I para el contraste bilateral. Escenario 1.

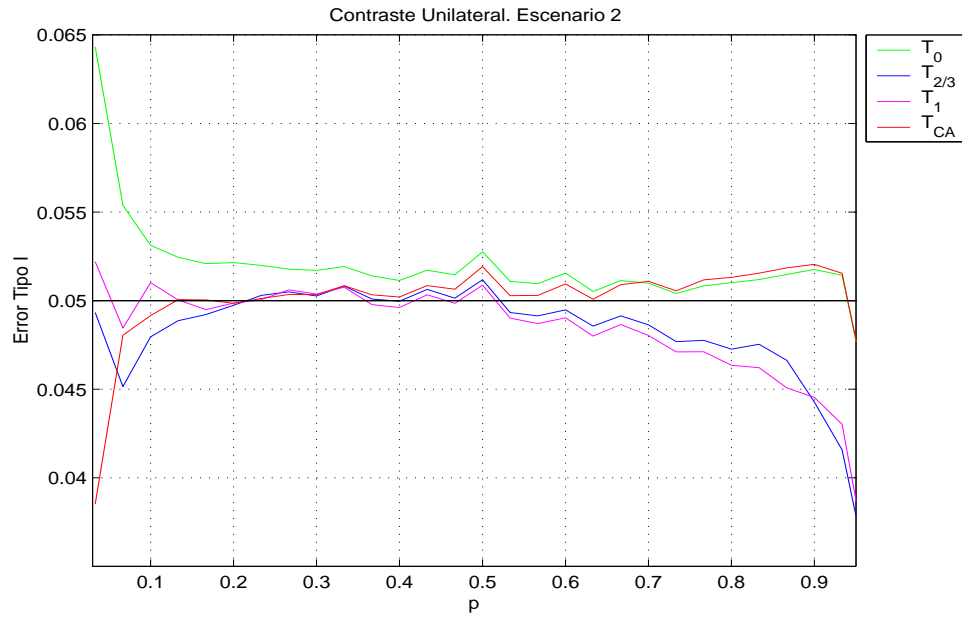


Figura 3.4: Probabilidad de error de tipo I para el contraste unilateral. Escenario 2.

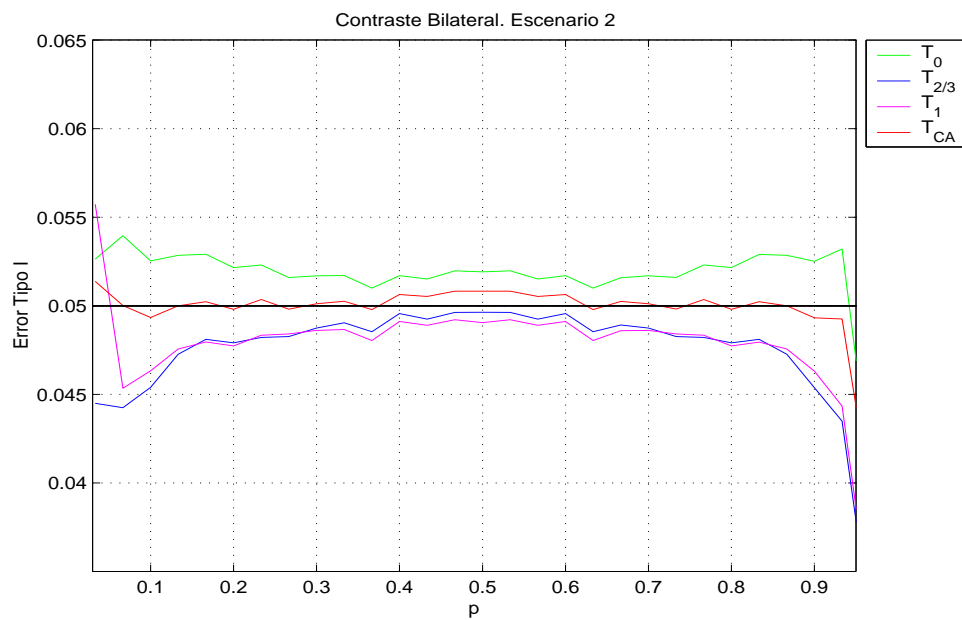


Figura 3.5: Probabilidad de error de tipo I para el contraste bilateral. Escenario 2.

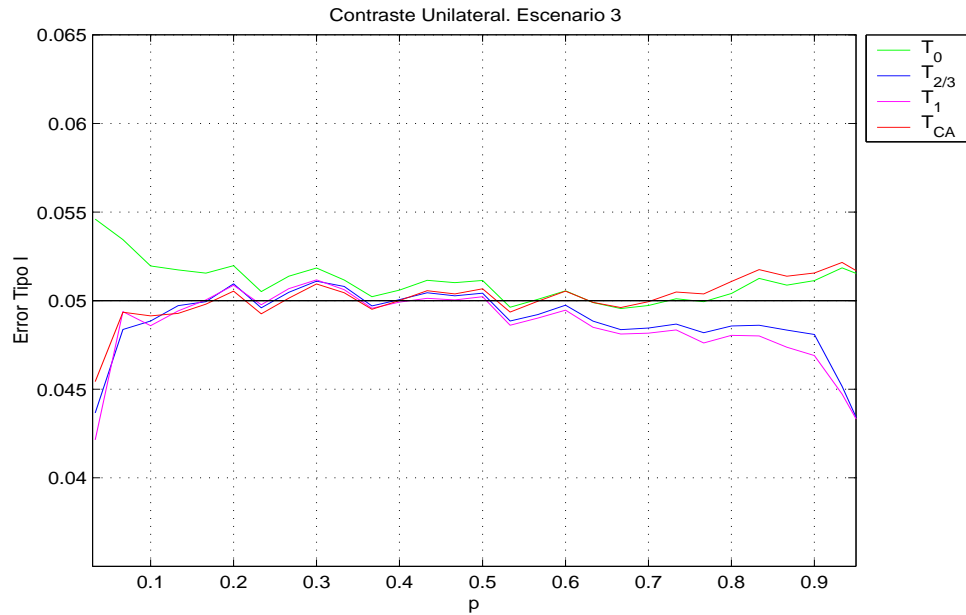


Figura 3.6: Probabilidad de error de tipo I para el contraste unilateral. Escenario 3.

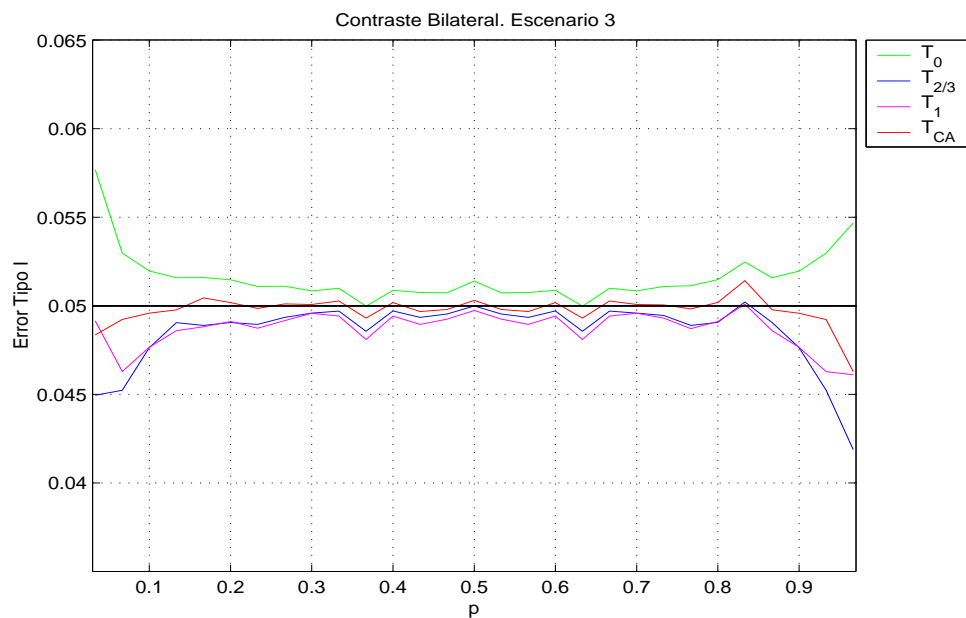


Figura 3.7: Probabilidad de error de tipo I para el contraste bilateral. Escenario 3.

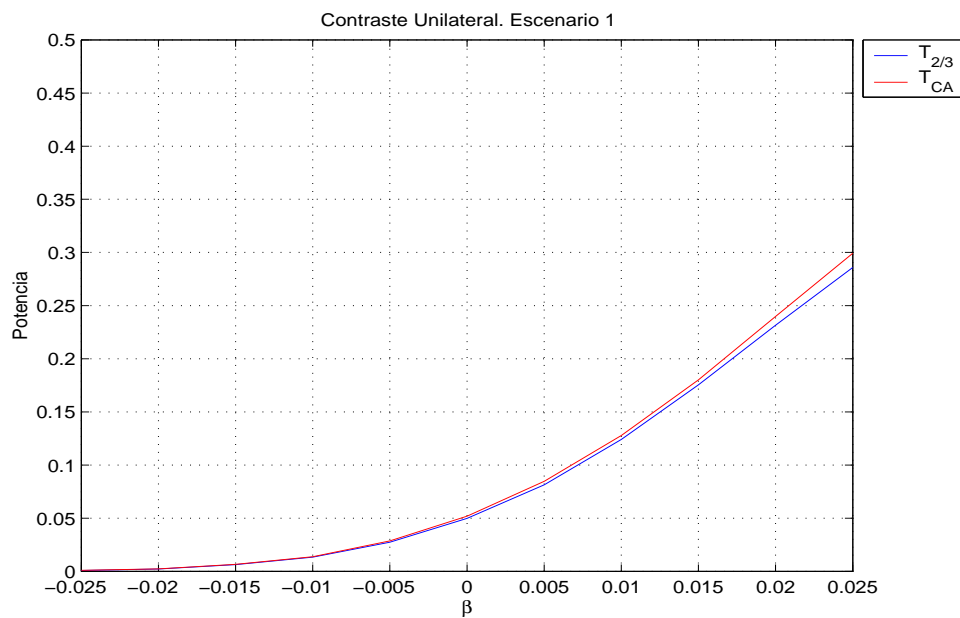


Figura 3.8: Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste unilateral. Escenario 1.

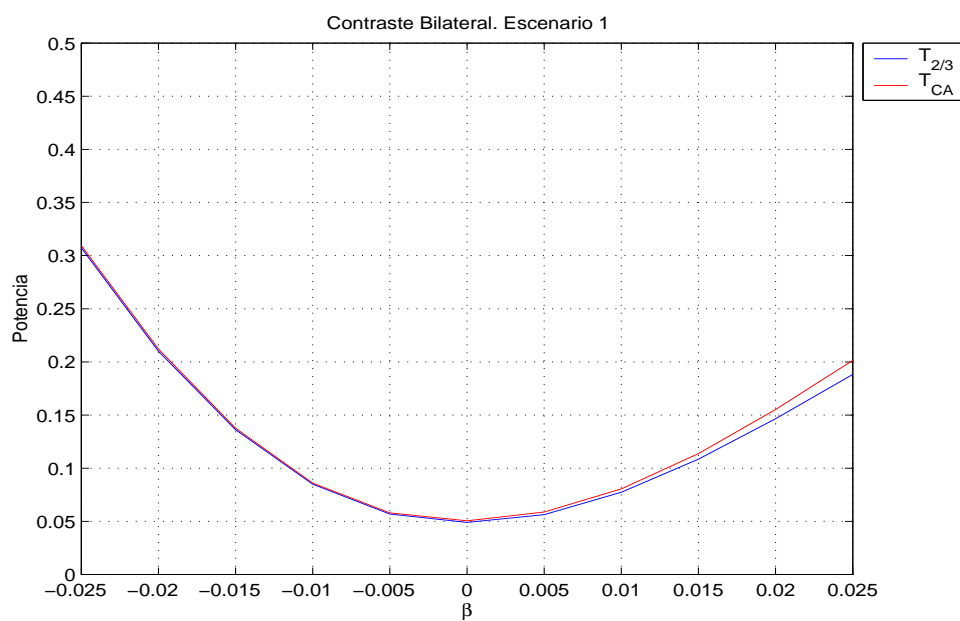


Figura 3.9: Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste bilateral. Escenario 1.

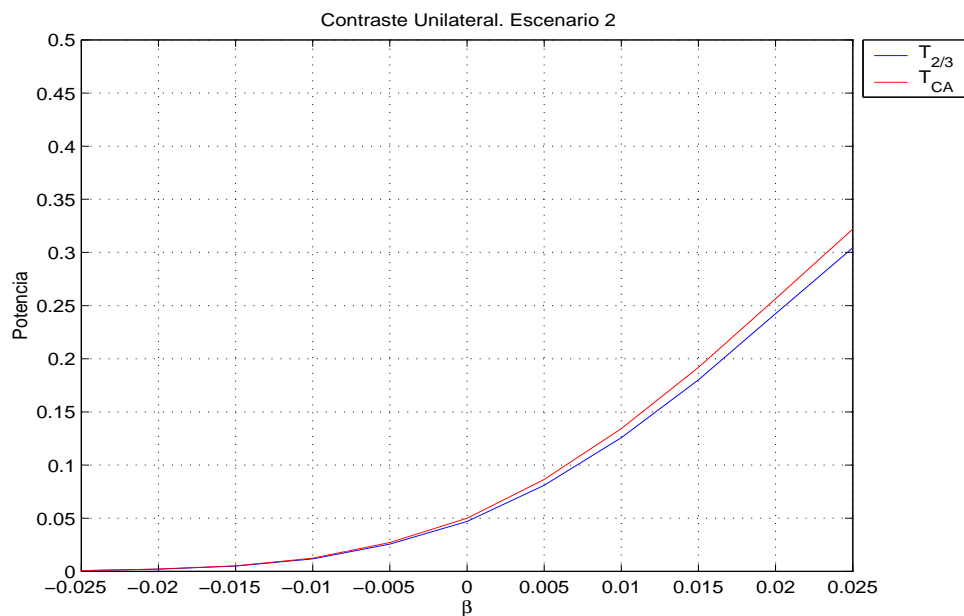


Figura 3.10: Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste unilateral. Escenario 2.

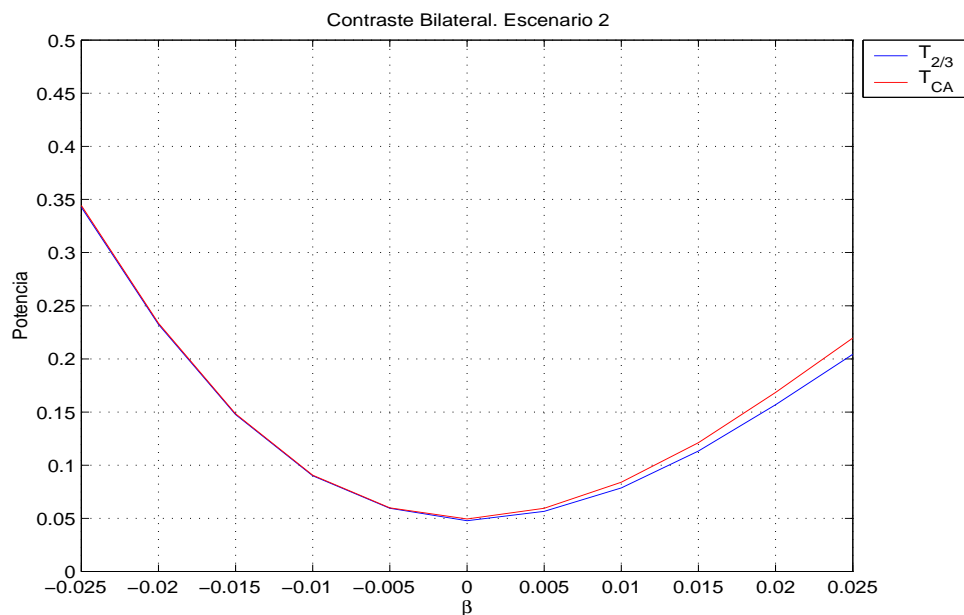


Figura 3.11: Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste bilateral. Escenario 2.

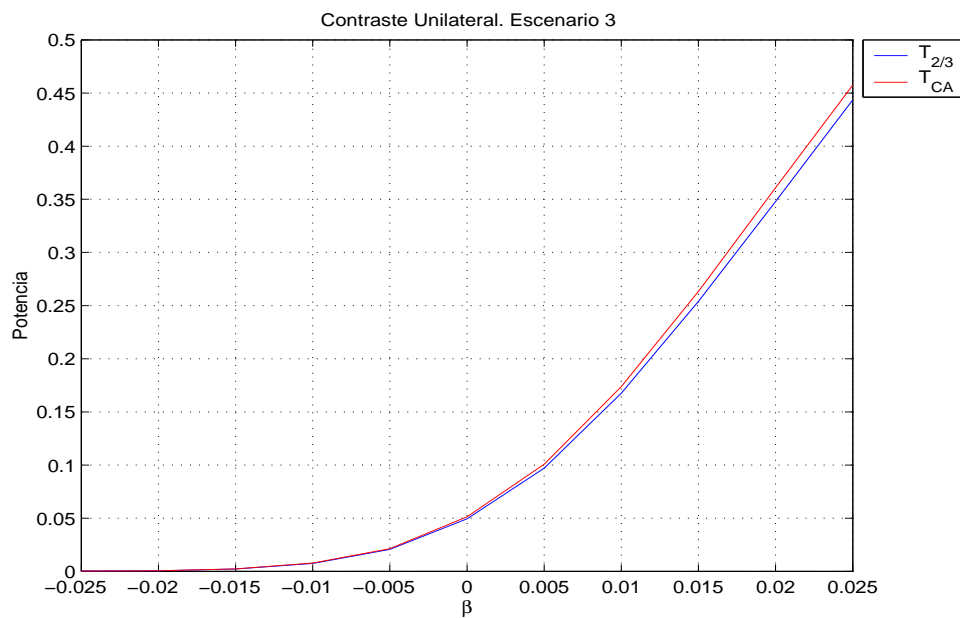


Figura 3.12: Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste unilateral. Escenario 3.

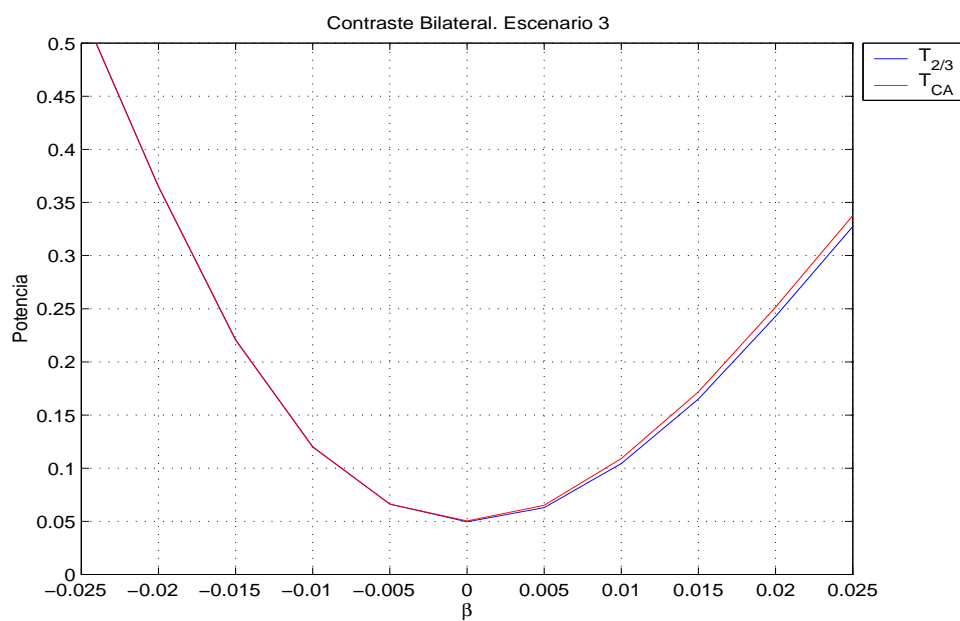


Figura 3.13: Potencia de los estadísticos propuestos para el contraste bilateral. Escenario 3.

Claramente, en las gráficas de las Figuras 3.2-3.7, se observa que el estadístico del cociente de verosimilitudes $T_0 = G^2$ y el estadístico de Cochran-Armitage $T_{n,CA}$ suelen permanecer por encima del nivel de significación fijado $\alpha = 0.05$, incluso el comportamiento del estadístico de Cochran-Armitage $T_{n,CA}$ es mejor que el comportamiento del estadístico del cociente de verosimilitudes G^2 , ya que permanece más próximo al nivel de significación teórico. Por otro lado, los estadísticos $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$, con $\lambda \in \{\frac{2}{3}, 1\}$ suelen permanecer por debajo del nivel de significación fijado $\alpha = 0.05$, pero el estadístico $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$ con $\lambda = \frac{2}{3}$ sin duda está más próximo al nivel de significación teórico. Se han tenido en cuenta más valores de λ pero no se han encontrado mejores valores que los considerados $\lambda \in \{\frac{2}{3}, 1\}$.

Las Figuras 3.8-3.13 representan gráficamente la potencia, en función del parámetro β del modelo logit, con la finalidad de comparar los mejores estadísticos estudiados anteriormente (en cuanto al error de tipo I se refiere), es decir, $T_{2/3}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$ y $T_{n,CA}$. La forma de la función de potencia es bastante similar en los tres escenarios considerados, tanto para el contraste unilateral (Figuras 3.8, 3.10 y 3.12), como para el contraste bilateral (Figuras 3.9, 3.11 y 3.13). En general, la curva de potencia del estadístico de Cochran-Armitage $T_{n,CA}$ está ligeramente por encima de la curva de potencia del estadístico $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$, como suele ocurrir con los estadísticos que tienen más alto el error de tipo I, y en este caso, la probabilidad de error de tipo I del estadístico de Cochran-Armitage $T_{n,CA}$ estaba por encima del nivel de significación fijado $\alpha = 0.05$, mientras que la probabilidad de error de tipo I del estadístico $T_{\frac{2}{3}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$ estaba por debajo del nivel de significación fijado $\alpha = 0.05$, por lo tanto la probabilidad de error de tipo I del estadístico de Cochran-Armitage $T_{n,CA}$ es mayor que la probabilidad de error de tipo I del estadístico $T_{2/3}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\alpha}, 0), \mathbf{p}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}))$.

Como se podía esperar, el contraste unilateral tiene mayor función de potencia para valores positivos del parámetro β , pues el contraste unilateral planteado en términos de β es $H_0 : \beta \leq 0$ frente a $H_1 : \beta > 0$.

Sin embargo, el contraste bilateral tiene mayor función de potencia para valores negativos del parámetro β , ya que el contraste bilateral planteado en términos de β es $H'_0 : \beta = 0$ frente a $H'_1 : \beta \neq 0$.

Por lo tanto, se recomienda el contraste unilateral cuando hay tendencia monótona en una determinada dirección (por ejemplo, si existe tendencia creciente en las probabilidades), mientras que el contraste bilateral resulta más útil cuando existe crecimiento o decrecimiento en la relación dosis-respuesta entre una variable respuesta Y y la dosis X del modelo.

Capítulo 4

Estadísticos phi-divergencia en tablas

$2 \times J$

4.1. Planteamiento del problema

Se comenzará con un ejemplo para motivar el problema que se abordará en este Capítulo. En la Tabla 4.1 se muestran los resultados de un experimento llevado a cabo por Doll y Pygott (1952) para señalar los factores que influyen en el ritmo de curación de las úlceras de estómago. Para ello se comparan dos grupos de tratamientos. Se observó la evolución de los pacientes del grupo 2, mientras permanecían hospitalizados, durante cuatro semanas. Durante las dos primeras semanas se les suministraba una dieta bastante estricta, mientras que en las dos últimas semanas se les permitió una dieta más amplia. Una vez realizados los exámenes radiológicos, se dio el alta a los pacientes, recomendándoles mantener controlada la dieta e incorporarse al trabajo una vez que se sintieran en condiciones de hacerlo. Los pacientes del grupo 1 no fueron hospitalizados, pero se les recomendaba mantener un control en la dieta de forma similar a los pacientes del grupo 2 una vez finalizada su estancia hospitalaria.

En la Tabla 4.1 se presentan los resultados que aparecen en Doll y Pygott (1952, Tabla IV) y resumen la situación de los pacientes a los tres meses de comenzar ambos tratamientos. Con este experimento se desea saber si el tratamiento para la úlcera de estómago (Tratamiento 2) es mejor que el control (Tratamiento 1).

	Ninguna	Débil	Alta	Total
Tratamiento 1 (Control)	11	8	8	5
Tratamiento 2 (Tratamiento)	6	4	10	12

Tabla 4.1: Mejorías en la úlcera.

Para modelizar el problema anterior se denotará por Y la variable respuesta ordinal y por X la variable explicativa con dos categorías. La variable Y toma los valores 1 (Ninguna), 2 (Débil), 3 (Alta) y 4 (Total), que representan los distintos niveles de curación, ordenados de menor a mayor capacidad para curar la úlcera. La variable X toma los valores 1 y 2 de acuerdo con el grupo de tratamiento, 1 es el del control y 2 es el grupo de tratamiento en sí mismo. En la Tabla 4.2 se presentan las probabilidades condicionadas teóricas.

	Ninguna	Débil	Alta	Total
Tratamiento 1	$P(Y = 1/X = 1)$	$P(Y = 2/X = 1)$	$P(Y = 3/X = 1)$	$P(Y = 4/X = 1)$
Tratamiento 2	$P(Y = 1/X = 2)$	$P(Y = 2/X = 2)$	$P(Y = 3/X = 2)$	$P(Y = 4/X = 2)$

Tabla 4.2: Probabilidades condicionadas teóricas.

En base a estas probabilidades se formulará la proposición “el Tratamiento 2 es mejor que el Tratamiento 1”. Inicialmente, se considerará que el Tratamiento 2 es, al menos tan bueno como el Tratamiento 1 si el cociente

$$\frac{P(Y = j/X = 2)}{P(Y = j/X = 1)}$$

se incrementa cuando aumenta la categoría de respuesta j , es decir:

$$\frac{P(Y = j/X = 2)}{P(Y = j/X = 1)} \leq \frac{P(Y = j + 1/X = 2)}{P(Y = j + 1/X = 1)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

y el Tratamiento 2 es mejor que el Tratamiento 1 si se cumple al menos con una desigualdad estricta.

Si se supone que el Tratamiento 2 es al menos tan bueno como el Tratamiento 1, es decir si se cumple (4.1), ¿hay alguna evidencia para sustentar la afirmación de que el Tratamiento 2 es

mejor? En este caso la hipótesis nula y la alternativa se pueden formular mediante:

$$H_0 : \frac{P(Y = j/X = 2)}{P(Y = j/X = 1)} = \frac{P(Y = j + 1/X = 2)}{P(Y = j + 1/X = 1)}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.2a)$$

$$H_1 : \frac{P(Y = j/X = 2)}{P(Y = j/X = 1)} \leq \frac{P(Y = j + 1/X = 2)}{P(Y = j + 1/X = 1)}, \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{y}$$

$$\frac{P(Y = j/X = 2)}{P(Y = j/X = 1)} < \frac{P(Y = j + 1/X = 2)}{P(Y = j + 1/X = 1)}, \quad \text{para algún } j \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.2b)$$

La hipótesis nula significa que ambos tratamientos son igualmente efectivos, mientras que la hipótesis alternativa significa que el Tratamiento 2 es más efectivo que el Tratamiento 1.

Se supone a partir de ahora que j varía entre 1 y J con el fin de que los resultados sean totalmente generales.

Si se multiplican los lados izquierdo y derecho de (4.2a) y (4.2b) por

$$\left(\frac{P(Y = j/X = 2)}{P(Y = j/X = 1)} \right)^{-1}$$

y se supone que j varía entre 1 y J , las hipótesis (4.2a) y (4.2b) se pueden escribir en la forma

$$H_0 : \vartheta_j^* = 1 \quad \forall j \in J^*, \quad H_1 : \vartheta_j^* \geq 1 \quad \forall j \in J^* \quad \text{y} \quad \vartheta_j^* > 1 \quad \text{para algún } j \in J^*, \quad (4.3)$$

$J^* = \{1, \dots, J - 1\}$, J es el número de categorías ordenadas para la variable respuesta Y ,

$$\vartheta_j^* = \frac{\pi_{1j}\pi_{2,j+1}}{\pi_{2j}\pi_{1,j+1}}, \quad j \in J^*, \quad (4.4)$$

son los “ odds ratio ” o “razón de productos cruzados” locales asociados a la categoría de respuesta j , y

$$\pi_{ij} = P(Y = j/X = i). \quad (4.5)$$

Es decir bajo la hipótesis alternativa se supone que se verifica el orden estocástico de razón de verosimilitudes considerado en el Capítulo 1 entre los dos tratamientos.

La inferencia estadística no-paramétrica asociada al orden estocástico de razón de verosimilitudes para dos muestras multinomiales se presentó por primera vez en Dykstra y otros (1995) utilizando únicamente un estadístico de contraste, el del cociente de verosimilitudes. En la bibliografía referida a los distintos tipos de ordenaciones no existe claramente una ordena-

ción considerada como más apropiada para comparar dos tratamientos con variables categóricas ordinales.

En el muestreo de dos multinomiales independientes, la ordenación estocástica de razón de verosimilitudes es el tipo de ordenación más restringido; por ejemplo, si se verifica la ordenación de razón de verosimilitudes, entonces también se verifica la ordenación estocástica simple. Dardanoni y Forcina (1998) propusieron un nuevo método para hacer inferencia estadística asociada a diferentes tipos de ordenaciones de una forma unificada. En dicha publicación se reparametrizó el modelo inicial para unificar y comparar distintos tipos de ordenaciones. Se pueden considerar diferentes tipos de ordenaciones como modelos anidados y la ordenación del cociente de verosimilitudes es la más parsimoniosa. La ventaja de los modelos anidados es que los modelos más restringidos tienden a ser más potentes para las alternativas que pertenecen a las alternativas más restringidas.

En este marco, a lo largo de este Capítulo se presentan nuevos estadísticos de contraste que proporcionan una potencia sustancialmente mejor para contrastar (4.2a) frente a (4.2b) en relación al clásico del cociente de verosimilitudes. La primera intención de esta investigación es modelizar el orden de razón de verosimilitudes asociado a un modelo no-paramétrico, como en Dardanoni y Forcina, pero la especificación del modelo a través de un modelo loglineal saturado es sustancialmente diferente.

Como se indicó en la Tabla 4.2, las probabilidades condicionadas π_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, \dots, J$) dadas en (4.5) se pueden representar mediante una matriz con 2 filas que representan las categorías de X y de J columnas que representan las categorías de Y , es decir mediante una matriz $2 \times J$:

$$\mathbf{\Pi} = (\boldsymbol{\pi}_1^T, \boldsymbol{\pi}_2^T)^T$$

siendo $\boldsymbol{\pi}_i = (\pi_{i1}, \dots, \pi_{iJ})^T$, $i = 1, 2$. Se supondrá que $\boldsymbol{\pi}_i$, $i = 1, 2$ representan las probabilidades de dos variables aleatorias multinomiales \mathbf{N}_i , $i = 1, 2$, de forma que:

$$\mathbf{N}_i = (N_{i1}, \dots, N_{iJ})^T \sim \mathcal{M}(n_i, \boldsymbol{\pi}_i) \quad i = 1, 2.$$

Los tamaños n_i , $i = 1, 2$ están prefijados y $\boldsymbol{\pi}_i > \mathbf{0}_J$. Luego la distribución de probabilidad del vector aleatorio $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_1^T, \mathbf{N}_2^T)^T$ es Producto-Multinomial.

Conviene señalar que aunque inicialmente se pueda pensar en una cierta similitud entre el modelo considerado en el Capítulo 2 y el estudiado en este Capítulo, al tratarse en el primer caso de tablas de contingencia $I \times 2$ y en el segundo caso de tablas de contingencia $2 \times J$, esto

no es así ya que en el Capítulo 2 el modelo bajo estudio se sustenta en I poblaciones binomiales y en el estudiado en este Capítulo en dos poblaciones multinomiales.

Sea

$$p_{ij} = P(X = i, Y = j), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, J \quad (4.6)$$

la distribución de probabilidad conjunta. De la definición de probabilidad condicionada se tiene que $P(X = i, Y = j) = P(Y = j/X = i)P(X = i)$ y por lo tanto

$$p_{ij} = \pi_{ij} \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, J \quad (4.7)$$

con $n = n_1 + n_2$. También se pueden expresar los “odds ratio” (razón de productos cruzados) locales asociados a la categoría de respuesta j (4.4) en función de las probabilidades conjuntas de la siguiente manera

$$\vartheta_j^* = \frac{p_{1j}p_{2,j+1}}{p_{2j}p_{1,j+1}}, \quad \forall j \in J^*. \quad (4.8)$$

Por motivos de conveniencia se denotará por $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)^T$ la matriz de dimensión $2 \times J$ donde la primera fila es \mathbf{p}_1 y la segunda \mathbf{p}_2 , con lo cual $\mathbf{p} = \text{vec}(\mathbf{P}^T) = (\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T)^T$.

Puesto que la función de verosimilitud asociada al modelo \mathbf{N} viene dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{N}; \mathbf{p}) = k \prod_{j=1}^J p_{1j}^{N_{1j}} p_{2j}^{N_{2j}},$$

siendo $k = \frac{n_1! n_2!}{\prod_{j=1}^J (N_{1j}! N_{2j}!)}$, el núcleo del logaritmo de la función de verosimilitud es:

$$\ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^J (N_{1j} \log p_{1j} + N_{2j} \log p_{2j}). \quad (4.9)$$

En notación matricial, el contraste de hipótesis dado en (4.3) se puede escribir en la forma:

$$H_0 : \boldsymbol{\vartheta}^* = \mathbf{1}_{J-1} \text{ frente a } H_1 : \boldsymbol{\vartheta}^* \not\geq \mathbf{1}_{J-1}, \quad (4.10)$$

donde $\boldsymbol{\vartheta}^* = (\vartheta_1^*, \dots, \vartheta_{J-1}^*)^T$.

Se observa que (4.10) involucra $J - 1$ restricciones no-lineales sobre \mathbf{p} . La clave del procedimiento que se tiene mediante el modelo loglineal saturado asociado a \mathbf{p} , consiste en expresar el

contraste dado en (4.10) en términos de esta nueva reparametrización. Con esta reparametrización las restricciones serán lineales con respecto a los nuevos parámetros.

El modelo loglineal saturado asociado a \mathbf{p} con parametrización canónica viene dado por

$$\log p_{ij} = u + u_{1(i)} + \theta_{2(j)} + \theta_{12(ij)}, \quad (4.11)$$

con las condiciones de identificabilidad

$$u_{1(2)} = 0, \quad \theta_{2(J)} = 0, \quad \theta_{12(1J)} = 0, \quad \theta_{12(2j)} = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (4.12)$$

Luego los parámetros, inicialmente, del modelo son

$$(u, u_{1(1)}, \theta_{2(1)}, \dots, \theta_{2(J-1)}, \theta_{12(11)}, \dots, \theta_{12(1, J-1)}).$$

Las condiciones de identificabilidad pueden darse de muy diversas formas, las dadas en (4.12) hacen más sencillos los cálculos. Se han usado condiciones similares en Lang (1996, ejemplos de la Sección 7) y Silvapulle y Sen (2005, ejercicio 6.25 en la página 345).

La siguiente proposición establece que tanto u como $u_{1(1)}$ son parámetros redundantes.

Proposición 4 *Los parámetros no redundantes del modelo loglineal (4.11) son $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_2^T, \boldsymbol{\theta}_{12}^T)^T$ con*

$$\boldsymbol{\theta}_{12} = (\theta_{12(11)}, \dots, \theta_{12(1, J-1)})^T, \quad y \quad \boldsymbol{\theta}_2 = (\theta_{2(1)}, \dots, \theta_{2(J-1)})^T$$

Demostración. El término u se puede expresar en función de $\boldsymbol{\theta}$ ya que debe cumplirse la condición $\sum_{j=1}^J p_{2j} = \frac{n_2}{n}$, es decir,

$$\log p_{2j} = u + \theta_{2(j)} \quad (4.13)$$

ya que $u_{1(2)} = 0$ y $\theta_{12(2j)} = 0$ en $\log p_{2j} = u + u_{1(2)} + \theta_{2(j)} + \theta_{12(2j)}$. De donde

$$p_{2j} = e^u e^{\theta_{2(j)}} \quad (4.14)$$

y sumando en j y teniendo en cuenta que $\theta_{2(J)} = 0$ se llega a

$$\frac{n_2}{n} = \sum_{j=1}^J p_{2j} = \sum_{j=1}^J e^u e^{\theta_{2(j)}} = e^u \left(\sum_{j=1}^{J-1} e^{\theta_{2(j)}} + e^0 \right),$$

y se tiene

$$e^u = \frac{n_2}{n \left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} e^{\theta_{2(j)}} \right)},$$

por lo tanto

$$u = u(\boldsymbol{\theta}) = \log n_2 - \log n - \log \left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} e^{\theta_{2(j)}} \right). \quad (4.15)$$

En relación a $u_{1(1)}$ se expresará en función de $\boldsymbol{\theta}$ teniendo en cuenta que $\sum_{j=1}^J p_{1j} = \frac{n_1}{n}$. En efecto, como $\log p_{1j} = u + u_{1(1)} + \theta_{2(j)} + \theta_{12(1j)}$ se tiene que

$$p_{1j} = e^u e^{u_{1(1)}} e^{\theta_{2(j)}} e^{\theta_{12(1j)}}. \quad (4.16)$$

Sumando en j y teniendo en cuenta que $\sum_{j=1}^J p_{1j} = \frac{n_1}{n}$ se verifica que

$$\frac{n_1}{n} = e^u e^{u_{1(1)}} \sum_{j=1}^J e^{\theta_{2(j)}} e^{\theta_{12(1j)}}.$$

Tomando logaritmos,

$$\log \left(\frac{n_1}{n} \right) = u + u_{1(1)} + \log \left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} e^{\theta_{2(j)} + \theta_{12(1j)}} \right).$$

Sustituyendo el valor de u obtenido en (4.15) se tiene

$$\log n_1 - \log n = \log n_2 - \log n - \log \left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} e^{\theta_{2(j)}} \right) + u_{1(1)} + \log \left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} e^{\theta_{2(j)} + \theta_{12(1j)}} \right).$$

Despejando $u_{1(1)}$ se llega a

$$u_{1(1)} = u_{1(1)}(\boldsymbol{\theta}) = \log \frac{n_1}{n_2} + \log \frac{1 + \sum_{j=1}^{J-1} e^{\theta_{2(j)}}}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} e^{\theta_{2(j)} + \theta_{12(1j)}}}. \quad (4.17)$$

■

Observación 3 El modelo loglineal saturado (4.11) se puede expresar en notación matricial mediante

$$\log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}_0 \mathbf{u} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}, \quad (4.18)$$

el vector $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$ es un vector de dimensión $2J$ cuyas componentes p_{ij} son las dadas en (4.7).

La matriz

$$\mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_J$$

es una matriz de dimensión $2J \times 2$, donde \otimes es el producto de Kronecker.

La matriz de diseño del modelo \mathbf{W} es una matriz de rango completo de tamaño $2J \times 2(J-1)$, tal que

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

La condición ϑ_j^* se puede expresar mediante $J-1$ restricciones lineales:

$$\theta_{12(1j)} - \theta_{12(2j)} - \theta_{12(1,j+1)} + \theta_{12(2,j+1)} \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, J-1\}, \quad (4.20)$$

como consecuencia de

$$\log \vartheta_j^* = \log p_{1j} - \log p_{2j} - \log p_{1,j+1} + \log p_{2,j+1} = \theta_{12(1j)} - \theta_{12(2j)} - \theta_{12(1,j+1)} + \theta_{12(2,j+1)}.$$

Las restricciones (4.20), en notación matricial, se pueden expresar por

$$\mathbf{R} \boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{J-1},$$

siendo

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{G}_{J-1} = (\mathbf{0}_{(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{J-1}), \quad (4.21)$$

\mathbf{e}_a es el a -ésimo vector unitario de la base canónica y \mathbf{G}_h es la matriz de dimensión $h \times h$ que tiene 1's en la diagonal principal, -1 's en la diagonal superior y los elementos restantes de la matriz son cero.

Las restricciones tienen una expresión incluso más sencilla mediante $\mathbf{G}_{J-1} \boldsymbol{\theta}_{12} \geq \mathbf{0}_{J-1}$, ya que el único parámetro que interviene realmente es $\boldsymbol{\theta}_{12}$. Obsérvese que $\boldsymbol{\theta}_{1(1)}$ y $\boldsymbol{\theta}_2$ son parámetros redundantes y por lo tanto no intervienen de forma activa en las restricciones.

Proposición 5 *El núcleo del logaritmo de la función de verosimilitud dado en (4.9) puede expresarse en la forma*

$$\ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}^T \log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}^T (\mathbf{W}_0 \mathbf{u} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}) = nu(\boldsymbol{\theta}) + n_1 u_{1(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{N}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}. \quad (4.22)$$

Demostración. Al ser

$$\mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_J = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_J & \mathbf{1}_J \\ \mathbf{1}_J & \mathbf{0}_J \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\mathbf{N}^T \mathbf{W}_0 = (\mathbf{N}_1^T, \mathbf{N}_2^T) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_J & \mathbf{1}_J \\ \mathbf{1}_J & \mathbf{0}_J \end{pmatrix} = (n, n_1),$$

luego

$$\mathbf{N}^T \mathbf{W}_0 \mathbf{u} = (n, n_1) \begin{pmatrix} u(\boldsymbol{\theta}) \\ u_{1(1)}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = nu(\boldsymbol{\theta}) + n_1 u_{1(1)}(\boldsymbol{\theta}).$$

El núcleo de la función de verosimilitud con la nueva parametrización se obtiene sustituyendo \mathbf{p} por $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$ en (4.9), es decir:

$$\ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}^T \log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}^T (\mathbf{W}_0 \mathbf{u} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}) = nu(\boldsymbol{\theta}) + n_1 u_{1(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{N}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}.$$

■

Con la introducción de la matriz \mathbf{R} , las hipótesis formuladas en (4.10) se pueden expresar mediante

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{J-1} \text{ frente a } H_1 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{J-1} \text{ y } \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}_{J-1}. \quad (4.23)$$

Por otro lado, el espacio paramétrico bajo la hipótesis nula H_0 es $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2(J-1)} : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{J-1}\}$ y el estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ en Θ_0 es $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta})$. El espacio paramétrico es $\Theta = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2(J-1)} : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{J-1}\}$ y el estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ en Θ es $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta})$. A partir de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ se pueden obtener los estimadores de $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$ cuando $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ y cuando $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$, sin más que aplicar la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud (EMV), estimando primero $\boldsymbol{\theta}$ y después sustituyendo en $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$. Sin embargo $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ tiene una expresión explícita. El siguiente teorema nos da la forma explícita de $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$.

Teorema 5 Bajo la hipótesis nula dada en (4.23) las componentes del vector $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ vienen dadas por

$$p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{n_i(N_{1j} + N_{2j})}{n^2}, \quad j = 1, \dots, J; \quad i = 1, 2, \quad (4.24)$$

donde $n_i = \sum_{j=1}^J N_{ij}$.

Demostración. Bajo la hipótesis nula

$$\frac{\pi_{1j}\pi_{2,j+1}}{\pi_{2j}\pi_{1,j+1}} = 1, \quad j \in J^*$$

luego

$$\frac{\pi_{1j}}{\pi_{2j}} = \frac{\pi_{1,j+1}}{\pi_{2,j+1}} \quad j \in J^*$$

y por tanto

$$\frac{\pi_{11}}{\pi_{21}} = \frac{\pi_{12}}{\pi_{22}} = \dots = \frac{\pi_{1J}}{\pi_{2J}}.$$

Sea c el valor tal que

$$\frac{\pi_{1j}}{\pi_{2j}} = c \quad j \in \{1, \dots, J\}$$

entonces

$$\pi_{1j} = c\pi_{2j} \quad j \in \{1, \dots, J\}.$$

Sumando en j se tiene que $c = 1$. Luego

$$p_{1j} = \pi_{1j} \frac{n_1}{n} = p_{2j} = \pi_{2j} \frac{n_2}{n}.$$

El estimador de máxima verosimilitud de π_{1j} se obtendrá mediante la maximización de

$$\ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}) = k \prod_{j=1}^J p_{1j}^{N_{1j}+N_{2j}} = k \prod_{j=1}^J \left(\frac{n_1}{n}\right)^{N_{1j}+N_{2j}} \pi_{1j}^{N_{1j}+N_{2j}}$$

en π_{1j} con la restricción de que

$$\sum_{j=1}^J \pi_{1j} = 1.$$

Se considera la función

$$L(\boldsymbol{\pi}; \lambda) = \sum_{j=1}^J (N_{1j} + N_{2j}) \log(\pi_{1j}) + \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^J \pi_{1j}\right).$$

Se tiene,

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\pi}; \lambda)}{\partial \pi_{1j}} = \frac{N_{1j} + N_{2j}}{\pi_{1j}} - \lambda,$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\pi}; \lambda)}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{j=1}^J \pi_{1j}.$$

Luego,

$$N_{1j} + N_{2j} = \lambda \pi_{1j}$$

y sumando en j , se tiene

$$\sum_{j=1}^J N_{1j} + \sum_{j=1}^J N_{2j} = \lambda,$$

es decir

$$\lambda = n_1 + n_2.$$

Por tanto

$$\hat{\pi}_{1j} = \frac{N_{1j} + N_{2j}}{n_1 + n_2},$$

y en consecuencia

$$p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left(\frac{N_{1j} + N_{2j}}{n_1 + n_2} \right) \frac{n_1}{n}.$$

De forma similar a lo realizado con π_{1j} para obtener $p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, se puede argumentar con π_{2j} para obtener $p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$. ■

4.2. Estadísticos phi-divergencia

El estadístico del cociente de verosimilitudes, G^2 , para contrastar las hipótesis dadas en (4.10) equivalente al estadístico recogido en Dykstra y otros (1995), adaptado al modelo loglineal, es

$$G^2 = 2(\ell(\mathbf{N}; \tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\mathbf{N}; \hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2n \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J \bar{p}_{ij} \log \frac{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}, \quad (4.25)$$

donde $\bar{p}_{ij} = N_{ij}/n$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, J$. Teniendo en cuenta las condiciones de identificabilidad (4.12) y $\hat{u} = u(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\tilde{u} = u(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$, $\hat{u}_{1(1)} = u_{1(1)}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\tilde{u}_{1(1)} = u_{1(1)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ (ver fórmulas (4.15)-(4.17)) se

tiene la expresión

$$G^2 = 2n(\tilde{u} - \hat{u}) + 2n_1(\tilde{u}_{1(1)} - \hat{u}_{1(1)}) + 2\mathbf{N}^T \mathbf{W}(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

El estadístico de la ji-cuadrado, X^2 , para contrastar las hipótesis (4.10) es

$$X^2 = n \sum_{j=1}^J \left(\frac{(p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - p_{1j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))^2}{p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} + \frac{(p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - p_{2j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))^2}{p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right). \quad (4.26)$$

Teorema 6 *Se tiene que*

$$G^2 = 2n(d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))) \text{ y } X^2 = 2nd_{Pearson}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$$

siendo $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{N}/n = (\bar{p}_{11}, \dots, \bar{p}_{1J}, \bar{p}_{21}, \dots, \bar{p}_{2J})^T$ el vector de frecuencias relativas, d_{Kull} y $d_{Pearson}$ las medidas de divergencia de Kullback y Pearson definidas en (1.31) y (1.34).

Demostración. En efecto,

$$d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \sum_{j=1}^J \left(\bar{p}_{1j} \log \left(\frac{\bar{p}_{1j}}{p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) + \bar{p}_{2j} \log \left(\frac{\bar{p}_{2j}}{p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right)$$

y

$$d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) = \sum_{j=1}^J \left(\bar{p}_{1j} \log \left(\frac{\bar{p}_{1j}}{p_{1j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \right) + \bar{p}_{2j} \log \left(\frac{\bar{p}_{2j}}{p_{2j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right).$$

Restando se obtiene

$$d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) = \sum_{j=1}^J \left(\bar{p}_{1j} \log \left(\frac{p_{1j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) + \bar{p}_{2j} \log \left(\frac{p_{2j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\ell(\mathbf{N}; \tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\mathbf{N}; \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) &= \frac{1}{n} \left(\mathbf{N}^T \log \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{N}^T \log \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) = \frac{\mathbf{N}^T}{n} \left(\log \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \log \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) \\ &= \frac{\mathbf{N}^T}{n} \left(\log \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \log \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) = \bar{\mathbf{p}}^T \left(\log \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \log \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right). \end{aligned}$$

Operando la diferencia de logaritmos

$$\begin{aligned} \log \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \log \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= (\log p_{11}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \log p_{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \dots, \log p_{1J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \log p_{1J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \\ &\quad \log p_{21}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \log p_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \dots, \log p_{2J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \log p_{2J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))^T \\ &= \left(\log \left(\frac{p_{11}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right), \dots, \log \left(\frac{p_{1J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{1J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right), \log \left(\frac{p_{21}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right), \dots, \log \left(\frac{p_{2J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{2J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right)^T \end{aligned}$$

y haciendo la multiplicación

$$\begin{aligned} (\bar{p}_{11}, \dots, \bar{p}_{1J}, \bar{p}_{21}, \dots, \bar{p}_{2J}) \left(\log \left(\frac{p_{11}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right), \dots, \log \left(\frac{p_{1J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{1J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right), \log \left(\frac{p_{21}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right), \dots, \log \left(\frac{p_{2J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{2J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \right)^T \\ = \bar{p}_{11} \log \left(\frac{p_{11}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{11}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) + \dots + \bar{p}_{1J} \log \left(\frac{p_{1J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{1J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) + \bar{p}_{21} \log \left(\frac{p_{21}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{21}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) + \dots + \bar{p}_{2J} \log \left(\frac{p_{2J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{2J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) \end{aligned}$$

se deduce,

$$\frac{1}{n} \left(\ell(\mathbf{N}; \tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\mathbf{N}; \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) = d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})).$$

Por lo tanto,

$$G^2 = 2 \left(\ell(\mathbf{N}; \tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\mathbf{N}; \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) = 2n \left(d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) \right). \quad (4.27)$$

Resulta inmediato comprobar que se verifica

$$X^2 = 2nd_{Pearson}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})),$$

ya que

$$d_{Pearson}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - p_{1j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))^2}{p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} + \frac{(p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - p_{2j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))^2}{p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right)$$

y consecuentemente

$$2nd_{Pearson} = n \sum_{j=1}^J \left(\frac{(p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - p_{1j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))^2}{p_{1j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} + \frac{(p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - p_{2j}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))^2}{p_{2j}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right) = X^2. \quad (4.28)$$

■

Si, al igual que se hizo en Capítulos anteriores, se reemplazan en (4.27) y (4.28) las divergencias de Kullback y Pearson por medidas de ϕ -divergencia se tienen las siguientes familias de

estadísticos

$$T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\phi''(1)} (d_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))) \quad (4.29)$$

y

$$S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\phi''(1)} d_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})). \quad (4.30)$$

El estadístico del cociente de verosimilitudes se puede obtener a partir de (4.29) tomando $\phi(x) = x \log(x) - x + 1$ y el de la ji-cuadrado a partir de (4.30) tomando $\phi(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$.

4.3. Distribución asintótica de los estadísticos phi-divergencia

Antes de establecer el Teorema que da la distribución asintótica de las familias de estadísticos dadas en (4.29) y (4.30) será necesario dar una serie de resultados que se necesitarán en la demostración del mismo.

Se comenzará especificando la expresión de la matriz de información de Fisher para el modelo bajo consideración.

Proposición 6 *Las matrices de información de Fisher asociadas a los modelos loglineales con muestreo multinomial vienen dadas por*

$$\mathcal{I}_{F,i}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}_i^T (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\pi}_i^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{W}_i, \quad i = 1, 2,$$

donde \mathbf{D}_a es una matriz que contiene al vector \mathbf{a} en la diagonal.

Demostración. A partir del modelo loglineal con producto multinomial considerado en (4.11) se tiene

$$\log \left(\frac{n_i}{n} \pi_{ij}(\boldsymbol{\theta}) \right) = u + u_{1(i)} + \theta_{2(j)} + \theta_{12(ij)}$$

luego

$$\log \pi_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = -\log \frac{n_i}{n} + u + u_{1(i)} + \theta_{2(j)} + \theta_{12(ij)}.$$

En consecuencia los modelos loglineales con muestreo multinomial vienen dados por

$$\log \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) = u_1 + \theta_{2(j)} + \theta_{12(1j)}, \quad j = 1, \dots, J$$

o en forma matricial

$$\log \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta}) = u_1 \mathbf{1}_J + \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\theta}, \quad (4.31)$$

siendo $u_1 = -\log \frac{n_1}{n} + u + u_{1(1)}$. Análogamente,

$$\log \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) = u_2 + \theta_{2(j)} + \theta_{12(2j)}, \quad j = 1, \dots, J$$

o en forma matricial

$$\log \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\theta}) = u_2 \mathbf{1}_J + \mathbf{W}_2 \boldsymbol{\theta}, \quad (4.32)$$

siendo $u_2 = -\log \frac{n_2}{n} + u$. Dado un modelo loglineal con muestreo multinomial como el dado en (4.31) es sabido (ver página 225 en Pardo (2006)) que la matriz de información de Fisher viene dada mediante

$$\mathcal{I}_{F,1}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}),$$

siendo

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}^{-1/2} \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$$

y $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ para el modelo loglineal con muestreo multinomial dado en (4.31). Análogamente, para el modelo dado en (4.32).

Dado el vector

$$\log \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta}) = (\log \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}), \dots, \log \pi_{1J}(\boldsymbol{\theta}))$$

se tiene

$$\frac{\partial \log \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

Derivando en (4.31) se tiene,

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{1}_J \frac{1}{\mathbf{1}_J^T \exp\{\mathbf{W}_1 \boldsymbol{\theta}\}} \exp\{\mathbf{W}_1 \boldsymbol{\theta}\} \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= -\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} \mathbf{1}_J \boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}_1 + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} \mathbf{W}_1 = \\ &= -\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}_1 + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} \mathbf{W}_1 = \\ &= (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{W}_1). \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{I}_{F,1}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}_1^T (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}^{-1/2} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}^{-1/2} (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{W}_1.$$

Ahora bien,

$$(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}^{-1} (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta}),$$

puesto que

$$\begin{aligned} & (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})}^{-1} (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) \\ &= (\mathbf{I}_J \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{1}_J^T) (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) \\ &= \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta}) \\ &= \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta}) \\ &= \begin{pmatrix} \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) & -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{1J}(\boldsymbol{\theta}) \\ -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) & \pi_{22}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{22}(\boldsymbol{\theta})) & \dots & -\pi_{12}(\boldsymbol{\theta})\pi_{1J}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{1J}(\boldsymbol{\theta}) & -\pi_{12}(\boldsymbol{\theta})\pi_{1J}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \pi_{1J}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{1J}(\boldsymbol{\theta})) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seguidamente se verá la última igualdad. Se abordará la obtención de los términos a_{11} y a_{12} de la matriz final ya que para el resto se procede de forma similar.

Se tiene,

$$\begin{aligned} & (1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}), -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta}), \dots, -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) (\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})), -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}), \dots, -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{1J}(\boldsymbol{\theta}))^T \\ &= (1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}))\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) + \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}) [\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) + \dots + \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{1J}(\boldsymbol{\theta})] \\ &= (1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}))\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) + (\pi_{11}(\boldsymbol{\theta}))^2 [\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) + \dots + \pi_{1J}(\boldsymbol{\theta})] \\ &= (1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}))\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) + (\pi_{11}(\boldsymbol{\theta}))^2 (1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) \\ &= (1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) [\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) + (\pi_{11}(\boldsymbol{\theta}))^2] \\ &= (1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}))\pi_{11}(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}), -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta}), \dots, -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) (-\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}), \pi_{22}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{22}(\boldsymbol{\theta})), \dots, -\pi_{12}(\boldsymbol{\theta})\pi_{1J}(\boldsymbol{\theta}))^T \\
&= -(1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}))\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta})(1 - \pi_{12}(\boldsymbol{\theta})) + \dots + \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta})\pi_{1J}(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) [-(1 - \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})) - (1 - \pi_{12}(\boldsymbol{\theta})) + \dots + \pi_{1J}(\boldsymbol{\theta})] \\
&= \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) [-1 + \pi_{11}(\boldsymbol{\theta}) - 1 + \pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) + \dots + \pi_{1J}(\boldsymbol{\theta})] \\
&= \pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}) [-1] \\
&= -\pi_{11}(\boldsymbol{\theta})\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}$$

Análogamente se obtienen el resto de elementos de la matriz. Luego, se tiene

$$\mathcal{I}_{F,1}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}_1^T (D_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{W}_1.$$

Análogamente se puede establecer

$$\mathcal{I}_{F,2}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}_2^T (D_{\boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_2^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{W}_2.$$

■

Proposición 7 *La matriz de información de Fisher asociada al modelo loglineal (4.18), con muestreo producto multinomial, está dada por:*

$$\mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \mathbf{W}^T \begin{pmatrix} n_1 (D_{\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_1^T(\boldsymbol{\theta})) & \mathbf{0}_{J \times J} \\ \mathbf{0}_{J \times J} & n_2 (D_{\boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_2^T(\boldsymbol{\theta})) \end{pmatrix} \mathbf{W}. \quad (4.33)$$

Demostración. Para probar (4.33) basta tener en cuenta que la matriz de información de Fisher global de un muestreo producto multinomial se obtiene ponderando las matrices de información de Fisher asociadas a cada muestreo multinomial, $\mathcal{I}_{F,i}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta})$, $i = 1, 2$, es decir

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n_1}{n} \mathcal{I}_{F,1}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{n_2}{n} \mathcal{I}_{F,2}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}), \\
\mathcal{I}_{F,i}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{W}_i^T (D_{\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\pi}_i^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{W}_i, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \quad (4.34)$$

donde $\mathbf{W}^T = (\mathbf{W}_1^T, \mathbf{W}_2^T)$, $\log \mathbf{p}_1(\boldsymbol{\theta}) = u \mathbf{1}_J + u_{1(1)} \mathbf{1}_J + \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\theta}$ y $\log \mathbf{p}_2(\boldsymbol{\theta}) = u \mathbf{1}_J + \mathbf{W}_2 \boldsymbol{\theta}$. ■

Observación 4 *Si $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta_0$ y $\boldsymbol{\theta}_0$ es el verdadero valor del parámetro, se verifica que $\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0) = (\pi_1(\boldsymbol{\theta}_0), \dots, \pi_J(\boldsymbol{\theta}_0))^T$. El vector $\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}_0)$ es el vector de probabilidad cuyas componentes están dadas en (4.5) y se relaciona con el modelo loglineal a través de $\mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}_0) =$*

$\frac{n_i}{n} \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}_0)$, $i = 1, 2$. El vector $\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}_0)$ es fijo cuando $n \rightarrow \infty$ y se puede suponer que

$$\nu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, 2,$$

es fijo pero desconocido, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}) = \nu_i \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}_0)$, $i = 1, 2$.

Si se considera la matriz \mathbf{W} definida por $\mathbf{W}^T = (\mathbf{W}_1^T, \mathbf{W}_2^T)$ se tiene el resultado enunciado en (4.33).

Teniendo en cuenta la estructura del parámetro $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_{12}^T, \boldsymbol{\theta}_2^T)^T$, de componentes $\boldsymbol{\theta}_{12} = (\theta_{12(11)}, \dots, \theta_{12(1, J-1)})^T$ y $\boldsymbol{\theta}_2 = (\theta_{2(1)}, \dots, \theta_{2(J-1)})^T$, junto con la estructura específica de la matriz de diseño del modelo \mathbf{W} ya vista en (4.19), se puede establecer bajo la hipótesis nula, la forma específica que tiene la matriz de información de Fisher asociada al modelo loglineal con muestreo producto multinomial a la que se hacía referencia en (4.33), pero en su versión asintótica. Este resultado se recoge en el siguiente teorema y es aplicado en posteriores teoremas. Para ello se introduce el vector de dimensión $J - 1$

$$\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0) = (\pi_1(\boldsymbol{\theta}_0), \dots, \pi_{J-1}(\boldsymbol{\theta}_0))^T, \quad i = 1, 2$$

obtenido al eliminar la última componente del vector $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)$.

Teorema 7 La matriz de información de Fisher asintótica de $\boldsymbol{\theta}$, $\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta})$ para $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta_0$ viene dada por

$$\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0) & \nu_1 (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0)) \\ \nu_1 (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0)) & \nu_1 (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0)) \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Demostración. Al sustituir $\boldsymbol{\theta}$ por $\boldsymbol{\theta}_0$ y la expresión explícita de la matriz de diseño \mathbf{W} (4.19) en la expresión general de la matriz de información de Fisher para dos muestras multinomiales independientes con tamaños muestrales finitos (4.33), aplicando la propiedad del producto de Kronecker dada en (1.22) de Harville (2008, página 341) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix}^T \right) \left(\text{diag} \left\{ \frac{n_i}{n} \right\}_{i=1}^2 \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\theta}_0)) \right) \\
&\times \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{diag} \left\{ \frac{n_i}{n} \right\}_{i=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix}^T (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\theta}_0)) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Desarrollando las operaciones,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n_1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix}^T (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\theta}_0)) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \frac{n_1}{n} & \frac{n_2}{n} \\ \frac{n_1}{n} & \frac{n_2}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix}^T (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\theta}_0)) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{n_1+n_2}{n} & \frac{n_1}{n} \\ \frac{n_1}{n} & \frac{n_1}{n} \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0)) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n_1}{n} \\ \frac{n_1}{n} & \frac{n_1}{n} \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0)),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{pmatrix} 1 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_1 \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

■

Proposición 8 Sea $\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta})$ la matriz de información de Fisher dada en (4.35). Se verifica que

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{P} -\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0),$$

donde $\ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}))$ fue definida en (4.9).

Demostración. Se denotará

$$X_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{si la observación } i\text{-ésima es clasificada en la celda } j\text{-ésima} \\ & \text{para la población multinomial } \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta}_0) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $1 \leq i \leq n_1$ y $1 \leq j \leq J$,

$$X_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & \text{si la observación } i\text{-ésima es clasificada en la celda } j\text{-ésima} \\ & \text{para la población multinomial } \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\theta}_0) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $1 \leq i \leq n_2$ y $1 \leq j \leq J$. Las variables aleatorias $X_{ij}^{(1)}$ y $X_{ij}^{(2)}$ son independientes. Se tiene

$$\sum_{i=1}^{n_1} X_{ij}^{(1)} = N_{1j}, \quad \sum_{i=1}^{n_2} X_{ij}^{(2)} = N_{2j}.$$

Es claro que

$$E(X_{ij}^{(l)}) = \pi_{lj}(\boldsymbol{\theta}_0), \quad E(X_{ij}^{(l)} X_{ir}^{(l)}) = \begin{cases} \pi_{lj}(\boldsymbol{\theta}_0), & j = r \\ 0, & j \neq r \end{cases}$$

y

$$\text{Cov}(X_{ij}^{(l)}, X_{ir}^{(l)}) = \begin{cases} \pi_{lj}(\boldsymbol{\theta}_0)(1 - \pi_{lj}(\boldsymbol{\theta}_0)), & j = r \\ -\pi_{lj}(\boldsymbol{\theta}_0)\pi_{lr}(\boldsymbol{\theta}_0), & j \neq r \end{cases}$$

con $l = 1, 2$.

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) &= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{N_{1j}}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{N_{1j}}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)^2} \frac{\partial^2 \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{N_{2j}}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{N_{2j}}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)^2} \frac{\partial^2 \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) &= -\frac{n_1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{X_{ij}^{(1)}}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&+ \frac{n_1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_1} \frac{X_{ij}^{(1)}}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial^2 \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&- \frac{n_2}{n} \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \frac{X_{ij}^{(2)}}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&+ \frac{n_2}{n} \sum_{j=1}^J \frac{1}{n_2} \frac{X_{ij}^{(2)}}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial^2 \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}.
\end{aligned}$$

Aplicando la Ley Débil de los grandes números de Khintchine se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) &\xrightarrow{P} -\nu_1 \sum_{j=1}^J \frac{1}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&+ \nu_1 \sum_{j=1}^J \frac{\partial^2 \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&- \nu_2 \sum_{j=1}^J \frac{1}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&+ \nu_2 \sum_{j=1}^J \frac{\partial^2 \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{j=1}^J \frac{\partial^2 \pi_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = \mathbf{0} \quad i = 1, 2$$

se llega a que

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} -\nu_1 \mathbf{A}_1(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{A}_1(\boldsymbol{\theta}_0) - \nu_2 \mathbf{A}_2(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{A}_2(\boldsymbol{\theta}_0),$$

siendo

$$\mathbf{A}_i(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{D}_{\pi_{ij}(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1/2} \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}_0), \quad \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\partial \pi_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}, \quad i = 1, 2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) \xrightarrow{P} -\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0).$$

■

Proposición 9 Bajo la hipótesis $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta_0$ se verifica que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0))$$

donde $\ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}_0)$ se definió en (4.22) y la matriz $\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)$ se definió en (4.35).

Demostración. Se tiene,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}_0) \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^J \frac{N_{1j}}{p_{1j}(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} p_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^J \frac{N_{2j}}{p_{2j}(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} p_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}.$$

Como se cumple la relación

$$p_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n_i}{n} \pi_{ij}(\boldsymbol{\theta}), \quad i = 1, 2$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}_0) \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^J \frac{N_{1j}}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^J \frac{N_{2j}}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_1} \frac{X_{ij}^{(1)}}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_2} \frac{X_{ij}^{(2)}}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\mathbf{Y}_i}{\sqrt{n}} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\mathbf{Z}_i}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Siendo,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= \sum_{j=1}^J \frac{X_{ij}^{(1)}}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\ \mathbf{Z}_i &= \sum_{j=1}^J \frac{X_{ij}^{(2)}}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \end{aligned}$$

con

$$E \left[\frac{\mathbf{Y}_i}{\sqrt{n}} \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^J \frac{E[X_{ij}^{(1)}]}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \sum_{j=1}^J \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$$

$$E \left[\frac{\mathbf{Z}_i}{\sqrt{n}} \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^J \frac{E[X_{ij}^{(2)}]}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \sum_{j=1}^J \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{\mathbf{Y}_i}{\sqrt{n}} \frac{\mathbf{Y}_i^T}{\sqrt{n}} \right] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{E \left[\left(X_{ij}^{(1)} \right)^2 \right]}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{1}{\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = \frac{1}{n} \mathcal{I}_{F,1}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}_0).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\text{Cov} \left[\frac{\mathbf{Y}_i}{\sqrt{n}} \right] = \frac{1}{n} \mathcal{I}_{F,1}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}_0).$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
E \left[\frac{\mathbf{Z}_i}{\sqrt{n}} \frac{\mathbf{Z}_i^T}{\sqrt{n}} \right] &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{E \left[\left(X_{ij}^{(2)} \right)^2 \right]}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^J \frac{1}{\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = \frac{1}{n} \mathcal{I}_{F,2}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}_0).
\end{aligned}$$

Luego

$$\text{Cov} \left[\frac{\mathbf{Z}_i}{\sqrt{n}} \right] = \frac{1}{n} \mathcal{I}_{F,2}^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta}_0).$$

Por tanto, aplicando el Teorema Central del Límite a

$$\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\mathbf{Y}_i}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\mathbf{Z}_i}{\sqrt{n}}$$

se tiene,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

■

El siguiente teorema establece que la distribución asintótica de las familias de estadísticos de contraste (4.29) y (4.30) corresponden a una variable aleatoria ji-barra cuadrado de dimensión J , es decir, una mixtura de J distribuciones ji-cuadrado independientes.

Sea $J^* = \{1, \dots, J-1\}$ el conjunto de índices correspondientes a las filas de la matriz \mathbf{R} definida en (4.21). La familia de los posibles subconjuntos de J^* se denota por $\mathcal{F}(J^*)$ y se considera una submatriz de \mathbf{R} con $S \in \mathcal{F}(J^*)$ que se denota por $\mathbf{R}(S)$.

Conviene recordar que $\mathbf{R} = (\mathbf{0}_{(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{J-1})$ y consecuentemente

$$\mathbf{R}(S) = (\mathbf{0}_{\text{card}(S) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{J-1}(S)).$$

Como posteriormente se necesitará en la demostración del resultado fundamental de este Capítulo, se abordará a continuación el problema de contraste:

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{J-1} \quad \text{frente a} \quad H_1 : \mathbf{R}(S)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{\text{card}(S)} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}_{J-1}. \quad (4.36)$$

Obsérvese que en las hipótesis anteriores no aparecen restricciones de tipo desigualdad.

Bajo H_0 , el espacio paramétrico es $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2(J-1)} : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{J-1}\}$ y el estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ en Θ_0 es $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta})$. El espacio paramétrico es $\Theta(S) = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{2(J-1)} : \mathbf{R}(S)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{J-1}\}$, y el estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ en $\Theta(S)$ es $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta(S)} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta})$. Siendo $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{N}}{n}$, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ es la solución en $\mathbb{R}^{2(J-1)}$ de (4.18), es decir $\log \mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{W}_0 \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \bar{\boldsymbol{\theta}}$. Recuérdese que $\bar{\mathbf{u}}$ es un vector de parámetros redundantes y depende de $\bar{\boldsymbol{\theta}}$.

Siguiendo el mismo proceso que se utilizó para construir las familias de los estadísticos (4.29) y (4.30), se consideran las siguientes familias de estadísticos basadas en las medidas de ϕ -divergencia

$$T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\phi''(1)} (d_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\phi(\widehat{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)))) \quad (4.37)$$

y

$$S_\phi(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\phi''(1)} d_\phi(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})). \quad (4.38)$$

En el siguiente teorema se obtendrá la distribución asintótica de (4.37) y (4.38) bajo la hipótesis nula dada en (4.36).

Teorema 8 *Bajo H_0 dada en (4.36), la distribución asintótica de las familias de estadísticos basadas en medidas de ϕ -divergencia (4.37) y (4.38) es χ_{df}^2 con $df = J - 1 - \text{card}(S)$.*

Demostración. Se considera la función $d(\boldsymbol{\theta}) = d_\phi(\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ y se realiza el desarrollo en serie de Taylor de orden 2 en torno a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$,

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{\theta}) &= d(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + (\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} d(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} + \\ &+ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} d(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} (\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right), \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} d(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} &= \mathbf{0}_{J-1}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} d(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} &= \phi''(1) \mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta})$ la matriz de información de Fisher dada en (4.33). Sea $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ tal que $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$, donde $\log \mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{W}_0 \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \bar{\boldsymbol{\theta}}$ es el modelo loglineal saturado. Particularizando con $\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}}$ en (6.6), se tiene

$$d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{\phi''(1)}{2} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right). \quad (4.40)$$

De forma totalmente análoga se obtiene

$$d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S))) = \frac{\phi''(1)}{2} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S))^T \mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)) + o\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)\|^2\right). \quad (4.41)$$

Restando (4.40)-(4.41) y multiplicando por $\frac{2n}{\phi''(1)}$ se tiene

$$\begin{aligned} T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) &= \frac{2n}{\phi''(1)} \left(d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S))) \right) \\ &= \sqrt{n} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \sqrt{n} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\sqrt{n} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})\|^2\right) \\ &- \sqrt{n} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S))^T \mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)) \sqrt{n} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)) + o\left(\|\sqrt{n} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S))\|^2\right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Se va a introducir notación adicional con el fin de estudiar simultáneamente todos los estimadores.

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\theta}}, & \text{si } \bullet = \varnothing \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}}, & \text{si } \bullet = E \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S), & \text{si } \bullet = S \end{cases}$$

y además

$$\mathbf{R}(\bullet) = \begin{cases} \mathbf{0}_{(J-1) \times (2J-1)}, & \text{si } \bullet = \emptyset \\ \mathbf{R}, & \text{si } \bullet = E \\ \mathbf{R}(S), & \text{si } \bullet = S \end{cases}.$$

El primer paso será probar

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_{J+1}), \quad (4.43)$$

siendo $\boldsymbol{\theta}_0$ el verdadero valor del parámetro desconocido y

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0), \quad (4.44)$$

es la matriz de varianzas-covarianzas de $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)$.

Se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) + (\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)} \right) \\ &+ o_p(\mathbf{1}_{J+1}). \end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 8 se llega a

$$\left(\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})) \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)} \xrightarrow{P} -\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0).$$

Por tanto,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})) \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) \right) - \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) + o_p(\mathbf{1}_{J+1}). \quad (4.45)$$

Por otro lado, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)$ maximiza $\ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}))$ sujeto a $\mathbf{R}(\bullet)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{\text{card}(\bullet)}$, por tanto $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)$ verificará la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})) + \lambda \mathbf{R}(\bullet) = \mathbf{0}_{J+1}. \quad (4.46)$$

Así, de (4.45) y (4.46) se tiene,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) \right) - \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{\lambda} \mathbf{R}(\bullet) + o_p(\mathbf{1}_{J+1}) = \mathbf{0}_{J+1}. \quad (4.47)$$

Además,

$$\sqrt{n}\mathbf{R}(\bullet)\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{R}(\bullet)\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) + o_p(\mathbf{1}_{card(\bullet)}) \quad (4.48)$$

En forma matricial (4.47) y (4.48) vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) & -\mathbf{R}^T(\bullet) \\ \mathbf{R}(\bullet) & \mathbf{0}_{card(\bullet) \times card(\bullet)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) \\ n^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}}\ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) \\ \mathbf{0}_{card(\bullet)} \end{pmatrix} + o_p(\mathbf{1}_{J+1+card(\bullet)}).$$

y despejando,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) \\ n^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) & \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) \\ \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) & \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}}\ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}_0)) \\ \mathbf{0}_{card(\bullet)} \end{pmatrix} + o_p(\mathbf{1}_{J+1+card(\bullet)})$$

con

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet)(\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet))^{-1}\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)$$

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet)(\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet))^{-1}$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) = (\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet))^{-1}.$$

En definitiva, se ha probado (6.2). Aplicando la Proposición 9,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}_{J+1}, \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)),$$

y por tanto la distribución de $\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0)$ es una normal centrada y matriz de varianzas-covarianzas

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet)(\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet))^{-1}\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \\ & \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet)(\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet))^{-1}\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \\ & = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet)(\mathbf{R}(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(\bullet))^{-1}\mathbf{R}^T(\bullet)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0), \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \\
& \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \\
& = \left\{ \mathbf{I} - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \right\} \\
& \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \\
& = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \\
& \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
& + \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
& = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}^T(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}^T(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)).$$

Se denota por

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, E) = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0).$$

Así, para $\bullet = E$ y $\bullet = \emptyset$ se tiene respectivamente

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0) \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}_0) \right) + o_p(\mathbf{1}_{J+1}),$$

$$\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) + o_p(\mathbf{1}_{J+1}).$$

Luego, para $\bullet = \emptyset$ y para $\bullet = S$,

$$\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) = (\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}_0) \right) + o_p(\mathbf{1}_{J+1}) \quad (4.49)$$

$$\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)) = (\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)) \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}_0) \right) + o_p(\mathbf{1}_{J+1}). \quad (4.50)$$

A partir de (4.42), (4.49) y (4.50) y teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_F(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)$, se tiene

$$\begin{aligned} & T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0))^T \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\ &+ o_p(\mathbf{1}_{J+1}) \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + o_p(\mathbf{1}_{J+1}), \end{aligned} \quad (4.51)$$

siendo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z},$$

con $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{J-1}, \mathbf{I}_{J-1})$ y $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)$ es la matriz de la factorización de Cholesky para una matriz no singular como es la matriz de información de Fisher, es decir, $\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T$. Equivalentemente,

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{J-1}, \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T),$$

donde la matriz de varianzas-covarianzas es simétrica.

A continuación se va a establecer que la matriz de covarianzas $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T$ es idempotente. A tal fin se comenzará probando que

$$(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0))^T = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, E). \quad (4.52)$$

Para ello será necesario hacer uso del concepto de matriz proyección ortogonal de una matriz \mathbf{A} (ver Observación 5). Por definición,

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} - \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)$$

y

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E) (\mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E))^{-1} \mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0).$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) (-\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &+ \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E) (\mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E))^{-1} \mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ -\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} + \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} \right\} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0), \end{aligned}$$

siendo

$$\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} = \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0),$$

$$\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} = \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E) (\mathbf{R}(E)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E))^{-1} \mathbf{R}(E)\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0),$$

matrices proyecciones ortogonales de las matrices

$$\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) \quad \text{y} \quad \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)$$

respectivamente. En consecuencia, llamando

$$\mathbf{H} = (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0))^T$$

se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \right\} \\ &\quad \left\{ \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \right\} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} + \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \right\} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} + \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \right\} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)} \right\} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &= \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, E), \end{aligned}$$

por lo que la matriz $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T$ es idempotente ya que

$$(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0))^T \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0).$$

Siguiendo el Lema 3 de Ferguson (1996, página 57), $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T$ es idempotente y simétrica si y sólo si $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ es una variable que sigue una distribución ji-cuadrado con grados de libertad igual a

$$\begin{aligned} df &= \text{rango}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T) \\ &= \text{traza}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T). \end{aligned}$$

Es decir, la distribución de $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ es una ji-cuadrado con grados de libertad

$$\begin{aligned}
df &= \text{rango}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T) \\
&= \text{traza}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T) \\
&= \text{traza}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T) - \text{traza}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T) \\
&= \text{traza}((\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)) - \text{traza}((\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)) \\
&= \text{traza}(\{\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}^T(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)) \\
&\quad - \text{traza}(\{\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}^T(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\}) \\
&= \text{traza}(I - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)) \\
&\quad - \text{traza}(I - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R}) \\
&= -\text{traza}((\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)) \\
&\quad + \text{traza}((\mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T) \\
&= (J - 1) - \text{card}(S).
\end{aligned}$$

Para estudiar el otro estadístico de contraste, $S_\phi(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, considérese $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(S)$ en (6.6),

$$d_\phi(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)) = \frac{\phi''(1)}{2} (\hat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F(\hat{\boldsymbol{\theta}}) (\hat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right).$$

Además, restando (4.49)–(4.50) se deduce que

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_{J+1}).$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_F(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)$, (4.51) y que bajo H_0 ,

$$S_\phi(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) + o_p(\mathbf{1}_{J+1}), \quad (4.53)$$

por el Teorema de Slutsky se concluye que ambos estadísticos $S_\phi(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ tienen la misma distribución asintótica. ■

Observación 5 Dada una matriz \mathbf{A} cualquiera se denomina “proyección ortogonal” de \mathbf{A} a la matriz

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x \right) \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} w_j(\boldsymbol{\theta}_0) P \left(\chi_{(J-1)-j}^2 \leq x \right), \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\theta}_0$ es el verdadero valor del parámetro, $\chi_0^2 \equiv 0$, y $\{w_j(\boldsymbol{\theta}_0)\}_{j=0}^{J-1}$ es el conjunto de pesos de la distribución que verifican las condiciones $w_j(\boldsymbol{\theta}_0) > 0$ y $\sum_{j=0}^{J-1} w_j(\boldsymbol{\theta}_0) = 1$. Siendo $S^C = J^* - S$, la interpretación probabilística de los pesos se obtiene en términos de las probabilidades ortantes de las variables

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(S) &\sim \mathcal{N} \left(\mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0) \right), \\ \mathbf{Z}_2(S) &\sim \mathcal{N} \left(\mathbf{0}_{(J-1)-\text{card}(S)}, \mathbf{H}(S^C, S^C, \boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{H}(S^C, S, \boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{H}^T(S^C, S, \boldsymbol{\theta}_0) \right), \end{aligned}$$

de la siguiente manera

$$w_j(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*), \text{card}(S)=j} P(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_j) P(\mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{(J-1)-j}). \quad (4.55)$$

Demostración. Se analizará la demostración para $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$. Conviene recordar que el interés se centra en contrastar

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{J-1} \text{ frente a } H_1 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{J-1} \text{ y } \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}_{J-1}.$$

Se denotará por S al subconjunto de $\mathcal{F}(J^*)$ de forma que

$$\mathbf{R}(S)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{\text{card}(S)} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}(S^C)\boldsymbol{\theta} > \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)},$$

y $\text{card}(S^C) = (J-1) - \text{card}(S)$. Evidentemente, la matriz $\mathbf{R}(S)$ junto con la matriz $\mathbf{R}(S^C)$ dan lugar a la matriz \mathbf{R} pero no se puede afirmar que

$$(\mathbf{R}^T(S), \mathbf{R}^T(S^C))^T$$

coincida con la matriz \mathbf{R} ya que las filas de $\mathbf{R}(S)$ no tienen por qué corresponderse con las primeras filas de \mathbf{R} . $\mathbf{R}(S)$ y $\mathbf{R}(S^C)$ son submatrices de \mathbf{R} pero no es posible expresar \mathbf{R} en función de $\mathbf{R}(S)$ y $\mathbf{R}(S^C)$. Se denota por $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$ el estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ bajo

la condición

$$\mathbf{R}(S)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{\text{card}(S)} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}(S^C)\boldsymbol{\theta} > \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)},$$

es decir, bajo H_1 aplicando el Teorema de la Probabilidad Total se tiene:

$$P(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x) = \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x, \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)). \quad (4.56)$$

De las condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker (consultar el Teorema 4.2.13 en Bazaraa y otros (2006)) para resolver el problema de optimización máx $\ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta})$ sujeto a las restricciones $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{J-1}$, y al ser $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$ un máximo local,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^{J-1} \lambda_i \mathbf{R}^T(\{i\}) = 0, \quad i = 1, \dots, J-1, \quad (4.57a)$$

$$\lambda_i \mathbf{R}(\{i\})\boldsymbol{\theta} = 0, \quad i = 1, \dots, J-1, \quad (4.57b)$$

$$\lambda_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, J-1, \quad (4.57c)$$

las únicas condiciones que caracterizan el estimador de máxima verosimilitud $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$ para un $S \in \mathcal{F}(J^*)$ concreto, son las condiciones de holgura complementaria $\mathbf{R}(\{i\})\boldsymbol{\theta} > 0$, para $i \in S$ y $\lambda_i < 0$, para $i \in S^C$, ya que las condiciones $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) + \lambda_i \mathbf{R}^T(\{i\}) = 0$, $i = 1, \dots, J-1$, $\mathbf{R}(\{i\})\boldsymbol{\theta} = 0$, para $i \in S^C$ y $\lambda_i = 0$, para $i \in S$ son condiciones redundantes una vez que se sabe que se verifican las condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker para todos los conjuntos posibles $S \in \mathcal{F}(J^*)$ que definen $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$. Por esta razón se considera:

$$\begin{aligned} P\left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x, \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)\right) &= \\ &= P\left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) < \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{R}(S^C)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) > \mathbf{0}_{(J-1)-\text{card}(S)}\right), \end{aligned}$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ es el vector de los multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker asociados al estimador $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$.

Bajo H_0 , se verifica $\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) - \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}_0$, ya que $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}_{J-1}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x) &= \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P\left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) < \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{R}(S^C)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) - \mathbf{R}(S^C)\boldsymbol{\theta}_0 > \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}\right), \end{aligned}$$

donde $\text{card}(S^C) = (J-1) - \text{card}(S)$.

Las igualdades (4.57a) y (4.57b) se verifican para $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)$ y $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}(S)$, siendo $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ los multiplicadores de Lagrange. En consecuencia $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}(S) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)$ y $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \widehat{\boldsymbol{\lambda}}(S)$. Teniendo en cuenta que

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_{J+1}), \quad (4.58)$$

bajo $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}(S) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)$ se tiene,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left(\mathbf{R}(S^C) \widetilde{\boldsymbol{\theta}}(S) - \mathbf{R}(S^C) \boldsymbol{\theta}_0 \right) &= \sqrt{n} \mathbf{R}(S^C) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S^C)}) \\ &= \mathbf{R}(S^C) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S^C)}). \end{aligned}$$

Bajo $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \widehat{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ y a partir de la expresión de $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ en Sen y otros (2010, página 267 fórmula (8.6.28)) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) &= \sqrt{n} \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S)}) \\ &= \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S)}), \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = -\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1}$, con

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = -(\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1}. \quad (4.59)$$

Luego

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \widehat{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S)}).$$

Bajo $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}(S) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)$ se tiene,

$$\begin{aligned} S_\phi(\mathbf{p}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) &= T_\phi(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) + o_p(1) \\ &= \left(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} \right)^T \left(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} \right) + o_p(1), \\ &= \mathbf{Z}^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} + o_p(1). \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{J-1}, \mathbf{I}_{J-1})$.

En consecuencia se tiene,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(S_\phi(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x \right) = \\
& = \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P \left(S_\phi(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x; \widehat{\boldsymbol{\lambda}}(S) < \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{R}(S^C) \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \mathbf{R}(S^C) \boldsymbol{\theta}_0 \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)} \right) = \\
& = \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P(S_\phi(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x; \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} < \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \\
& \mathbf{R}(S^C) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}) = \\
& = \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P((\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z})^T (\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z}) \leq x, \\
& \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} < \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{R}(S^C) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}).
\end{aligned}$$

Se introduce la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_1(S) &= \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{Z}, & \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= -\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \\
\mathbf{Z}_2(S) &= \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{Z}, & \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= \mathbf{R}(S^C) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \\
\mathbf{Z}_3(S) &= \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{Z}, & \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T
\end{aligned}$$

con lo cual se tiene,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(S_\phi(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x \right) = \\
& = \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P(\mathbf{Z}_3^T(S) \mathbf{Z}_3(S) \leq x, \mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}) = \\
& = \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P(\mathbf{Z}_3^T(S) \mathbf{Z}_3(S) \leq x / \mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}) \\
& P(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}) = \\
& = \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P(\mathbf{Z}_3^T(S) \mathbf{Z}_3(S) \leq x / (\mathbf{Z}_1^T(S), \mathbf{Z}_2^T(S))^T \geq \mathbf{0}_{J-1}) P(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}).
\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
& P(\mathbf{Z}_3^T(S) \mathbf{Z}_3(S) \leq x / (\mathbf{Z}_1^T(S), \mathbf{Z}_2^T(S))^T \geq \mathbf{0}_{J-1}) \\
&= P(\mathbf{Z}^T \mathbf{M}_3^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{Z} \leq x / (\mathbf{Z}^T \mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S), \mathbf{Z}^T \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S))^T \geq \mathbf{0}_{J-1}) \\
&= P(\mathbf{Z}^T \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{Z} \leq x / (\mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S), \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S))^T \mathbf{Z} \geq \mathbf{0}_{J-1}) \\
&= P(\mathbf{Z}^T \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{Z} \leq x / \mathbf{d}^T \mathbf{Z} \geq \mathbf{0}_{J-1}),
\end{aligned}$$

con

$$\mathbf{d} = (\mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S), \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)).$$

Obsérvese que $\mathbf{M}_3^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S)$ ya que

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_3^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \\
&= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
&= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
&= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
&= \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S).
\end{aligned}$$

Como \mathbf{Z} se distribuye como una normal con vector de medias nulo y matriz de varianzas-covarianzas la identidad se puede aplicar el Lema 1 con

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \quad \text{y} \quad \mathbf{d} = (\mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S), \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)).$$

Tendremos que ver que $\mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{0}_{(J-1) \times \text{card}(S)}$ y $\mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)$.

Se darán una serie de conceptos que ayudarán a estudiar lo anterior.

Proposición 10 Sea \mathbf{A} una matriz $m \times n$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

con $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1})^T$. Se denomina “espacio columna” generado por \mathbf{A} , al espacio cuyos elementos son de la forma

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

Se sabe que dadas las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de dimensiones $m \times n$ y $m \times p$, respectivamente, entonces

$$C(\mathbf{B}) \subset C(\mathbf{A})$$

si y sólo si existe una matriz \mathbf{F} , de dimensión $n \times p$ verificando

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{F}.$$

Dada la matriz $\mathbf{L} = (\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$ se verifica que $C(\mathbf{L}_1) \subset C(\mathbf{L})$ ya que

$$\mathbf{L}_1 = (\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Además si \mathbf{P}_L es la proyección de la matriz \mathbf{L} , es decir $\mathbf{P}_L = \mathbf{L}(\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T$, se verifica que

$$\mathbf{P}_L \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_L \mathbf{L}_1 &= \mathbf{L}(\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}(\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = (\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_1. \end{aligned}$$

Siguiendo la Proposición 10, si se toma $\mathbf{L} = \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)$ y $\mathbf{L}_1 = \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)$ se tiene por un lado

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_L \mathbf{L}_1 &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E) (\mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E))^{-1} \mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) \\ &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) = \mathbf{L}_1 \end{aligned}$$

y por otro

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_L \mathbf{L} &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E) (\mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E))^{-1} \mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E) \\ &= \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E) = \mathbf{L}. \end{aligned}$$

A continuación, se establecerá que $\mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{0}_{(J-1) \times \text{card}(S)}$. Se tiene,

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \\ &= -\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, E)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \mathbf{R}^T(S))^{-1}) \\ &= -\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)}) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \mathbf{R}^T(S))^{-1} \\ &= -\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \left(\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) \right) \\ &(\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \mathbf{R}^T(S))^{-1} = \mathbf{0}_{(J-1) \times \text{card}(S)} \end{aligned}$$

ya que

$$\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) = \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S).$$

A continuación se verá que $\mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)}) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \\ &\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)}) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &\left\{ \mathbf{I} - \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \mathbf{R}^T(S) \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)}) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &- \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)}) \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &- \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} - \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)}) \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{0}_{(J-1) \times \text{card}(S^C)}. \end{aligned}$$

Además

$$\mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C) = \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C),$$

por lo que se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &\quad - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{P}_{\mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)} \mathcal{I}_F^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S). \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1 se tiene,

$$P(\mathbf{Z}^T \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{Z} \leq x / \mathbf{d}^T \mathbf{Z} \geq \mathbf{0}_{J-1}) = P(\chi_{df}^2 \leq x)$$

siendo

$$\begin{aligned} df &= \text{rango}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T) = \text{traza}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T) \\ &= (J-1) - \text{card}(S). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x) = \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P(\chi_{(J-1) - \text{card}(S)}^2 \leq x) P(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}) \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} P(\chi_{(J-1)-j}^2 \leq x) \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*), \text{card}(S)=j} P(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}). \end{aligned}$$

Ahora bien, las variables

$$\mathbf{Z}_1(S) = \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{Z} \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_2(S) = \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{Z}$$

son independientes ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S)^T &= -\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{R}^T(S^C) \\ &= -\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{0}_{\text{card}(S) \times \text{card}(S^C)}. \end{aligned}$$

La ortogonalidad de ambas matrices se debe a

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \\ &= (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &\{\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)(\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\} \\ &= (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &- (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)(\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &= (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\ &= \mathbf{0}_{\text{card}(S) \times (J-1)}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x\right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*)} P\left(\chi_{(J-1) - \text{card}(S)}^2 \leq x\right) P\left(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} P\left(\chi_{(J-1)-j}^2 \leq x\right) \sum_{S \in \mathcal{F}(J^*), \text{card}(S)=j} P\left(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} P\left(\chi_{(J-1)-j}^2 \leq x\right) w_j(\boldsymbol{\theta}_0). \end{aligned}$$

Para ver que $w_j(\boldsymbol{\theta}_0)$ tiene la expresión dada en (4.55) habrá que probar que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= \mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0), \\ \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= \mathbf{H}(S^C, S^C, \boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{H}(S^C, S, \boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{H}^T(S^C, S, \boldsymbol{\theta}_0). \end{aligned}$$

Haciendo $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = -\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S)$ se tiene

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{Z}_1(S)) &= \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \\ &= \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S)^T\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \\ &= -(\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \\ &= -\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0),\end{aligned}$$

donde $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S)$ está expresado según (4.59).

Puesto que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_1 \end{pmatrix}^{-1} \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_2} & -\frac{1}{\nu_2} \\ -\frac{1}{\nu_2} & \frac{1}{\nu_1\nu_2} \end{pmatrix} \otimes \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)}\mathbf{1}_{J-1}\mathbf{1}_{J-1}^T \right),\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) &= \frac{1}{\nu_1\nu_2}\mathbf{G}_{J-1} \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)}\mathbf{1}_{J-1}\mathbf{1}_{J-1}^T \right) \mathbf{G}_{J-1}^T \\ &= \frac{1}{\nu_1\nu_2} \left(\mathbf{G}_{J-1}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1}\mathbf{G}_{J-1}^T + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)}\mathbf{e}_{J-1}\mathbf{e}_{J-1}^T \right),\end{aligned}$$

que coincide con $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)$ dado en (4.54).

Por tanto, $\mathbf{H}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)$ y $-\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0)$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{Z}_2(S)) &= \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{R}(S^C)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\Gamma}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{R}(S^C)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{R}(S^C)\{\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)(\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\}\mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{R}(S^C)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S^C) \\ &\quad - \mathbf{R}(S^C)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)(\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1}\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S^C).\end{aligned}$$

En la segunda igualdad se ha utilizado que $\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{\Gamma}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)$ pues

$$\begin{aligned}
& \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{\Gamma}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \\
&= \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \\
& \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{I} - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S) \right\} \\
& \left\{ \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \right\} \\
&= \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
& - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
& + \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
&= \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S) (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
&= \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0, S).
\end{aligned}$$

Denotando $\mathbf{H}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S)$ la anterior matriz de varianzas-covarianzas se puede expresar como

$$\text{Var}(\mathbf{Z}_2(S)) = \mathbf{H}(S^C, S^C, \boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{H}(S^C, S, \boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{H}^T(S^C, S, \boldsymbol{\theta}_0).$$

Se omite la demostración para $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ ya que es inmediata a partir de la demostración para $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y teniendo en cuenta que para algún $S \in \mathcal{F}(J^*)$

$$T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) + o_p(1) = S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})).$$

■

Observación 6 Para $J \in \{2, 3, 4\}$ los pesos $\{w_j(\boldsymbol{\theta}_0)\}_{j=1, \dots, J}$ tienen expresión explícita.

-) Para $J = 2$,

$$w_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = w_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.5.$$

-) Para $J = 3$,

$$\begin{aligned} w_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arccos \hat{\rho}_{12}, \\ w_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2}, \\ w_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2\pi} \arccos \hat{\rho}_{12}, \end{aligned}$$

donde

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}} = -\sqrt{\frac{(N_{1i} + N_{2i})(N_{1,j+1} + N_{2,j+1})}{(N_{1i} + N_{2i} + N_{1j} + N_{2j})(N_{1j} + N_{2j} + N_{1,j+1} + N_{2,j+1})}}, \quad (4.60)$$

es el coeficiente de correlación asociado a la variable i -ésima, j -ésima de una variable centrada con la siguiente matriz de varianzas-covarianzas

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{\hat{\nu}_1 \hat{\nu}_2} \begin{pmatrix} \frac{\pi_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\pi_1(\hat{\boldsymbol{\theta}})\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & -\frac{1}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \\ -\frac{1}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & \frac{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \end{pmatrix},$$

siendo $\pi_j(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{N_{1j} + N_{2j}}{n}$.

-) Para $J = 4$,

$$\begin{aligned} w_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{4\pi} (2\pi - \arccos \hat{\rho}_{12} - \arccos \hat{\rho}_{13} - \arccos \hat{\rho}_{23}), \\ w_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{4\pi} (3\pi - \arccos \hat{\rho}_{12.3} - \arccos \hat{\rho}_{13.2} - \arccos \hat{\rho}_{23.1}), \\ w_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} - w_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \\ w_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} - w_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde $\hat{\rho}_{ij}$ es el coeficiente de correlación (4.60) y $\hat{\rho}_{ij \cdot k}$ es el coeficiente de correlación parcial

$$\hat{\rho}_{ij \cdot k} = \frac{\hat{\rho}_{ij} - \hat{\rho}_{ik}\hat{\rho}_{kj}}{\sqrt{(1 - \hat{\rho}_{ik}^2)(1 - \hat{\rho}_{kj}^2)}},$$

asociado a la variable i -ésima, j -ésima, dado un valor de la variable k -ésima, de una

variable centrada con la siguiente matriz de varianzas-covarianzas

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{\hat{\nu}_1 \hat{\nu}_2} \begin{pmatrix} \frac{\pi_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\pi_1(\hat{\boldsymbol{\theta}})\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & -\frac{1}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & 0 \\ -\frac{1}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & \frac{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & -\frac{1}{\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \\ 0 & -\frac{1}{\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & \frac{\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \pi_4(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})\pi_4(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que el factor relacionado con el tamaño muestral en cada muestra multinomial, $\frac{1}{\hat{\nu}_1 \hat{\nu}_2}$, no afecta a la expresión de la estimación de los pesos de la distribución ji-barra cuadrado.

La expresión general de los pesos dados en (4.55) se puede computar para cualquier valor de J utilizando el paquete de R *mvtnorm* (para obtener más detalles acerca del paquete se puede consultar el enlace <http://CRAN.R-project.org/package=mvtnorm>).

4.4. Aplicación numérica

En esta Sección se analiza el conjunto de datos de la introducción, es decir, los datos recogidos en la Tabla 4.1. En este caso $J = 4$ y la muestra viene dada por:

$$\mathbf{n} = (n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{21}, n_{22}, n_{23}, n_{24})^T = (11, 8, 8, 5, 6, 4, 10, 12)^T.$$

El estimador de máxima verosimilitud obtenido mediante la subrutina de la librería NAG de Fortran E04UCF (<http://www.nag.co.uk/numeric/fl/FLdescription.asp>), es

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (-0.7164, -1.0647, -0.1823, 1.5173, 1.5173, 0.6523)^T.$$

Los vectores de probabilidad estimados son:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} &= (0.1719, 0.1250, 0.1250, 0.0781, 0.0938, 0.0625, 0.1563, 0.1875)^T, \\ \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= (0.1740, 0.1228, 0.1250, 0.0781, 0.0916, 0.0647, 0.1563, 0.1875)^T, \\ \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= (0.1328, 0.0938, 0.1406, 0.1328, 0.1328, 0.0938, 0.1406, 0.1328)^T, \end{aligned}$$

Los estimadores de los pesos de acuerdo con las fórmulas dadas en (4.61) vienen dadas por

$$\begin{aligned} w_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{4\pi} (2\pi - \arccos \hat{\rho}_{12} - \arccos \hat{\rho}_{13} - \arccos \hat{\rho}_{23}) = 0.0381, \\ w_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{4\pi} (3\pi - \arccos \hat{\rho}_{12.3} - \arccos \hat{\rho}_{13.2} - \arccos \hat{\rho}_{23.1}) = 0.2420, \\ w_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} - w_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.4618, \\ w_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} - w_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.2580, \end{aligned}$$

donde $\hat{\rho}_{ij}$ son las correlaciones condicionales y marginales asociadas a la matriz de varianzas-covarianzas

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{\hat{\nu}_1 \hat{\nu}_2} \begin{pmatrix} \frac{\pi_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\pi_1(\hat{\boldsymbol{\theta}})\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & -\frac{1}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & 0 \\ -\frac{1}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & \frac{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\pi_2(\hat{\boldsymbol{\theta}})\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & -\frac{1}{\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \\ 0 & -\frac{1}{\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})} & \frac{\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \pi_4(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\pi_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})\pi_4(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \end{pmatrix}.$$

Sus expresiones son

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{12} &= \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22}}} = -0.440778, & \hat{\rho}_{12.3} &= \frac{\hat{\rho}_{12} - \hat{\rho}_{13}\hat{\rho}_{32}}{\sqrt{(1 - \hat{\rho}_{13}^2)(1 - \hat{\rho}_{32}^2)}} = -0.547445, \\ \hat{\rho}_{13} &= \frac{\hat{\sigma}_{13}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{33}}} = 0, & \hat{\rho}_{13.2} &= \frac{\hat{\rho}_{13} - \hat{\rho}_{12}\hat{\rho}_{23}}{\sqrt{(1 - \hat{\rho}_{12}^2)(1 - \hat{\rho}_{23}^2)}} = -0.361702, \\ \hat{\rho}_{23} &= \frac{\hat{\sigma}_{23}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{22}\hat{\sigma}_{33}}} = -0.593063, & \hat{\rho}_{23.1} &= \frac{\hat{\rho}_{23} - \hat{\rho}_{21}\hat{\rho}_{13}}{\sqrt{(1 - \hat{\rho}_{21}^2)(1 - \hat{\rho}_{13}^2)}} = -0.660709, \end{aligned}$$

Los pesos también se pueden calcular usando el paquete de R `mvtnorm` (<http://cran.r-project.org/web/packages/mvtnorm/index.html>), $w_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.2580445$ (error absoluto 0.0001069222) y $w_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.03818305$ (error absoluto 7.872554×10^{-5}).

Obsérvese que para los valores extremos $w_0(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $w_3(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ obtenidos mediante el paquete de R son muy próximos a los obtenidos mediante los valores exactos.

Para resolver este problema se considera una función concreta en los estadísticos de contraste (4.29) y (4.30). Tomando

$$\phi_\lambda(x) = \frac{x^{\lambda+1} - x - \lambda(x-1)}{\lambda(\lambda+1)},$$

se obtiene la “familia de divergencias de Cressie-Read ”

$$d_{\phi_\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}}{q_{ij}^\lambda(\hat{\boldsymbol{\theta}})} - 1 \right)$$

y para cada $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ se obtiene una medida de divergencia distinta. Por lo tanto,

$$T_\lambda = T_{\phi_\lambda}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J \frac{\bar{p}_{ij}^{\lambda+1}}{p_{ij}^\lambda(\hat{\boldsymbol{\theta}})} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J \frac{\bar{p}_{ij}^{\lambda+1}}{p_{ij}^\lambda(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \right), \quad (4.62)$$

$$S_\lambda = S_{\phi_\lambda}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}^\lambda(\hat{\boldsymbol{\theta}})} - 1 \right). \quad (4.63)$$

Es posible cubrir toda la recta real para λ definiendo

$$d_{\phi_\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lim_{\ell \rightarrow \lambda} d_{\phi_\ell}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \lambda \in \{-1, 0\},$$

y considerando $T_\lambda = \lim_{\ell \rightarrow \lambda} T_\ell$, $S_\lambda = \lim_{\ell \rightarrow \lambda} S_\ell$, para $\lambda \in \{0, -1\}$, es decir

$$T_0 = T_{\phi_0}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = G^2 = 2n \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J \bar{p}_{ij} \log \frac{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}, \quad (4.64)$$

$$T_{-1} = T_{\phi_{-1}}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2n \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \log \frac{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\bar{p}_{ij}} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \log \frac{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\bar{p}_{ij}} \right) \quad (4.65)$$

y

$$S_0 = S_{\phi_0}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2nd_{Kull}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2n \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \log \frac{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}, \quad (4.66)$$

$$S_{-1} = S_{\phi_{-1}}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2nd_{Kull}(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) = 2n \sum_{j=1}^J p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \log \frac{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}. \quad (4.67)$$

Como $d_{\phi_0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_{Kull}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ y $d_{\phi_1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_{Pearson}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, los estadísticos G^2 (4.25) y X^2 (4.26) son casos particulares de los estadísticos basados en la familia de divergencias de Cressie-Read. De hecho, $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = G^2$ y $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = X^2$. También se puede destacar que $d_{\phi_{-1}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_{Kull}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

Se considera un conjunto de valores de λ , que se denotará por Λ . El estadístico basado en la familia de divergencias de Cressie-Read para el valor de $\lambda = \frac{2}{3}$ también se suele tener en cuenta en los análisis porque su resultado normalmente es bastante bueno. Por lo tanto, una posible elección de valores de λ para estudiar los p -valores puede ser $\Lambda = \{-1.5, -1, -0.5, 0, \frac{2}{3}, 1, 1.5, 2, 3\}$.

En la Tabla 4.3, se muestran los valores de las familias de estadísticos de Cressie-Read, $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ para $\lambda \in \Lambda$ y sus correspondientes p -valores asintóticos. En todos ellos se concluye que, con nivel de significación igual a 0.05, se rechaza la hipótesis nula y por lo tanto se rechaza que el efecto sea el mismo con ambos tratamientos, es decir se concluye que el tratamiento es más efectivo que el control en la mejora de la úlcera de estómago con un nivel de significación de 0.05.

Est. de contraste	$\lambda = -1.5$	$\lambda = -1$	$\lambda = -\frac{1}{2}$	$\lambda = 0$	$\lambda = \frac{2}{3}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$
$T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$	6.5323	6.3215	6.1562	6.0323	5.9261	5.8965	5.8803	5.8965	6.0244
p -valor(T_λ)	0.0175	0.0194	0.0211	0.0225	0.0238	0.0241	0.0243	0.0241	0.0226
$S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$	6.5277	6.3189	6.1551	6.0323	5.9270	5.8977	5.8815	5.8977	6.0244
p -valor(S_λ)	0.0175	0.0195	0.0212	0.0225	0.0238	0.0241	0.0243	0.0241	0.0226

Tabla 4.3: Estadísticos de contraste basados en la familia de divergencias de Cressie-Read y sus p -valores asintóticos.

La obtención de los p -valores en la Tabla 4.3 se ha realizado con el siguiente algoritmo:

Algoritmo 3 Cálculo del p -valor

Sea $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in \Lambda}$ el estadístico de contraste asociado a (4.10). Una vez que se han obtenido los pesos $\{w_j(\hat{\boldsymbol{\theta}})\}_{j=0}^{J-1}$, se calcula el correspondiente p -valor en las siguientes etapas :

ETAPA 1: Calcular $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ utilizando \mathbf{n} y teniendo en cuenta (4.24).

ETAPA 2: Utilizando $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ calcular el valor t del test estadístico T mediante la correspondiente expresión en (4.62)-(4.67).

ETAPA 3: Inicializar p -valor(T) := 0. Si $T \leq 0$ entonces p -valor(T) := 1 FIN, sino p -valor(T) := 0.

ETAPA 4: Para $j = 0, \dots, J-2$, hacer p -valor(T) := p -valor(T) + $w_j(\hat{\boldsymbol{\theta}})P(\chi_{(J-1)-j}^2 > t)$.

Se utiliza la subrutina NAG 'G01ECF' de la librería de Fortran.

Recientemente, Shan y Ma (2014) han estudiado un problema similar al planteado en (4.2a)-(4.2b), también en contexto “no paramétrico”, pero considerando “odds ratios” basados en probabilidades acumulativas gracias a las cuales se define un orden alternativo al local. El estadístico de contraste que se ha utilizado en dicha publicación es el estadístico de Wilcoxon para dos muestras con datos discretos, también conocido como estadístico de rango medio de Wilcoxon.

La expresión del estadístico de rango medio de Wilcoxon es

$$W = \sum_{j=1}^J r_j n_{1j}, \quad (4.68)$$

donde

$$r_1 = (n_{\bullet 1} + 2)/2, \quad r_j = \sum_{\ell=1}^{j-1} n_{\bullet \ell} + (n_{\bullet j} + 1)/2, \quad j = 2, \dots, J, \quad n_{\bullet j} = n_{1j} + n_{2j}$$

y su distribución asintótica es Normal con media $\mu_W = n_1(n+1)/2$ y varianza

$$\sigma_W^2 = n_1 n_2 \frac{n+1 - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^J (n_{\bullet j}^3 - n_{\bullet j})}{12}.$$

Nótese que tanto la hipótesis nula como la alternativa consideradas en esta memoria son un caso particular de las hipótesis consideradas en Metha y otros (1984), tomando en su Sección 4, $\phi^* = 1$.

El valor del estadístico de rango medio de Wilcoxon para los datos de la Tabla 4.1 es $W = 875$ y el correspondiente p -valor es 0.01094. Por tanto, se obtiene la misma conclusión que antes, es decir, se rechaza la hipótesis nula de que el efecto sea el mismo para ambos tratamientos, con un nivel de significación del 5%.

4.5. Estudio de simulación

A lo largo de las secciones anteriores se han considerado dos familias de estadísticos basadas en las medidas de divergencia de Cressie-Read con el fin de abordar el problema de contraste planteado en (4.10). Se ha visto en el Teorema 9 que ambas familias de distribuciones tienen la misma distribución asintótica y, en consecuencia, para tamaños muestrales grandes tendrán un comportamiento similar. Sin embargo, dado que usualmente el número de observaciones no será muy grande, se hace preciso el estudiar su comportamiento para tamaños muestrales pequeños o moderados. Lamentablemente no es posible realizar un estudio teórico que permita ver si existen diferencias en el comportamiento, en el sentido de la potencia y del tamaño del test, de los distintos miembros de las familias consideradas. Por ello se llevará a cabo un amplio estudio de simulación que permitirá discernir entre el diferente comportamiento de los estadísticos en

las dos familias.

Se comenzará detallando el experimento de simulación que se ha realizado. El estudio se centra en la eficiencia de los estadísticos considerados, basados en las medidas de divergencia de Cressie-Read, en función de los niveles de significación y las potencias de cada uno de ellos. Para el estudio de simulación se ha tomado $J = 4$ y se han considerado siete escenarios con distintos tamaños muestrales que se resumen en la Tabla 4.4.

Escenarios	Esc. A	Esc. B	Esc. C	Esc. D	Esc. E	Esc. F	Esc. G
n_1	20	20	20	20	16	10	4
n_2	4	10	16	20	20	20	20
Cociente	5	2	1.25	1	0.8	0.5	0.2

Tabla 4.4: Escenarios del estudio de simulación.

Para cada uno de los escenarios de la Tabla 4.4, tomando una muestra de la variable aleatoria \mathbf{N} , se ejecuta el Algoritmo 4.4 de la sección anterior para el cálculo del p -valor de cada estadístico $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ y se repite $R = 25\,000$ veces este proceso de forma independiente. Por lo tanto, se obtienen los valores de los estadísticos $T_\lambda^{(k)}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ (respectivamente $S_\lambda^{(k)}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, $k = 1, 2, \dots, R$), así como los correspondientes pesos $w_j(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $j = 1, 2, 3$, que permitirán obtener el p -valor asociado a cada estadístico $T_\lambda^{(k)}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, $S_\lambda^{(k)}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, $k = 1, 2, \dots, R$. Tomando valores de λ , parámetro de la familia de estadísticos de contraste de Cressie y Read, en el intervalo $[-1.5, 3]$ se tienen como casos particulares los estadísticos de contraste considerados en el ejemplo de la Sección 4.4.

Conviene recordar que $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ ($\lambda = 0$ en $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) coincide con el estadístico del cociente de verosimilitudes mientras que $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ ($\lambda = 1$ en $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) coincide con el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson. Esta observación, como posteriormente se verá, será muy importante a la hora de diseñar el procedimiento de comparación de los diferentes estadísticos.

La potencia exacta simulada, basada en el experimento, se obtiene mediante

$$\hat{\beta}_T = \hat{\beta}_T(\delta) = \frac{\text{Número de iteraciones de } T \text{ en las cuales el } p\text{-valor es menor que } \alpha}{R},$$

considerado los vectores de probabilidad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}(\delta)) &= (\pi_{i1}(\boldsymbol{\theta}(\delta)), \pi_{i2}(\boldsymbol{\theta}(\delta)), \pi_{i3}(\boldsymbol{\theta}(\delta)))^T \\ \pi_{ij}(\boldsymbol{\theta}(\delta)) &= \frac{1}{3} \frac{1 + i(j-1)\delta}{1 + i\delta}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

con $\delta \in \Xi = \{0.1, 0.5, 1.0, 1.5\}$. De forma análoga, el nivel de significación simulado se obtiene mediante

$$\hat{\alpha}_T = \frac{\text{Número de iteraciones de } T \text{ en las cuales el } p\text{-valor es menor que } \alpha}{R},$$

considerado los vectores de probabilidad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}_0) &= (\pi_{i1}(\boldsymbol{\theta}_0), \pi_{i2}(\boldsymbol{\theta}_0), \pi_{i3}(\boldsymbol{\theta}_0))^T \\ \pi_{ij}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

que es equivalente al valor de $\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}(\delta))$ para $\delta = 0$.

En la Tabla 4.5 se muestran los “odds ratios” locales

$$\vartheta_j^* = \vartheta_j^*(\delta) = \frac{1 + (j-1)\delta}{1 + 2(j-1)\delta} \frac{1 + 2j\delta}{1 + j\delta},$$

$j = 1, 2$, para $\delta \in \{0\} \cup \Xi$.

Se puede apreciar que en el vector $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}(\delta) = (\vartheta_1(\delta), \vartheta_2(\delta))^T$ las componentes se van alejando de la hipótesis nula $\boldsymbol{\vartheta}(0) = \mathbf{1}_2$ a medida que el valor de $\delta > 0$ se va alejando de 0. Es decir, se obtienen mejores valores para la potencia estimada cuanto mayor sea el valor de $\delta > 0$. Esta afirmación se basa en el hecho de que las componentes del vector $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}(\delta)$ disminuyen cuando aumenta $\delta > 0$ pero mucho más lento que el incremento del resto. Además, para un valor fijo de $\delta > 0$, cabe esperar que las mejores potencias se obtengan para los tamaños muestrales más grandes, es decir, cuanto mayor sea n . De esta forma es previsible obtener las peores potencias en el Escenario A y las mejores potencias en el Escenario D.

En la Tabla 4.5 se han añadido las tres últimas filas por dos razones, primero para mostrar que para cada valor fijo de δ , el cociente $\pi_{2j}(\boldsymbol{\theta}(\delta))/\pi_{1j}(\boldsymbol{\theta}(\delta))$ es no-decreciente a medida que aumenta j , la categoría ordinal; y segundo para aclarar el significado de los dos asteriscos contenidos en la tabla. Para un valor suficientemente grande de δ , $\pi_{i1}(\boldsymbol{\theta}(\delta)) > 0$ para $i = 1, 2$ tiende a cero por la derecha, pero en la práctica, debido a que existen celdas vacías en la tabla de contingencia, y la estimación del cociente $\pi_{21}(\boldsymbol{\theta}(\delta))/\pi_{11}(\boldsymbol{\theta}(\delta))$ llega a ser 1 que está muy lejano al $\frac{1}{2}$ teórico. Por ello se ha evitado trabajar con valores de δ mayores que 1.5.

En las Tablas 4.6-4.42 se recogen los resultados obtenidos en el estudio de simulación, tanto para los niveles de significación como para las potencias simuladas, de los escenarios que aparecen en la Tabla 4.4. Se puede apreciar que los niveles de significación simulados para las parejas

	$\delta = 0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.5$	$\delta = 1$	$\delta = 1.5$	$\delta = \infty$
$\vartheta_1^* = \vartheta_1^*(\delta)$	1.000	1.091	1.333	1.500	1.600	2.00*
$\vartheta_2^* = \vartheta_2^*(\delta)$	1.000	1.069	1.125	1.111	1.094	1.00
$\pi_{21}(\boldsymbol{\theta}(\delta))/\pi_{11}(\boldsymbol{\theta}(\delta))$	0.33/0.33	0.28/0.30	0.17/0.22	0.11/0.17	0.08/0.13	0.50*
$\pi_{22}(\boldsymbol{\theta}(\delta))/\pi_{12}(\boldsymbol{\theta}(\delta))$	0.33/0.33	0.33/0.33	0.33/0.33	0.33/0.33	0.33/0.33	1.00

Tabla 4.5: Odd ratios locales teóricos del estudio de simulación.

de escenarios (A,G), (B,F) y (C,E) son muy similares puesto que los tamaños muestrales son simétricos en cada uno de los casos, y por lo tanto, el cociente de una muestra es la inversa de la otra.

	Esc. A	Esc. B	Esc. C	Esc. D	Esc. E	Esc. F	Esc. G
$\hat{\alpha}_W$	0.0509	0.0509	0.0485	0.0495	0.0512	0.0506	0.0541
$\hat{\beta}_W(\delta), \delta = 0.1$	0.0619	0.0682	0.0721	0.0737	0.0729	0.0708	0.0674
$\hat{\beta}_W(\delta), \delta = 0.5$	0.0732	0.0997	0.1080	0.1135	0.1113	0.1085	0.0902
$\hat{\beta}_W(\delta), \delta = 1.0$	0.0668	0.0984	0.1060	0.1136	0.1093	0.1077	0.0942
$\hat{\beta}_W(\delta), \delta = 1.5$	0.0606	0.0907	0.0993	0.1064	0.1036	0.1019	0.0930

Tabla 4.6: Niveles de significación y potencias simuladas para el estadístico de Wilcoxon.

Una vez fijado un nivel de significación $\alpha = 0.05$, la Tabla 4.7 resume los niveles de significación estimados en todos los escenarios para los estadísticos considerados en el estudio $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), W\}_{\lambda \in \Lambda}$, con $\Lambda = \{-1.5, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 1, 1.5, 2, 3\}$.

En las Figuras 4.1-4.14 se muestran las gráficas de la potencia estimada, incluyendo en negro los niveles de significación estimados para los estadísticos considerados. Las gráficas 4.1, 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, 4.11, 4.13 corresponden a las potencias de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$, mientras que las gráficas 4.2, 4.4, 4.6, 4.8, 4.10, 4.12, 4.14 corresponden a las potencias de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

No es posible comparar las potencias dado que los niveles de significación son distintos. Por lo tanto, para los escenarios B-G, se divide el procedimiento en dos etapas:

ETAPA 1: Fijar unos intervalos razonables para los niveles de significación de forma que se descartarán todos aquellos estadísticos cuyo nivel de significación se encuentre fuera del intervalo considerado. Se comprueba que los estadísticos verifican el criterio de Dale (1986)

$$|\text{logit}(1 - \hat{\alpha}_T) - \text{logit}(1 - \alpha)| \leq e \quad (4.69)$$

donde $\text{logit}(p) = \log(\frac{p}{1-p})$, donde $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), W\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$. Única-

mente se aceptarán aquellos estadísticos cuyo nivel de significación verifique la desigualdad (4.69) con $e = 0.35$, para todos los escenarios. Esto conduce a

$$\widehat{\alpha}_{A_\lambda} \in [0.0357, 0.0695]. \quad (4.70)$$

Este criterio ha sido tomado como referencia por varios autores, Cressie y otros (2003) y Martín y Pardo (2012), entre otros. Los casos que cumplen esta condición están destacados en negrita en la Tabla 4.4. En las gráficas, los casos que cumplen esta condición corresponden a los valores que se encuentran en la banda punteada, y la línea de puntos en el interior de la banda punteada representa el nivel de significación fijado inicialmente. De ambas formas podemos concluir que no se deben considerar en el estudio los estadísticos $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})), W\}_{\lambda \in [-1.5, -1]}$.

ETAPA 2: Una vez seleccionados los estadísticos que para todos los escenarios verifican (4.70) analizar, mediante la potencia, si es posible encontrar en las familias $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ estadísticos con mayor potencia que los del cociente de verosimilitudes ($G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$) y de la ji-cuadrado de Pearson ($X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$). Al comparar $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ con el estadístico del cociente de verosimilitudes ($G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$) se quitará el efecto que tiene el nivel de significación, definiendo las denominadas eficiencias relativas

$$\rho_T = \rho_T(\delta) = \frac{(\widehat{\beta}_T(\delta) - \widehat{\alpha}_T) - (\widehat{\beta}_{T_0}(\delta) - \widehat{\alpha}_{T_0})}{\widehat{\beta}_{T_0}(\delta) - \widehat{\alpha}_{T_0}},$$

se definirán las eficiencias relativas siguientes para comparar $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ con el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson ($X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$)

$$\rho_T^* = \rho_T^*(\delta) = \frac{(\widehat{\beta}_T(\delta) - \widehat{\alpha}_T) - (\widehat{\beta}_{S_1}(\delta) - \widehat{\alpha}_{S_1})}{\widehat{\beta}_{S_1}(\delta) - \widehat{\alpha}_{S_1}}.$$

En las figuras 4.43-4.49 se muestran las potencias y las eficiencias relativas de forma global para los Escenarios A-G. En la primera fila de las Figuras se muestran las gráficas de la potencia estimada incluyendo en negro los niveles de significación estimados para los estadísticos considerados. La gráfica de la izquierda corresponde a las potencias de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})), W\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ mientras que la gráfica de la derecha corresponde a las potencias de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})), W\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$. En la segunda fila de las Figuras se muestran las gráficas de las eficiencias relativas ρ_T y en la tercera fila de las Figuras se muestran las gráficas de las eficiencias relativas ρ_T^* , la gráfica de la izquierda corresponde a las eficiencias relativas de

$T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta})), W\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$, mientras que la gráfica de la derecha corresponde a las eficiencias relativas de $T \in \{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta})), W\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

Esc.	$\hat{\alpha}_{T_{-1.5}}$	$\hat{\alpha}_{T_{-1}}$	$\hat{\alpha}_{T_{-1/2}}$	$\hat{\alpha}_{T_0}$	$\hat{\alpha}_{T_{2/3}}$	$\hat{\alpha}_{T_1}$	$\hat{\alpha}_{T_{1.5}}$	$\hat{\alpha}_{T_2}$	$\hat{\alpha}_{T_3}$	$\hat{\alpha}_W$
A	0.0013	0.0359	0.1725	0.0745	0.0468	0.0460	0.0517	0.0586	0.0949	0.0509
B	0.0670	0.0612	0.0664	0.0597	0.0541	0.0503	0.0511	0.0536	0.0619	0.0509
C	0.0747	0.0686	0.0608	0.0537	0.0494	0.0485	0.0478	0.0492	0.0573	0.0485
D	0.0688	0.0653	0.0631	0.0577	0.0538	0.0528	0.0522	0.0530	0.0572	0.0495
E	0.0751	0.0691	0.0610	0.0548	0.0511	0.0502	0.0494	0.0509	0.0591	0.0512
F	0.0665	0.0614	0.0681	0.0616	0.0554	0.0518	0.0517	0.0539	0.0615	0.0506
G	0.0013	0.0363	0.1802	0.0775	0.0477	0.0466	0.0526	0.0602	0.0965	0.0541
Esc.	$\hat{\alpha}_{S_{-1.5}}$	$\hat{\alpha}_{S_{-1}}$	$\hat{\alpha}_{S_{-1/2}}$	$\hat{\alpha}_{S_0}$	$\hat{\alpha}_{S_{2/3}}$	$\hat{\alpha}_{S_1}$	$\hat{\alpha}_{S_{1.5}}$	$\hat{\alpha}_{S_2}$	$\hat{\alpha}_{S_3}$	$\hat{\alpha}_W$
A	0.2106	0.2055	0.1572	0.0745	0.0429	0.0430	0.0499	0.0507	0.0752	0.0509
B	0.0799	0.0762	0.0638	0.0596	0.0543	0.0497	0.0509	0.0524	0.0584	0.0509
C	0.0729	0.0676	0.0581	0.0537	0.0505	0.0492	0.0491	0.0501	0.0583	0.0485
D	0.0675	0.0656	0.0620	0.0577	0.0552	0.0543	0.0541	0.0543	0.0577	0.0495
E	0.0745	0.0683	0.0584	0.0547	0.0518	0.0507	0.0504	0.0515	0.0598	0.0512
F	0.0814	0.0780	0.0656	0.0616	0.0551	0.0509	0.0516	0.0528	0.0572	0.0506
G	0.2170	0.2123	0.1653	0.0775	0.0446	0.0450	0.0510	0.0516	0.0782	0.0541

Tabla 4.7: Niveles de significación simulados para $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta})), W\}_{\lambda \in \Lambda}$ en los escenarios de la Tabla 4.4.

Se observa en la Tabla 4.7 que los únicos estadísticos que verifican la condición de Dale para todos los λ , son los del Escenario D.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0013	0.2106	-0.3787	0.1376	0.1321	0.7425	0.0468	0.0429	1.8638	0.0578	0.0507
-1.4850	0.0014	0.2106	-0.3638	0.1345	0.1290	0.7575	0.0451	0.0411	1.8787	0.0580	0.0507
-1.4701	0.0014	0.2106	-0.3488	0.1331	0.1282	0.7724	0.0451	0.0411	1.8937	0.0582	0.0507
-1.4551	0.0014	0.2106	-0.3339	0.1321	0.1271	0.7874	0.0444	0.0411	1.9086	0.0582	0.0507
-1.4402	0.0014	0.2106	-0.3189	0.1305	0.1258	0.8023	0.0446	0.0409	1.9236	0.0586	0.0507
-1.4252	0.0019	0.2104	-0.3040	0.1305	0.1256	0.8173	0.0451	0.0409	1.9385	0.0586	0.0507
-1.4103	0.0019	0.2104	-0.2890	0.1285	0.1223	0.8322	0.0451	0.0409	1.9535	0.0586	0.0507
-1.3953	0.0021	0.2104	-0.2741	0.1227	0.1192	0.8472	0.0451	0.0410	1.9684	0.0586	0.0507
-1.3804	0.0021	0.2104	-0.2591	0.1185	0.1164	0.8621	0.0450	0.0408	1.9834	0.0586	0.0507
-1.3654	0.0021	0.2104	-0.2442	0.1124	0.1067	0.8771	0.0448	0.0407	1.9983	0.0586	0.0507
-1.3505	0.0021	0.2101	-0.2292	0.1104	0.1038	0.8920	0.0449	0.0407	2.0133	0.0598	0.0507
-1.3355	0.0022	0.2101	-0.2143	0.1072	0.1007	0.9070	0.0449	0.0407	2.0282	0.0598	0.0507
-1.3206	0.0033	0.2101	-0.1993	0.1068	0.1002	0.9219	0.0449	0.0419	2.0432	0.0599	0.0507
-1.3056	0.0033	0.2101	-0.1844	0.1040	0.0976	0.9369	0.0449	0.0419	2.0581	0.0600	0.0507
-1.2907	0.0034	0.2096	-0.1694	0.1033	0.0976	0.9518	0.0448	0.0419	2.0731	0.0604	0.0510
-1.2757	0.0038	0.2096	-0.1545	0.1002	0.0975	0.9668	0.0456	0.0427	2.0880	0.0604	0.0510
-1.2608	0.0038	0.2096	-0.1395	0.0946	0.0938	0.9817	0.0460	0.0429	2.1030	0.0611	0.0517
-1.2458	0.0046	0.2096	-0.1246	0.0929	0.0934	0.9967	0.0460	0.0430	2.1179	0.0621	0.0517
-1.2309	0.0052	0.2096	-0.1096	0.0925	0.0928	1.0116	0.0460	0.0430	2.1329	0.0622	0.0517
-1.2159	0.0054	0.2086	-0.0947	0.0899	0.0903	1.0266	0.0464	0.0430	2.1478	0.0628	0.0517
-1.2010	0.0065	0.2086	-0.0797	0.0878	0.0879	1.0415	0.0464	0.0432	2.1628	0.0632	0.0517
-1.1860	0.0078	0.2086	-0.0648	0.0842	0.0840	1.0565	0.0464	0.0449	2.1777	0.0632	0.0517
-1.1711	0.0085	0.2086	-0.0498	0.0794	0.0791	1.0714	0.0464	0.0450	2.1927	0.0639	0.0518
-1.1561	0.0094	0.2086	-0.0349	0.0766	0.0771	1.0864	0.0471	0.0455	2.2076	0.0650	0.0518
-1.1412	0.0113	0.2086	-0.0199	0.0754	0.0754	1.1013	0.0471	0.0455	2.2226	0.0651	0.0519
-1.1262	0.0115	0.2069	-0.0050	0.0745	0.0745	1.1163	0.0475	0.0459	2.2375	0.0651	0.0519
-1.1113	0.0142	0.2069	0.0100	0.0745	0.0745	1.1312	0.0475	0.0463	2.2525	0.0651	0.0519
-1.0963	0.0174	0.2069	0.0249	0.0724	0.0723	1.1462	0.0475	0.0463	2.2674	0.0655	0.0519
-1.0814	0.0191	0.2069	0.0399	0.0704	0.0703	1.1611	0.0478	0.0464	2.2824	0.0655	0.0519
-1.0664	0.0225	0.2067	0.0548	0.0704	0.0703	1.1761	0.0480	0.0481	2.2973	0.0655	0.0519
-1.0515	0.0260	0.2066	0.0698	0.0697	0.0696	1.1910	0.0484	0.0481	2.3123	0.0655	0.0519
-1.0365	0.0302	0.2066	0.0847	0.0696	0.0696	1.2060	0.0486	0.0481	2.3272	0.0660	0.0524
-1.0216	0.0350	0.2066	0.0997	0.0696	0.0696	1.2209	0.0487	0.0481	2.3422	0.0671	0.0535
-1.0066	0.0359	0.2055	0.1146	0.0690	0.0688	1.2359	0.0487	0.0480	2.3571	0.0671	0.0535
-0.9917	0.3230	0.2054	0.1296	0.0682	0.0676	1.2508	0.0487	0.0480	2.3721	0.0694	0.0536
-0.9767	0.3214	0.2054	0.1445	0.0673	0.0653	1.2658	0.0488	0.0490	2.3870	0.0698	0.0536
-0.9618	0.3160	0.2054	0.1595	0.0662	0.0653	1.2807	0.0490	0.0493	2.4020	0.0699	0.0536
-0.9468	0.3084	0.2054	0.1744	0.0662	0.0641	1.2957	0.0490	0.0493	2.4169	0.0699	0.0536
-0.9319	0.3049	0.2054	0.1894	0.0631	0.0610	1.3106	0.0490	0.0492	2.4319	0.0705	0.0539
-0.9169	0.2997	0.2054	0.2043	0.0600	0.0586	1.3256	0.0494	0.0492	2.4468	0.0705	0.0539
-0.9020	0.2933	0.2054	0.2193	0.0597	0.0583	1.3405	0.0494	0.0497	2.4618	0.0706	0.0539
-0.8870	0.2882	0.2035	0.2342	0.0586	0.0564	1.3555	0.0496	0.0497	2.4767	0.0714	0.0542
-0.8721	0.2826	0.2020	0.2492	0.0586	0.0564	1.3704	0.0496	0.0497	2.4917	0.0717	0.0544
-0.8571	0.2777	0.2016	0.2641	0.0583	0.0554	1.3854	0.0497	0.0497	2.5066	0.0723	0.0544
-0.8422	0.2715	0.2016	0.2791	0.0568	0.0541	1.4003	0.0497	0.0497	2.5216	0.0730	0.0545
-0.8272	0.2672	0.2016	0.2940	0.0564	0.0541	1.4153	0.0500	0.0500	2.5365	0.0730	0.0545
-0.8123	0.2623	0.2013	0.3090	0.0553	0.0534	1.4302	0.0508	0.0500	2.5515	0.0734	0.0549
-0.7973	0.2578	0.2013	0.3239	0.0547	0.0528	1.4452	0.0511	0.0501	2.5664	0.0734	0.0554
-0.7824	0.2522	0.2013	0.3389	0.0547	0.0527	1.4601	0.0509	0.0499	2.5814	0.0750	0.0556
-0.7674	0.2497	0.2003	0.3538	0.0547	0.0527	1.4751	0.0514	0.0497	2.5963	0.0750	0.0556
-0.7525	0.2459	0.1956	0.3688	0.0547	0.0529	1.4900	0.0514	0.0499	2.6113	0.0750	0.0559
-0.7375	0.2402	0.1946	0.3837	0.0538	0.0520	1.5050	0.0517	0.0499	2.6262	0.0762	0.0567
-0.7226	0.2346	0.1943	0.3987	0.0530	0.0520	1.5199	0.0520	0.0499	2.6412	0.0762	0.0572
-0.7076	0.2310	0.1942	0.4136	0.0515	0.0504	1.5349	0.0529	0.0499	2.6561	0.0783	0.0588
-0.6927	0.2296	0.1940	0.4286	0.0515	0.0504	1.5498	0.0529	0.0499	2.6711	0.0799	0.0608
-0.6777	0.2258	0.1933	0.4435	0.0515	0.0503	1.5648	0.0530	0.0499	2.6860	0.0799	0.0621
-0.6628	0.2251	0.1931	0.4585	0.0508	0.0497	1.5797	0.0530	0.0499	2.7010	0.0809	0.0628
-0.6478	0.2198	0.1886	0.4734	0.0508	0.0497	1.5947	0.0530	0.0499	2.7159	0.0810	0.0642
-0.6329	0.2117	0.1817	0.4884	0.0508	0.0488	1.6096	0.0530	0.0499	2.7309	0.0814	0.0654
-0.6179	0.2068	0.1798	0.5033	0.0507	0.0487	1.6246	0.0534	0.0499	2.7458	0.0822	0.0654
-0.6030	0.2039	0.1789	0.5183	0.0509	0.0487	1.6395	0.0534	0.0499	2.7608	0.0823	0.0658
-0.5880	0.2018	0.1788	0.5332	0.0509	0.0478	1.6545	0.0543	0.0506	2.7757	0.0832	0.0659
-0.5731	0.1981	0.1774	0.5482	0.0501	0.0478	1.6694	0.0543	0.0506	2.7907	0.0833	0.0660
-0.5581	0.1966	0.1774	0.5631	0.0500	0.0476	1.6844	0.0544	0.0506	2.8056	0.0841	0.0671
-0.5432	0.1927	0.1754	0.5781	0.0490	0.0460	1.6993	0.0544	0.0506	2.8206	0.0852	0.0672
-0.5282	0.1851	0.1672	0.5930	0.0490	0.0460	1.7143	0.0558	0.0506	2.8355	0.0876	0.0692
-0.5133	0.1735	0.1586	0.6080	0.0490	0.0460	1.7292	0.0559	0.0506	2.8505	0.0877	0.0692
-0.4983	0.1725	0.1572	0.6229	0.0484	0.0454	1.7442	0.0560	0.0506	2.8654	0.0882	0.0695
-0.4834	0.1689	0.1553	0.6379	0.0486	0.0438	1.7591	0.0560	0.0506	2.8804	0.0882	0.0695
-0.4684	0.1677	0.1553	0.6528	0.0485	0.0437	1.7741	0.0560	0.0506	2.8953	0.0887	0.0717
-0.4535	0.1659	0.1543	0.6678	0.0468	0.0429	1.7890	0.0570	0.0506	2.9103	0.0901	0.0718
-0.4385	0.1627	0.1532	0.6827	0.0468	0.0429	1.8040	0.0570	0.0506	2.9252	0.0903	0.0718
-0.4236	0.1605	0.1512	0.6977	0.0468	0.0429	1.8189	0.0572	0.0506	2.9402	0.0906	0.0718
-0.4086	0.1500	0.1461	0.7126	0.0468	0.0424	1.8339	0.0577	0.0507	2.9551	0.0938	0.0734
-0.3937	0.1422	0.1372	0.7276	0.0469	0.0431	1.8488	0.0577	0.0507	2.9701	0.0943	0.0752
									3.0000	0.0949	0.0752

Tabla 4.8: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Escenario A.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0005	0.2837	-0.3787	0.1600	0.1547	0.7425	0.0512	0.0478	1.8638	0.0611	0.0548
-1.4850	0.0005	0.2836	-0.3638	0.1562	0.1502	0.7575	0.0496	0.0462	1.8787	0.0612	0.0548
-1.4701	0.0005	0.2836	-0.3488	0.1537	0.1486	0.7724	0.0496	0.0462	1.8937	0.0613	0.0548
-1.4551	0.0005	0.2836	-0.3339	0.1517	0.1466	0.7874	0.0492	0.0462	1.9086	0.0614	0.0548
-1.4402	0.0005	0.2836	-0.3189	0.1486	0.1436	0.8023	0.0493	0.0460	1.9236	0.0617	0.0548
-1.4252	0.0006	0.2834	-0.3040	0.1486	0.1436	0.8173	0.0493	0.0460	1.9385	0.0617	0.0548
-1.4103	0.0006	0.2834	-0.2890	0.1442	0.1380	0.8322	0.0493	0.0460	1.9535	0.0617	0.0548
-1.3953	0.0008	0.2834	-0.2741	0.1392	0.1358	0.8472	0.0494	0.0461	1.9684	0.0617	0.0548
-1.3804	0.0008	0.2834	-0.2591	0.1340	0.1334	0.8621	0.0491	0.0458	1.9834	0.0618	0.0548
-1.3654	0.0008	0.2834	-0.2442	0.1283	0.1232	0.8771	0.0489	0.0456	1.9983	0.0618	0.0548
-1.3505	0.0008	0.2833	-0.2292	0.1254	0.1193	0.8920	0.0489	0.0456	2.0133	0.0631	0.0548
-1.3355	0.0008	0.2833	-0.2143	0.1213	0.1157	0.9070	0.0489	0.0456	2.0282	0.0631	0.0548
-1.3206	0.0014	0.2833	-0.1993	0.1207	0.1149	0.9219	0.0490	0.0460	2.0432	0.0633	0.0548
-1.3056	0.0014	0.2833	-0.1844	0.1157	0.1100	0.9369	0.0490	0.0460	2.0581	0.0633	0.0548
-1.2907	0.0014	0.2826	-0.1694	0.1151	0.1100	0.9518	0.0487	0.0460	2.0731	0.0638	0.0552
-1.2757	0.0018	0.2826	-0.1545	0.1120	0.1099	0.9668	0.0496	0.0470	2.0880	0.0638	0.0552
-1.2608	0.0018	0.2826	-0.1395	0.1044	0.1045	0.9817	0.0497	0.0471	2.1030	0.0643	0.0557
-1.2458	0.0022	0.2826	-0.1246	0.1031	0.1041	0.9967	0.0497	0.0471	2.1179	0.0656	0.0557
-1.2309	0.0027	0.2826	-0.1096	0.1030	0.1038	1.0116	0.0497	0.0471	2.1329	0.0658	0.0557
-1.2159	0.0028	0.2811	-0.0947	0.1008	0.1015	1.0266	0.0502	0.0471	2.1478	0.0663	0.0557
-1.2010	0.0034	0.2811	-0.0797	0.0992	0.0995	1.0415	0.0502	0.0472	2.1628	0.0666	0.0557
-1.1860	0.0040	0.2811	-0.0648	0.0951	0.0951	1.0565	0.0497	0.0488	2.1777	0.0666	0.0557
-1.1711	0.0048	0.2811	-0.0498	0.0902	0.0901	1.0714	0.0497	0.0490	2.1927	0.0668	0.0558
-1.1561	0.0053	0.2811	-0.0349	0.0867	0.0871	1.0864	0.0504	0.0494	2.2076	0.0675	0.0558
-1.1412	0.0064	0.2811	-0.0199	0.0852	0.0852	1.1013	0.0502	0.0493	2.2226	0.0676	0.0559
-1.1262	0.0065	0.2798	-0.0050	0.0845	0.0845	1.1163	0.0506	0.0495	2.2375	0.0676	0.0559
-1.1113	0.0079	0.2798	0.0100	0.0845	0.0845	1.1312	0.0506	0.0498	2.2525	0.0676	0.0559
-1.0963	0.0104	0.2798	0.0249	0.0802	0.0801	1.1462	0.0506	0.0498	2.2674	0.0681	0.0559
-1.0814	0.0121	0.2798	0.0399	0.0774	0.0772	1.1611	0.0508	0.0500	2.2824	0.0681	0.0559
-1.0664	0.0144	0.2790	0.0548	0.0774	0.0772	1.1761	0.0512	0.0513	2.2973	0.0681	0.0559
-1.0515	0.0170	0.2788	0.0698	0.0764	0.0763	1.1910	0.0516	0.0513	2.3123	0.0681	0.0559
-1.0365	0.0200	0.2785	0.0847	0.0763	0.0763	1.2060	0.0516	0.0513	2.3272	0.0688	0.0564
-1.0216	0.0241	0.2784	0.0997	0.0762	0.0762	1.2209	0.0517	0.0513	2.3422	0.0698	0.0575
-1.0066	0.0246	0.2771	0.1146	0.0762	0.0760	1.2359	0.0517	0.0513	2.3571	0.0698	0.0575
-0.9917	0.4014	0.2769	0.1296	0.0752	0.0750	1.2508	0.0517	0.0513	2.3721	0.0718	0.0576
-0.9767	0.4005	0.2769	0.1445	0.0738	0.0724	1.2658	0.0517	0.0528	2.3870	0.0726	0.0576
-0.9618	0.3957	0.2769	0.1595	0.0730	0.0724	1.2807	0.0523	0.0534	2.4020	0.0726	0.0576
-0.9468	0.3872	0.2769	0.1744	0.0727	0.0713	1.2957	0.0523	0.0534	2.4169	0.0726	0.0576
-0.9319	0.3837	0.2769	0.1894	0.0691	0.0678	1.3106	0.0523	0.0533	2.4319	0.0738	0.0577
-0.9169	0.3788	0.2769	0.2043	0.0666	0.0650	1.3256	0.0532	0.0533	2.4468	0.0738	0.0577
-0.9020	0.3714	0.2769	0.2193	0.0656	0.0641	1.3405	0.0532	0.0540	2.4618	0.0739	0.0577
-0.8870	0.3666	0.2733	0.2342	0.0642	0.0622	1.3555	0.0532	0.0540	2.4767	0.0746	0.0580
-0.8721	0.3608	0.2716	0.2492	0.0642	0.0622	1.3704	0.0532	0.0540	2.4917	0.0748	0.0580
-0.8571	0.3569	0.2711	0.2641	0.0638	0.0610	1.3854	0.0532	0.0540	2.5066	0.0752	0.0580
-0.8422	0.3507	0.2706	0.2791	0.0625	0.0598	1.4003	0.0533	0.0540	2.5216	0.0757	0.0581
-0.8272	0.3447	0.2706	0.2940	0.0616	0.0598	1.4153	0.0536	0.0542	2.5365	0.0757	0.0581
-0.8123	0.3378	0.2702	0.3090	0.0603	0.0586	1.4302	0.0542	0.0542	2.5515	0.0758	0.0583
-0.7973	0.3334	0.2701	0.3239	0.0599	0.0581	1.4452	0.0547	0.0543	2.5664	0.0759	0.0585
-0.7824	0.3281	0.2701	0.3389	0.0598	0.0580	1.4601	0.0543	0.0539	2.5814	0.0775	0.0586
-0.7674	0.3249	0.2684	0.3538	0.0598	0.0580	1.4751	0.0550	0.0539	2.5963	0.0776	0.0586
-0.7525	0.3211	0.2581	0.3688	0.0597	0.0580	1.4900	0.0551	0.0541	2.6113	0.0776	0.0588
-0.7375	0.3126	0.2557	0.3837	0.0588	0.0570	1.5050	0.0552	0.0541	2.6262	0.0786	0.0594
-0.7226	0.3020	0.2548	0.3987	0.0582	0.0570	1.5199	0.0556	0.0541	2.6412	0.0786	0.0597
-0.7076	0.2981	0.2544	0.4136	0.0560	0.0548	1.5349	0.0562	0.0541	2.6561	0.0812	0.0620
-0.6927	0.2954	0.2536	0.4286	0.0560	0.0548	1.5498	0.0562	0.0541	2.6711	0.0818	0.0628
-0.6777	0.2896	0.2532	0.4435	0.0559	0.0547	1.5648	0.0563	0.0542	2.6860	0.0818	0.0636
-0.6628	0.2891	0.2530	0.4585	0.0553	0.0544	1.5797	0.0563	0.0542	2.7010	0.0822	0.0644
-0.6478	0.2815	0.2453	0.4734	0.0553	0.0544	1.5947	0.0563	0.0542	2.7159	0.0822	0.0654
-0.6329	0.2670	0.2323	0.4884	0.0553	0.0541	1.6096	0.0563	0.0542	2.7309	0.0829	0.0662
-0.6179	0.2599	0.2288	0.5033	0.0551	0.0539	1.6246	0.0566	0.0542	2.7458	0.0836	0.0662
-0.6030	0.2555	0.2267	0.5183	0.0552	0.0539	1.6395	0.0566	0.0542	2.7608	0.0836	0.0667
-0.5880	0.2516	0.2265	0.5332	0.0552	0.0532	1.6545	0.0574	0.0547	2.7757	0.0842	0.0668
-0.5731	0.2464	0.2239	0.5482	0.0549	0.0532	1.6694	0.0574	0.0547	2.7907	0.0844	0.0668
-0.5581	0.2442	0.2239	0.5631	0.0546	0.0530	1.6844	0.0574	0.0547	2.8056	0.0850	0.0679
-0.5432	0.2391	0.2216	0.5781	0.0539	0.0518	1.6993	0.0574	0.0547	2.8206	0.0855	0.0679
-0.5282	0.2299	0.2094	0.5930	0.0539	0.0518	1.7143	0.0585	0.0547	2.8355	0.0880	0.0701
-0.5133	0.2112	0.1956	0.6080	0.0539	0.0518	1.7292	0.0587	0.0547	2.8505	0.0880	0.0702
-0.4983	0.2097	0.1934	0.6229	0.0530	0.0509	1.7442	0.0587	0.0547	2.8654	0.0886	0.0702
-0.4834	0.2038	0.1898	0.6379	0.0534	0.0497	1.7591	0.0587	0.0547	2.8804	0.0886	0.0703
-0.4684	0.2027	0.1897	0.6528	0.0527	0.0490	1.7741	0.0587	0.0547	2.8953	0.0888	0.0721
-0.4535	0.1993	0.1874	0.6678	0.0515	0.0486	1.7890	0.0600	0.0547	2.9103	0.0904	0.0721
-0.4385	0.1960	0.1858	0.6827	0.0515	0.0486	1.8040	0.0600	0.0547	2.9252	0.0905	0.0722
-0.4236	0.1934	0.1841	0.6977	0.0515	0.0486	1.8189	0.0605	0.0547	2.9402	0.0910	0.0722
-0.4086	0.1789	0.1772	0.7126	0.0515	0.0478	1.8339	0.0609	0.0548	2.9551	0.0961	0.0755
-0.3937	0.1683	0.1636	0.7276	0.0516	0.0483	1.8488	0.0609	0.0548	2.9701	0.0966	0.0779
									3.0000	0.0971	0.0779

Tabla 4.9: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario A.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0000	0.4807	-0.3787	0.1652	0.1644	0.7425	0.0479	0.0467	1.8638	0.0525	0.0484
-1.4850	0.0000	0.4806	-0.3638	0.1622	0.1583	0.7575	0.0474	0.0461	1.8787	0.0525	0.0484
-1.4701	0.0000	0.4806	-0.3488	0.1570	0.1537	0.7724	0.0474	0.0461	1.8937	0.0525	0.0484
-1.4551	0.0000	0.4806	-0.3339	0.1516	0.1484	0.7874	0.0472	0.0461	1.9086	0.0526	0.0484
-1.4402	0.0000	0.4806	-0.3189	0.1453	0.1424	0.8023	0.0472	0.0461	1.9236	0.0528	0.0484
-1.4252	0.0001	0.4805	-0.3040	0.1453	0.1424	0.8173	0.0472	0.0461	1.9385	0.0528	0.0484
-1.4103	0.0001	0.4805	-0.2890	0.1388	0.1340	0.8322	0.0472	0.0461	1.9535	0.0528	0.0484
-1.3953	0.0001	0.4805	-0.2741	0.1342	0.1327	0.8472	0.0472	0.0461	1.9684	0.0528	0.0484
-1.3804	0.0001	0.4805	-0.2591	0.1305	0.1315	0.8621	0.0472	0.0460	1.9834	0.0528	0.0484
-1.3654	0.0001	0.4805	-0.2442	0.1254	0.1237	0.8771	0.0467	0.0455	1.9983	0.0528	0.0484
-1.3505	0.0001	0.4801	-0.2292	0.1222	0.1200	0.8920	0.0467	0.0455	2.0133	0.0532	0.0484
-1.3355	0.0002	0.4801	-0.2143	0.1173	0.1157	0.9070	0.0467	0.0455	2.0282	0.0532	0.0484
-1.3206	0.0002	0.4801	-0.1993	0.1167	0.1142	0.9219	0.0467	0.0457	2.0432	0.0538	0.0484
-1.3056	0.0002	0.4801	-0.1844	0.1078	0.1051	0.9369	0.0467	0.0457	2.0581	0.0538	0.0484
-1.2907	0.0002	0.4794	-0.1694	0.1076	0.1051	0.9518	0.0467	0.0457	2.0731	0.0560	0.0505
-1.2757	0.0003	0.4794	-0.1545	0.1059	0.1048	0.9668	0.0482	0.0472	2.0880	0.0560	0.0505
-1.2608	0.0003	0.4794	-0.1395	0.0988	0.0989	0.9817	0.0482	0.0472	2.1030	0.0561	0.0506
-1.2458	0.0003	0.4794	-0.1246	0.0975	0.0985	0.9967	0.0482	0.0472	2.1179	0.0574	0.0506
-1.2309	0.0004	0.4794	-0.1096	0.0975	0.0982	1.0116	0.0478	0.0469	2.1329	0.0579	0.0506
-1.2159	0.0004	0.4786	-0.0947	0.0968	0.0973	1.0266	0.0480	0.0469	2.1478	0.0580	0.0506
-1.2010	0.0005	0.4786	-0.0797	0.0955	0.0958	1.0415	0.0480	0.0469	2.1628	0.0581	0.0506
-1.1860	0.0006	0.4786	-0.0648	0.0933	0.0935	1.0565	0.0479	0.0472	2.1777	0.0581	0.0506
-1.1711	0.0010	0.4786	-0.0498	0.0890	0.0891	1.0714	0.0479	0.0472	2.1927	0.0582	0.0506
-1.1561	0.0010	0.4786	-0.0349	0.0858	0.0861	1.0864	0.0481	0.0472	2.2076	0.0583	0.0506
-1.1412	0.0013	0.4786	-0.0199	0.0844	0.0844	1.1013	0.0480	0.0472	2.2226	0.0583	0.0506
-1.1262	0.0013	0.4781	-0.0050	0.0820	0.0820	1.1163	0.0482	0.0472	2.2375	0.0584	0.0506
-1.1113	0.0016	0.4781	0.0100	0.0820	0.0820	1.1312	0.0482	0.0473	2.2525	0.0584	0.0506
-1.0963	0.0026	0.4781	0.0249	0.0788	0.0788	1.1462	0.0482	0.0473	2.2674	0.0588	0.0506
-1.0814	0.0031	0.4781	0.0399	0.0768	0.0767	1.1611	0.0483	0.0473	2.2824	0.0588	0.0506
-1.0664	0.0037	0.4696	0.0548	0.0768	0.0767	1.1761	0.0484	0.0478	2.2973	0.0588	0.0506
-1.0515	0.0041	0.4671	0.0698	0.0763	0.0763	1.1910	0.0478	0.0469	2.3123	0.0588	0.0506
-1.0365	0.0059	0.4659	0.0847	0.0760	0.0760	1.2060	0.0478	0.0469	2.3272	0.0593	0.0507
-1.0216	0.0077	0.4648	0.0997	0.0759	0.0759	1.2209	0.0478	0.0469	2.3422	0.0598	0.0511
-1.0066	0.0078	0.4644	0.1146	0.0759	0.0758	1.2359	0.0478	0.0469	2.3571	0.0598	0.0511
-0.9917	0.5842	0.4640	0.1296	0.0747	0.0747	1.2508	0.0478	0.0469	2.3721	0.0606	0.0511
-0.9767	0.5839	0.4640	0.1445	0.0729	0.0728	1.2658	0.0478	0.0477	2.3870	0.0606	0.0511
-0.9618	0.5812	0.4634	0.1595	0.0728	0.0728	1.2807	0.0485	0.0484	2.4020	0.0616	0.0521
-0.9468	0.5738	0.4634	0.1744	0.0710	0.0708	1.2957	0.0485	0.0484	2.4169	0.0616	0.0521
-0.9319	0.5720	0.4634	0.1894	0.0687	0.0686	1.3106	0.0485	0.0484	2.4319	0.0632	0.0521
-0.9169	0.5631	0.4634	0.2043	0.0678	0.0675	1.3256	0.0488	0.0484	2.4468	0.0634	0.0521
-0.9020	0.5527	0.4630	0.2193	0.0653	0.0650	1.3405	0.0488	0.0491	2.4618	0.0634	0.0521
-0.8870	0.5488	0.4417	0.2342	0.0649	0.0643	1.3555	0.0488	0.0491	2.4767	0.0636	0.0522
-0.8721	0.5444	0.4322	0.2492	0.0649	0.0643	1.3704	0.0491	0.0491	2.4917	0.0640	0.0522
-0.8571	0.5418	0.4287	0.2641	0.0631	0.0623	1.3854	0.0491	0.0491	2.5066	0.0640	0.0522
-0.8422	0.5358	0.4250	0.2791	0.0628	0.0620	1.4003	0.0492	0.0491	2.5216	0.0642	0.0522
-0.8272	0.5106	0.4250	0.2940	0.0625	0.0620	1.4153	0.0495	0.0495	2.5365	0.0642	0.0522
-0.8123	0.4942	0.4228	0.3090	0.0616	0.0612	1.4302	0.0495	0.0495	2.5515	0.0642	0.0522
-0.7973	0.4882	0.4227	0.3239	0.0616	0.0611	1.4452	0.0502	0.0500	2.5664	0.0642	0.0523
-0.7824	0.4821	0.4227	0.3389	0.0610	0.0606	1.4601	0.0481	0.0479	2.5814	0.0652	0.0524
-0.7674	0.4760	0.4187	0.3538	0.0611	0.0606	1.4751	0.0482	0.0479	2.5963	0.0654	0.0524
-0.7525	0.4724	0.3812	0.3688	0.0609	0.0602	1.4900	0.0482	0.0480	2.6113	0.0654	0.0524
-0.7375	0.4536	0.3652	0.3837	0.0596	0.0590	1.5050	0.0482	0.0480	2.6262	0.0659	0.0524
-0.7226	0.4168	0.3588	0.3987	0.0595	0.0590	1.5199	0.0483	0.0480	2.6412	0.0659	0.0525
-0.7076	0.4052	0.3573	0.4136	0.0583	0.0577	1.5349	0.0492	0.0480	2.6561	0.0675	0.0540
-0.6927	0.3960	0.3524	0.4286	0.0583	0.0577	1.5498	0.0492	0.0481	2.6711	0.0676	0.0542
-0.6777	0.3859	0.3524	0.4435	0.0572	0.0566	1.5648	0.0494	0.0482	2.6860	0.0676	0.0543
-0.6628	0.3855	0.3522	0.4585	0.0570	0.0566	1.5797	0.0494	0.0482	2.7010	0.0678	0.0544
-0.6478	0.3734	0.3409	0.4734	0.0570	0.0566	1.5947	0.0494	0.0482	2.7159	0.0678	0.0544
-0.6329	0.3446	0.3046	0.4884	0.0570	0.0564	1.6096	0.0494	0.0482	2.7309	0.0692	0.0548
-0.6179	0.3238	0.2900	0.5033	0.0551	0.0545	1.6246	0.0496	0.0482	2.7458	0.0692	0.0548
-0.6030	0.3140	0.2826	0.5183	0.0551	0.0545	1.6395	0.0496	0.0482	2.7608	0.0692	0.0550
-0.5880	0.3024	0.2820	0.5332	0.0551	0.0543	1.6545	0.0497	0.0483	2.7757	0.0694	0.0551
-0.5731	0.2942	0.2728	0.5482	0.0550	0.0543	1.6694	0.0498	0.0484	2.7907	0.0700	0.0552
-0.5581	0.2890	0.2727	0.5631	0.0526	0.0519	1.6844	0.0498	0.0484	2.8056	0.0710	0.0555
-0.5432	0.2816	0.2710	0.5781	0.0526	0.0518	1.6993	0.0498	0.0484	2.8206	0.0712	0.0555
-0.5282	0.2705	0.2520	0.5930	0.0526	0.0518	1.7143	0.0502	0.0484	2.8355	0.0730	0.0574
-0.5133	0.2333	0.2247	0.6080	0.0526	0.0518	1.7292	0.0505	0.0484	2.8505	0.0730	0.0574
-0.4983	0.2314	0.2163	0.6229	0.0511	0.0503	1.7442	0.0505	0.0484	2.8654	0.0734	0.0574
-0.4834	0.2189	0.2088	0.6379	0.0513	0.0500	1.7591	0.0505	0.0484	2.8804	0.0734	0.0574
-0.4684	0.2181	0.2083	0.6528	0.0494	0.0482	1.7741	0.0505	0.0484	2.8953	0.0736	0.0580
-0.4535	0.2098	0.2015	0.6678	0.0490	0.0480	1.7890	0.0517	0.0484	2.9103	0.0750	0.0580
-0.4385	0.2058	0.1982	0.6827	0.0490	0.0480	1.8040	0.0517	0.0484	2.9252	0.0750	0.0580
-0.4236	0.2015	0.1962	0.6977	0.0490	0.0480	1.8189	0.0518	0.0484	2.9402	0.0752	0.0580
-0.4086	0.1859	0.1868	0.7126	0.0490	0.0478	1.8339	0.0524	0.0484	2.9551	0.0789	0.0607
-0.3937	0.1782	0.1760	0.7276	0.0491	0.0479	1.8488	0.0524	0.0484	2.9701	0.0791	0.0614
									3.0000	0.0796	0.0614

Tabla 4.10: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario A.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0000	0.6093	-0.3787	0.1366	0.1368	0.7425	0.0411	0.0412	1.8638	0.0396	0.0370
-1.4850	0.0000	0.6092	-0.3638	0.1353	0.1334	0.7575	0.0408	0.0409	1.8787	0.0396	0.0370
-1.4701	0.0000	0.6092	-0.3488	0.1296	0.1284	0.7724	0.0408	0.0409	1.8937	0.0396	0.0370
-1.4551	0.0000	0.6092	-0.3339	0.1263	0.1251	0.7874	0.0408	0.0409	1.9086	0.0399	0.0370
-1.4402	0.0000	0.6092	-0.3189	0.1218	0.1208	0.8023	0.0408	0.0408	1.9236	0.0400	0.0370
-1.4252	0.0000	0.6092	-0.3040	0.1218	0.1208	0.8173	0.0408	0.0408	1.9385	0.0400	0.0370
-1.4103	0.0000	0.6092	-0.2890	0.1189	0.1163	0.8322	0.0408	0.0408	1.9535	0.0400	0.0370
-1.3953	0.0000	0.6092	-0.2741	0.1144	0.1142	0.8472	0.0408	0.0408	1.9684	0.0400	0.0370
-1.3804	0.0000	0.6092	-0.2591	0.1131	0.1139	0.8621	0.0408	0.0408	1.9834	0.0400	0.0370
-1.3654	0.0000	0.6092	-0.2442	0.1095	0.1094	0.8771	0.0405	0.0405	1.9983	0.0400	0.0370
-1.3505	0.0000	0.6089	-0.2292	0.1082	0.1078	0.8920	0.0405	0.0405	2.0133	0.0400	0.0370
-1.3355	0.0000	0.6089	-0.2143	0.1038	0.1036	0.9070	0.0405	0.0405	2.0282	0.0400	0.0370
-1.3206	0.0000	0.6089	-0.1993	0.1034	0.1029	0.9219	0.0406	0.0405	2.0432	0.0406	0.0370
-1.3056	0.0000	0.6089	-0.1844	0.0978	0.0968	0.9369	0.0406	0.0405	2.0581	0.0408	0.0370
-1.2907	0.0000	0.6086	-0.1694	0.0978	0.0968	0.9518	0.0406	0.0405	2.0731	0.0447	0.0406
-1.2757	0.0000	0.6086	-0.1545	0.0972	0.0964	0.9668	0.0416	0.0415	2.0880	0.0447	0.0406
-1.2608	0.0001	0.6086	-0.1395	0.0939	0.0934	0.9817	0.0416	0.0415	2.1030	0.0447	0.0406
-1.2458	0.0001	0.6086	-0.1246	0.0919	0.0920	0.9967	0.0416	0.0415	2.1179	0.0457	0.0406
-1.2309	0.0000	0.6086	-0.1096	0.0918	0.0918	1.0116	0.0406	0.0406	2.1329	0.0461	0.0406
-1.2159	0.0000	0.6085	-0.0947	0.0916	0.0916	1.0266	0.0406	0.0406	2.1478	0.0461	0.0406
-1.2010	0.0000	0.6085	-0.0797	0.0882	0.0882	1.0415	0.0406	0.0406	2.1628	0.0461	0.0406
-1.1860	0.0000	0.6085	-0.0648	0.0876	0.0876	1.0565	0.0406	0.0406	2.1777	0.0461	0.0406
-1.1711	0.0001	0.6085	-0.0498	0.0839	0.0839	1.0714	0.0406	0.0406	2.1927	0.0461	0.0406
-1.1561	0.0002	0.6085	-0.0349	0.0824	0.0826	1.0864	0.0408	0.0406	2.2076	0.0461	0.0406
-1.1412	0.0004	0.6085	-0.0199	0.0819	0.0819	1.1013	0.0408	0.0406	2.2226	0.0461	0.0406
-1.1262	0.0004	0.6084	-0.0050	0.0796	0.0796	1.1163	0.0408	0.0406	2.2375	0.0463	0.0406
-1.1113	0.0005	0.6084	0.0100	0.0792	0.0792	1.1312	0.0409	0.0406	2.2525	0.0463	0.0406
-1.0963	0.0007	0.6084	0.0249	0.0777	0.0777	1.1462	0.0409	0.0406	2.2674	0.0464	0.0406
-1.0814	0.0008	0.6084	0.0399	0.0761	0.0761	1.1611	0.0409	0.0406	2.2824	0.0464	0.0406
-1.0664	0.0010	0.5802	0.0548	0.0761	0.0761	1.1761	0.0410	0.0406	2.2973	0.0464	0.0406
-1.0515	0.0013	0.5660	0.0698	0.0759	0.0759	1.1910	0.0389	0.0384	2.3123	0.0464	0.0406
-1.0365	0.0017	0.5616	0.0847	0.0740	0.0740	1.2060	0.0389	0.0384	2.3272	0.0466	0.0407
-1.0216	0.0018	0.5586	0.0997	0.0738	0.0738	1.2209	0.0389	0.0384	2.3422	0.0468	0.0408
-1.0066	0.0020	0.5586	0.1146	0.0738	0.0738	1.2359	0.0390	0.0384	2.3571	0.0468	0.0408
-0.9917	0.6920	0.5562	0.1296	0.0694	0.0694	1.2508	0.0390	0.0384	2.3721	0.0470	0.0408
-0.9767	0.6920	0.5562	0.1445	0.0688	0.0688	1.2658	0.0390	0.0385	2.3870	0.0470	0.0408
-0.9618	0.6912	0.5550	0.1595	0.0688	0.0688	1.2807	0.0397	0.0392	2.4020	0.0493	0.0430
-0.9468	0.6852	0.5550	0.1744	0.0647	0.0647	1.2957	0.0397	0.0392	2.4169	0.0493	0.0430
-0.9319	0.6830	0.5550	0.1894	0.0640	0.0640	1.3106	0.0397	0.0392	2.4319	0.0510	0.0430
-0.9169	0.6595	0.5549	0.2043	0.0639	0.0638	1.3256	0.0397	0.0392	2.4468	0.0514	0.0430
-0.9020	0.6317	0.5542	0.2193	0.0601	0.0601	1.3405	0.0397	0.0394	2.4618	0.0514	0.0430
-0.8870	0.6258	0.5070	0.2342	0.0601	0.0600	1.3555	0.0397	0.0394	2.4767	0.0515	0.0430
-0.8721	0.6182	0.4773	0.2492	0.0601	0.0600	1.3704	0.0398	0.0394	2.4917	0.0522	0.0430
-0.8571	0.6159	0.4678	0.2641	0.0582	0.0582	1.3854	0.0398	0.0394	2.5066	0.0522	0.0430
-0.8422	0.6110	0.4601	0.2791	0.0580	0.0579	1.4003	0.0400	0.0394	2.5216	0.0523	0.0430
-0.8272	0.5552	0.4601	0.2940	0.0579	0.0579	1.4153	0.0402	0.0398	2.5365	0.0523	0.0430
-0.8123	0.5184	0.4540	0.3090	0.0578	0.0577	1.4302	0.0402	0.0398	2.5515	0.0523	0.0430
-0.7973	0.5078	0.4539	0.3239	0.0577	0.0577	1.4452	0.0407	0.0401	2.5664	0.0523	0.0430
-0.7824	0.5022	0.4539	0.3389	0.0573	0.0573	1.4601	0.0371	0.0364	2.5814	0.0525	0.0431
-0.7674	0.4925	0.4479	0.3538	0.0573	0.0573	1.4751	0.0371	0.0364	2.5963	0.0534	0.0431
-0.7525	0.4888	0.3872	0.3688	0.0573	0.0572	1.4900	0.0371	0.0365	2.6113	0.0534	0.0431
-0.7375	0.4626	0.3559	0.3837	0.0558	0.0557	1.5050	0.0371	0.0365	2.6262	0.0538	0.0431
-0.7226	0.3991	0.3448	0.3987	0.0556	0.0557	1.5199	0.0372	0.0365	2.6412	0.0538	0.0431
-0.7076	0.3832	0.3428	0.4136	0.0553	0.0554	1.5349	0.0375	0.0365	2.6561	0.0553	0.0444
-0.6927	0.3678	0.3346	0.4286	0.0552	0.0553	1.5498	0.0375	0.0366	2.6711	0.0554	0.0444
-0.6777	0.3554	0.3344	0.4435	0.0524	0.0525	1.5648	0.0377	0.0367	2.6860	0.0554	0.0444
-0.6628	0.3540	0.3344	0.4585	0.0522	0.0525	1.5797	0.0377	0.0367	2.7010	0.0554	0.0444
-0.6478	0.3414	0.3208	0.4734	0.0522	0.0525	1.5947	0.0377	0.0367	2.7159	0.0554	0.0444
-0.6329	0.3088	0.2780	0.4884	0.0522	0.0525	1.6096	0.0377	0.0368	2.7309	0.0565	0.0445
-0.6179	0.2820	0.2534	0.5033	0.0484	0.0486	1.6246	0.0379	0.0368	2.7458	0.0566	0.0445
-0.6030	0.2666	0.2436	0.5183	0.0484	0.0486	1.6395	0.0380	0.0368	2.7608	0.0566	0.0445
-0.5880	0.2531	0.2426	0.5332	0.0484	0.0486	1.6545	0.0380	0.0368	2.7757	0.0566	0.0446
-0.5731	0.2436	0.2298	0.5482	0.0484	0.0486	1.6694	0.0380	0.0369	2.7907	0.0573	0.0446
-0.5581	0.2374	0.2298	0.5631	0.0452	0.0454	1.6844	0.0380	0.0369	2.8056	0.0576	0.0447
-0.5432	0.2330	0.2292	0.5781	0.0452	0.0454	1.6993	0.0380	0.0369	2.8206	0.0576	0.0447
-0.5282	0.2250	0.2140	0.5930	0.0451	0.0454	1.7143	0.0383	0.0369	2.8355	0.0583	0.0454
-0.5133	0.1934	0.1911	0.6080	0.0451	0.0454	1.7292	0.0385	0.0369	2.8505	0.0583	0.0454
-0.4983	0.1900	0.1812	0.6229	0.0441	0.0444	1.7442	0.0385	0.0369	2.8654	0.0584	0.0454
-0.4834	0.1772	0.1724	0.6379	0.0441	0.0442	1.7591	0.0385	0.0369	2.8804	0.0584	0.0454
-0.4684	0.1758	0.1713	0.6528	0.0420	0.0421	1.7741	0.0385	0.0369	2.8953	0.0589	0.0455
-0.4535	0.1684	0.1650	0.6678	0.0419	0.0421	1.7890	0.0391	0.0369	2.9103	0.0595	0.0455
-0.4385	0.1644	0.1610	0.6827	0.0419	0.0421	1.8040	0.0391	0.0369	2.9252	0.0595	0.0455
-0.4236	0.1608	0.1589	0.6977	0.0419	0.0421	1.8189	0.0392	0.0369	2.9402	0.0596	0.0455
-0.4086	0.1494	0.1514	0.7126	0.0419	0.0421	1.8339	0.0396	0.0370	2.9551	0.0610	0.0466
-0.3937	0.1454	0.1455	0.7276	0.0419	0.0421	1.8488	0.0396	0.0370	2.9701	0.0610	0.0468
									3.0000	0.0616	0.0468

Tabla 4.11: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario A.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0000	0.6732	-0.3787	0.1266	0.1280	0.7425	0.0358	0.0357	1.8638	0.0298	0.0283
-1.4850	0.0000	0.6732	-0.3638	0.1260	0.1252	0.7575	0.0355	0.0354	1.8787	0.0298	0.0283
-1.4701	0.0000	0.6732	-0.3488	0.1224	0.1217	0.7724	0.0355	0.0354	1.8937	0.0298	0.0283
-1.4551	0.0000	0.6732	-0.3339	0.1193	0.1186	0.7874	0.0355	0.0354	1.9086	0.0301	0.0283
-1.4402	0.0000	0.6732	-0.3189	0.1169	0.1164	0.8023	0.0355	0.0354	1.9236	0.0302	0.0283
-1.4252	0.0000	0.6731	-0.3040	0.1168	0.1163	0.8173	0.0355	0.0354	1.9385	0.0302	0.0283
-1.4103	0.0000	0.6731	-0.2890	0.1152	0.1137	0.8322	0.0355	0.0354	1.9535	0.0302	0.0283
-1.3953	0.0000	0.6731	-0.2741	0.1101	0.1100	0.8472	0.0355	0.0354	1.9684	0.0302	0.0283
-1.3804	0.0000	0.6731	-0.2591	0.1093	0.1098	0.8621	0.0354	0.0354	1.9834	0.0302	0.0283
-1.3654	0.0000	0.6731	-0.2442	0.1045	0.1044	0.8771	0.0354	0.0353	1.9983	0.0302	0.0283
-1.3505	0.0000	0.6728	-0.2292	0.1038	0.1036	0.8920	0.0354	0.0353	2.0133	0.0302	0.0283
-1.3355	0.0000	0.6728	-0.2143	0.1004	0.1002	0.9070	0.0354	0.0353	2.0282	0.0302	0.0283
-1.3206	0.0000	0.6728	-0.1993	0.1004	0.1000	0.9219	0.0354	0.0353	2.0432	0.0303	0.0283
-1.3056	0.0000	0.6728	-0.1844	0.0962	0.0958	0.9369	0.0354	0.0353	2.0581	0.0305	0.0283
-1.2907	0.0000	0.6728	-0.1694	0.0962	0.0958	0.9518	0.0354	0.0353	2.0731	0.0346	0.0320
-1.2757	0.0000	0.6728	-0.1545	0.0960	0.0956	0.9668	0.0357	0.0357	2.0880	0.0346	0.0320
-1.2608	0.0000	0.6728	-0.1395	0.0938	0.0936	0.9817	0.0357	0.0357	2.1030	0.0346	0.0320
-1.2458	0.0000	0.6728	-0.1246	0.0899	0.0899	0.9967	0.0357	0.0357	2.1179	0.0352	0.0320
-1.2309	0.0000	0.6728	-0.1096	0.0899	0.0899	1.0116	0.0341	0.0340	2.1329	0.0356	0.0320
-1.2159	0.0000	0.6728	-0.0947	0.0898	0.0898	1.0266	0.0341	0.0340	2.1478	0.0356	0.0320
-1.2010	0.0000	0.6728	-0.0797	0.0854	0.0854	1.0415	0.0341	0.0340	2.1628	0.0356	0.0320
-1.1860	0.0000	0.6728	-0.0648	0.0853	0.0853	1.0565	0.0341	0.0340	2.1777	0.0356	0.0320
-1.1711	0.0000	0.6728	-0.0498	0.0804	0.0804	1.0714	0.0341	0.0340	2.1927	0.0356	0.0320
-1.1561	0.0000	0.6728	-0.0349	0.0799	0.0799	1.0864	0.0341	0.0340	2.2076	0.0356	0.0320
-1.1412	0.0001	0.6728	-0.0199	0.0798	0.0798	1.1013	0.0341	0.0340	2.2226	0.0356	0.0320
-1.1262	0.0001	0.6728	-0.0050	0.0776	0.0776	1.1163	0.0341	0.0340	2.2375	0.0358	0.0320
-1.1113	0.0001	0.6728	0.0100	0.0764	0.0764	1.1312	0.0341	0.0340	2.2525	0.0358	0.0320
-1.0963	0.0002	0.6728	0.0249	0.0758	0.0758	1.1462	0.0341	0.0340	2.2674	0.0358	0.0320
-1.0814	0.0002	0.6728	0.0399	0.0751	0.0751	1.1611	0.0342	0.0340	2.2824	0.0358	0.0320
-1.0664	0.0002	0.6214	0.0548	0.0751	0.0751	1.1761	0.0342	0.0340	2.2973	0.0358	0.0320
-1.0515	0.0002	0.5903	0.0698	0.0750	0.0750	1.1910	0.0309	0.0306	2.3123	0.0358	0.0320
-1.0365	0.0004	0.5825	0.0847	0.0706	0.0706	1.2060	0.0309	0.0306	2.3272	0.0360	0.0320
-1.0216	0.0005	0.5761	0.0997	0.0705	0.0705	1.2209	0.0309	0.0306	2.3422	0.0362	0.0320
-1.0066	0.0008	0.5761	0.1146	0.0705	0.0704	1.2359	0.0309	0.0306	2.3571	0.0362	0.0320
-0.9917	0.7419	0.5722	0.1296	0.0648	0.0648	1.2508	0.0309	0.0306	2.3721	0.0362	0.0320
-0.9767	0.7419	0.5722	0.1445	0.0646	0.0646	1.2658	0.0309	0.0307	2.3870	0.0363	0.0320
-0.9618	0.7410	0.5705	0.1595	0.0646	0.0646	1.2807	0.0316	0.0313	2.4020	0.0397	0.0354
-0.9468	0.7366	0.5705	0.1744	0.0594	0.0594	1.2957	0.0316	0.0313	2.4169	0.0397	0.0354
-0.9319	0.7334	0.5705	0.1894	0.0589	0.0590	1.3106	0.0316	0.0313	2.4319	0.0409	0.0354
-0.9169	0.6932	0.5704	0.2043	0.0588	0.0589	1.3256	0.0316	0.0313	2.4468	0.0413	0.0354
-0.9020	0.6397	0.5696	0.2193	0.0553	0.0553	1.3405	0.0316	0.0313	2.4618	0.0413	0.0354
-0.8870	0.6300	0.5049	0.2342	0.0553	0.0552	1.3555	0.0316	0.0313	2.4767	0.0413	0.0354
-0.8721	0.6196	0.4572	0.2492	0.0553	0.0552	1.3704	0.0318	0.0313	2.4917	0.0418	0.0354
-0.8571	0.6171	0.4436	0.2641	0.0541	0.0540	1.3854	0.0318	0.0313	2.5066	0.0418	0.0354
-0.8422	0.6128	0.4328	0.2791	0.0534	0.0534	1.4003	0.0319	0.0313	2.5216	0.0420	0.0354
-0.8272	0.5385	0.4328	0.2940	0.0534	0.0534	1.4153	0.0319	0.0316	2.5365	0.0420	0.0354
-0.8123	0.4832	0.4251	0.3090	0.0534	0.0533	1.4302	0.0319	0.0316	2.5515	0.0420	0.0354
-0.7973	0.4690	0.4248	0.3239	0.0534	0.0533	1.4452	0.0321	0.0317	2.5664	0.0420	0.0354
-0.7824	0.4648	0.4247	0.3389	0.0529	0.0528	1.4601	0.0284	0.0280	2.5814	0.0421	0.0355
-0.7674	0.4527	0.4173	0.3538	0.0529	0.0528	1.4751	0.0284	0.0280	2.5963	0.0431	0.0355
-0.7525	0.4494	0.3530	0.3688	0.0529	0.0528	1.4900	0.0284	0.0281	2.6113	0.0431	0.0355
-0.7375	0.4218	0.3118	0.3837	0.0505	0.0504	1.5050	0.0284	0.0281	2.6262	0.0434	0.0355
-0.7226	0.3497	0.2990	0.3987	0.0504	0.0504	1.5199	0.0284	0.0281	2.6412	0.0434	0.0355
-0.7076	0.3314	0.2966	0.4136	0.0503	0.0504	1.5349	0.0286	0.0281	2.6561	0.0456	0.0372
-0.6927	0.3140	0.2872	0.4286	0.0502	0.0503	1.5498	0.0286	0.0281	2.6711	0.0456	0.0372
-0.6777	0.3026	0.2869	0.4435	0.0457	0.0458	1.5648	0.0286	0.0282	2.6860	0.0456	0.0372
-0.6628	0.3006	0.2868	0.4585	0.0457	0.0458	1.5797	0.0286	0.0282	2.7010	0.0456	0.0372
-0.6478	0.2892	0.2764	0.4734	0.0457	0.0458	1.5947	0.0286	0.0282	2.7159	0.0456	0.0372
-0.6329	0.2629	0.2394	0.4884	0.0457	0.0458	1.6096	0.0286	0.0282	2.7309	0.0462	0.0372
-0.6179	0.2400	0.2152	0.5033	0.0415	0.0416	1.6246	0.0286	0.0282	2.7458	0.0463	0.0372
-0.6030	0.2242	0.2058	0.5183	0.0415	0.0416	1.6395	0.0286	0.0282	2.7608	0.0463	0.0372
-0.5880	0.2122	0.2049	0.5332	0.0415	0.0416	1.6545	0.0286	0.0282	2.7757	0.0463	0.0372
-0.5731	0.2050	0.1936	0.5482	0.0415	0.0416	1.6694	0.0288	0.0283	2.7907	0.0470	0.0372
-0.5581	0.1983	0.1935	0.5631	0.0382	0.0383	1.6844	0.0288	0.0283	2.8056	0.0472	0.0373
-0.5432	0.1953	0.1931	0.5781	0.0382	0.0383	1.6993	0.0288	0.0283	2.8206	0.0472	0.0373
-0.5282	0.1904	0.1820	0.5930	0.0382	0.0383	1.7143	0.0291	0.0283	2.8355	0.0475	0.0376
-0.5133	0.1680	0.1675	0.6080	0.0382	0.0383	1.7292	0.0292	0.0283	2.8505	0.0475	0.0376
-0.4983	0.1640	0.1590	0.6229	0.0378	0.0379	1.7442	0.0292	0.0283	2.8654	0.0476	0.0376
-0.4834	0.1544	0.1519	0.6379	0.0378	0.0379	1.7591	0.0292	0.0283	2.8804	0.0476	0.0376
-0.4684	0.1533	0.1508	0.6528	0.0361	0.0362	1.7741	0.0293	0.0283	2.8953	0.0480	0.0377
-0.4535	0.1478	0.1461	0.6678	0.0361	0.0362	1.7890	0.0295	0.0283	2.9103	0.0488	0.0377
-0.4385	0.1452	0.1435	0.6827	0.0361	0.0362	1.8040	0.0295	0.0283	2.9252	0.0488	0.0377
-0.4236	0.1429	0.1421	0.6977	0.0361	0.0362	1.8189	0.0296	0.0283	2.9402	0.0488	0.0377
-0.4086	0.1356	0.1363	0.7126	0.0361	0.0362	1.8339	0.0298	0.0283	2.9551	0.0496	0.0381
-0.3937	0.1335	0.1339	0.7276	0.0361	0.0362	1.8488	0.0298	0.0283	2.9701	0.0496	0.0382
									3.0000	0.0500	0.0382

Tabla 4.12: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario A.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.4701	0.0668	0.0799	-0.3488	0.0629	0.0616	0.7724	0.0532	0.0528	1.8937	0.0525	0.0520
-1.4551	0.0668	0.0799	-0.3339	0.0629	0.0616	0.7874	0.0530	0.0525	1.9086	0.0526	0.0520
-1.4402	0.0666	0.0799	-0.3189	0.0628	0.0615	0.8023	0.0526	0.0525	1.9236	0.0526	0.0520
-1.4252	0.0665	0.0798	-0.3040	0.0623	0.0611	0.8173	0.0522	0.0511	1.9385	0.0534	0.0524
-1.4103	0.0661	0.0798	-0.2890	0.0623	0.0611	0.8322	0.0519	0.0508	1.9535	0.0534	0.0524
-1.3953	0.0656	0.0798	-0.2741	0.0623	0.0611	0.8472	0.0519	0.0509	1.9684	0.0534	0.0524
-1.3804	0.0656	0.0798	-0.2591	0.0623	0.0611	0.8621	0.0514	0.0507	1.9834	0.0535	0.0524
-1.3654	0.0656	0.0798	-0.2442	0.0623	0.0611	0.8771	0.0513	0.0507	1.9983	0.0536	0.0524
-1.3505	0.0655	0.0798	-0.2292	0.0623	0.0611	0.8920	0.0512	0.0506	2.0133	0.0539	0.0524
-1.3355	0.0655	0.0798	-0.2143	0.0623	0.0611	0.9070	0.0511	0.0506	2.0282	0.0539	0.0525
-1.3206	0.0654	0.0798	-0.1993	0.0620	0.0609	0.9219	0.0510	0.0502	2.0432	0.0539	0.0525
-1.3056	0.0647	0.0795	-0.1844	0.0619	0.0607	0.9369	0.0508	0.0502	2.0581	0.0540	0.0526
-1.2907	0.0643	0.0794	-0.1694	0.0619	0.0607	0.9518	0.0506	0.0496	2.0731	0.0540	0.0526
-1.2757	0.0643	0.0794	-0.1545	0.0618	0.0606	0.9668	0.0506	0.0496	2.0880	0.0540	0.0531
-1.2608	0.0642	0.0792	-0.1395	0.0610	0.0603	0.9817	0.0504	0.0496	2.1030	0.0540	0.0531
-1.2458	0.0642	0.0791	-0.1246	0.0607	0.0601	0.9967	0.0503	0.0497	2.1179	0.0542	0.0531
-1.2309	0.0637	0.0791	-0.1096	0.0600	0.0598	1.0116	0.0500	0.0495	2.1329	0.0544	0.0531
-1.2159	0.0633	0.0790	-0.0947	0.0600	0.0598	1.0266	0.0500	0.0495	2.1478	0.0544	0.0531
-1.2010	0.0634	0.0790	-0.0797	0.0598	0.0598	1.0415	0.0500	0.0495	2.1628	0.0544	0.0531
-1.1860	0.0632	0.0790	-0.0648	0.0598	0.0598	1.0565	0.0502	0.0497	2.1777	0.0544	0.0531
-1.1711	0.0631	0.0790	-0.0498	0.0598	0.0598	1.0714	0.0502	0.0497	2.1927	0.0550	0.0537
-1.1561	0.0631	0.0790	-0.0349	0.0598	0.0598	1.0864	0.0502	0.0496	2.2076	0.0550	0.0537
-1.1412	0.0629	0.0790	-0.0199	0.0597	0.0596	1.1013	0.0502	0.0496	2.2226	0.0550	0.0537
-1.1262	0.0624	0.0783	-0.0050	0.0597	0.0596	1.1163	0.0502	0.0494	2.2375	0.0556	0.0537
-1.1113	0.0623	0.0782	0.0100	0.0595	0.0595	1.1312	0.0502	0.0494	2.2525	0.0558	0.0537
-1.0963	0.0623	0.0782	0.0249	0.0595	0.0595	1.1462	0.0501	0.0494	2.2674	0.0558	0.0537
-1.0814	0.0623	0.0782	0.0399	0.0595	0.0595	1.1611	0.0504	0.0494	2.2824	0.0558	0.0542
-1.0664	0.0617	0.0774	0.0548	0.0594	0.0595	1.1761	0.0504	0.0494	2.2973	0.0558	0.0542
-1.0515	0.0621	0.0772	0.0698	0.0594	0.0594	1.1910	0.0503	0.0494	2.3123	0.0560	0.0542
-1.0365	0.0624	0.0772	0.0847	0.0590	0.0590	1.2060	0.0503	0.0495	2.3272	0.0562	0.0542
-1.0216	0.0618	0.0766	0.0997	0.0590	0.0590	1.2209	0.0503	0.0495	2.3422	0.0562	0.0542
-1.0066	0.0612	0.0762	0.1146	0.0588	0.0590	1.2359	0.0504	0.0495	2.3571	0.0563	0.0542
-0.9917	0.0874	0.0762	0.1296	0.0588	0.0590	1.2508	0.0506	0.0497	2.3721	0.0563	0.0542
-0.9767	0.0857	0.0751	0.1445	0.0588	0.0590	1.2658	0.0506	0.0497	2.3870	0.0563	0.0542
-0.9618	0.0856	0.0751	0.1595	0.0588	0.0590	1.2807	0.0506	0.0497	2.4020	0.0563	0.0542
-0.9468	0.0854	0.0746	0.1744	0.0588	0.0590	1.2957	0.0506	0.0502	2.4169	0.0570	0.0549
-0.9319	0.0849	0.0746	0.1894	0.0586	0.0590	1.3106	0.0506	0.0502	2.4319	0.0571	0.0551
-0.9169	0.0835	0.0738	0.2043	0.0584	0.0589	1.3256	0.0500	0.0498	2.4468	0.0572	0.0551
-0.9020	0.0822	0.0725	0.2193	0.0583	0.0586	1.3405	0.0499	0.0498	2.4618	0.0572	0.0551
-0.8870	0.0810	0.0720	0.2342	0.0580	0.0584	1.3555	0.0500	0.0499	2.4767	0.0572	0.0552
-0.8721	0.0799	0.0708	0.2492	0.0576	0.0580	1.3704	0.0500	0.0499	2.4917	0.0573	0.0552
-0.8571	0.0791	0.0706	0.2641	0.0573	0.0577	1.3854	0.0500	0.0499	2.5066	0.0573	0.0552
-0.8422	0.0786	0.0705	0.2791	0.0569	0.0575	1.4003	0.0504	0.0500	2.5216	0.0573	0.0552
-0.8272	0.0776	0.0696	0.2940	0.0568	0.0574	1.4153	0.0504	0.0500	2.5365	0.0577	0.0552
-0.8123	0.0772	0.0696	0.3090	0.0566	0.0573	1.4302	0.0507	0.0506	2.5515	0.0578	0.0552
-0.7973	0.0762	0.0692	0.3239	0.0563	0.0572	1.4452	0.0507	0.0506	2.5664	0.0578	0.0552
-0.7824	0.0760	0.0682	0.3389	0.0563	0.0572	1.4601	0.0508	0.0506	2.5814	0.0578	0.0562
-0.7674	0.0748	0.0682	0.3538	0.0562	0.0570	1.4751	0.0510	0.0508	2.5963	0.0584	0.0562
-0.7525	0.0744	0.0682	0.3688	0.0562	0.0570	1.4900	0.0511	0.0509	2.6113	0.0586	0.0562
-0.7375	0.0740	0.0682	0.3837	0.0560	0.0569	1.5050	0.0511	0.0509	2.6262	0.0586	0.0562
-0.7226	0.0735	0.0674	0.3987	0.0560	0.0569	1.5199	0.0511	0.0509	2.6412	0.0588	0.0562
-0.7076	0.0732	0.0674	0.4136	0.0556	0.0564	1.5349	0.0511	0.0512	2.6561	0.0588	0.0562
-0.6927	0.0729	0.0673	0.4286	0.0556	0.0564	1.5498	0.0511	0.0512	2.6711	0.0589	0.0562
-0.6777	0.0721	0.0670	0.4435	0.0556	0.0563	1.5648	0.0512	0.0512	2.6860	0.0589	0.0562
-0.6628	0.0712	0.0657	0.4585	0.0556	0.0563	1.5797	0.0513	0.0513	2.7010	0.0589	0.0568
-0.6478	0.0708	0.0656	0.4734	0.0556	0.0558	1.5947	0.0514	0.0515	2.7159	0.0591	0.0568
-0.6329	0.0706	0.0656	0.4884	0.0556	0.0558	1.6096	0.0515	0.0515	2.7309	0.0593	0.0568
-0.6179	0.0700	0.0656	0.5033	0.0553	0.0558	1.6246	0.0516	0.0517	2.7458	0.0597	0.0571
-0.6030	0.0698	0.0655	0.5183	0.0552	0.0558	1.6395	0.0519	0.0517	2.7608	0.0597	0.0571
-0.5880	0.0690	0.0650	0.5332	0.0550	0.0556	1.6545	0.0519	0.0518	2.7757	0.0597	0.0571
-0.5731	0.0687	0.0650	0.5482	0.0544	0.0548	1.6694	0.0519	0.0517	2.7907	0.0597	0.0571
-0.5581	0.0685	0.0650	0.5631	0.0544	0.0548	1.6844	0.0518	0.0516	2.8056	0.0604	0.0580
-0.5432	0.0681	0.0647	0.5781	0.0544	0.0548	1.6993	0.0518	0.0516	2.8206	0.0604	0.0580
-0.5282	0.0674	0.0641	0.5930	0.0544	0.0548	1.7143	0.0518	0.0516	2.8355	0.0604	0.0580
-0.5133	0.0672	0.0641	0.6080	0.0544	0.0548	1.7292	0.0518	0.0516	2.8505	0.0604	0.0580
-0.4983	0.0664	0.0638	0.6229	0.0545	0.0543	1.7442	0.0518	0.0516	2.8654	0.0604	0.0581
-0.4834	0.0664	0.0637	0.6379	0.0545	0.0543	1.7591	0.0518	0.0516	2.8804	0.0609	0.0581
-0.4684	0.0661	0.0637	0.6528	0.0541	0.0543	1.7741	0.0519	0.0516	2.8953	0.0610	0.0581
-0.4535	0.0660	0.0637	0.6678	0.0541	0.0543	1.7890	0.0519	0.0516	2.9103	0.0612	0.0582
-0.4385	0.0657	0.0637	0.6827	0.0541	0.0543	1.8040	0.0519	0.0516	2.9252	0.0612	0.0582
-0.4236	0.0654	0.0636	0.6977	0.0540	0.0543	1.8189	0.0520	0.0516	2.9402	0.0612	0.0582
-0.4086	0.0640	0.0622	0.7126	0.0539	0.0540	1.8339	0.0520	0.0520	2.9551	0.0612	0.0582
-0.3937	0.0636	0.0621	0.7276	0.0532	0.0533	1.8488	0.0520	0.0520	2.9701	0.0614	0.0583
									3.0000	0.0619	0.0584

Tabla 4.13: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$. Escenario B.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0770	0.1103	-0.3787	0.0892	0.0879	0.7425	0.0716	0.0721	1.8638	0.0651	0.0654
-1.4850	0.0769	0.1103	-0.3638	0.0888	0.0879	0.7575	0.0715	0.0720	1.8787	0.0652	0.0653
-1.4701	0.0768	0.1103	-0.3488	0.0888	0.0879	0.7724	0.0715	0.0718	1.8937	0.0652	0.0653
-1.4551	0.0768	0.1103	-0.3339	0.0888	0.0879	0.7874	0.0712	0.0713	1.9086	0.0652	0.0653
-1.4402	0.0765	0.1103	-0.3189	0.0886	0.0877	0.8023	0.0709	0.0713	1.9236	0.0654	0.0653
-1.4252	0.0765	0.1103	-0.3040	0.0882	0.0874	0.8173	0.0705	0.0698	1.9385	0.0660	0.0659
-1.4103	0.0764	0.1103	-0.2890	0.0881	0.0874	0.8322	0.0700	0.0691	1.9535	0.0660	0.0659
-1.3953	0.0756	0.1103	-0.2741	0.0881	0.0874	0.8472	0.0700	0.0691	1.9684	0.0659	0.0659
-1.3804	0.0756	0.1103	-0.2591	0.0880	0.0874	0.8621	0.0694	0.0686	1.9834	0.0661	0.0659
-1.3654	0.0755	0.1103	-0.2442	0.0880	0.0873	0.8771	0.0690	0.0686	1.9983	0.0661	0.0659
-1.3505	0.0755	0.1103	-0.2292	0.0879	0.0872	0.8920	0.0688	0.0683	2.0133	0.0663	0.0659
-1.3355	0.0755	0.1103	-0.2143	0.0878	0.0872	0.9070	0.0684	0.0683	2.0282	0.0663	0.0659
-1.3206	0.0755	0.1103	-0.1993	0.0874	0.0869	0.9219	0.0679	0.0674	2.0432	0.0663	0.0659
-1.3056	0.0745	0.1098	-0.1844	0.0874	0.0868	0.9369	0.0674	0.0674	2.0581	0.0664	0.0660
-1.2907	0.0740	0.1097	-0.1694	0.0874	0.0868	0.9518	0.0671	0.0668	2.0731	0.0664	0.0660
-1.2757	0.0739	0.1097	-0.1545	0.0872	0.0866	0.9668	0.0671	0.0666	2.0880	0.0664	0.0661
-1.2608	0.0737	0.1095	-0.1395	0.0862	0.0856	0.9817	0.0669	0.0666	2.1030	0.0664	0.0661
-1.2458	0.0736	0.1095	-0.1246	0.0852	0.0850	0.9967	0.0667	0.0666	2.1179	0.0665	0.0661
-1.2309	0.0730	0.1095	-0.1096	0.0844	0.0842	1.0116	0.0658	0.0659	2.1329	0.0667	0.0661
-1.2159	0.0727	0.1094	-0.0947	0.0842	0.0841	1.0266	0.0658	0.0659	2.1478	0.0667	0.0661
-1.2010	0.0727	0.1094	-0.0797	0.0842	0.0841	1.0415	0.0658	0.0659	2.1628	0.0667	0.0661
-1.1860	0.0727	0.1094	-0.0648	0.0842	0.0841	1.0565	0.0659	0.0660	2.1777	0.0671	0.0661
-1.1711	0.0726	0.1094	-0.0498	0.0839	0.0838	1.0714	0.0659	0.0660	2.1927	0.0676	0.0666
-1.1561	0.0724	0.1094	-0.0349	0.0838	0.0838	1.0864	0.0658	0.0659	2.2076	0.0676	0.0666
-1.1412	0.0721	0.1094	-0.0199	0.0837	0.0837	1.1013	0.0657	0.0659	2.2226	0.0676	0.0666
-1.1262	0.0712	0.1084	-0.0050	0.0837	0.0837	1.1163	0.0657	0.0656	2.2375	0.0681	0.0666
-1.1113	0.0711	0.1083	0.0100	0.0832	0.0832	1.1312	0.0657	0.0656	2.2525	0.0683	0.0666
-1.0963	0.0711	0.1083	0.0249	0.0832	0.0832	1.1462	0.0658	0.0656	2.2674	0.0683	0.0666
-1.0814	0.0710	0.1083	0.0399	0.0832	0.0832	1.1611	0.0658	0.0654	2.2824	0.0683	0.0670
-1.0664	0.0696	0.1068	0.0548	0.0832	0.0832	1.1761	0.0656	0.0652	2.2973	0.0683	0.0670
-1.0515	0.0695	0.1066	0.0698	0.0830	0.0831	1.1910	0.0652	0.0649	2.3123	0.0683	0.0670
-1.0365	0.0695	0.1065	0.0847	0.0823	0.0823	1.2060	0.0653	0.0649	2.3272	0.0684	0.0670
-1.0216	0.0688	0.1060	0.0997	0.0823	0.0823	1.2209	0.0653	0.0649	2.3422	0.0685	0.0671
-1.0066	0.0681	0.1056	0.1146	0.0819	0.0821	1.2359	0.0653	0.0649	2.3571	0.0686	0.0669
-0.9917	0.1186	0.1056	0.1296	0.0819	0.0821	1.2508	0.0654	0.0650	2.3721	0.0686	0.0669
-0.9767	0.1168	0.1048	0.1445	0.0817	0.0819	1.2658	0.0654	0.0650	2.3870	0.0686	0.0669
-0.9618	0.1166	0.1048	0.1595	0.0817	0.0819	1.2807	0.0652	0.0650	2.4020	0.0687	0.0669
-0.9468	0.1165	0.1039	0.1744	0.0817	0.0819	1.2957	0.0652	0.0650	2.4169	0.0698	0.0680
-0.9319	0.1160	0.1039	0.1894	0.0816	0.0819	1.3106	0.0652	0.0650	2.4319	0.0698	0.0686
-0.9169	0.1148	0.1032	0.2043	0.0814	0.0818	1.3256	0.0645	0.0645	2.4468	0.0699	0.0686
-0.9020	0.1136	0.1021	0.2193	0.0810	0.0811	1.3405	0.0645	0.0645	2.4618	0.0699	0.0686
-0.8870	0.1124	0.1017	0.2342	0.0804	0.0808	1.3555	0.0645	0.0646	2.4767	0.0700	0.0686
-0.8721	0.1113	0.1004	0.2492	0.0796	0.0800	1.3704	0.0645	0.0646	2.4917	0.0700	0.0686
-0.8571	0.1112	0.1004	0.2641	0.0792	0.0796	1.3854	0.0645	0.0646	2.5066	0.0700	0.0686
-0.8422	0.1104	0.1003	0.2791	0.0784	0.0790	1.4003	0.0646	0.0646	2.5216	0.0700	0.0686
-0.8272	0.1091	0.0985	0.2940	0.0780	0.0785	1.4153	0.0646	0.0646	2.5365	0.0702	0.0686
-0.8123	0.1084	0.0985	0.3090	0.0776	0.0784	1.4302	0.0646	0.0648	2.5515	0.0702	0.0686
-0.7973	0.1064	0.0974	0.3239	0.0768	0.0778	1.4452	0.0646	0.0648	2.5664	0.0702	0.0686
-0.7824	0.1060	0.0963	0.3389	0.0767	0.0778	1.4601	0.0646	0.0648	2.5814	0.0702	0.0699
-0.7674	0.1048	0.0963	0.3538	0.0765	0.0775	1.4751	0.0649	0.0651	2.5963	0.0708	0.0699
-0.7525	0.1043	0.0963	0.3688	0.0765	0.0775	1.4900	0.0650	0.0651	2.6113	0.0713	0.0699
-0.7375	0.1039	0.0963	0.3837	0.0762	0.0774	1.5050	0.0650	0.0651	2.6262	0.0714	0.0699
-0.7226	0.1033	0.0955	0.3987	0.0762	0.0774	1.5199	0.0649	0.0651	2.6412	0.0714	0.0699
-0.7076	0.1030	0.0955	0.4136	0.0757	0.0768	1.5349	0.0649	0.0652	2.6561	0.0715	0.0699
-0.6927	0.1027	0.0955	0.4286	0.0757	0.0768	1.5498	0.0650	0.0652	2.6711	0.0716	0.0699
-0.6777	0.1020	0.0951	0.4435	0.0755	0.0766	1.5648	0.0650	0.0652	2.6860	0.0717	0.0699
-0.6628	0.1010	0.0943	0.4585	0.0754	0.0766	1.5797	0.0651	0.0654	2.7010	0.0717	0.0709
-0.6478	0.1005	0.0940	0.4734	0.0753	0.0760	1.5947	0.0652	0.0654	2.7159	0.0718	0.0709
-0.6329	0.0998	0.0937	0.4884	0.0752	0.0759	1.6096	0.0653	0.0654	2.7309	0.0721	0.0709
-0.6179	0.0988	0.0936	0.5033	0.0749	0.0759	1.6246	0.0653	0.0656	2.7458	0.0730	0.0715
-0.6030	0.0984	0.0936	0.5183	0.0743	0.0755	1.6395	0.0654	0.0656	2.7608	0.0730	0.0715
-0.5880	0.0973	0.0924	0.5332	0.0742	0.0754	1.6545	0.0654	0.0656	2.7757	0.0730	0.0715
-0.5731	0.0970	0.0924	0.5482	0.0736	0.0746	1.6694	0.0653	0.0656	2.7907	0.0730	0.0715
-0.5581	0.0966	0.0922	0.5631	0.0736	0.0746	1.6844	0.0653	0.0654	2.8056	0.0736	0.0724
-0.5432	0.0966	0.0920	0.5781	0.0735	0.0746	1.6993	0.0652	0.0654	2.8206	0.0736	0.0724
-0.5282	0.0958	0.0915	0.5930	0.0735	0.0746	1.7143	0.0652	0.0655	2.8355	0.0736	0.0724
-0.5133	0.0952	0.0915	0.6080	0.0735	0.0746	1.7292	0.0652	0.0654	2.8505	0.0736	0.0724
-0.4983	0.0942	0.0909	0.6229	0.0736	0.0739	1.7442	0.0652	0.0654	2.8654	0.0738	0.0724
-0.4834	0.0940	0.0908	0.6379	0.0735	0.0738	1.7591	0.0652	0.0654	2.8804	0.0746	0.0724
-0.4684	0.0936	0.0908	0.6528	0.0730	0.0738	1.7741	0.0652	0.0654	2.8953	0.0746	0.0724
-0.4535	0.0933	0.0908	0.6678	0.0730	0.0738	1.7890	0.0652	0.0654	2.9103	0.0751	0.0726
-0.4385	0.0927	0.0907	0.6827	0.0730	0.0738	1.8040	0.0651	0.0654	2.9252	0.0751	0.0726
-0.4236	0.0917	0.0904	0.6977	0.0727	0.0738	1.8189	0.0649	0.0651	2.9402	0.0751	0.0726
-0.4086	0.0899	0.0886	0.7126	0.0724	0.0728	1.8339	0.0651	0.0654	2.9551	0.0751	0.0726
-0.3937	0.0896	0.0884	0.7276	0.0716	0.0721	1.8488	0.0651	0.0654	2.9701	0.0752	0.0726
									3.0000	0.0755	0.0728

Tabla 4.14: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario B.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0586	0.2176	-0.3787	0.1681	0.1655	0.7425	0.0996	0.1015	1.8638	0.0764	0.0785
-1.4850	0.0586	0.2176	-0.3638	0.1671	0.1651	0.7575	0.0990	0.1009	1.8787	0.0765	0.0784
-1.4701	0.0585	0.2176	-0.3488	0.1669	0.1651	0.7724	0.0990	0.1007	1.8937	0.0765	0.0784
-1.4551	0.0579	0.2176	-0.3339	0.1657	0.1640	0.7874	0.0985	0.1000	1.9086	0.0764	0.0784
-1.4402	0.0574	0.2176	-0.3189	0.1644	0.1625	0.8023	0.0983	0.1000	1.9236	0.0765	0.0784
-1.4252	0.0574	0.2176	-0.3040	0.1635	0.1622	0.8173	0.0978	0.0986	1.9385	0.0770	0.0786
-1.4103	0.0573	0.2176	-0.2890	0.1635	0.1622	0.8322	0.0952	0.0958	1.9535	0.0770	0.0786
-1.3953	0.0568	0.2176	-0.2741	0.1628	0.1615	0.8472	0.0951	0.0958	1.9684	0.0770	0.0786
-1.3804	0.0566	0.2176	-0.2591	0.1628	0.1615	0.8621	0.0946	0.0939	1.9834	0.0772	0.0786
-1.3654	0.0566	0.2176	-0.2442	0.1628	0.1614	0.8771	0.0934	0.0939	1.9983	0.0773	0.0786
-1.3505	0.0565	0.2176	-0.2292	0.1618	0.1605	0.8920	0.0927	0.0924	2.0133	0.0774	0.0786
-1.3355	0.0565	0.2176	-0.2143	0.1613	0.1599	0.9070	0.0925	0.0924	2.0282	0.0774	0.0786
-1.3206	0.0565	0.2176	-0.1993	0.1604	0.1590	0.9219	0.0910	0.0888	2.0432	0.0774	0.0786
-1.3056	0.0552	0.2167	-0.1844	0.1603	0.1590	0.9369	0.0886	0.0888	2.0581	0.0774	0.0786
-1.2907	0.0550	0.2167	-0.1694	0.1602	0.1590	0.9518	0.0883	0.0884	2.0731	0.0774	0.0786
-1.2757	0.0550	0.2167	-0.1545	0.1596	0.1587	0.9668	0.0883	0.0873	2.0880	0.0774	0.0786
-1.2608	0.0548	0.2166	-0.1395	0.1562	0.1545	0.9817	0.0882	0.0873	2.1030	0.0774	0.0786
-1.2458	0.0548	0.2166	-0.1246	0.1506	0.1502	0.9967	0.0875	0.0872	2.1179	0.0776	0.0786
-1.2309	0.0542	0.2166	-0.1096	0.1436	0.1431	1.0116	0.0864	0.0864	2.1329	0.0776	0.0786
-1.2159	0.0543	0.2164	-0.0947	0.1418	0.1414	1.0266	0.0864	0.0864	2.1478	0.0776	0.0786
-1.2010	0.0542	0.2164	-0.0797	0.1406	0.1404	1.0415	0.0862	0.0862	2.1628	0.0776	0.0786
-1.1860	0.0542	0.2164	-0.0648	0.1401	0.1400	1.0565	0.0862	0.0862	2.1777	0.0776	0.0786
-1.1711	0.0538	0.2164	-0.0498	0.1370	0.1370	1.0714	0.0854	0.0857	2.1927	0.0783	0.0792
-1.1561	0.0536	0.2164	-0.0349	0.1366	0.1366	1.0864	0.0846	0.0848	2.2076	0.0783	0.0792
-1.1412	0.0536	0.2164	-0.0199	0.1363	0.1363	1.1013	0.0843	0.0848	2.2226	0.0783	0.0792
-1.1262	0.0525	0.2154	-0.0050	0.1363	0.1363	1.1163	0.0843	0.0847	2.2375	0.0785	0.0793
-1.1113	0.0525	0.2154	0.0100	0.1334	0.1334	1.1312	0.0842	0.0847	2.2525	0.0785	0.0793
-1.0963	0.0524	0.2154	0.0249	0.1334	0.1334	1.1462	0.0841	0.0846	2.2674	0.0785	0.0793
-1.0814	0.0522	0.2152	0.0399	0.1334	0.1334	1.1611	0.0828	0.0834	2.2824	0.0786	0.0794
-1.0664	0.0510	0.2139	0.0548	0.1334	0.1334	1.1761	0.0820	0.0826	2.2973	0.0786	0.0794
-1.0515	0.0511	0.2139	0.0698	0.1311	0.1312	1.1910	0.0809	0.0815	2.3123	0.0786	0.0794
-1.0365	0.0513	0.2139	0.0847	0.1304	0.1304	1.2060	0.0809	0.0814	2.3272	0.0786	0.0793
-1.0216	0.0516	0.2138	0.0997	0.1303	0.1304	1.2209	0.0809	0.0814	2.3422	0.0788	0.0793
-1.0066	0.0514	0.2136	0.1146	0.1297	0.1299	1.2359	0.0809	0.0813	2.3571	0.0788	0.0792
-0.9917	0.2250	0.2136	0.1296	0.1297	0.1299	1.2508	0.0809	0.0813	2.3721	0.0788	0.0792
-0.9767	0.2244	0.2134	0.1445	0.1294	0.1296	1.2658	0.0808	0.0813	2.3870	0.0788	0.0792
-0.9618	0.2243	0.2127	0.1595	0.1294	0.1296	1.2807	0.0806	0.0813	2.4020	0.0789	0.0792
-0.9468	0.2243	0.2125	0.1744	0.1290	0.1293	1.2957	0.0806	0.0813	2.4169	0.0791	0.0795
-0.9319	0.2240	0.2125	0.1894	0.1288	0.1291	1.3106	0.0804	0.0813	2.4319	0.0792	0.0796
-0.9169	0.2232	0.2122	0.2043	0.1284	0.1287	1.3256	0.0801	0.0810	2.4468	0.0792	0.0796
-0.9020	0.2227	0.2118	0.2193	0.1279	0.1272	1.3405	0.0798	0.0810	2.4618	0.0792	0.0796
-0.8870	0.2218	0.2095	0.2342	0.1256	0.1256	1.3555	0.0798	0.0810	2.4767	0.0800	0.0806
-0.8721	0.2209	0.2079	0.2492	0.1225	0.1227	1.3704	0.0798	0.0810	2.4917	0.0800	0.0806
-0.8571	0.2206	0.2073	0.2641	0.1213	0.1208	1.3854	0.0798	0.0810	2.5066	0.0800	0.0806
-0.8422	0.2203	0.2073	0.2791	0.1182	0.1181	1.4003	0.0798	0.0810	2.5216	0.0800	0.0806
-0.8272	0.2170	0.2047	0.2940	0.1168	0.1165	1.4153	0.0798	0.0810	2.5365	0.0800	0.0806
-0.8123	0.2162	0.2044	0.3090	0.1154	0.1156	1.4302	0.0798	0.0810	2.5515	0.0797	0.0806
-0.7973	0.2146	0.2039	0.3239	0.1119	0.1115	1.4452	0.0798	0.0810	2.5664	0.0796	0.0806
-0.7824	0.2139	0.2031	0.3389	0.1101	0.1107	1.4601	0.0798	0.0810	2.5814	0.0796	0.0810
-0.7674	0.2129	0.2031	0.3538	0.1089	0.1094	1.4751	0.0799	0.0811	2.5963	0.0799	0.0810
-0.7525	0.2124	0.2029	0.3688	0.1079	0.1084	1.4900	0.0798	0.0810	2.6113	0.0802	0.0810
-0.7375	0.2119	0.2026	0.3837	0.1075	0.1082	1.5050	0.0798	0.0810	2.6262	0.0802	0.0810
-0.7226	0.2108	0.2017	0.3987	0.1073	0.1082	1.5199	0.0795	0.0807	2.6412	0.0803	0.0810
-0.7076	0.2101	0.2017	0.4136	0.1071	0.1078	1.5349	0.0795	0.0807	2.6561	0.0803	0.0810
-0.6927	0.2100	0.2017	0.4286	0.1070	0.1078	1.5498	0.0795	0.0807	2.6711	0.0805	0.0810
-0.6777	0.2095	0.2002	0.4435	0.1048	0.1059	1.5648	0.0795	0.0807	2.6860	0.0806	0.0810
-0.6628	0.2078	0.1994	0.4585	0.1042	0.1058	1.5797	0.0795	0.0807	2.7010	0.0806	0.0816
-0.6478	0.2062	0.1947	0.4734	0.1040	0.1057	1.5947	0.0794	0.0807	2.7159	0.0806	0.0816
-0.6329	0.1978	0.1889	0.4884	0.1040	0.1057	1.6096	0.0794	0.0807	2.7309	0.0807	0.0816
-0.6179	0.1948	0.1875	0.5033	0.1039	0.1057	1.6246	0.0794	0.0807	2.7458	0.0818	0.0825
-0.6030	0.1928	0.1872	0.5183	0.1026	0.1043	1.6395	0.0794	0.0806	2.7608	0.0818	0.0825
-0.5880	0.1921	0.1862	0.5332	0.1026	0.1043	1.6545	0.0792	0.0806	2.7757	0.0818	0.0825
-0.5731	0.1911	0.1854	0.5482	0.1024	0.1041	1.6694	0.0782	0.0796	2.7907	0.0818	0.0825
-0.5581	0.1900	0.1849	0.5631	0.1023	0.1040	1.6844	0.0780	0.0794	2.8056	0.0818	0.0834
-0.5432	0.1897	0.1849	0.5781	0.1023	0.1040	1.6993	0.0774	0.0794	2.8206	0.0818	0.0834
-0.5282	0.1886	0.1842	0.5930	0.1023	0.1040	1.7143	0.0774	0.0794	2.8355	0.0818	0.0834
-0.5133	0.1884	0.1841	0.6080	0.1023	0.1040	1.7292	0.0772	0.0792	2.8505	0.0818	0.0834
-0.4983	0.1874	0.1836	0.6229	0.1023	0.1036	1.7442	0.0772	0.0792	2.8654	0.0819	0.0834
-0.4834	0.1866	0.1826	0.6379	0.1016	0.1029	1.7591	0.0772	0.0792	2.8804	0.0824	0.0834
-0.4684	0.1862	0.1825	0.6528	0.1011	0.1029	1.7741	0.0772	0.0792	2.8953	0.0824	0.0834
-0.4535	0.1859	0.1824	0.6678	0.1011	0.1029	1.7890	0.0773	0.0792	2.9103	0.0830	0.0839
-0.4385	0.1854	0.1821	0.6827	0.1011	0.1029	1.8040	0.0772	0.0792	2.9252	0.0830	0.0839
-0.4236	0.1839	0.1813	0.6977	0.1008	0.1027	1.8189	0.0764	0.0784	2.9402	0.0830	0.0839
-0.4086	0.1768	0.1727	0.7126	0.1000	0.1018	1.8339	0.0764	0.0784	2.9551	0.0831	0.0839
-0.3937	0.1716	0.1688	0.7276	0.0996	0.1016	1.8488	0.0764	0.0785	2.9701	0.0832	0.0840
									3.0000	0.0838	0.0846

Tabla 4.15: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario B.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0366	0.3365	-0.3787	0.2024	0.1986	0.7425	0.0837	0.0870	1.8638	0.0596	0.0634
-1.4850	0.0366	0.3365	-0.3638	0.1999	0.1970	0.7575	0.0821	0.0852	1.8787	0.0596	0.0634
-1.4701	0.0366	0.3365	-0.3488	0.1994	0.1968	0.7724	0.0821	0.0850	1.8937	0.0596	0.0634
-1.4551	0.0346	0.3365	-0.3339	0.1958	0.1933	0.7874	0.0820	0.0848	1.9086	0.0593	0.0634
-1.4402	0.0342	0.3365	-0.3189	0.1921	0.1884	0.8023	0.0818	0.0848	1.9236	0.0593	0.0634
-1.4252	0.0342	0.3365	-0.3040	0.1903	0.1882	0.8173	0.0816	0.0842	1.9385	0.0599	0.0634
-1.4103	0.0341	0.3365	-0.2890	0.1901	0.1880	0.8322	0.0793	0.0816	1.9535	0.0599	0.0634
-1.3953	0.0339	0.3365	-0.2741	0.1884	0.1862	0.8472	0.0793	0.0816	1.9684	0.0599	0.0634
-1.3804	0.0335	0.3365	-0.2591	0.1882	0.1862	0.8621	0.0792	0.0804	1.9834	0.0600	0.0634
-1.3654	0.0335	0.3365	-0.2442	0.1882	0.1862	0.8771	0.0784	0.0804	1.9983	0.0600	0.0634
-1.3505	0.0333	0.3365	-0.2292	0.1853	0.1833	0.8920	0.0779	0.0792	2.0133	0.0600	0.0634
-1.3355	0.0333	0.3365	-0.2143	0.1836	0.1816	0.9070	0.0779	0.0792	2.0282	0.0600	0.0634
-1.3206	0.0333	0.3365	-0.1993	0.1818	0.1798	0.9219	0.0770	0.0761	2.0432	0.0600	0.0634
-1.3056	0.0324	0.3362	-0.1844	0.1818	0.1798	0.9369	0.0748	0.0761	2.0581	0.0600	0.0634
-1.2907	0.0322	0.3362	-0.1694	0.1812	0.1798	0.9518	0.0746	0.0757	2.0731	0.0600	0.0634
-1.2757	0.0321	0.3361	-0.1545	0.1805	0.1794	0.9668	0.0746	0.0744	2.0880	0.0600	0.0634
-1.2608	0.0321	0.3361	-0.1395	0.1760	0.1738	0.9817	0.0745	0.0744	2.1030	0.0600	0.0634
-1.2458	0.0320	0.3361	-0.1246	0.1674	0.1671	0.9967	0.0734	0.0741	2.1179	0.0601	0.0634
-1.2309	0.0318	0.3361	-0.1096	0.1548	0.1540	1.0116	0.0722	0.0731	2.1329	0.0601	0.0634
-1.2159	0.0318	0.3356	-0.0947	0.1504	0.1499	1.0266	0.0722	0.0731	2.1478	0.0601	0.0634
-1.2010	0.0318	0.3356	-0.0797	0.1466	0.1463	1.0415	0.0715	0.0724	2.1628	0.0601	0.0634
-1.1860	0.0315	0.3356	-0.0648	0.1454	0.1452	1.0565	0.0712	0.0724	2.1777	0.0602	0.0634
-1.1711	0.0316	0.3356	-0.0498	0.1394	0.1392	1.0714	0.0705	0.0719	2.1927	0.0606	0.0638
-1.1561	0.0314	0.3356	-0.0349	0.1378	0.1378	1.0864	0.0693	0.0707	2.2076	0.0606	0.0638
-1.1412	0.0314	0.3356	-0.0199	0.1373	0.1373	1.1013	0.0690	0.0707	2.2226	0.0606	0.0638
-1.1262	0.0309	0.3354	-0.0050	0.1372	0.1372	1.1163	0.0690	0.0707	2.2375	0.0607	0.0638
-1.1113	0.0309	0.3354	0.0100	0.1332	0.1332	1.1312	0.0689	0.0707	2.2525	0.0607	0.0638
-1.0963	0.0312	0.3354	0.0249	0.1332	0.1332	1.1462	0.0690	0.0706	2.2674	0.0607	0.0638
-1.0814	0.0307	0.3344	0.0399	0.1332	0.1332	1.1611	0.0664	0.0684	2.2824	0.0608	0.0638
-1.0664	0.0299	0.3336	0.0548	0.1330	0.1332	1.1761	0.0661	0.0680	2.2973	0.0610	0.0638
-1.0515	0.0304	0.3336	0.0698	0.1282	0.1285	1.1910	0.0654	0.0673	2.3123	0.0610	0.0638
-1.0365	0.0308	0.3336	0.0847	0.1276	0.1278	1.2060	0.0654	0.0673	2.3272	0.0610	0.0638
-1.0216	0.0318	0.3336	0.0997	0.1274	0.1278	1.2209	0.0654	0.0673	2.3422	0.0610	0.0638
-1.0066	0.0329	0.3336	0.1146	0.1264	0.1269	1.2359	0.0654	0.0672	2.3571	0.0610	0.0638
-0.9917	0.3441	0.3336	0.1296	0.1263	0.1268	1.2508	0.0654	0.0672	2.3721	0.0610	0.0638
-0.9767	0.3438	0.3336	0.1445	0.1262	0.1266	1.2658	0.0653	0.0672	2.3870	0.0610	0.0638
-0.9618	0.3437	0.3322	0.1595	0.1262	0.1266	1.2807	0.0652	0.0672	2.4020	0.0612	0.0640
-0.9468	0.3437	0.3321	0.1744	0.1254	0.1260	1.2957	0.0652	0.0672	2.4169	0.0612	0.0640
-0.9319	0.3436	0.3321	0.1894	0.1247	0.1253	1.3106	0.0647	0.0672	2.4319	0.0612	0.0640
-0.9169	0.3431	0.3321	0.2043	0.1244	0.1250	1.3256	0.0644	0.0670	2.4468	0.0612	0.0640
-0.9020	0.3428	0.3319	0.2193	0.1239	0.1237	1.3405	0.0639	0.0670	2.4618	0.0613	0.0640
-0.8870	0.3424	0.3146	0.2342	0.1214	0.1220	1.3555	0.0639	0.0670	2.4767	0.0623	0.0650
-0.8721	0.3422	0.3102	0.2492	0.1191	0.1195	1.3704	0.0640	0.0670	2.4917	0.0623	0.0650
-0.8571	0.3420	0.3073	0.2641	0.1169	0.1163	1.3854	0.0640	0.0670	2.5066	0.0623	0.0650
-0.8422	0.3416	0.3066	0.2791	0.1122	0.1124	1.4003	0.0640	0.0670	2.5216	0.0623	0.0650
-0.8272	0.3240	0.3045	0.2940	0.1102	0.1098	1.4153	0.0640	0.0670	2.5365	0.0623	0.0650
-0.8123	0.3197	0.3026	0.3090	0.1076	0.1081	1.4302	0.0640	0.0670	2.5515	0.0622	0.0650
-0.7973	0.3157	0.3022	0.3239	0.1028	0.1024	1.4452	0.0640	0.0670	2.5664	0.0622	0.0650
-0.7824	0.3142	0.3019	0.3389	0.0995	0.1006	1.4601	0.0640	0.0670	2.5814	0.0622	0.0651
-0.7674	0.3128	0.3016	0.3538	0.0981	0.0991	1.4751	0.0640	0.0670	2.5963	0.0624	0.0651
-0.7525	0.3125	0.3011	0.3688	0.0961	0.0970	1.4900	0.0634	0.0663	2.6113	0.0624	0.0651
-0.7375	0.3122	0.3000	0.3837	0.0950	0.0960	1.5050	0.0634	0.0663	2.6262	0.0624	0.0651
-0.7226	0.3113	0.2995	0.3987	0.0946	0.0960	1.5199	0.0628	0.0658	2.6412	0.0624	0.0651
-0.7076	0.3102	0.2995	0.4136	0.0944	0.0958	1.5349	0.0629	0.0658	2.6561	0.0624	0.0651
-0.6927	0.3101	0.2995	0.4286	0.0943	0.0958	1.5498	0.0629	0.0658	2.6711	0.0624	0.0651
-0.6777	0.3099	0.2983	0.4435	0.0915	0.0932	1.5648	0.0629	0.0658	2.6860	0.0625	0.0651
-0.6628	0.3080	0.2981	0.4585	0.0910	0.0930	1.5797	0.0628	0.0658	2.7010	0.0625	0.0654
-0.6478	0.3064	0.2846	0.4734	0.0908	0.0929	1.5947	0.0628	0.0658	2.7159	0.0626	0.0654
-0.6329	0.2812	0.2620	0.4884	0.0908	0.0929	1.6096	0.0628	0.0658	2.7309	0.0626	0.0654
-0.6179	0.2690	0.2563	0.5033	0.0907	0.0929	1.6246	0.0628	0.0658	2.7458	0.0632	0.0658
-0.6030	0.2626	0.2550	0.5183	0.0890	0.0912	1.6395	0.0627	0.0657	2.7608	0.0632	0.0658
-0.5880	0.2616	0.2540	0.5332	0.0890	0.0912	1.6545	0.0627	0.0657	2.7757	0.0632	0.0658
-0.5731	0.2602	0.2502	0.5482	0.0888	0.0911	1.6694	0.0618	0.0647	2.7907	0.0632	0.0658
-0.5581	0.2559	0.2490	0.5631	0.0888	0.0909	1.6844	0.0615	0.0645	2.8056	0.0632	0.0660
-0.5432	0.2548	0.2490	0.5781	0.0888	0.0909	1.6993	0.0607	0.0645	2.8206	0.0632	0.0660
-0.5282	0.2543	0.2486	0.5930	0.0888	0.0909	1.7143	0.0607	0.0645	2.8355	0.0632	0.0660
-0.5133	0.2541	0.2485	0.6080	0.0888	0.0909	1.7292	0.0607	0.0645	2.8505	0.0633	0.0660
-0.4983	0.2537	0.2481	0.6229	0.0888	0.0909	1.7442	0.0607	0.0645	2.8654	0.0634	0.0660
-0.4834	0.2515	0.2458	0.6379	0.0868	0.0890	1.7591	0.0607	0.0645	2.8804	0.0637	0.0660
-0.4684	0.2502	0.2441	0.6528	0.0865	0.0890	1.7741	0.0607	0.0645	2.8953	0.0637	0.0660
-0.4535	0.2484	0.2440	0.6678	0.0865	0.0890	1.7890	0.0608	0.0645	2.9103	0.0639	0.0662
-0.4385	0.2478	0.2435	0.6827	0.0865	0.0890	1.8040	0.0607	0.0645	2.9252	0.0639	0.0662
-0.4236	0.2448	0.2427	0.6977	0.0863	0.0887	1.8189	0.0596	0.0634	2.9402	0.0639	0.0662
-0.4086	0.2296	0.2220	0.7126	0.0852	0.0877	1.8339	0.0596	0.0634	2.9551	0.0640	0.0662
-0.3937	0.2131	0.2094	0.7276	0.0838	0.0870	1.8488	0.0596	0.0634	2.9701	0.0640	0.0662
									3.0000	0.0642	0.0663

Tabla 4.16: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\tilde{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario B.

λ	$\widehat{\beta}_{T_\lambda}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\widehat{\beta}_{T_\lambda}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\widehat{\beta}_{T_\lambda}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\widehat{\beta}_{T_\lambda}$	$\widehat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0282	0.4199	-0.3787	0.1964	0.1931	0.7425	0.0677	0.0708	1.8638	0.0494	0.0530
-1.4850	0.0282	0.4199	-0.3638	0.1926	0.1896	0.7575	0.0666	0.0695	1.8787	0.0494	0.0530
-1.4701	0.0281	0.4199	-0.3488	0.1916	0.1892	0.7724	0.0666	0.0694	1.8937	0.0494	0.0530
-1.4551	0.0257	0.4199	-0.3339	0.1871	0.1849	0.7874	0.0664	0.0692	1.9086	0.0492	0.0530
-1.4402	0.0248	0.4199	-0.3189	0.1817	0.1778	0.8023	0.0662	0.0692	1.9236	0.0493	0.0530
-1.4252	0.0248	0.4199	-0.3040	0.1790	0.1772	0.8173	0.0661	0.0690	1.9385	0.0495	0.0530
-1.4103	0.0247	0.4199	-0.2890	0.1788	0.1770	0.8322	0.0642	0.0669	1.9535	0.0495	0.0530
-1.3953	0.0245	0.4199	-0.2741	0.1762	0.1743	0.8472	0.0642	0.0669	1.9684	0.0496	0.0530
-1.3804	0.0244	0.4199	-0.2591	0.1761	0.1743	0.8621	0.0641	0.0660	1.9834	0.0497	0.0530
-1.3654	0.0244	0.4199	-0.2442	0.1761	0.1743	0.8771	0.0636	0.0660	1.9983	0.0497	0.0530
-1.3505	0.0238	0.4198	-0.2292	0.1726	0.1708	0.8920	0.0634	0.0655	2.0133	0.0498	0.0530
-1.3355	0.0236	0.4198	-0.2143	0.1692	0.1674	0.9070	0.0634	0.0655	2.0282	0.0498	0.0530
-1.3206	0.0237	0.4198	-0.1993	0.1677	0.1659	0.9219	0.0628	0.0638	2.0432	0.0498	0.0530
-1.3056	0.0223	0.4196	-0.1844	0.1677	0.1659	0.9369	0.0618	0.0638	2.0581	0.0498	0.0530
-1.2907	0.0219	0.4196	-0.1694	0.1669	0.1659	0.9518	0.0616	0.0636	2.0731	0.0498	0.0530
-1.2757	0.0216	0.4193	-0.1545	0.1661	0.1656	0.9668	0.0616	0.0624	2.0880	0.0498	0.0530
-1.2608	0.0215	0.4193	-0.1395	0.1623	0.1606	0.9817	0.0615	0.0624	2.1030	0.0498	0.0530
-1.2458	0.0215	0.4193	-0.1246	0.1544	0.1544	0.9967	0.0606	0.0621	2.1179	0.0498	0.0530
-1.2309	0.0215	0.4193	-0.1096	0.1407	0.1401	1.0116	0.0597	0.0613	2.1329	0.0498	0.0530
-1.2159	0.0219	0.4190	-0.0947	0.1346	0.1343	1.0266	0.0597	0.0613	2.1478	0.0498	0.0530
-1.2010	0.0218	0.4190	-0.0797	0.1300	0.1301	1.0415	0.0589	0.0605	2.1628	0.0498	0.0530
-1.1860	0.0214	0.4190	-0.0648	0.1290	0.1290	1.0565	0.0586	0.0605	2.1777	0.0499	0.0530
-1.1711	0.0215	0.4190	-0.0498	0.1228	0.1228	1.0714	0.0581	0.0602	2.1927	0.0501	0.0532
-1.1561	0.0214	0.4190	-0.0349	0.1214	0.1214	1.0864	0.0574	0.0595	2.2076	0.0501	0.0532
-1.1412	0.0214	0.4190	-0.0199	0.1210	0.1210	1.1013	0.0572	0.0595	2.2226	0.0501	0.0532
-1.1262	0.0204	0.4189	-0.0050	0.1209	0.1209	1.1163	0.0572	0.0595	2.2375	0.0502	0.0533
-1.1113	0.0205	0.4189	0.0100	0.1152	0.1152	1.1312	0.0572	0.0595	2.2525	0.0502	0.0533
-1.0963	0.0207	0.4189	0.0249	0.1152	0.1152	1.1462	0.0572	0.0593	2.2674	0.0502	0.0533
-1.0814	0.0206	0.4176	0.0399	0.1152	0.1152	1.1611	0.0552	0.0576	2.2824	0.0502	0.0533
-1.0664	0.0204	0.4173	0.0548	0.1148	0.1152	1.1761	0.0546	0.0570	2.2973	0.0502	0.0533
-1.0515	0.0217	0.4173	0.0698	0.1096	0.1099	1.1910	0.0541	0.0565	2.3123	0.0502	0.0533
-1.0365	0.0223	0.4173	0.0847	0.1090	0.1094	1.2060	0.0541	0.0565	2.3272	0.0502	0.0533
-1.0216	0.0242	0.4173	0.0997	0.1088	0.1094	1.2209	0.0541	0.0565	2.3422	0.0502	0.0533
-1.0066	0.0265	0.4173	0.1146	0.1078	0.1084	1.2359	0.0541	0.0565	2.3571	0.0502	0.0533
-0.9917	0.4265	0.4173	0.1296	0.1077	0.1083	1.2508	0.0541	0.0565	2.3721	0.0502	0.0533
-0.9767	0.4264	0.4173	0.1445	0.1077	0.1083	1.2658	0.0541	0.0565	2.3870	0.0501	0.0531
-0.9618	0.4263	0.4158	0.1595	0.1077	0.1083	1.2807	0.0540	0.0564	2.4020	0.0502	0.0532
-0.9468	0.4262	0.4158	0.1744	0.1066	0.1074	1.2957	0.0540	0.0564	2.4169	0.0502	0.0532
-0.9319	0.4262	0.4158	0.1894	0.1060	0.1068	1.3106	0.0536	0.0564	2.4319	0.0502	0.0532
-0.9169	0.4259	0.4158	0.2043	0.1057	0.1067	1.3256	0.0535	0.0564	2.4468	0.0502	0.0532
-0.9020	0.4256	0.4158	0.2193	0.1055	0.1059	1.3405	0.0532	0.0564	2.4618	0.0502	0.0532
-0.8870	0.4256	0.3782	0.2342	0.1031	0.1038	1.3555	0.0532	0.0564	2.4767	0.0516	0.0544
-0.8721	0.4257	0.3665	0.2492	0.1011	0.1018	1.3704	0.0532	0.0564	2.4917	0.0516	0.0544
-0.8571	0.4255	0.3611	0.2641	0.0998	0.1001	1.3854	0.0532	0.0564	2.5066	0.0516	0.0544
-0.8422	0.4253	0.3591	0.2791	0.0964	0.0970	1.4003	0.0532	0.0564	2.5216	0.0516	0.0544
-0.8272	0.3870	0.3564	0.2940	0.0940	0.0936	1.4153	0.0532	0.0564	2.5365	0.0516	0.0544
-0.8123	0.3758	0.3518	0.3090	0.0917	0.0922	1.4302	0.0532	0.0564	2.5515	0.0516	0.0544
-0.7973	0.3685	0.3518	0.3239	0.0876	0.0875	1.4452	0.0532	0.0564	2.5664	0.0514	0.0544
-0.7824	0.3645	0.3517	0.3389	0.0842	0.0854	1.4601	0.0532	0.0564	2.5814	0.0515	0.0544
-0.7674	0.3626	0.3510	0.3538	0.0832	0.0840	1.4751	0.0531	0.0563	2.5963	0.0514	0.0544
-0.7525	0.3626	0.3494	0.3688	0.0808	0.0816	1.4900	0.0523	0.0554	2.6113	0.0516	0.0544
-0.7375	0.3618	0.3466	0.3837	0.0796	0.0803	1.5050	0.0523	0.0554	2.6262	0.0516	0.0544
-0.7226	0.3598	0.3464	0.3987	0.0792	0.0803	1.5199	0.0517	0.0549	2.6412	0.0517	0.0544
-0.7076	0.3569	0.3464	0.4136	0.0784	0.0792	1.5349	0.0519	0.0549	2.6561	0.0517	0.0544
-0.6927	0.3567	0.3464	0.4286	0.0782	0.0792	1.5498	0.0519	0.0549	2.6711	0.0517	0.0544
-0.6777	0.3565	0.3456	0.4435	0.0755	0.0773	1.5648	0.0519	0.0549	2.6860	0.0518	0.0544
-0.6628	0.3551	0.3456	0.4585	0.0750	0.0769	1.5797	0.0519	0.0549	2.7010	0.0518	0.0545
-0.6478	0.3538	0.3258	0.4734	0.0749	0.0769	1.5947	0.0519	0.0549	2.7159	0.0518	0.0545
-0.6329	0.3134	0.2824	0.4884	0.0749	0.0769	1.6096	0.0519	0.0549	2.7309	0.0519	0.0545
-0.6179	0.2888	0.2721	0.5033	0.0749	0.0769	1.6246	0.0519	0.0548	2.7458	0.0521	0.0546
-0.6030	0.2787	0.2701	0.5183	0.0735	0.0755	1.6395	0.0518	0.0547	2.7608	0.0521	0.0546
-0.5880	0.2768	0.2684	0.5332	0.0732	0.0755	1.6545	0.0518	0.0547	2.7757	0.0521	0.0546
-0.5731	0.2753	0.2626	0.5482	0.0730	0.0754	1.6694	0.0506	0.0536	2.7907	0.0521	0.0546
-0.5581	0.2691	0.2594	0.5631	0.0730	0.0752	1.6844	0.0505	0.0535	2.8056	0.0522	0.0547
-0.5432	0.2660	0.2594	0.5781	0.0729	0.0752	1.6993	0.0498	0.0535	2.8206	0.0522	0.0547
-0.5282	0.2655	0.2591	0.5930	0.0729	0.0752	1.7143	0.0498	0.0535	2.8355	0.0522	0.0547
-0.5133	0.2650	0.2587	0.6080	0.0729	0.0752	1.7292	0.0498	0.0535	2.8505	0.0522	0.0547
-0.4983	0.2647	0.2587	0.6229	0.0729	0.0752	1.7442	0.0498	0.0535	2.8654	0.0523	0.0547
-0.4834	0.2610	0.2546	0.6379	0.0708	0.0731	1.7591	0.0498	0.0535	2.8804	0.0524	0.0547
-0.4684	0.2591	0.2514	0.6528	0.0705	0.0731	1.7741	0.0498	0.0535	2.8953	0.0525	0.0547
-0.4535	0.2556	0.2514	0.6678	0.0705	0.0731	1.7890	0.0500	0.0535	2.9103	0.0525	0.0548
-0.4385	0.2552	0.2511	0.6827	0.0705	0.0731	1.8040	0.0499	0.0535	2.9252	0.0525	0.0548
-0.4236	0.2523	0.2504	0.6977	0.0704	0.0730	1.8189	0.0494	0.0530	2.9402	0.0525	0.0548
-0.4086	0.2347	0.2276	0.7126	0.0693	0.0720	1.8339	0.0494	0.0530	2.9551	0.0526	0.0548
-0.3937	0.2115	0.2081	0.7276	0.0677	0.0708	1.8488	0.0494	0.0530	2.9701	0.0526	0.0548
									3.0000	0.0528	0.0550

Tabla 4.17: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario B.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0747	0.0729	-0.3787	0.0580	0.0559	0.7425	0.0494	0.0504	1.8638	0.0488	0.0498
-1.4850	0.0744	0.0729	-0.3638	0.0577	0.0558	0.7575	0.0489	0.0504	1.8787	0.0490	0.0500
-1.4701	0.0744	0.0729	-0.3488	0.0576	0.0558	0.7724	0.0489	0.0504	1.8937	0.0490	0.0500
-1.4551	0.0744	0.0729	-0.3339	0.0573	0.0556	0.7874	0.0489	0.0499	1.9086	0.0490	0.0500
-1.4402	0.0742	0.0728	-0.3189	0.0570	0.0556	0.8023	0.0489	0.0499	1.9236	0.0490	0.0500
-1.4252	0.0741	0.0723	-0.3040	0.0569	0.0555	0.8173	0.0488	0.0498	1.9385	0.0490	0.0500
-1.4103	0.0740	0.0723	-0.2890	0.0567	0.0554	0.8322	0.0488	0.0498	1.9535	0.0490	0.0500
-1.3953	0.0740	0.0723	-0.2741	0.0567	0.0554	0.8472	0.0488	0.0498	1.9684	0.0490	0.0500
-1.3804	0.0734	0.0721	-0.2591	0.0566	0.0553	0.8621	0.0488	0.0498	1.9834	0.0492	0.0501
-1.3654	0.0733	0.0721	-0.2442	0.0566	0.0553	0.8771	0.0488	0.0498	1.9983	0.0492	0.0501
-1.3505	0.0731	0.0719	-0.2292	0.0563	0.0553	0.8920	0.0488	0.0498	2.0133	0.0492	0.0501
-1.3355	0.0727	0.0716	-0.2143	0.0559	0.0549	0.9070	0.0488	0.0498	2.0282	0.0492	0.0501
-1.3206	0.0722	0.0712	-0.1993	0.0557	0.0549	0.9219	0.0488	0.0498	2.0432	0.0493	0.0501
-1.3056	0.0722	0.0712	-0.1844	0.0555	0.0547	0.9369	0.0488	0.0498	2.0581	0.0493	0.0501
-1.2907	0.0718	0.0705	-0.1694	0.0554	0.0547	0.9518	0.0488	0.0496	2.0731	0.0493	0.0501
-1.2757	0.0716	0.0700	-0.1545	0.0552	0.0546	0.9668	0.0485	0.0492	2.0880	0.0493	0.0501
-1.2608	0.0715	0.0698	-0.1395	0.0551	0.0546	0.9817	0.0485	0.0492	2.1030	0.0493	0.0503
-1.2458	0.0709	0.0697	-0.1246	0.0551	0.0546	0.9967	0.0485	0.0492	2.1179	0.0495	0.0505
-1.2309	0.0706	0.0697	-0.1096	0.0550	0.0545	1.0116	0.0485	0.0492	2.1329	0.0495	0.0505
-1.2159	0.0705	0.0696	-0.0947	0.0545	0.0542	1.0266	0.0486	0.0492	2.1478	0.0495	0.0505
-1.2010	0.0705	0.0696	-0.0797	0.0543	0.0541	1.0415	0.0486	0.0494	2.1628	0.0498	0.0510
-1.1860	0.0702	0.0696	-0.0648	0.0541	0.0540	1.0565	0.0486	0.0494	2.1777	0.0498	0.0510
-1.1711	0.0702	0.0694	-0.0498	0.0540	0.0538	1.0714	0.0486	0.0494	2.1927	0.0499	0.0510
-1.1561	0.0703	0.0694	-0.0349	0.0538	0.0537	1.0864	0.0483	0.0492	2.2076	0.0499	0.0510
-1.1412	0.0702	0.0689	-0.0199	0.0538	0.0537	1.1013	0.0480	0.0488	2.2226	0.0501	0.0510
-1.1262	0.0701	0.0689	-0.0050	0.0537	0.0537	1.1163	0.0480	0.0488	2.2375	0.0501	0.0510
-1.1113	0.0698	0.0688	0.0100	0.0536	0.0536	1.1312	0.0480	0.0488	2.2525	0.0501	0.0510
-1.0963	0.0694	0.0682	0.0249	0.0536	0.0536	1.1462	0.0480	0.0488	2.2674	0.0502	0.0511
-1.0814	0.0692	0.0679	0.0399	0.0533	0.0536	1.1611	0.0480	0.0488	2.2824	0.0502	0.0516
-1.0664	0.0688	0.0678	0.0548	0.0528	0.0532	1.1761	0.0480	0.0488	2.2973	0.0502	0.0516
-1.0515	0.0688	0.0678	0.0698	0.0528	0.0531	1.1910	0.0480	0.0488	2.3123	0.0502	0.0516
-1.0365	0.0688	0.0677	0.0847	0.0528	0.0530	1.2060	0.0479	0.0488	2.3272	0.0503	0.0516
-1.0216	0.0687	0.0677	0.0997	0.0526	0.0530	1.2209	0.0479	0.0488	2.3422	0.0503	0.0516
-1.0066	0.0686	0.0676	0.1146	0.0526	0.0530	1.2359	0.0478	0.0488	2.3571	0.0503	0.0516
-0.9917	0.0712	0.0671	0.1296	0.0525	0.0530	1.2508	0.0478	0.0488	2.3721	0.0503	0.0516
-0.9767	0.0710	0.0671	0.1445	0.0525	0.0530	1.2658	0.0478	0.0488	2.3870	0.0504	0.0516
-0.9618	0.0709	0.0670	0.1595	0.0524	0.0530	1.2807	0.0478	0.0488	2.4020	0.0504	0.0518
-0.9468	0.0707	0.0666	0.1744	0.0520	0.0528	1.2957	0.0478	0.0488	2.4169	0.05046	0.0518
-0.9319	0.0704	0.0664	0.1894	0.0518	0.0524	1.3106	0.0478	0.0488	2.4319	0.0506	0.0526
-0.9169	0.0699	0.0657	0.2043	0.0514	0.0519	1.3256	0.0478	0.0488	2.4468	0.0516	0.0529
-0.9020	0.0699	0.0657	0.2193	0.0514	0.0519	1.3405	0.0478	0.0488	2.4618	0.0518	0.0533
-0.8870	0.0694	0.0648	0.2342	0.0513	0.0519	1.3555	0.0477	0.0487	2.4767	0.0518	0.0533
-0.8721	0.0691	0.0642	0.2492	0.0513	0.0519	1.3704	0.0477	0.0488	2.4917	0.0520	0.0533
-0.8571	0.0686	0.0641	0.2641	0.0513	0.0518	1.3854	0.0477	0.0488	2.5066	0.0520	0.0533
-0.8422	0.0685	0.0641	0.2791	0.0512	0.0518	1.4003	0.0477	0.0488	2.5216	0.0520	0.0533
-0.8272	0.0684	0.0641	0.2940	0.0511	0.0518	1.4153	0.0477	0.0488	2.5365	0.0522	0.0533
-0.8123	0.0680	0.0639	0.3090	0.0511	0.0518	1.4302	0.0477	0.0488	2.5515	0.0524	0.0533
-0.7973	0.0680	0.0639	0.3239	0.0511	0.0518	1.4452	0.0478	0.0488	2.5664	0.0525	0.0538
-0.7824	0.0674	0.0639	0.3389	0.0511	0.0518	1.4601	0.0478	0.0488	2.5814	0.0526	0.0538
-0.7674	0.0668	0.0624	0.3538	0.0508	0.0515	1.4751	0.0478	0.0488	2.5963	0.0527	0.0539
-0.7525	0.0662	0.0624	0.3688	0.0507	0.0513	1.4900	0.0478	0.0488	2.6113	0.0528	0.0546
-0.7375	0.0656	0.0623	0.3837	0.0506	0.0513	1.5050	0.0478	0.0491	2.6262	0.0529	0.0548
-0.7226	0.0654	0.0619	0.3987	0.0506	0.0513	1.5199	0.0478	0.0491	2.6412	0.0529	0.0548
-0.7076	0.0653	0.0615	0.4136	0.0506	0.0513	1.5349	0.0480	0.0492	2.6561	0.0534	0.0548
-0.6927	0.0650	0.0615	0.4286	0.0506	0.0513	1.5498	0.0480	0.0494	2.6711	0.0537	0.0548
-0.6777	0.0645	0.0615	0.4435	0.0506	0.0513	1.5648	0.0480	0.0494	2.6860	0.0538	0.0557
-0.6628	0.0644	0.0615	0.4585	0.0506	0.0513	1.5797	0.0481	0.0494	2.7010	0.0538	0.0557
-0.6478	0.0643	0.0614	0.4734	0.0506	0.0513	1.5947	0.0481	0.0494	2.7159	0.0538	0.0557
-0.6329	0.0637	0.0608	0.4884	0.0504	0.0513	1.6096	0.0481	0.0494	2.7309	0.0539	0.0558
-0.6179	0.0636	0.0598	0.5033	0.0504	0.0513	1.6246	0.0481	0.0494	2.7458	0.0543	0.0558
-0.6030	0.0634	0.0597	0.5183	0.0504	0.0513	1.6395	0.0484	0.0496	2.7608	0.0545	0.0558
-0.5880	0.0623	0.0593	0.5332	0.0504	0.0513	1.6545	0.0484	0.0496	2.7757	0.0545	0.0560
-0.5731	0.0619	0.0588	0.5482	0.0500	0.0506	1.6694	0.0484	0.0496	2.7907	0.0548	0.0560
-0.5581	0.0616	0.0586	0.5631	0.0499	0.0506	1.6844	0.0484	0.0498	2.8056	0.0548	0.0560
-0.5432	0.0614	0.0584	0.5781	0.0499	0.0506	1.6993	0.0484	0.0498	2.8206	0.0549	0.0561
-0.5282	0.0612	0.0584	0.5930	0.0499	0.0506	1.7143	0.0484	0.0499	2.8355	0.0549	0.0561
-0.5133	0.0609	0.0582	0.6080	0.0498	0.0506	1.7292	0.0484	0.0496	2.8505	0.0549	0.0561
-0.4983	0.0608	0.0581	0.6229	0.0498	0.0506	1.7442	0.0485	0.0497	2.8654	0.0549	0.0561
-0.4834	0.0606	0.0580	0.6379	0.0497	0.0506	1.7591	0.0486	0.0497	2.8804	0.0554	0.0572
-0.4684	0.0599	0.0574	0.6528	0.0494	0.0505	1.7741	0.0486	0.0497	2.8953	0.0554	0.0572
-0.4535	0.0594	0.0572	0.6678	0.0494	0.0505	1.7890	0.0486	0.0497	2.9103	0.0554	0.0572
-0.4385	0.0592	0.0567	0.6827	0.0494	0.0505	1.8040	0.0487	0.0498	2.9252	0.0556	0.0572
-0.4236	0.0591	0.0567	0.6977	0.0494	0.0504	1.8189	0.0487	0.0498	2.9402	0.0563	0.0574
-0.4086	0.0590	0.0567	0.7126	0.0494	0.0504	1.8339	0.0488	0.0498	2.9551	0.0566	0.0578
-0.3937	0.0583	0.0563	0.7276	0.0494	0.0504	1.8488	0.0488	0.0498	2.9701	0.0569	0.0580
									3.0000	0.0573	0.0583

Tabla 4.18: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$. Escenario C.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1026	0.1051	-0.3787	0.0834	0.0811	0.7425	0.0728	0.0741	1.8638	0.0715	0.0731
-1.4850	0.1024	0.1051	-0.3638	0.0830	0.0810	0.7575	0.0724	0.0741	1.8787	0.0716	0.0731
-1.4701	0.1024	0.1051	-0.3488	0.0827	0.0810	0.7724	0.0724	0.0741	1.8937	0.0716	0.0731
-1.4551	0.1024	0.1051	-0.3339	0.0824	0.0808	0.7874	0.0724	0.0736	1.9086	0.0716	0.0731
-1.4402	0.1022	0.1047	-0.3189	0.0824	0.0808	0.8023	0.0724	0.0736	1.9236	0.0716	0.0731
-1.4252	0.1022	0.1042	-0.3040	0.0817	0.0804	0.8173	0.0724	0.0736	1.9385	0.0716	0.0731
-1.4103	0.1020	0.1042	-0.2890	0.0816	0.0804	0.8322	0.0724	0.0736	1.9535	0.0716	0.0731
-1.3953	0.1020	0.1042	-0.2741	0.0816	0.0801	0.8472	0.0724	0.0736	1.9684	0.0716	0.0731
-1.3804	0.1010	0.1033	-0.2591	0.0815	0.0801	0.8621	0.0724	0.0736	1.9834	0.0720	0.0731
-1.3654	0.1009	0.1033	-0.2442	0.0815	0.0801	0.8771	0.0722	0.0736	1.9983	0.0720	0.0731
-1.3505	0.1004	0.1029	-0.2292	0.0810	0.0801	0.8920	0.0722	0.0736	2.0133	0.0720	0.0731
-1.3355	0.1000	0.1024	-0.2143	0.0808	0.0800	0.9070	0.0721	0.0736	2.0282	0.0720	0.0731
-1.3206	0.0996	0.1021	-0.1993	0.0805	0.0797	0.9219	0.0721	0.0736	2.0432	0.0720	0.0731
-1.3056	0.0994	0.1021	-0.1844	0.0802	0.0794	0.9369	0.0721	0.0736	2.0581	0.0720	0.0731
-1.2907	0.0991	0.1016	-0.1694	0.0801	0.0793	0.9518	0.0721	0.0732	2.0731	0.0720	0.0731
-1.2757	0.0990	0.1009	-0.1545	0.0800	0.0793	0.9668	0.0715	0.0726	2.0880	0.0720	0.0731
-1.2608	0.0986	0.1005	-0.1395	0.0799	0.0793	0.9817	0.0715	0.0726	2.1030	0.0720	0.0731
-1.2458	0.0979	0.1002	-0.1246	0.0799	0.0792	0.9967	0.0715	0.0726	2.1179	0.0726	0.0736
-1.2309	0.0974	0.1002	-0.1096	0.0793	0.0789	1.0116	0.0715	0.0726	2.1329	0.0726	0.0736
-1.2159	0.0973	0.1000	-0.0947	0.0788	0.0784	1.0266	0.0715	0.0726	2.1478	0.0726	0.0736
-1.2010	0.0973	0.1000	-0.0797	0.0783	0.0782	1.0415	0.0715	0.0727	2.1628	0.0726	0.0736
-1.1860	0.0967	0.0997	-0.0648	0.0783	0.0782	1.0565	0.0715	0.0727	2.1777	0.0728	0.0736
-1.1711	0.0967	0.0993	-0.0498	0.0780	0.0778	1.0714	0.0713	0.0727	2.1927	0.0728	0.0736
-1.1561	0.0967	0.0993	-0.0349	0.0778	0.0777	1.0864	0.0709	0.0723	2.2076	0.0728	0.0736
-1.1412	0.0966	0.0989	-0.0199	0.0778	0.0777	1.1013	0.0705	0.0716	2.2226	0.0728	0.0736
-1.1262	0.0965	0.0988	-0.0050	0.0776	0.0776	1.1163	0.0705	0.0716	2.2375	0.0728	0.0736
-1.1113	0.0966	0.0988	0.0100	0.0773	0.0773	1.1312	0.0705	0.0716	2.2525	0.0728	0.0736
-1.0963	0.0960	0.0980	0.0249	0.0773	0.0773	1.1462	0.0706	0.0716	2.2674	0.0731	0.0740
-1.0814	0.0960	0.0978	0.0399	0.0770	0.0773	1.1611	0.0706	0.0716	2.2824	0.0733	0.0746
-1.0664	0.0952	0.0975	0.0548	0.0770	0.0773	1.1761	0.0706	0.0716	2.2973	0.0733	0.0746
-1.0515	0.0952	0.0975	0.0698	0.0770	0.0772	1.1910	0.0706	0.0716	2.3123	0.0733	0.0746
-1.0365	0.0952	0.0975	0.0847	0.0770	0.0772	1.2060	0.0704	0.0716	2.3272	0.0734	0.0746
-1.0216	0.0952	0.0975	0.0997	0.0766	0.0772	1.2209	0.0704	0.0716	2.3422	0.0734	0.0746
-1.0066	0.0949	0.0974	0.1146	0.0765	0.0772	1.2359	0.0704	0.0716	2.3571	0.0734	0.0746
-0.9917	0.1020	0.0970	0.1296	0.0765	0.0772	1.2508	0.0704	0.0716	2.3721	0.0735	0.0746
-0.9767	0.1018	0.0970	0.1445	0.0764	0.0772	1.2658	0.0703	0.0716	2.3870	0.0735	0.0746
-0.9618	0.1018	0.0969	0.1595	0.0762	0.0772	1.2807	0.0702	0.0716	2.4020	0.0735	0.0748
-0.9468	0.1018	0.0966	0.1744	0.0760	0.0771	1.2957	0.0702	0.0716	2.4169	0.0736	0.0749
-0.9319	0.1017	0.0965	0.1894	0.0758	0.0765	1.3106	0.0702	0.0716	2.4319	0.0737	0.0751
-0.9169	0.1010	0.0957	0.2043	0.0754	0.0762	1.3256	0.0702	0.0716	2.4468	0.0740	0.0753
-0.9020	0.1006	0.0957	0.2193	0.0754	0.0762	1.3405	0.0702	0.0716	2.4618	0.0742	0.0755
-0.8870	0.1000	0.0949	0.2342	0.0754	0.0762	1.3555	0.0702	0.0715	2.4767	0.0742	0.0755
-0.8721	0.0998	0.0937	0.2492	0.0754	0.0762	1.3704	0.0702	0.0717	2.4917	0.0742	0.0755
-0.8571	0.0995	0.0935	0.2641	0.0753	0.0759	1.3854	0.0702	0.0717	2.5066	0.0742	0.0755
-0.8422	0.0992	0.0935	0.2791	0.0753	0.0759	1.4003	0.0702	0.0717	2.5216	0.0742	0.0755
-0.8272	0.0991	0.0934	0.2940	0.0752	0.0759	1.4153	0.0702	0.0717	2.5365	0.0746	0.0755
-0.8123	0.0984	0.0927	0.3090	0.0752	0.0759	1.4302	0.0702	0.0717	2.5515	0.0746	0.0755
-0.7973	0.0983	0.0927	0.3239	0.0752	0.0759	1.4452	0.0703	0.0717	2.5664	0.0746	0.0759
-0.7824	0.0978	0.0927	0.3389	0.0752	0.0759	1.4601	0.0703	0.0717	2.5814	0.0746	0.0759
-0.7674	0.0968	0.0915	0.3538	0.0750	0.0757	1.4751	0.0702	0.0717	2.5963	0.0750	0.0762
-0.7525	0.0968	0.0915	0.3688	0.0749	0.0754	1.4900	0.0702	0.0716	2.6113	0.0750	0.0769
-0.7375	0.0963	0.0915	0.3837	0.0748	0.0754	1.5050	0.0702	0.0720	2.6262	0.0752	0.0771
-0.7226	0.0961	0.0913	0.3987	0.0746	0.0754	1.5199	0.0702	0.0720	2.6412	0.0752	0.0771
-0.7076	0.0960	0.0907	0.4136	0.0746	0.0754	1.5349	0.0706	0.0724	2.6561	0.0757	0.0771
-0.6927	0.0956	0.0907	0.4286	0.0746	0.0754	1.5498	0.0706	0.0726	2.6711	0.0759	0.0771
-0.6777	0.0950	0.0907	0.4435	0.0746	0.0754	1.5648	0.0706	0.0726	2.6860	0.0759	0.0782
-0.6628	0.0946	0.0904	0.4585	0.0746	0.0754	1.5797	0.0706	0.0726	2.7010	0.0760	0.0782
-0.6478	0.0943	0.0903	0.4734	0.0746	0.0754	1.5947	0.0706	0.0726	2.7159	0.0759	0.0782
-0.6329	0.0932	0.0893	0.4884	0.0743	0.0754	1.6096	0.0708	0.0726	2.7309	0.0760	0.0782
-0.6179	0.0929	0.0884	0.5033	0.0743	0.0754	1.6246	0.0708	0.0726	2.7458	0.0763	0.0782
-0.6030	0.0924	0.0879	0.5183	0.0742	0.0754	1.6395	0.0710	0.0728	2.7608	0.0765	0.0782
-0.5880	0.0911	0.0877	0.5332	0.0742	0.0754	1.6545	0.0710	0.0728	2.7757	0.0765	0.0784
-0.5731	0.0902	0.0866	0.5482	0.0738	0.0745	1.6694	0.0710	0.0728	2.7907	0.0766	0.0784
-0.5581	0.0898	0.0863	0.5631	0.0737	0.0744	1.6844	0.0710	0.0728	2.8056	0.0766	0.0784
-0.5432	0.0890	0.0858	0.5781	0.0736	0.0743	1.6993	0.0710	0.0728	2.8206	0.0767	0.0784
-0.5282	0.0890	0.0858	0.5930	0.0735	0.0743	1.7143	0.0710	0.0732	2.8355	0.0768	0.0784
-0.5133	0.0878	0.0851	0.6080	0.0734	0.0742	1.7292	0.0710	0.0730	2.8505	0.0768	0.0784
-0.4983	0.0875	0.0846	0.6229	0.0734	0.0742	1.7442	0.0711	0.0730	2.8654	0.0768	0.0784
-0.4834	0.0872	0.0841	0.6379	0.0733	0.0742	1.7591	0.0712	0.0730	2.8804	0.0772	0.0801
-0.4684	0.0864	0.0836	0.6528	0.0729	0.0742	1.7741	0.0712	0.0730	2.8953	0.0773	0.0801
-0.4535	0.0857	0.0830	0.6678	0.0729	0.0742	1.7890	0.0712	0.0730	2.9103	0.0773	0.0801
-0.4385	0.0853	0.0829	0.6827	0.0729	0.0742	1.8040	0.0712	0.0731	2.9252	0.0775	0.0802
-0.4236	0.0853	0.0829	0.6977	0.0728	0.0741	1.8189	0.0712	0.0731	2.9402	0.0779	0.0804
-0.4086	0.0850	0.0828	0.7126	0.0728	0.0741	1.8339	0.0715	0.0731	2.9551	0.0786	0.0809
-0.3937	0.0844	0.0823	0.7276	0.0728	0.0741	1.8488	0.0714	0.0731	2.9701	0.0788	0.0811
									3.0000	0.0794	0.0816

Tabla 4.19: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario C.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1211	0.1706	-0.3787	0.1388	0.1374	0.7425	0.1092	0.1113	1.8638	0.1061	0.1091
-1.4850	0.1210	0.1706	-0.3638	0.1378	0.1366	0.7575	0.1092	0.1113	1.8787	0.1061	0.1091
-1.4701	0.1210	0.1706	-0.3488	0.1373	0.1364	0.7724	0.1088	0.1110	1.8937	0.1061	0.1091
-1.4551	0.1200	0.1696	-0.3339	0.1373	0.1363	0.7874	0.1088	0.1109	1.9086	0.1061	0.1091
-1.4402	0.1200	0.1693	-0.3189	0.1372	0.1363	0.8023	0.1088	0.1108	1.9236	0.1061	0.1091
-1.4252	0.1200	0.1691	-0.3040	0.1364	0.1355	0.8173	0.1088	0.1108	1.9385	0.1061	0.1091
-1.4103	0.1199	0.1691	-0.2890	0.1359	0.1352	0.8322	0.1088	0.1108	1.9535	0.1061	0.1092
-1.3953	0.1196	0.1691	-0.2741	0.1359	0.1351	0.8472	0.1087	0.1107	1.9684	0.1061	0.1092
-1.3804	0.1187	0.1683	-0.2591	0.1357	0.1349	0.8621	0.1085	0.1105	1.9834	0.1065	0.1092
-1.3654	0.1187	0.1683	-0.2442	0.1353	0.1345	0.8771	0.1085	0.1105	1.9983	0.1064	0.1092
-1.3505	0.1183	0.1680	-0.2292	0.1351	0.1345	0.8920	0.1085	0.1105	2.0133	0.1064	0.1092
-1.3355	0.1181	0.1679	-0.2143	0.1338	0.1334	0.9070	0.1082	0.1105	2.0282	0.1064	0.1092
-1.3206	0.1178	0.1678	-0.1993	0.1337	0.1329	0.9219	0.1082	0.1105	2.0432	0.1064	0.1092
-1.3056	0.1176	0.1676	-0.1844	0.1336	0.1328	0.9369	0.1082	0.1105	2.0581	0.1064	0.1092
-1.2907	0.1172	0.1676	-0.1694	0.1334	0.1326	0.9518	0.1082	0.1101	2.0731	0.1064	0.1092
-1.2757	0.1172	0.1672	-0.1545	0.1330	0.1323	0.9668	0.1076	0.1094	2.0880	0.1064	0.1092
-1.2608	0.1162	0.1662	-0.1395	0.1329	0.1323	0.9817	0.1076	0.1094	2.1030	0.1064	0.1092
-1.2458	0.1151	0.1654	-0.1246	0.1329	0.1322	0.9967	0.1076	0.1094	2.1179	0.1066	0.1093
-1.2309	0.1152	0.1654	-0.1096	0.1322	0.1317	1.0116	0.1074	0.1093	2.1329	0.1066	0.1093
-1.2159	0.1152	0.1654	-0.0947	0.1300	0.1295	1.0266	0.1074	0.1093	2.1478	0.1066	0.1093
-1.2010	0.1151	0.1654	-0.0797	0.1273	0.1272	1.0415	0.1074	0.1093	2.1628	0.1066	0.1093
-1.1860	0.1146	0.1652	-0.0648	0.1259	0.1258	1.0565	0.1074	0.1093	2.1777	0.1066	0.1093
-1.1711	0.1145	0.1651	-0.0498	0.1246	0.1245	1.0714	0.1074	0.1093	2.1927	0.1066	0.1093
-1.1561	0.1146	0.1651	-0.0349	0.1241	0.1241	1.0864	0.1072	0.1092	2.2076	0.1066	0.1093
-1.1412	0.1146	0.1651	-0.0199	0.1239	0.1239	1.1013	0.1072	0.1090	2.2226	0.1066	0.1093
-1.1262	0.1146	0.1651	-0.0050	0.1238	0.1238	1.1163	0.1072	0.1090	2.2375	0.1066	0.1093
-1.1113	0.1146	0.1651	0.0100	0.1227	0.1227	1.1312	0.1072	0.1090	2.2525	0.1066	0.1093
-1.0963	0.1144	0.1643	0.0249	0.1227	0.1227	1.1462	0.1072	0.1090	2.2674	0.1066	0.1094
-1.0814	0.1142	0.1640	0.0399	0.1218	0.1222	1.1611	0.1071	0.1090	2.2824	0.1066	0.1102
-1.0664	0.1135	0.1638	0.0548	0.1217	0.1221	1.1761	0.1069	0.1090	2.2973	0.1066	0.1102
-1.0515	0.1133	0.1638	0.0698	0.1211	0.1215	1.1910	0.1069	0.1090	2.3123	0.1070	0.1106
-1.0365	0.1133	0.1638	0.0847	0.1211	0.1215	1.2060	0.1068	0.1090	2.3272	0.1072	0.1106
-1.0216	0.1134	0.1638	0.0997	0.1206	0.1215	1.2209	0.1067	0.1088	2.3422	0.1072	0.1106
-1.0066	0.1136	0.1638	0.1146	0.1205	0.1215	1.2359	0.1066	0.1088	2.3571	0.1071	0.1106
-0.9917	0.1678	0.1638	0.1296	0.1198	0.1208	1.2508	0.1066	0.1088	2.3721	0.1072	0.1106
-0.9767	0.1677	0.1637	0.1445	0.1197	0.1208	1.2658	0.1066	0.1088	2.3870	0.1072	0.1106
-0.9618	0.1677	0.1636	0.1595	0.1197	0.1208	1.2807	0.1063	0.1086	2.4020	0.1072	0.1106
-0.9468	0.1676	0.1636	0.1744	0.1196	0.1208	1.2957	0.1063	0.1086	2.4169	0.1072	0.1106
-0.9319	0.1675	0.1636	0.1894	0.1196	0.1199	1.3106	0.1063	0.1086	2.4319	0.1072	0.1107
-0.9169	0.1670	0.1630	0.2043	0.1194	0.1198	1.3256	0.1062	0.1086	2.4468	0.1074	0.1108
-0.9020	0.1670	0.1629	0.2193	0.1192	0.1196	1.3405	0.1061	0.1085	2.4618	0.1074	0.1110
-0.8870	0.1665	0.1626	0.2342	0.1192	0.1196	1.3555	0.1061	0.1085	2.4767	0.1077	0.1112
-0.8721	0.1664	0.1621	0.2492	0.1190	0.1196	1.3704	0.1061	0.1085	2.4917	0.1077	0.1112
-0.8571	0.1663	0.1620	0.2641	0.1189	0.1196	1.3854	0.1061	0.1085	2.5066	0.1077	0.1112
-0.8422	0.1660	0.1620	0.2791	0.1189	0.1196	1.4003	0.1061	0.1085	2.5216	0.1077	0.1112
-0.8272	0.1656	0.1620	0.2940	0.1188	0.1195	1.4153	0.1060	0.1085	2.5365	0.1082	0.1112
-0.8123	0.1653	0.1615	0.3090	0.1188	0.1195	1.4302	0.1056	0.1082	2.5515	0.1083	0.1115
-0.7973	0.1652	0.1606	0.3239	0.1186	0.1193	1.4452	0.1056	0.1082	2.5664	0.1084	0.1115
-0.7824	0.1650	0.1606	0.3389	0.1186	0.1193	1.4601	0.1056	0.1082	2.5814	0.1084	0.1115
-0.7674	0.1641	0.1596	0.3538	0.1186	0.1193	1.4751	0.1053	0.1082	2.5963	0.1089	0.1120
-0.7525	0.1634	0.1594	0.3688	0.1180	0.1191	1.4900	0.1052	0.1081	2.6113	0.1089	0.1122
-0.7375	0.1629	0.1594	0.3837	0.1179	0.1189	1.5050	0.1052	0.1086	2.6262	0.1090	0.1122
-0.7226	0.1628	0.1593	0.3987	0.1179	0.1189	1.5199	0.1052	0.1086	2.6412	0.1090	0.1122
-0.7076	0.1628	0.1586	0.4136	0.1178	0.1188	1.5349	0.1058	0.1092	2.6561	0.1091	0.1122
-0.6927	0.1620	0.1586	0.4286	0.1178	0.1188	1.5498	0.1058	0.1092	2.6711	0.1091	0.1122
-0.6777	0.1616	0.1586	0.4435	0.1178	0.1188	1.5648	0.1058	0.1092	2.6860	0.1092	0.1128
-0.6628	0.1611	0.1582	0.4585	0.1175	0.1188	1.5797	0.1058	0.1091	2.7010	0.1092	0.1128
-0.6478	0.1602	0.1574	0.4734	0.1172	0.1185	1.5947	0.1058	0.1091	2.7159	0.1092	0.1128
-0.6329	0.1590	0.1566	0.4884	0.1169	0.1185	1.6096	0.1059	0.1091	2.7309	0.1092	0.1128
-0.6179	0.1586	0.1560	0.5033	0.1167	0.1183	1.6246	0.1059	0.1091	2.7458	0.1093	0.1128
-0.6030	0.1582	0.1555	0.5183	0.1166	0.1182	1.6395	0.1060	0.1092	2.7608	0.1094	0.1128
-0.5880	0.1575	0.1553	0.5332	0.1162	0.1176	1.6545	0.1060	0.1092	2.7757	0.1094	0.1128
-0.5731	0.1564	0.1541	0.5482	0.1157	0.1171	1.6694	0.1060	0.1092	2.7907	0.1094	0.1128
-0.5581	0.1558	0.1536	0.5631	0.1152	0.1166	1.6844	0.1060	0.1092	2.8056	0.1094	0.1128
-0.5432	0.1549	0.1526	0.5781	0.1142	0.1156	1.6993	0.1059	0.1092	2.8206	0.1095	0.1128
-0.5282	0.1547	0.1525	0.5930	0.1133	0.1147	1.7143	0.1059	0.1092	2.8355	0.1096	0.1128
-0.5133	0.1515	0.1496	0.6080	0.1125	0.1138	1.7292	0.1059	0.1091	2.8505	0.1096	0.1128
-0.4983	0.1507	0.1482	0.6229	0.1120	0.1137	1.7442	0.1059	0.1091	2.8654	0.1096	0.1128
-0.4834	0.1496	0.1462	0.6379	0.1114	0.1130	1.7591	0.1059	0.1091	2.8804	0.1096	0.1132
-0.4684	0.1450	0.1430	0.6528	0.1106	0.1125	1.7741	0.1059	0.1091	2.8953	0.1096	0.1132
-0.4535	0.1433	0.1406	0.6678	0.1105	0.1125	1.7890	0.1060	0.1091	2.9103	0.1096	0.1132
-0.4385	0.1420	0.1402	0.6827	0.1100	0.1120	1.8040	0.1060	0.1091	2.9252	0.1099	0.1132
-0.4236	0.1417	0.1402	0.6977	0.1098	0.1120	1.8189	0.1060	0.1091	2.9402	0.1100	0.1132
-0.4086	0.1408	0.1392	0.7126	0.1098	0.1118	1.8339	0.1061	0.1091	2.9551	0.1104	0.1136
-0.3937	0.1402	0.1389	0.7276	0.1094	0.1115	1.8488	0.1061	0.1091	2.9701	0.1106	0.1138
									3.0000	0.1107	0.1146

Tabla 4.20: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario C.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0844	0.2264	-0.3787	0.1716	0.1706	0.7425	0.1066	0.1083	1.8638	0.0993	0.1023
-1.4850	0.0841	0.2264	-0.3638	0.1708	0.1698	0.7575	0.1064	0.1083	1.8787	0.0993	0.1023
-1.4701	0.0841	0.2264	-0.3488	0.1697	0.1690	0.7724	0.1049	0.1068	1.8937	0.0993	0.1023
-1.4551	0.0829	0.2254	-0.3339	0.1696	0.1689	0.7874	0.1047	0.1066	1.9086	0.0993	0.1023
-1.4402	0.0828	0.2253	-0.3189	0.1695	0.1689	0.8023	0.1046	0.1064	1.9236	0.0993	0.1023
-1.4252	0.0828	0.2252	-0.3040	0.1682	0.1676	0.8173	0.1046	0.1064	1.9385	0.0993	0.1023
-1.4103	0.0827	0.2252	-0.2890	0.1676	0.1670	0.8322	0.1046	0.1064	1.9535	0.0993	0.1024
-1.3953	0.0820	0.2251	-0.2741	0.1675	0.1669	0.8472	0.1041	0.1059	1.9684	0.0995	0.1024
-1.3804	0.0814	0.2246	-0.2591	0.1673	0.1667	0.8621	0.1034	0.1053	1.9834	0.0998	0.1024
-1.3654	0.0813	0.2246	-0.2442	0.1669	0.1662	0.8771	0.1034	0.1053	1.9983	0.0996	0.1024
-1.3505	0.0811	0.2245	-0.2292	0.1668	0.1660	0.8920	0.1034	0.1053	2.0133	0.0996	0.1024
-1.3355	0.0810	0.2244	-0.2143	0.1654	0.1646	0.9070	0.1031	0.1053	2.0282	0.0996	0.1024
-1.3206	0.0810	0.2244	-0.1993	0.1653	0.1644	0.9219	0.1031	0.1053	2.0432	0.0996	0.1024
-1.3056	0.0808	0.2244	-0.1844	0.1652	0.1642	0.9369	0.1031	0.1053	2.0581	0.0996	0.1024
-1.2907	0.0804	0.2243	-0.1694	0.1650	0.1640	0.9518	0.1031	0.1050	2.0731	0.0996	0.1024
-1.2757	0.0804	0.2240	-0.1545	0.1643	0.1635	0.9668	0.1028	0.1048	2.0880	0.0996	0.1024
-1.2608	0.0797	0.2234	-0.1395	0.1640	0.1635	0.9817	0.1028	0.1048	2.1030	0.0996	0.1024
-1.2458	0.0792	0.2231	-0.1246	0.1640	0.1635	0.9967	0.1028	0.1048	2.1179	0.0998	0.1025
-1.2309	0.0792	0.2231	-0.1096	0.1633	0.1628	1.0116	0.1027	0.1046	2.1329	0.0998	0.1025
-1.2159	0.0791	0.2231	-0.0947	0.1601	0.1598	1.0266	0.1027	0.1046	2.1478	0.0998	0.1025
-1.2010	0.0791	0.2231	-0.0797	0.1525	0.1524	1.0415	0.1027	0.1046	2.1628	0.0998	0.1025
-1.1860	0.0789	0.2228	-0.0648	0.1463	0.1462	1.0565	0.1027	0.1046	2.1777	0.0998	0.1025
-1.1711	0.0790	0.2228	-0.0498	0.1426	0.1425	1.0714	0.1027	0.1046	2.1927	0.0998	0.1025
-1.1561	0.0792	0.2228	-0.0349	0.1406	0.1406	1.0864	0.1023	0.1042	2.2076	0.0998	0.1025
-1.1412	0.0795	0.2228	-0.0199	0.1396	0.1396	1.1013	0.1023	0.1042	2.2226	0.0998	0.1025
-1.1262	0.0796	0.2228	-0.0050	0.1393	0.1393	1.1163	0.1022	0.1041	2.2375	0.0998	0.1025
-1.1113	0.0798	0.2228	0.0100	0.1373	0.1374	1.1312	0.1022	0.1041	2.2525	0.0998	0.1025
-1.0963	0.0797	0.2228	0.0249	0.1373	0.1373	1.1462	0.1022	0.1041	2.2674	0.0998	0.1025
-1.0814	0.0790	0.2219	0.0399	0.1359	0.1363	1.1611	0.1020	0.1041	2.2824	0.0998	0.1027
-1.0664	0.0787	0.2219	0.0548	0.1358	0.1359	1.1761	0.1020	0.1040	2.2973	0.0997	0.1027
-1.0515	0.0788	0.2219	0.0698	0.1345	0.1347	1.1910	0.1020	0.1040	2.3123	0.1010	0.1039
-1.0365	0.0799	0.2219	0.0847	0.1345	0.1347	1.2060	0.1020	0.1040	2.3272	0.1011	0.1039
-1.0216	0.0812	0.2219	0.0997	0.1343	0.1347	1.2209	0.1019	0.1039	2.3422	0.1011	0.1039
-1.0066	0.0827	0.2219	0.1146	0.1336	0.1340	1.2359	0.1019	0.1039	2.3571	0.1010	0.1039
-0.9917	0.2234	0.2218	0.1296	0.1328	0.1333	1.2508	0.1018	0.1039	2.3721	0.1010	0.1039
-0.9767	0.2234	0.2217	0.1445	0.1328	0.1333	1.2658	0.1018	0.1039	2.3870	0.1010	0.1039
-0.9618	0.2234	0.2217	0.1595	0.1328	0.1333	1.2807	0.1013	0.1034	2.4020	0.1011	0.1039
-0.9468	0.2234	0.2217	0.1744	0.1327	0.1333	1.2957	0.1013	0.1034	2.4169	0.1011	0.1039
-0.9319	0.2233	0.2217	0.1894	0.1327	0.1331	1.3106	0.1013	0.1034	2.4319	0.1011	0.1039
-0.9169	0.2231	0.2215	0.2043	0.1321	0.1326	1.3256	0.1012	0.1034	2.4468	0.1011	0.1039
-0.9020	0.2231	0.2215	0.2193	0.1317	0.1323	1.3405	0.1011	0.1033	2.4618	0.1012	0.1040
-0.8870	0.2230	0.2214	0.2342	0.1316	0.1323	1.3555	0.1011	0.1033	2.4767	0.1019	0.1046
-0.8721	0.2230	0.2214	0.2492	0.1313	0.1319	1.3704	0.1011	0.1033	2.4917	0.1020	0.1047
-0.8571	0.2229	0.2212	0.2641	0.1312	0.1319	1.3854	0.1011	0.1033	2.5066	0.1020	0.1047
-0.8422	0.2228	0.2212	0.2791	0.1312	0.1319	1.4003	0.1011	0.1033	2.5216	0.1020	0.1047
-0.8272	0.2225	0.2212	0.2940	0.1304	0.1312	1.4153	0.1009	0.1033	2.5365	0.1023	0.1048
-0.8123	0.2224	0.2211	0.3090	0.1304	0.1311	1.4302	0.0997	0.1021	2.5515	0.1023	0.1050
-0.7973	0.2223	0.2127	0.3239	0.1300	0.1307	1.4452	0.0997	0.1021	2.5664	0.1023	0.1050
-0.7824	0.2223	0.2102	0.3389	0.1300	0.1307	1.4601	0.0997	0.1021	2.5814	0.1024	0.1050
-0.7674	0.2201	0.2096	0.3538	0.1299	0.1306	1.4751	0.0995	0.1021	2.5963	0.1028	0.1054
-0.7525	0.2114	0.2084	0.3688	0.1279	0.1292	1.4900	0.0994	0.1020	2.6113	0.1028	0.1054
-0.7375	0.2108	0.2077	0.3837	0.1279	0.1286	1.5050	0.0993	0.1022	2.6262	0.1028	0.1054
-0.7226	0.2096	0.2069	0.3987	0.1279	0.1286	1.5199	0.0993	0.1022	2.6412	0.1028	0.1054
-0.7076	0.2093	0.2065	0.4136	0.1274	0.1281	1.5349	0.0995	0.1025	2.6561	0.1029	0.1054
-0.6927	0.2086	0.2065	0.4286	0.1273	0.1280	1.5498	0.0995	0.1025	2.6711	0.1029	0.1054
-0.6777	0.2081	0.2058	0.4435	0.1273	0.1280	1.5648	0.0995	0.1025	2.6860	0.1030	0.1056
-0.6628	0.2078	0.2056	0.4585	0.1271	0.1280	1.5797	0.0995	0.1023	2.7010	0.1030	0.1056
-0.6478	0.2067	0.2051	0.4734	0.1264	0.1273	1.5947	0.0995	0.1023	2.7159	0.1031	0.1056
-0.6329	0.2066	0.2049	0.4884	0.1262	0.1273	1.6096	0.0995	0.1023	2.7309	0.1031	0.1056
-0.6179	0.2064	0.2046	0.5033	0.1254	0.1267	1.6246	0.0995	0.1023	2.7458	0.1033	0.1056
-0.6030	0.2061	0.2044	0.5183	0.1253	0.1266	1.6395	0.0995	0.1023	2.7608	0.1033	0.1056
-0.5880	0.2060	0.2041	0.5332	0.1247	0.1256	1.6545	0.0995	0.1023	2.7757	0.1033	0.1056
-0.5731	0.2050	0.2034	0.5482	0.1233	0.1245	1.6694	0.0995	0.1023	2.7907	0.1033	0.1057
-0.5581	0.2048	0.2032	0.5631	0.1225	0.1237	1.6844	0.0995	0.1023	2.8056	0.1034	0.1057
-0.5432	0.2041	0.2024	0.5781	0.1205	0.1214	1.6993	0.0994	0.1023	2.8206	0.1034	0.1057
-0.5282	0.2040	0.2021	0.5930	0.1179	0.1192	1.7143	0.0994	0.1023	2.8355	0.1035	0.1057
-0.5133	0.2001	0.1988	0.6080	0.1161	0.1171	1.7292	0.0994	0.1023	2.8505	0.1036	0.1057
-0.4983	0.1994	0.1976	0.6229	0.1156	0.1169	1.7442	0.0994	0.1023	2.8654	0.1036	0.1057
-0.4834	0.1969	0.1924	0.6379	0.1139	0.1152	1.7591	0.0994	0.1023	2.8804	0.1036	0.1058
-0.4684	0.1824	0.1802	0.6528	0.1112	0.1124	1.7741	0.0994	0.1023	2.8953	0.1036	0.1058
-0.4535	0.1786	0.1766	0.6678	0.1106	0.1124	1.7890	0.0994	0.1023	2.9103	0.1036	0.1058
-0.4385	0.1771	0.1746	0.6827	0.1087	0.1103	1.8040	0.0994	0.1023	2.9252	0.1042	0.1059
-0.4236	0.1756	0.1746	0.6977	0.1086	0.1103	1.8189	0.0994	0.1023	2.9402	0.1042	0.1059
-0.4086	0.1746	0.1733	0.7126	0.1083	0.1098	1.8339	0.0994	0.1023	2.9551	0.1044	0.1059
-0.3937	0.1738	0.1727	0.7276	0.1070	0.1088	1.8488	0.0993	0.1023	2.9701	0.1043	0.1059
									3.0000	0.1044	0.1067

Tabla 4.21: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario C.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0571	0.2850	-0.3787	0.1904	0.1897	0.7425	0.0960	0.0976	1.8638	0.0864	0.0895
-1.4850	0.0570	0.2850	-0.3638	0.1899	0.1888	0.7575	0.0958	0.0976	1.8787	0.0864	0.0895
-1.4701	0.0569	0.2850	-0.3488	0.1876	0.1870	0.7724	0.0938	0.0956	1.8937	0.0864	0.0895
-1.4551	0.0562	0.2843	-0.3339	0.1875	0.1870	0.7874	0.0935	0.0953	1.9086	0.0864	0.0895
-1.4402	0.0558	0.2841	-0.3189	0.1874	0.1870	0.8023	0.0933	0.0952	1.9236	0.0864	0.0895
-1.4252	0.0558	0.2841	-0.3040	0.1852	0.1847	0.8173	0.0933	0.0952	1.9385	0.0864	0.0895
-1.4103	0.0556	0.2841	-0.2890	0.1838	0.1836	0.8322	0.0933	0.0952	1.9535	0.0864	0.0897
-1.3953	0.0552	0.2841	-0.2741	0.1838	0.1835	0.8472	0.0927	0.0946	1.9684	0.0864	0.0897
-1.3804	0.0552	0.2841	-0.2591	0.1835	0.1832	0.8621	0.0917	0.0936	1.9834	0.0865	0.0897
-1.3654	0.0551	0.2841	-0.2442	0.1824	0.1822	0.8771	0.0916	0.0936	1.9983	0.0862	0.0897
-1.3505	0.0550	0.2840	-0.2292	0.1824	0.1820	0.8920	0.0916	0.0936	2.0133	0.0862	0.0897
-1.3355	0.0548	0.2838	-0.2143	0.1808	0.1804	0.9070	0.0916	0.0936	2.0282	0.0862	0.0897
-1.3206	0.0546	0.2838	-0.1993	0.1807	0.1803	0.9219	0.0916	0.0936	2.0432	0.0862	0.0897
-1.3056	0.0544	0.2838	-0.1844	0.1806	0.1802	0.9369	0.0916	0.0936	2.0581	0.0863	0.0897
-1.2907	0.0542	0.2838	-0.1694	0.1806	0.1802	0.9518	0.0916	0.0935	2.0731	0.0863	0.0897
-1.2757	0.0542	0.2838	-0.1545	0.1792	0.1788	0.9668	0.0914	0.0934	2.0880	0.0863	0.0897
-1.2608	0.0537	0.2834	-0.1395	0.1791	0.1788	0.9817	0.0914	0.0934	2.1030	0.0863	0.0897
-1.2458	0.0537	0.2833	-0.1246	0.1791	0.1788	0.9967	0.0914	0.0934	2.1179	0.0868	0.0902
-1.2309	0.0538	0.2833	-0.1096	0.1787	0.1784	1.0116	0.0910	0.0930	2.1329	0.0868	0.0902
-1.2159	0.0539	0.2833	-0.0947	0.1745	0.1744	1.0266	0.0910	0.0930	2.1478	0.0868	0.0902
-1.2010	0.0538	0.2833	-0.0797	0.1638	0.1638	1.0415	0.0910	0.0930	2.1628	0.0868	0.0902
-1.1860	0.0538	0.2831	-0.0648	0.1525	0.1525	1.0565	0.0910	0.0930	2.1777	0.0868	0.0902
-1.1711	0.0537	0.2831	-0.0498	0.1462	0.1462	1.0714	0.0910	0.0928	2.1927	0.0868	0.0902
-1.1561	0.0536	0.2831	-0.0349	0.1428	0.1428	1.0864	0.0904	0.0923	2.2076	0.0868	0.0902
-1.1412	0.0540	0.2831	-0.0199	0.1404	0.1404	1.1013	0.0904	0.0923	2.2226	0.0868	0.0902
-1.1262	0.0542	0.2831	-0.0050	0.1402	0.1402	1.1163	0.0904	0.0922	2.2375	0.0868	0.0902
-1.1113	0.0546	0.2831	0.0100	0.1382	0.1383	1.1312	0.0904	0.0922	2.2525	0.0868	0.0902
-1.0963	0.0550	0.2830	0.0249	0.1380	0.1380	1.1462	0.0904	0.0922	2.2674	0.0868	0.0902
-1.0814	0.0547	0.2821	0.0399	0.1356	0.1362	1.1611	0.0902	0.0922	2.2824	0.0868	0.0902
-1.0664	0.0550	0.2820	0.0548	0.1356	0.1356	1.1761	0.0899	0.0920	2.2973	0.0868	0.0902
-1.0515	0.0559	0.2820	0.0698	0.1334	0.1336	1.1910	0.0899	0.0920	2.3123	0.0880	0.0914
-1.0365	0.0579	0.2820	0.0847	0.1334	0.1336	1.2060	0.0898	0.0920	2.3272	0.0880	0.0914
-1.0216	0.0606	0.2820	0.0997	0.1333	0.1335	1.2209	0.0896	0.0918	2.3422	0.0880	0.0914
-1.0066	0.0638	0.2820	0.1146	0.1318	0.1320	1.2359	0.0895	0.0918	2.3571	0.0878	0.0914
-0.9917	0.2832	0.2818	0.1296	0.1304	0.1307	1.2508	0.0894	0.0918	2.3721	0.0878	0.0914
-0.9767	0.2832	0.2816	0.1445	0.1304	0.1307	1.2658	0.0893	0.0918	2.3870	0.0878	0.0914
-0.9618	0.2830	0.2816	0.1595	0.1303	0.1307	1.2807	0.0888	0.0913	2.4020	0.0878	0.0914
-0.9468	0.2830	0.2816	0.1744	0.1303	0.1307	1.2957	0.0888	0.0913	2.4169	0.0878	0.0914
-0.9319	0.2830	0.2816	0.1894	0.1303	0.1306	1.3106	0.0888	0.0913	2.4319	0.0878	0.0914
-0.9169	0.2830	0.2816	0.2043	0.1296	0.1300	1.3256	0.0888	0.0913	2.4468	0.0879	0.0914
-0.9020	0.2830	0.2815	0.2193	0.1291	0.1294	1.3405	0.0886	0.0912	2.4618	0.0882	0.0917
-0.8870	0.2829	0.2815	0.2342	0.1288	0.1294	1.3555	0.0886	0.0912	2.4767	0.0888	0.0922
-0.8721	0.2829	0.2815	0.2492	0.1284	0.1291	1.3704	0.0886	0.0912	2.4917	0.0888	0.0922
-0.8571	0.2828	0.2814	0.2641	0.1284	0.1291	1.3854	0.0886	0.0912	2.5066	0.0888	0.0922
-0.8422	0.2828	0.2814	0.2791	0.1284	0.1291	1.4003	0.0887	0.0912	2.5216	0.0888	0.0922
-0.8272	0.2827	0.2814	0.2940	0.1276	0.1282	1.4153	0.0885	0.0912	2.5365	0.0892	0.0923
-0.8123	0.2826	0.2814	0.3090	0.1276	0.1282	1.4302	0.0874	0.0900	2.5515	0.0894	0.0927
-0.7973	0.2826	0.2604	0.3239	0.1274	0.1280	1.4452	0.0874	0.0900	2.5664	0.0894	0.0927
-0.7824	0.2826	0.2537	0.3389	0.1274	0.1280	1.4601	0.0874	0.0900	2.5814	0.0895	0.0927
-0.7674	0.2775	0.2514	0.3538	0.1272	0.1279	1.4751	0.0871	0.0900	2.5963	0.0897	0.0929
-0.7525	0.2560	0.2497	0.3688	0.1248	0.1263	1.4900	0.0866	0.0896	2.6113	0.0897	0.0929
-0.7375	0.2526	0.2476	0.3837	0.1248	0.1253	1.5050	0.0866	0.0896	2.6262	0.0898	0.0929
-0.7226	0.2493	0.2463	0.3987	0.1246	0.1253	1.5199	0.0865	0.0896	2.6412	0.0897	0.0929
-0.7076	0.2490	0.2453	0.4136	0.1234	0.1241	1.5349	0.0866	0.0898	2.6561	0.0899	0.0929
-0.6927	0.2477	0.2453	0.4286	0.1233	0.1241	1.5498	0.0866	0.0898	2.6711	0.0899	0.0929
-0.6777	0.2466	0.2441	0.4435	0.1233	0.1241	1.5648	0.0866	0.0898	2.6860	0.0900	0.0930
-0.6628	0.2460	0.2439	0.4585	0.1232	0.1241	1.5797	0.0866	0.0895	2.7010	0.0900	0.0930
-0.6478	0.2445	0.2435	0.4734	0.1224	0.1235	1.5947	0.0865	0.0895	2.7159	0.0901	0.0930
-0.6329	0.2444	0.2431	0.4884	0.1222	0.1235	1.6096	0.0865	0.0895	2.7309	0.0901	0.0930
-0.6179	0.2439	0.2422	0.5033	0.1206	0.1219	1.6246	0.0865	0.0895	2.7458	0.0904	0.0930
-0.6030	0.2431	0.2422	0.5183	0.1205	0.1217	1.6395	0.0865	0.0895	2.7608	0.0904	0.0930
-0.5880	0.2430	0.2413	0.5332	0.1199	0.1211	1.6545	0.0865	0.0895	2.7757	0.0904	0.0930
-0.5731	0.2421	0.2412	0.5482	0.1184	0.1195	1.6694	0.0865	0.0895	2.7907	0.0904	0.0930
-0.5581	0.2420	0.2412	0.5631	0.1171	0.1182	1.6844	0.0865	0.0895	2.8056	0.0905	0.0930
-0.5432	0.2420	0.2410	0.5781	0.1145	0.1156	1.6993	0.0864	0.0895	2.8206	0.0905	0.0930
-0.5282	0.2420	0.2401	0.5930	0.1121	0.1134	1.7143	0.0864	0.0895	2.8355	0.0905	0.0930
-0.5133	0.2400	0.2389	0.6080	0.1088	0.1098	1.7292	0.0864	0.0895	2.8505	0.0906	0.0930
-0.4983	0.2394	0.2380	0.6229	0.1084	0.1097	1.7442	0.0864	0.0895	2.8654	0.0906	0.0930
-0.4834	0.2363	0.2312	0.6379	0.1057	0.1069	1.7591	0.0864	0.0895	2.8804	0.0906	0.0930
-0.4684	0.2090	0.2057	0.6528	0.1024	0.1033	1.7741	0.0864	0.0895	2.8953	0.0906	0.0930
-0.4535	0.2018	0.2006	0.6678	0.1018	0.1033	1.7890	0.0864	0.0895	2.9103	0.0906	0.0930
-0.4385	0.1996	0.1961	0.6827	0.0996	0.1011	1.8040	0.0864	0.0895	2.9252	0.0917	0.0934
-0.4236	0.1968	0.1960	0.6977	0.0996	0.1011	1.8189	0.0864	0.0895	2.9402	0.0917	0.0934
-0.4086	0.1951	0.1940	0.7126	0.0985	0.0998	1.8339	0.0864	0.0895	2.9551	0.0918	0.0934
-0.3937	0.1940	0.1924	0.7276	0.0969	0.0985	1.8488	0.0864	0.0895	2.9701	0.0918	0.0934
									3.0000	0.0919	0.0936

Tabla 4.22: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario C.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0688	0.0675	-0.3787	0.0617	0.0604	0.7425	0.0535	0.0550	1.8638	0.0526	0.0543
-1.4850	0.0686	0.0674	-0.3638	0.0617	0.0604	0.7575	0.0535	0.0550	1.8787	0.0526	0.0543
-1.4701	0.0685	0.0674	-0.3488	0.0612	0.0604	0.7724	0.0535	0.0550	1.8937	0.0526	0.0543
-1.4551	0.0683	0.0674	-0.3339	0.0606	0.0597	0.7874	0.0534	0.0550	1.9086	0.0526	0.0543
-1.4402	0.0679	0.0670	-0.3189	0.0603	0.0597	0.8023	0.0534	0.0550	1.9236	0.0526	0.0543
-1.4252	0.0679	0.0670	-0.3040	0.0600	0.0595	0.8173	0.0534	0.0550	1.9385	0.0528	0.0543
-1.4103	0.0679	0.0670	-0.2890	0.0599	0.0595	0.8322	0.0534	0.0550	1.9535	0.0528	0.0543
-1.3953	0.0678	0.0670	-0.2741	0.0599	0.0592	0.8472	0.0531	0.0550	1.9684	0.0530	0.0543
-1.3804	0.0677	0.0670	-0.2591	0.0595	0.0588	0.8621	0.0531	0.0550	1.9834	0.0530	0.0543
-1.3654	0.0677	0.0670	-0.2442	0.0595	0.0588	0.8771	0.0531	0.0550	1.9983	0.0530	0.0543
-1.3505	0.0676	0.0670	-0.2292	0.0594	0.0588	0.8920	0.0531	0.0550	2.0133	0.0530	0.0543
-1.3355	0.0676	0.0670	-0.2143	0.0593	0.0582	0.9070	0.0531	0.0548	2.0282	0.0530	0.0543
-1.3206	0.0674	0.0670	-0.1993	0.0590	0.0582	0.9219	0.0531	0.0548	2.0432	0.0530	0.0548
-1.3056	0.0672	0.0670	-0.1844	0.0586	0.0580	0.9369	0.0531	0.0548	2.0581	0.0530	0.0548
-1.2907	0.0672	0.0669	-0.1694	0.0585	0.0580	0.9518	0.0529	0.0548	2.0731	0.0533	0.0548
-1.2757	0.0672	0.0669	-0.1545	0.0585	0.0580	0.9668	0.0528	0.0543	2.0880	0.0534	0.0548
-1.2608	0.0672	0.0668	-0.1395	0.0584	0.0580	0.9817	0.0528	0.0543	2.1030	0.0534	0.0548
-1.2458	0.0672	0.0668	-0.1246	0.0584	0.0580	0.9967	0.0528	0.0543	2.1179	0.0534	0.0550
-1.2309	0.0672	0.0668	-0.1096	0.0582	0.0580	1.0116	0.0528	0.0543	2.1329	0.0534	0.0550
-1.2159	0.0671	0.0668	-0.0947	0.0579	0.0578	1.0266	0.0528	0.0543	2.1478	0.0534	0.0550
-1.2010	0.0664	0.0662	-0.0797	0.0579	0.0578	1.0415	0.0528	0.0543	2.1628	0.0534	0.0550
-1.1860	0.0662	0.0662	-0.0648	0.0578	0.0578	1.0565	0.0528	0.0543	2.1777	0.0534	0.0550
-1.1711	0.0661	0.0662	-0.0498	0.0578	0.0578	1.0714	0.0527	0.0543	2.1927	0.0534	0.0550
-1.1561	0.0661	0.0662	-0.0349	0.0578	0.0578	1.0864	0.0527	0.0543	2.2076	0.0534	0.0550
-1.1412	0.0661	0.0662	-0.0199	0.0578	0.0578	1.1013	0.0527	0.0543	2.2226	0.0534	0.0550
-1.1262	0.0661	0.0662	-0.0050	0.0577	0.0577	1.1163	0.0527	0.0543	2.2375	0.0534	0.0550
-1.1113	0.0660	0.0662	0.0100	0.0577	0.0577	1.1312	0.0527	0.0543	2.2525	0.0534	0.0550
-1.0963	0.0655	0.0658	0.0249	0.0576	0.0577	1.1462	0.0527	0.0543	2.2674	0.0534	0.0550
-1.0814	0.0655	0.0658	0.0399	0.0574	0.0577	1.1611	0.0527	0.0543	2.2824	0.0534	0.0550
-1.0664	0.0655	0.0656	0.0548	0.0572	0.0575	1.1761	0.0527	0.0543	2.2973	0.0534	0.0550
-1.0515	0.0654	0.0656	0.0698	0.0571	0.0574	1.1910	0.0527	0.0543	2.3123	0.0534	0.0550
-1.0365	0.0654	0.0656	0.0847	0.0570	0.0574	1.2060	0.0526	0.0542	2.3272	0.0537	0.0552
-1.0216	0.0654	0.0656	0.0997	0.0570	0.0574	1.2209	0.0526	0.0542	2.3422	0.0537	0.0552
-1.0066	0.0653	0.0656	0.1146	0.0570	0.0574	1.2359	0.0524	0.0542	2.3571	0.0540	0.0552
-0.9917	0.0666	0.0656	0.1296	0.0570	0.0574	1.2508	0.0524	0.0542	2.3721	0.0540	0.0552
-0.9767	0.0666	0.0656	0.1445	0.0567	0.0574	1.2658	0.0522	0.0542	2.3870	0.0540	0.0552
-0.9618	0.0666	0.0655	0.1595	0.0563	0.0568	1.2807	0.0522	0.0542	2.4020	0.0540	0.0552
-0.9468	0.0665	0.0655	0.1744	0.0562	0.0568	1.2957	0.0522	0.0542	2.4169	0.0540	0.0552
-0.9319	0.0663	0.0653	0.1894	0.0562	0.0568	1.3106	0.0522	0.0542	2.4319	0.0540	0.0552
-0.9169	0.0662	0.0652	0.2043	0.0562	0.0568	1.3256	0.0522	0.0541	2.4468	0.0540	0.0552
-0.9020	0.0661	0.0652	0.2193	0.0561	0.0568	1.3405	0.0522	0.0541	2.4618	0.0540	0.0552
-0.8870	0.0660	0.0651	0.2342	0.0561	0.0568	1.3555	0.0522	0.0541	2.4767	0.0540	0.0552
-0.8721	0.0660	0.0651	0.2492	0.0559	0.0566	1.3704	0.0522	0.0541	2.4917	0.0540	0.0552
-0.8571	0.0660	0.0651	0.2641	0.0559	0.0566	1.3854	0.0522	0.0541	2.5066	0.0542	0.0554
-0.8422	0.0659	0.0647	0.2791	0.0559	0.0566	1.4003	0.0522	0.0541	2.5216	0.0544	0.0554
-0.8272	0.0658	0.0647	0.2940	0.0559	0.0566	1.4153	0.0522	0.0541	2.5365	0.0548	0.0554
-0.8123	0.0658	0.0647	0.3090	0.0559	0.0566	1.4302	0.0522	0.0541	2.5515	0.0549	0.0554
-0.7973	0.0658	0.0646	0.3239	0.0558	0.0565	1.4452	0.0522	0.0541	2.5664	0.0549	0.0554
-0.7824	0.0657	0.0646	0.3389	0.0552	0.0565	1.4601	0.0522	0.0541	2.5814	0.0549	0.0554
-0.7674	0.0653	0.0645	0.3538	0.0551	0.0565	1.4751	0.0522	0.0541	2.5963	0.0552	0.0558
-0.7525	0.0653	0.0645	0.3688	0.0550	0.0565	1.4900	0.0522	0.0541	2.6113	0.0552	0.0558
-0.7375	0.0653	0.0645	0.3837	0.0550	0.0565	1.5050	0.0522	0.0541	2.6262	0.0552	0.0558
-0.7226	0.0652	0.0644	0.3987	0.0550	0.0558	1.5199	0.0522	0.0541	2.6412	0.0553	0.0565
-0.7076	0.0652	0.0644	0.4136	0.0549	0.0558	1.5349	0.0522	0.0541	2.6561	0.0553	0.0565
-0.6927	0.0652	0.0644	0.4286	0.0549	0.0558	1.5498	0.0522	0.0541	2.6711	0.0553	0.0565
-0.6777	0.0649	0.0641	0.4435	0.0544	0.0554	1.5648	0.0522	0.0541	2.6860	0.0554	0.0565
-0.6628	0.0648	0.0641	0.4585	0.0544	0.0554	1.5797	0.0522	0.0541	2.7010	0.0561	0.0566
-0.6478	0.0648	0.0641	0.4734	0.0544	0.0554	1.5947	0.0522	0.0541	2.7159	0.0561	0.0566
-0.6329	0.0647	0.0640	0.4884	0.0544	0.0554	1.6096	0.0522	0.0541	2.7309	0.0561	0.0566
-0.6179	0.0640	0.0632	0.5033	0.0544	0.0554	1.6246	0.0522	0.0541	2.7458	0.0561	0.0566
-0.6030	0.0639	0.0629	0.5183	0.0542	0.0554	1.6395	0.0522	0.0541	2.7608	0.0563	0.0566
-0.5880	0.0637	0.0626	0.5332	0.0540	0.0552	1.6545	0.0522	0.0541	2.7757	0.0563	0.0566
-0.5731	0.0635	0.0626	0.5482	0.0540	0.0552	1.6694	0.0522	0.0541	2.7907	0.0563	0.0566
-0.5581	0.0634	0.0623	0.5631	0.0540	0.0552	1.6844	0.0524	0.0542	2.8056	0.0563	0.0566
-0.5432	0.0633	0.0623	0.5781	0.0540	0.0552	1.6993	0.0524	0.0542	2.8206	0.0563	0.0566
-0.5282	0.0633	0.0623	0.5930	0.0540	0.0552	1.7143	0.0524	0.0542	2.8355	0.0565	0.0568
-0.5133	0.0633	0.0620	0.6080	0.0540	0.0552	1.7292	0.0524	0.0542	2.8505	0.0565	0.0568
-0.4983	0.0631	0.0620	0.6229	0.0539	0.0552	1.7442	0.0524	0.0542	2.8654	0.0565	0.0568
-0.4834	0.0629	0.0620	0.6379	0.0539	0.0552	1.7591	0.0524	0.0542	2.8804	0.0570	0.0574
-0.4684	0.0628	0.0620	0.6528	0.0539	0.0552	1.7741	0.0524	0.0542	2.8953	0.0570	0.0574
-0.4535	0.0628	0.0616	0.6678	0.0538	0.0552	1.7890	0.0524	0.0542	2.9103	0.0570	0.0574
-0.4385	0.0624	0.0616	0.6827	0.0538	0.0552	1.8040	0.0526	0.0543	2.9252	0.0571	0.0574
-0.4236	0.0624	0.0612	0.6977	0.0536	0.0550	1.8189	0.0526	0.0543	2.9402	0.0571	0.0574
-0.4086	0.0623	0.0611	0.7126	0.0536	0.0550	1.8339	0.0526	0.0543	2.9551	0.0571	0.0574
-0.3937	0.0618	0.0604	0.7276	0.0536	0.0550	1.8488	0.0526	0.0543	2.9701	0.0571	0.0575
									3.0000	0.0572	0.0577

Tabla 4.23: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$. Escenario D.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0974	0.0972	-0.3787	0.0886	0.0868	0.7425	0.0763	0.0775	1.8638	0.0752	0.0766
-1.4850	0.0971	0.0971	-0.3638	0.0885	0.0866	0.7575	0.0763	0.0775	1.8787	0.0754	0.0767
-1.4701	0.0970	0.0971	-0.3488	0.0879	0.0866	0.7724	0.0763	0.0775	1.8937	0.0754	0.0767
-1.4551	0.0967	0.0971	-0.3339	0.0873	0.0859	0.7874	0.0762	0.0774	1.9086	0.0754	0.0767
-1.4402	0.0964	0.0968	-0.3189	0.0869	0.0859	0.8023	0.0762	0.0774	1.9236	0.0754	0.0767
-1.4252	0.0964	0.0968	-0.3040	0.0864	0.0854	0.8173	0.0762	0.0774	1.9385	0.0757	0.0767
-1.4103	0.0964	0.0968	-0.2890	0.0864	0.0854	0.8322	0.0762	0.0774	1.9535	0.0757	0.0767
-1.3953	0.0964	0.0968	-0.2741	0.0864	0.0848	0.8472	0.0760	0.0774	1.9684	0.0760	0.0767
-1.3804	0.0963	0.0967	-0.2591	0.0859	0.0842	0.8621	0.0760	0.0774	1.9834	0.0760	0.0767
-1.3654	0.0961	0.0967	-0.2442	0.0857	0.0840	0.8771	0.0760	0.0774	1.9983	0.0760	0.0767
-1.3505	0.0961	0.0967	-0.2292	0.0853	0.0837	0.8920	0.0760	0.0774	2.0133	0.0760	0.0767
-1.3355	0.0960	0.0967	-0.2143	0.0851	0.0832	0.9070	0.0760	0.0773	2.0282	0.0760	0.0767
-1.3206	0.0959	0.0967	-0.1993	0.0847	0.0832	0.9219	0.0760	0.0773	2.0432	0.0760	0.0773
-1.3056	0.0958	0.0967	-0.1844	0.0839	0.0827	0.9369	0.0760	0.0773	2.0581	0.0760	0.0773
-1.2907	0.0957	0.0964	-0.1694	0.0836	0.0827	0.9518	0.0757	0.0773	2.0731	0.0763	0.0773
-1.2757	0.0957	0.0964	-0.1545	0.0836	0.0827	0.9668	0.0757	0.0767	2.0880	0.0764	0.0773
-1.2608	0.0955	0.0960	-0.1395	0.0835	0.0827	0.9817	0.0757	0.0767	2.1030	0.0764	0.0773
-1.2458	0.0955	0.0960	-0.1246	0.0833	0.0827	0.9967	0.0757	0.0767	2.1179	0.0764	0.0774
-1.2309	0.0954	0.0960	-0.1096	0.0830	0.0827	1.0116	0.0757	0.0767	2.1329	0.0764	0.0774
-1.2159	0.0954	0.0960	-0.0947	0.0827	0.0824	1.0266	0.0757	0.0767	2.1478	0.0764	0.0774
-1.2010	0.0948	0.0954	-0.0797	0.0826	0.0824	1.0415	0.0757	0.0767	2.1628	0.0764	0.0774
-1.1860	0.0947	0.0954	-0.0648	0.0825	0.0824	1.0565	0.0757	0.0767	2.1777	0.0764	0.0774
-1.1711	0.0946	0.0954	-0.0498	0.0824	0.0824	1.0714	0.0755	0.0767	2.1927	0.0764	0.0774
-1.1561	0.0946	0.0954	-0.0349	0.0824	0.0824	1.0864	0.0755	0.0767	2.2076	0.0764	0.0774
-1.1412	0.0944	0.0954	-0.0199	0.0823	0.0823	1.1013	0.0755	0.0767	2.2226	0.0764	0.0774
-1.1262	0.0943	0.0954	-0.0050	0.0821	0.0821	1.1163	0.0755	0.0767	2.2375	0.0764	0.0775
-1.1113	0.0943	0.0954	0.0100	0.0818	0.0819	1.1312	0.0754	0.0766	2.2525	0.0764	0.0775
-1.0963	0.0940	0.0951	0.0249	0.0817	0.0819	1.1462	0.0754	0.0766	2.2674	0.0766	0.0776
-1.0814	0.0940	0.0951	0.0399	0.0813	0.0819	1.1611	0.0754	0.0766	2.2824	0.0766	0.0776
-1.0664	0.0940	0.0947	0.0548	0.0812	0.0814	1.1761	0.0754	0.0766	2.2973	0.0766	0.0776
-1.0515	0.0940	0.0946	0.0698	0.0811	0.0813	1.1910	0.0754	0.0766	2.3123	0.0766	0.0776
-1.0365	0.0939	0.0945	0.0847	0.0811	0.0813	1.2060	0.0751	0.0763	2.3272	0.0770	0.0780
-1.0216	0.0938	0.0945	0.0997	0.0810	0.0813	1.2209	0.0751	0.0763	2.3422	0.0770	0.0780
-1.0066	0.0938	0.0945	0.1146	0.0810	0.0813	1.2359	0.0749	0.0763	2.3571	0.0772	0.0781
-0.9917	0.0960	0.0944	0.1296	0.0810	0.0813	1.2508	0.0749	0.0763	2.3721	0.0773	0.0781
-0.9767	0.0960	0.0944	0.1445	0.0808	0.0813	1.2658	0.0748	0.0763	2.3870	0.0773	0.0781
-0.9618	0.0958	0.0943	0.1595	0.0798	0.0804	1.2807	0.0748	0.0763	2.4020	0.0773	0.0781
-0.9468	0.0956	0.0940	0.1744	0.0797	0.0804	1.2957	0.0748	0.0763	2.4169	0.0773	0.0781
-0.9319	0.0951	0.0936	0.1894	0.0797	0.0804	1.3106	0.0748	0.0763	2.4319	0.0774	0.0782
-0.9169	0.0949	0.0934	0.2043	0.0797	0.0804	1.3256	0.0748	0.0763	2.4468	0.0774	0.0782
-0.9020	0.0947	0.0934	0.2193	0.0797	0.0804	1.3405	0.0748	0.0763	2.4618	0.0774	0.0782
-0.8870	0.0947	0.0934	0.2342	0.0797	0.0804	1.3555	0.0748	0.0763	2.4767	0.0774	0.0782
-0.8721	0.0946	0.0932	0.2492	0.0795	0.0802	1.3704	0.0748	0.0763	2.4917	0.0774	0.0782
-0.8571	0.0946	0.0932	0.2641	0.0795	0.0802	1.3854	0.0748	0.0763	2.5066	0.0777	0.0785
-0.8422	0.0945	0.0929	0.2791	0.0794	0.0801	1.4003	0.0748	0.0763	2.5216	0.0778	0.0785
-0.8272	0.0944	0.0929	0.2940	0.0794	0.0801	1.4153	0.0748	0.0763	2.5365	0.0781	0.0785
-0.8123	0.0944	0.0929	0.3090	0.0793	0.0801	1.4302	0.0748	0.0763	2.5515	0.0781	0.0785
-0.7973	0.0942	0.0927	0.3239	0.0793	0.0800	1.4452	0.0748	0.0763	2.5664	0.0781	0.0785
-0.7824	0.0942	0.0925	0.3389	0.0789	0.0800	1.4601	0.0748	0.0763	2.5814	0.0781	0.0785
-0.7674	0.0937	0.0923	0.3538	0.0786	0.0797	1.4751	0.0748	0.0763	2.5963	0.0786	0.0789
-0.7525	0.0936	0.0922	0.3688	0.0785	0.0797	1.4900	0.0748	0.0763	2.6113	0.0786	0.0789
-0.7375	0.0935	0.0922	0.3837	0.0785	0.0797	1.5050	0.0748	0.0763	2.6262	0.0786	0.0789
-0.7226	0.0934	0.0922	0.3987	0.0785	0.0789	1.5199	0.0748	0.0763	2.6412	0.0786	0.0797
-0.7076	0.0934	0.0922	0.4136	0.0782	0.0789	1.5349	0.0748	0.0763	2.6561	0.0786	0.0797
-0.6927	0.0931	0.0922	0.4286	0.0782	0.0789	1.5498	0.0748	0.0763	2.6711	0.0786	0.0797
-0.6777	0.0923	0.0913	0.4435	0.0777	0.0785	1.5648	0.0748	0.0763	2.6860	0.0787	0.0797
-0.6628	0.0922	0.0913	0.4585	0.0777	0.0785	1.5797	0.0748	0.0763	2.7010	0.0793	0.0800
-0.6478	0.0922	0.0912	0.4734	0.0777	0.0785	1.5947	0.0748	0.0763	2.7159	0.0793	0.0800
-0.6329	0.0922	0.0912	0.4884	0.0777	0.0785	1.6096	0.0748	0.0763	2.7309	0.0794	0.0800
-0.6179	0.0917	0.0905	0.5033	0.0777	0.0785	1.6246	0.0748	0.0763	2.7458	0.0794	0.0800
-0.6030	0.0914	0.0901	0.5183	0.0777	0.0785	1.6395	0.0748	0.0763	2.7608	0.0794	0.0800
-0.5880	0.0907	0.0893	0.5332	0.0774	0.0782	1.6545	0.0748	0.0763	2.7757	0.0794	0.0800
-0.5731	0.0906	0.0892	0.5482	0.0774	0.0782	1.6694	0.0748	0.0763	2.7907	0.0795	0.0801
-0.5581	0.0906	0.0890	0.5631	0.0774	0.0782	1.6844	0.0749	0.0763	2.8056	0.0796	0.0801
-0.5432	0.0903	0.0889	0.5781	0.0774	0.0782	1.6993	0.0749	0.0763	2.8206	0.0796	0.0801
-0.5282	0.0902	0.0889	0.5930	0.0774	0.0782	1.7143	0.0749	0.0763	2.8355	0.0798	0.0803
-0.5133	0.0902	0.0885	0.6080	0.0773	0.0781	1.7292	0.0749	0.0763	2.8505	0.0798	0.0803
-0.4983	0.0900	0.0885	0.6229	0.0771	0.0781	1.7442	0.0749	0.0763	2.8654	0.0798	0.0803
-0.4834	0.0899	0.0885	0.6379	0.0771	0.0781	1.7591	0.0749	0.0763	2.8804	0.0807	0.0812
-0.4684	0.0898	0.0885	0.6528	0.0771	0.0781	1.7741	0.0749	0.0763	2.8953	0.0807	0.0812
-0.4535	0.0898	0.0880	0.6678	0.0768	0.0780	1.7890	0.0749	0.0763	2.9103	0.0807	0.0812
-0.4385	0.0896	0.0880	0.6827	0.0768	0.0780	1.8040	0.0752	0.0766	2.9252	0.0811	0.0812
-0.4236	0.0896	0.0877	0.6977	0.0765	0.0776	1.8189	0.0752	0.0766	2.9402	0.0811	0.0812
-0.4086	0.0894	0.0876	0.7126	0.0765	0.0776	1.8339	0.0752	0.0766	2.9551	0.0812	0.0812
-0.3937	0.0888	0.0868	0.7276	0.0765	0.0776	1.8488	0.0752	0.0766	2.9701	0.0812	0.0813
									3.0000	0.0814	0.0818

Tabla 4.24: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario D.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1440	0.1659	-0.3787	0.1371	0.1340	0.7425	0.1141	0.1150	1.8638	0.1134	0.1141
-1.4850	0.1428	0.1650	-0.3638	0.1355	0.1328	0.7575	0.1141	0.1150	1.8787	0.1134	0.1141
-1.4701	0.1426	0.1650	-0.3488	0.1346	0.1326	0.7724	0.1141	0.1150	1.8937	0.1134	0.1141
-1.4551	0.1424	0.1650	-0.3339	0.1337	0.1314	0.7874	0.1141	0.1148	1.9086	0.1134	0.1141
-1.4402	0.1423	0.1643	-0.3189	0.1332	0.1314	0.8023	0.1138	0.1147	1.9236	0.1134	0.1141
-1.4252	0.1422	0.1643	-0.3040	0.1327	0.1310	0.8173	0.1138	0.1147	1.9385	0.1134	0.1141
-1.4103	0.1422	0.1643	-0.2890	0.1323	0.1307	0.8322	0.1138	0.1147	1.9535	0.1134	0.1141
-1.3953	0.1416	0.1638	-0.2741	0.1321	0.1304	0.8472	0.1137	0.1146	1.9684	0.1134	0.1141
-1.3804	0.1413	0.1634	-0.2591	0.1307	0.1291	0.8621	0.1137	0.1146	1.9834	0.1134	0.1141
-1.3654	0.1412	0.1634	-0.2442	0.1306	0.1290	0.8771	0.1137	0.1146	1.9983	0.1135	0.1142
-1.3505	0.1412	0.1634	-0.2292	0.1299	0.1283	0.8920	0.1137	0.1146	2.0133	0.1135	0.1142
-1.3355	0.1404	0.1626	-0.2143	0.1298	0.1281	0.9070	0.1137	0.1145	2.0282	0.1136	0.1142
-1.3206	0.1402	0.1626	-0.1993	0.1295	0.1281	0.9219	0.1137	0.1145	2.0432	0.1137	0.1145
-1.3056	0.1402	0.1626	-0.1844	0.1286	0.1272	0.9369	0.1137	0.1145	2.0581	0.1137	0.1145
-1.2907	0.1393	0.1610	-0.1694	0.1283	0.1272	0.9518	0.1136	0.1145	2.0731	0.1138	0.1145
-1.2757	0.1392	0.1610	-0.1545	0.1280	0.1272	0.9668	0.1136	0.1143	2.0880	0.1138	0.1145
-1.2608	0.1384	0.1599	-0.1395	0.1279	0.1272	0.9817	0.1135	0.1142	2.1030	0.1138	0.1145
-1.2458	0.1381	0.1599	-0.1246	0.1275	0.1270	0.9967	0.1135	0.1142	2.1179	0.1138	0.1146
-1.2309	0.1376	0.1598	-0.1096	0.1272	0.1268	1.0116	0.1133	0.1141	2.1329	0.1138	0.1146
-1.2159	0.1374	0.1598	-0.0947	0.1260	0.1256	1.0266	0.1133	0.1141	2.1478	0.1138	0.1146
-1.2010	0.1362	0.1583	-0.0797	0.1258	0.1256	1.0415	0.1133	0.1141	2.1628	0.1138	0.1146
-1.1860	0.1361	0.1583	-0.0648	0.1258	0.1256	1.0565	0.1133	0.1141	2.1777	0.1138	0.1147
-1.1711	0.1360	0.1583	-0.0498	0.1256	0.1256	1.0714	0.1133	0.1141	2.1927	0.1138	0.1147
-1.1561	0.1361	0.1583	-0.0349	0.1256	0.1256	1.0864	0.1133	0.1141	2.2076	0.1138	0.1147
-1.1412	0.1357	0.1583	-0.0199	0.1251	0.1251	1.1013	0.1133	0.1141	2.2226	0.1138	0.1147
-1.1262	0.1357	0.1583	-0.0050	0.1250	0.1250	1.1163	0.1133	0.1141	2.2375	0.1138	0.1148
-1.1113	0.1357	0.1583	0.0100	0.1243	0.1243	1.1312	0.1133	0.1141	2.2525	0.1138	0.1148
-1.0963	0.1356	0.1581	0.0249	0.1243	0.1243	1.1462	0.1131	0.1139	2.2674	0.1143	0.1153
-1.0814	0.1355	0.1581	0.0399	0.1236	0.1240	1.1611	0.1131	0.1139	2.2824	0.1144	0.1154
-1.0664	0.1357	0.1577	0.0548	0.1236	0.1238	1.1761	0.1131	0.1139	2.2973	0.1145	0.1154
-1.0515	0.1358	0.1575	0.0698	0.1235	0.1236	1.1910	0.1131	0.1139	2.3123	0.1145	0.1154
-1.0365	0.1358	0.1575	0.0847	0.1235	0.1236	1.2060	0.1128	0.1138	2.3272	0.1150	0.1160
-1.0216	0.1359	0.1575	0.0997	0.1234	0.1236	1.2209	0.1128	0.1138	2.3422	0.1150	0.1160
-1.0066	0.1355	0.1574	0.1146	0.1230	0.1234	1.2359	0.1128	0.1138	2.3571	0.1150	0.1160
-0.9917	0.1602	0.1573	0.1296	0.1227	0.1229	1.2508	0.1128	0.1138	2.3721	0.1150	0.1160
-0.9767	0.1601	0.1573	0.1445	0.1226	0.1229	1.2658	0.1127	0.1138	2.3870	0.1150	0.1160
-0.9618	0.1594	0.1568	0.1595	0.1215	0.1220	1.2807	0.1127	0.1138	2.4020	0.1150	0.1160
-0.9468	0.1591	0.1557	0.1744	0.1210	0.1216	1.2957	0.1127	0.1138	2.4169	0.1152	0.1162
-0.9319	0.1576	0.1540	0.1894	0.1200	0.1206	1.3106	0.1127	0.1138	2.4319	0.1154	0.1164
-0.9169	0.1570	0.1529	0.2043	0.1196	0.1202	1.3256	0.1126	0.1138	2.4468	0.1154	0.1164
-0.9020	0.1561	0.1529	0.2193	0.1196	0.1202	1.3405	0.1126	0.1138	2.4618	0.1154	0.1164
-0.8870	0.1552	0.1518	0.2342	0.1193	0.1200	1.3555	0.1126	0.1138	2.4767	0.1154	0.1164
-0.8721	0.1546	0.1505	0.2492	0.1182	0.1190	1.3704	0.1126	0.1138	2.4917	0.1154	0.1164
-0.8571	0.1546	0.1505	0.2641	0.1182	0.1190	1.3854	0.1126	0.1138	2.5066	0.1158	0.1167
-0.8422	0.1539	0.1493	0.2791	0.1180	0.1188	1.4003	0.1126	0.1138	2.5216	0.1160	0.1168
-0.8272	0.1534	0.1493	0.2940	0.1177	0.1184	1.4153	0.1126	0.1138	2.5365	0.1162	0.1170
-0.8123	0.1529	0.1484	0.3090	0.1177	0.1184	1.4302	0.1127	0.1138	2.5515	0.1165	0.1172
-0.7973	0.1513	0.1469	0.3239	0.1177	0.1182	1.4452	0.1127	0.1138	2.5664	0.1166	0.1172
-0.7824	0.1502	0.1453	0.3389	0.1176	0.1182	1.4601	0.1127	0.1138	2.5814	0.1167	0.1172
-0.7674	0.1484	0.1444	0.3538	0.1171	0.1176	1.4751	0.1127	0.1138	2.5963	0.1169	0.1173
-0.7525	0.1481	0.1434	0.3688	0.1171	0.1176	1.4900	0.1127	0.1138	2.6113	0.1169	0.1173
-0.7375	0.1477	0.1434	0.3837	0.1170	0.1176	1.5050	0.1127	0.1138	2.6262	0.1169	0.1173
-0.7226	0.1472	0.1434	0.3987	0.1170	0.1174	1.5199	0.1127	0.1138	2.6412	0.1169	0.1175
-0.7076	0.1464	0.1431	0.4136	0.1168	0.1174	1.5349	0.1127	0.1138	2.6561	0.1169	0.1175
-0.6927	0.1460	0.1430	0.4286	0.1168	0.1173	1.5498	0.1127	0.1138	2.6711	0.1170	0.1175
-0.6777	0.1458	0.1429	0.4435	0.1166	0.1172	1.5648	0.1127	0.1138	2.6860	0.1170	0.1175
-0.6628	0.1457	0.1427	0.4585	0.1165	0.1172	1.5797	0.1127	0.1138	2.7010	0.1175	0.1180
-0.6478	0.1457	0.1426	0.4734	0.1165	0.1172	1.5947	0.1127	0.1138	2.7159	0.1175	0.1182
-0.6329	0.1456	0.1425	0.4884	0.1164	0.1172	1.6096	0.1127	0.1138	2.7309	0.1175	0.1182
-0.6179	0.1443	0.1402	0.5033	0.1164	0.1170	1.6246	0.1127	0.1138	2.7458	0.1175	0.1182
-0.6030	0.1441	0.1402	0.5183	0.1164	0.1170	1.6395	0.1127	0.1138	2.7608	0.1176	0.1182
-0.5880	0.1432	0.1394	0.5332	0.1162	0.1168	1.6545	0.1127	0.1138	2.7757	0.1177	0.1185
-0.5731	0.1430	0.1394	0.5482	0.1162	0.1168	1.6694	0.1127	0.1138	2.7907	0.1178	0.1186
-0.5581	0.1425	0.1392	0.5631	0.1162	0.1168	1.6844	0.1128	0.1138	2.8056	0.1177	0.1186
-0.5432	0.1419	0.1387	0.5781	0.1160	0.1166	1.6993	0.1128	0.1138	2.8206	0.1177	0.1186
-0.5282	0.1414	0.1387	0.5930	0.1160	0.1166	1.7143	0.1128	0.1138	2.8355	0.1190	0.1196
-0.5133	0.1413	0.1382	0.6080	0.1158	0.1165	1.7292	0.1128	0.1138	2.8505	0.1190	0.1196
-0.4983	0.1408	0.1382	0.6229	0.1157	0.1164	1.7442	0.1128	0.1138	2.8654	0.1191	0.1196
-0.4834	0.1408	0.1382	0.6379	0.1155	0.1162	1.7591	0.1128	0.1138	2.8804	0.1200	0.1204
-0.4684	0.1405	0.1382	0.6528	0.1155	0.1162	1.7741	0.1128	0.1138	2.8953	0.1200	0.1205
-0.4535	0.1399	0.1376	0.6678	0.1154	0.1161	1.7890	0.1128	0.1138	2.9103	0.1204	0.1206
-0.4385	0.1396	0.1376	0.6827	0.1154	0.1161	1.8040	0.1132	0.1139	2.9252	0.1206	0.1206
-0.4236	0.1390	0.1366	0.6977	0.1148	0.1154	1.8189	0.1132	0.1139	2.9402	0.1208	0.1209
-0.4086	0.1388	0.1364	0.7126	0.1148	0.1154	1.8339	0.1132	0.1139	2.9551	0.1210	0.1213
-0.3937	0.1381	0.1354	0.7276	0.1148	0.1154	1.8488	0.1132	0.1139	2.9701	0.1211	0.1215
									3.0000	0.1214	0.1217

Tabla 4.25: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario D.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1201	0.2077	-0.3787	0.1596	0.1568	0.7425	0.1158	0.1164	1.8638	0.1146	0.1152
-1.4850	0.1191	0.2072	-0.3638	0.1520	0.1502	0.7575	0.1158	0.1164	1.8787	0.1146	0.1152
-1.4701	0.1188	0.2072	-0.3488	0.1502	0.1491	0.7724	0.1156	0.1163	1.8937	0.1146	0.1152
-1.4551	0.1186	0.2072	-0.3339	0.1498	0.1488	0.7874	0.1156	0.1163	1.9086	0.1146	0.1152
-1.4402	0.1185	0.2062	-0.3189	0.1498	0.1488	0.8023	0.1154	0.1161	1.9236	0.1147	0.1152
-1.4252	0.1184	0.2062	-0.3040	0.1494	0.1485	0.8173	0.1154	0.1161	1.9385	0.1147	0.1152
-1.4103	0.1184	0.2062	-0.2890	0.1470	0.1463	0.8322	0.1154	0.1161	1.9535	0.1147	0.1152
-1.3953	0.1179	0.2058	-0.2741	0.1464	0.1455	0.8472	0.1154	0.1160	1.9684	0.1148	0.1153
-1.3804	0.1164	0.2046	-0.2591	0.1452	0.1443	0.8621	0.1154	0.1160	1.9834	0.1148	0.1153
-1.3654	0.1164	0.2046	-0.2442	0.1452	0.1443	0.8771	0.1154	0.1160	1.9983	0.1152	0.1157
-1.3505	0.1166	0.2046	-0.2292	0.1450	0.1442	0.8920	0.1154	0.1160	2.0133	0.1152	0.1157
-1.3355	0.1146	0.2026	-0.2143	0.1450	0.1440	0.9070	0.1154	0.1158	2.0282	0.1152	0.1157
-1.3206	0.1146	0.2026	-0.1993	0.1448	0.1440	0.9219	0.1154	0.1158	2.0432	0.1153	0.1158
-1.3056	0.1146	0.2026	-0.1844	0.1442	0.1435	0.9369	0.1154	0.1158	2.0581	0.1153	0.1158
-1.2907	0.1142	0.2018	-0.1694	0.1440	0.1435	0.9518	0.1153	0.1158	2.0731	0.1153	0.1158
-1.2757	0.1142	0.2018	-0.1545	0.1439	0.1435	0.9668	0.1153	0.1158	2.0880	0.1153	0.1158
-1.2608	0.1137	0.2011	-0.1395	0.1439	0.1435	0.9817	0.1152	0.1157	2.1030	0.1153	0.1158
-1.2458	0.1139	0.2011	-0.1246	0.1428	0.1424	0.9967	0.1152	0.1157	2.1179	0.1153	0.1160
-1.2309	0.1134	0.2009	-0.1096	0.1419	0.1416	1.0116	0.1148	0.1153	2.1329	0.1153	0.1160
-1.2159	0.1128	0.2009	-0.0947	0.1406	0.1402	1.0266	0.1148	0.1153	2.1478	0.1153	0.1160
-1.2010	0.1109	0.1986	-0.0797	0.1405	0.1402	1.0415	0.1148	0.1152	2.1628	0.1153	0.1160
-1.1860	0.1110	0.1986	-0.0648	0.1405	0.1402	1.0565	0.1148	0.1152	2.1777	0.1153	0.1161
-1.1711	0.1111	0.1985	-0.0498	0.1402	0.1402	1.0714	0.1147	0.1152	2.1927	0.1154	0.1161
-1.1561	0.1113	0.1985	-0.0349	0.1402	0.1402	1.0864	0.1147	0.1152	2.2076	0.1154	0.1161
-1.1412	0.1109	0.1985	-0.0199	0.1394	0.1394	1.1013	0.1147	0.1152	2.2226	0.1154	0.1161
-1.1262	0.1111	0.1985	-0.0050	0.1394	0.1394	1.1163	0.1147	0.1152	2.2375	0.1154	0.1161
-1.1113	0.1115	0.1985	0.0100	0.1387	0.1387	1.1312	0.1147	0.1152	2.2525	0.1154	0.1161
-1.0963	0.1115	0.1983	0.0249	0.1386	0.1387	1.1462	0.1139	0.1144	2.2674	0.1159	0.1166
-1.0814	0.1115	0.1983	0.0399	0.1379	0.1380	1.1611	0.1139	0.1144	2.2824	0.1161	0.1168
-1.0664	0.1121	0.1982	0.0548	0.1379	0.1380	1.1761	0.1139	0.1144	2.2973	0.1161	0.1168
-1.0515	0.1129	0.1979	0.0698	0.1379	0.1380	1.1910	0.1139	0.1144	2.3123	0.1160	0.1168
-1.0365	0.1135	0.1979	0.0847	0.1378	0.1380	1.2060	0.1137	0.1144	2.3272	0.1163	0.1171
-1.0216	0.1147	0.1979	0.0997	0.1376	0.1380	1.2209	0.1137	0.1144	2.3422	0.1163	0.1171
-1.0066	0.1149	0.1978	0.1146	0.1372	0.1376	1.2359	0.1137	0.1144	2.3571	0.1163	0.1171
-0.9917	0.2006	0.1978	0.1296	0.1371	0.1372	1.2508	0.1137	0.1144	2.3721	0.1163	0.1171
-0.9767	0.2005	0.1978	0.1445	0.1369	0.1371	1.2658	0.1137	0.1144	2.3870	0.1163	0.1171
-0.9618	0.1998	0.1972	0.1595	0.1360	0.1363	1.2807	0.1137	0.1144	2.4020	0.1163	0.1171
-0.9468	0.1996	0.1964	0.1744	0.1349	0.1351	1.2957	0.1137	0.1144	2.4169	0.1169	0.1177
-0.9319	0.1983	0.1947	0.1894	0.1305	0.1310	1.3106	0.1137	0.1144	2.4319	0.1169	0.1177
-0.9169	0.1978	0.1930	0.2043	0.1280	0.1283	1.3256	0.1137	0.1144	2.4468	0.1169	0.1177
-0.9020	0.1962	0.1930	0.2193	0.1265	0.1271	1.3405	0.1137	0.1144	2.4618	0.1169	0.1177
-0.8870	0.1951	0.1916	0.2342	0.1254	0.1258	1.3555	0.1137	0.1144	2.4767	0.1169	0.1177
-0.8721	0.1942	0.1891	0.2492	0.1246	0.1250	1.3704	0.1137	0.1144	2.4917	0.1169	0.1177
-0.8571	0.1940	0.1891	0.2641	0.1243	0.1248	1.3854	0.1137	0.1144	2.5066	0.1176	0.1185
-0.8422	0.1923	0.1873	0.2791	0.1241	0.1248	1.4003	0.1137	0.1144	2.5216	0.1180	0.1189
-0.8272	0.1910	0.1873	0.2940	0.1218	0.1223	1.4153	0.1137	0.1144	2.5365	0.1180	0.1189
-0.8123	0.1899	0.1854	0.3090	0.1215	0.1220	1.4302	0.1137	0.1144	2.5515	0.1188	0.1198
-0.7973	0.1879	0.1834	0.3239	0.1215	0.1220	1.4452	0.1136	0.1144	2.5664	0.1191	0.1198
-0.7824	0.1860	0.1821	0.3389	0.1213	0.1218	1.4601	0.1136	0.1144	2.5814	0.1192	0.1198
-0.7674	0.1845	0.1812	0.3538	0.1202	0.1208	1.4751	0.1136	0.1144	2.5963	0.1193	0.1198
-0.7525	0.1836	0.1734	0.3688	0.1202	0.1208	1.4900	0.1136	0.1144	2.6113	0.1193	0.1198
-0.7375	0.1834	0.1724	0.3837	0.1197	0.1203	1.5050	0.1136	0.1144	2.6262	0.1193	0.1198
-0.7226	0.1770	0.1720	0.3987	0.1197	0.1203	1.5199	0.1136	0.1144	2.6412	0.1193	0.1199
-0.7076	0.1742	0.1711	0.4136	0.1196	0.1202	1.5349	0.1136	0.1144	2.6561	0.1193	0.1199
-0.6927	0.1736	0.1708	0.4286	0.1195	0.1201	1.5498	0.1137	0.1144	2.6711	0.1193	0.1199
-0.6777	0.1733	0.1706	0.4435	0.1194	0.1200	1.5648	0.1137	0.1144	2.6860	0.1193	0.1199
-0.6628	0.1728	0.1704	0.4585	0.1194	0.1200	1.5797	0.1137	0.1144	2.7010	0.1198	0.1204
-0.6478	0.1728	0.1703	0.4734	0.1194	0.1200	1.5947	0.1137	0.1144	2.7159	0.1198	0.1204
-0.6329	0.1726	0.1703	0.4884	0.1189	0.1196	1.6096	0.1137	0.1144	2.7309	0.1198	0.1204
-0.6179	0.1718	0.1685	0.5033	0.1189	0.1196	1.6246	0.1137	0.1144	2.7458	0.1198	0.1204
-0.6030	0.1714	0.1679	0.5183	0.1189	0.1196	1.6395	0.1137	0.1144	2.7608	0.1201	0.1206
-0.5880	0.1706	0.1677	0.5332	0.1188	0.1194	1.6545	0.1137	0.1144	2.7757	0.1202	0.1208
-0.5731	0.1699	0.1676	0.5482	0.1188	0.1194	1.6694	0.1137	0.1144	2.7907	0.1202	0.1209
-0.5581	0.1693	0.1674	0.5631	0.1188	0.1194	1.6844	0.1137	0.1144	2.8056	0.1202	0.1209
-0.5432	0.1686	0.1666	0.5781	0.1188	0.1194	1.6993	0.1137	0.1144	2.8206	0.1202	0.1209
-0.5282	0.1681	0.1665	0.5930	0.1188	0.1194	1.7143	0.1137	0.1144	2.8355	0.1205	0.1212
-0.5133	0.1672	0.1655	0.6080	0.1185	0.1191	1.7292	0.1137	0.1144	2.8505	0.1205	0.1212
-0.4983	0.1666	0.1655	0.6229	0.1180	0.1186	1.7442	0.1137	0.1144	2.8654	0.1207	0.1214
-0.4834	0.1666	0.1655	0.6379	0.1170	0.1177	1.7591	0.1137	0.1144	2.8804	0.1211	0.1218
-0.4684	0.1666	0.1655	0.6528	0.1170	0.1177	1.7741	0.1137	0.1144	2.8953	0.1212	0.1218
-0.4535	0.1654	0.1643	0.6678	0.1170	0.1177	1.7890	0.1137	0.1144	2.9103	0.1215	0.1219
-0.4385	0.1651	0.1642	0.6827	0.1170	0.1177	1.8040	0.1138	0.1144	2.9252	0.1215	0.1219
-0.4236	0.1640	0.1631	0.6977	0.1164	0.1171	1.8189	0.1138	0.1144	2.9402	0.1223	0.1228
-0.4086	0.1639	0.1630	0.7126	0.1164	0.1170	1.8339	0.1138	0.1144	2.9551	0.1226	0.1231
-0.3937	0.1639	0.1628	0.7276	0.1164	0.1170	1.8488	0.1138	0.1144	2.9701	0.1230	0.1234
									3.0000	0.1233	0.1238

Tabla 4.26: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario D.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0893	0.2476	-0.3787	0.1842	0.1798	0.7425	0.1118	0.1121	1.8638	0.1098	0.1109
-1.4850	0.0886	0.2472	-0.3638	0.1684	0.1654	0.7575	0.1118	0.1121	1.8787	0.1098	0.1109
-1.4701	0.0882	0.2472	-0.3488	0.1627	0.1620	0.7724	0.1115	0.1119	1.8937	0.1098	0.1109
-1.4551	0.0882	0.2472	-0.3339	0.1626	0.1618	0.7874	0.1115	0.1119	1.9086	0.1098	0.1109
-1.4402	0.0880	0.2464	-0.3189	0.1624	0.1618	0.8023	0.1113	0.1117	1.9236	0.1098	0.1109
-1.4252	0.0880	0.2464	-0.3040	0.1622	0.1616	0.8173	0.1113	0.1117	1.9385	0.1102	0.1112
-1.4103	0.0879	0.2464	-0.2890	0.1573	0.1566	0.8322	0.1113	0.1117	1.9535	0.1102	0.1112
-1.3953	0.0875	0.2461	-0.2741	0.1560	0.1551	0.8472	0.1113	0.1117	1.9684	0.1102	0.1113
-1.3804	0.0863	0.2450	-0.2591	0.1554	0.1545	0.8621	0.1113	0.1117	1.9834	0.1102	0.1113
-1.3654	0.0863	0.2450	-0.2442	0.1554	0.1545	0.8771	0.1113	0.1117	1.9983	0.1104	0.1115
-1.3505	0.0864	0.2450	-0.2292	0.1553	0.1545	0.8920	0.1113	0.1117	2.0133	0.1104	0.1115
-1.3355	0.0840	0.2426	-0.2143	0.1552	0.1545	0.9070	0.1113	0.1116	2.0282	0.1104	0.1115
-1.3206	0.0839	0.2426	-0.1993	0.1552	0.1545	0.9219	0.1113	0.1116	2.0432	0.1105	0.1116
-1.3056	0.0838	0.2426	-0.1844	0.1546	0.1544	0.9369	0.1113	0.1116	2.0581	0.1105	0.1116
-1.2907	0.0835	0.2422	-0.1694	0.1546	0.1544	0.9518	0.1112	0.1116	2.0731	0.1105	0.1116
-1.2757	0.0835	0.2422	-0.1545	0.1545	0.1544	0.9668	0.1112	0.1116	2.0880	0.1105	0.1116
-1.2608	0.0835	0.2421	-0.1395	0.1545	0.1544	0.9817	0.1112	0.1115	2.1030	0.1105	0.1116
-1.2458	0.0836	0.2421	-0.1246	0.1514	0.1514	0.9967	0.1112	0.1115	2.1179	0.1105	0.1117
-1.2309	0.0834	0.2420	-0.1096	0.1507	0.1506	1.0116	0.1110	0.1113	2.1329	0.1105	0.1117
-1.2159	0.0832	0.2420	-0.0947	0.1495	0.1494	1.0266	0.1110	0.1113	2.1478	0.1105	0.1117
-1.2010	0.0820	0.2402	-0.0797	0.1495	0.1493	1.0415	0.1109	0.1112	2.1628	0.1106	0.1117
-1.1860	0.0820	0.2402	-0.0648	0.1495	0.1493	1.0565	0.1109	0.1112	2.1777	0.1106	0.1117
-1.1711	0.0820	0.2400	-0.0498	0.1492	0.1490	1.0714	0.1106	0.1109	2.1927	0.1106	0.1117
-1.1561	0.0825	0.2400	-0.0349	0.1491	0.1490	1.0864	0.1106	0.1109	2.2076	0.1106	0.1117
-1.1412	0.0821	0.2400	-0.0199	0.1487	0.1487	1.1013	0.1106	0.1109	2.2226	0.1106	0.1117
-1.1262	0.0826	0.2400	-0.0050	0.1487	0.1487	1.1163	0.1106	0.1109	2.2375	0.1106	0.1117
-1.1113	0.0830	0.2400	0.0100	0.1486	0.1486	1.1312	0.1106	0.1109	2.2525	0.1106	0.1117
-1.0963	0.0834	0.2400	0.0249	0.1486	0.1486	1.1462	0.1098	0.1102	2.2674	0.1108	0.1120
-1.0814	0.0842	0.2400	0.0399	0.1482	0.1483	1.1611	0.1098	0.1102	2.2824	0.1110	0.1121
-1.0664	0.0855	0.2399	0.0548	0.1482	0.1483	1.1761	0.1097	0.1102	2.2973	0.1110	0.1121
-1.0515	0.0866	0.2398	0.0698	0.1482	0.1483	1.1910	0.1097	0.1102	2.3123	0.1109	0.1121
-1.0365	0.0877	0.2398	0.0847	0.1481	0.1483	1.2060	0.1096	0.1102	2.3272	0.1113	0.1124
-1.0216	0.0903	0.2398	0.0997	0.1481	0.1483	1.2209	0.1096	0.1102	2.3422	0.1113	0.1124
-1.0066	0.0922	0.2398	0.1146	0.1475	0.1476	1.2359	0.1096	0.1102	2.3571	0.1113	0.1124
-0.9917	0.2416	0.2397	0.1296	0.1474	0.1476	1.2508	0.1096	0.1102	2.3721	0.1113	0.1124
-0.9767	0.2415	0.2397	0.1445	0.1474	0.1476	1.2658	0.1096	0.1102	2.3870	0.1113	0.1124
-0.9618	0.2412	0.2393	0.1595	0.1461	0.1466	1.2807	0.1096	0.1102	2.4020	0.1113	0.1124
-0.9468	0.2410	0.2389	0.1744	0.1441	0.1444	1.2957	0.1096	0.1102	2.4169	0.1120	0.1131
-0.9319	0.2403	0.2381	0.1894	0.1383	0.1386	1.3106	0.1096	0.1102	2.4319	0.1120	0.1131
-0.9169	0.2399	0.2363	0.2043	0.1330	0.1332	1.3256	0.1096	0.1102	2.4468	0.1120	0.1131
-0.9020	0.2384	0.2363	0.2193	0.1306	0.1312	1.3405	0.1096	0.1102	2.4618	0.1120	0.1131
-0.8870	0.2378	0.2353	0.2342	0.1282	0.1283	1.3555	0.1096	0.1102	2.4767	0.1120	0.1131
-0.8721	0.2370	0.2336	0.2492	0.1270	0.1272	1.3704	0.1096	0.1102	2.4917	0.1119	0.1131
-0.8571	0.2366	0.2336	0.2641	0.1265	0.1270	1.3854	0.1096	0.1102	2.5066	0.1130	0.1145
-0.8422	0.2353	0.2324	0.2791	0.1261	0.1268	1.4003	0.1096	0.1102	2.5216	0.1134	0.1149
-0.8272	0.2342	0.2324	0.2940	0.1212	0.1218	1.4153	0.1095	0.1102	2.5365	0.1134	0.1150
-0.8123	0.2332	0.2302	0.3090	0.1208	0.1214	1.4302	0.1095	0.1102	2.5515	0.1163	0.1178
-0.7973	0.2312	0.2283	0.3239	0.1208	0.1213	1.4452	0.1094	0.1100	2.5664	0.1163	0.1178
-0.7824	0.2299	0.2270	0.3389	0.1207	0.1212	1.4601	0.1094	0.1100	2.5814	0.1164	0.1178
-0.7674	0.2284	0.2260	0.3538	0.1193	0.1198	1.4751	0.1094	0.1100	2.5963	0.1164	0.1178
-0.7525	0.2280	0.2079	0.3688	0.1193	0.1198	1.4900	0.1094	0.1100	2.6113	0.1164	0.1178
-0.7375	0.2279	0.2040	0.3837	0.1183	0.1188	1.5050	0.1094	0.1100	2.6262	0.1166	0.1180
-0.7226	0.2096	0.2032	0.3987	0.1183	0.1188	1.5199	0.1094	0.1100	2.6412	0.1166	0.1180
-0.7076	0.2047	0.2025	0.4136	0.1183	0.1188	1.5349	0.1094	0.1100	2.6561	0.1166	0.1180
-0.6927	0.2044	0.2008	0.4286	0.1181	0.1186	1.5498	0.1095	0.1102	2.6711	0.1166	0.1180
-0.6777	0.2031	0.2000	0.4435	0.1181	0.1186	1.5648	0.1095	0.1102	2.6860	0.1166	0.1180
-0.6628	0.2015	0.1997	0.4585	0.1180	0.1186	1.5797	0.1095	0.1102	2.7010	0.1166	0.1180
-0.6478	0.2014	0.1997	0.4734	0.1180	0.1186	1.5947	0.1095	0.1102	2.7159	0.1166	0.1180
-0.6329	0.2013	0.1996	0.4884	0.1173	0.1180	1.6096	0.1095	0.1102	2.7309	0.1166	0.1180
-0.6179	0.2010	0.1988	0.5033	0.1173	0.1179	1.6246	0.1095	0.1102	2.7458	0.1166	0.1180
-0.6030	0.2008	0.1970	0.5183	0.1173	0.1179	1.6395	0.1095	0.1102	2.7608	0.1172	0.1186
-0.5880	0.1987	0.1960	0.5332	0.1171	0.1174	1.6545	0.1095	0.1102	2.7757	0.1173	0.1187
-0.5731	0.1974	0.1959	0.5482	0.1171	0.1174	1.6694	0.1095	0.1102	2.7907	0.1174	0.1188
-0.5581	0.1970	0.1956	0.5631	0.1169	0.1173	1.6844	0.1095	0.1102	2.8056	0.1175	0.1188
-0.5432	0.1961	0.1947	0.5781	0.1169	0.1173	1.6993	0.1095	0.1102	2.8206	0.1175	0.1188
-0.5282	0.1960	0.1945	0.5930	0.1169	0.1173	1.7143	0.1095	0.1102	2.8355	0.1175	0.1189
-0.5133	0.1950	0.1936	0.6080	0.1158	0.1161	1.7292	0.1095	0.1102	2.8505	0.1177	0.1191
-0.4983	0.1947	0.1936	0.6229	0.1141	0.1144	1.7442	0.1095	0.1102	2.8654	0.1179	0.1192
-0.4834	0.1947	0.1936	0.6379	0.1128	0.1131	1.7591	0.1095	0.1102	2.8804	0.1184	0.1198
-0.4684	0.1946	0.1936	0.6528	0.1128	0.1131	1.7741	0.1095	0.1102	2.8953	0.1185	0.1199
-0.4535	0.1932	0.1924	0.6678	0.1128	0.1131	1.7890	0.1095	0.1102	2.9103	0.1186	0.1199
-0.4385	0.1929	0.1922	0.6827	0.1128	0.1131	1.8040	0.1095	0.1102	2.9252	0.1186	0.1199
-0.4236	0.1922	0.1916	0.6977	0.1121	0.1124	1.8189	0.1094	0.1102	2.9402	0.1201	0.1214
-0.4086	0.1922	0.1916	0.7126	0.1120	0.1124	1.8339	0.1094	0.1102	2.9551	0.1202	0.1215
-0.3937	0.1921	0.1914	0.7276	0.1120	0.1124	1.8488	0.1094	0.1102	2.9701	0.1206	0.1219
									3.0000	0.1216	0.1228

Tabla 4.27: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario D.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0751	0.0745	-0.3787	0.0583	0.0566	0.7425	0.0510	0.0517	1.8638	0.0505	0.0513
-1.4850	0.0748	0.0745	-0.3638	0.0581	0.0566	0.7575	0.0507	0.0517	1.8787	0.0508	0.0515
-1.4701	0.0748	0.0744	-0.3488	0.0579	0.0566	0.7724	0.0507	0.0517	1.8937	0.0508	0.0515
-1.4551	0.0748	0.0744	-0.3339	0.0579	0.0566	0.7874	0.0507	0.0512	1.9086	0.0508	0.0515
-1.4402	0.0747	0.0741	-0.3189	0.0578	0.0566	0.8023	0.0507	0.0512	1.9236	0.0508	0.0515
-1.4252	0.0746	0.0736	-0.3040	0.0576	0.0565	0.8173	0.0506	0.0512	1.9385	0.0508	0.0515
-1.4103	0.0746	0.0736	-0.2890	0.0574	0.0565	0.8322	0.0506	0.0512	1.9535	0.0508	0.0515
-1.3953	0.0746	0.0736	-0.2741	0.0574	0.0563	0.8472	0.0506	0.0512	1.9684	0.0508	0.0515
-1.3804	0.0740	0.0731	-0.2591	0.0574	0.0562	0.8621	0.0506	0.0512	1.9834	0.0509	0.0515
-1.3654	0.0739	0.0731	-0.2442	0.0574	0.0562	0.8771	0.0506	0.0512	1.9983	0.0509	0.0515
-1.3505	0.0735	0.0729	-0.2292	0.0571	0.0562	0.8920	0.0506	0.0512	2.0133	0.0509	0.0515
-1.3355	0.0730	0.0726	-0.2143	0.0568	0.0560	0.9070	0.0506	0.0512	2.0282	0.0509	0.0515
-1.3206	0.0724	0.0720	-0.1993	0.0566	0.0560	0.9219	0.0506	0.0512	2.0432	0.0509	0.0515
-1.3056	0.0723	0.0720	-0.1844	0.0565	0.0560	0.9369	0.0506	0.0512	2.0581	0.0509	0.0515
-1.2907	0.0717	0.0712	-0.1694	0.0565	0.0560	0.9518	0.0506	0.0511	2.0731	0.0509	0.0515
-1.2757	0.0716	0.0708	-0.1545	0.0564	0.0558	0.9668	0.0502	0.0507	2.0880	0.0509	0.0515
-1.2608	0.0715	0.0706	-0.1395	0.0564	0.0558	0.9817	0.0502	0.0507	2.1030	0.0509	0.0517
-1.2458	0.0711	0.0705	-0.1246	0.0563	0.0558	0.9967	0.0502	0.0507	2.1179	0.0515	0.0520
-1.2309	0.0710	0.0705	-0.1096	0.0560	0.0557	1.0116	0.0502	0.0507	2.1329	0.0515	0.0520
-1.2159	0.0708	0.0704	-0.0947	0.0556	0.0554	1.0266	0.0502	0.0507	2.1478	0.0515	0.0520
-1.2010	0.0708	0.0704	-0.0797	0.0554	0.0552	1.0415	0.0503	0.0508	2.1628	0.0517	0.0524
-1.1860	0.0704	0.0701	-0.0648	0.0552	0.0551	1.0565	0.0503	0.0508	2.1777	0.0517	0.0524
-1.1711	0.0704	0.0700	-0.0498	0.0551	0.0550	1.0714	0.0502	0.0508	2.1927	0.0517	0.0524
-1.1561	0.0704	0.0700	-0.0349	0.0549	0.0549	1.0864	0.0499	0.0505	2.2076	0.0518	0.0524
-1.1412	0.0703	0.0695	-0.0199	0.0549	0.0549	1.1013	0.0496	0.0502	2.2226	0.0518	0.0524
-1.1262	0.0703	0.0695	-0.0050	0.0548	0.0547	1.1163	0.0496	0.0502	2.2375	0.0518	0.0524
-1.1113	0.0702	0.0694	0.0100	0.0546	0.0546	1.1312	0.0496	0.0502	2.2525	0.0518	0.0524
-1.0963	0.0698	0.0690	0.0249	0.0546	0.0546	1.1462	0.0496	0.0502	2.2674	0.0520	0.0527
-1.0814	0.0696	0.0686	0.0399	0.0546	0.0546	1.1611	0.0496	0.0502	2.2824	0.0522	0.0533
-1.0664	0.0692	0.0684	0.0548	0.0542	0.0543	1.1761	0.0496	0.0502	2.2973	0.0522	0.0533
-1.0515	0.0692	0.0684	0.0698	0.0541	0.0542	1.1910	0.0496	0.0502	2.3123	0.0522	0.0533
-1.0365	0.0692	0.0684	0.0847	0.0541	0.0542	1.2060	0.0494	0.0502	2.3272	0.0524	0.0533
-1.0216	0.0692	0.0684	0.0997	0.0540	0.0542	1.2209	0.0494	0.0502	2.3422	0.0524	0.0533
-1.0066	0.0691	0.0683	0.1146	0.0540	0.0542	1.2359	0.0494	0.0502	2.3571	0.0524	0.0533
-0.9917	0.0721	0.0679	0.1296	0.0539	0.0542	1.2508	0.0494	0.0502	2.3721	0.0524	0.0533
-0.9767	0.0720	0.0679	0.1445	0.0539	0.0542	1.2658	0.0493	0.0502	2.3870	0.0524	0.0534
-0.9618	0.0720	0.0678	0.1595	0.0539	0.0542	1.2807	0.0493	0.0502	2.4020	0.0524	0.0535
-0.9468	0.0718	0.0674	0.1744	0.0534	0.0538	1.2957	0.0493	0.0502	2.4169	0.0524	0.0535
-0.9319	0.0716	0.0672	0.1894	0.0532	0.0536	1.3106	0.0493	0.0502	2.4319	0.0525	0.0540
-0.9169	0.0711	0.0666	0.2043	0.0527	0.0530	1.3256	0.0493	0.0502	2.4468	0.0533	0.0546
-0.9020	0.0710	0.0666	0.2193	0.0527	0.0530	1.3405	0.0493	0.0502	2.4618	0.0536	0.0550
-0.8870	0.0705	0.0658	0.2342	0.0527	0.0530	1.3555	0.0493	0.0502	2.4767	0.0536	0.0550
-0.8721	0.0701	0.0652	0.2492	0.0526	0.0530	1.3704	0.0494	0.0503	2.4917	0.0538	0.0550
-0.8571	0.0695	0.0651	0.2641	0.0526	0.0529	1.3854	0.0494	0.0503	2.5066	0.0538	0.0550
-0.8422	0.0692	0.0650	0.2791	0.0526	0.0529	1.4003	0.0494	0.0503	2.5216	0.0538	0.0550
-0.8272	0.0691	0.0650	0.2940	0.0526	0.0529	1.4153	0.0494	0.0503	2.5365	0.0542	0.0550
-0.8123	0.0686	0.0645	0.3090	0.0525	0.0528	1.4302	0.0493	0.0503	2.5515	0.0544	0.0550
-0.7973	0.0684	0.0645	0.3239	0.0525	0.0528	1.4452	0.0494	0.0503	2.5664	0.0545	0.0555
-0.7824	0.0680	0.0645	0.3389	0.0525	0.0528	1.4601	0.0494	0.0503	2.5814	0.0545	0.0555
-0.7674	0.0672	0.0630	0.3538	0.0521	0.0525	1.4751	0.0494	0.0503	2.5963	0.0546	0.0556
-0.7525	0.0669	0.0630	0.3688	0.0521	0.0524	1.4900	0.0494	0.0503	2.6113	0.0546	0.0560
-0.7375	0.0664	0.0630	0.3837	0.0520	0.0524	1.5050	0.0494	0.0504	2.6262	0.0548	0.0562
-0.7226	0.0659	0.0626	0.3987	0.0519	0.0524	1.5199	0.0494	0.0504	2.6412	0.0548	0.0562
-0.7076	0.0658	0.0621	0.4136	0.0519	0.0524	1.5349	0.0497	0.0506	2.6561	0.0551	0.0562
-0.6927	0.0654	0.0621	0.4286	0.0519	0.0524	1.5498	0.0497	0.0507	2.6711	0.0554	0.0562
-0.6777	0.0649	0.0620	0.4435	0.0519	0.0524	1.5648	0.0497	0.0507	2.6860	0.0554	0.0570
-0.6628	0.0647	0.0620	0.4585	0.0519	0.0524	1.5797	0.0497	0.0507	2.7010	0.0554	0.0570
-0.6478	0.0646	0.0619	0.4734	0.0519	0.0524	1.5947	0.0497	0.0507	2.7159	0.0554	0.0570
-0.6329	0.0639	0.0612	0.4884	0.0516	0.0524	1.6096	0.0497	0.0507	2.7309	0.0554	0.0570
-0.6179	0.0638	0.0603	0.5033	0.0516	0.0524	1.6246	0.0497	0.0507	2.7458	0.0558	0.0570
-0.6030	0.0634	0.0602	0.5183	0.0516	0.0524	1.6395	0.0499	0.0510	2.7608	0.0560	0.0570
-0.5880	0.0624	0.0597	0.5332	0.0516	0.0524	1.6545	0.0499	0.0510	2.7757	0.0560	0.0574
-0.5731	0.0620	0.0593	0.5482	0.0514	0.0519	1.6694	0.0500	0.0510	2.7907	0.0563	0.0574
-0.5581	0.0617	0.0589	0.5631	0.0514	0.0519	1.6844	0.0500	0.0510	2.8056	0.0563	0.0574
-0.5432	0.0613	0.0587	0.5781	0.0514	0.0518	1.6993	0.0500	0.0510	2.8206	0.0563	0.0574
-0.5282	0.0613	0.0587	0.5930	0.0514	0.0518	1.7143	0.0500	0.0512	2.8355	0.0564	0.0574
-0.5133	0.0611	0.0586	0.6080	0.0512	0.0518	1.7292	0.0500	0.0511	2.8505	0.0564	0.0574
-0.4983	0.0610	0.0584	0.6229	0.0512	0.0518	1.7442	0.0501	0.0511	2.8654	0.0564	0.0574
-0.4834	0.0607	0.0583	0.6379	0.0512	0.0518	1.7591	0.0502	0.0511	2.8804	0.0567	0.0583
-0.4684	0.0600	0.0581	0.6528	0.0511	0.0518	1.7741	0.0502	0.0511	2.8953	0.0570	0.0583
-0.4535	0.0594	0.0576	0.6678	0.0511	0.0518	1.7890	0.0502	0.0511	2.9103	0.0570	0.0583
-0.4385	0.0594	0.0572	0.6827	0.0511	0.0518	1.8040	0.0502	0.0513	2.9252	0.0572	0.0584
-0.4236	0.0592	0.0572	0.6977	0.0510	0.0517	1.8189	0.0502	0.0513	2.9402	0.0579	0.0587
-0.4086	0.0592	0.0572	0.7126	0.0510	0.0517	1.8339	0.0505	0.0513	2.9551	0.0584	0.0592
-0.3937	0.0587	0.0569	0.7276	0.0510	0.0517	1.8488	0.0505	0.0513	2.9701	0.0587	0.0594
									3.0000	0.0591	0.0598

Tabla 4.28: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$. Escenario E.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0997	0.0986	-0.3787	0.0834	0.0815	0.7425	0.0727	0.0740	1.8638	0.0730	0.0741
-1.4850	0.0995	0.0986	-0.3638	0.0830	0.0815	0.7575	0.0723	0.0740	1.8787	0.0734	0.0746
-1.4701	0.0995	0.0986	-0.3488	0.0829	0.0815	0.7724	0.0723	0.0740	1.8937	0.0734	0.0746
-1.4551	0.0994	0.0986	-0.3339	0.0828	0.0814	0.7874	0.0723	0.0736	1.9086	0.0734	0.0746
-1.4402	0.0992	0.0984	-0.3189	0.0827	0.0814	0.8023	0.0723	0.0736	1.9236	0.0734	0.0746
-1.4252	0.0991	0.0980	-0.3040	0.0826	0.0812	0.8173	0.0722	0.0736	1.9385	0.0734	0.0746
-1.4103	0.0990	0.0980	-0.2890	0.0822	0.0811	0.8322	0.0722	0.0736	1.9535	0.0734	0.0748
-1.3953	0.0991	0.0980	-0.2741	0.0822	0.0809	0.8472	0.0722	0.0736	1.9684	0.0736	0.0748
-1.3804	0.0987	0.0978	-0.2591	0.0822	0.0808	0.8621	0.0722	0.0736	1.9834	0.0737	0.0748
-1.3654	0.0986	0.0977	-0.2442	0.0822	0.0808	0.8771	0.0722	0.0736	1.9983	0.0737	0.0748
-1.3505	0.0983	0.0975	-0.2292	0.0820	0.0808	0.8920	0.0722	0.0736	2.0133	0.0737	0.0748
-1.3355	0.0980	0.0973	-0.2143	0.0815	0.0804	0.9070	0.0722	0.0736	2.0282	0.0737	0.0748
-1.3206	0.0975	0.0969	-0.1993	0.0812	0.0803	0.9219	0.0722	0.0736	2.0432	0.0737	0.0748
-1.3056	0.0975	0.0969	-0.1844	0.0809	0.0801	0.9369	0.0722	0.0736	2.0581	0.0737	0.0748
-1.2907	0.0967	0.0958	-0.1694	0.0808	0.0800	0.9518	0.0722	0.0735	2.0731	0.0739	0.0748
-1.2757	0.0966	0.0954	-0.1545	0.0806	0.0798	0.9668	0.0718	0.0731	2.0880	0.0739	0.0748
-1.2608	0.0963	0.0953	-0.1395	0.0804	0.0798	0.9817	0.0718	0.0731	2.1030	0.0739	0.0754
-1.2458	0.0959	0.0952	-0.1246	0.0803	0.0797	0.9967	0.0718	0.0731	2.1179	0.0742	0.0756
-1.2309	0.0954	0.0950	-0.1096	0.0799	0.0797	1.0116	0.0718	0.0731	2.1329	0.0743	0.0756
-1.2159	0.0953	0.0950	-0.0947	0.0796	0.0795	1.0266	0.0718	0.0731	2.1478	0.0743	0.0756
-1.2010	0.0953	0.0950	-0.0797	0.0796	0.0795	1.0415	0.0722	0.0737	2.1628	0.0747	0.0762
-1.1860	0.0951	0.0949	-0.0648	0.0794	0.0793	1.0565	0.0722	0.0737	2.1777	0.0748	0.0762
-1.1711	0.0951	0.0945	-0.0498	0.0794	0.0793	1.0714	0.0720	0.0737	2.1927	0.0748	0.0762
-1.1561	0.0951	0.0945	-0.0349	0.0793	0.0792	1.0864	0.0718	0.0735	2.2076	0.0748	0.0762
-1.1412	0.0946	0.0938	-0.0199	0.0792	0.0792	1.1013	0.0715	0.0729	2.2226	0.0753	0.0762
-1.1262	0.0945	0.0938	-0.0050	0.0790	0.0790	1.1163	0.0715	0.0729	2.2375	0.0753	0.0762
-1.1113	0.0942	0.0934	0.0100	0.0790	0.0790	1.1312	0.0715	0.0729	2.2525	0.0753	0.0762
-1.0963	0.0938	0.0928	0.0249	0.0790	0.0790	1.1462	0.0715	0.0729	2.2674	0.0756	0.0765
-1.0814	0.0932	0.0921	0.0399	0.0787	0.0789	1.1611	0.0715	0.0729	2.2824	0.0757	0.0770
-1.0664	0.0926	0.0918	0.0548	0.0780	0.0784	1.1761	0.0715	0.0729	2.2973	0.0757	0.0770
-1.0515	0.0926	0.0918	0.0698	0.0777	0.0780	1.1910	0.0715	0.0729	2.3123	0.0757	0.0770
-1.0365	0.0926	0.0917	0.0847	0.0777	0.0780	1.2060	0.0715	0.0729	2.3272	0.0757	0.0770
-1.0216	0.0926	0.0917	0.0997	0.0777	0.0780	1.2209	0.0715	0.0729	2.3422	0.0757	0.0770
-1.0066	0.0927	0.0916	0.1146	0.0776	0.0780	1.2359	0.0715	0.0729	2.3571	0.0758	0.0770
-0.9917	0.0955	0.0914	0.1296	0.0776	0.0780	1.2508	0.0715	0.0729	2.3721	0.0758	0.0770
-0.9767	0.0954	0.0914	0.1445	0.0776	0.0780	1.2658	0.0715	0.0729	2.3870	0.0758	0.0771
-0.9618	0.0953	0.0912	0.1595	0.0776	0.0780	1.2807	0.0715	0.0729	2.4020	0.0758	0.0772
-0.9468	0.0950	0.0908	0.1744	0.0767	0.0776	1.2957	0.0715	0.0729	2.4169	0.0760	0.0773
-0.9319	0.0948	0.0908	0.1894	0.0763	0.0772	1.3106	0.0715	0.0729	2.4319	0.0765	0.0784
-0.9169	0.0941	0.0901	0.2043	0.0755	0.0764	1.3256	0.0715	0.0729	2.4468	0.0772	0.0786
-0.9020	0.0941	0.0901	0.2193	0.0755	0.0764	1.3405	0.0715	0.0729	2.4618	0.0777	0.0792
-0.8870	0.0939	0.0892	0.2342	0.0755	0.0764	1.3555	0.0713	0.0727	2.4767	0.0777	0.0792
-0.8721	0.0937	0.0885	0.2492	0.0755	0.0764	1.3704	0.0713	0.0729	2.4917	0.0780	0.0792
-0.8571	0.0930	0.0884	0.2641	0.0754	0.0762	1.3854	0.0713	0.0729	2.5066	0.0780	0.0792
-0.8422	0.0927	0.0884	0.2791	0.0754	0.0762	1.4003	0.0713	0.0729	2.5216	0.0780	0.0792
-0.8272	0.0927	0.0884	0.2940	0.0752	0.0762	1.4153	0.0713	0.0729	2.5365	0.0782	0.0792
-0.8123	0.0919	0.0881	0.3090	0.0752	0.0761	1.4302	0.0713	0.0729	2.5515	0.0784	0.0792
-0.7973	0.0918	0.0881	0.3239	0.0752	0.0761	1.4452	0.0714	0.0729	2.5664	0.0784	0.0800
-0.7824	0.0915	0.0881	0.3389	0.0752	0.0761	1.4601	0.0714	0.0729	2.5814	0.0784	0.0800
-0.7674	0.0906	0.0865	0.3538	0.0746	0.0756	1.4751	0.0714	0.0729	2.5963	0.0784	0.0800
-0.7525	0.0900	0.0865	0.3688	0.0746	0.0754	1.4900	0.0714	0.0729	2.6113	0.0785	0.0808
-0.7375	0.0897	0.0864	0.3837	0.0746	0.0754	1.5050	0.0714	0.0729	2.6262	0.0789	0.0812
-0.7226	0.0891	0.0858	0.3987	0.0744	0.0754	1.5199	0.0714	0.0729	2.6412	0.0790	0.0812
-0.7076	0.0890	0.0856	0.4136	0.0744	0.0754	1.5349	0.0715	0.0731	2.6561	0.0795	0.0812
-0.6927	0.0889	0.0856	0.4286	0.0744	0.0754	1.5498	0.0715	0.0732	2.6711	0.0800	0.0812
-0.6777	0.0883	0.0856	0.4435	0.0742	0.0754	1.5648	0.0715	0.0732	2.6860	0.0800	0.0820
-0.6628	0.0881	0.0855	0.4585	0.0742	0.0754	1.5797	0.0718	0.0732	2.7010	0.0800	0.0820
-0.6478	0.0878	0.0854	0.4734	0.0742	0.0754	1.5947	0.0718	0.0732	2.7159	0.0800	0.0820
-0.6329	0.0874	0.0852	0.4884	0.0740	0.0754	1.6096	0.0720	0.0732	2.7309	0.0801	0.0821
-0.6179	0.0874	0.0841	0.5033	0.0740	0.0753	1.6246	0.0720	0.0732	2.7458	0.0805	0.0821
-0.6030	0.0873	0.0840	0.5183	0.0740	0.0753	1.6395	0.0723	0.0735	2.7608	0.0806	0.0821
-0.5880	0.0867	0.0838	0.5332	0.0739	0.0753	1.6545	0.0724	0.0735	2.7757	0.0806	0.0828
-0.5731	0.0864	0.0835	0.5482	0.0736	0.0747	1.6694	0.0725	0.0735	2.7907	0.0813	0.0828
-0.5581	0.0862	0.0834	0.5631	0.0736	0.0747	1.6844	0.0728	0.0738	2.8056	0.0813	0.0828
-0.5432	0.0860	0.0833	0.5781	0.0736	0.0747	1.6993	0.0728	0.0738	2.8206	0.0814	0.0828
-0.5282	0.0859	0.0833	0.5930	0.0736	0.0747	1.7143	0.0728	0.0741	2.8355	0.0814	0.0828
-0.5133	0.0858	0.0832	0.6080	0.0735	0.0747	1.7292	0.0728	0.0740	2.8505	0.0814	0.0828
-0.4983	0.0857	0.0832	0.6229	0.0735	0.0747	1.7442	0.0729	0.0740	2.8654	0.0814	0.0828
-0.4834	0.0856	0.0832	0.6379	0.0733	0.0747	1.7591	0.0730	0.0740	2.8804	0.0818	0.0842
-0.4684	0.0848	0.0827	0.6528	0.0732	0.0747	1.7741	0.0730	0.0740	2.8953	0.0820	0.0842
-0.4535	0.0843	0.0826	0.6678	0.0732	0.0747	1.7890	0.0730	0.0740	2.9103	0.0820	0.0842
-0.4385	0.0842	0.0818	0.6827	0.0732	0.0746	1.8040	0.0730	0.0741	2.9252	0.0821	0.0842
-0.4236	0.0841	0.0818	0.6977	0.0727	0.0740	1.8189	0.0730	0.0741	2.9402	0.0830	0.0846
-0.4086	0.0841	0.0818	0.7126	0.0727	0.0740	1.8339	0.0730	0.0741	2.9551	0.0833	0.0846
-0.3937	0.0834	0.0816	0.7276	0.0727	0.0740	1.8488	0.0730	0.0741	2.9701	0.0837	0.0850
									3.0000	0.0844	0.0852

Tabla 4.29: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\tilde{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario E.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1316	0.1523	-0.3787	0.1352	0.1343	0.7425	0.1198	0.1212	1.8638	0.1214	0.1232
-1.4850	0.1311	0.1520	-0.3638	0.1351	0.1342	0.7575	0.1197	0.1212	1.8787	0.1218	0.1238
-1.4701	0.1304	0.1514	-0.3488	0.1351	0.1342	0.7724	0.1197	0.1212	1.8937	0.1218	0.1239
-1.4551	0.1297	0.1514	-0.3339	0.1350	0.1342	0.7874	0.1197	0.1210	1.9086	0.1219	0.1239
-1.4402	0.1287	0.1495	-0.3189	0.1349	0.1342	0.8023	0.1196	0.1210	1.9236	0.1219	0.1239
-1.4252	0.1277	0.1494	-0.3040	0.1348	0.1340	0.8173	0.1190	0.1208	1.9385	0.1220	0.1240
-1.4103	0.1270	0.1488	-0.2890	0.1339	0.1333	0.8322	0.1189	0.1208	1.9535	0.1220	0.1245
-1.3953	0.1264	0.1488	-0.2741	0.1338	0.1333	0.8472	0.1188	0.1208	1.9684	0.1229	0.1250
-1.3804	0.1264	0.1488	-0.2591	0.1338	0.1333	0.8621	0.1187	0.1208	1.9834	0.1230	0.1250
-1.3654	0.1263	0.1484	-0.2442	0.1332	0.1327	0.8771	0.1186	0.1208	1.9983	0.1230	0.1250
-1.3505	0.1252	0.1476	-0.2292	0.1317	0.1312	0.8920	0.1186	0.1208	2.0133	0.1232	0.1250
-1.3355	0.1250	0.1476	-0.2143	0.1306	0.1302	0.9070	0.1186	0.1208	2.0282	0.1232	0.1250
-1.3206	0.1250	0.1475	-0.1993	0.1303	0.1300	0.9219	0.1186	0.1208	2.0432	0.1232	0.1250
-1.3056	0.1249	0.1475	-0.1844	0.1300	0.1296	0.9369	0.1186	0.1208	2.0581	0.1233	0.1253
-1.2907	0.1239	0.1469	-0.1694	0.1299	0.1294	0.9518	0.1186	0.1208	2.0731	0.1234	0.1253
-1.2757	0.1229	0.1458	-0.1545	0.1296	0.1293	0.9668	0.1184	0.1207	2.0880	0.1234	0.1253
-1.2608	0.1222	0.1452	-0.1395	0.1296	0.1293	0.9817	0.1184	0.1207	2.1030	0.1234	0.1257
-1.2458	0.1218	0.1452	-0.1246	0.1289	0.1285	0.9967	0.1184	0.1207	2.1179	0.1238	0.1257
-1.2309	0.1214	0.1447	-0.1096	0.1287	0.1285	1.0116	0.1184	0.1207	2.1329	0.1239	0.1257
-1.2159	0.1210	0.1443	-0.0947	0.1287	0.1285	1.0266	0.1184	0.1207	2.1478	0.1239	0.1257
-1.2010	0.1210	0.1443	-0.0797	0.1287	0.1285	1.0415	0.1192	0.1222	2.1628	0.1241	0.1260
-1.1860	0.1209	0.1443	-0.0648	0.1284	0.1280	1.0565	0.1193	0.1222	2.1777	0.1241	0.1260
-1.1711	0.1209	0.1440	-0.0498	0.1282	0.1279	1.0714	0.1193	0.1221	2.1927	0.1242	0.1260
-1.1561	0.1209	0.1440	-0.0349	0.1279	0.1279	1.0864	0.1192	0.1220	2.2076	0.1242	0.1260
-1.1412	0.1206	0.1436	-0.0199	0.1279	0.1279	1.1013	0.1190	0.1220	2.2226	0.1246	0.1260
-1.1262	0.1208	0.1436	-0.0050	0.1266	0.1266	1.1163	0.1190	0.1220	2.2375	0.1246	0.1260
-1.1113	0.1205	0.1432	0.0100	0.1266	0.1266	1.1312	0.1190	0.1220	2.2525	0.1246	0.1260
-1.0963	0.1206	0.1431	0.0249	0.1265	0.1266	1.1462	0.1190	0.1220	2.2674	0.1256	0.1270
-1.0814	0.1206	0.1430	0.0399	0.1264	0.1266	1.1611	0.1189	0.1220	2.2824	0.1257	0.1275
-1.0664	0.1200	0.1423	0.0548	0.1262	0.1265	1.1761	0.1189	0.1220	2.2973	0.1258	0.1275
-1.0515	0.1205	0.1423	0.0698	0.1256	0.1259	1.1910	0.1189	0.1220	2.3123	0.1258	0.1275
-1.0365	0.1206	0.1419	0.0847	0.1256	0.1259	1.2060	0.1189	0.1220	2.3272	0.1258	0.1275
-1.0216	0.1212	0.1419	0.0997	0.1254	0.1259	1.2209	0.1190	0.1220	2.3422	0.1258	0.1275
-1.0066	0.1217	0.1418	0.1146	0.1254	0.1257	1.2359	0.1190	0.1220	2.3571	0.1259	0.1275
-0.9917	0.1445	0.1416	0.1296	0.1254	0.1257	1.2508	0.1190	0.1220	2.3721	0.1259	0.1275
-0.9767	0.1444	0.1416	0.1445	0.1254	0.1257	1.2658	0.1190	0.1220	2.3870	0.1261	0.1276
-0.9618	0.1444	0.1415	0.1595	0.1253	0.1257	1.2807	0.1190	0.1220	2.4020	0.1262	0.1277
-0.9468	0.1440	0.1413	0.1744	0.1249	0.1255	1.2957	0.1190	0.1221	2.4169	0.1269	0.1284
-0.9319	0.1438	0.1413	0.1894	0.1248	0.1254	1.3106	0.1190	0.1221	2.4319	0.1275	0.1296
-0.9169	0.1435	0.1410	0.2043	0.1241	0.1246	1.3256	0.1190	0.1221	2.4468	0.1280	0.1297
-0.9020	0.1435	0.1410	0.2193	0.1241	0.1246	1.3405	0.1190	0.1221	2.4618	0.1283	0.1300
-0.8870	0.1432	0.1407	0.2342	0.1240	0.1246	1.3555	0.1188	0.1218	2.4767	0.1283	0.1300
-0.8721	0.1431	0.1406	0.2492	0.1239	0.1246	1.3704	0.1188	0.1221	2.4917	0.1285	0.1300
-0.8571	0.1428	0.1406	0.2641	0.1235	0.1245	1.3854	0.1188	0.1221	2.5066	0.1285	0.1300
-0.8422	0.1428	0.1406	0.2791	0.1234	0.1245	1.4003	0.1188	0.1221	2.5216	0.1285	0.1300
-0.8272	0.1426	0.1406	0.2940	0.1232	0.1245	1.4153	0.1189	0.1221	2.5365	0.1287	0.1300
-0.8123	0.1423	0.1406	0.3090	0.1230	0.1244	1.4302	0.1189	0.1221	2.5515	0.1291	0.1300
-0.7973	0.1423	0.1406	0.3239	0.1230	0.1244	1.4452	0.1190	0.1221	2.5664	0.1298	0.1304
-0.7824	0.1413	0.1398	0.3389	0.1229	0.1243	1.4601	0.1190	0.1221	2.5814	0.1299	0.1304
-0.7674	0.1412	0.1388	0.3538	0.1222	0.1239	1.4751	0.1191	0.1221	2.5963	0.1300	0.1310
-0.7525	0.1407	0.1388	0.3688	0.1222	0.1236	1.4900	0.1195	0.1221	2.6113	0.1300	0.1310
-0.7375	0.1405	0.1388	0.3837	0.1222	0.1236	1.5050	0.1195	0.1221	2.6262	0.1302	0.1312
-0.7226	0.1403	0.1386	0.3987	0.1216	0.1236	1.5199	0.1195	0.1221	2.6412	0.1302	0.1313
-0.7076	0.1402	0.1376	0.4136	0.1216	0.1236	1.5349	0.1195	0.1223	2.6561	0.1302	0.1313
-0.6927	0.1396	0.1374	0.4286	0.1216	0.1236	1.5498	0.1195	0.1226	2.6711	0.1305	0.1314
-0.6777	0.1387	0.1370	0.4435	0.1216	0.1236	1.5648	0.1195	0.1226	2.6860	0.1305	0.1318
-0.6628	0.1385	0.1369	0.4585	0.1215	0.1235	1.5797	0.1199	0.1226	2.7010	0.1306	0.1319
-0.6478	0.1384	0.1367	0.4734	0.1215	0.1235	1.5947	0.1199	0.1226	2.7159	0.1306	0.1319
-0.6329	0.1382	0.1366	0.4884	0.1214	0.1235	1.6096	0.1199	0.1226	2.7309	0.1308	0.1319
-0.6179	0.1380	0.1362	0.5033	0.1214	0.1230	1.6246	0.1200	0.1226	2.7458	0.1309	0.1319
-0.6030	0.1379	0.1362	0.5183	0.1214	0.1230	1.6395	0.1201	0.1227	2.7608	0.1310	0.1319
-0.5880	0.1378	0.1360	0.5332	0.1213	0.1230	1.6545	0.1202	0.1227	2.7757	0.1310	0.1320
-0.5731	0.1376	0.1358	0.5482	0.1212	0.1227	1.6694	0.1208	0.1227	2.7907	0.1310	0.1320
-0.5581	0.1375	0.1358	0.5631	0.1212	0.1227	1.6844	0.1208	0.1228	2.8056	0.1313	0.1320
-0.5432	0.1374	0.1358	0.5781	0.1212	0.1227	1.6993	0.1208	0.1228	2.8206	0.1315	0.1322
-0.5282	0.1374	0.1356	0.5930	0.1212	0.1227	1.7143	0.1208	0.1229	2.8355	0.1316	0.1322
-0.5133	0.1374	0.1356	0.6080	0.1212	0.1227	1.7292	0.1208	0.1229	2.8505	0.1316	0.1322
-0.4983	0.1373	0.1356	0.6229	0.1212	0.1227	1.7442	0.1209	0.1229	2.8654	0.1316	0.1322
-0.4834	0.1372	0.1356	0.6379	0.1208	0.1227	1.7591	0.1210	0.1229	2.8804	0.1316	0.1323
-0.4684	0.1366	0.1354	0.6528	0.1207	0.1227	1.7741	0.1210	0.1229	2.8953	0.1318	0.1323
-0.4535	0.1365	0.1353	0.6678	0.1207	0.1227	1.7890	0.1210	0.1229	2.9103	0.1326	0.1330
-0.4385	0.1364	0.1347	0.6827	0.1207	0.1227	1.8040	0.1214	0.1232	2.9252	0.1328	0.1332
-0.4236	0.1360	0.1345	0.6977	0.1198	0.1212	1.8189	0.1214	0.1232	2.9402	0.1332	0.1334
-0.4086	0.1357	0.1344	0.7126	0.1198	0.1212	1.8339	0.1214	0.1232	2.9551	0.1332	0.1334
-0.3937	0.1352	0.1343	0.7276	0.1198	0.1212	1.8488	0.1214	0.1232	2.9701	0.1337	0.1336
									3.0000	0.1338	0.1337

Tabla 4.30: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario E.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1159	0.1968	-0.3787	0.1591	0.1586	0.7425	0.1314	0.1322	1.8638	0.1322	0.1332
-1.4850	0.1150	0.1954	-0.3638	0.1590	0.1586	0.7575	0.1313	0.1322	1.8787	0.1323	0.1333
-1.4701	0.1136	0.1942	-0.3488	0.1590	0.1586	0.7724	0.1312	0.1322	1.8937	0.1323	0.1334
-1.4551	0.1128	0.1942	-0.3339	0.1590	0.1586	0.7874	0.1312	0.1322	1.9086	0.1326	0.1336
-1.4402	0.1108	0.1908	-0.3189	0.1590	0.1586	0.8023	0.1312	0.1322	1.9236	0.1326	0.1336
-1.4252	0.1088	0.1908	-0.3040	0.1588	0.1583	0.8173	0.1310	0.1322	1.9385	0.1326	0.1336
-1.4103	0.1077	0.1895	-0.2890	0.1581	0.1578	0.8322	0.1310	0.1322	1.9535	0.1326	0.1342
-1.3953	0.1067	0.1895	-0.2741	0.1579	0.1578	0.8472	0.1309	0.1322	1.9684	0.1342	0.1354
-1.3804	0.1065	0.1895	-0.2591	0.1579	0.1577	0.8621	0.1309	0.1322	1.9834	0.1344	0.1354
-1.3654	0.1064	0.1886	-0.2442	0.1566	0.1558	0.8771	0.1309	0.1322	1.9983	0.1344	0.1354
-1.3505	0.1049	0.1873	-0.2292	0.1495	0.1487	0.8920	0.1309	0.1322	2.0133	0.1345	0.1354
-1.3355	0.1048	0.1873	-0.2143	0.1459	0.1455	0.9070	0.1309	0.1322	2.0282	0.1345	0.1354
-1.3206	0.1049	0.1870	-0.1993	0.1445	0.1441	0.9219	0.1309	0.1322	2.0432	0.1344	0.1354
-1.3056	0.1048	0.1870	-0.1844	0.1434	0.1429	0.9369	0.1308	0.1322	2.0581	0.1345	0.1356
-1.2907	0.1038	0.1866	-0.1694	0.1432	0.1418	0.9518	0.1308	0.1322	2.0731	0.1346	0.1356
-1.2757	0.1034	0.1858	-0.1545	0.1419	0.1418	0.9668	0.1302	0.1321	2.0880	0.1346	0.1356
-1.2608	0.1026	0.1851	-0.1395	0.1419	0.1418	0.9817	0.1302	0.1321	2.1030	0.1346	0.1358
-1.2458	0.1020	0.1850	-0.1246	0.1401	0.1397	0.9967	0.1299	0.1321	2.1179	0.1346	0.1358
-1.2309	0.1018	0.1848	-0.1096	0.1400	0.1397	1.0116	0.1299	0.1321	2.1329	0.1348	0.1360
-1.2159	0.1008	0.1837	-0.0947	0.1399	0.1397	1.0266	0.1300	0.1322	2.1478	0.1348	0.1360
-1.2010	0.1008	0.1837	-0.0797	0.1394	0.1392	1.0415	0.1296	0.1319	2.1628	0.1351	0.1363
-1.1860	0.1003	0.1837	-0.0648	0.1394	0.1389	1.0565	0.1296	0.1319	2.1777	0.1351	0.1363
-1.1711	0.1003	0.1833	-0.0498	0.1387	0.1384	1.0714	0.1296	0.1318	2.1927	0.1351	0.1363
-1.1561	0.1004	0.1832	-0.0349	0.1386	0.1384	1.0864	0.1296	0.1318	2.2076	0.1352	0.1363
-1.1412	0.1002	0.1827	-0.0199	0.1385	0.1384	1.1013	0.1295	0.1318	2.2226	0.1353	0.1363
-1.1262	0.1006	0.1827	-0.0050	0.1369	0.1369	1.1163	0.1294	0.1318	2.2375	0.1353	0.1363
-1.1113	0.1009	0.1824	0.0100	0.1368	0.1368	1.1312	0.1294	0.1318	2.2525	0.1353	0.1363
-1.0963	0.1018	0.1824	0.0249	0.1368	0.1368	1.1462	0.1294	0.1318	2.2674	0.1358	0.1369
-1.0814	0.1020	0.1824	0.0399	0.1364	0.1364	1.1611	0.1293	0.1318	2.2824	0.1358	0.1369
-1.0664	0.1009	0.1811	0.0548	0.1363	0.1364	1.1761	0.1293	0.1318	2.2973	0.1359	0.1369
-1.0515	0.1030	0.1811	0.0698	0.1351	0.1351	1.1910	0.1293	0.1318	2.3123	0.1359	0.1369
-1.0365	0.1037	0.1803	0.0847	0.1346	0.1346	1.2060	0.1293	0.1318	2.3272	0.1361	0.1369
-1.0216	0.1074	0.1803	0.0997	0.1346	0.1346	1.2209	0.1295	0.1318	2.3422	0.1361	0.1369
-1.0066	0.1104	0.1803	0.1146	0.1346	0.1346	1.2359	0.1295	0.1318	2.3571	0.1361	0.1369
-0.9917	0.1825	0.1803	0.1296	0.1346	0.1346	1.2508	0.1295	0.1318	2.3721	0.1361	0.1369
-0.9767	0.1824	0.1803	0.1445	0.1346	0.1346	1.2658	0.1295	0.1318	2.3870	0.1364	0.1372
-0.9618	0.1823	0.1803	0.1595	0.1345	0.1346	1.2807	0.1295	0.1318	2.4020	0.1369	0.1377
-0.9468	0.1816	0.1802	0.1744	0.1344	0.1346	1.2957	0.1300	0.1323	2.4169	0.1375	0.1383
-0.9319	0.1815	0.1800	0.1894	0.1344	0.1346	1.3106	0.1300	0.1323	2.4319	0.1378	0.1387
-0.9169	0.1813	0.1800	0.2043	0.1341	0.1342	1.3256	0.1301	0.1323	2.4468	0.1380	0.1388
-0.9020	0.1812	0.1800	0.2193	0.1341	0.1342	1.3405	0.1301	0.1323	2.4618	0.1383	0.1391
-0.8870	0.1808	0.1800	0.2342	0.1341	0.1342	1.3555	0.1301	0.1323	2.4767	0.1384	0.1393
-0.8721	0.1808	0.1797	0.2492	0.1341	0.1342	1.3704	0.1304	0.1327	2.4917	0.1385	0.1393
-0.8571	0.1808	0.1797	0.2641	0.1338	0.1342	1.3854	0.1304	0.1327	2.5066	0.1385	0.1393
-0.8422	0.1807	0.1797	0.2791	0.1338	0.1342	1.4003	0.1304	0.1327	2.5216	0.1385	0.1393
-0.8272	0.1806	0.1797	0.2940	0.1336	0.1342	1.4153	0.1305	0.1327	2.5365	0.1385	0.1393
-0.8123	0.1807	0.1797	0.3090	0.1334	0.1339	1.4302	0.1305	0.1327	2.5515	0.1386	0.1394
-0.7973	0.1806	0.1795	0.3239	0.1334	0.1339	1.4452	0.1309	0.1327	2.5664	0.1398	0.1394
-0.7824	0.1794	0.1783	0.3389	0.1330	0.1336	1.4601	0.1309	0.1327	2.5814	0.1398	0.1394
-0.7674	0.1793	0.1780	0.3538	0.1328	0.1336	1.4751	0.1309	0.1327	2.5963	0.1398	0.1405
-0.7525	0.1791	0.1779	0.3688	0.1326	0.1333	1.4900	0.1314	0.1327	2.6113	0.1398	0.1405
-0.7375	0.1791	0.1779	0.3837	0.1326	0.1333	1.5050	0.1314	0.1327	2.6262	0.1398	0.1405
-0.7226	0.1790	0.1779	0.3987	0.1324	0.1333	1.5199	0.1314	0.1327	2.6412	0.1398	0.1407
-0.7076	0.1788	0.1692	0.4136	0.1324	0.1333	1.5349	0.1314	0.1327	2.6561	0.1398	0.1409
-0.6927	0.1749	0.1664	0.4286	0.1324	0.1333	1.5498	0.1314	0.1327	2.6711	0.1403	0.1414
-0.6777	0.1667	0.1654	0.4435	0.1323	0.1333	1.5648	0.1314	0.1327	2.6860	0.1403	0.1414
-0.6628	0.1662	0.1644	0.4585	0.1322	0.1332	1.5797	0.1315	0.1327	2.7010	0.1404	0.1415
-0.6478	0.1653	0.1634	0.4734	0.1322	0.1332	1.5947	0.1315	0.1327	2.7159	0.1404	0.1415
-0.6329	0.1643	0.1630	0.4884	0.1322	0.1332	1.6096	0.1315	0.1327	2.7309	0.1406	0.1415
-0.6179	0.1640	0.1628	0.5033	0.1322	0.1329	1.6246	0.1316	0.1327	2.7458	0.1405	0.1415
-0.6030	0.1638	0.1627	0.5183	0.1322	0.1329	1.6395	0.1316	0.1327	2.7608	0.1406	0.1415
-0.5880	0.1636	0.1624	0.5332	0.1319	0.1326	1.6545	0.1316	0.1327	2.7757	0.1406	0.1416
-0.5731	0.1632	0.1618	0.5482	0.1319	0.1326	1.6694	0.1317	0.1327	2.7907	0.1406	0.1416
-0.5581	0.1627	0.1618	0.5631	0.1319	0.1326	1.6844	0.1318	0.1328	2.8056	0.1416	0.1416
-0.5432	0.1626	0.1613	0.5781	0.1319	0.1326	1.6993	0.1318	0.1328	2.8206	0.1426	0.1427
-0.5282	0.1619	0.1605	0.5930	0.1319	0.1326	1.7143	0.1318	0.1328	2.8355	0.1426	0.1427
-0.5133	0.1619	0.1605	0.6080	0.1319	0.1326	1.7292	0.1319	0.1328	2.8505	0.1426	0.1428
-0.4983	0.1617	0.1603	0.6229	0.1319	0.1326	1.7442	0.1320	0.1328	2.8654	0.1426	0.1428
-0.4834	0.1617	0.1603	0.6379	0.1318	0.1326	1.7591	0.1320	0.1328	2.8804	0.1427	0.1428
-0.4684	0.1616	0.1603	0.6528	0.1318	0.1326	1.7741	0.1320	0.1328	2.8953	0.1428	0.1428
-0.4535	0.1616	0.1603	0.6678	0.1318	0.1326	1.7890	0.1320	0.1328	2.9103	0.1440	0.1440
-0.4385	0.1613	0.1598	0.6827	0.1318	0.1326	1.8040	0.1324	0.1332	2.9252	0.1444	0.1445
-0.4236	0.1609	0.1594	0.6977	0.1314	0.1322	1.8189	0.1324	0.1332	2.9402	0.1444	0.1445
-0.4086	0.1595	0.1588	0.7126	0.1314	0.1322	1.8339	0.1324	0.1332	2.9551	0.1444	0.1445
-0.3937	0.1592	0.1586	0.7276	0.1314	0.1322	1.8488	0.1324	0.1332	2.9701	0.1454	0.1447
									3.0000	0.1459	0.1452

Tabla 4.31: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario E.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0896	0.2363	-0.3787	0.1734	0.1748	0.7425	0.1289	0.1294	1.8638	0.1289	0.1300
-1.4850	0.0889	0.2345	-0.3638	0.1745	0.1741	0.7575	0.1288	0.1294	1.8787	0.1289	0.1300
-1.4701	0.0876	0.2334	-0.3488	0.1745	0.1740	0.7724	0.1288	0.1294	1.8937	0.1289	0.1300
-1.4551	0.0870	0.2334	-0.3339	0.1745	0.1740	0.7874	0.1288	0.1294	1.9086	0.1299	0.1309
-1.4402	0.0856	0.2304	-0.3189	0.1744	0.1740	0.8023	0.1288	0.1294	1.9236	0.1299	0.1309
-1.4252	0.0831	0.2304	-0.3040	0.1740	0.1737	0.8173	0.1288	0.1294	1.9385	0.1300	0.1310
-1.4103	0.0822	0.2290	-0.2890	0.1735	0.1732	0.8322	0.1288	0.1294	1.9535	0.1300	0.1316
-1.3953	0.0812	0.2290	-0.2741	0.1734	0.1732	0.8472	0.1288	0.1294	1.9684	0.1313	0.1327
-1.3804	0.0812	0.2290	-0.2591	0.1734	0.1731	0.8621	0.1285	0.1294	1.9834	0.1316	0.1327
-1.3654	0.0810	0.2280	-0.2442	0.1710	0.1701	0.8771	0.1285	0.1294	1.9983	0.1316	0.1327
-1.3505	0.0802	0.2272	-0.2292	0.1580	0.1564	0.8920	0.1285	0.1294	2.0133	0.1316	0.1327
-1.3355	0.0802	0.2272	-0.2143	0.1498	0.1486	0.9070	0.1285	0.1294	2.0282	0.1316	0.1327
-1.3206	0.0805	0.2267	-0.1993	0.1459	0.1455	0.9219	0.1285	0.1294	2.0432	0.1316	0.1327
-1.3056	0.0805	0.2267	-0.1844	0.1438	0.1434	0.9369	0.1284	0.1294	2.0581	0.1317	0.1328
-1.2907	0.0796	0.2264	-0.1694	0.1434	0.1417	0.9518	0.1284	0.1294	2.0731	0.1318	0.1328
-1.2757	0.0792	0.2257	-0.1545	0.1418	0.1417	0.9668	0.1278	0.1294	2.0880	0.1318	0.1328
-1.2608	0.0784	0.2250	-0.1395	0.1418	0.1417	0.9817	0.1278	0.1294	2.1030	0.1318	0.1328
-1.2458	0.0779	0.2248	-0.1246	0.1402	0.1400	0.9967	0.1276	0.1294	2.1179	0.1318	0.1328
-1.2309	0.0779	0.2248	-0.1096	0.1402	0.1400	1.0116	0.1276	0.1294	2.1329	0.1325	0.1335
-1.2159	0.0770	0.2237	-0.0947	0.1400	0.1399	1.0266	0.1274	0.1294	2.1478	0.1325	0.1335
-1.2010	0.0769	0.2237	-0.0797	0.1388	0.1387	1.0415	0.1263	0.1283	2.1628	0.1328	0.1339
-1.1860	0.0762	0.2237	-0.0648	0.1387	0.1386	1.0565	0.1263	0.1283	2.1777	0.1328	0.1339
-1.1711	0.0762	0.2231	-0.0498	0.1380	0.1379	1.0714	0.1263	0.1280	2.1927	0.1328	0.1339
-1.1561	0.0762	0.2229	-0.0349	0.1380	0.1379	1.0864	0.1263	0.1280	2.2076	0.1328	0.1339
-1.1412	0.0766	0.2225	-0.0199	0.1379	0.1379	1.1013	0.1263	0.1279	2.2226	0.1328	0.1339
-1.1262	0.0778	0.2225	-0.0050	0.1358	0.1358	1.1163	0.1263	0.1279	2.2375	0.1330	0.1341
-1.1113	0.0793	0.2224	0.0100	0.1358	0.1358	1.1312	0.1262	0.1279	2.2525	0.1330	0.1341
-1.0963	0.0804	0.2224	0.0249	0.1356	0.1356	1.1462	0.1262	0.1279	2.2674	0.1333	0.1344
-1.0814	0.0806	0.2224	0.0399	0.1350	0.1351	1.1611	0.1259	0.1279	2.2824	0.1332	0.1344
-1.0664	0.0794	0.2208	0.0548	0.1349	0.1350	1.1761	0.1259	0.1279	2.2973	0.1332	0.1344
-1.0515	0.0840	0.2208	0.0698	0.1338	0.1338	1.1910	0.1259	0.1279	2.3123	0.1332	0.1344
-1.0365	0.0849	0.2202	0.0847	0.1326	0.1326	1.2060	0.1259	0.1280	2.3272	0.1332	0.1344
-1.0216	0.0908	0.2202	0.0997	0.1325	0.1326	1.2209	0.1262	0.1280	2.3422	0.1332	0.1344
-1.0066	0.0954	0.2202	0.1146	0.1325	0.1326	1.2359	0.1262	0.1280	2.3571	0.1333	0.1344
-0.9917	0.2225	0.2202	0.1296	0.1325	0.1326	1.2508	0.1262	0.1280	2.3721	0.1333	0.1344
-0.9767	0.2222	0.2202	0.1445	0.1325	0.1326	1.2658	0.1262	0.1280	2.3870	0.1334	0.1345
-0.9618	0.2222	0.2202	0.1595	0.1325	0.1326	1.2807	0.1262	0.1280	2.4020	0.1336	0.1346
-0.9468	0.2218	0.2201	0.1744	0.1324	0.1326	1.2957	0.1274	0.1292	2.4169	0.1341	0.1352
-0.9319	0.2218	0.2198	0.1894	0.1324	0.1326	1.3106	0.1274	0.1292	2.4319	0.1347	0.1357
-0.9169	0.2216	0.2198	0.2043	0.1318	0.1320	1.3256	0.1275	0.1292	2.4468	0.1347	0.1357
-0.9020	0.2214	0.2198	0.2193	0.1318	0.1320	1.3405	0.1275	0.1292	2.4618	0.1354	0.1364
-0.8870	0.2209	0.2198	0.2342	0.1318	0.1320	1.3555	0.1275	0.1292	2.4767	0.1354	0.1365
-0.8721	0.2210	0.2195	0.2492	0.1318	0.1320	1.3704	0.1276	0.1293	2.4917	0.1354	0.1365
-0.8571	0.2209	0.2195	0.2641	0.1316	0.1320	1.3854	0.1276	0.1293	2.5066	0.1354	0.1365
-0.8422	0.2209	0.2195	0.2791	0.1316	0.1320	1.4003	0.1277	0.1293	2.5216	0.1355	0.1365
-0.8272	0.2208	0.2195	0.2940	0.1315	0.1318	1.4153	0.1277	0.1293	2.5365	0.1355	0.1365
-0.8123	0.2209	0.2195	0.3090	0.1314	0.1317	1.4302	0.1277	0.1293	2.5515	0.1355	0.1365
-0.7973	0.2209	0.2194	0.3239	0.1314	0.1317	1.4452	0.1280	0.1293	2.5664	0.1363	0.1365
-0.7824	0.2198	0.2182	0.3389	0.1312	0.1316	1.4601	0.1280	0.1293	2.5814	0.1363	0.1365
-0.7674	0.2198	0.2181	0.3538	0.1312	0.1316	1.4751	0.1280	0.1293	2.5963	0.1364	0.1372
-0.7525	0.2196	0.2180	0.3688	0.1305	0.1309	1.4900	0.1282	0.1293	2.6113	0.1364	0.1372
-0.7375	0.2196	0.2180	0.3837	0.1305	0.1309	1.5050	0.1282	0.1293	2.6262	0.1364	0.1372
-0.7226	0.2194	0.2180	0.3987	0.1305	0.1309	1.5199	0.1282	0.1293	2.6412	0.1364	0.1373
-0.7076	0.2192	0.1980	0.4136	0.1305	0.1309	1.5349	0.1282	0.1293	2.6561	0.1364	0.1376
-0.6927	0.2111	0.1904	0.4286	0.1305	0.1309	1.5498	0.1282	0.1294	2.6711	0.1376	0.1388
-0.6777	0.1909	0.1884	0.4435	0.1304	0.1309	1.5648	0.1282	0.1294	2.6860	0.1376	0.1388
-0.6628	0.1895	0.1858	0.4585	0.1304	0.1308	1.5797	0.1283	0.1294	2.7010	0.1378	0.1390
-0.6478	0.1869	0.1841	0.4734	0.1304	0.1308	1.5947	0.1283	0.1294	2.7159	0.1378	0.1390
-0.6329	0.1850	0.1834	0.4884	0.1304	0.1308	1.6096	0.1283	0.1294	2.7309	0.1380	0.1390
-0.6179	0.1844	0.1831	0.5033	0.1304	0.1306	1.6246	0.1285	0.1294	2.7458	0.1379	0.1390
-0.6030	0.1841	0.1826	0.5183	0.1304	0.1306	1.6395	0.1285	0.1294	2.7608	0.1379	0.1390
-0.5880	0.1836	0.1810	0.5332	0.1294	0.1296	1.6545	0.1285	0.1294	2.7757	0.1380	0.1391
-0.5731	0.1819	0.1796	0.5482	0.1294	0.1296	1.6694	0.1285	0.1294	2.7907	0.1380	0.1391
-0.5581	0.1804	0.1796	0.5631	0.1294	0.1296	1.6844	0.1285	0.1294	2.8056	0.1390	0.1391
-0.5432	0.1804	0.1784	0.5781	0.1294	0.1296	1.6993	0.1285	0.1294	2.8206	0.1408	0.1410
-0.5282	0.1790	0.1776	0.5930	0.1294	0.1296	1.7143	0.1285	0.1294	2.8355	0.1408	0.1410
-0.5133	0.1789	0.1775	0.6080	0.1294	0.1296	1.7292	0.1286	0.1294	2.8505	0.1408	0.1412
-0.4983	0.1784	0.1770	0.6229	0.1294	0.1296	1.7442	0.1286	0.1294	2.8654	0.1408	0.1412
-0.4834	0.1783	0.1770	0.6379	0.1293	0.1296	1.7591	0.1286	0.1294	2.8804	0.1410	0.1413
-0.4684	0.1783	0.1769	0.6528	0.1293	0.1296	1.7741	0.1286	0.1294	2.8953	0.1410	0.1413
-0.4535	0.1783	0.1769	0.6678	0.1292	0.1296	1.7890	0.1286	0.1294	2.9103	0.1421	0.1424
-0.4385	0.1780	0.1766	0.6827	0.1292	0.1296	1.8040	0.1291	0.1300	2.9252	0.1428	0.1432
-0.4236	0.1773	0.1759	0.6977	0.1290	0.1295	1.8189	0.1291	0.1300	2.9402	0.1428	0.1432
-0.4086	0.1761	0.1755	0.7126	0.1289	0.1294	1.8339	0.1291	0.1300	2.9551	0.1428	0.1432
-0.3937	0.1754	0.1749	0.7276	0.1289	0.1294	1.8488	0.1291	0.1300	2.9701	0.1436	0.1433
									3.0000	0.1448	0.1445

Tabla 4.32: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario E.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0665	0.0814	-0.3787	0.0653	0.0639	0.7425	0.0546	0.0540	1.8638	0.0526	0.0522
-1.4850	0.0665	0.0813	-0.3638	0.0651	0.0639	0.7575	0.0546	0.0540	1.8787	0.0526	0.0522
-1.4701	0.0662	0.0813	-0.3488	0.0651	0.0639	0.7724	0.0546	0.0538	1.8937	0.0526	0.0522
-1.4551	0.0663	0.0813	-0.3339	0.0651	0.0639	0.7874	0.0545	0.0536	1.9086	0.0528	0.0522
-1.4402	0.0661	0.0813	-0.3189	0.0650	0.0638	0.8023	0.0543	0.0536	1.9236	0.0528	0.0522
-1.4252	0.0660	0.0813	-0.3040	0.0646	0.0635	0.8173	0.0538	0.0524	1.9385	0.0537	0.0528
-1.4103	0.0656	0.0813	-0.2890	0.0646	0.0635	0.8322	0.0535	0.0520	1.9535	0.0538	0.0528
-1.3953	0.0652	0.0813	-0.2741	0.0645	0.0635	0.8472	0.0534	0.0520	1.9684	0.0538	0.0528
-1.3804	0.0652	0.0813	-0.2591	0.0645	0.0635	0.8621	0.0530	0.0515	1.9834	0.0538	0.0528
-1.3654	0.0652	0.0813	-0.2442	0.0645	0.0635	0.8771	0.0528	0.0515	1.9983	0.0539	0.0528
-1.3505	0.0651	0.0813	-0.2292	0.0645	0.0635	0.8920	0.0526	0.0514	2.0133	0.0542	0.0528
-1.3355	0.0651	0.0813	-0.2143	0.0645	0.0635	0.9070	0.0522	0.0514	2.0282	0.0542	0.0528
-1.3206	0.0652	0.0813	-0.1993	0.0643	0.0633	0.9219	0.0521	0.0512	2.0432	0.0542	0.0528
-1.3056	0.0647	0.0810	-0.1844	0.0642	0.0632	0.9369	0.0520	0.0512	2.0581	0.0544	0.0529
-1.2907	0.0644	0.0809	-0.1694	0.0642	0.0632	0.9518	0.0518	0.0508	2.0731	0.0544	0.0528
-1.2757	0.0643	0.0809	-0.1545	0.0641	0.0631	0.9668	0.0518	0.0508	2.0880	0.0544	0.0535
-1.2608	0.0643	0.0809	-0.1395	0.0633	0.0627	0.9817	0.0518	0.0508	2.1030	0.0544	0.0535
-1.2458	0.0643	0.0808	-0.1246	0.0627	0.0623	0.9967	0.0518	0.0509	2.1179	0.0545	0.0535
-1.2309	0.0637	0.0808	-0.1096	0.0619	0.0618	1.0116	0.0513	0.0506	2.1329	0.0546	0.0535
-1.2159	0.0635	0.0806	-0.0947	0.0618	0.0617	1.0266	0.0514	0.0506	2.1478	0.0546	0.0535
-1.2010	0.0635	0.0806	-0.0797	0.0618	0.0617	1.0415	0.0514	0.0506	2.1628	0.0546	0.0535
-1.1860	0.0635	0.0806	-0.0648	0.0617	0.0617	1.0565	0.0515	0.0507	2.1777	0.0547	0.0535
-1.1711	0.0635	0.0806	-0.0498	0.0617	0.0617	1.0714	0.0515	0.0507	2.1927	0.0548	0.0536
-1.1561	0.0634	0.0806	-0.0349	0.0617	0.0617	1.0864	0.0514	0.0506	2.2076	0.0549	0.0536
-1.1412	0.0633	0.0806	-0.0199	0.0616	0.0616	1.1013	0.0514	0.0506	2.2226	0.0549	0.0536
-1.1262	0.0630	0.0802	-0.0050	0.0616	0.0616	1.1163	0.0514	0.0506	2.2375	0.0555	0.0536
-1.1113	0.0628	0.0802	0.0100	0.0614	0.0614	1.1312	0.0514	0.0506	2.2525	0.0557	0.0536
-1.0963	0.0628	0.0802	0.0249	0.0612	0.0612	1.1462	0.0513	0.0506	2.2674	0.0557	0.0536
-1.0814	0.0628	0.0802	0.0399	0.0612	0.0612	1.1611	0.0514	0.0506	2.2824	0.0558	0.0540
-1.0664	0.0620	0.0792	0.0548	0.0611	0.0612	1.1761	0.0514	0.0506	2.2973	0.0558	0.0540
-1.0515	0.0621	0.0790	0.0698	0.0611	0.0612	1.1910	0.0512	0.0504	2.3123	0.0558	0.0540
-1.0365	0.0622	0.0790	0.0847	0.0605	0.0606	1.2060	0.0512	0.0505	2.3272	0.0560	0.0540
-1.0216	0.0619	0.0785	0.0997	0.0605	0.0606	1.2209	0.0512	0.0505	2.3422	0.0560	0.0540
-1.0066	0.0614	0.0780	0.1146	0.0604	0.0606	1.2359	0.0512	0.0505	2.3571	0.0561	0.0538
-0.9917	0.0908	0.0780	0.1296	0.0604	0.0606	1.2508	0.0514	0.0507	2.3721	0.0561	0.0538
-0.9767	0.0890	0.0769	0.1445	0.0603	0.0606	1.2658	0.0514	0.0507	2.3870	0.0561	0.0538
-0.9618	0.0890	0.0769	0.1595	0.0602	0.0606	1.2807	0.0515	0.0507	2.4020	0.0562	0.0538
-0.9468	0.0887	0.0762	0.1744	0.0602	0.0606	1.2957	0.0515	0.0510	2.4169	0.0565	0.0541
-0.9319	0.0878	0.0762	0.1894	0.0601	0.0605	1.3106	0.0516	0.0510	2.4319	0.0566	0.0545
-0.9169	0.0863	0.0754	0.2043	0.0600	0.0604	1.3256	0.0508	0.0504	2.4468	0.0566	0.0545
-0.9020	0.0846	0.0739	0.2193	0.0597	0.0600	1.3405	0.0508	0.0504	2.4618	0.0566	0.0545
-0.8870	0.0836	0.0733	0.2342	0.0593	0.0597	1.3555	0.0509	0.0507	2.4767	0.0566	0.0545
-0.8721	0.0824	0.0724	0.2492	0.0589	0.0593	1.3704	0.0509	0.0507	2.4917	0.0567	0.0545
-0.8571	0.0819	0.0723	0.2641	0.0588	0.0592	1.3854	0.0509	0.0507	2.5066	0.0568	0.0545
-0.8422	0.0815	0.0722	0.2791	0.0586	0.0591	1.4003	0.0511	0.0508	2.5216	0.0568	0.0545
-0.8272	0.0800	0.0710	0.2940	0.0586	0.0590	1.4153	0.0511	0.0508	2.5365	0.0573	0.0545
-0.8123	0.0794	0.0710	0.3090	0.0585	0.0590	1.4302	0.0512	0.0511	2.5515	0.0573	0.0545
-0.7973	0.0781	0.0703	0.3239	0.0582	0.0589	1.4452	0.0512	0.0511	2.5664	0.0573	0.0545
-0.7824	0.0778	0.0695	0.3389	0.0582	0.0588	1.4601	0.0513	0.0512	2.5814	0.0574	0.0558
-0.7674	0.0764	0.0695	0.3538	0.0580	0.0586	1.4751	0.0515	0.0515	2.5963	0.0584	0.0558
-0.7525	0.0758	0.0695	0.3688	0.0579	0.0584	1.4900	0.0516	0.0516	2.6113	0.0588	0.0558
-0.7375	0.0754	0.0695	0.3837	0.0576	0.0584	1.5050	0.0517	0.0516	2.6262	0.0590	0.0558
-0.7226	0.0749	0.0688	0.3987	0.0576	0.0584	1.5199	0.0517	0.0516	2.6412	0.0590	0.0558
-0.7076	0.0747	0.0688	0.4136	0.0572	0.0579	1.5349	0.0517	0.0517	2.6561	0.0591	0.0558
-0.6927	0.0744	0.0688	0.4286	0.0572	0.0579	1.5498	0.0517	0.0517	2.6711	0.0592	0.0558
-0.6777	0.0735	0.0682	0.4435	0.0572	0.0578	1.5648	0.0517	0.0517	2.6860	0.0592	0.0558
-0.6628	0.0728	0.0671	0.4585	0.0572	0.0578	1.5797	0.0519	0.0517	2.7010	0.0592	0.0560
-0.6478	0.0724	0.0670	0.4734	0.0572	0.0574	1.5947	0.0520	0.0517	2.7159	0.0592	0.0560
-0.6329	0.0721	0.0670	0.4884	0.0572	0.0574	1.6096	0.0522	0.0517	2.7309	0.0594	0.0560
-0.6179	0.0714	0.0670	0.5033	0.0570	0.0574	1.6246	0.0522	0.0519	2.7458	0.0597	0.0562
-0.6030	0.0710	0.0670	0.5183	0.0568	0.0572	1.6395	0.0523	0.0519	2.7608	0.0597	0.0562
-0.5880	0.0704	0.0666	0.5332	0.0567	0.0571	1.6545	0.0523	0.0520	2.7757	0.0597	0.0562
-0.5731	0.0701	0.0666	0.5482	0.0558	0.0559	1.6694	0.0523	0.0520	2.7907	0.0598	0.0562
-0.5581	0.0698	0.0664	0.5631	0.0557	0.0559	1.6844	0.0522	0.0520	2.8056	0.0603	0.0569
-0.5432	0.0695	0.0661	0.5781	0.0557	0.0559	1.6993	0.0524	0.0520	2.8206	0.0603	0.0569
-0.5282	0.0692	0.0659	0.5930	0.0558	0.0559	1.7143	0.0525	0.0521	2.8355	0.0603	0.0569
-0.5133	0.0688	0.0659	0.6080	0.0558	0.0559	1.7292	0.0524	0.0520	2.8505	0.0603	0.0569
-0.4983	0.0681	0.0656	0.6229	0.0558	0.0552	1.7442	0.0524	0.0520	2.8654	0.0604	0.0569
-0.4834	0.0681	0.0655	0.6379	0.0558	0.0551	1.7591	0.0524	0.0520	2.8804	0.0607	0.0569
-0.4684	0.0678	0.0655	0.6528	0.0554	0.0551	1.7741	0.0524	0.0520	2.8953	0.0607	0.0569
-0.4535	0.0677	0.0655	0.6678	0.0554	0.0551	1.7890	0.0524	0.0520	2.9103	0.0611	0.0571
-0.4385	0.0674	0.0655	0.6827	0.0554	0.0551	1.8040	0.0524	0.0520	2.9252	0.0611	0.0571
-0.4236	0.0670	0.0654	0.6977	0.0551	0.0551	1.8189	0.0523	0.0519	2.9402	0.0611	0.0571
-0.4086	0.0658	0.0644	0.7126	0.0551	0.0545	1.8339	0.0524	0.0522	2.9551	0.0611	0.0571
-0.3937	0.0657	0.0644	0.7276	0.0546	0.0540	1.8488	0.0524	0.0522	2.9701	0.0612	0.0571
									3.0000	0.0615	0.0572

Tabla 4.33: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$. Escenario F.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0897	0.0994	-0.3787	0.0814	0.0802	0.7425	0.0730	0.0724	1.8638	0.0776	0.0775
-1.4850	0.0896	0.0993	-0.3638	0.0812	0.0802	0.7575	0.0729	0.0723	1.8787	0.0776	0.0776
-1.4701	0.0893	0.0993	-0.3488	0.0812	0.0801	0.7724	0.0729	0.0722	1.8937	0.0777	0.0776
-1.4551	0.0892	0.0993	-0.3339	0.0812	0.0801	0.7874	0.0729	0.0722	1.9086	0.0778	0.0776
-1.4402	0.0892	0.0992	-0.3189	0.0811	0.0801	0.8023	0.0728	0.0722	1.9236	0.0780	0.0776
-1.4252	0.0888	0.0991	-0.3040	0.0805	0.0796	0.8173	0.0720	0.0712	1.9385	0.0789	0.0782
-1.4103	0.0880	0.0990	-0.2890	0.0805	0.0796	0.8322	0.0719	0.0710	1.9535	0.0790	0.0782
-1.3953	0.0879	0.0990	-0.2741	0.0805	0.0796	0.8472	0.0719	0.0710	1.9684	0.0790	0.0781
-1.3804	0.0879	0.0990	-0.2591	0.0805	0.0796	0.8621	0.0716	0.0710	1.9834	0.0790	0.0781
-1.3654	0.0879	0.0989	-0.2442	0.0805	0.0796	0.8771	0.0717	0.0710	1.9983	0.0792	0.0781
-1.3505	0.0877	0.0989	-0.2292	0.0805	0.0796	0.8920	0.0717	0.0710	2.0133	0.0794	0.0781
-1.3355	0.0877	0.0989	-0.2143	0.0805	0.0796	0.9070	0.0714	0.0710	2.0282	0.0796	0.0783
-1.3206	0.0878	0.0989	-0.1993	0.0803	0.0795	0.9219	0.0714	0.0710	2.0432	0.0796	0.0783
-1.3056	0.0873	0.0986	-0.1844	0.0803	0.0794	0.9369	0.0714	0.0710	2.0581	0.0800	0.0785
-1.2907	0.0868	0.0983	-0.1694	0.0803	0.0794	0.9518	0.0713	0.0708	2.0731	0.0800	0.0784
-1.2757	0.0865	0.0982	-0.1545	0.0803	0.0794	0.9668	0.0713	0.0707	2.0880	0.0801	0.0789
-1.2608	0.0865	0.0982	-0.1395	0.0799	0.0791	0.9817	0.0712	0.0707	2.1030	0.0802	0.0789
-1.2458	0.0869	0.0981	-0.1246	0.0797	0.0790	0.9967	0.0712	0.0709	2.1179	0.0802	0.0789
-1.2309	0.0866	0.0980	-0.1096	0.0792	0.0790	1.0116	0.0711	0.0708	2.1329	0.0807	0.0789
-1.2159	0.0861	0.0977	-0.0947	0.0792	0.0790	1.0266	0.0712	0.0709	2.1478	0.0808	0.0789
-1.2010	0.0861	0.0977	-0.0797	0.0790	0.0790	1.0415	0.0712	0.0709	2.1628	0.0808	0.0789
-1.1860	0.0861	0.0977	-0.0648	0.0790	0.0790	1.0565	0.0715	0.0712	2.1777	0.0810	0.0789
-1.1711	0.0862	0.0977	-0.0498	0.0790	0.0789	1.0714	0.0716	0.0712	2.1927	0.0812	0.0790
-1.1561	0.0864	0.0976	-0.0349	0.0789	0.0789	1.0864	0.0716	0.0712	2.2076	0.0812	0.0790
-1.1412	0.0862	0.0976	-0.0199	0.0789	0.0789	1.1013	0.0714	0.0712	2.2226	0.0812	0.0790
-1.1262	0.0858	0.0972	-0.0050	0.0789	0.0789	1.1163	0.0715	0.0714	2.2375	0.0814	0.0790
-1.1113	0.0852	0.0969	0.0100	0.0788	0.0788	1.1312	0.0715	0.0714	2.2525	0.0819	0.0790
-1.0963	0.0854	0.0969	0.0249	0.0788	0.0788	1.1462	0.0714	0.0714	2.2674	0.0819	0.0790
-1.0814	0.0852	0.0969	0.0399	0.0788	0.0788	1.1611	0.0716	0.0714	2.2824	0.0820	0.0796
-1.0664	0.0848	0.0957	0.0548	0.0788	0.0788	1.1761	0.0716	0.0714	2.2973	0.0820	0.0796
-1.0515	0.0849	0.0951	0.0698	0.0788	0.0788	1.1910	0.0716	0.0714	2.3123	0.0820	0.0796
-1.0365	0.0852	0.0950	0.0847	0.0784	0.0784	1.2060	0.0715	0.0718	2.3272	0.0822	0.0796
-1.0216	0.0846	0.0942	0.0997	0.0782	0.0784	1.2209	0.0715	0.0718	2.3422	0.0825	0.0798
-1.0066	0.0843	0.0936	0.1146	0.0781	0.0784	1.2359	0.0720	0.0718	2.3571	0.0826	0.0798
-0.9917	0.1052	0.0936	0.1296	0.0781	0.0784	1.2508	0.0725	0.0723	2.3721	0.0826	0.0798
-0.9767	0.1034	0.0925	0.1445	0.0781	0.0784	1.2658	0.0725	0.0723	2.3870	0.0828	0.0798
-0.9618	0.1034	0.0925	0.1595	0.0781	0.0784	1.2807	0.0725	0.0723	2.4020	0.0828	0.0798
-0.9468	0.1028	0.0916	0.1744	0.0781	0.0783	1.2957	0.0725	0.0726	2.4169	0.0836	0.0805
-0.9319	0.1018	0.0916	0.1894	0.0780	0.0782	1.3106	0.0727	0.0726	2.4319	0.0837	0.0808
-0.9169	0.1002	0.0906	0.2043	0.0778	0.0781	1.3256	0.0722	0.0722	2.4468	0.0837	0.0808
-0.9020	0.0987	0.0897	0.2193	0.0775	0.0776	1.3405	0.0722	0.0722	2.4618	0.0837	0.0808
-0.8870	0.0978	0.0888	0.2342	0.0772	0.0774	1.3555	0.0723	0.0728	2.4767	0.0837	0.0808
-0.8721	0.0968	0.0881	0.2492	0.0772	0.0774	1.3704	0.0723	0.0728	2.4917	0.0838	0.0808
-0.8571	0.0960	0.0880	0.2641	0.0771	0.0774	1.3854	0.0723	0.0728	2.5066	0.0838	0.0808
-0.8422	0.0950	0.0875	0.2791	0.0769	0.0774	1.4003	0.0729	0.0732	2.5216	0.0838	0.0808
-0.8272	0.0937	0.0869	0.2940	0.0768	0.0772	1.4153	0.0729	0.0732	2.5365	0.0840	0.0808
-0.8123	0.0932	0.0869	0.3090	0.0768	0.0772	1.4302	0.0735	0.0742	2.5515	0.0840	0.0808
-0.7973	0.0922	0.0862	0.3239	0.0764	0.0771	1.4452	0.0735	0.0742	2.5664	0.0842	0.0808
-0.7824	0.0920	0.0853	0.3389	0.0764	0.0771	1.4601	0.0736	0.0742	2.5814	0.0842	0.0814
-0.7674	0.0907	0.0853	0.3538	0.0762	0.0768	1.4751	0.0738	0.0750	2.5963	0.0848	0.0814
-0.7525	0.0903	0.0853	0.3688	0.0762	0.0768	1.4900	0.0739	0.0751	2.6113	0.0851	0.0814
-0.7375	0.0900	0.0853	0.3837	0.0758	0.0766	1.5050	0.0743	0.0751	2.6262	0.0853	0.0814
-0.7226	0.0897	0.0851	0.3987	0.0756	0.0764	1.5199	0.0743	0.0752	2.6412	0.0855	0.0814
-0.7076	0.0895	0.0851	0.4136	0.0749	0.0755	1.5349	0.0743	0.0754	2.6561	0.0856	0.0814
-0.6927	0.0891	0.0849	0.4286	0.0749	0.0755	1.5498	0.0743	0.0754	2.6711	0.0858	0.0814
-0.6777	0.0880	0.0846	0.4435	0.0749	0.0755	1.5648	0.0744	0.0756	2.6860	0.0858	0.0814
-0.6628	0.0868	0.0826	0.4585	0.0748	0.0755	1.5797	0.0745	0.0757	2.7010	0.0858	0.0819
-0.6478	0.0864	0.0824	0.4734	0.0748	0.0747	1.5947	0.0747	0.0760	2.7159	0.0861	0.0819
-0.6329	0.0860	0.0824	0.4884	0.0748	0.0747	1.6096	0.0754	0.0760	2.7309	0.0867	0.0819
-0.6179	0.0856	0.0824	0.5033	0.0744	0.0747	1.6246	0.0755	0.0764	2.7458	0.0870	0.0822
-0.6030	0.0855	0.0824	0.5183	0.0744	0.0747	1.6395	0.0760	0.0766	2.7608	0.0870	0.0822
-0.5880	0.0851	0.0820	0.5332	0.0742	0.0745	1.6545	0.0762	0.0768	2.7757	0.0870	0.0822
-0.5731	0.0847	0.0820	0.5482	0.0736	0.0735	1.6694	0.0762	0.0768	2.7907	0.0871	0.0822
-0.5581	0.0846	0.0820	0.5631	0.0736	0.0735	1.6844	0.0761	0.0769	2.8056	0.0880	0.0833
-0.5432	0.0845	0.0816	0.5781	0.0736	0.0735	1.6993	0.0764	0.0769	2.8206	0.0880	0.0833
-0.5282	0.0844	0.0814	0.5930	0.0736	0.0735	1.7143	0.0767	0.0771	2.8355	0.0880	0.0833
-0.5133	0.0842	0.0814	0.6080	0.0736	0.0735	1.7292	0.0766	0.0770	2.8505	0.0880	0.0834
-0.4983	0.0837	0.0811	0.6229	0.0742	0.0733	1.7442	0.0766	0.0772	2.8654	0.0880	0.0834
-0.4834	0.0837	0.0811	0.6379	0.0742	0.0733	1.7591	0.0768	0.0772	2.8804	0.0887	0.0834
-0.4684	0.0833	0.0811	0.6528	0.0739	0.0733	1.7741	0.0769	0.0772	2.8953	0.0887	0.0834
-0.4535	0.0832	0.0811	0.6678	0.0739	0.0733	1.7890	0.0769	0.0772	2.9103	0.0888	0.0835
-0.4385	0.0830	0.0811	0.6827	0.0739	0.0733	1.8040	0.0769	0.0772	2.9252	0.0888	0.0835
-0.4236	0.0828	0.0811	0.6977	0.0734	0.0732	1.8189	0.0769	0.0772	2.9402	0.0888	0.0835
-0.4086	0.0818	0.0805	0.7126	0.0734	0.0728	1.8339	0.0773	0.0775	2.9551	0.0888	0.0835
-0.3937	0.0816	0.0805	0.7276	0.0730	0.0724	1.8488	0.0773	0.0775	2.9701	0.0888	0.0835
									3.0000	0.0892	0.0835

Tabla 4.34: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario F.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1280	0.1442	-0.3787	0.1144	0.1129	0.7425	0.1094	0.1103	1.8638	0.1390	0.1426
-1.4850	0.1280	0.1426	-0.3638	0.1142	0.1129	0.7575	0.1106	0.1114	1.8787	0.1390	0.1429
-1.4701	0.1255	0.1426	-0.3488	0.1142	0.1128	0.7724	0.1106	0.1114	1.8937	0.1390	0.1429
-1.4551	0.1254	0.1426	-0.3339	0.1143	0.1128	0.7874	0.1114	0.1122	1.9086	0.1397	0.1429
-1.4402	0.1253	0.1421	-0.3189	0.1140	0.1128	0.8023	0.1113	0.1122	1.9236	0.1406	0.1429
-1.4252	0.1233	0.1402	-0.3040	0.1138	0.1127	0.8173	0.1111	0.1120	1.9385	0.1412	0.1430
-1.4103	0.1216	0.1401	-0.2890	0.1137	0.1127	0.8322	0.1111	0.1120	1.9535	0.1412	0.1430
-1.3953	0.1213	0.1396	-0.2741	0.1137	0.1127	0.8472	0.1112	0.1125	1.9684	0.1414	0.1430
-1.3804	0.1214	0.1392	-0.2591	0.1136	0.1126	0.8621	0.1112	0.1125	1.9834	0.1414	0.1430
-1.3654	0.1213	0.1391	-0.2442	0.1136	0.1126	0.8771	0.1112	0.1125	1.9983	0.1414	0.1430
-1.3505	0.1212	0.1387	-0.2292	0.1135	0.1126	0.8920	0.1112	0.1125	2.0133	0.1415	0.1430
-1.3355	0.1213	0.1387	-0.2143	0.1135	0.1126	0.9070	0.1112	0.1125	2.0282	0.1424	0.1440
-1.3206	0.1202	0.1386	-0.1993	0.1135	0.1126	0.9219	0.1112	0.1125	2.0432	0.1432	0.1448
-1.3056	0.1197	0.1383	-0.1844	0.1136	0.1126	0.9369	0.1112	0.1125	2.0581	0.1447	0.1456
-1.2907	0.1196	0.1378	-0.1694	0.1136	0.1126	0.9518	0.1112	0.1125	2.0731	0.1447	0.1456
-1.2757	0.1183	0.1367	-0.1545	0.1136	0.1126	0.9668	0.1114	0.1125	2.0880	0.1448	0.1457
-1.2608	0.1186	0.1367	-0.1395	0.1131	0.1126	0.9817	0.1114	0.1125	2.1030	0.1454	0.1457
-1.2458	0.1194	0.1366	-0.1246	0.1129	0.1126	0.9967	0.1116	0.1133	2.1179	0.1456	0.1457
-1.2309	0.1190	0.1358	-0.1096	0.1128	0.1126	1.0116	0.1116	0.1132	2.1329	0.1461	0.1457
-1.2159	0.1183	0.1348	-0.0947	0.1127	0.1126	1.0266	0.1129	0.1146	2.1478	0.1463	0.1457
-1.2010	0.1182	0.1348	-0.0797	0.1125	0.1123	1.0415	0.1132	0.1148	2.1628	0.1463	0.1457
-1.1860	0.1182	0.1348	-0.0648	0.1125	0.1123	1.0565	0.1137	0.1154	2.1777	0.1467	0.1457
-1.1711	0.1184	0.1348	-0.0498	0.1125	0.1123	1.0714	0.1139	0.1154	2.1927	0.1467	0.1457
-1.1561	0.1186	0.1344	-0.0349	0.1123	0.1123	1.0864	0.1139	0.1154	2.2076	0.1468	0.1458
-1.1412	0.1188	0.1344	-0.0199	0.1121	0.1121	1.1013	0.1139	0.1154	2.2226	0.1468	0.1458
-1.1262	0.1200	0.1344	-0.0050	0.1121	0.1121	1.1163	0.1148	0.1171	2.2375	0.1473	0.1461
-1.1113	0.1192	0.1338	0.0100	0.1121	0.1121	1.1312	0.1148	0.1172	2.2525	0.1477	0.1461
-1.0963	0.1198	0.1338	0.0249	0.1120	0.1120	1.1462	0.1149	0.1172	2.2674	0.1480	0.1462
-1.0814	0.1200	0.1338	0.0399	0.1119	0.1119	1.1611	0.1151	0.1172	2.2824	0.1480	0.1463
-1.0664	0.1207	0.1321	0.0548	0.1119	0.1119	1.1761	0.1152	0.1173	2.2973	0.1487	0.1463
-1.0515	0.1217	0.1310	0.0698	0.1119	0.1119	1.1910	0.1152	0.1173	2.3123	0.1491	0.1463
-1.0365	0.1246	0.1308	0.0847	0.1119	0.1119	1.2060	0.1152	0.1189	2.3272	0.1493	0.1463
-1.0216	0.1260	0.1304	0.0997	0.1119	0.1119	1.2209	0.1152	0.1189	2.3422	0.1502	0.1472
-1.0066	0.1266	0.1300	0.1146	0.1119	0.1119	1.2359	0.1162	0.1189	2.3571	0.1502	0.1472
-0.9917	0.1445	0.1297	0.1296	0.1119	0.1119	1.2508	0.1172	0.1202	2.3721	0.1503	0.1472
-0.9767	0.1435	0.1289	0.1445	0.1119	0.1119	1.2658	0.1172	0.1202	2.3870	0.1505	0.1472
-0.9618	0.1432	0.1289	0.1595	0.1116	0.1119	1.2807	0.1173	0.1202	2.4020	0.1508	0.1472
-0.9468	0.1422	0.1289	0.1744	0.1116	0.1118	1.2957	0.1178	0.1216	2.4169	0.1508	0.1473
-0.9319	0.1406	0.1281	0.1894	0.1115	0.1118	1.3106	0.1185	0.1216	2.4319	0.1508	0.1473
-0.9169	0.1389	0.1270	0.2043	0.1115	0.1118	1.3256	0.1185	0.1216	2.4468	0.1508	0.1473
-0.9020	0.1363	0.1256	0.2193	0.1115	0.1118	1.3405	0.1187	0.1220	2.4618	0.1508	0.1473
-0.8870	0.1352	0.1244	0.2342	0.1115	0.1118	1.3555	0.1189	0.1228	2.4767	0.1509	0.1473
-0.8721	0.1341	0.1242	0.2492	0.1115	0.1120	1.3704	0.1189	0.1228	2.4917	0.1510	0.1473
-0.8571	0.1332	0.1240	0.2641	0.1115	0.1119	1.3854	0.1191	0.1228	2.5066	0.1510	0.1473
-0.8422	0.1314	0.1224	0.2791	0.1114	0.1119	1.4003	0.1210	0.1239	2.5216	0.1510	0.1477
-0.8272	0.1304	0.1222	0.2940	0.1113	0.1117	1.4153	0.1210	0.1245	2.5365	0.1511	0.1477
-0.8123	0.1298	0.1222	0.3090	0.1113	0.1117	1.4302	0.1221	0.1260	2.5515	0.1512	0.1478
-0.7973	0.1297	0.1221	0.3239	0.1110	0.1116	1.4452	0.1224	0.1260	2.5664	0.1517	0.1481
-0.7824	0.1294	0.1214	0.3389	0.1110	0.1116	1.4601	0.1241	0.1277	2.5814	0.1522	0.1484
-0.7674	0.1284	0.1214	0.3538	0.1108	0.1114	1.4751	0.1254	0.1300	2.5963	0.1522	0.1484
-0.7525	0.1274	0.1214	0.3688	0.1108	0.1114	1.4900	0.1254	0.1301	2.6113	0.1522	0.1484
-0.7375	0.1272	0.1214	0.3837	0.1098	0.1105	1.5050	0.1258	0.1301	2.6262	0.1524	0.1484
-0.7226	0.1270	0.1214	0.3987	0.1093	0.1100	1.5199	0.1258	0.1318	2.6412	0.1527	0.1484
-0.7076	0.1267	0.1214	0.4136	0.1090	0.1095	1.5349	0.1258	0.1320	2.6561	0.1528	0.1484
-0.6927	0.1250	0.1206	0.4286	0.1090	0.1095	1.5498	0.1258	0.1320	2.6711	0.1528	0.1484
-0.6777	0.1245	0.1205	0.4435	0.1090	0.1095	1.5648	0.1275	0.1338	2.6860	0.1530	0.1484
-0.6628	0.1238	0.1195	0.4585	0.1089	0.1095	1.5797	0.1276	0.1340	2.7010	0.1530	0.1485
-0.6478	0.1236	0.1195	0.4734	0.1088	0.1093	1.5947	0.1291	0.1369	2.7159	0.1531	0.1485
-0.6329	0.1229	0.1195	0.4884	0.1088	0.1092	1.6096	0.1309	0.1369	2.7309	0.1535	0.1486
-0.6179	0.1227	0.1194	0.5033	0.1086	0.1092	1.6246	0.1309	0.1384	2.7458	0.1540	0.1490
-0.6030	0.1224	0.1174	0.5183	0.1086	0.1092	1.6395	0.1324	0.1388	2.7608	0.1540	0.1493
-0.5880	0.1195	0.1158	0.5332	0.1082	0.1089	1.6545	0.1336	0.1402	2.7757	0.1540	0.1493
-0.5731	0.1186	0.1158	0.5482	0.1079	0.1086	1.6694	0.1338	0.1404	2.7907	0.1543	0.1493
-0.5581	0.1180	0.1154	0.5631	0.1080	0.1087	1.6844	0.1338	0.1411	2.8056	0.1547	0.1497
-0.5432	0.1174	0.1152	0.5781	0.1079	0.1087	1.6993	0.1343	0.1411	2.8206	0.1547	0.1497
-0.5282	0.1176	0.1152	0.5930	0.1078	0.1087	1.7143	0.1358	0.1423	2.8355	0.1553	0.1503
-0.5133	0.1172	0.1152	0.6080	0.1078	0.1087	1.7292	0.1359	0.1423	2.8505	0.1556	0.1514
-0.4983	0.1155	0.1135	0.6229	0.1092	0.1103	1.7442	0.1359	0.1424	2.8654	0.1564	0.1523
-0.4834	0.1154	0.1134	0.6379	0.1092	0.1103	1.7591	0.1364	0.1424	2.8804	0.1572	0.1531
-0.4684	0.1150	0.1134	0.6528	0.1090	0.1103	1.7741	0.1374	0.1424	2.8953	0.1575	0.1532
-0.4535	0.1150	0.1134	0.6678	0.1094	0.1103	1.7890	0.1374	0.1424	2.9103	0.1580	0.1534
-0.4385	0.1149	0.1134	0.6827	0.1094	0.1103	1.8040	0.1379	0.1425	2.9252	0.1584	0.1534
-0.4236	0.1149	0.1134	0.6977	0.1094	0.1103	1.8189	0.1379	0.1425	2.9402	0.1586	0.1534
-0.4086	0.1146	0.1133	0.7126	0.1093	0.1103	1.8339	0.1385	0.1426	2.9551	0.1587	0.1534
-0.3937	0.1146	0.1133	0.7276	0.1093	0.1103	1.8488	0.1385	0.1426	2.9701	0.1587	0.1534
									3.0000	0.1592	0.1539

Tabla 4.35: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario F.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1140	0.1772	-0.3787	0.1289	0.1268	0.7425	0.1227	0.1240	1.8638	0.1595	0.1628
-1.4850	0.1140	0.1746	-0.3638	0.1280	0.1268	0.7575	0.1237	0.1250	1.8787	0.1595	0.1631
-1.4701	0.1105	0.1746	-0.3488	0.1276	0.1264	0.7724	0.1237	0.1250	1.8937	0.1595	0.1631
-1.4551	0.1105	0.1746	-0.3339	0.1277	0.1264	0.7874	0.1244	0.1256	1.9086	0.1600	0.1631
-1.4402	0.1104	0.1740	-0.3189	0.1275	0.1264	0.8023	0.1243	0.1256	1.9236	0.1620	0.1631
-1.4252	0.1070	0.1706	-0.3040	0.1271	0.1263	0.8173	0.1243	0.1256	1.9385	0.1624	0.1631
-1.4103	0.1052	0.1705	-0.2890	0.1270	0.1263	0.8322	0.1243	0.1256	1.9535	0.1624	0.1631
-1.3953	0.1040	0.1694	-0.2741	0.1269	0.1263	0.8472	0.1244	0.1262	1.9684	0.1624	0.1631
-1.3804	0.1042	0.1689	-0.2591	0.1268	0.1262	0.8621	0.1244	0.1262	1.9834	0.1626	0.1632
-1.3654	0.1040	0.1688	-0.2442	0.1267	0.1262	0.8771	0.1244	0.1262	1.9983	0.1626	0.1632
-1.3505	0.1039	0.1681	-0.2292	0.1267	0.1262	0.8920	0.1244	0.1262	2.0133	0.1626	0.1632
-1.3355	0.1038	0.1681	-0.2143	0.1267	0.1262	0.9070	0.1245	0.1262	2.0282	0.1634	0.1640
-1.3206	0.1024	0.1680	-0.1993	0.1268	0.1262	0.9219	0.1245	0.1262	2.0432	0.1648	0.1653
-1.3056	0.1021	0.1679	-0.1844	0.1268	0.1262	0.9369	0.1245	0.1263	2.0581	0.1653	0.1656
-1.2907	0.1029	0.1674	-0.1694	0.1268	0.1262	0.9518	0.1246	0.1263	2.0731	0.1653	0.1656
-1.2757	0.1018	0.1662	-0.1545	0.1268	0.1262	0.9668	0.1250	0.1263	2.0880	0.1655	0.1656
-1.2608	0.1021	0.1662	-0.1395	0.1265	0.1262	0.9817	0.1250	0.1263	2.1030	0.1664	0.1656
-1.2458	0.1029	0.1662	-0.1246	0.1264	0.1262	0.9967	0.1255	0.1268	2.1179	0.1664	0.1656
-1.2309	0.1019	0.1644	-0.1096	0.1262	0.1262	1.0116	0.1255	0.1268	2.1329	0.1664	0.1656
-1.2159	0.1010	0.1639	-0.0947	0.1262	0.1262	1.0266	0.1276	0.1288	2.1478	0.1665	0.1657
-1.2010	0.1010	0.1639	-0.0797	0.1253	0.1253	1.0415	0.1286	0.1296	2.1628	0.1665	0.1657
-1.1860	0.1014	0.1639	-0.0648	0.1254	0.1253	1.0565	0.1288	0.1298	2.1777	0.1667	0.1657
-1.1711	0.1018	0.1639	-0.0498	0.1253	0.1253	1.0714	0.1289	0.1298	2.1927	0.1668	0.1657
-1.1561	0.1022	0.1636	-0.0349	0.1253	0.1253	1.0864	0.1290	0.1298	2.2076	0.1677	0.1666
-1.1412	0.1033	0.1636	-0.0199	0.1246	0.1246	1.1013	0.1290	0.1298	2.2226	0.1677	0.1666
-1.1262	0.1050	0.1636	-0.0050	0.1246	0.1246	1.1163	0.1302	0.1318	2.2375	0.1680	0.1671
-1.1113	0.1058	0.1632	0.0100	0.1246	0.1246	1.1312	0.1303	0.1319	2.2525	0.1684	0.1675
-1.0963	0.1080	0.1632	0.0249	0.1246	0.1246	1.1462	0.1303	0.1319	2.2674	0.1697	0.1685
-1.0814	0.1098	0.1632	0.0399	0.1243	0.1243	1.1611	0.1306	0.1319	2.2824	0.1697	0.1685
-1.0664	0.1131	0.1623	0.0548	0.1243	0.1243	1.1761	0.1306	0.1320	2.2973	0.1700	0.1685
-1.0515	0.1146	0.1609	0.0698	0.1243	0.1243	1.1910	0.1307	0.1320	2.3123	0.1703	0.1685
-1.0365	0.1206	0.1609	0.0847	0.1243	0.1243	1.2060	0.1308	0.1332	2.3272	0.1704	0.1685
-1.0216	0.1270	0.1608	0.0997	0.1243	0.1243	1.2209	0.1308	0.1332	2.3422	0.1719	0.1698
-1.0066	0.1308	0.1607	0.1146	0.1243	0.1243	1.2359	0.1314	0.1332	2.3571	0.1719	0.1698
-0.9917	0.1715	0.1597	0.1296	0.1243	0.1243	1.2508	0.1319	0.1343	2.3721	0.1719	0.1698
-0.9767	0.1707	0.1592	0.1445	0.1243	0.1243	1.2658	0.1319	0.1343	2.3870	0.1720	0.1698
-0.9618	0.1701	0.1592	0.1595	0.1243	0.1243	1.2807	0.1320	0.1343	2.4020	0.1728	0.1698
-0.9468	0.1691	0.1592	0.1744	0.1243	0.1243	1.2957	0.1324	0.1351	2.4169	0.1728	0.1698
-0.9319	0.1674	0.1579	0.1894	0.1243	0.1243	1.3106	0.1328	0.1351	2.4319	0.1728	0.1698
-0.9169	0.1666	0.1573	0.2043	0.1243	0.1243	1.3256	0.1328	0.1350	2.4468	0.1728	0.1698
-0.9020	0.1637	0.1552	0.2193	0.1242	0.1243	1.3405	0.1330	0.1358	2.4618	0.1728	0.1698
-0.8870	0.1626	0.1550	0.2342	0.1242	0.1242	1.3555	0.1333	0.1367	2.4767	0.1729	0.1698
-0.8721	0.1611	0.1549	0.2492	0.1244	0.1245	1.3704	0.1333	0.1367	2.4917	0.1729	0.1698
-0.8571	0.1606	0.1547	0.2641	0.1244	0.1245	1.3854	0.1338	0.1367	2.5066	0.1733	0.1702
-0.8422	0.1599	0.1541	0.2791	0.1243	0.1245	1.4003	0.1358	0.1382	2.5216	0.1733	0.1711
-0.8272	0.1590	0.1538	0.2940	0.1243	0.1244	1.4153	0.1358	0.1391	2.5365	0.1733	0.1711
-0.8123	0.1588	0.1538	0.3090	0.1243	0.1244	1.4302	0.1363	0.1397	2.5515	0.1736	0.1714
-0.7973	0.1589	0.1538	0.3239	0.1242	0.1244	1.4452	0.1370	0.1397	2.5664	0.1750	0.1726
-0.7824	0.1586	0.1537	0.3389	0.1242	0.1244	1.4601	0.1409	0.1436	2.5814	0.1762	0.1735
-0.7674	0.1578	0.1537	0.3538	0.1241	0.1244	1.4751	0.1426	0.1466	2.5963	0.1762	0.1735
-0.7525	0.1567	0.1536	0.3688	0.1241	0.1244	1.4900	0.1427	0.1466	2.6113	0.1764	0.1735
-0.7375	0.1567	0.1536	0.3837	0.1234	0.1236	1.5050	0.1429	0.1466	2.6262	0.1766	0.1735
-0.7226	0.1567	0.1536	0.3987	0.1228	0.1230	1.5199	0.1430	0.1496	2.6412	0.1766	0.1735
-0.7076	0.1567	0.1536	0.4136	0.1227	0.1230	1.5349	0.1430	0.1499	2.6561	0.1768	0.1735
-0.6927	0.1559	0.1534	0.4286	0.1227	0.1230	1.5498	0.1430	0.1499	2.6711	0.1768	0.1735
-0.6777	0.1558	0.1534	0.4435	0.1226	0.1230	1.5648	0.1452	0.1523	2.6860	0.1771	0.1737
-0.6628	0.1555	0.1532	0.4585	0.1226	0.1230	1.5797	0.1453	0.1524	2.7010	0.1771	0.1737
-0.6478	0.1554	0.1532	0.4734	0.1225	0.1229	1.5947	0.1470	0.1557	2.7159	0.1771	0.1737
-0.6329	0.1548	0.1532	0.4884	0.1224	0.1229	1.6096	0.1487	0.1557	2.7309	0.1782	0.1744
-0.6179	0.1546	0.1531	0.5033	0.1223	0.1229	1.6246	0.1488	0.1580	2.7458	0.1804	0.1766
-0.6030	0.1542	0.1448	0.5183	0.1223	0.1229	1.6395	0.1508	0.1583	2.7608	0.1804	0.1773
-0.5880	0.1411	0.1358	0.5332	0.1220	0.1229	1.6545	0.1531	0.1601	2.7757	0.1804	0.1774
-0.5731	0.1372	0.1356	0.5482	0.1220	0.1229	1.6694	0.1538	0.1608	2.7907	0.1807	0.1774
-0.5581	0.1343	0.1327	0.5631	0.1221	0.1229	1.6844	0.1538	0.1613	2.8056	0.1812	0.1779
-0.5432	0.1336	0.1324	0.5781	0.1219	0.1229	1.6993	0.1541	0.1613	2.8206	0.1812	0.1790
-0.5282	0.1340	0.1324	0.5930	0.1216	0.1229	1.7143	0.1558	0.1625	2.8355	0.1844	0.1828
-0.5133	0.1338	0.1324	0.6080	0.1216	0.1229	1.7292	0.1559	0.1625	2.8505	0.1868	0.1888
-0.4983	0.1308	0.1294	0.6229	0.1224	0.1239	1.7442	0.1559	0.1627	2.8654	0.1901	0.1921
-0.4834	0.1301	0.1287	0.6379	0.1224	0.1239	1.7591	0.1566	0.1628	2.8804	0.1938	0.1946
-0.4684	0.1300	0.1287	0.6528	0.1224	0.1239	1.7741	0.1579	0.1628	2.8953	0.1951	0.1950
-0.4535	0.1300	0.1287	0.6678	0.1226	0.1239	1.7890	0.1579	0.1628	2.9103	0.1965	0.1954
-0.4385	0.1300	0.1287	0.6827	0.1226	0.1239	1.8040	0.1584	0.1628	2.9252	0.1985	0.1954
-0.4236	0.1300	0.1287	0.6977	0.1226	0.1239	1.8189	0.1584	0.1628	2.9402	0.1989	0.1954
-0.4086	0.1299	0.1287	0.7126	0.1226	0.1239	1.8339	0.1591	0.1628	2.9551	0.1996	0.1954
-0.3937	0.1300	0.1287	0.7276	0.1226	0.1239	1.8488	0.1592	0.1628	2.9701	0.1996	0.1954
									3.0000	0.2003	0.1969

Tabla 4.36: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario F.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0914	0.2076	-0.3787	0.1350	0.1319	0.7425	0.1264	0.1275	1.8638	0.1599	0.1629
-1.4850	0.0911	0.2046	-0.3638	0.1328	0.1319	0.7575	0.1275	0.1285	1.8787	0.1599	0.1630
-1.4701	0.0878	0.2045	-0.3488	0.1326	0.1316	0.7724	0.1275	0.1285	1.8937	0.1599	0.1630
-1.4551	0.0878	0.2045	-0.3339	0.1326	0.1316	0.7874	0.1279	0.1289	1.9086	0.1602	0.1630
-1.4402	0.0877	0.2042	-0.3189	0.1322	0.1316	0.8023	0.1279	0.1289	1.9236	0.1614	0.1630
-1.4252	0.0854	0.2017	-0.3040	0.1316	0.1313	0.8173	0.1279	0.1289	1.9385	0.1618	0.1630
-1.4103	0.0832	0.2016	-0.2890	0.1315	0.1313	0.8322	0.1279	0.1289	1.9535	0.1618	0.1630
-1.3953	0.0820	0.2003	-0.2741	0.1315	0.1313	0.8472	0.1279	0.1292	1.9684	0.1618	0.1630
-1.3804	0.0824	0.1999	-0.2591	0.1313	0.1312	0.8621	0.1279	0.1292	1.9834	0.1622	0.1634
-1.3654	0.0822	0.1999	-0.2442	0.1313	0.1312	0.8771	0.1279	0.1292	1.9983	0.1622	0.1634
-1.3505	0.0822	0.1993	-0.2292	0.1313	0.1312	0.8920	0.1279	0.1292	2.0133	0.1622	0.1634
-1.3355	0.0821	0.1993	-0.2143	0.1313	0.1312	0.9070	0.1279	0.1292	2.0282	0.1628	0.1639
-1.3206	0.0804	0.1992	-0.1993	0.1313	0.1312	0.9219	0.1279	0.1292	2.0432	0.1644	0.1656
-1.3056	0.0802	0.1990	-0.1844	0.1313	0.1312	0.9369	0.1279	0.1292	2.0581	0.1647	0.1657
-1.2907	0.0818	0.1984	-0.1694	0.1313	0.1312	0.9518	0.1279	0.1292	2.0731	0.1647	0.1657
-1.2757	0.0814	0.1973	-0.1545	0.1313	0.1312	0.9668	0.1283	0.1292	2.0880	0.1649	0.1657
-1.2608	0.0815	0.1973	-0.1395	0.1312	0.1312	0.9817	0.1283	0.1292	2.1030	0.1659	0.1657
-1.2458	0.0822	0.1973	-0.1246	0.1312	0.1312	0.9967	0.1286	0.1297	2.1179	0.1660	0.1657
-1.2309	0.0811	0.1956	-0.1096	0.1311	0.1312	1.0116	0.1286	0.1297	2.1329	0.1660	0.1657
-1.2159	0.0810	0.1954	-0.0947	0.1311	0.1312	1.0266	0.1305	0.1316	2.1478	0.1661	0.1658
-1.2010	0.0819	0.1954	-0.0797	0.1294	0.1295	1.0415	0.1314	0.1324	2.1628	0.1661	0.1658
-1.1860	0.0823	0.1954	-0.0648	0.1296	0.1295	1.0565	0.1315	0.1324	2.1777	0.1661	0.1658
-1.1711	0.0838	0.1954	-0.0498	0.1296	0.1295	1.0714	0.1317	0.1324	2.1927	0.1661	0.1658
-1.1561	0.0847	0.1948	-0.0349	0.1295	0.1295	1.0864	0.1318	0.1324	2.2076	0.1682	0.1679
-1.1412	0.0864	0.1948	-0.0199	0.1289	0.1289	1.1013	0.1318	0.1324	2.2226	0.1682	0.1679
-1.1262	0.0878	0.1947	-0.0050	0.1289	0.1289	1.1163	0.1324	0.1335	2.2375	0.1686	0.1681
-1.1113	0.0894	0.1943	0.0100	0.1289	0.1289	1.1312	0.1325	0.1336	2.2525	0.1688	0.1684
-1.0963	0.0915	0.1943	0.0249	0.1289	0.1289	1.1462	0.1325	0.1336	2.2674	0.1712	0.1705
-1.0814	0.0951	0.1943	0.0399	0.1281	0.1281	1.1611	0.1327	0.1336	2.2824	0.1712	0.1705
-1.0664	0.1010	0.1938	0.0548	0.1281	0.1281	1.1761	0.1328	0.1337	2.2973	0.1718	0.1705
-1.0515	0.1040	0.1930	0.0698	0.1281	0.1281	1.1910	0.1331	0.1340	2.3123	0.1723	0.1705
-1.0365	0.1133	0.1930	0.0847	0.1281	0.1281	1.2060	0.1332	0.1343	2.3272	0.1724	0.1705
-1.0216	0.1242	0.1930	0.0997	0.1281	0.1281	1.2209	0.1332	0.1343	2.3422	0.1735	0.1714
-1.0066	0.1309	0.1930	0.1146	0.1281	0.1281	1.2359	0.1334	0.1343	2.3571	0.1735	0.1714
-0.9917	0.2020	0.1922	0.1296	0.1281	0.1281	1.2508	0.1336	0.1352	2.3721	0.1735	0.1714
-0.9767	0.2005	0.1921	0.1445	0.1281	0.1281	1.2658	0.1336	0.1352	2.3870	0.1737	0.1714
-0.9618	0.1995	0.1921	0.1595	0.1281	0.1281	1.2807	0.1336	0.1352	2.4020	0.1745	0.1714
-0.9468	0.1987	0.1921	0.1744	0.1281	0.1279	1.2957	0.1341	0.1358	2.4169	0.1745	0.1714
-0.9319	0.1966	0.1904	0.1894	0.1279	0.1279	1.3106	0.1345	0.1358	2.4319	0.1745	0.1714
-0.9169	0.1963	0.1903	0.2043	0.1279	0.1279	1.3256	0.1346	0.1358	2.4468	0.1745	0.1714
-0.9020	0.1940	0.1884	0.2193	0.1279	0.1279	1.3405	0.1348	0.1364	2.4618	0.1745	0.1714
-0.8870	0.1931	0.1882	0.2342	0.1279	0.1279	1.3555	0.1356	0.1374	2.4767	0.1745	0.1714
-0.8721	0.1922	0.1881	0.2492	0.1277	0.1277	1.3704	0.1356	0.1374	2.4917	0.1745	0.1714
-0.8571	0.1919	0.1881	0.2641	0.1277	0.1277	1.3854	0.1358	0.1374	2.5066	0.1754	0.1722
-0.8422	0.1915	0.1878	0.2791	0.1276	0.1277	1.4003	0.1380	0.1393	2.5216	0.1754	0.1733
-0.8272	0.1912	0.1878	0.2940	0.1276	0.1277	1.4153	0.1380	0.1402	2.5365	0.1754	0.1733
-0.8123	0.1910	0.1878	0.3090	0.1276	0.1277	1.4302	0.1382	0.1406	2.5515	0.1756	0.1735
-0.7973	0.1910	0.1878	0.3239	0.1276	0.1277	1.4452	0.1389	0.1408	2.5664	0.1787	0.1764
-0.7824	0.1910	0.1878	0.3389	0.1276	0.1277	1.4601	0.1419	0.1438	2.5814	0.1811	0.1784
-0.7674	0.1902	0.1878	0.3538	0.1276	0.1277	1.4751	0.1436	0.1471	2.5963	0.1811	0.1784
-0.7525	0.1895	0.1877	0.3688	0.1276	0.1277	1.4900	0.1436	0.1472	2.6113	0.1811	0.1784
-0.7375	0.1894	0.1877	0.3837	0.1272	0.1274	1.5050	0.1438	0.1472	2.6262	0.1812	0.1784
-0.7226	0.1894	0.1877	0.3987	0.1268	0.1270	1.5199	0.1439	0.1496	2.6412	0.1812	0.1784
-0.7076	0.1894	0.1877	0.4136	0.1266	0.1269	1.5349	0.1439	0.1496	2.6561	0.1812	0.1784
-0.6927	0.1888	0.1876	0.4286	0.1266	0.1269	1.5498	0.1439	0.1496	2.6711	0.1812	0.1784
-0.6777	0.1886	0.1875	0.4435	0.1265	0.1269	1.5648	0.1460	0.1522	2.6860	0.1815	0.1787
-0.6628	0.1885	0.1874	0.4585	0.1265	0.1269	1.5797	0.1461	0.1522	2.7010	0.1815	0.1787
-0.6478	0.1884	0.1874	0.4734	0.1265	0.1269	1.5947	0.1478	0.1561	2.7159	0.1815	0.1787
-0.6329	0.1882	0.1874	0.4884	0.1263	0.1269	1.6096	0.1491	0.1561	2.7309	0.1844	0.1810
-0.6179	0.1880	0.1874	0.5033	0.1263	0.1269	1.6246	0.1491	0.1577	2.7458	0.1883	0.1850
-0.6030	0.1877	0.1713	0.5183	0.1263	0.1269	1.6395	0.1505	0.1580	2.7608	0.1884	0.1857
-0.5880	0.1595	0.1501	0.5332	0.1262	0.1269	1.6545	0.1538	0.1608	2.7757	0.1884	0.1859
-0.5731	0.1510	0.1497	0.5482	0.1262	0.1269	1.6694	0.1544	0.1615	2.7907	0.1885	0.1859
-0.5581	0.1448	0.1434	0.5631	0.1262	0.1270	1.6844	0.1544	0.1620	2.8056	0.1896	0.1871
-0.5432	0.1439	0.1432	0.5781	0.1261	0.1270	1.6993	0.1545	0.1620	2.8206	0.1896	0.1894
-0.5282	0.1441	0.1432	0.5930	0.1259	0.1270	1.7143	0.1558	0.1628	2.8355	0.1969	0.1981
-0.5133	0.1437	0.1432	0.6080	0.1259	0.1270	1.7292	0.1560	0.1628	2.8505	0.2023	0.2118
-0.4983	0.1380	0.1372	0.6229	0.1263	0.1274	1.7442	0.1560	0.1629	2.8654	0.2098	0.2188
-0.4834	0.1369	0.1362	0.6379	0.1263	0.1274	1.7591	0.1572	0.1629	2.8804	0.2158	0.2233
-0.4684	0.1368	0.1362	0.6528	0.1263	0.1274	1.7741	0.1588	0.1629	2.8953	0.2187	0.2235
-0.4535	0.1368	0.1362	0.6678	0.1264	0.1274	1.7890	0.1588	0.1629	2.9103	0.2212	0.2241
-0.4385	0.1368	0.1362	0.6827	0.1264	0.1274	1.8040	0.1591	0.1629	2.9252	0.2247	0.2241
-0.4236	0.1368	0.1362	0.6977	0.1264	0.1274	1.8189	0.1591	0.1629	2.9402	0.2256	0.2241
-0.4086	0.1367	0.1362	0.7126	0.1264	0.1274	1.8339	0.1598	0.1629	2.9551	0.2269	0.2241
-0.3937	0.1371	0.1362	0.7276	0.1264	0.1274	1.8488	0.1598	0.1629	2.9701	0.2269	0.2241
									3.0000	0.2281	0.2256

Tabla 4.37: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \hat{p}(\tilde{\theta}), \hat{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\hat{p}(\tilde{\theta}), \hat{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario F.

λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\alpha}_{T_\lambda}$	$\hat{\alpha}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0013	0.2170	-0.3787	0.1443	0.1388	0.7425	0.0477	0.0448	1.8638	0.0588	0.0516
-1.4850	0.0015	0.2169	-0.3638	0.1401	0.1352	0.7575	0.0458	0.0429	1.8787	0.0592	0.0516
-1.4701	0.0015	0.2169	-0.3488	0.1390	0.1345	0.7724	0.0458	0.0429	1.8937	0.0594	0.0516
-1.4551	0.0015	0.2169	-0.3339	0.1378	0.1332	0.7874	0.0452	0.0429	1.9086	0.0595	0.0516
-1.4402	0.0015	0.2169	-0.3189	0.1360	0.1316	0.8023	0.0453	0.0428	1.9236	0.0601	0.0516
-1.4252	0.0018	0.2169	-0.3040	0.1360	0.1316	0.8173	0.0457	0.0428	1.9385	0.0601	0.0516
-1.4103	0.0018	0.2169	-0.2890	0.1334	0.1278	0.8322	0.0457	0.0428	1.9535	0.0601	0.0516
-1.3953	0.0022	0.2169	-0.2741	0.1274	0.1245	0.8472	0.0457	0.0428	1.9684	0.0601	0.0516
-1.3804	0.0022	0.2169	-0.2591	0.1229	0.1216	0.8621	0.0456	0.0427	1.9834	0.0602	0.0516
-1.3654	0.0022	0.2169	-0.2442	0.1169	0.1122	0.8771	0.0456	0.0426	1.9983	0.0602	0.0516
-1.3505	0.0022	0.2167	-0.2292	0.1149	0.1094	0.8920	0.0456	0.0426	2.0133	0.0614	0.0516
-1.3355	0.0023	0.2167	-0.2143	0.1110	0.1056	0.9070	0.0456	0.0427	2.0282	0.0614	0.0516
-1.3206	0.0034	0.2167	-0.1993	0.1107	0.1048	0.9219	0.0457	0.0439	2.0432	0.0614	0.0516
-1.3056	0.0034	0.2167	-0.1844	0.1074	0.1018	0.9369	0.0457	0.0439	2.0581	0.0614	0.0516
-1.2907	0.0034	0.2160	-0.1694	0.1068	0.1018	0.9518	0.0456	0.0439	2.0731	0.0617	0.0522
-1.2757	0.0040	0.2160	-0.1545	0.1043	0.1016	0.9668	0.0463	0.0446	2.0880	0.0617	0.0522
-1.2608	0.0040	0.2160	-0.1395	0.0985	0.0978	0.9817	0.0466	0.0448	2.1030	0.0622	0.0527
-1.2458	0.0046	0.2160	-0.1246	0.0968	0.0974	0.9967	0.0466	0.0450	2.1179	0.0632	0.0527
-1.2309	0.0054	0.2160	-0.1096	0.0964	0.0969	1.0116	0.0466	0.0450	2.1329	0.0633	0.0527
-1.2159	0.0057	0.2151	-0.0947	0.0936	0.0943	1.0266	0.0469	0.0450	2.1478	0.0637	0.0527
-1.2010	0.0068	0.2151	-0.0797	0.0918	0.0921	1.0415	0.0470	0.0451	2.1628	0.0643	0.0527
-1.1860	0.0076	0.2151	-0.0648	0.0878	0.0879	1.0565	0.0471	0.0468	2.1777	0.0643	0.0527
-1.1711	0.0086	0.2151	-0.0498	0.0824	0.0822	1.0714	0.0471	0.0469	2.1927	0.0647	0.0528
-1.1561	0.0097	0.2151	-0.0349	0.0796	0.0800	1.0864	0.0480	0.0475	2.2076	0.0660	0.0528
-1.1412	0.0116	0.2151	-0.0199	0.0783	0.0783	1.1013	0.0479	0.0474	2.2226	0.0662	0.0530
-1.1262	0.0117	0.2139	-0.0050	0.0775	0.0775	1.1163	0.0487	0.0479	2.2375	0.0662	0.0530
-1.1113	0.0143	0.2139	0.0100	0.0775	0.0775	1.1312	0.0487	0.0482	2.2525	0.0662	0.0530
-1.0963	0.0181	0.2139	0.0249	0.0750	0.0749	1.1462	0.0487	0.0482	2.2674	0.0664	0.0530
-1.0814	0.0209	0.2139	0.0399	0.0734	0.0734	1.1611	0.0490	0.0483	2.2824	0.0664	0.0530
-1.0664	0.0233	0.2137	0.0548	0.0734	0.0734	1.1761	0.0492	0.0495	2.2973	0.0664	0.0530
-1.0515	0.0264	0.2135	0.0698	0.0725	0.0724	1.1910	0.0496	0.0496	2.3123	0.0664	0.0530
-1.0365	0.0300	0.2135	0.0847	0.0724	0.0724	1.2060	0.0498	0.0496	2.3272	0.0672	0.0537
-1.0216	0.0356	0.2135	0.0997	0.0724	0.0724	1.2209	0.0498	0.0496	2.3422	0.0687	0.0552
-1.0066	0.0363	0.2123	0.1146	0.0720	0.0718	1.2359	0.0498	0.0496	2.3571	0.0687	0.0552
-0.9917	0.3278	0.2122	0.1296	0.0707	0.0701	1.2508	0.0498	0.0496	2.3721	0.0706	0.0553
-0.9767	0.3268	0.2122	0.1445	0.0686	0.0667	1.2658	0.0499	0.0506	2.3870	0.0710	0.0553
-0.9618	0.3216	0.2122	0.1595	0.0675	0.0667	1.2807	0.0501	0.0508	2.4020	0.0710	0.0553
-0.9468	0.3123	0.2122	0.1744	0.0675	0.0651	1.2957	0.0501	0.0508	2.4169	0.0710	0.0553
-0.9319	0.3092	0.2122	0.1894	0.0642	0.0620	1.3106	0.0500	0.0507	2.4319	0.0721	0.0558
-0.9169	0.3038	0.2122	0.2043	0.0613	0.0597	1.3256	0.0508	0.0507	2.4468	0.0722	0.0558
-0.9020	0.2978	0.2122	0.2193	0.0611	0.0595	1.3405	0.0508	0.0514	2.4618	0.0722	0.0558
-0.8870	0.2927	0.2106	0.2342	0.0593	0.0573	1.3555	0.0509	0.0514	2.4767	0.0732	0.0561
-0.8721	0.2873	0.2092	0.2492	0.0593	0.0573	1.3704	0.0509	0.0514	2.4917	0.0733	0.0562
-0.8571	0.2825	0.2091	0.2641	0.0592	0.0564	1.3854	0.0510	0.0514	2.5066	0.0736	0.0562
-0.8422	0.2761	0.2090	0.2791	0.0580	0.0553	1.4003	0.0510	0.0514	2.5216	0.0741	0.0566
-0.8272	0.2723	0.2090	0.2940	0.0572	0.0553	1.4153	0.0511	0.0515	2.5365	0.0741	0.0566
-0.8123	0.2677	0.2088	0.3090	0.0559	0.0545	1.4302	0.0520	0.0515	2.5515	0.0749	0.0574
-0.7973	0.2636	0.2088	0.3239	0.0555	0.0540	1.4452	0.0523	0.0516	2.5664	0.0749	0.0579
-0.7824	0.2582	0.2088	0.3389	0.0553	0.0538	1.4601	0.0521	0.0514	2.5814	0.0767	0.0580
-0.7674	0.2562	0.2078	0.3538	0.0556	0.0538	1.4751	0.0525	0.0510	2.5963	0.0767	0.0580
-0.7525	0.2524	0.2032	0.3688	0.0555	0.0539	1.4900	0.0525	0.0510	2.6113	0.0767	0.0583
-0.7375	0.2472	0.2025	0.3837	0.0548	0.0532	1.5050	0.0526	0.0510	2.6262	0.0775	0.0589
-0.7226	0.2410	0.2022	0.3987	0.0542	0.0532	1.5199	0.0530	0.0510	2.6412	0.0775	0.0594
-0.7076	0.2376	0.2018	0.4136	0.0521	0.0511	1.5349	0.0541	0.0510	2.6561	0.0801	0.0615
-0.6927	0.2360	0.2015	0.4286	0.0521	0.0511	1.5498	0.0541	0.0511	2.6711	0.0813	0.0632
-0.6777	0.2317	0.2008	0.4435	0.0521	0.0511	1.5648	0.0542	0.0512	2.6860	0.0813	0.0652
-0.6628	0.2312	0.2006	0.4585	0.0514	0.0504	1.5797	0.0542	0.0512	2.7010	0.0828	0.0657
-0.6478	0.2264	0.1969	0.4734	0.0514	0.0504	1.5947	0.0542	0.0512	2.7159	0.0828	0.0671
-0.6329	0.2183	0.1894	0.4884	0.0514	0.0499	1.6096	0.0544	0.0512	2.7309	0.0831	0.0679
-0.6179	0.2125	0.1870	0.5033	0.0513	0.0498	1.6246	0.0546	0.0512	2.7458	0.0842	0.0679
-0.6030	0.2098	0.1864	0.5183	0.0514	0.0498	1.6395	0.0546	0.0512	2.7608	0.0842	0.0682
-0.5880	0.2080	0.1863	0.5332	0.0514	0.0491	1.6545	0.0554	0.0516	2.7757	0.0852	0.0683
-0.5731	0.2041	0.1853	0.5482	0.0511	0.0491	1.6694	0.0554	0.0516	2.7907	0.0856	0.0684
-0.5581	0.2033	0.1853	0.5631	0.0510	0.0490	1.6844	0.0554	0.0516	2.8056	0.0862	0.0698
-0.5432	0.2001	0.1838	0.5781	0.0497	0.0472	1.6993	0.0554	0.0516	2.8206	0.0870	0.0699
-0.5282	0.1927	0.1753	0.5930	0.0497	0.0472	1.7143	0.0570	0.0516	2.8355	0.0891	0.0718
-0.5133	0.1811	0.1665	0.6080	0.0497	0.0472	1.7292	0.0570	0.0516	2.8505	0.0891	0.0719
-0.4983	0.1802	0.1653	0.6229	0.0491	0.0466	1.7442	0.0570	0.0516	2.8654	0.0897	0.0723
-0.4834	0.1769	0.1636	0.6379	0.0494	0.0453	1.7591	0.0570	0.0516	2.8804	0.0897	0.0726
-0.4684	0.1754	0.1636	0.6528	0.0492	0.0451	1.7741	0.0571	0.0516	2.8953	0.0900	0.0743
-0.4535	0.1734	0.1622	0.6678	0.0477	0.0446	1.7890	0.0581	0.0516	2.9103	0.0913	0.0743
-0.4385	0.1710	0.1613	0.6827	0.0477	0.0446	1.8040	0.0581	0.0516	2.9252	0.0915	0.0743
-0.4236	0.1684	0.1592	0.6977	0.0477	0.0446	1.8189	0.0583	0.0516	2.9402	0.0919	0.0743
-0.4086	0.1569	0.1542	0.7126	0.0477	0.0442	1.8339	0.0587	0.0516	2.9551	0.0951	0.0762
-0.3937	0.1496	0.1446	0.7276	0.0478	0.0450	1.8488	0.0587	0.0516	2.9701	0.0959	0.0782
									3.0000	0.0965	0.0782

Tabla 4.38: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\tilde{\theta}), p(\hat{\theta}))$. Escenario G.

λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}
-1.5000	0.0036	0.1928	-0.3787	0.1586	0.1523	0.7425	0.0692	0.0657	1.8638	0.0875	0.0785
-1.4850	0.0038	0.1928	-0.3638	0.1559	0.1503	0.7575	0.0669	0.0633	1.8787	0.0878	0.0785
-1.4701	0.0038	0.1928	-0.3488	0.1550	0.1498	0.7724	0.0669	0.0634	1.8937	0.0880	0.0785
-1.4551	0.0038	0.1928	-0.3339	0.1540	0.1485	0.7874	0.0660	0.0634	1.9086	0.0884	0.0785
-1.4402	0.0038	0.1928	-0.3189	0.1531	0.1477	0.8023	0.0660	0.0632	1.9236	0.0887	0.0785
-1.4252	0.0044	0.1928	-0.3040	0.1531	0.1475	0.8173	0.0664	0.0632	1.9385	0.0887	0.0785
-1.4103	0.0044	0.1928	-0.2890	0.1511	0.1439	0.8322	0.0664	0.0632	1.9535	0.0888	0.0785
-1.3953	0.0052	0.1928	-0.2741	0.1454	0.1403	0.8472	0.0664	0.0632	1.9684	0.0888	0.0785
-1.3804	0.0052	0.1928	-0.2591	0.1418	0.1376	0.8621	0.0670	0.0638	1.9834	0.0889	0.0785
-1.3654	0.0052	0.1928	-0.2442	0.1380	0.1306	0.8771	0.0669	0.0638	1.9983	0.0889	0.0785
-1.3505	0.0052	0.1926	-0.2292	0.1363	0.1287	0.8920	0.0669	0.0638	2.0133	0.0905	0.0785
-1.3355	0.0054	0.1926	-0.2143	0.1331	0.1257	0.9070	0.0669	0.0640	2.0282	0.0905	0.0785
-1.3206	0.0072	0.1926	-0.1993	0.1330	0.1253	0.9219	0.0669	0.0654	2.0432	0.0906	0.0785
-1.3056	0.0072	0.1926	-0.1844	0.1314	0.1240	0.9369	0.0669	0.0654	2.0581	0.0906	0.0785
-1.2907	0.0072	0.1921	-0.1694	0.1301	0.1240	0.9518	0.0668	0.0654	2.0731	0.0909	0.0792
-1.2757	0.0076	0.1921	-0.1545	0.1277	0.1238	0.9668	0.0672	0.0662	2.0880	0.0909	0.0792
-1.2608	0.0076	0.1921	-0.1395	0.1223	0.1209	0.9817	0.0684	0.0673	2.1030	0.0921	0.0804
-1.2458	0.0086	0.1921	-0.1246	0.1204	0.1205	0.9967	0.0684	0.0678	2.1179	0.0925	0.0804
-1.2309	0.0098	0.1921	-0.1096	0.1196	0.1195	1.0116	0.0684	0.0678	2.1329	0.0926	0.0804
-1.2159	0.0106	0.1914	-0.0947	0.1149	0.1146	1.0266	0.0686	0.0678	2.1478	0.0934	0.0804
-1.2010	0.0124	0.1914	-0.0797	0.1128	0.1122	1.0415	0.0687	0.0684	2.1628	0.0939	0.0804
-1.1860	0.0140	0.1914	-0.0648	0.1088	0.1081	1.0565	0.0690	0.0710	2.1777	0.0939	0.0804
-1.1711	0.0152	0.1914	-0.0498	0.1040	0.1032	1.0714	0.0690	0.0717	2.1927	0.0949	0.0807
-1.1561	0.0169	0.1914	-0.0349	0.1020	0.1023	1.0864	0.0706	0.0735	2.2076	0.0963	0.0807
-1.1412	0.0196	0.1914	-0.0199	0.1010	0.1010	1.1013	0.0706	0.0735	2.2226	0.0968	0.0812
-1.1262	0.0200	0.1900	-0.0050	0.1007	0.1007	1.1163	0.0720	0.0744	2.2375	0.0968	0.0812
-1.1113	0.0243	0.1900	0.0100	0.1007	0.1007	1.1312	0.0720	0.0748	2.2525	0.0968	0.0812
-1.0963	0.0287	0.1900	0.0249	0.0994	0.0994	1.1462	0.0720	0.0748	2.2674	0.0972	0.0812
-1.0814	0.0318	0.1900	0.0399	0.0973	0.0973	1.1611	0.0726	0.0750	2.2824	0.0972	0.0812
-1.0664	0.0364	0.1899	0.0548	0.0973	0.0973	1.1761	0.0729	0.0766	2.2973	0.0972	0.0812
-1.0515	0.0410	0.1897	0.0698	0.0966	0.0965	1.1910	0.0732	0.0766	2.3123	0.0972	0.0812
-1.0365	0.0447	0.1897	0.0847	0.0965	0.0962	1.2060	0.0734	0.0766	2.3272	0.0979	0.0818
-1.0216	0.0528	0.1897	0.0997	0.0964	0.0962	1.2209	0.0738	0.0766	2.3422	0.0992	0.0834
-1.0066	0.0554	0.1880	0.1146	0.0956	0.0949	1.2359	0.0738	0.0763	2.3571	0.0992	0.0834
-0.9917	0.3021	0.1880	0.1296	0.0935	0.0926	1.2508	0.0738	0.0763	2.3721	0.1010	0.0834
-0.9767	0.3008	0.1880	0.1445	0.0928	0.0905	1.2658	0.0742	0.0769	2.3870	0.1013	0.0834
-0.9618	0.2930	0.1880	0.1595	0.0917	0.0905	1.2807	0.0744	0.0772	2.4020	0.1013	0.0835
-0.9468	0.2855	0.1880	0.1744	0.0917	0.0889	1.2957	0.0744	0.0772	2.4169	0.1013	0.0835
-0.9319	0.2818	0.1880	0.1894	0.0883	0.0856	1.3106	0.0742	0.0769	2.4319	0.1027	0.0845
-0.9169	0.2754	0.1880	0.2043	0.0841	0.0822	1.3256	0.0752	0.0769	2.4468	0.1029	0.0845
-0.9020	0.2703	0.1880	0.2193	0.0839	0.0820	1.3405	0.0752	0.0774	2.4618	0.1029	0.0845
-0.8870	0.2649	0.1876	0.2342	0.0827	0.0805	1.3555	0.0755	0.0774	2.4767	0.1040	0.0850
-0.8721	0.2590	0.1860	0.2492	0.0827	0.0805	1.3704	0.0756	0.0774	2.4917	0.1043	0.0852
-0.8571	0.2546	0.1860	0.2641	0.0826	0.0801	1.3854	0.0761	0.0774	2.5066	0.1045	0.0852
-0.8422	0.2492	0.1860	0.2791	0.0809	0.0786	1.4003	0.0761	0.0774	2.5216	0.1051	0.0858
-0.8272	0.2451	0.1860	0.2940	0.0800	0.0786	1.4153	0.0762	0.0776	2.5365	0.1051	0.0859
-0.8123	0.2424	0.1860	0.3090	0.0792	0.0780	1.4302	0.0772	0.0776	2.5515	0.1071	0.0879
-0.7973	0.2373	0.1860	0.3239	0.0780	0.0768	1.4452	0.0775	0.0777	2.5664	0.1074	0.0893
-0.7824	0.2320	0.1860	0.3389	0.0780	0.0767	1.4601	0.0775	0.0777	2.5814	0.1086	0.0895
-0.7674	0.2305	0.1854	0.3538	0.0781	0.0767	1.4751	0.0782	0.0770	2.5963	0.1086	0.0895
-0.7525	0.2262	0.1838	0.3688	0.0781	0.0773	1.4900	0.0782	0.0770	2.6113	0.1086	0.0908
-0.7375	0.2235	0.1838	0.3837	0.0774	0.0766	1.5050	0.0788	0.0770	2.6262	0.1108	0.0929
-0.7226	0.2194	0.1838	0.3987	0.0769	0.0766	1.5199	0.0795	0.0770	2.6412	0.1109	0.0941
-0.7076	0.2164	0.1837	0.4136	0.0750	0.0746	1.5349	0.0806	0.0770	2.6561	0.1143	0.0965
-0.6927	0.2157	0.1836	0.4286	0.0750	0.0746	1.5498	0.0806	0.0770	2.6711	0.1166	0.0998
-0.6777	0.2120	0.1827	0.4435	0.0750	0.0746	1.5648	0.0806	0.0771	2.6860	0.1166	0.1027
-0.6628	0.2115	0.1826	0.4585	0.0737	0.0733	1.5797	0.0806	0.0771	2.7010	0.1187	0.1037
-0.6478	0.2083	0.1804	0.4734	0.0737	0.0733	1.5947	0.0806	0.0771	2.7159	0.1191	0.1056
-0.6329	0.2049	0.1780	0.4884	0.0738	0.0724	1.6096	0.0809	0.0771	2.7309	0.1193	0.1068
-0.6179	0.2020	0.1775	0.5033	0.0740	0.0725	1.6246	0.0814	0.0771	2.7458	0.1207	0.1068
-0.6030	0.2000	0.1769	0.5183	0.0743	0.0726	1.6395	0.0814	0.0771	2.7608	0.1210	0.1075
-0.5880	0.1990	0.1769	0.5332	0.0743	0.0714	1.6545	0.0836	0.0782	2.7757	0.1223	0.1076
-0.5731	0.1960	0.1766	0.5482	0.0733	0.0714	1.6694	0.0836	0.0782	2.7907	0.1230	0.1079
-0.5581	0.1956	0.1766	0.5631	0.0733	0.0713	1.6844	0.0839	0.0782	2.8056	0.1232	0.1094
-0.5432	0.1936	0.1758	0.5781	0.0715	0.0686	1.6993	0.0839	0.0782	2.8206	0.1243	0.1096
-0.5282	0.1903	0.1716	0.5930	0.0715	0.0686	1.7143	0.0856	0.0782	2.8355	0.1264	0.1111
-0.5133	0.1843	0.1682	0.6080	0.0715	0.0686	1.7292	0.0856	0.0782	2.8505	0.1266	0.1115
-0.4983	0.1831	0.1680	0.6229	0.0714	0.0684	1.7442	0.0856	0.0782	2.8654	0.1272	0.1121
-0.4834	0.1806	0.1668	0.6379	0.0716	0.0671	1.7591	0.0856	0.0782	2.8804	0.1272	0.1128
-0.4684	0.1789	0.1668	0.6528	0.0716	0.0671	1.7741	0.0858	0.0784	2.8953	0.1280	0.1144
-0.4535	0.1776	0.1665	0.6678	0.0690	0.0655	1.7890	0.0866	0.0784	2.9103	0.1290	0.1145
-0.4385	0.1760	0.1659	0.6827	0.0690	0.0655	1.8040	0.0866	0.0784	2.9252	0.1301	0.1146
-0.4236	0.1735	0.1640	0.6977	0.0690	0.0655	1.8189	0.0868	0.0784	2.9402	0.1309	0.1146
-0.4086	0.1673	0.1613	0.7126	0.0692	0.0648	1.8339	0.0874	0.0785	2.9551	0.1327	0.1154
-0.3937	0.1610	0.1548	0.7276	0.0692	0.0658	1.8488	0.0874	0.0785	2.9701	0.1335	0.1171
									3.0000	0.1346	0.1171

Tabla 4.39: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario G.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0220	0.1508	-0.3787	0.1430	0.1415	0.7425	0.1121	0.1082	1.8638	0.1456	0.1327
-1.4850	0.0235	0.1508	-0.3638	0.1422	0.1409	0.7575	0.1108	0.1065	1.8787	0.1458	0.1327
-1.4701	0.0235	0.1508	-0.3488	0.1422	0.1409	0.7724	0.1108	0.1068	1.8937	0.1461	0.1327
-1.4551	0.0235	0.1506	-0.3339	0.1418	0.1406	0.7874	0.1099	0.1068	1.9086	0.1472	0.1327
-1.4402	0.0236	0.1506	-0.3189	0.1418	0.1406	0.8023	0.1099	0.1071	1.9236	0.1473	0.1327
-1.4252	0.0241	0.1506	-0.3040	0.1419	0.1406	0.8173	0.1106	0.1071	1.9385	0.1473	0.1327
-1.4103	0.0241	0.1506	-0.2890	0.1416	0.1389	0.8322	0.1106	0.1071	1.9535	0.1473	0.1327
-1.3953	0.0259	0.1506	-0.2741	0.1389	0.1376	0.8472	0.1106	0.1076	1.9684	0.1473	0.1327
-1.3804	0.0259	0.1506	-0.2591	0.1385	0.1364	0.8621	0.1129	0.1098	1.9834	0.1473	0.1327
-1.3654	0.0259	0.1506	-0.2442	0.1381	0.1350	0.8771	0.1130	0.1098	1.9983	0.1473	0.1327
-1.3505	0.0259	0.1505	-0.2292	0.1362	0.1336	0.8920	0.1130	0.1098	2.0133	0.1478	0.1327
-1.3355	0.0256	0.1505	-0.2143	0.1338	0.1306	0.9070	0.1132	0.1112	2.0282	0.1478	0.1327
-1.3206	0.0284	0.1505	-0.1993	0.1338	0.1304	0.9219	0.1132	0.1120	2.0432	0.1484	0.1328
-1.3056	0.0284	0.1505	-0.1844	0.1332	0.1295	0.9369	0.1132	0.1120	2.0581	0.1487	0.1328
-1.2907	0.0287	0.1505	-0.1694	0.1327	0.1295	0.9518	0.1132	0.1120	2.0731	0.1493	0.1346
-1.2757	0.0289	0.1505	-0.1545	0.1313	0.1292	0.9668	0.1133	0.1138	2.0880	0.1493	0.1346
-1.2608	0.0287	0.1501	-0.1395	0.1291	0.1286	0.9817	0.1164	0.1167	2.1030	0.1500	0.1352
-1.2458	0.0300	0.1501	-0.1246	0.1278	0.1281	0.9967	0.1164	0.1188	2.1179	0.1500	0.1352
-1.2309	0.0325	0.1501	-0.1096	0.1267	0.1267	1.0116	0.1164	0.1188	2.1329	0.1506	0.1353
-1.2159	0.0352	0.1500	-0.0947	0.1245	0.1244	1.0266	0.1169	0.1188	2.1478	0.1512	0.1353
-1.2010	0.0361	0.1500	-0.0797	0.1236	0.1234	1.0415	0.1174	0.1206	2.1628	0.1522	0.1353
-1.1860	0.0404	0.1500	-0.0648	0.1231	0.1229	1.0565	0.1206	0.1242	2.1777	0.1522	0.1353
-1.1711	0.0424	0.1500	-0.0498	0.1219	0.1218	1.0714	0.1206	0.1256	2.1927	0.1544	0.1363
-1.1561	0.0439	0.1500	-0.0349	0.1215	0.1216	1.0864	0.1240	0.1293	2.2076	0.1550	0.1365
-1.1412	0.0470	0.1500	-0.0199	0.1214	0.1215	1.1013	0.1240	0.1293	2.2226	0.1591	0.1406
-1.1262	0.0504	0.1498	-0.0050	0.1214	0.1215	1.1163	0.1252	0.1309	2.2375	0.1591	0.1406
-1.1113	0.0541	0.1498	0.0100	0.1214	0.1214	1.1312	0.1252	0.1318	2.2525	0.1591	0.1406
-1.0963	0.0614	0.1498	0.0249	0.1212	0.1212	1.1462	0.1252	0.1318	2.2674	0.1592	0.1406
-1.0814	0.0668	0.1498	0.0399	0.1211	0.1211	1.1611	0.1274	0.1319	2.2824	0.1592	0.1406
-1.0664	0.0709	0.1498	0.0548	0.1211	0.1210	1.1761	0.1275	0.1322	2.2973	0.1595	0.1408
-1.0515	0.0835	0.1489	0.0698	0.1206	0.1202	1.1910	0.1275	0.1322	2.3123	0.1595	0.1408
-1.0365	0.0902	0.1483	0.0847	0.1202	0.1196	1.2060	0.1275	0.1322	2.3272	0.1600	0.1413
-1.0216	0.1111	0.1483	0.0997	0.1198	0.1192	1.2209	0.1280	0.1322	2.3422	0.1602	0.1427
-1.0066	0.1221	0.1479	0.1146	0.1183	0.1171	1.2359	0.1280	0.1310	2.3571	0.1602	0.1427
-0.9917	0.2592	0.1479	0.1296	0.1163	0.1150	1.2508	0.1280	0.1310	2.3721	0.1606	0.1428
-0.9767	0.2561	0.1479	0.1445	0.1162	0.1137	1.2658	0.1307	0.1312	2.3870	0.1610	0.1428
-0.9618	0.2423	0.1479	0.1595	0.1151	0.1137	1.2807	0.1307	0.1312	2.4020	0.1610	0.1431
-0.9468	0.2331	0.1472	0.1744	0.1151	0.1130	1.2957	0.1307	0.1312	2.4169	0.1611	0.1433
-0.9319	0.2260	0.1472	0.1894	0.1141	0.1120	1.3106	0.1299	0.1305	2.4319	0.1637	0.1459
-0.9169	0.2170	0.1472	0.2043	0.1127	0.1116	1.3256	0.1300	0.1305	2.4468	0.1652	0.1459
-0.9020	0.2114	0.1472	0.2193	0.1127	0.1116	1.3405	0.1300	0.1305	2.4618	0.1652	0.1459
-0.8870	0.2067	0.1472	0.2342	0.1125	0.1113	1.3555	0.1303	0.1305	2.4767	0.1658	0.1474
-0.8721	0.2004	0.1464	0.2492	0.1125	0.1113	1.3704	0.1303	0.1305	2.4917	0.1679	0.1493
-0.8571	0.1968	0.1464	0.2641	0.1125	0.1111	1.3854	0.1324	0.1305	2.5066	0.1679	0.1493
-0.8422	0.1937	0.1464	0.2791	0.1110	0.1099	1.4003	0.1324	0.1305	2.5216	0.1683	0.1515
-0.8272	0.1897	0.1464	0.2940	0.1113	0.1099	1.4153	0.1324	0.1306	2.5365	0.1686	0.1521
-0.8123	0.1881	0.1464	0.3090	0.1110	0.1098	1.4302	0.1328	0.1306	2.5515	0.1725	0.1561
-0.7973	0.1844	0.1464	0.3239	0.1105	0.1093	1.4452	0.1328	0.1306	2.5664	0.1731	0.1586
-0.7824	0.1804	0.1464	0.3389	0.1106	0.1090	1.4601	0.1328	0.1306	2.5814	0.1734	0.1586
-0.7674	0.1789	0.1464	0.3538	0.1106	0.1090	1.4751	0.1329	0.1288	2.5963	0.1738	0.1586
-0.7525	0.1758	0.1460	0.3688	0.1109	0.1092	1.4900	0.1329	0.1288	2.6113	0.1738	0.1611
-0.7375	0.1738	0.1460	0.3837	0.1109	0.1087	1.5050	0.1346	0.1288	2.6262	0.1777	0.1650
-0.7226	0.1721	0.1460	0.3987	0.1104	0.1089	1.5199	0.1348	0.1291	2.6412	0.1784	0.1680
-0.7076	0.1684	0.1460	0.4136	0.1099	0.1084	1.5349	0.1358	0.1291	2.6561	0.1819	0.1703
-0.6927	0.1684	0.1460	0.4286	0.1104	0.1089	1.5498	0.1358	0.1291	2.6711	0.1865	0.1750
-0.6777	0.1654	0.1456	0.4435	0.1105	0.1091	1.5648	0.1358	0.1291	2.6860	0.1865	0.1781
-0.6628	0.1650	0.1456	0.4585	0.1084	0.1069	1.5797	0.1359	0.1291	2.7010	0.1891	0.1783
-0.6478	0.1627	0.1452	0.4734	0.1094	0.1082	1.5947	0.1359	0.1291	2.7159	0.1920	0.1811
-0.6329	0.1622	0.1452	0.4884	0.1096	0.1082	1.6096	0.1363	0.1291	2.7309	0.1920	0.1818
-0.6179	0.1601	0.1452	0.5033	0.1106	0.1089	1.6246	0.1376	0.1291	2.7458	0.1930	0.1818
-0.6030	0.1595	0.1451	0.5183	0.1111	0.1092	1.6395	0.1376	0.1291	2.7608	0.1952	0.1843
-0.5880	0.1594	0.1451	0.5332	0.1115	0.1082	1.6545	0.1411	0.1305	2.7757	0.1958	0.1848
-0.5731	0.1573	0.1451	0.5482	0.1106	0.1082	1.6694	0.1411	0.1305	2.7907	0.1995	0.1880
-0.5581	0.1572	0.1451	0.5631	0.1107	0.1082	1.6844	0.1411	0.1305	2.8056	0.1995	0.1884
-0.5432	0.1548	0.1448	0.5781	0.1100	0.1069	1.6993	0.1411	0.1305	2.8206	0.2015	0.1909
-0.5282	0.1542	0.1442	0.5930	0.1100	0.1069	1.7143	0.1418	0.1305	2.8355	0.2054	0.1991
-0.5133	0.1516	0.1439	0.6080	0.1094	0.1069	1.7292	0.1418	0.1305	2.8505	0.2090	0.2036
-0.4983	0.1513	0.1439	0.6229	0.1116	0.1088	1.7442	0.1430	0.1316	2.8654	0.2129	0.2078
-0.4834	0.1494	0.1438	0.6379	0.1117	0.1082	1.7591	0.1430	0.1316	2.8804	0.2131	0.2115
-0.4684	0.1490	0.1438	0.6528	0.1117	0.1082	1.7741	0.1436	0.1323	2.8953	0.2163	0.2131
-0.4535	0.1476	0.1438	0.6678	0.1106	0.1072	1.7890	0.1438	0.1323	2.9103	0.2174	0.2134
-0.4385	0.1473	0.1438	0.6827	0.1114	0.1080	1.8040	0.1438	0.1323	2.9252	0.2198	0.2144
-0.4236	0.1458	0.1430	0.6977	0.1114	0.1080	1.8189	0.1438	0.1323	2.9402	0.2221	0.2144
-0.4086	0.1445	0.1424	0.7126	0.1116	0.1079	1.8339	0.1455	0.1327	2.9551	0.2229	0.2146
-0.3937	0.1432	0.1416	0.7276	0.1116	0.1082	1.8488	0.1455	0.1327	2.9701	0.2255	0.2149
									3.0000	0.2284	0.2149

Tabla 4.40: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario G.

λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}
-1.5000	0.0347	0.1512	-0.3787	0.1423	0.1424	0.7425	0.1351	0.1312	1.8638	0.1707	0.1588
-1.4850	0.0378	0.1512	-0.3638	0.1422	0.1424	0.7575	0.1356	0.1306	1.8787	0.1708	0.1588
-1.4701	0.0377	0.1512	-0.3488	0.1421	0.1424	0.7724	0.1356	0.1310	1.8937	0.1709	0.1588
-1.4551	0.0377	0.1499	-0.3339	0.1419	0.1424	0.7874	0.1355	0.1310	1.9086	0.1718	0.1588
-1.4402	0.0379	0.1498	-0.3189	0.1418	0.1424	0.8023	0.1355	0.1315	1.9236	0.1718	0.1588
-1.4252	0.0381	0.1498	-0.3040	0.1422	0.1422	0.8173	0.1357	0.1315	1.9385	0.1718	0.1588
-1.4103	0.0381	0.1498	-0.2890	0.1421	0.1416	0.8322	0.1357	0.1315	1.9535	0.1718	0.1588
-1.3953	0.0403	0.1498	-0.2741	0.1416	0.1414	0.8472	0.1357	0.1326	1.9684	0.1718	0.1588
-1.3804	0.0403	0.1498	-0.2591	0.1413	0.1408	0.8621	0.1391	0.1360	1.9834	0.1718	0.1588
-1.3654	0.0403	0.1498	-0.2442	0.1412	0.1372	0.8771	0.1392	0.1360	1.9983	0.1718	0.1588
-1.3505	0.0403	0.1498	-0.2292	0.1363	0.1349	0.8920	0.1392	0.1360	2.0133	0.1720	0.1588
-1.3355	0.0401	0.1498	-0.2143	0.1313	0.1278	0.9070	0.1396	0.1377	2.0282	0.1720	0.1588
-1.3206	0.0424	0.1498	-0.1993	0.1313	0.1265	0.9219	0.1396	0.1377	2.0432	0.1731	0.1593
-1.3056	0.0424	0.1498	-0.1844	0.1290	0.1229	0.9369	0.1396	0.1377	2.0581	0.1737	0.1593
-1.2907	0.0430	0.1498	-0.1694	0.1288	0.1229	0.9518	0.1396	0.1377	2.0731	0.1741	0.1608
-1.2757	0.0432	0.1498	-0.1545	0.1278	0.1217	0.9668	0.1397	0.1393	2.0880	0.1741	0.1608
-1.2608	0.0429	0.1490	-0.1395	0.1232	0.1214	0.9817	0.1428	0.1424	2.1030	0.1744	0.1610
-1.2458	0.0436	0.1490	-0.1246	0.1216	0.1206	0.9967	0.1428	0.1442	2.1179	0.1744	0.1610
-1.2309	0.0478	0.1490	-0.1096	0.1186	0.1183	1.0116	0.1428	0.1442	2.1329	0.1767	0.1611
-1.2159	0.0513	0.1490	-0.0947	0.1174	0.1174	1.0266	0.1440	0.1443	2.1478	0.1769	0.1611
-1.2010	0.0514	0.1490	-0.0797	0.1170	0.1169	1.0415	0.1451	0.1460	2.1628	0.1780	0.1611
-1.1860	0.0558	0.1490	-0.0648	0.1169	0.1167	1.0565	0.1474	0.1483	2.1777	0.1780	0.1611
-1.1711	0.0590	0.1490	-0.0498	0.1166	0.1166	1.0714	0.1474	0.1496	2.1927	0.1798	0.1621
-1.1561	0.0596	0.1490	-0.0349	0.1166	0.1166	1.0864	0.1496	0.1527	2.2076	0.1799	0.1622
-1.1412	0.0629	0.1490	-0.0199	0.1165	0.1165	1.1013	0.1496	0.1527	2.2226	0.1850	0.1673
-1.1262	0.0691	0.1490	-0.0050	0.1165	0.1165	1.1163	0.1505	0.1538	2.2375	0.1850	0.1673
-1.1113	0.0709	0.1490	0.0100	0.1164	0.1164	1.1312	0.1505	0.1544	2.2525	0.1850	0.1673
-1.0963	0.0804	0.1490	0.0249	0.1164	0.1164	1.1462	0.1505	0.1544	2.2674	0.1850	0.1673
-1.0814	0.0882	0.1490	0.0399	0.1172	0.1172	1.1611	0.1526	0.1545	2.2824	0.1850	0.1673
-1.0664	0.0906	0.1490	0.0548	0.1168	0.1168	1.1761	0.1526	0.1545	2.2973	0.1854	0.1674
-1.0515	0.1084	0.1477	0.0698	0.1167	0.1165	1.1910	0.1526	0.1545	2.3123	0.1854	0.1674
-1.0365	0.1190	0.1463	0.0847	0.1165	0.1160	1.2060	0.1527	0.1545	2.3272	0.1856	0.1675
-1.0216	0.1476	0.1463	0.0997	0.1150	0.1145	1.2209	0.1532	0.1545	2.3422	0.1856	0.1685
-1.0066	0.1731	0.1463	0.1146	0.1141	0.1134	1.2359	0.1532	0.1535	2.3571	0.1856	0.1685
-0.9917	0.2399	0.1463	0.1296	0.1143	0.1136	1.2508	0.1532	0.1535	2.3721	0.1856	0.1685
-0.9767	0.2375	0.1463	0.1445	0.1143	0.1135	1.2658	0.1570	0.1536	2.3870	0.1857	0.1686
-0.9618	0.2283	0.1463	0.1595	0.1142	0.1135	1.2807	0.1570	0.1536	2.4020	0.1857	0.1691
-0.9468	0.2178	0.1443	0.1744	0.1142	0.1134	1.2957	0.1570	0.1536	2.4169	0.1857	0.1691
-0.9319	0.2082	0.1443	0.1894	0.1140	0.1132	1.3106	0.1561	0.1534	2.4319	0.1878	0.1712
-0.9169	0.2006	0.1443	0.2043	0.1135	0.1130	1.3256	0.1564	0.1535	2.4468	0.1908	0.1712
-0.9020	0.1941	0.1443	0.2193	0.1135	0.1130	1.3405	0.1564	0.1535	2.4618	0.1908	0.1712
-0.8870	0.1887	0.1443	0.2342	0.1135	0.1130	1.3555	0.1568	0.1535	2.4767	0.1911	0.1720
-0.8721	0.1812	0.1443	0.2492	0.1135	0.1130	1.3704	0.1568	0.1535	2.4917	0.1962	0.1770
-0.8571	0.1766	0.1443	0.2641	0.1135	0.1130	1.3854	0.1586	0.1535	2.5066	0.1962	0.1770
-0.8422	0.1722	0.1443	0.2791	0.1129	0.1126	1.4003	0.1586	0.1535	2.5216	0.1974	0.1795
-0.8272	0.1689	0.1443	0.2940	0.1136	0.1126	1.4153	0.1586	0.1535	2.5365	0.1978	0.1803
-0.8123	0.1667	0.1443	0.3090	0.1136	0.1126	1.4302	0.1588	0.1535	2.5515	0.1999	0.1824
-0.7973	0.1648	0.1443	0.3239	0.1150	0.1140	1.4452	0.1588	0.1535	2.5664	0.2005	0.1841
-0.7824	0.1634	0.1443	0.3389	0.1152	0.1133	1.4601	0.1588	0.1535	2.5814	0.2006	0.1841
-0.7674	0.1626	0.1443	0.3538	0.1152	0.1138	1.4751	0.1588	0.1521	2.5963	0.2008	0.1841
-0.7525	0.1619	0.1438	0.3688	0.1156	0.1138	1.4900	0.1588	0.1521	2.6113	0.2008	0.1853
-0.7375	0.1605	0.1438	0.3837	0.1156	0.1139	1.5050	0.1604	0.1521	2.6262	0.2030	0.1875
-0.7226	0.1600	0.1438	0.3987	0.1160	0.1144	1.5199	0.1605	0.1534	2.6412	0.2032	0.1886
-0.7076	0.1582	0.1438	0.4136	0.1154	0.1151	1.5349	0.1607	0.1534	2.6561	0.2080	0.1922
-0.6927	0.1582	0.1438	0.4286	0.1180	0.1173	1.5498	0.1607	0.1534	2.6711	0.2106	0.1950
-0.6777	0.1570	0.1437	0.4435	0.1180	0.1186	1.5648	0.1607	0.1534	2.6860	0.2106	0.1968
-0.6628	0.1566	0.1437	0.4585	0.1178	0.1192	1.5797	0.1610	0.1534	2.7010	0.2118	0.1969
-0.6478	0.1556	0.1436	0.4734	0.1203	0.1226	1.5947	0.1610	0.1534	2.7159	0.2168	0.2007
-0.6329	0.1555	0.1436	0.4884	0.1213	0.1243	1.6096	0.1611	0.1534	2.7309	0.2168	0.2016
-0.6179	0.1536	0.1436	0.5033	0.1230	0.1271	1.6246	0.1626	0.1534	2.7458	0.2174	0.2016
-0.6030	0.1533	0.1436	0.5183	0.1243	0.1278	1.6395	0.1626	0.1534	2.7608	0.2206	0.2048
-0.5880	0.1533	0.1436	0.5332	0.1258	0.1280	1.6545	0.1648	0.1540	2.7757	0.2207	0.2062
-0.5731	0.1514	0.1436	0.5482	0.1264	0.1280	1.6694	0.1648	0.1540	2.7907	0.2267	0.2130
-0.5581	0.1514	0.1436	0.5631	0.1268	0.1280	1.6844	0.1648	0.1540	2.8056	0.2267	0.2130
-0.5432	0.1492	0.1435	0.5781	0.1281	0.1279	1.6993	0.1648	0.1540	2.8206	0.2287	0.2180
-0.5282	0.1491	0.1435	0.5930	0.1281	0.1279	1.7143	0.1648	0.1540	2.8355	0.2355	0.2386
-0.5133	0.1471	0.1435	0.6080	0.1276	0.1279	1.7292	0.1648	0.1540	2.8505	0.2443	0.2471
-0.4983	0.1470	0.1435	0.6229	0.1308	0.1297	1.7442	0.1680	0.1572	2.8654	0.2518	0.2554
-0.4834	0.1453	0.1435	0.6379	0.1309	0.1296	1.7591	0.1680	0.1572	2.8804	0.2518	0.2604
-0.4684	0.1452	0.1435	0.6528	0.1309	0.1296	1.7741	0.1685	0.1577	2.8953	0.2574	0.2612
-0.4535	0.1438	0.1434	0.6678	0.1311	0.1292	1.7890	0.1685	0.1577	2.9103	0.2601	0.2617
-0.4385	0.1442	0.1434	0.6827	0.1331	0.1311	1.8040	0.1685	0.1577	2.9252	0.2617	0.2630
-0.4236	0.1434	0.1429	0.6977	0.1331	0.1311	1.8189	0.1685	0.1577	2.9402	0.2642	0.2630
-0.4086	0.1430	0.1426	0.7126	0.1335	0.1311	1.8339	0.1707	0.1588	2.9551	0.2643	0.2630
-0.3937	0.1424	0.1424	0.7276	0.1336	0.1312	1.8488	0.1707	0.1588	2.9701	0.2680	0.2631
									3.0000	0.2710	0.2631

Tabla 4.41: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario G.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0365	0.1577	-0.3787	0.1489	0.1492	0.7425	0.1486	0.1451	1.8638	0.1784	0.1693
-1.4850	0.0400	0.1577	-0.3638	0.1488	0.1492	0.7575	0.1492	0.1446	1.8787	0.1784	0.1693
-1.4701	0.0400	0.1577	-0.3488	0.1487	0.1492	0.7724	0.1492	0.1448	1.8937	0.1785	0.1693
-1.4551	0.0400	0.1555	-0.3339	0.1486	0.1492	0.7874	0.1492	0.1448	1.9086	0.1790	0.1693
-1.4402	0.0401	0.1555	-0.3189	0.1486	0.1492	0.8023	0.1493	0.1451	1.9236	0.1790	0.1693
-1.4252	0.0400	0.1555	-0.3040	0.1490	0.1490	0.8173	0.1496	0.1451	1.9385	0.1790	0.1693
-1.4103	0.0400	0.1555	-0.2890	0.1489	0.1487	0.8322	0.1496	0.1451	1.9535	0.1790	0.1693
-1.3953	0.0418	0.1555	-0.2741	0.1486	0.1486	0.8472	0.1496	0.1459	1.9684	0.1790	0.1693
-1.3804	0.0418	0.1555	-0.2591	0.1485	0.1480	0.8621	0.1523	0.1485	1.9834	0.1790	0.1693
-1.3654	0.0418	0.1555	-0.2442	0.1485	0.1432	0.8771	0.1524	0.1485	1.9983	0.1790	0.1693
-1.3505	0.0418	0.1555	-0.2292	0.1410	0.1392	0.8920	0.1524	0.1485	2.0133	0.1791	0.1693
-1.3355	0.0416	0.1555	-0.2143	0.1320	0.1262	0.9070	0.1525	0.1496	2.0282	0.1791	0.1693
-1.3206	0.0430	0.1555	-0.1993	0.1320	0.1236	0.9219	0.1525	0.1496	2.0432	0.1800	0.1698
-1.3056	0.0430	0.1555	-0.1844	0.1277	0.1170	0.9369	0.1525	0.1496	2.0581	0.1804	0.1698
-1.2907	0.0433	0.1555	-0.1694	0.1274	0.1170	0.9518	0.1525	0.1496	2.0731	0.1806	0.1705
-1.2757	0.0439	0.1555	-0.1545	0.1262	0.1146	0.9668	0.1525	0.1509	2.0880	0.1806	0.1705
-1.2608	0.0437	0.1544	-0.1395	0.1180	0.1145	0.9817	0.1546	0.1528	2.1030	0.1806	0.1706
-1.2458	0.0438	0.1544	-0.1246	0.1156	0.1133	0.9967	0.1546	0.1546	2.1179	0.1806	0.1706
-1.2309	0.0488	0.1544	-0.1096	0.1106	0.1098	1.0116	0.1546	0.1546	2.1329	0.1835	0.1706
-1.2159	0.0519	0.1544	-0.0947	0.1093	0.1093	1.0266	0.1556	0.1546	2.1478	0.1836	0.1706
-1.2010	0.0519	0.1544	-0.0797	0.1090	0.1090	1.0415	0.1564	0.1558	2.1628	0.1846	0.1706
-1.1860	0.0560	0.1544	-0.0648	0.1090	0.1086	1.0565	0.1578	0.1571	2.1777	0.1846	0.1706
-1.1711	0.0602	0.1544	-0.0498	0.1086	0.1086	1.0714	0.1578	0.1582	2.1927	0.1860	0.1715
-1.1561	0.0604	0.1544	-0.0349	0.1085	0.1086	1.0864	0.1592	0.1600	2.2076	0.1860	0.1716
-1.1412	0.0627	0.1544	-0.0199	0.1085	0.1086	1.1013	0.1593	0.1600	2.2226	0.1917	0.1773
-1.1262	0.0689	0.1543	-0.0050	0.1085	0.1086	1.1163	0.1600	0.1608	2.2375	0.1917	0.1773
-1.1113	0.0696	0.1543	0.0100	0.1085	0.1085	1.1312	0.1600	0.1610	2.2525	0.1917	0.1773
-1.0963	0.0826	0.1543	0.0249	0.1085	0.1085	1.1462	0.1600	0.1610	2.2674	0.1917	0.1773
-1.0814	0.0920	0.1543	0.0399	0.1090	0.1090	1.1611	0.1613	0.1611	2.2824	0.1917	0.1773
-1.0664	0.0934	0.1543	0.0548	0.1088	0.1088	1.1761	0.1613	0.1612	2.2973	0.1921	0.1774
-1.0515	0.1122	0.1536	0.0698	0.1088	0.1083	1.1910	0.1613	0.1612	2.3123	0.1921	0.1774
-1.0365	0.1265	0.1524	0.0847	0.1083	0.1082	1.2060	0.1613	0.1612	2.3272	0.1921	0.1774
-1.0216	0.1578	0.1524	0.0997	0.1068	0.1067	1.2209	0.1616	0.1612	2.3422	0.1921	0.1778
-1.0066	0.1918	0.1524	0.1146	0.1062	0.1060	1.2359	0.1616	0.1608	2.3571	0.1921	0.1778
-0.9917	0.2304	0.1524	0.1296	0.1069	0.1066	1.2508	0.1616	0.1608	2.3721	0.1922	0.1778
-0.9767	0.2291	0.1524	0.1445	0.1069	0.1065	1.2658	0.1657	0.1608	2.3870	0.1923	0.1778
-0.9618	0.2233	0.1524	0.1595	0.1068	0.1065	1.2807	0.1657	0.1608	2.4020	0.1923	0.1781
-0.9468	0.2144	0.1501	0.1744	0.1068	0.1064	1.2957	0.1657	0.1608	2.4169	0.1923	0.1781
-0.9319	0.2060	0.1501	0.1894	0.1068	0.1064	1.3106	0.1648	0.1610	2.4319	0.1935	0.1793
-0.9169	0.2004	0.1501	0.2043	0.1067	0.1064	1.3256	0.1650	0.1613	2.4468	0.1970	0.1793
-0.9020	0.1931	0.1501	0.2193	0.1067	0.1064	1.3405	0.1650	0.1613	2.4618	0.1970	0.1793
-0.8870	0.1865	0.1501	0.2342	0.1067	0.1064	1.3555	0.1652	0.1613	2.4767	0.1971	0.1800
-0.8721	0.1787	0.1501	0.2492	0.1067	0.1064	1.3704	0.1652	0.1613	2.4917	0.2031	0.1859
-0.8571	0.1736	0.1501	0.2641	0.1067	0.1064	1.3854	0.1670	0.1613	2.5066	0.2031	0.1859
-0.8422	0.1689	0.1501	0.2791	0.1061	0.1062	1.4003	0.1670	0.1613	2.5216	0.2047	0.1881
-0.8272	0.1652	0.1501	0.2940	0.1072	0.1062	1.4153	0.1670	0.1613	2.5365	0.2049	0.1888
-0.8123	0.1632	0.1501	0.3090	0.1072	0.1062	1.4302	0.1670	0.1613	2.5515	0.2062	0.1901
-0.7973	0.1622	0.1501	0.3239	0.1104	0.1094	1.4452	0.1670	0.1613	2.5664	0.2064	0.1908
-0.7824	0.1614	0.1501	0.3389	0.1107	0.1088	1.4601	0.1670	0.1613	2.5814	0.2064	0.1908
-0.7674	0.1606	0.1501	0.3538	0.1107	0.1098	1.4751	0.1670	0.1606	2.5963	0.2065	0.1909
-0.7525	0.1600	0.1499	0.3688	0.1109	0.1098	1.4900	0.1670	0.1606	2.6113	0.2066	0.1916
-0.7375	0.1594	0.1499	0.3837	0.1109	0.1109	1.5050	0.1682	0.1606	2.6262	0.2077	0.1927
-0.7226	0.1592	0.1499	0.3987	0.1116	0.1117	1.5199	0.1682	0.1628	2.6412	0.2078	0.1934
-0.7076	0.1585	0.1499	0.4136	0.1111	0.1134	1.5349	0.1683	0.1628	2.6561	0.2133	0.1983
-0.6927	0.1586	0.1499	0.4286	0.1163	0.1177	1.5498	0.1683	0.1628	2.6711	0.2145	0.1990
-0.6777	0.1579	0.1498	0.4435	0.1164	0.1203	1.5648	0.1683	0.1628	2.6860	0.2145	0.2004
-0.6628	0.1577	0.1498	0.4585	0.1201	0.1262	1.5797	0.1688	0.1628	2.7010	0.2149	0.2004
-0.6478	0.1571	0.1498	0.4734	0.1240	0.1318	1.5947	0.1688	0.1628	2.7159	0.2205	0.2045
-0.6329	0.1571	0.1498	0.4884	0.1259	0.1356	1.6096	0.1689	0.1628	2.7309	0.2205	0.2056
-0.6179	0.1561	0.1498	0.5033	0.1289	0.1398	1.6246	0.1700	0.1628	2.7458	0.2207	0.2056
-0.6030	0.1558	0.1498	0.5183	0.1309	0.1406	1.6395	0.1700	0.1628	2.7608	0.2250	0.2098
-0.5880	0.1558	0.1498	0.5332	0.1332	0.1408	1.6545	0.1714	0.1630	2.7757	0.2250	0.2117
-0.5731	0.1547	0.1498	0.5482	0.1344	0.1408	1.6694	0.1714	0.1630	2.7907	0.2333	0.2220
-0.5581	0.1547	0.1498	0.5631	0.1349	0.1408	1.6844	0.1714	0.1630	2.8056	0.2333	0.2220
-0.5432	0.1532	0.1497	0.5781	0.1375	0.1408	1.6993	0.1714	0.1630	2.8206	0.2353	0.2284
-0.5282	0.1531	0.1497	0.5930	0.1375	0.1408	1.7143	0.1714	0.1630	2.8355	0.2434	0.2526
-0.5133	0.1514	0.1497	0.6080	0.1373	0.1408	1.7292	0.1714	0.1630	2.8505	0.2526	0.2637
-0.4983	0.1513	0.1497	0.6229	0.1415	0.1427	1.7442	0.1755	0.1671	2.8654	0.2611	0.2713
-0.4834	0.1501	0.1497	0.6379	0.1416	0.1428	1.7591	0.1755	0.1671	2.8804	0.2612	0.2770
-0.4684	0.1501	0.1497	0.6528	0.1416	0.1428	1.7741	0.1758	0.1674	2.8953	0.2666	0.2780
-0.4535	0.1490	0.1497	0.6678	0.1432	0.1427	1.7890	0.1758	0.1674	2.9103	0.2708	0.2791
-0.4385	0.1497	0.1497	0.6827	0.1456	0.1450	1.8040	0.1758	0.1674	2.9252	0.2715	0.2803
-0.4236	0.1494	0.1494	0.6977	0.1456	0.1450	1.8189	0.1758	0.1674	2.9402	0.2750	0.2803
-0.4086	0.1493	0.1494	0.7126	0.1462	0.1450	1.8339	0.1784	0.1693	2.9551	0.2751	0.2803
-0.3937	0.1489	0.1492	0.7276	0.1464	0.1451	1.8488	0.1784	0.1693	2.9701	0.2798	0.2804
									3.0000	0.2817	0.2804

Tabla 4.42: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario G.

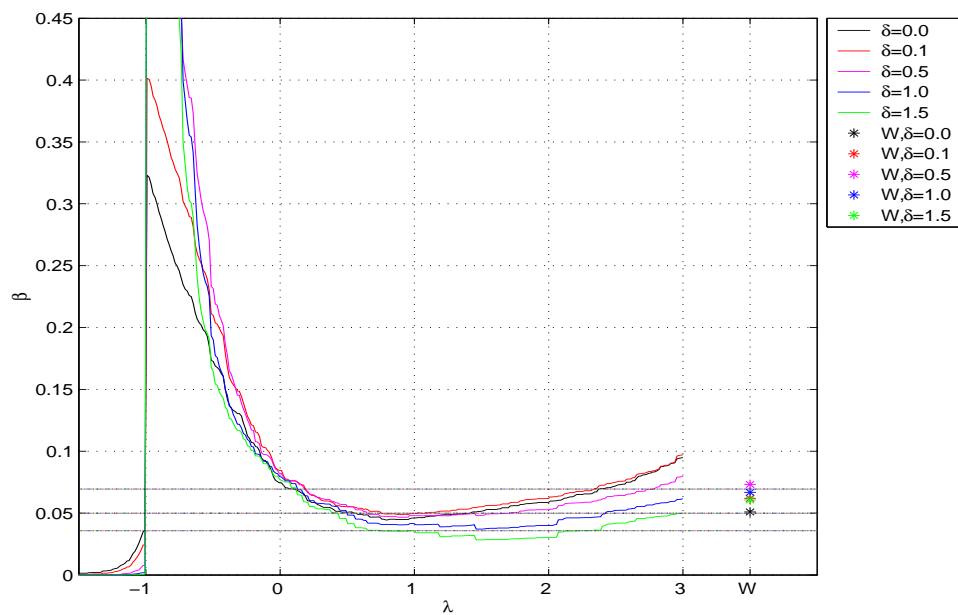


Figura 4.1: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario A de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

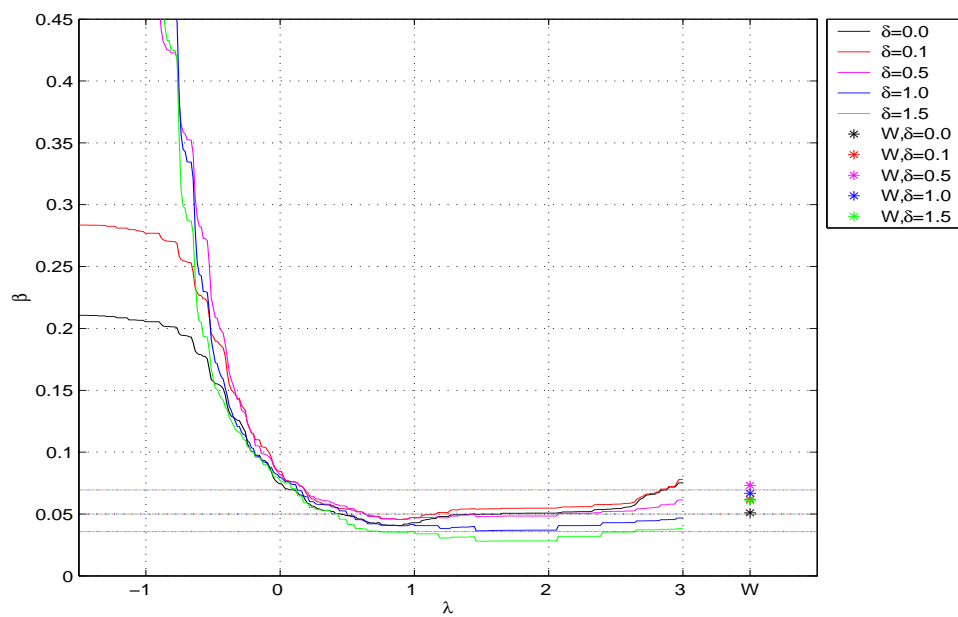


Figura 4.2: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario A de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

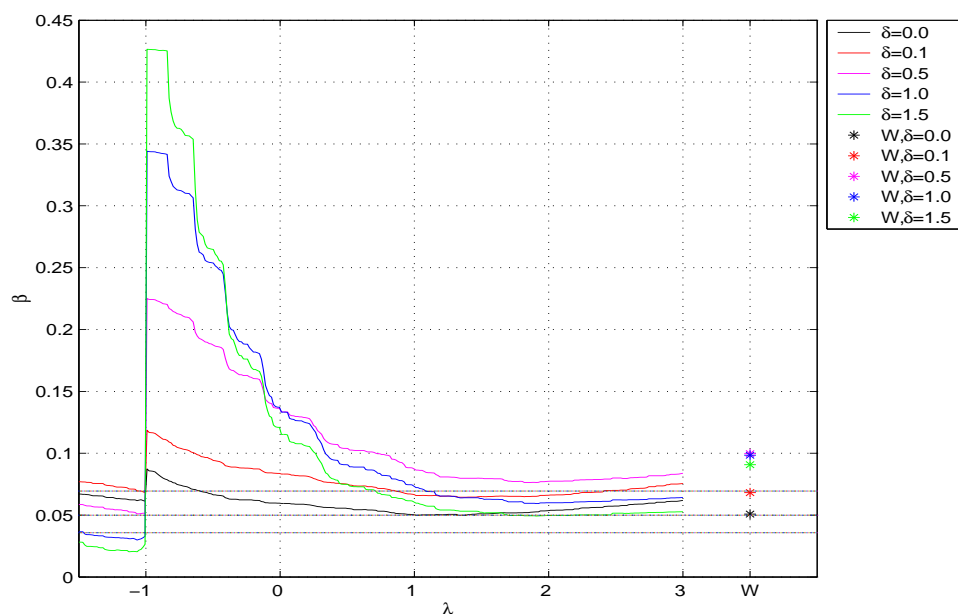


Figura 4.3: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario B de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

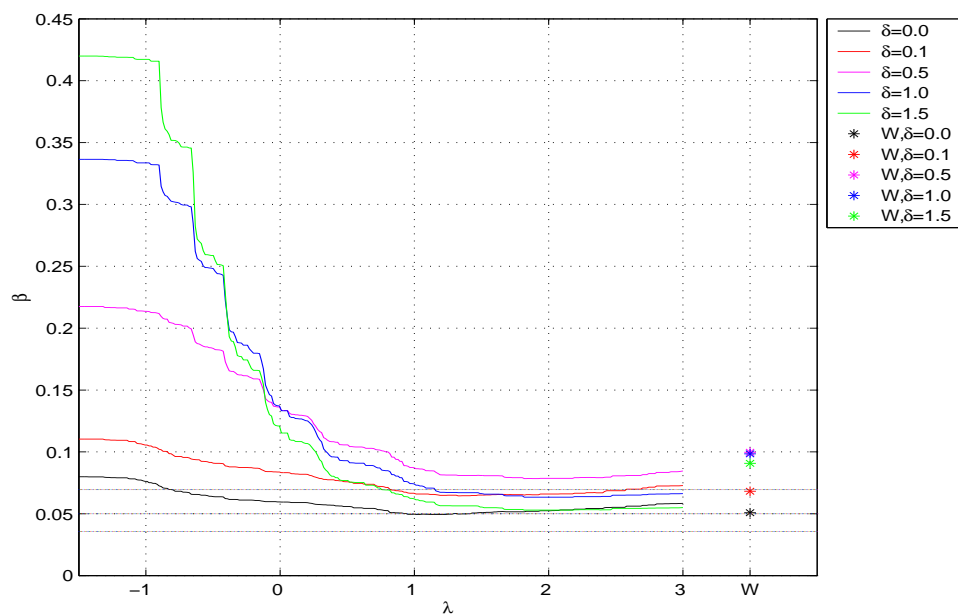


Figura 4.4: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario B de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

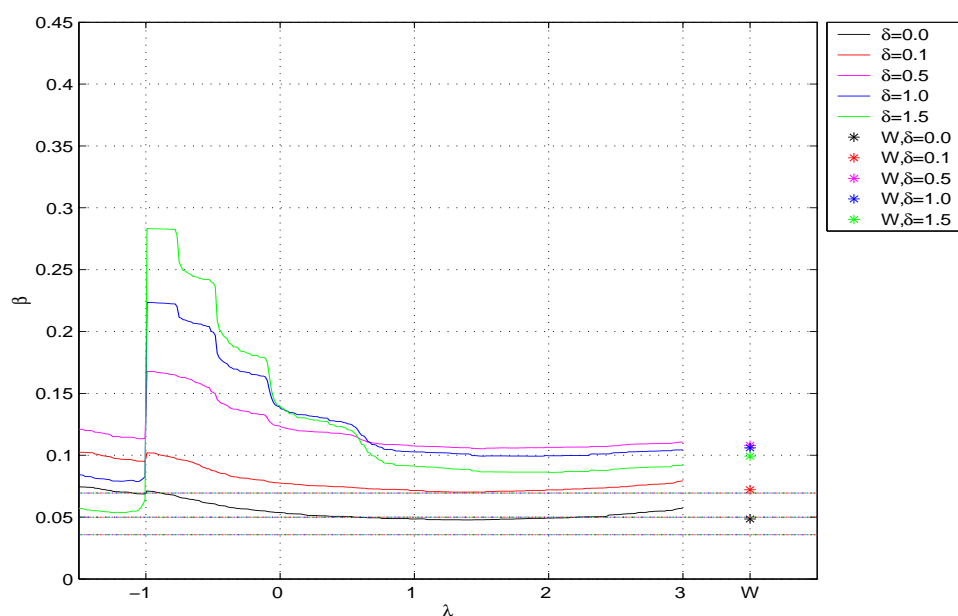


Figura 4.5: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario C de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

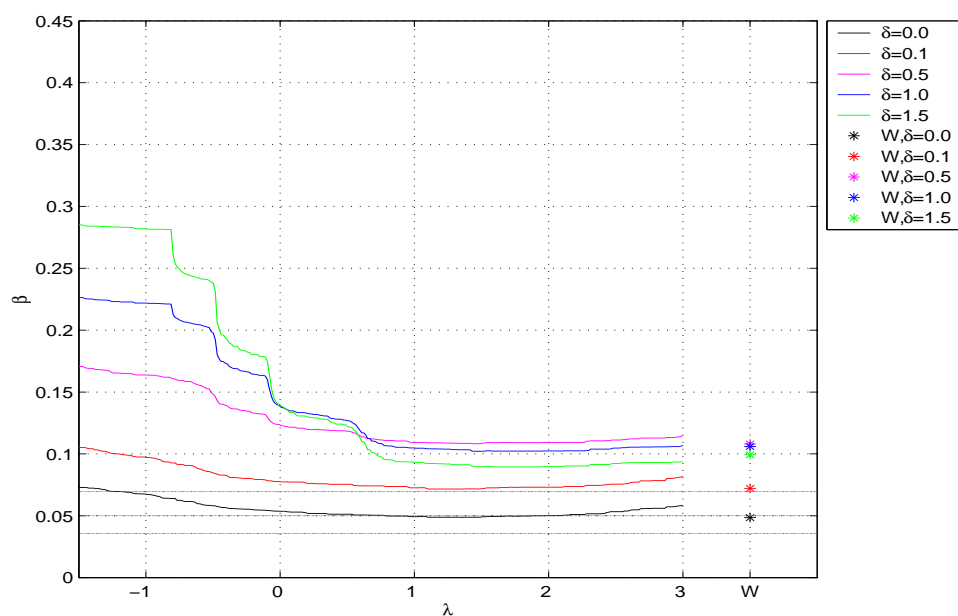


Figura 4.6: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario C de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

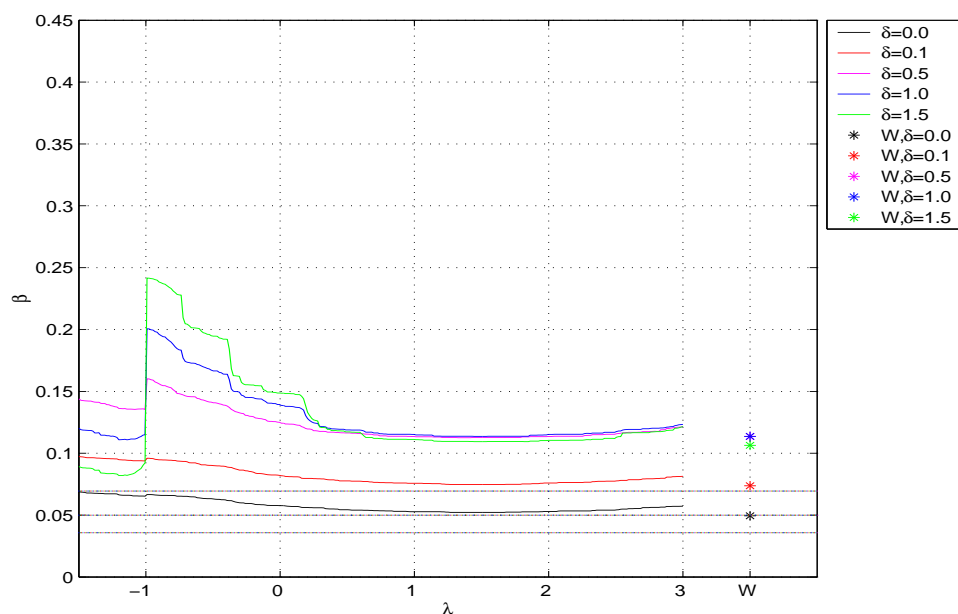


Figura 4.7: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario D de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

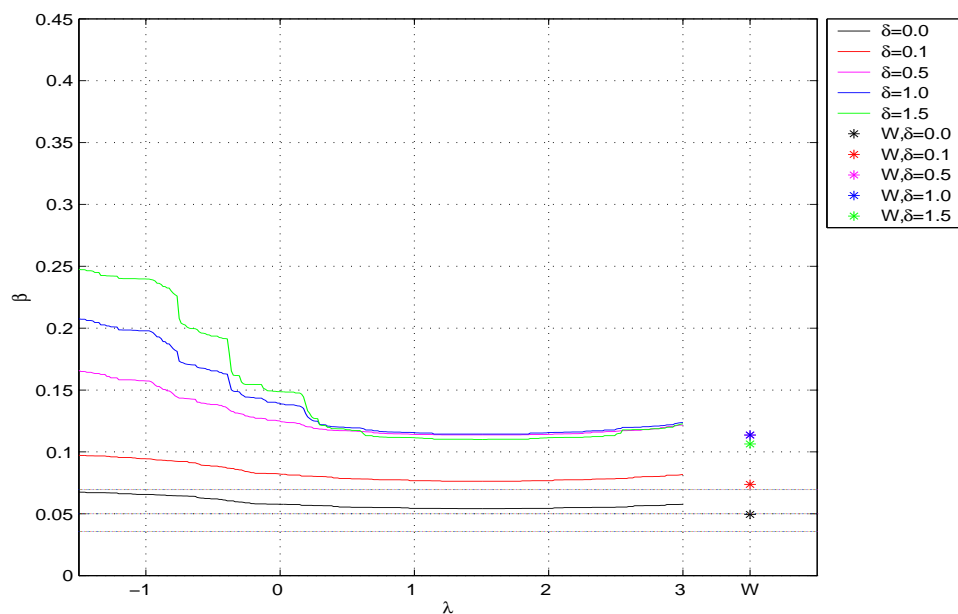


Figura 4.8: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario D de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

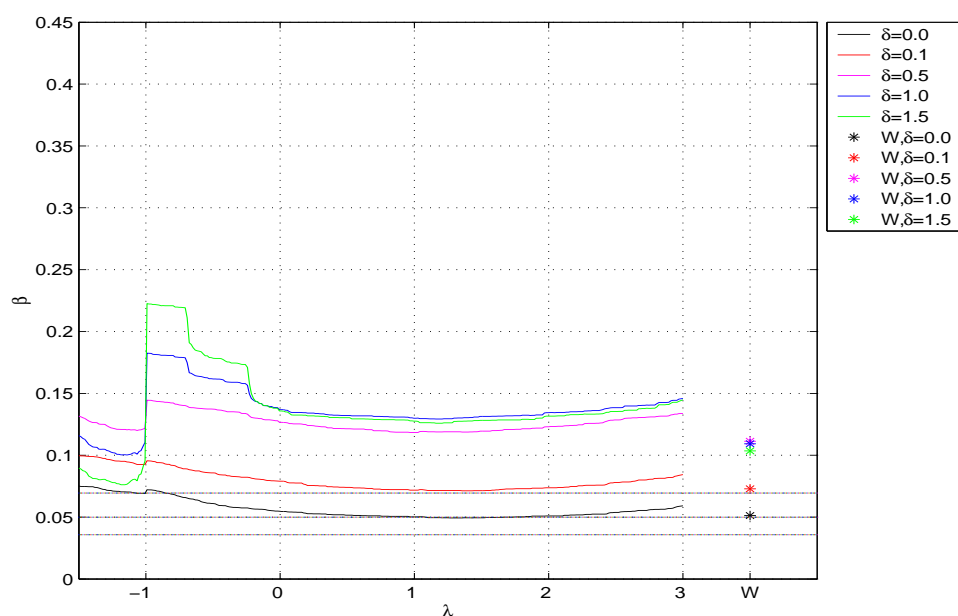


Figura 4.9: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario E de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

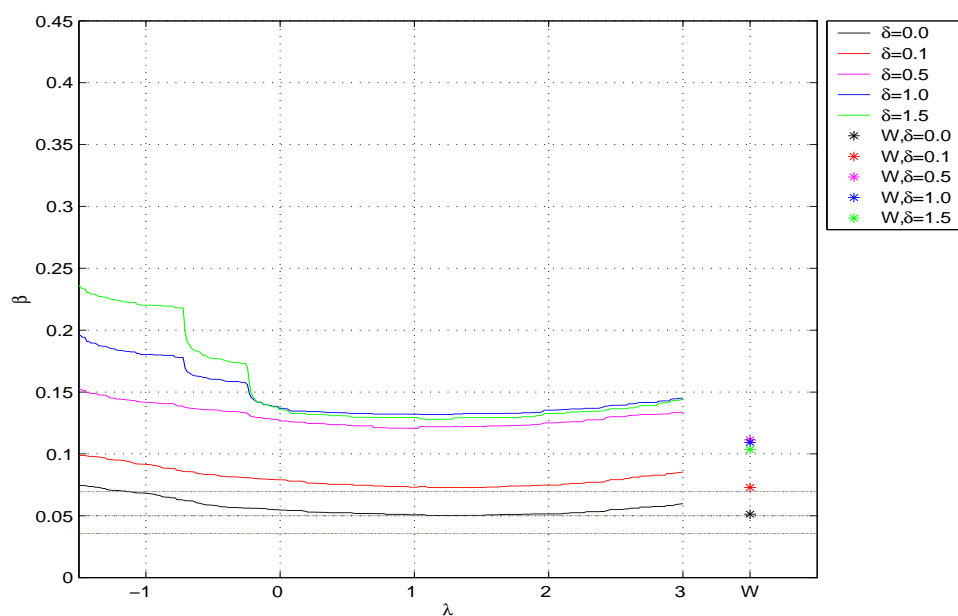


Figura 4.10: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario E de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

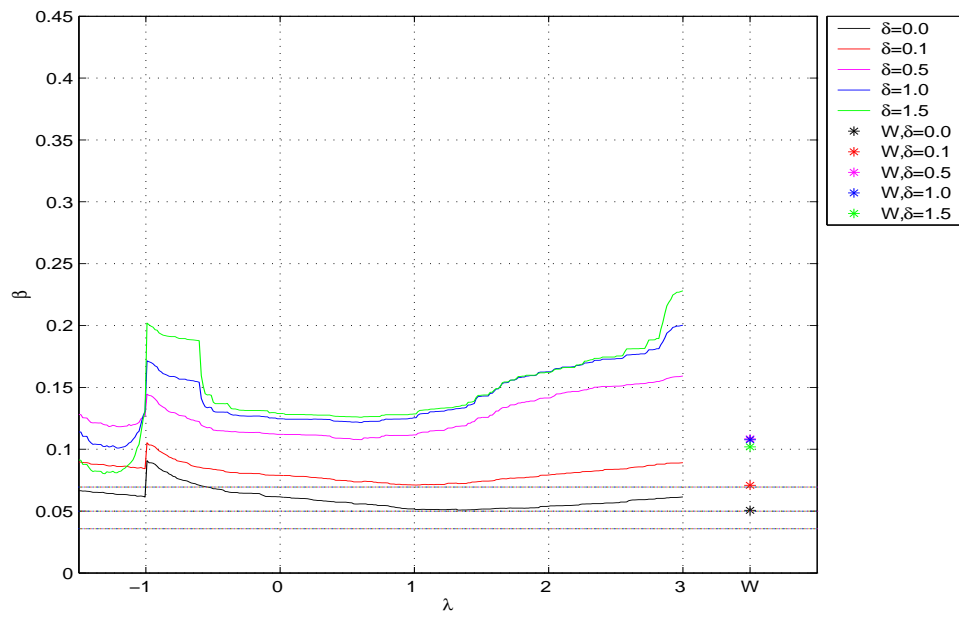


Figura 4.11: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario F de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

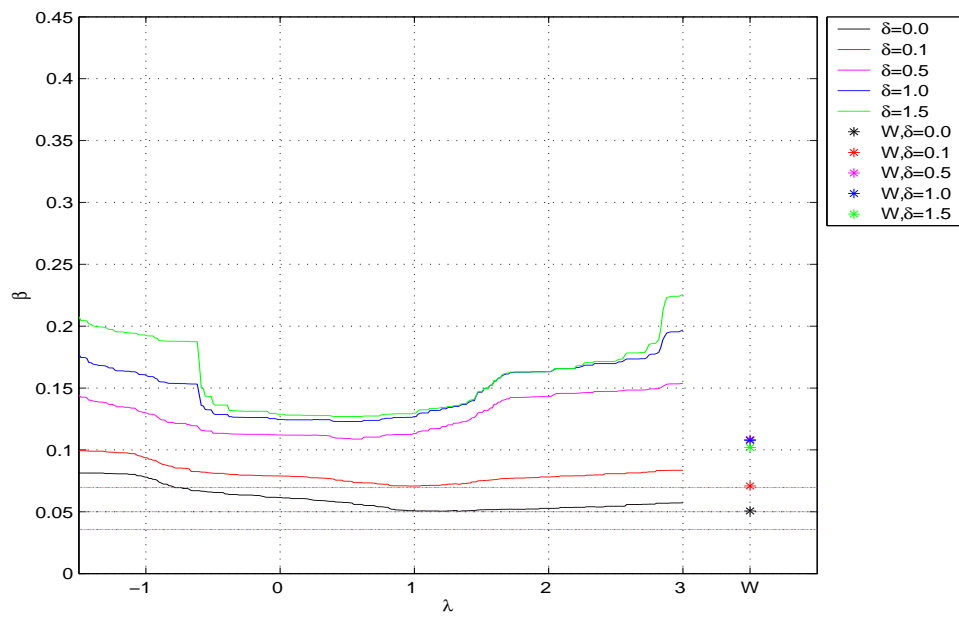


Figura 4.12: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario F de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

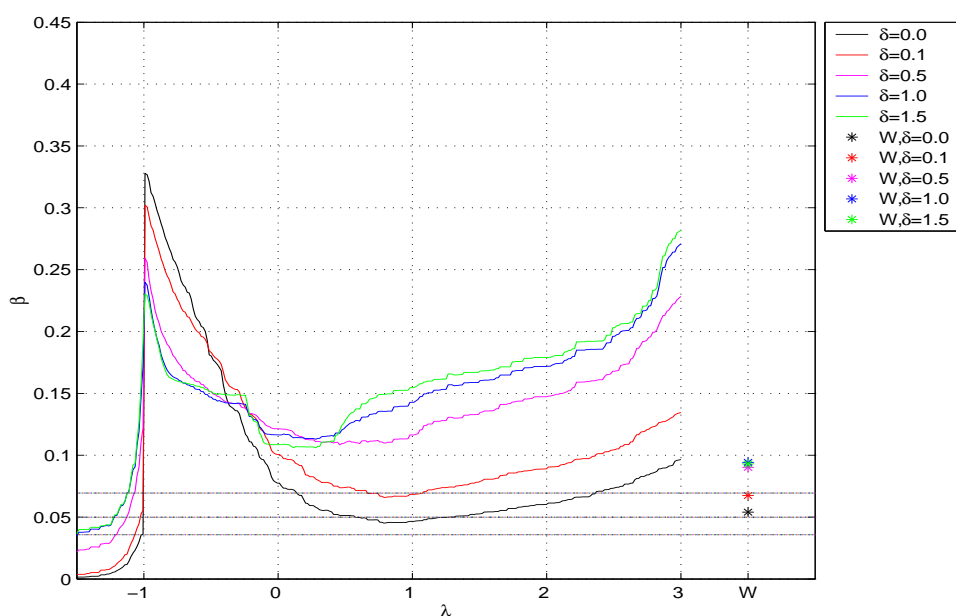


Figura 4.13: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario G de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

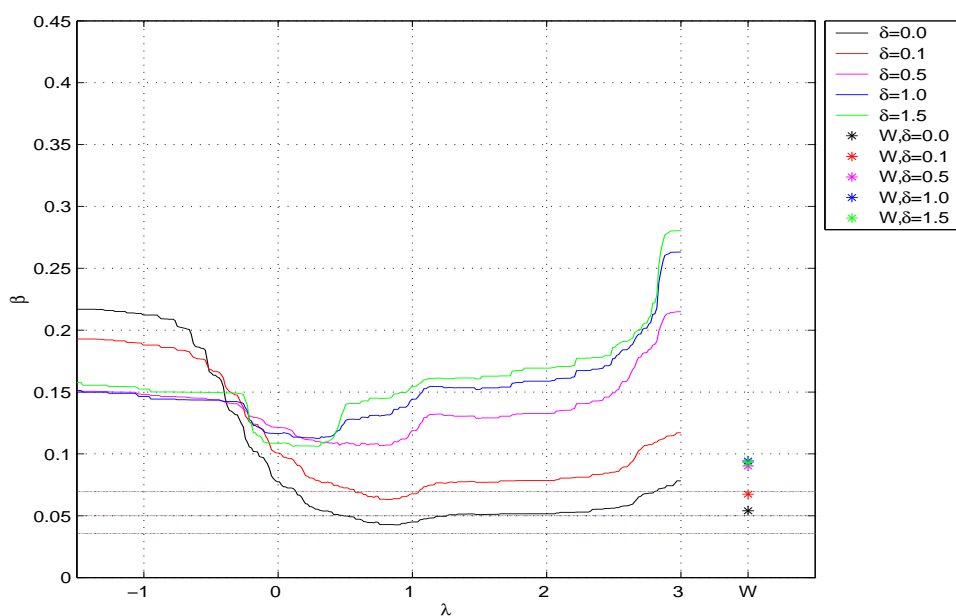


Figura 4.14: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario G de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W .

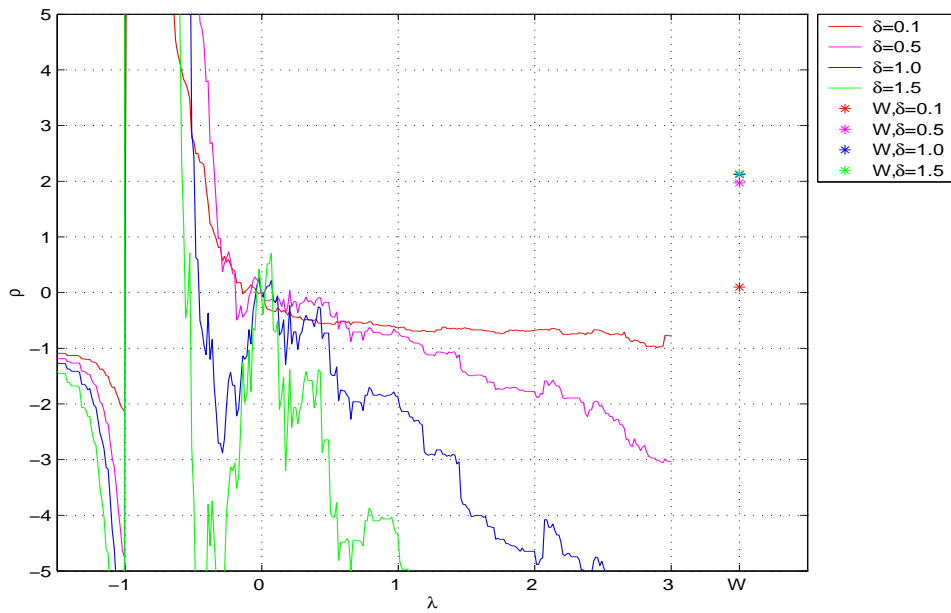


Figura 4.15: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario A.

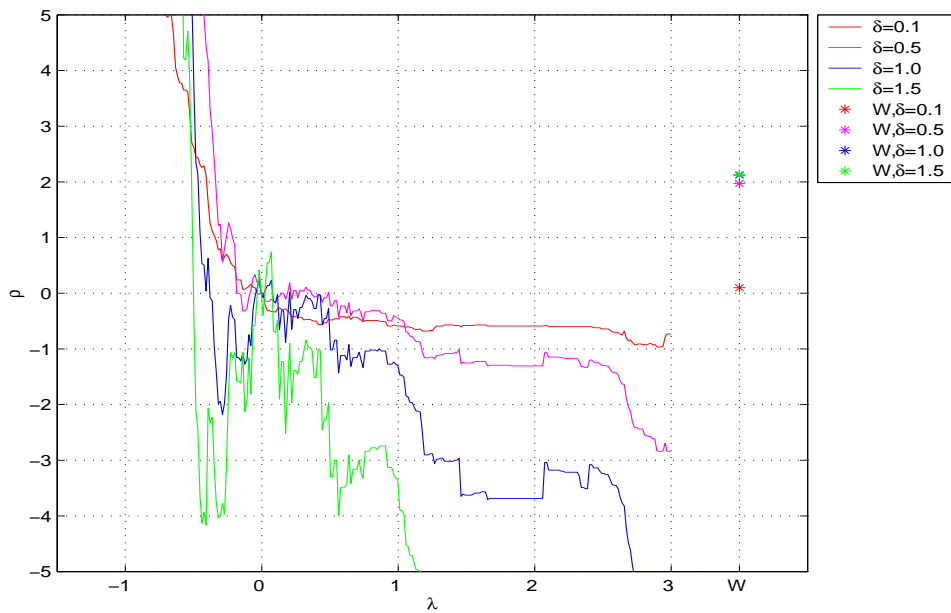


Figura 4.16: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario A.

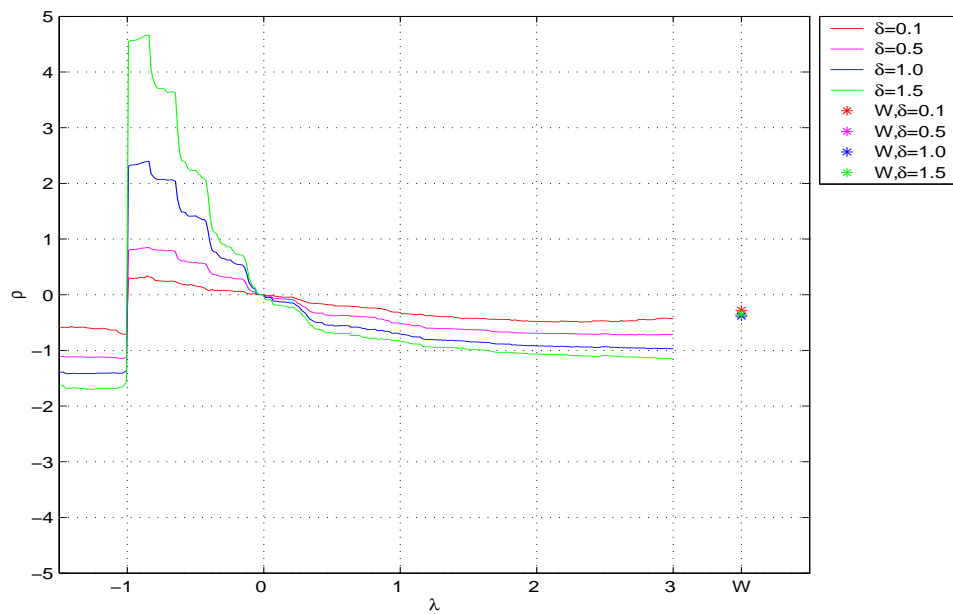


Figura 4.17: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario B.

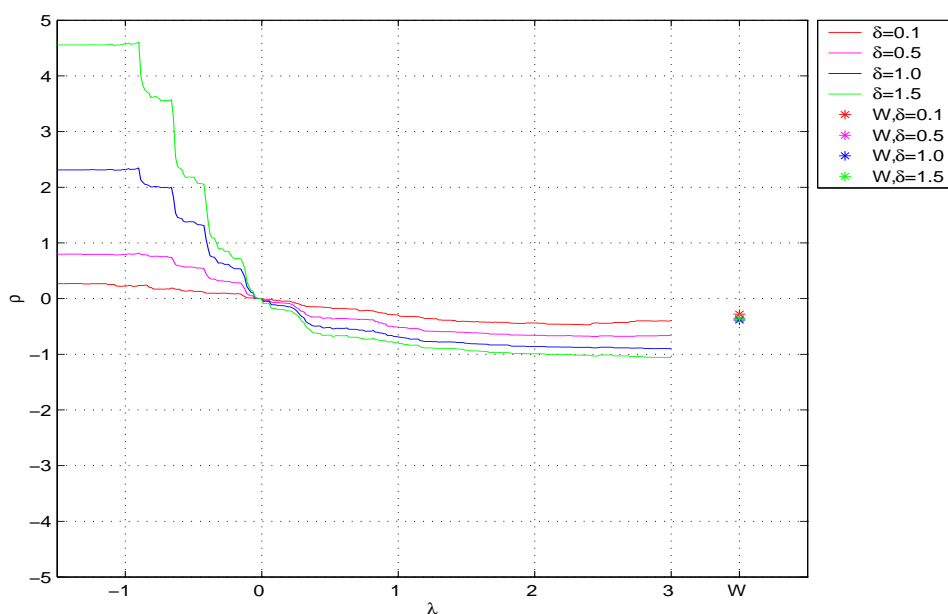


Figura 4.18: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario B.

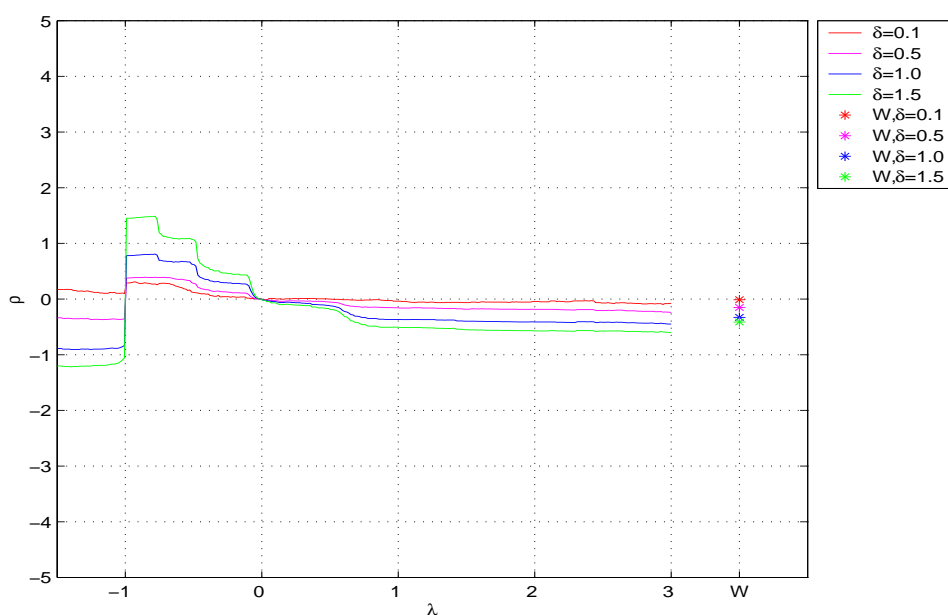


Figura 4.19: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario C.

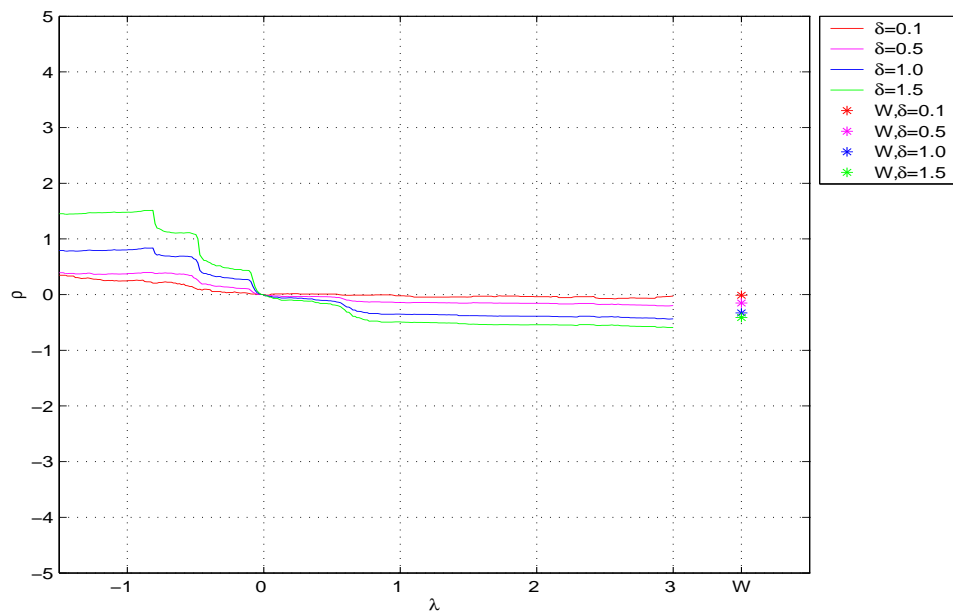


Figura 4.20: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario C.

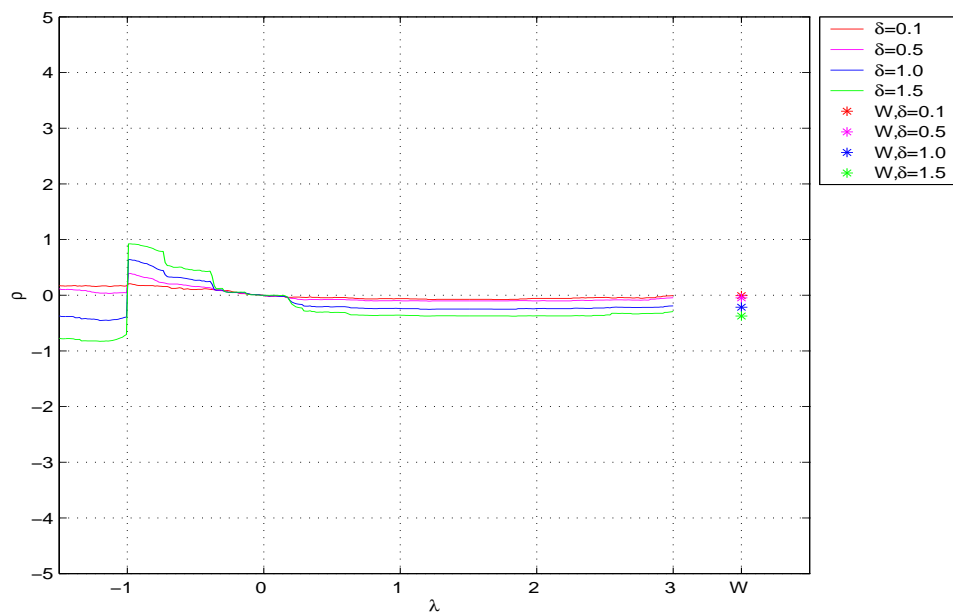


Figura 4.21: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario D.

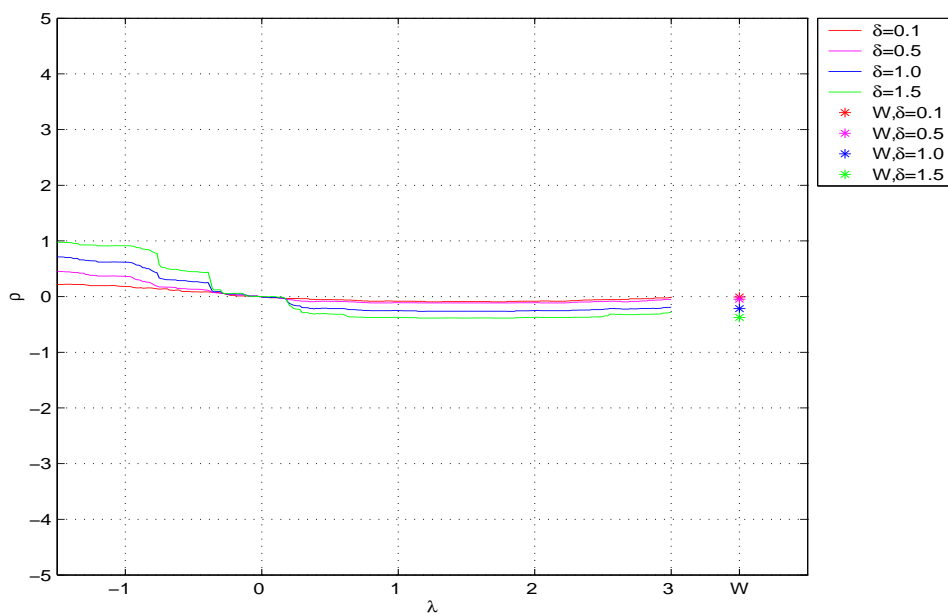


Figura 4.22: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario D.

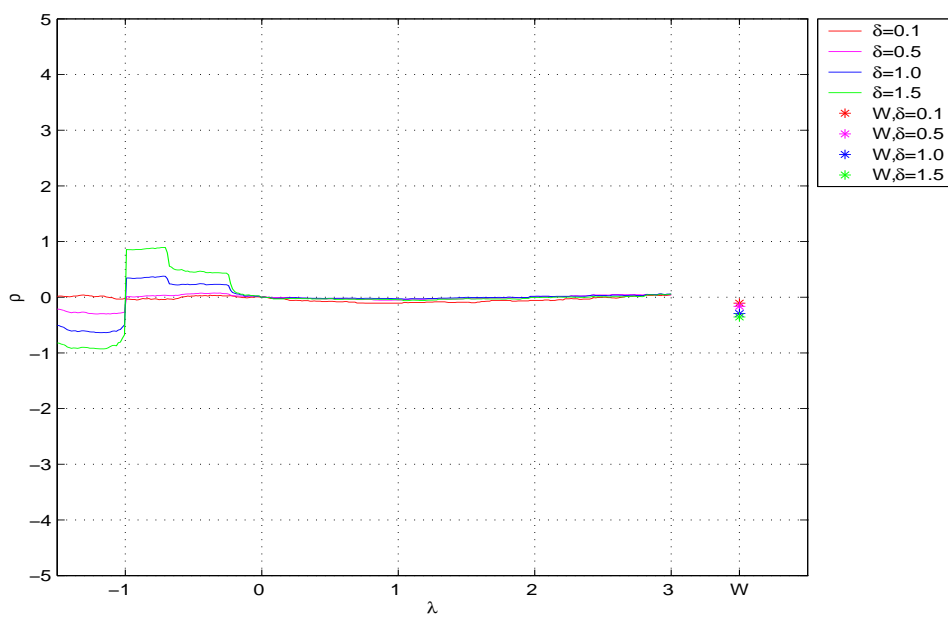


Figura 4.23: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario E.

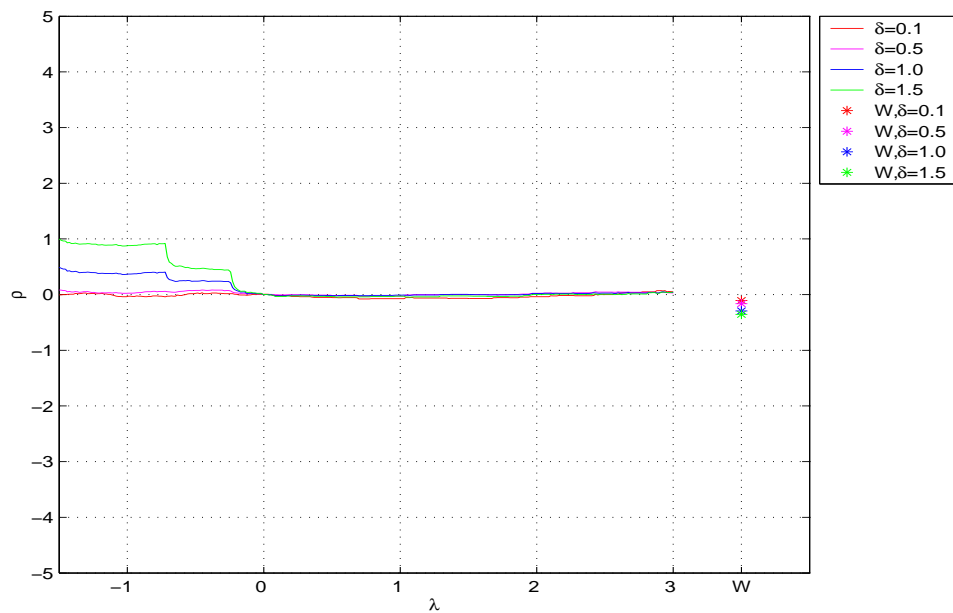


Figura 4.24: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario E.

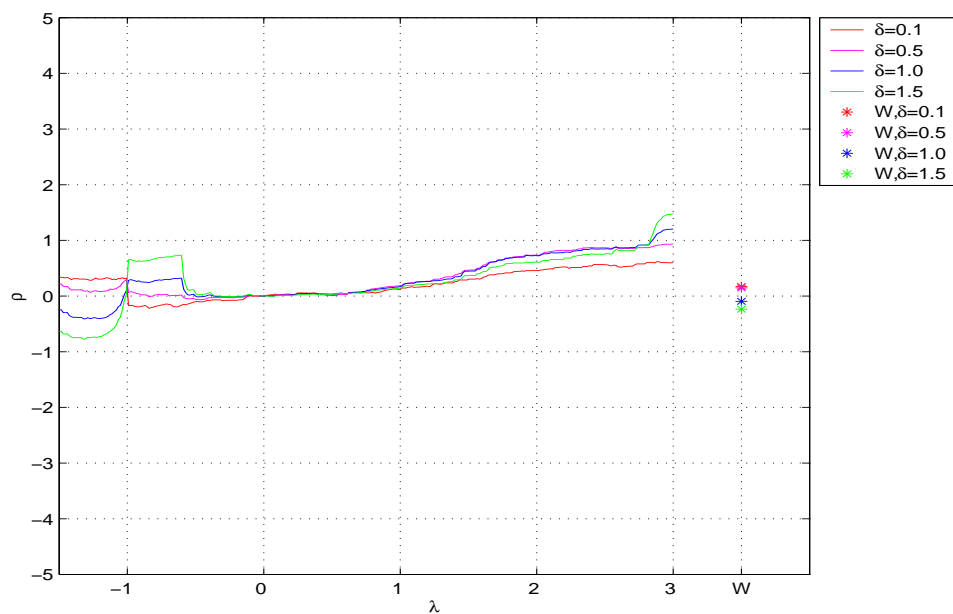


Figura 4.25: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario F.

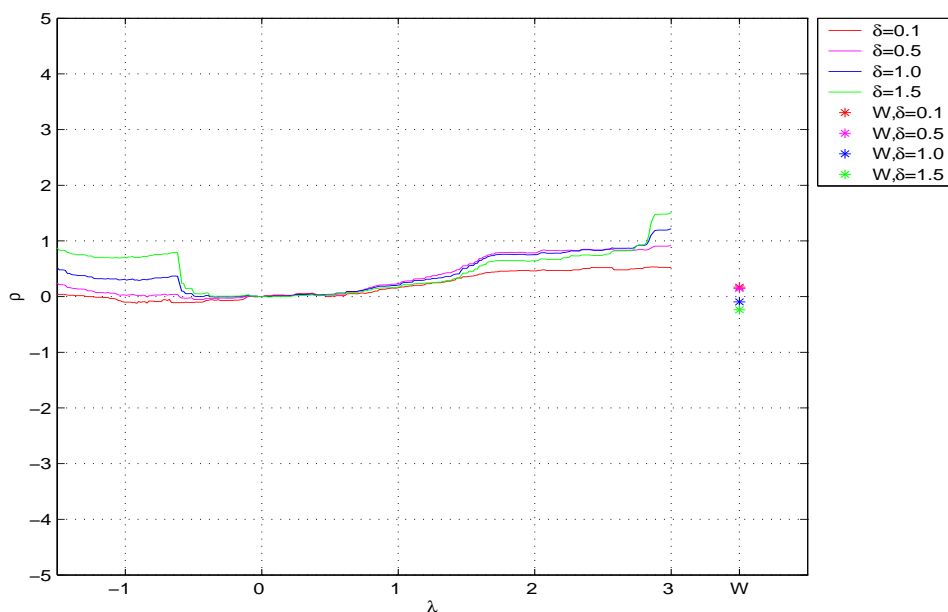


Figura 4.26: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario F.

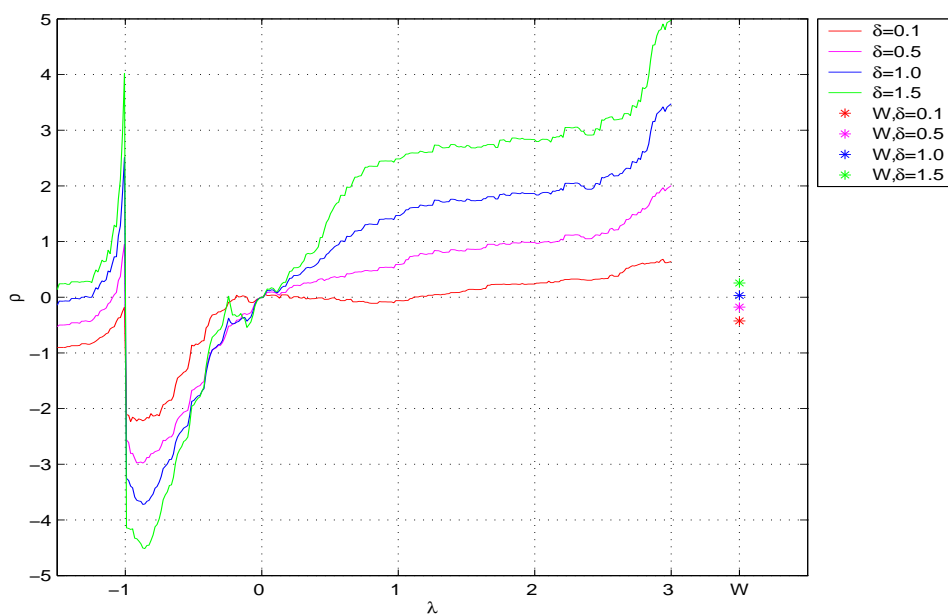


Figura 4.27: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W, con respecto a G^2 para el Escenario G.

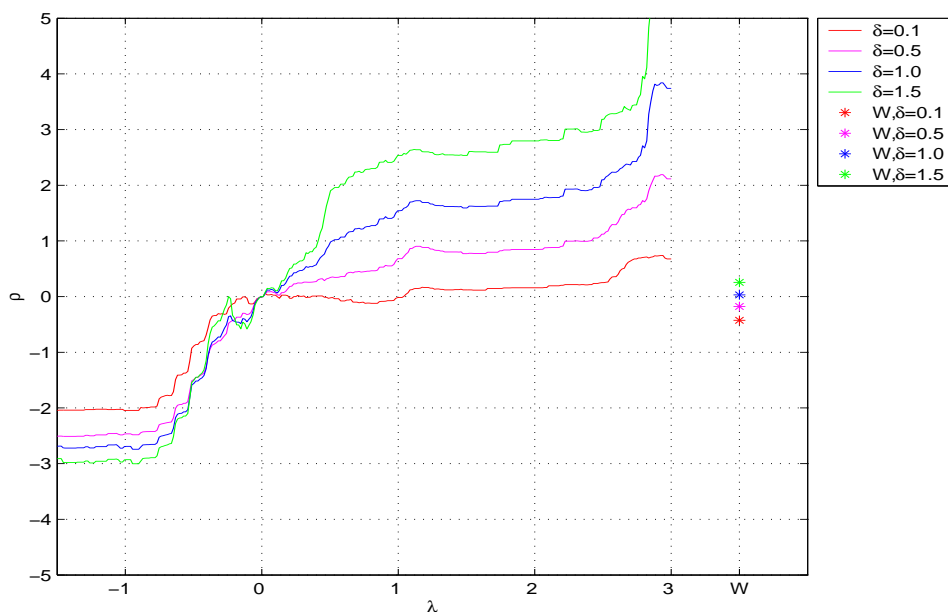


Figura 4.28: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a G^2 para el Escenario G.

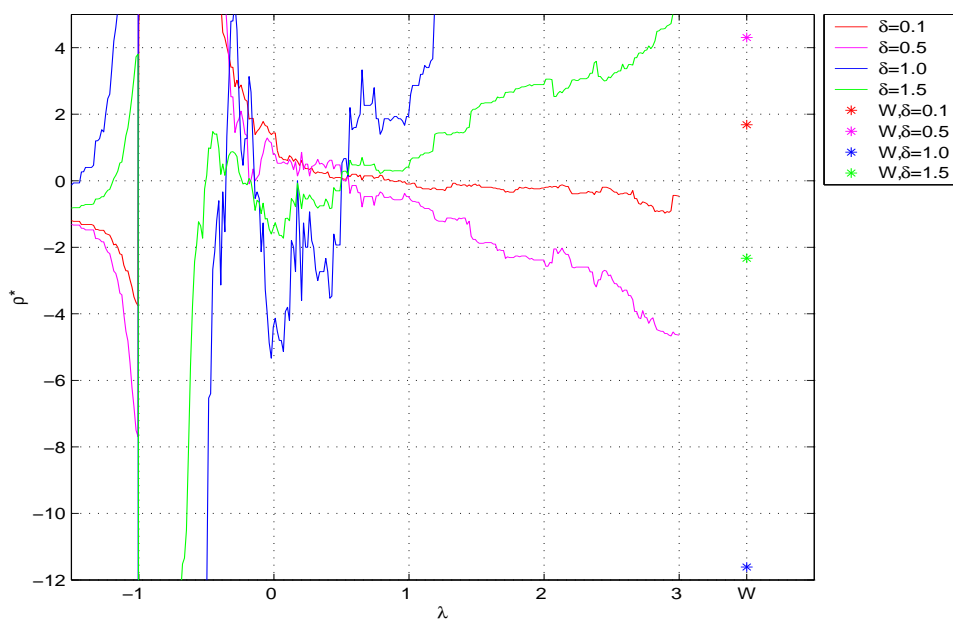


Figura 4.29: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario A.

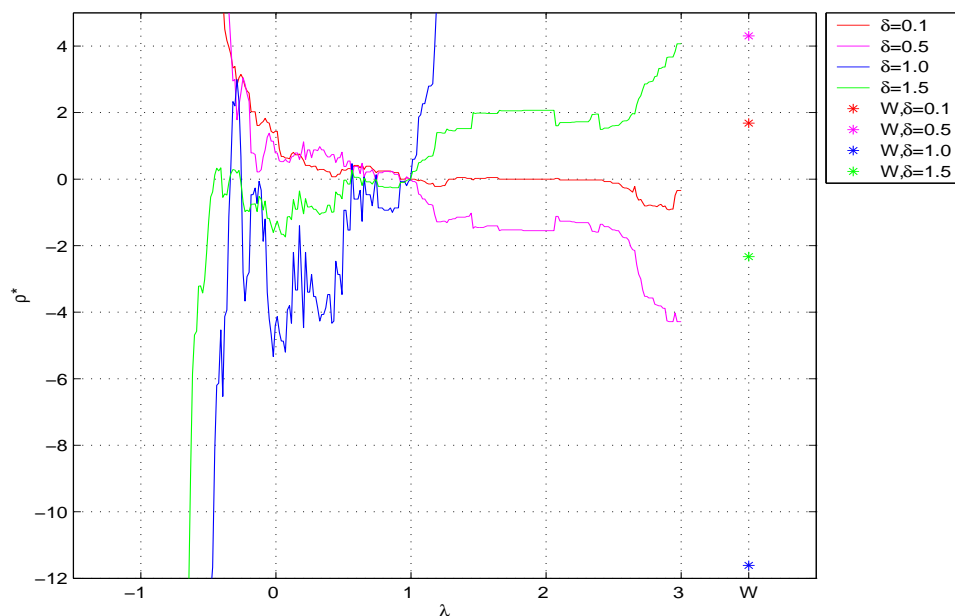


Figura 4.30: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario A.

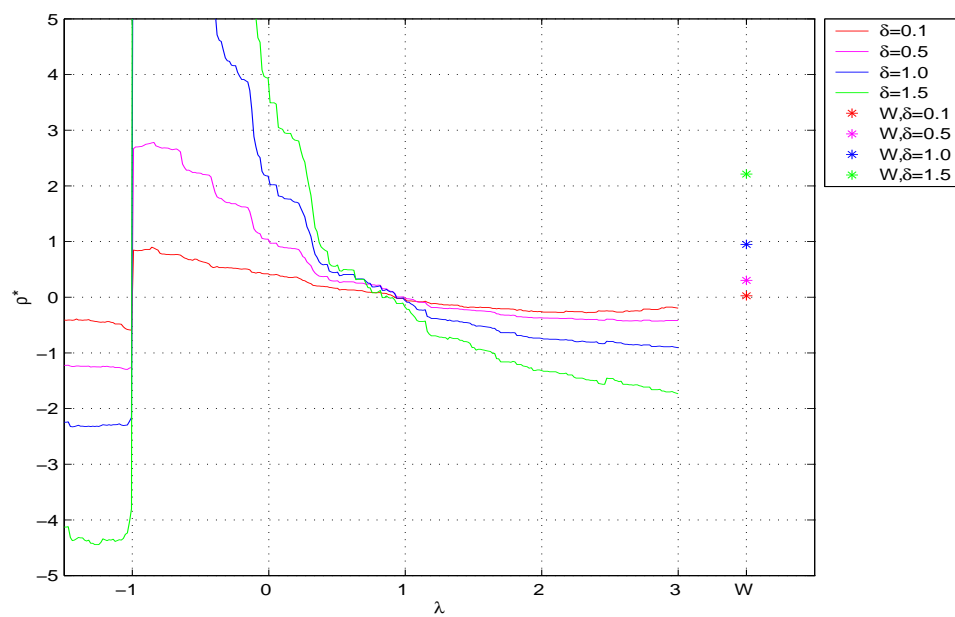


Figura 4.31: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario B.

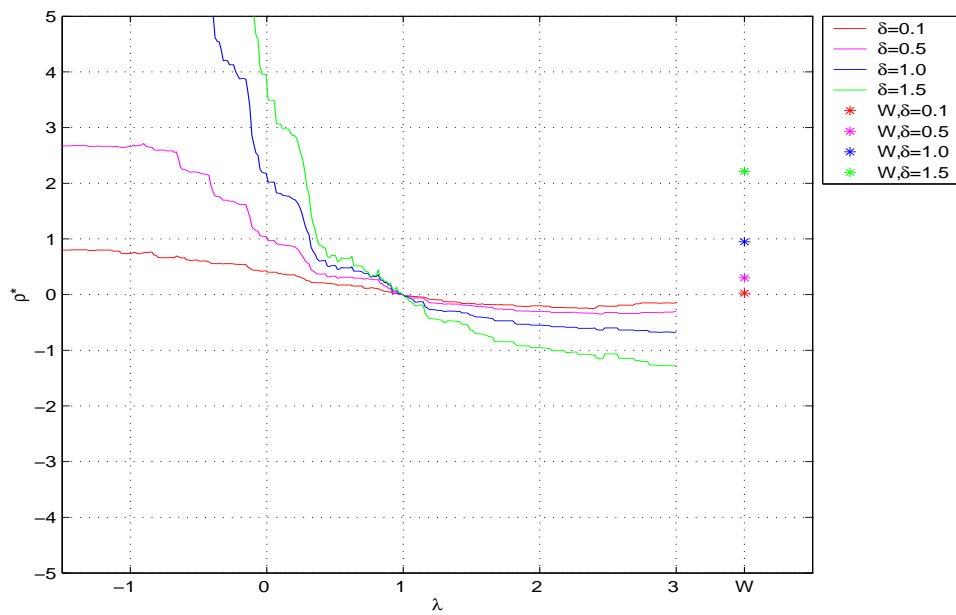


Figura 4.32: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario B.

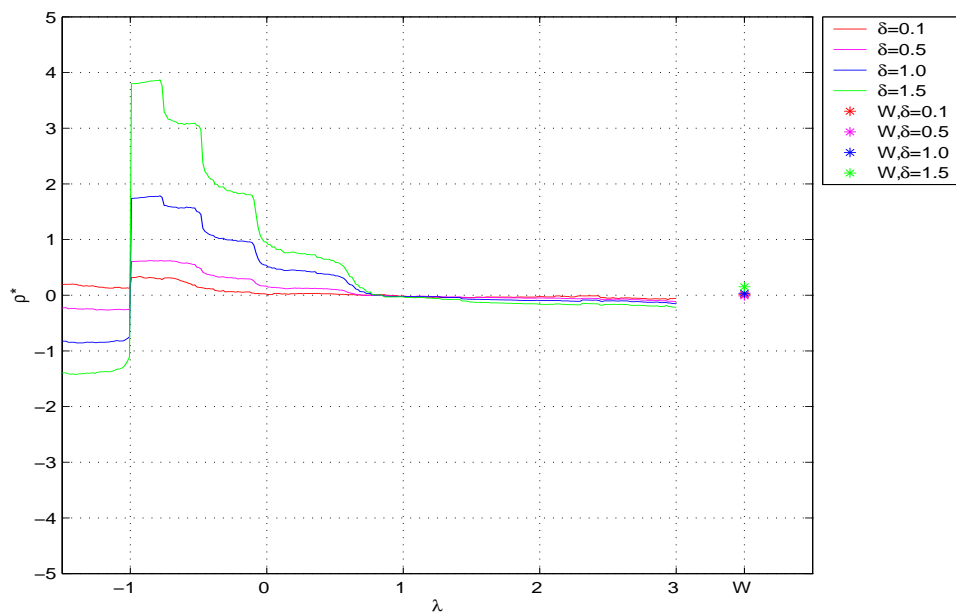


Figura 4.33: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario C.

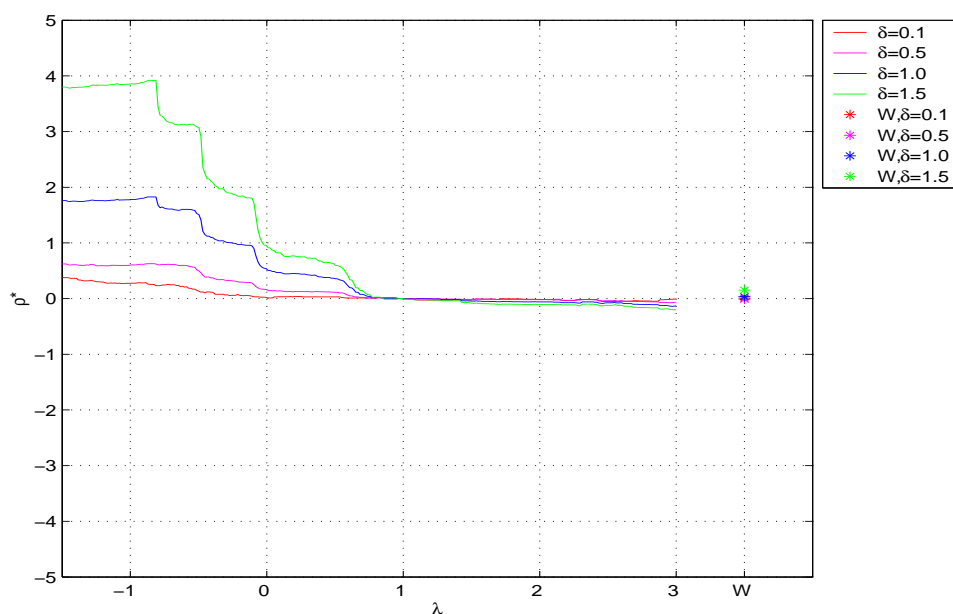


Figura 4.34: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario C.

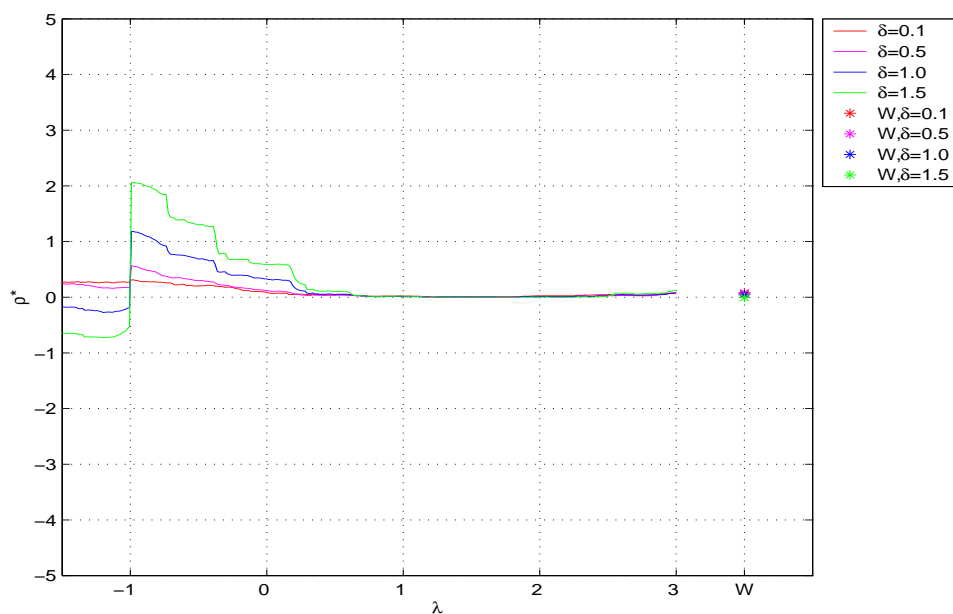


Figura 4.35: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario D.

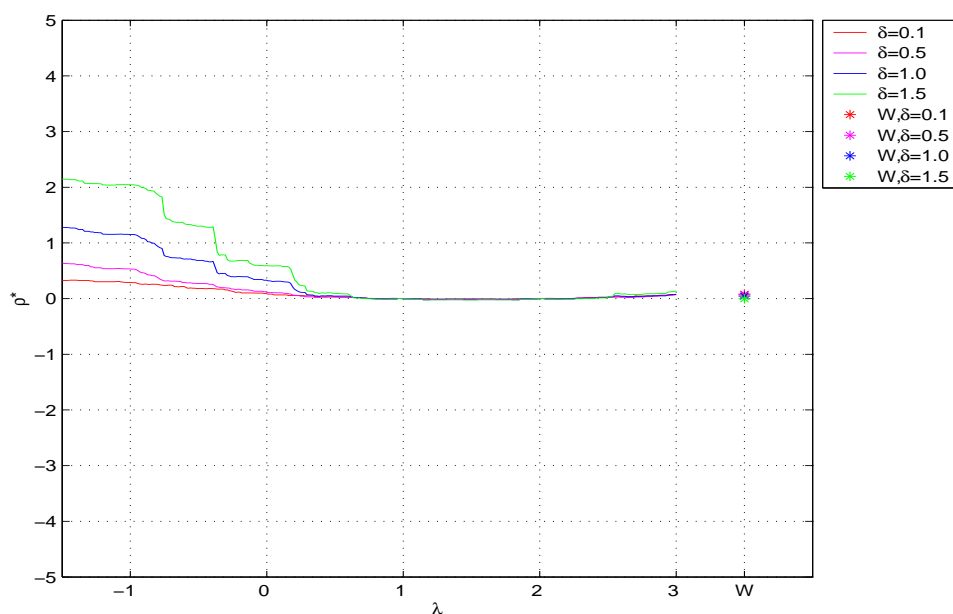


Figura 4.36: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario D.

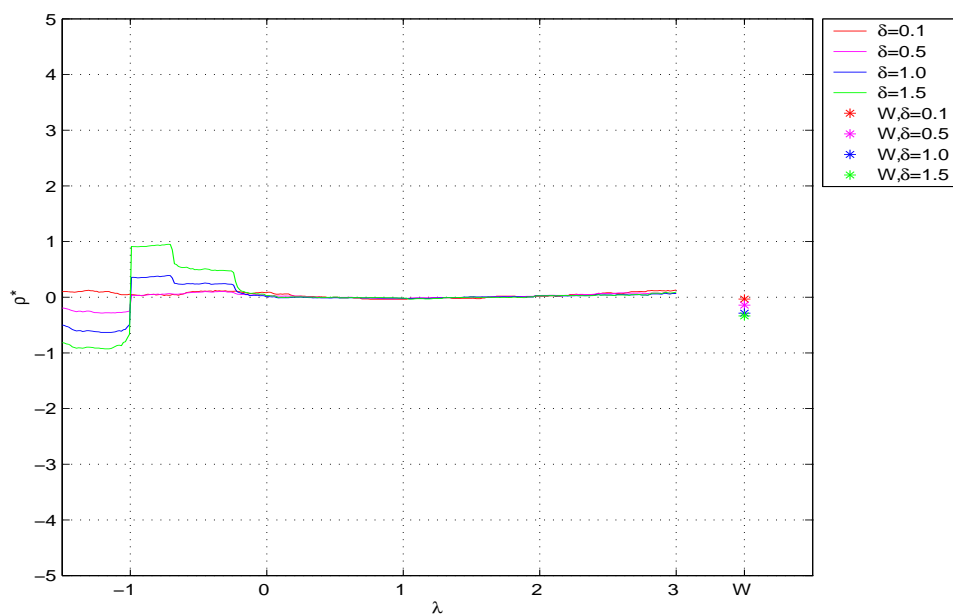


Figura 4.37: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario E.

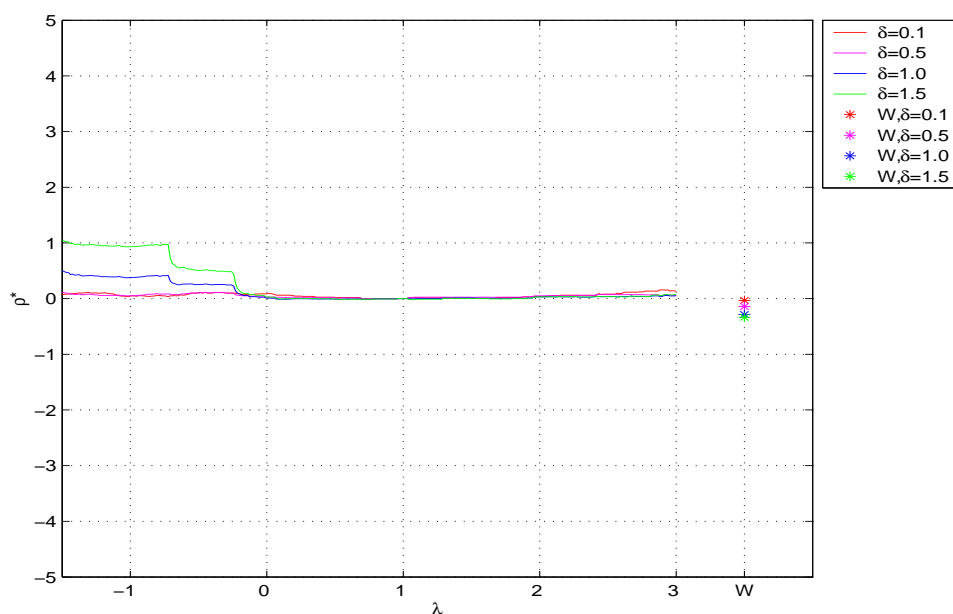


Figura 4.38: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario E.

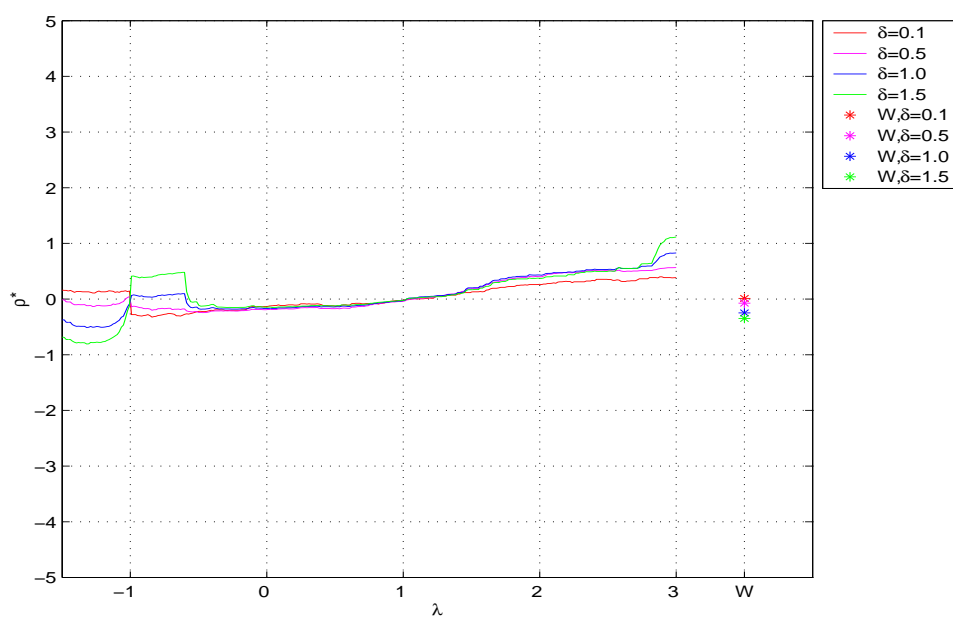


Figura 4.39: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario F.

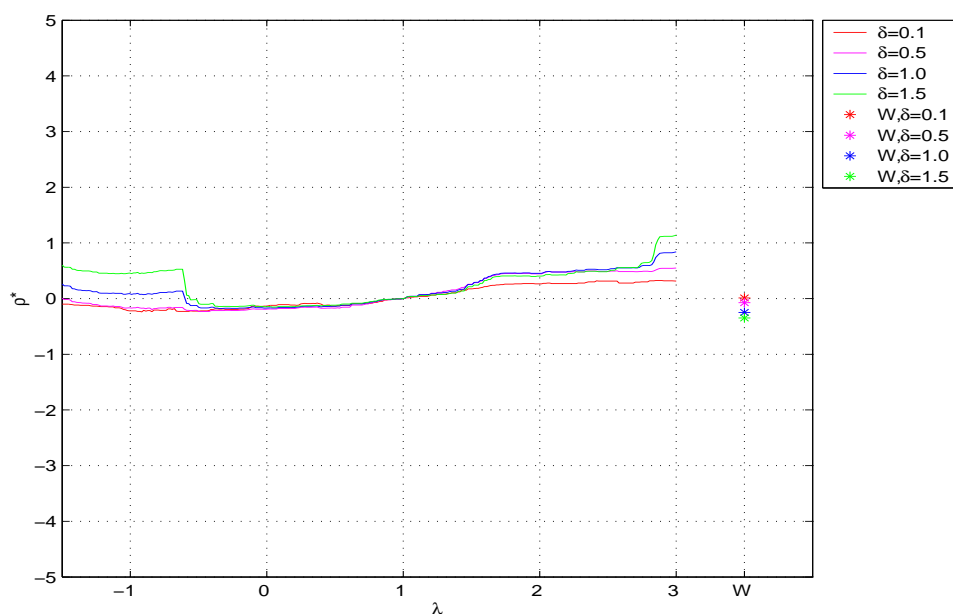


Figura 4.40: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario F.

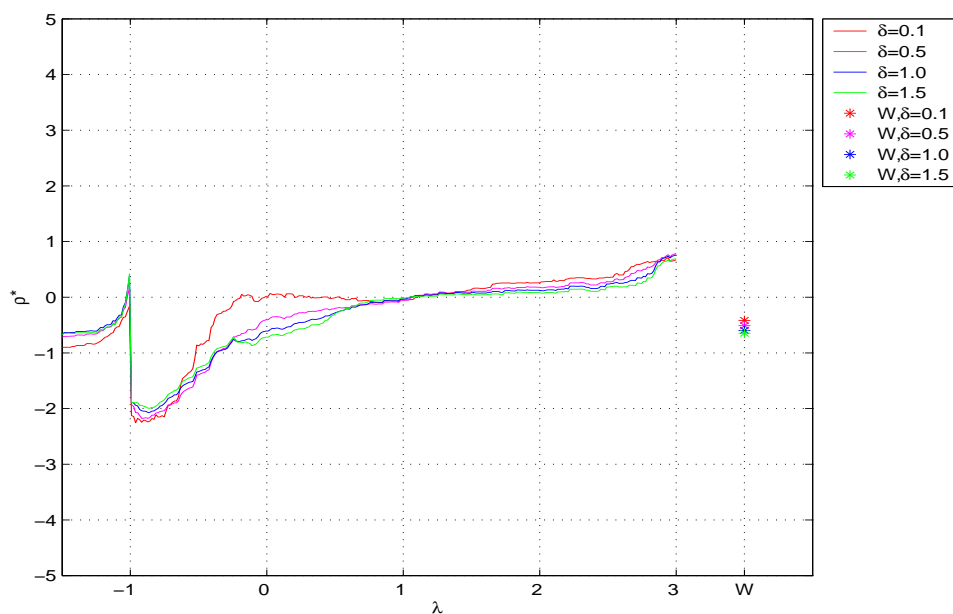


Figura 4.41: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario G.

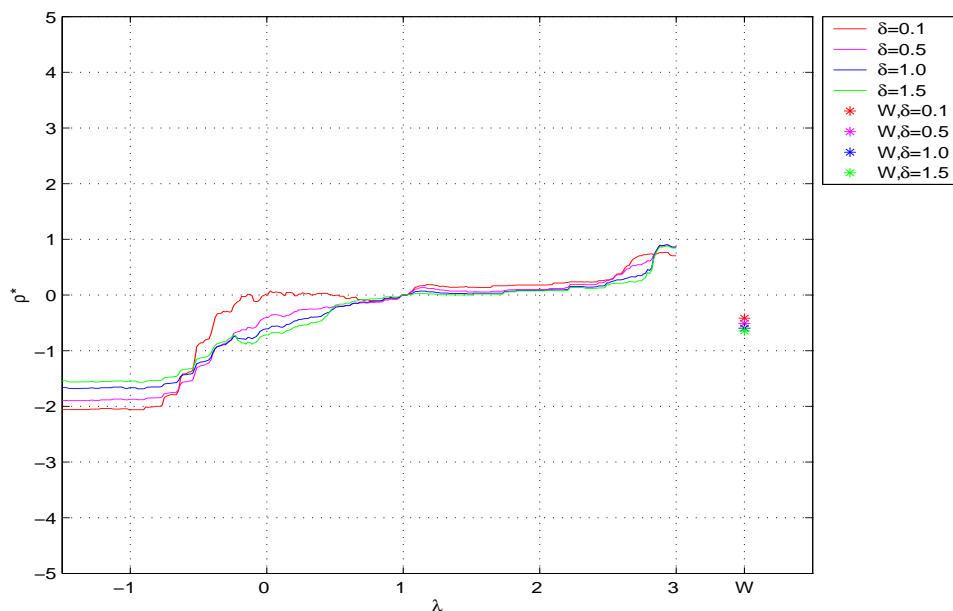


Figura 4.42: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ además de W , con respecto a X^2 para el Escenario G.

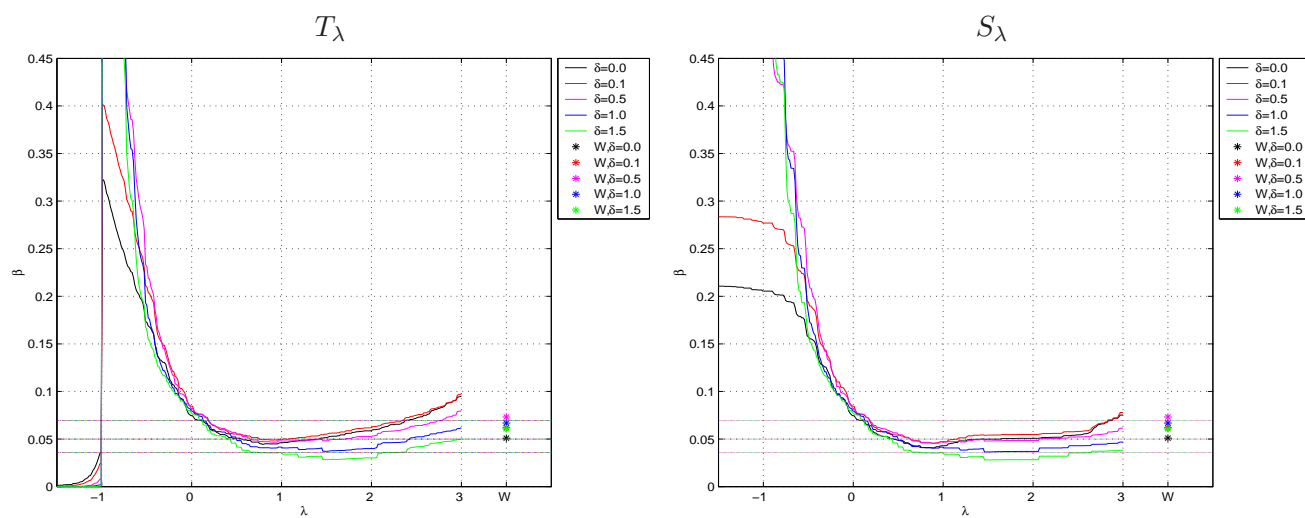


Figura 4.43: Potencias para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y W en el Escenario A.

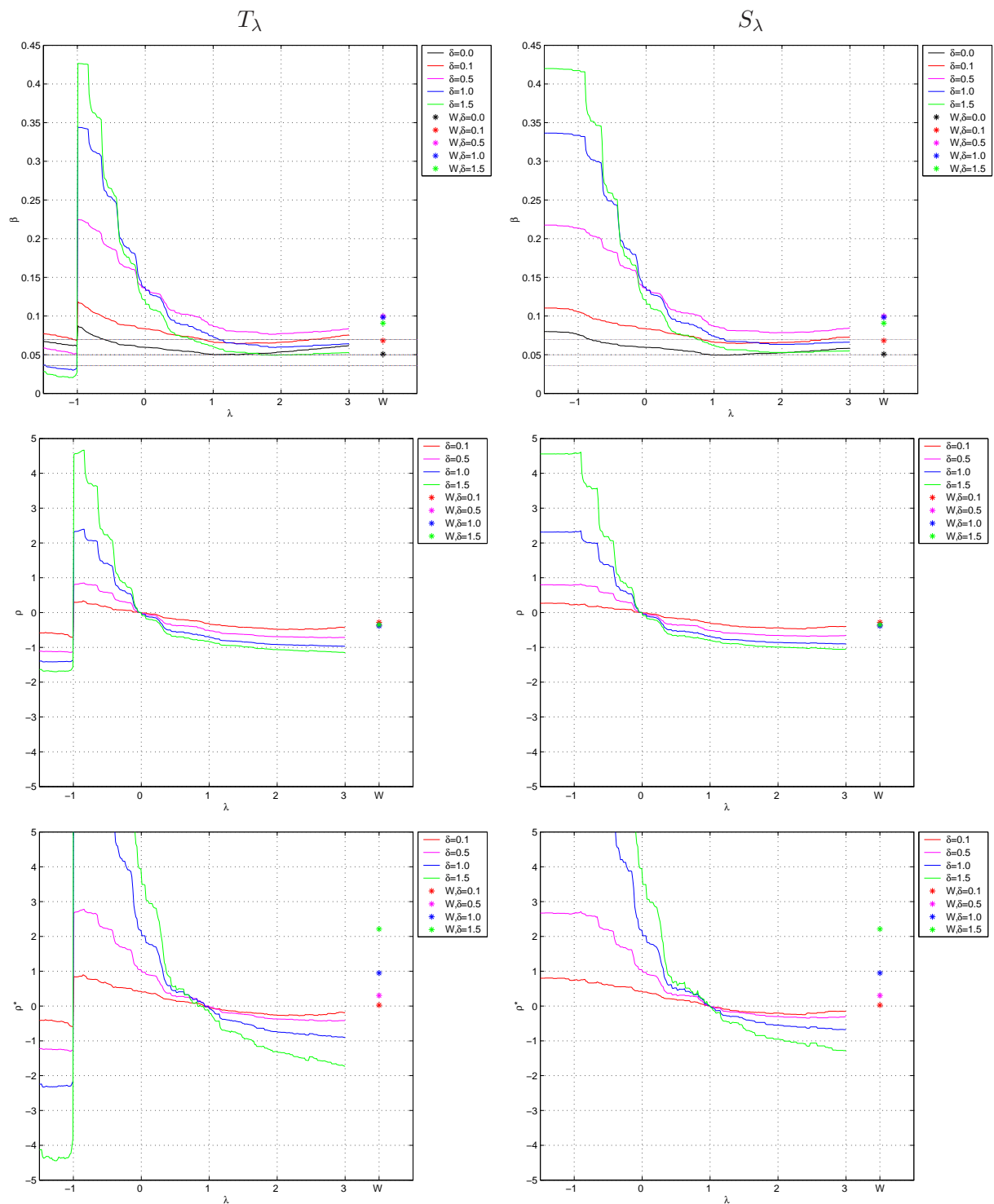


Figura 4.44: Potencias para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y W en el Escenario B.

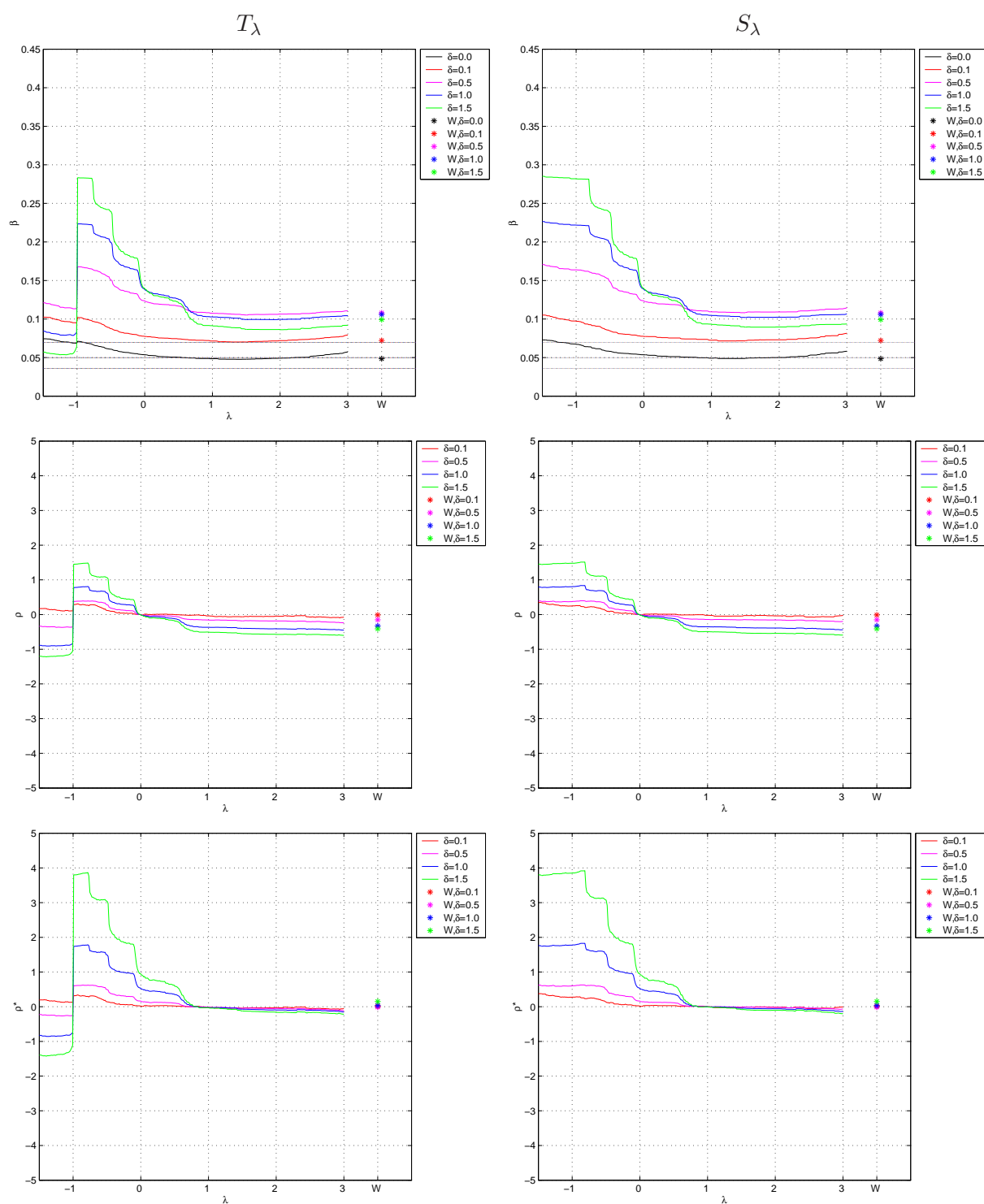


Figura 4.45: Potencias para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y W en el Escenario C.

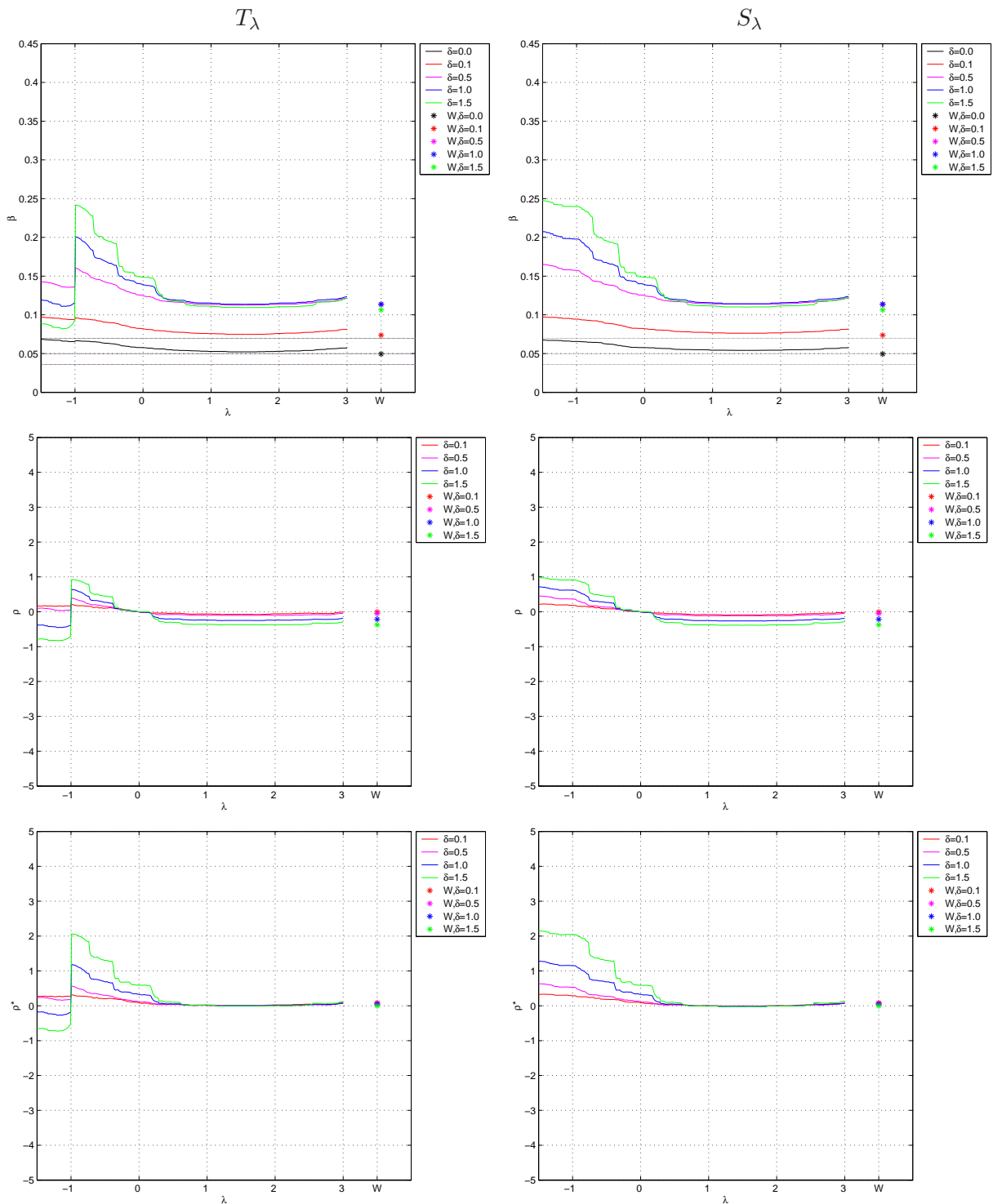


Figura 4.46: Potencias para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y W en el Escenario D.

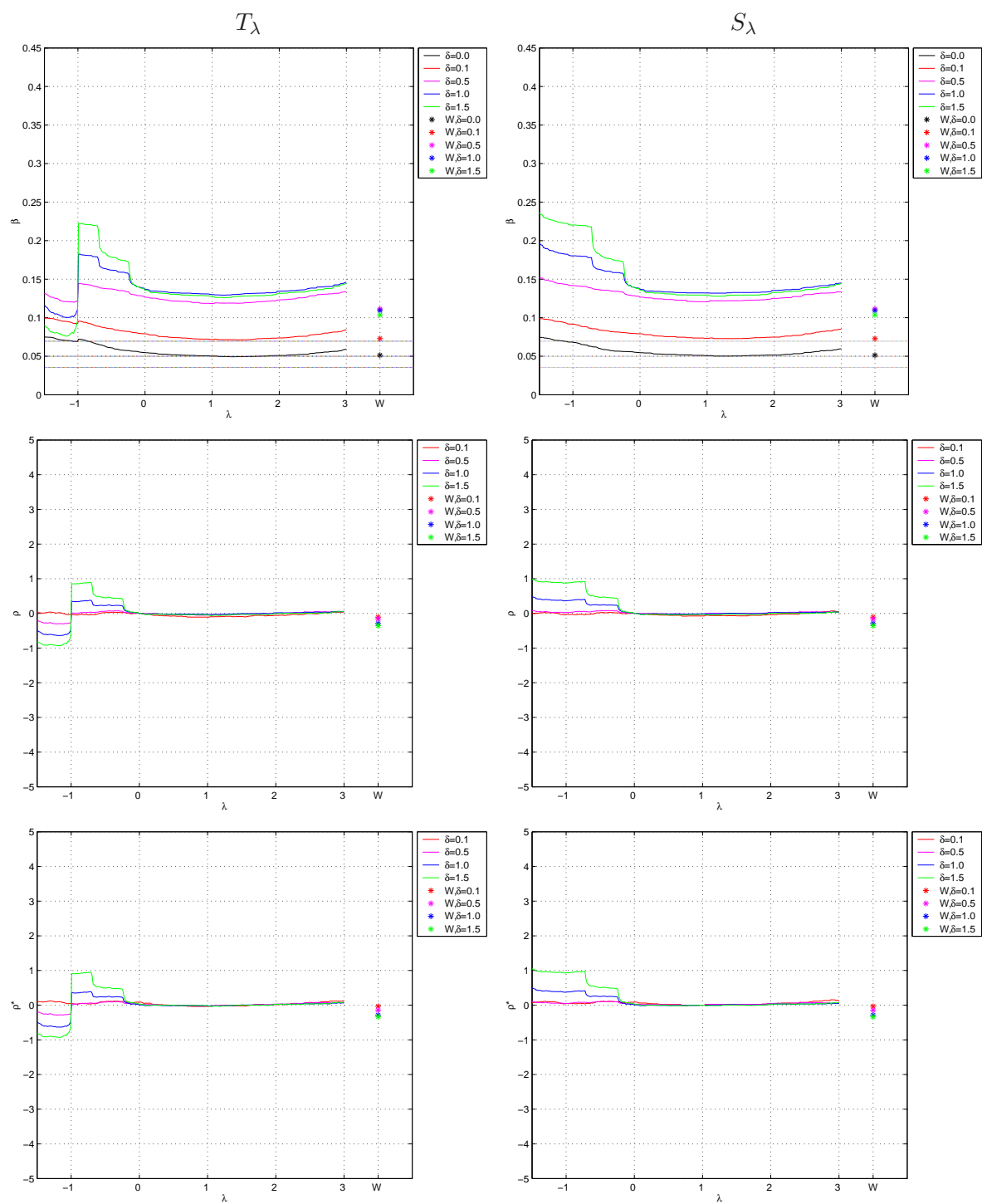


Figura 4.47: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario E.

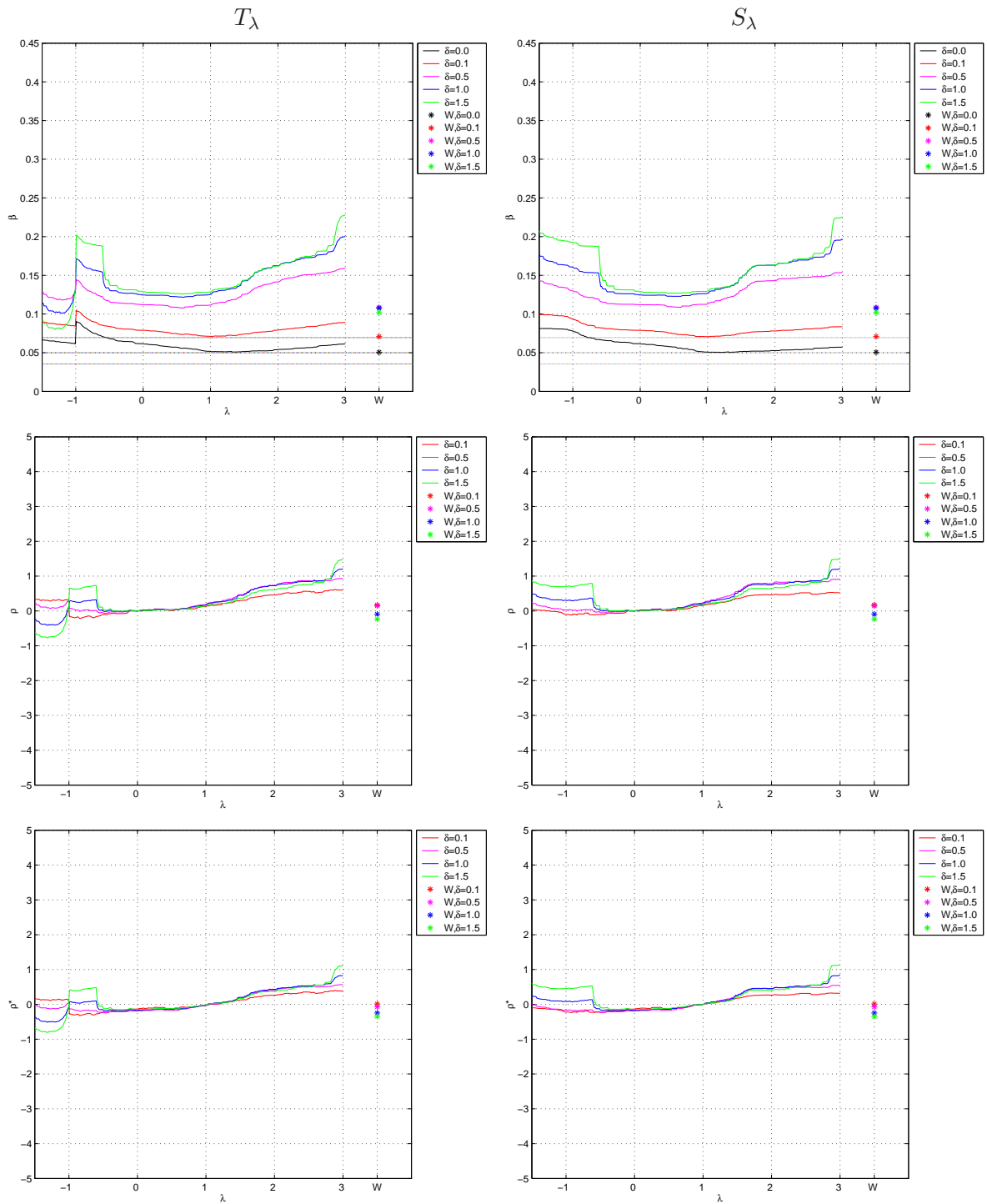


Figura 4.48: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario F.

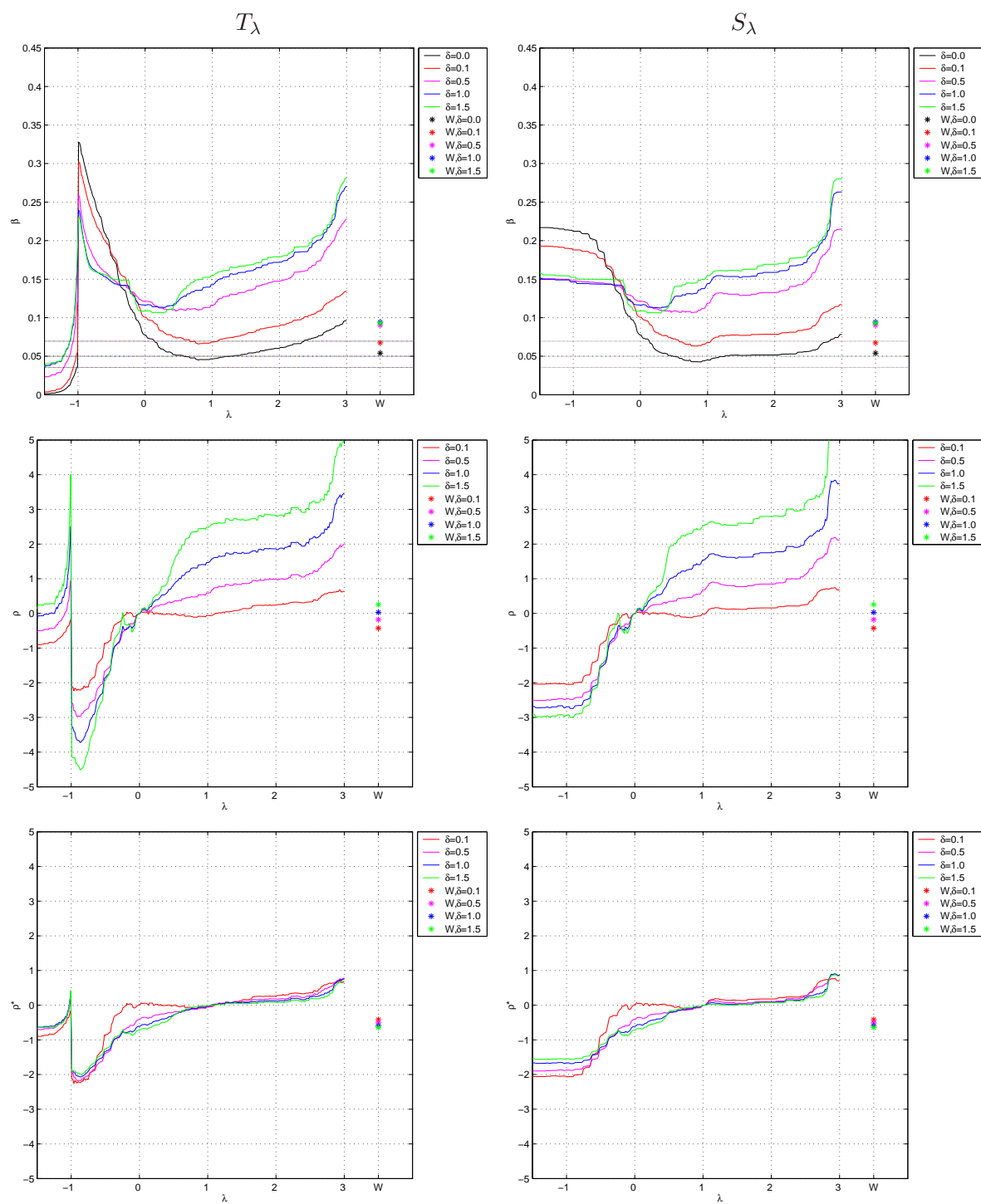


Figura 4.49: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario G.

4.6. Conclusiones del estudio de simulación

En esta Sección se analizan las gráficas obtenidas en el estudio de simulación para el ejemplo considerado en este Capítulo. Teniendo en cuenta las gráficas que representan las potencias para los estadísticos $W, T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ para valores de $\lambda \in [-1.5, 3]$ en las Figuras 4.1-4.14, se puede concluir fácilmente que algunos de los nuevos estadísticos que se plantean tienen mejor comportamiento en cuanto a la potencia que los estadísticos clásicos. Se puede apreciar que para los valores de $\lambda \in [-1, 3]$, la curva de potencia $\hat{\beta}_T$ tiene forma de U. Es decir, los valores más altos de la potencia corresponden a los extremos del intervalo, por lo tanto los estadísticos para estos valores de λ en los extremos del intervalo tendrán mayor potencia que los clásicos estadísticos mencionados anteriormente, el estadístico del cociente de verosimilitudes ($G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) y el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson ($X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$), que ambos se encuentran comprendidos en el interior del intervalo y consecuentemente la potencia será menor que en los extremos del mismo. Por lo tanto los estadísticos que se plantean tienen mejor comportamiento en cuanto a la potencia.

En cuanto a la segunda y tercera fila de las gráficas, a partir de la Figura 4.43, que corresponden respectivamente a las eficiencias locales ρ_T y ρ_T^* , hay que considerar los valores de $\lambda \in [-1, 0) \cup (1, 3]$ para que tengan valores positivos. Esta conclusión también corrobora lo anterior, los estadísticos que se plantean tienen mejor comportamiento en cuanto a la potencia que los clásicos estadísticos, el estadístico del cociente de verosimilitudes ($G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) y el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson ($X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$), ya que ambos se encuentran comprendidos en el interior del intervalo.

Los valores de ρ_T^* son más altos, en general, que los valores de ρ_T . Esto significa que los estadísticos considerados tienen mejor comportamiento comparados con X^2 , por lo tanto, se podría decir que G^2 es mejor que X^2 . Centrándonos en las gráficas a partir de la Figura 4.43, comparando las gráficas de la izquierda, referidas a ρ_T para $T = T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con respecto a las gráficas de la derecha, referidas a ρ_T para $T = S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, se puede apreciar que los valores de las eficiencias para $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ son ligeramente más altos que para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$. Por esta razón se puede concluir que los estadísticos $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1, 0)}$ son más eficientes que los clásicos estadísticos mencionados anteriormente, G^2 y X^2 en los escenarios B-E, y los estadísticos $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in (1, 3]}$ son más eficientes que los clásicos estadísticos mencionados anteriormente, G^2 y X^2 en los escenarios F-G. El estadístico de Wilcoxon es menos eficiente con respecto a los estadísticos clásicos G^2 para los escenarios B-E

y X^2 para los escenarios F-G.

Además, se puede hacer la siguiente observación. La ordenación de razón de verosimilitudes es una técnica útil comparando tratamientos en ensayos clínicos y por esta razón es de vital importancia proporcionar estadísticos de contraste para mejorar los clásicos ya conocidos. Habiendo considerado una distribución asintótica para dos tratamientos con restricciones de orden, los pesos necesarios para manejar la distribución ji-barra cuadrado asociada se calculan de una forma sencilla y la matriz necesaria para realizar estos cálculos $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, se puede interpretar en función del modelo loglineal de una forma igualmente sencilla.

El estudio de simulación muestra un buen comportamiento de los estadísticos de contraste propuestos en relación con los niveles de significación estimados. Para tamaños muestrales pequeños y moderados existen mejores elecciones, dentro de la familia de estadísticos basados en medidas de divergencia de Cressie-Read, que el estadístico del cociente de verosimilitudes y el estadístico de Wilcoxon. El mejor estadístico de contraste se da en un conjunto de valores de $\lambda \in [-1, 0) \cup (1, 3]$ que no suele ser muy común en la bibliografía de los estadísticos de contraste de Cressie-Read. Se puede destacar que

$$\begin{aligned} S_{-1/2} &= S_{d_{\phi_{-1/2}}}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 8n \left(1 - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J p_{ij}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) p_{ij}^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) \\ &= 4n \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J \left(p_{ij}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - p_{ij}^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)^2 \\ &= 4n \text{Hel}^2(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), \end{aligned}$$

donde

$$\text{Hel}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^J \left(p_{ij}^{\frac{1}{2}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - p_{ij}^{\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

es la distancia de Hellinger entre los vectores de probabilidad $\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ y $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$. Por lo tanto, uno de los estadísticos de contraste que se proponen en este Capítulo es función de la ya conocida distancia de Hellinger, que es conocido en diferentes problemas estadísticos. Este estadístico posee propiedades deseables para resolver este tipo de contrastes de hipótesis, puesto que cuando se trata de la ordenación del cociente de verosimilitudes, bajo la hipótesis alternativa, en el lado izquierdo de la tabla de contingencia tienden a aparecer celdas vacías. En particular, la probabilidad teórica en la primera celda para el segundo tratamiento, π_{21} , es la menor de todas

y esto influye en los resultados para tamaños muestrales asimétricos en ambos tratamientos.

Capítulo 5

El orden estocástico del cociente de verosimilitudes en tablas $I \times J$ y los estadísticos phi-divergencia

5.1. Estadísticos phi-divergencia en tablas $I \times J$

En este Capítulo se van a comparar I tratamientos cuando la variable respuesta es ordinal con J categorías. Se pueden considerar los I tratamientos como las I categorías ordinales de una variable aleatoria X . Sea Y la variable respuesta y sus probabilidades condicionadas

$$\boldsymbol{\pi}_i = (\pi_{i1}, \dots, \pi_{iJ})^T, \quad i = 1, \dots, I,$$

con

$$\pi_{ij} = P(Y = j/X = i), \quad j = 1, \dots, J.$$

Para el tratamiento i -ésimo y para cada uno de los individuos tomados independientemente de una muestra de tamaño n_i se clasifica su respuesta en las categorías consideradas $\{1, \dots, J\}$ siguiendo la distribución condicionada $Y/X = i$, denotada por $\boldsymbol{\pi}_i$. En este contexto, para cada distribución condicionada $\boldsymbol{\pi}_i$ y considerando un tamaño muestral n_i , la variable aleatoria de dimensión J asociada a las frecuencias observadas

$$\mathbf{N}_i = (N_{i1}, \dots, N_{iJ})^T$$

sigue una distribución multinomial de parámetros n_i y $\boldsymbol{\pi}_i$.

Se supone independencia entre los distintos tratamientos, por lo tanto, la distribución de la variable aleatoria de dimensión $I \times J$, $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_1^T, \dots, \mathbf{N}_I^T)^T$ es Producto-Multinomial.

Se comenzará con un ejemplo para motivar el problema que se abordará en esta Sección. Este ejemplo ha sido tomado de la Sección 5 en Dardanoni y Forcina (1998). En la Tabla 5.1 se clasifican a los pacientes de un hospital que padecen úlcera duodenal clasificados en orden creciente en $I = 4$ categorías de severidad de la operación, y el alcance de los efectos colaterales, clasificados en Ninguno, Leve y Moderado ($J = 3$).

	Ninguno	Leve	Moderado
Tratamiento 1	61	28	7
Tratamiento 2	68	23	13
Tratamiento 3	58	40	12
Tratamiento 4	53	38	16

Tabla 5.1: Extensión de los efectos colaterales para los cuatro tratamientos.

Se considera que el Tratamiento $i + 1$ es “al menos” tan bueno como el Tratamiento i , para $i = 1, \dots, I - 1$ simultáneamente, si $\frac{P(Y=j/X=i+1)}{P(Y=j/X=i)}$ es no-decreciente para todo $j \in \{1, \dots, J\}$, es decir

$$\frac{P(Y=j/X=i+1)}{P(Y=j/X=i)} \leq \frac{P(Y=j+1/X=i+1)}{P(Y=j+1/X=i)}, \quad \text{para cada } (i, j) \in \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\}. \quad (5.1)$$

Esta ordenación se denomina “ordenación del cociente de verosimilitudes”. Se puede llamar también “ordenación local de odds ratios” (según aparece en Silvapulle y Sen (2005), ver Capítulo 6). Conviene aclarar que una vez que un individuo es elegido para formar parte de la muestra del i -ésimo tratamiento, π_{ij} representa la probabilidad de que sea clasificado como la j -ésima categoría de la variable respuesta, es decir, $\pi_{ij} = P(Y = j/X = i) = P(\mathcal{M}(1, \boldsymbol{\pi}_i) = \mathbf{e}_j)$, siendo \mathbf{e}_j el vector unitario j -ésimo de la base canónica.

De forma análoga, el Tratamiento $i + 1$ es “estrictamente” mejor que el Tratamiento i , para $i = 1, \dots, I - 1$ simultáneamente, si (4.1) se cumple al menos con una desigualdad estricta. Para contrastar que el Tratamiento $i + 1$ es mejor que el Tratamiento i , para $i = 1, \dots, I - 1$ se

considera

$$H_0 : \frac{P(Y=j/X=i+1)}{P(Y=j/X=i)} = \frac{P(Y=j+1/X=i+1)}{P(Y=j+1/X=i)} \text{ para todo } (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}, \quad (5.2a)$$

$$H_1 : \frac{P(Y=j/X=i+1)}{P(Y=j/X=i)} \leq \frac{P(Y=j+1/X=i+1)}{P(Y=j+1/X=i)} \text{ para todo } (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\} \quad (5.2b)$$

$$\text{y } \frac{P(Y=j/X=i+1)}{P(Y=j/X=i)} < \frac{P(Y=j+1/X=i+1)}{P(Y=j+1/X=i)} \text{ para algún } (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}.$$

En el ejemplo considerado en esta Sección para motivar el problema, la hipótesis nula significa que todos los tratamientos tienen efectos colaterales similares, mientras que la hipótesis alternativa significa que cuanto más severo es el tratamiento mayor es la probabilidad de tener efectos colaterales. Si se multiplica a ambos lados de (5.2a) y (5.2b) por $\left(\frac{P(Y=j/X=i+1)}{P(Y=j/X=i)}\right)^{-1}$ se obtiene

$$H_0 : \vartheta_{ij} = 1, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}, \quad (5.3a)$$

$$H_1 : \vartheta_{ij} \geq 1 \text{ para todo } (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\} \quad (5.3b)$$

$$\text{y } \vartheta_{ij} > 1 \text{ para algún } (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\},$$

donde $\vartheta_{ij} = \frac{\pi_{ij}\pi_{i+1,j+1}}{\pi_{i+1,j}\pi_{i,j+1}}$ son los “odds ratios locales” (los odds ratios se pueden llamar también cocientes de productos cruzados).

Si el total de los tamaños muestrales se denota por $n = \sum_{i=1}^I n_i$, se tiene una variable aleatoria bidimensional con tamaño muestral n y distribución de probabilidad conjunta

$$p_{ij} = P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j/X=i) = \frac{n_i}{n}\pi_{ij}, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J.$$

Los “odds ratios locales” se pueden expresar en función de las probabilidades conjuntas de la siguiente forma

$$\vartheta_{ij} = \frac{p_{ij}p_{i+1,j+1}}{p_{i+1,j}p_{i,j+1}} = \frac{\pi_{ij}\pi_{i+1,j+1}}{\pi_{i+1,j}\pi_{i,j+1}}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, I-1\} \times \{1, \dots, J-1\}. \quad (5.4)$$

La definición dada en (5.1) no es específica para variables aleatorias con distribución multinomial, de hecho su concepción es bastante similar para cualquier variable que no sea necesariamente discreta. En Bapar y Kochar (1994), se menciona que algunas familias importantes de variables aleatorias como por ejemplo la familia de distribuciones exponenciales de un sólo parámetro, verifican la ordenación del cociente de verosimilitudes para ese parámetro. Para dos

muestras multinomiales independientes ($I = 2$), Dykstra y otros (1995) establecieron la distribución asintótica del estadístico del cociente de verosimilitudes y Dardanoni y Forcina (1998) lo extendieron para un problema general de I muestras multinomiales independientes. Recientemente, Davidov y otros (2010) han destacado su importancia considerándolo con métodos de verosimilitud empírica. Dykstra y otros (1995) argumentaron que la ordenación del cociente de verosimilitudes aplicada en el contexto de un muestreo producto multinomial es un método útil para hacer inferencia estadística enfocada hacia la comparación de los procesos de Poisson. El mérito del trabajo de Dardanoni y Forcina (1998) se basa no solamente en los resultados obtenidos para un caso general, sino también en la parametrización para encontrar la distribución asintótica del estadístico del cociente de verosimilitudes. Ellos unificaron el estudio de los tres tipos de ordenaciones con una misma parametrización, sin embargo no se consideraron que alguna de ellas fuera superior a las demás, por ejemplo la ordenación del cociente de verosimilitudes tiende a tener mejores potencias en comparación con la ordenación estocástica.

Retomando el problema que se presentaba al principio de este Capítulo, representando las probabilidades en una tabla con I filas que se corresponden con las categorías de la variable X y J columnas que se corresponden con las categorías de la variable Y , denotando por $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_I)^T$, con $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{iJ})^T$, $i = 1, \dots, I$, se obtiene la matriz de dimensión $I \times J$ y

$$\mathbf{p} = \text{vec}(\mathbf{P}^T) = (\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_I^T)^T \quad (5.5)$$

es el vector obtenido al apilar las columnas de \mathbf{P}^T (equivalentemente, las filas de la matriz \mathbf{P}). Obsérvese que las componentes del vector \mathbf{P} están ordenadas siguiendo el orden lexicográfico en \mathbf{p} .

Como se comentaba anteriormente, utilizando el “orden del cociente de verosimilitudes”, también llamado “orden de odds ratios locales” que puede definirse mediante $(I - 1)(J - 1)$ restricciones de desigualdad

$$\vartheta_{ij} \geq 1, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\} \quad (5.6)$$

sobre los “odds ratios locales”

$$\vartheta_{ij} = \frac{p_{ij}p_{i+1,j+1}}{p_{i+1,j}p_{i,j+1}} = \frac{\pi_{ij}\pi_{i+1,j+1}}{\pi_{i+1,j}\pi_{i,j+1}}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\}, \quad (5.7)$$

el contraste se puede definir de la siguiente manera

$$H_0 : \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{1}_{(I-1)(J-1)} \text{ frente a } H_1 : \boldsymbol{\vartheta} \geq \mathbf{1}_{(I-1)(J-1)} \text{ y } \boldsymbol{\vartheta} \neq \mathbf{1}_{(I-1)(J-1)}, \quad (5.8)$$

donde $\boldsymbol{\vartheta} = \text{vec}(\boldsymbol{\vartheta}_1, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_{I-1}) = (\boldsymbol{\vartheta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_{I-1}^T)^T$, con $\boldsymbol{\vartheta}_i = (\vartheta_{i1}, \dots, \vartheta_{i,J-1})^T$. Se observa que (5.8) requiere de $(I-1)(J-1)$ restricciones no-lineales sobre \boldsymbol{p} . Reparametrizando mediante el modelo loglineal saturado asociado a \boldsymbol{p} , de forma análoga al procedimiento utilizado en el Capítulo 4, se pueden obtener restricciones lineales sobre los nuevos parámetros.

El modelo loglineal saturado asociado a \boldsymbol{p} con parametrización canónica viene dado por:

$$\log p_{ij} = u + u_{1(i)} + \theta_{2(j)} + \theta_{12(ij)}, \quad (5.9)$$

verificando

$$u_{1(I)} = 0, \quad \theta_{2(J)} = 0, \quad \theta_{12(iJ)} = 0, i = 1, \dots, I-1, \quad \theta_{12(Ij)} = 0, j = 1, \dots, J. \quad (5.10)$$

Las condiciones (5.10) se imponen para garantizar la identificabilidad del modelo. Éstas, en concreto simplifican mucho los cálculos pero existen distintas formulaciones que conducen al mismo vector de probabilidades. Se han usado condiciones similares en Lang (1996, ejemplos de la Sección 7) y Silvapulle y Sen (2005, ejercicio 6.25 en la página 345).

Sean $\boldsymbol{\theta}_2 = (\theta_{2(1)}, \dots, \theta_{2(J-1)})^T$, $\boldsymbol{\theta}_{12(i)} = (\theta_{12(i1)}, \dots, \theta_{12(i,J-1)})^T$, $i = 1, \dots, I-1$, los subvectores de parámetros desconocidos del vector $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_2^T, \boldsymbol{\theta}_{12(1)}^T, \dots, \boldsymbol{\theta}_{12(I-1)}^T)^T$. Las componentes del vector $\boldsymbol{u} = (u, u_{1(1)}, \dots, u_{1(I-1)})^T$ representan los parámetros redundantes puesto que el término u se puede expresar en función de $\boldsymbol{\theta}$ ya que debe cumplirse la condición

$$\begin{aligned} u = u(\boldsymbol{\theta}) &= \log n_I - \log n - \log \sum_{j=1}^J \exp\{\theta_{2(j)}\} \\ &= \log n_I - \log n - \log (1 + \mathbf{1}_{J-1}^T \exp\{\boldsymbol{\theta}_2\}), \end{aligned} \quad (5.11)$$

e igualmente sucede para $u_{1(i)}, i = 1, \dots, I - 1$, ya que

$$\begin{aligned} u_{1(i)} &= u_{1(i)}(\boldsymbol{\theta}) = \log n_i - \log n - \log \sum_{j=1}^J \exp\{\theta_{2(j)} + \theta_{12(ij)}\} - u(\boldsymbol{\theta}). \\ &= \log n_i - \log n_I + \log \left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\{\theta_{2(j)}\} \right) - \log \left(1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp\{\theta_{2(j)} + \theta_{12(ij)}\} \right) \\ &= \log \frac{n_i}{n_I} + \log \frac{1 + \mathbf{1}_{J-1}^T \exp\{\boldsymbol{\theta}_2\}}{1 + \mathbf{1}_{J-1}^T \exp\{\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_{12(i)}\}}, \quad i = 1, \dots, I - 1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nótese que las expresiones de $u_{1(i)} = u_{1(i)}(\boldsymbol{\theta}), i = 1, \dots, I - 1$ y $u = u(\boldsymbol{\theta})$ se han obtenido teniendo en cuenta que para el muestreo Producto-Multinomial se tiene que $\sum_{j=1}^J p_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n_i}{n}, i = 1, \dots, I$.

En notación matricial, (5.9) se puede expresar mediante

$$\log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{W}_0, \mathbf{W}) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{W}_0 \mathbf{u} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}, \quad (5.13)$$

donde $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$ es el vector \mathbf{p} , cuyas componentes están definidas en (5.9) y

$$\mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_J, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix}.$$

La condición (5.7) se puede expresar mediante las siguientes restricciones lineales

$$\theta_{12(ij)} - \theta_{12(i+1,j)} - \theta_{12(i,j+1)} + \theta_{12(i+1,j+1)} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\}, \quad (5.14)$$

porque

$$\log \vartheta_{ij} = \log p_{ij} - \log p_{i+1,j} - \log p_{i,j+1} + \log p_{i+1,j+1} = \theta_{12(ij)} - \theta_{12(i+1,j)} - \theta_{12(i,j+1)} + \theta_{12(i+1,j+1)}.$$

Considerando las restricciones $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}$, con

$$\mathbf{R} = (\mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{R}_{12}), \quad \mathbf{R}_{12} = \mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1}, \quad (5.15)$$

siendo \mathbf{G}_h una matriz de dimensión $h \times h$ que tiene 1's en la diagonal principal y -1 's en la diagonal superior. Esta restricción es la versión matricial de (5.14). De esta forma, las hipótesis

formuladas en (5.2a)-(5.2b) o (5.3a)-(5.3b) se pueden expresar mediante

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)} \text{ frente a } H_1 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)} \text{ y } \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}. \quad (5.16)$$

Puesto que la expresión matricial anterior se reduce a $\mathbf{R}_{12}\boldsymbol{\theta}_{12} \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}$, en realidad la restricción solo afecta a la componente $\boldsymbol{\theta}_{12}$ de $\boldsymbol{\theta}$, lo cual quiere decir que $\boldsymbol{\theta}_2$ es un parámetro redundante.

La función de verosimilitud del modelo es $\mathcal{L}(\mathbf{N}; \mathbf{p}) = \prod_{i=1}^I k_i \prod_{j=1}^J \pi_{ij}^{N_{ij}}$, donde $k_i = n_i! / \prod_{j=1}^J N_{ij}!$, y el núcleo de la función de logverosimilitud, en términos de \mathbf{p} , es

$$\ell(\mathbf{N}; \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J N_{ij} \log p_{ij}. \quad (5.17)$$

Considerando la nueva parametrización, $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$, en (5.17) se obtiene

$$\ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}^T \log \mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}^T \mathbf{W}_0 \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{N}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\theta} = n u(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^{I-1} n_i u_{1(i)}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{N}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}.$$

5.2. Estadísticos phi-divergencia

El espacio paramétrico bajo la hipótesis nula H_0 es $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{I(J-1)} : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}\}$ y el estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ en Θ_0 es $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta})$. El espacio paramétrico es $\Theta = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{I(J-1)} : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}\}$ y el estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ en Θ es $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta})$.

El estadístico del cociente de verosimilitudes para contrastar las hipótesis dadas en (5.8) es

$$G^2 = 2(\ell(\mathbf{N}; \tilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\mathbf{N}; \hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2n(u(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - u(\hat{\boldsymbol{\theta}})) + 2n \sum_{i=1}^{I-1} (u_{1(i)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - u_{1(i)}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) + 2\mathbf{N}^T \mathbf{W} (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (5.18)$$

y el estadístico chi-cuadrado para contrastar las hipótesis (5.8) es

$$X^2 = n \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))^2}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}. \quad (5.19)$$

Sean $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{N}/n$ el vector de frecuencias relativas,

$$d_{Kull}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}}$$

la medida de divergencia de Kullback-Leibler entre dos vectores de probabilidad de dimensión IJ , \mathbf{p} y \mathbf{q} , y

$$d_{Pearson}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(p_{ij} - q_{ij})^2}{q_{ij}}$$

la medida de divergencia de Pearson entre los vectores de probabilidad \mathbf{p} y \mathbf{q} . Se puede comprobar que

$$G^2 = 2n(d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})))$$

y

$$X^2 = 2nd_{Pearson}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})).$$

Las medidas de divergencia de Kullback-Leibler y Pearson son un caso particular de la familia de medidas de divergencia que se va a definir a continuación. Se define la ϕ -divergencia entre los vectores de probabilidad \mathbf{p} y \mathbf{q} mediante

$$d_{\phi}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q_{ij} \phi \left(\frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right), \quad (5.20)$$

donde $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa que verifica las siguientes condiciones de regularidad

$$\phi(1) = \phi'(1) = 0, \quad \phi''(1) > 0,$$

$$0 \phi\left(\frac{0}{0}\right) = 0, \quad 0 \phi\left(\frac{p}{0}\right) = p \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\phi(u)}{u}, \quad \text{para } p \neq 0.$$

Para resolver el contraste formulado en (5.16) se van a considerar dos familias de estadísticos basados en medidas de ϕ -divergencia,

$$T_{\phi}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\phi''(1)} (d_{\phi}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{\phi}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))) \quad (5.21)$$

y

$$S_{\phi}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\phi''(1)} d_{\phi}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})). \quad (5.22)$$

Estas dos familias de estadísticos de contraste se pueden considerar como una extensión natural del estadístico del cociente de verosimilitudes y del estadístico ji-cuadrado respectivamente. De hecho, si se toma la función $\phi(x) = x \log x - x + 1$ en (5.21), se obtiene el estadístico del cociente de verosimilitudes y tomando $\phi(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$ en (5.22) se obtiene el estadístico ji-cuadrado.

5.3. Distribución asintótica de los estadísticos phi-divergencia

Para el muestreo Producto-Multinomial, si se considera la matriz particionada $\mathbf{W}^T = (\mathbf{W}_1^T, \dots, \mathbf{W}_I^T)$, que verifica $\log \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\theta}) = u \mathbf{1}_J + u_{1(i)} \mathbf{1}_J + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta}$, $i = 1, \dots, I - 1$, $\log \mathbf{p}_I(\boldsymbol{\theta}) = u \mathbf{1}_J + \mathbf{W}_I \boldsymbol{\theta}$, e $\mathcal{I}_{F,i}^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}_i^T (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\pi}_i^T(\boldsymbol{\theta})) \mathbf{W}_i$, se tiene que la matriz de información de Fisher es

$$\mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^I \frac{n_i}{n} \mathcal{I}_{F,i}^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{W}^T \left(\bigoplus_{i=1}^I \frac{n_i}{n} (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta})} - \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\pi}_i^T(\boldsymbol{\theta})) \right) \mathbf{W}, \quad (5.23)$$

donde $\bigoplus_{h=1}^a \mathbf{A}_h$ representa la suma directa entre las matrices $\{\mathbf{A}_h\}_{h=1}^a$.

En el Teorema 10 se va a establecer la matriz de información de Fisher, cuando $n \rightarrow \infty$, bajo la hipótesis

$$\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \dots = \boldsymbol{\pi}_I(\boldsymbol{\theta}_0) = (\pi_1(\boldsymbol{\theta}_0), \dots, \pi_J(\boldsymbol{\theta}_0))^T = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0), \quad i = 1, \dots, I,$$

que es equivalente a la hipótesis nula (5.2a) ó (5.3a).

Sea el subvector $\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0) = (\pi_1(\boldsymbol{\theta}_0), \dots, \pi_{J-1}(\boldsymbol{\theta}_0))^T$ que resulta al eliminar la componente J -ésima, $\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)$, del vector $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Si se considera el vector de probabilidad

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_I)^T,$$

tal que $\nu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}$, $i = 1, \dots, I$, se denota por $\boldsymbol{\nu}^* = (\nu_1, \dots, \nu_{I-1})^T$ al subvector que resulta al eliminar la componente I -ésima, ν_I , del vector $\boldsymbol{\nu}$.

Teorema 10 Si se denota por $\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta})$ cuando $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$, se tiene que

$$\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\nu}^{*T} \\ \boldsymbol{\nu}^* & \bigoplus_{i=1}^{I-1} \nu_i \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0)). \quad (5.24)$$

Demostración. Sustituyendo $\boldsymbol{\theta}$ por $\boldsymbol{\theta}_0$ y la expresión explícita de la matriz \mathbf{W} en la expresión general de la matriz de información de Fisher para tamaños muestrales finitos y considerando dos muestras multinomiales independientes, (5.23), a partir de la propiedad del producto de Kronecker dada en (1.22) de Harville (2008, página 341) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix}^T \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix}^T \right) \left(\left(\bigoplus_{i=1}^I \frac{n_i}{n} \right) \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\theta}_0)) \right) \\ &\times \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{I-1}^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bigoplus_{i=1}^I \frac{n_i}{n} \\ \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{I}_{I-1} \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix}^T (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\theta}_0)) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{J-1} \\ \mathbf{0}_{J-1}^T \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_{I-1}}{n}) \\ (\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_{I-1}}{n})^T & \left(\bigoplus_{i=1}^{I-1} \frac{n_i}{n} \right) \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0)), \end{aligned}$$

que da lugar a (5.24) cuando n tiende a ∞ . ■

En el siguiente Teorema se presenta la distribución asintótica bajo la hipótesis nula para las familias de estadísticos propuestos.

Se considera el conjunto de índices $E = \{1, \dots, (I-1)(J-1)\}$ correspondientes a las filas de la matriz \mathbf{R} . La familia de los posibles subconjuntos de E se denota por $\mathcal{F}(E)$ y se considera una submatriz de \mathbf{R} con las filas de $S \in \mathcal{F}(E)$ que se denota por $\mathbf{R}(S)$.

Como posteriormente se necesitará en la demostración del resultado fundamental de este Capítulo, se abordará a continuación el siguiente problema de contraste

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)} \quad \text{frente a} \quad H_1 : \mathbf{R}(S)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{\text{card}(S)} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}. \quad (5.25)$$

Sea $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)$ el estimador de $\boldsymbol{\theta}$ tal que $\widehat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ en $\Theta(\bullet) = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{I(J-1)} : \boldsymbol{R}(\bullet)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}\}$. Obsérvese que para $\bullet = \emptyset$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\emptyset) = \bar{\boldsymbol{\theta}}$ y $\boldsymbol{R}(\emptyset) = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times (IJ-1)}$, mientras que para $\bullet = E$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(E) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\boldsymbol{R}(E) = \boldsymbol{R}$.

Siguiendo el mismo proceso que se utilizó para construir las familias de los estadísticos (5.21) y (5.22), se consideran las siguientes familias de estadísticos basadas en las medidas de ϕ -divergencia

$$T_\phi(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\phi'(1)}(d_\phi(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\phi(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)))) \quad (5.26)$$

y

$$S_\phi(\boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\phi'(1)}d_\phi(\boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})). \quad (5.27)$$

Proposición 11 *Bajo la hipótesis nula del contraste (5.25), se verifica*

$$S_\phi(\boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = T_\phi(\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) + o_p(1), \quad (5.28)$$

de modo que la distribución asintótica de los estadísticos (5.26) y (5.27) es la misma, χ_{df}^2 con $df = (I-1)(J-1) - \text{card}(S)$.

Demostración. Se considera la función $d_\phi(\boldsymbol{\theta}) = d_\phi(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$ y se realiza el desarrollo en serie de Taylor de orden 2 en torno a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$

$$d_\phi(\boldsymbol{\theta}) = d_\phi(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) + (\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} d_\phi(\boldsymbol{\theta}) \right|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T \left. \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} d_\phi(\boldsymbol{\theta}) \right|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} (\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\boldsymbol{\theta} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right), \quad (5.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} d_\phi(\boldsymbol{\theta}) \right|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} &= \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}, \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} d_\phi(\boldsymbol{\theta}) \right|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}} &= \phi''(1) \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \end{aligned}$$

e $\mathcal{I}_F^{(n_1, n_2)}(\boldsymbol{\theta})$ es la matriz de información de Fisher definida anteriormente. Sea $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ el estimador de $\boldsymbol{\theta}$ tal que $\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$, donde $\boldsymbol{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \exp\{\boldsymbol{W}_0 \bar{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{W} \bar{\boldsymbol{\theta}}\}$, con $\bar{\boldsymbol{u}} = u(\bar{\boldsymbol{\theta}})$ y $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{N}}{n}$. Obsérvese que al no considerar ninguna restricción, el modelo loglineal anterior es el “saturado”. En particular, para $\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}}$ se tiene

$$d_\phi(\boldsymbol{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{\phi''(1)}{2}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right).$$

De forma totalmente análoga se obtiene

$$d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S))) = \frac{\phi''(1)}{2} (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(S))^T \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)) (\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(S)) + o\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(S)\|^2\right).$$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $\frac{2n}{\phi''(1)}$ y tomando las diferencias se tiene

$$\begin{aligned} T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= \frac{2n}{\phi''(1)} \left(d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\phi(\mathbf{p}(\bar{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S))) \right) \\ &= \sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2\right) \\ &\quad - \sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(S))^T \mathcal{I}_F^{(n_1, \dots, n_I)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)) \sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(S)) + o\left(\|\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(S))\|^2\right). \end{aligned}$$

Es bien conocido que

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet) - \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_k), \quad (5.30)$$

siendo $\boldsymbol{\theta}_0$ el verdadero valor del parámetro,

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, \bullet) = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet) (\mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(\bullet))^{-1} \mathbf{R}(\bullet) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0),$$

es la matriz de varianzas-covarianzas de $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\bullet)$, y $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}_k, \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0))$ por el Teorema Central del Límite. Se puede denotar por

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, E) = \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T (\mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0).$$

Restando ambos lados de la igualdad en (5.30) para $\bullet = \emptyset$ y $\bullet = E$, se obtiene

$$\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_k), \quad (5.31)$$

para $\bullet = \emptyset$ y $\bullet = S$,

$$\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(S)) = (\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S)) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_k), \quad (5.32)$$

y teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_F(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)$,

$$\begin{aligned}
& T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0))^T \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \\
&+ o_p(1) \\
&= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + o_p(1),
\end{aligned} \tag{5.33}$$

donde

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z},$$

con $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}, \mathbf{I}_{(I-1)(J-1)})$, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\beta}_0)$ es la matriz de la factorización de Cholesky para una matriz no singular como la matriz de la información de Fisher, $\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\beta}_0) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\beta}_0)^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\beta}_0)$. Es decir,

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_k, \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T),$$

donde la matriz de varianzas-covarianzas es idempotente y simétrica. Aplicando el Lema 3 recogido en Ferguson (1996, página 57), $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T$ es idempotente y simétrica, si y sólo si $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ es una variable aleatoria ji-cuadrado con grados de libertad

$$df = \text{rango}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T) = \text{traza}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T).$$

Como

$$(\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0))^T \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0),$$

entonces se verifica la condición. Los grados de libertad son

$$\begin{aligned}
df &= \text{traza}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)) - \text{traza}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)) \\
&= \text{traza}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)) - \text{traza}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)) \\
&= \text{traza}(-(\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1} \mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)) \\
&\quad - \text{traza}(-(\mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T) \\
&= (I-1)(J-1) - \text{card}(S).
\end{aligned}$$

Respecto a la familia de estadísticos $S_\phi(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))$, se observa que tomando $\boldsymbol{\theta} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)$ en (5.29) se obtiene

$$d_\phi(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S)) = \frac{\phi''(1)}{2}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \widehat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathcal{I}_F(\widehat{\boldsymbol{\theta}})(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) + o\left(\|\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \widehat{\boldsymbol{\theta}}\|^2\right).$$

Además, (5.31)–(5.32) es

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}(S) - \widehat{\boldsymbol{\theta}}) = (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_k),$$

y teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_F(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)$ y (5.33), se obtiene (5.28), lo que significa en términos del Teorema de Slutsky que ambas familias de estadísticos tienen la misma distribución asintótica. ■

Lema 2 *Sea \mathbf{Y} una variable aleatoria normal k -dimensional con distribución normal con vector de medias cero y matriz de varianzas-covarianzas la identidad. Sea \mathbf{Q} una matriz idempotente y simétrica de rango r y \mathbf{d}_i vectores de dimensión k que verifican $\mathbf{Q}\mathbf{d}_i = \mathbf{0}_k$ ó $\mathbf{Q}\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i$, $i = 1, \dots, k$. Entonces la distribución de la variable aleatoria*

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Q} \mathbf{Y}$$

condicionada a que $\mathbf{d}_i^T \mathbf{Y} \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ se distribuye como una ji-cuadrado con r grados de libertad.

Demostración. Se puede encontrar este resultado en diversas fuentes, por ejemplo en Kudô (1963, página 414), Barlow y otros (1972, página 128) y Shapiro (1985, página 139). ■

Teorema 11 *Bajo H_0 ,*

$$\sqrt{n} \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}, \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)),$$

donde

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\nu}) \otimes \mathbf{K}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)) \tag{5.34}$$

es la matriz de dimensión $(I-1)(J-1) \times (I-1)(J-1)$ que depende de las matrices tridiagonales

y simétricas $\mathbf{K}(\boldsymbol{\nu})$ y $\mathbf{K}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0))$ definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{q}) &= \mathbf{G}_{K-1} \mathbf{D}_{\mathbf{q}^*}^{-1} \mathbf{G}_{K-1}^T + \frac{1}{q_K} \mathbf{e}_{K-1} \mathbf{e}_{K-1}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{q_1+q_2}{q_1 q_2} & -\frac{1}{q_2} & & & & \\ -\frac{1}{q_2} & \frac{q_2+q_3}{q_2 q_3} & -\frac{1}{q_3} & & & \\ & -\frac{1}{q_3} & \frac{q_3+q_4}{q_3 q_4} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & -\frac{1}{q_{K-1}} \\ & & & -\frac{1}{q_{K-1}} & \frac{q_{K-1}+q_K}{q_{K-1} q_K} & \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde $\mathbf{q}^* = (q_1, \dots, q_{K-1})^T$, es el subvector del vector de probabilidad $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_K)^T$.

Demostración. Es bien conocido que, para modelos loglineales ordinarios sin restricciones,

$$\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}, \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)),$$

y a partir del Teorema 10,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\nu}^{*T} \\ \boldsymbol{\nu}^* & \bigoplus_{i=1}^{I-1} \nu_i \end{pmatrix}^{-1} \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_I} & -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1}^T \\ -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{D}_{\boldsymbol{\nu}^*}^{-1} + \frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} \mathbf{1}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)} \mathbf{1}_{J-1} \mathbf{1}_{J-1}^T \right). \end{aligned}$$

Entonces, como se tiene $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}$,

$$\sqrt{n} \mathbf{R}\bar{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}, \mathbf{R} \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T),$$

siendo \mathbf{R} la matriz definida en (5.15). Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) &= (\mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1}) \\ &\quad \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_I} & -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1}^T \\ -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{D}_{\boldsymbol{\nu}^*}^{-1} + \frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} \mathbf{1}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)} \mathbf{1}_{J-1} \mathbf{1}_{J-1}^T \right) \right) \\ &\quad \times (\mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1})^T \\ &= (\mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1}) \left(\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\nu}^*}^{-1} + \frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} \mathbf{1}_{I-1}^T \\ -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} \end{pmatrix} \otimes \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)} \mathbf{1}_{J-1} \mathbf{1}_{J-1}^T \right) \right) \\ &\quad (\mathbf{G}_{I-1}^T \otimes \mathbf{G}_{J-1}^T) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) = \left(\mathbf{G}_{I-1} \mathbf{D}_{\nu^*}^{-1} \mathbf{G}_{I-1}^T + \frac{1}{\nu_I} \mathbf{e}_{I-1} \mathbf{e}_{I-1}^T \right) \otimes \left(\mathbf{G}_{J-1} \mathbf{D}_{\pi^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} \mathbf{G}_{J-1}^T + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)} \mathbf{e}_{J-1} \mathbf{e}_{J-1}^T \right),$$

y entonces se verifica (5.34). ■

Teorema 12 *Bajo H_0 , la distribución asintótica de las familias de estadísticos $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ es*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x \right) \\ &= \sum_{h=0}^{(I-1)(J-1)} w_h(\boldsymbol{\theta}_0) P \left(\chi_{(I-1)(J-1)-h}^2 \leq x \right) \end{aligned}$$

siendo $\boldsymbol{\theta}_0$ el verdadero valor del parámetro, $\chi_0^2 \equiv 0$,

$$w_h(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{S \in \mathcal{F}(E), \text{card}(S)=h} P(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_h) P(\mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)-h}), \quad (5.36)$$

$\mathbf{Z}_1(S) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S))$, $\mathbf{Z}_2(S) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{(I-1)(J-1)-\text{card}(S)}, \boldsymbol{\Sigma}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S))$, con

$$\boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0), \quad (5.37)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{H}(S^C, S^C, \boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{H}(S^C, S, \boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{H}^{-1}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{H}^T(S^C, S, \boldsymbol{\theta}_0), \quad (5.38)$$

$S^C = E - S$, $\mathbf{H}(S_1, S_2, \boldsymbol{\theta}_0)$ es la matriz obtenida al eliminar en $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)$ la fila de índices que no pertenecen a S_1 , la columna de índices que no pertenecen a S_2 .

Demostración. Se analizará la demostración para $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$. Se supone que se verifica $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}$ y se quiere contrastar $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}$ (H_0). Es claro que si no se verifica H_0 entonces existe algún índice $i \in E$ tal que $\mathbf{R}(\{i\})\boldsymbol{\theta} > 0$. Se considera la familia de todos los posibles subconjuntos de E y se denota por $\mathcal{F}(E)$, entonces se puede sustituir $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ por $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$ cuando existe $S \in \mathcal{F}(E)$ tal que

$$\mathbf{R}(S)\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}_{\text{card}(S)} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}(S^C)\tilde{\boldsymbol{\theta}} > \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)-\text{card}(S)}.$$

Es evidente que para una muestra $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$ sólo lo verifica un único conjunto de índices $S \in \mathcal{F}(E)$, y aplicando el Teorema de la Probabilidad Total se tiene

$$P\left(S_{\phi}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x\right) = \sum_{S \in \mathcal{F}(E)} P\left(S_{\phi}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x, \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)\right).$$

De las condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker (consultar el Teorema 4.2.13 en Bazaraa y otros (2006)) para resolver el problema de optimización máx $\ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta})$ sujeto a las restricciones $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}$, asociado a $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^{(I-1)(J-1)} \lambda_i \mathbf{R}^T(\{i\}) = 0, \quad i = 1, \dots, (I-1)(J-1), \quad (5.39a)$$

$$\lambda_i \mathbf{R}(\{i\})\boldsymbol{\theta} = 0, \quad i = 1, \dots, (I-1)(J-1), \quad (5.39b)$$

$$\lambda_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, (I-1)(J-1), \quad (5.39c)$$

las únicas condiciones que caracterizan el estimador de máxima verosimilitud $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$ para un $S \in \mathcal{F}(E)$ concreto, son las condiciones de holgura complementaria $\mathbf{R}(\{i\})\boldsymbol{\theta} > 0$, para $i \in S$ y $\lambda_i < 0$, para $i \in S^C$, ya que las condiciones $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) + \lambda_i \mathbf{R}^T(\{i\}) = 0$, $i = 1, \dots, (I-1)(J-1)$, $\mathbf{R}(\{i\})\boldsymbol{\theta} = 0$, for $i \in S^C$ y $\lambda_i = 0$, para $i \in S$ son condiciones redundantes una vez que se sabe que se verifican las condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker para todos los conjuntos posibles $S \in \mathcal{F}(E)$ que definen $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$. Por esta razón se considera

$$P\left(S_{\phi}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x, \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)\right) = P\left(S_{\phi}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) < \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{R}(S^C)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) > \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)-\text{card}(S)}\right),$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ es el vector de los multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker asociados al estimador $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S)$. Bajo H_0 , se verifica $\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) - \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}_0$, ya que $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}$. En consecuencia,

$$P\left(S_{\phi}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x\right) = \sum_{S \in \mathcal{F}(E)} P\left(S_{\phi}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) < \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{R}(S^C)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) - \mathbf{R}(S^C)\boldsymbol{\theta}_0 > \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}\right),$$

donde $\text{card}(S^C) = (I-1)(J-1) - \text{card}(S)$. Las igualdades (5.39a) y (5.39b) se verifican para $(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(S), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T(S))^T$ de acuerdo con el método de los multiplicadores de Lagrange. Entonces se tiene que $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(S)$ y $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \hat{\boldsymbol{\lambda}}(S)$. Se verifica que:

- bajo $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(S)$, $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = S_\phi(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y teniendo en cuenta la Proposición 11

$$\begin{aligned} S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) + o_p(1) \\ &= \left(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} \right)^T \left(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} \right) + o_p(1), \\ &= \mathbf{Z}^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} + o_p(1). \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_k, \mathbf{I}_k)$.

- bajo $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \hat{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ y a partir de la expresión de Sen y otros (2010, página 267 fórmula (8.6.28)) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(S) &= \sqrt{n} \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S)}) \\ &= \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S)}), \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = -\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S) \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_0, S) (\mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S))^{-1};$$

- bajo $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(S)$ y de (5.30) se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left(\mathbf{R}(S^C) \tilde{\boldsymbol{\theta}}(S) - \mathbf{R}(S^C) \boldsymbol{\theta}_0 \right) &= \sqrt{n} \mathbf{R}(S^C) \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathbf{N}; \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S^C)}) \\ &= \mathbf{R}(S^C) \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T \mathbf{Z} + o_p(\mathbf{1}_{\text{card}(S^C)}). \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x \right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(E)} P \left(\mathbf{Z}_3^T(S) \mathbf{Z}_3(S) \leq x, \mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)} \right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(E)} P \left(\mathbf{Z}_3^T(S) \mathbf{Z}_3(S) \leq x \mid \mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)} \right) \\ &P \left(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)} \right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(E)} P \left(\mathbf{Z}_3^T(S) \mathbf{Z}_3(S) \leq x \mid (\mathbf{Z}_1^T(S), \mathbf{Z}_2^T(S))^T \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)} \right) \\ &P \left(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)} \right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_3(S) &= \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{Z}, & \mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T, \\ \mathbf{Z}_1(S) &= \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{Z}, & \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= -\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T, \\ \mathbf{Z}_2(S) &= \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{Z}, & \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S) &= \mathbf{R}(S^C)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)$ y $\mathbf{M}_3(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times \text{card}(S)}$, aplicando el Lema 2 se tiene

$$P\left(\mathbf{Z}_3^T(S)\mathbf{Z}_3(S) \leq x \mid (\mathbf{Z}_1^T(S), \mathbf{Z}_2^T(S))^T \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}\right) = P\left(\chi_{df}^2 \leq x\right),$$

donde

$$\begin{aligned} df &= \text{rango}\left(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T\right) = \text{traza}\left(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) - \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0)) \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_0)^T\right) \\ &= (I-1)(J-1) - \text{card}(S). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x\right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(E)} P\left(\chi_{(I-1)(J-1) - \text{card}(S)}^2 \leq x\right) P\left(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{(I-1)(J-1)} P\left(\chi_{(I-1)(J-1)-j}^2 \leq x\right) \sum_{S \in \mathcal{F}(E), \text{card}(S)=j} P\left(\mathbf{Z}_1(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{Z}_2(S) \geq \mathbf{0}_{\text{card}(S^C)}\right), \end{aligned}$$

y como $\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{0}_{\text{card}(S) \times (I-1)(J-1)}$, se tiene que $\mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{0}_{\text{card}(S) \times \text{card}(S^C)}$ lo que significa que $\mathbf{Z}_1(S)$ y $\mathbf{Z}_2(S)$ son independientes, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq x\right) = \sum_{j=0}^{(I-1)(J-1)} P\left(\chi_{(I-1)(J-1)-j}^2 \leq x\right) w_h(\boldsymbol{\theta}_0)$$

donde la expresión de $w_h(\boldsymbol{\beta}_0)$ es (5.36). También se tiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{Z}_1(S)) &= \mathbf{M}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathbf{M}_1^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S)\mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \\ &= (\mathbf{R}(S)\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{R}^T(S))^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{\theta}_0, S), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{Z}_2(S)) &= \mathbf{M}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{M}_2^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) = \mathbf{R}(S^C) \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathcal{I}_F(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{R}^T(S^C) \\ &= \mathbf{R}(S^C) \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_0, S) \mathbf{R}^T(S^C) = \boldsymbol{\Sigma}_2(\boldsymbol{\theta}_0, S).\end{aligned}$$

La demostración para $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ resulta casi inmediata a partir de la demostración para $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y teniendo en cuenta que para algún $S \in \mathcal{F}(E)$

$$T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(S)), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) + o_p(1) = S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})).$$

Finalmente, siguiendo argumentos similares a los de Martín y Balakrishnan (2013) se obtiene $\mathbf{H}(S, S, \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{R}(S) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(S)$. De esta forma se obtiene la expresión de

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \mathbf{H}(E, E, \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{R}(E) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{R}^T(E) \\ &= (\mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1}) \mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1})^T,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_F^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\nu}^{*T} \\ \boldsymbol{\nu}^* & \bigoplus_{i=1}^{I-1} \nu_i \end{pmatrix}^{-1} \otimes (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)} - \boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\pi}^{*T}(\boldsymbol{\theta}_0))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_I} & -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1}^T \\ -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{D}_{\boldsymbol{\nu}^*}^{-1} + \frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} \mathbf{1}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)} \mathbf{1}_{J-1} \mathbf{1}_{J-1}^T \right),\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) &= (\mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1}) \\ &\quad \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_I} & -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1}^T \\ -\frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} & \mathbf{D}_{\boldsymbol{\nu}^*}^{-1} + \frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} \mathbf{1}_{I-1}^T \end{pmatrix} \otimes \left(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)} \mathbf{1}_{J-1} \mathbf{1}_{J-1}^T \right) \right) \\ &\quad \times (\mathbf{0}_{(I-1)(J-1) \times (J-1)}, \mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1})^T \\ &= (\mathbf{G}_{I-1} \otimes \mathbf{G}_{J-1}) \left(\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\nu}^*}^{-1} + \frac{1}{\nu_I} \mathbf{1}_{I-1} \mathbf{1}_{I-1}^T \\ \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)} \mathbf{1}_{J-1} \mathbf{1}_{J-1}^T \end{pmatrix} \right) \\ &\quad (\mathbf{G}_{I-1}^T \otimes \mathbf{G}_{J-1}^T) \\ &= \left(\mathbf{G}_{I-1} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\nu}^*}^{-1} \mathbf{G}_{I-1}^T + \frac{1}{\nu_I} \mathbf{e}_{I-1} \mathbf{e}_{I-1}^T \right) \otimes \left(\mathbf{G}_{J-1} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}_0)}^{-1} \mathbf{G}_{J-1}^T + \frac{1}{\pi_J(\boldsymbol{\theta}_0)} \mathbf{e}_{J-1} \mathbf{e}_{J-1}^T \right),\end{aligned}$$

y de esta forma se verifica (5.34). ■

A pesar de que solamente interviene $\boldsymbol{\theta}_{12}$ en (5.16), el resto de componentes de $\boldsymbol{\theta}$ son parámetros redundantes y por lo tanto hace falta estimar $\boldsymbol{\theta}$, a través de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

El siguiente resultado es muy útil para estimar los pesos de la distribución “ji-barra” mediante simulación.

Corolario 1 *Bajo H_0 , los pesos $w_h(\boldsymbol{\theta}_0)$ asociados a la distribución asintótica de $S_\phi(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $T_\phi(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, dadas en el Teorema 12, están dados por:*

$$\begin{aligned} w_{(I-1)(J-1)-h}(\boldsymbol{\theta}_0) &= w_h(\boldsymbol{\theta}_0; (I-1)(J-1), \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0), \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}) \\ &= P \left(\arg \min_{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}} (\mathbf{Q} - \boldsymbol{\zeta})^T \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{Q} - \boldsymbol{\zeta}) \in \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}(h) \right), \end{aligned} \quad (5.40)$$

con $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)$ dado en (5.34) y

$$\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\nu}) \otimes \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0)), \quad (5.41)$$

que depende de

$$\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_{K-1}^T (\mathbf{D}_{\mathbf{q}^*} - \mathbf{q}^* \mathbf{q}^{*T}) \mathbf{T}_{K-1}, \quad (5.42)$$

$\mathbf{T}_h = \mathbf{G}_h^{-1}$ es una matriz triangular superior de 1's, $\mathbf{Q} \sim \mathcal{N}_{(I-1)(J-1)}(\mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}, \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0))$, y $\mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}(h)$ es el subconjunto de $\mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)} = \{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{(I-1)(J-1)} : \boldsymbol{\zeta} \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}\}$, tal que h de las componentes del vector de dimensión $(I-1)(J-1)$ son estrictamente positivas y las $(I-1)(J-1) - h$ componentes restantes son nulas.

Demostración. Los pesos de una distribución “ji-barra” se pueden interpretar en términos de la proyección de una distribución normal centrada de dimensión p , \mathbf{Z}_p , con matriz de varianzas-covarianzas \mathbf{V} no singular, sobre un cono cerrado y convexo en \mathbb{R}^p , C , tal que

$$w_h(p, \mathbf{V}, C) = P(\Pi(\mathbf{Z}_p|C) \in \mathbb{R}_+^p(h))$$

donde

$$\Pi(\mathbf{Z}_p|C) = \arg \min_{\boldsymbol{\zeta} \in C} (\mathbf{Z}_p - \boldsymbol{\zeta})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{Z}_p - \boldsymbol{\zeta}).$$

La notación utilizada para los pesos en el Teorema 12, $w_h(\boldsymbol{\theta}_0)$, se corresponde con $w_h(\boldsymbol{\theta}_0; p, \mathbf{V}, C)$, por lo tanto hay que identificar el valor de p , la expresión para la matriz de varianzas-covarianzas \mathbf{V} y el conjunto C . En Kudô (1963, página 414) y en Shapiro (1988, página 54) se demuestra que

$$w_h(p, \mathbf{V}, \mathbb{R}_+^p) = \sum_{S \in \mathcal{F}(F), \text{card}(S)=p-h} P(\mathbf{Z}_{1,p}(S) \geq \mathbf{0}_h) P(\mathbf{Z}_{2,p}(S) \geq \mathbf{0}_{p-h}),$$

donde

$$F = \{1, \dots, p\}, \quad \mathbf{Z}_{1,p}(S) \sim \mathcal{N}_{\text{card}(S)}(\mathbf{0}_{\text{card}(S)}, \mathbf{V}(S)^{-1})$$

y

$$\mathbf{Z}_{2,p}(S) \sim \mathcal{N}_{\text{card}(F) - \text{card}(S)}(\mathbf{0}_{\text{card}(F) - \text{card}(S)}, \mathbf{V}(F - S, S)),$$

siendo $\mathbf{V}(S)$ la matriz de varianzas-covarianzas del vector aleatorio obtenido considerando únicamente las componentes de \mathbf{Z}_p que pertenecen a S y $\mathbf{V}(S, F - S)$ tiene una definición equivalente a la anterior pero en lugar de ignorar las componentes que no pertenecen a S se consideran iguales a cero. Este enunciado se recoge en Silvapulle y Sen (2005, página 83). Esta expresión encaja con (5.36).

Se tiene

$$p = (I - 1)(J - 1), \quad \mathbf{V} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) \quad , \quad C = \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}$$

y

$$\begin{aligned} & w_{(I-1)(J-1)-h}(\boldsymbol{\theta}_0; (I-1)(J-1), \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0), \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(F), \text{card}(S) = (I-1)(J-1)-h} P(\mathbf{Z}_{1,(I-1)(J-1)}(S) \geq \mathbf{0}_h) P(\mathbf{Z}_{2,(I-1)(J-1)}(S) \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)-h}), \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} & w_h(\boldsymbol{\theta}_0; (I-1)(J-1), \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0), \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}(F), \text{card}(S) = (I-1)(J-1)-h} P(\mathbf{Z}_{1,(I-1)(J-1)}(S) \geq \mathbf{0}_h) P(\mathbf{Z}_{2,(I-1)(J-1)}(S) \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)-h}), \end{aligned}$$

según la Proposición 3.6.1(7) recogida en Silvapulle y Sen (2005, página 82). ■

Puesto que el parámetro $\boldsymbol{\theta}_0$ tiene un valor desconocido, no se pueden utilizar directamente los resultados basados en el Teorema 12 o en el Corolario 1. Se puede reemplazar por su estimador de máxima verosimilitud bajo la hipótesis nula, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Los contrastes en los que se sustituye $\boldsymbol{\theta}_0$ por $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se llaman “contrastos locales” (consultar Dardanoni y Forcina (1998)) y normalmente son una buena aproximación a los contrastes teóricos. Es importante mencionar que $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ tiene una expresión explícita

$$p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{\nu}_i \pi_j(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad \hat{\nu}_i = \frac{n_i}{n}, \quad \pi_j(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{n} N_{\bullet j}, \quad N_{\bullet j} = \sum_{h=1}^I N_{hj}. \quad (5.43)$$

En base al Corolario 1 y teniendo en cuenta que (5.40) es equivalente a

$$w_h(\boldsymbol{\theta}_0) = P \left(\arg \min_{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\zeta} - (\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{Q})^T \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}(h) \right), \quad (5.44)$$

donde $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_0)$ es (5.34) y $\mathbf{Q} \sim \mathcal{N}_{(I-1)(J-1)}(\mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}, \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0))$, se pueden obtener los pesos asociados al muestreo mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo 4 Estimación de los pesos

Los pesos de los contrastes locales, $w_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, se obtienen por simulación, una vez que se dispone de una muestra \mathbf{n} de \mathbf{N} de la siguiente manera

ETAPA 1: Utilizando \mathbf{n} , calcular ν y $\pi(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ teniendo en cuenta (5.43).

ETAPA 2: Computar $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ según (5.34), en función de $\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\nu}})$, $\mathbf{K}(\pi(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, dados en (5.35).

ETAPA 3: Computar $\mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ según (5.42), en función de of $\mathbf{K}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\nu}})$, $\mathbf{K}^{-1}(\pi(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, dados en (5.42).

ETAPA 4: Para $h = 0, \dots, (I-1)(J-1)$, inicializar $N(h) := 0$.

ETAPA 5: Repetir los siguientes pasos R (repetir $R = 100\,000$) veces:

ETAPA 5.1: Generar una observación, $\mathbf{Q} \sim \mathcal{N}_{(I-1)(J-1)}(\mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}, \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0))$ Se utilizan las subrutinas NAG de la librería de Fortran G05CBF, G05EAF, y G05EZF.

ETAPA 5.2: Computar $\hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{q}) = \arg \min_{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}_+^{(I-1)(J-1)}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\zeta} - (\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{q})^T \boldsymbol{\zeta}$. Se utiliza la subrutina IMSL de la librería de Fortran DQPROG.

ETAPA 5.3: Contar en h^* , el número de componentes estrictamente positivas contenidas en $\hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{q})$, y hacer $N(h^*) := N(h^*) + 1$.

STEP 6: Calcular $w_h(\hat{\boldsymbol{\theta}}) := \frac{N(h)}{R}$ para $h = 0, \dots, (I-1)(J-1)$.

Se pueden consultar <http://www.nag.co.uk/numeric/fl/FLdescription.asp>, para obtener información acerca de las subrutinas NAG de la librería de Fortran, y también <http://www.roguewave.com/Portals/0/products/imsl-numerical-libraries/fortran-library/docs/7.0/math/math.htm> para las subrutinas IMSL de la librería de Fortran.

Cabe mencionar que los pesos pueden computarse utilizando el siguiente paquete de R `mvtnorm` (para más detalles ver <http://CRAN.R-project.org/package=mvtnorm>), sin embargo este método basado en integración numérica puede conducir a valores con alguna imprecisión.

5.4. Aplicación numérica

Como ejemplo de aplicación numérica se analizará el primer conjunto de datos tomado de la publicación de Dardanoni y Forcina (1998), recogido en la Sección 5, utilizando las familias de estadísticos propuestos en este Capítulo. Se consideran dos variables ordinales asociadas a $n = 417$ pacientes de úlcera duodenal en un hospital, la variable X =severidad de la operación, está clasificada en orden creciente desde A hasta D ($I = 4$), y la variable Y =extensión de los efectos colaterales, clasificados como Ninguno, Ligero y Moderado ($J = 3$). La muestra, una realización de \mathbf{N} , se recoge en el siguiente vector

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{21}, n_{22}, n_{23}, n_{31}, n_{32}, n_{33}, n_{41}, n_{42}, n_{43})^T \\ &= (61, 28, 7, 68, 23, 13, 58, 40, 12, 53, 38, 16)^T.\end{aligned}$$

El estimador de máxima verosimilitud bajo el cociente de verosimilitudes con restricciones de orden, obtenido mediante la subrutina de la librería NAG de Fortran E04UCF $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_2^T, \boldsymbol{\theta}_{12}^T)^T$ (<http://www.nag.co.uk/numeric/fl/FLdescription.asp>), es $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^T, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{12}^T)^T$, con

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 = (1.1977, 0.8650)^T, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{12} = (0.9983, 0.4501, 0.6376, 0.0894, 0.1916, 0.0894)^T.$$

Los vectores de probabilidad estimados son:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\nu}} &= \left(\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n}, \frac{n_4}{n}\right)^T = \left(\frac{96}{417}, \frac{104}{417}, \frac{110}{417}, \frac{107}{417}\right)^T, \\ \boldsymbol{\pi}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \left(\frac{n_{\bullet 1}}{n}, \frac{n_{\bullet 2}}{n}, \frac{n_{\bullet 3}}{n}\right)^T = \left(\frac{240}{417}, \frac{129}{417}, \frac{48}{417}\right)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{p}} &= (0.1463, 0.0671, 0.0168, 0.1631, 0.0552, 0.0312, 0.1391, 0.0959, 0.0288, 0.1271, 0.0911, 0.0384)^T, \\ \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= (0.1509, 0.0625, 0.0168, 0.1585, 0.0657, 0.0253, 0.1391, 0.0900, 0.0347, 0.1271, 0.0911, 0.0384)^T, \\ \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= (0.1325, 0.0712, 0.0265, 0.1435, 0.0772, 0.0287, 0.1518, 0.0816, 0.0304, 0.1477, 0.0794, 0.0295)^T,\end{aligned}$$

y los pesos

$$\{w_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})\}_{h=0}^6 = \{0.000610310, 0.00975353, 0.0612267, 0.195385, 0.335373, 0.294901, 0.102814\}. \quad (5.45)$$

se obtienen mediante el Teorema 12 y el paquete de R `mvtnorm` (se encuentra en <http://cran.r-project.org/web/packages/mvtnorm/index.html>), una vez que se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\hat{\nu}) &= \begin{pmatrix} n \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2} & -\frac{n}{n_2} & 0 \\ -\frac{n}{n_2} & n \frac{n_2+n_3}{n_2 n_3} & -\frac{n}{n_3} \\ 0 & -\frac{n}{n_3} & n \frac{n_3+n_4}{n_3 n_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3475}{416} & -\frac{417}{104} & 0 \\ -\frac{417}{104} & \frac{44619}{5720} & -\frac{417}{110} \\ 0 & -\frac{417}{110} & \frac{90489}{11770} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}(\pi(\hat{\theta})) &= \begin{pmatrix} n \frac{n_{\bullet 1}+n_{\bullet 2}}{n_{\bullet 1} n_{\bullet 2}} & -\frac{n}{n_{\bullet 2}} \\ -\frac{n}{n_{\bullet 2}} & n \frac{n_{\bullet 2}+n_{\bullet 3}}{n_{\bullet 2} n_{\bullet 3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17097}{3440} & -\frac{417}{129} \\ -\frac{417}{129} & \frac{8201}{688} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{H}(\hat{\theta}) &= \mathbf{K}(\hat{\nu}) \otimes \mathbf{K}(\pi(\hat{\theta})) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{11882415}{286208} & -\frac{483025}{17888} & -\frac{7129449}{357760} & \frac{57963}{4472} & 0 & 0 \\ -\frac{483025}{17888} & \frac{28498475}{286208} & \frac{57963}{4472} & -\frac{3419817}{71552} & 0 & 0 \\ -\frac{7129449}{357760} & \frac{57963}{4472} & \frac{762851043}{19676800} & -\frac{6202041}{245960} & -\frac{7129449}{378400} & \frac{57963}{4730} \\ \frac{57963}{4472} & -\frac{3419817}{71552} & -\frac{6202041}{245960} & \frac{365920419}{3935360} & \frac{57963}{4730} & -\frac{3419817}{75680} \\ 0 & 0 & -\frac{7129449}{378400} & \frac{57963}{4730} & \frac{1547090433}{40488800} & -\frac{12577971}{506110} \\ 0 & 0 & \frac{57963}{4730} & -\frac{3419817}{75680} & -\frac{12577971}{506110} & \frac{742100289}{8097760} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Se denota por $n_{\bullet j}$, $j = 1, 2, 3$, a las realizaciones de las variables aleatorias $N_{\bullet j}$ definidas en (5.43). Los resultados proporcionados por R son las probabilidades de una normal ortante y los errores absolutos cometidos al realizar los cálculos. Teniendo en cuenta la proposición 3.6.1(3) recogida en Silvapulle y Sen (2005, página 82), $\sum_{h=0}^6 (-1)^h w_h(\hat{\theta}) = 0$ se debería alcanzar de forma teórica, y para (5.45) se obtiene $\sum_{h=0}^6 (-1)^h w_h(\hat{\theta}) = -1.6203 \times 10^{-5}$, lo que significa que 1.6203×10^{-5} puede considerarse como el error medio cometido al realizar el cálculo de los pesos. Utilizando el Algoritmo 4 y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{-1}(\hat{\nu}) &= \mathbf{T}_3^T \left(\mathbf{D}_{\hat{\nu}^*} - \hat{\nu}^* \hat{\nu}^{*T} \right) \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3424}{19321} & \frac{6944}{57963} & \frac{3424}{57963} \\ \frac{6944}{57963} & \frac{43400}{173889} & \frac{21400}{173889} \\ \frac{3424}{57963} & \frac{21400}{173889} & \frac{33170}{173889} \end{pmatrix} \\
\mathbf{K}^{-1}(\pi(\hat{\theta})) &= \mathbf{T}_2^T \left(\mathbf{D}_{\pi^*(\hat{\theta})} - \pi^*(\hat{\theta}) \pi^{*T}(\hat{\theta}) \right) \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4720}{19321} & \frac{1280}{19321} \\ \frac{1280}{19321} & \frac{1968}{19321} \end{pmatrix} \\
\mathbf{H}^{-1}(\hat{\theta}) &= \mathbf{K}^{-1}(\hat{\nu}^*) \otimes \mathbf{K}^{-1}(\pi(\hat{\theta}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{K}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\nu}}^*) \otimes \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\pi}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{16\ 161\ 280}{373\ 301\ 041} & \frac{4382\ 720}{373\ 301\ 041} & \frac{32\ 775\ 680}{1119\ 903\ 123} & \frac{8888\ 320}{1119\ 903\ 123} & \frac{16\ 161\ 280}{1119\ 903\ 123} & \frac{4382\ 720}{1119\ 903\ 123} \\ \frac{4382\ 720}{373\ 301\ 041} & \frac{6738\ 432}{373\ 301\ 041} & \frac{8888\ 320}{1119\ 903\ 123} & \frac{4555\ 264}{373\ 301\ 041} & \frac{4382\ 720}{1119\ 903\ 123} & \frac{2246\ 144}{373\ 301\ 041} \\ \frac{32\ 775\ 680}{1119\ 903\ 123} & \frac{8888\ 320}{1119\ 903\ 123} & \frac{204\ 848\ 000}{3359\ 709\ 369} & \frac{55\ 552\ 000}{3359\ 709\ 369} & \frac{101\ 008\ 000}{3359\ 709\ 369} & \frac{27\ 392\ 000}{3359\ 709\ 369} \\ \frac{8888\ 320}{1119\ 903\ 123} & \frac{4555\ 264}{373\ 301\ 041} & \frac{55\ 552\ 000}{3359\ 709\ 369} & \frac{28\ 470\ 400}{1119\ 903\ 123} & \frac{27\ 392\ 000}{3359\ 709\ 369} & \frac{14\ 038\ 400}{1119\ 903\ 123} \\ \frac{16\ 161\ 280}{1119\ 903\ 123} & \frac{4382\ 720}{1119\ 903\ 123} & \frac{101\ 008\ 000}{3359\ 709\ 369} & \frac{27\ 392\ 000}{3359\ 709\ 369} & \frac{156\ 562\ 400}{3359\ 709\ 369} & \frac{42\ 457\ 600}{3359\ 709\ 369} \\ \frac{4382\ 720}{1119\ 903\ 123} & \frac{2246\ 144}{373\ 301\ 041} & \frac{27\ 392\ 000}{3359\ 709\ 369} & \frac{14\ 038\ 400}{1119\ 903\ 123} & \frac{42\ 457\ 600}{3359\ 709\ 369} & \frac{21\ 759\ 520}{1119\ 903\ 123} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

se obtienen los pesos: $\{w_h(\widehat{\boldsymbol{\theta}})\}_{h=0}^6 = \{0.000613, 0.009627, 0.060873, 0.195312, 0.335389, 0.295527, 0.102659\}$. El cuantil de orden 0.05, que define la región crítica para estos pesos, es 6.34.

Tomando $\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda(1+\lambda)}(x^{\lambda+1} - x - \lambda(x-1))$, para cada $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ se obtiene una medida de divergencia distinta y consecuentemente se obtiene “la familia de divergencias de Cressie-Read ”

$$d_\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}}{q_{ij}^\lambda} - 1 \right), \text{ para cada } \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}. \quad (5.46)$$

Es posible cubrir toda la recta real para λ , definiendo $d_\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lim_{t \rightarrow \lambda} d_t(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, para $\lambda \in \{-1, 0\}$. Resulta trivial comprobar que $d_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_{Kull}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ y $d_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_{Pearson}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Los estadísticos de contraste (5.21) y (5.22) basados en la familia de divergencias de Cressie-Read vienen dados por

$$\begin{aligned}
T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) &= 2n(d_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) - d_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}))) \\
&= \frac{2n}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\bar{p}_{ij}^{\lambda+1}}{p_{ij}^\lambda(\widehat{\boldsymbol{\theta}})} - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\bar{p}_{ij}^{\lambda+1}}{p_{ij}^\lambda(\widehat{\boldsymbol{\theta}})} \right)
\end{aligned} \quad (5.47)$$

y

$$S_\lambda(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = 2nd_\lambda(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \frac{2n}{\lambda(\lambda+1)} \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{p_{ij}^{\lambda+1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}^\lambda(\widehat{\boldsymbol{\theta}})} - 1 \right), \quad (5.48)$$

para $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$, y

$$T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \lim_{\ell \rightarrow \lambda} T_\ell(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})), \quad S_\lambda(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})) = \lim_{\ell \rightarrow \lambda} S_\ell(\mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})), \quad \lambda \in \{0, -1\},$$

es decir,

$$T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2n(d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) - d_{Kull}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}))) = 2n \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{p}_{ij} \log \left(\frac{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right), \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} T_{-1}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) &= 2n(d_{Kull}(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \bar{\mathbf{p}}) - d_{Kull}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \bar{\mathbf{p}})) \\ &= 2n \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\bar{p}_{ij}} \right) - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\bar{p}_{ij}} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

y

$$S_0(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2nd_{Kull}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2n \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \right), \quad (5.51)$$

$$S_{-1}(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 2nd_{Kull}(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) = 2n \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \log \left(\frac{p_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{p_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \right). \quad (5.52)$$

Se considera un conjunto de valores de λ , que se denotará por Λ . La familia de divergencias de Cressie-Read basada en estadísticos de contraste incluye como casos particulares a (5.18) y (5.19), de hecho, $T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = G^2$ y $S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = X^2$. La familia de divergencias de Cressie-Read basada en estadísticos de contraste para $\lambda = \frac{2}{3}$ también se suele tener en cuenta en los análisis porque su resultado normalmente es bastante bueno. Por lo tanto, una posible elección de valores de λ para estudiar los p -valores puede ser el siguiente conjunto Λ : $\lambda \in \Lambda = \{-1.5, -1, -0.5, 0, \frac{2}{3}, 1, 1.5, 2\}$.

Estadísticos de contraste	$\lambda = -1.5$	$\lambda = -1$	$\lambda = -0.5$	$\lambda = 0$	$\lambda = \frac{2}{3}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$
$T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$	9.4681	9.1918	8.9535	8.7497	8.5262	8.4334	8.3160	8.2230
p -valor($T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$)	0.0123	0.0139	0.0155	0.0170	0.0188	0.0196	0.0206	0.0215
$S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$	9.1282	8.9774	8.8520	8.7497	8.6463	8.6076	8.5650	8.5399
p -valor($S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$)	0.0143	0.0153	0.0162	0.0170	0.0178	0.0181	0.0184	0.0186

Tabla 5.2: Estadísticos de contraste basados en la familia de divergencias de Cressie-Read y sus p -valores asintóticos.

La obtención de los p -valores en la Tabla 5.2 se ha realizado con el siguiente Algoritmo:

Algoritmo 5 Cálculo del p -valor

Sea $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in \Lambda}$ el estadístico de contraste asociado a (5.8). Una vez que se han obtenido los pesos $\{w_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})\}_{h=0}^{(I-1)(J-1)}$, se calcula el correspondiente p -valor en las siguientes etapas :

ETAPA 1: Calcular $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ utilizando \mathbf{n} y teniendo en cuenta (5.43).

ETAPA 2: Utilizando $\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ calcular el valor t del estadístico T mediante la correspondiente expresión en (5.47)-(5.52).

ETAPA 3: Inicializar $p\text{-valor}(T) := 0$.

ETAPA 4: Si $t \leq 0$, computar $p\text{-valor}(T) := 1$, sino ($t > 0$)
 para $h = 0, \dots, (I-1)(J-1) - 1$, hacer $p\text{-valor}(T) := p\text{-valor}(T) +$
 $w_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})P\left(\chi_{(I-1)(J-1)-h}^2 > t\right)$.

Se utiliza la subrutina NAG 'G01ECF' de la librería de Fortran.

(Nota: para tamaños muestrales pequeños y para valores de $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, algunas veces se tiene que $t < 0$).

En la Tabla 5.2, se recogen los estadísticos de contraste basados en la familia de divergencias de Cressie-Read y sus correspondientes p -valores asintóticos. Para todos los estadísticos de contraste, $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in \Lambda}$, se concluye que se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación 0.05. Por lo tanto, se acepta la hipótesis de que la probabilidad de tener efectos colaterales aumente a medida que aumenta el grado de severidad de la operación.

5.5. Estudio de simulación

Considerando $I = 4$ muestras trinomiales ($J = 3$) independientes con un vector de probabilidades teóricas de dimensión $J = 3$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}(\delta)) &= (\pi_{i1}(\boldsymbol{\theta}(\delta)), \pi_{i2}(\boldsymbol{\theta}(\delta)), \pi_{i3}(\boldsymbol{\theta}(\delta)))^T \\ \pi_{ij}(\boldsymbol{\theta}(\delta)) &= \frac{1}{3} \frac{1 + i(j-1)\delta}{1 + i\delta}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 3, \end{aligned}$$

se toman cinco casos según los valores considerados para $\delta \in \{0, 0.1, 0.5, 1, 1.5\}$ y para cada una de las $I = 4$ muestras multinomiales independientes, cuatro escenarios

- * Escenario 1: $n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 8, n_4 = 10, (n = 28)$.
- * Escenario 2: $n_1 = 8, n_2 = 12, n_3 = 16, n_4 = 20, (n = 56)$.
- * Escenario 3: $n_1 = 12, n_2 = 18, n_3 = 24, n_4 = 30, (n = 84)$.
- * Escenario 4: $n_1 = 16, n_2 = 24, n_3 = 32, n_4 = 40, (n = 112)$.

En la ejecución del estudio de simulación, se han elegido escenarios con tamaños muestrales iguales o escenarios con tamaños muestrales distintos, sin embargo no se aprecian apenas diferencias en los resultados obtenidos tal y como se detectó que sucede para el orden estocástico, está recogido en Wang (1996). Por esta razón, los cuatro escenarios considerados tienen tamaños muestrales distintos. Para $\delta = 0$, se verifica la hipótesis nula, $\boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\theta}(0)) = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}_0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$, $i = 1, 2, 3, 4$, mientras que para el resto de valores de δ se verifica la hipótesis alternativa.

Sea $R = 10\,000$ el número de repeticiones consideradas en el estudio de simulación. Como el nivel de significación está prefijado inicialmente con un valor de $\alpha = 0.05$, el nivel de significación asociado a $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\lambda \in \Lambda = \{-1.5, -1, -0.5, 0, \frac{2}{3}, 1, 1.5, 2\}$, se puede estimar mediante

$$\hat{\alpha}_T = \frac{\sum_{h=1}^R I(\text{p-valor}(T_h) < \alpha)}{R},$$

teniendo en cuenta que el $\text{p-valor}(T_h)$ es el p -valor obtenido en la h -ésima repetición utilizando el Algoritmo 5.4. Los valores más precisos de $\hat{\alpha}_T$ con respecto al nivel de significación α se obtienen para valores grandes de n (el nivel de significación menos preciso correspondería al Escenario 1 y el nivel de significación más preciso correspondería al Escenario 3).

El principal interés del estudio de simulación consiste en identificar qué estadístico tiene la mejor aproximación de $\hat{\alpha}_T$ con respecto al valor de α , para todos los escenarios.

En la Tabla 5.3 se muestran los odds ratios locales,

$$\vartheta_{ij} = \vartheta_{ij}(\delta) = \frac{1 + i(j-1)\delta}{1 + (i+1)(j-1)\delta} \frac{1 + (i+1)j\delta}{1 + ij\delta},$$

$(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$, para $\delta \in \{0, 0.1, 0.5, 1, 1.5\}$. Se observa que en el vector $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}(\delta) = (\vartheta_{11}(\delta), \vartheta_{12}(\delta), \vartheta_{21}(\delta), \vartheta_{22}(\delta), \vartheta_{31}(\delta), \vartheta_{32}(\delta))^T$ algunas componentes se alejan de la hipótesis nula $\boldsymbol{\vartheta}(0) = \mathbf{1}_6$ a medida que los valores de $\delta > 0$ se alejan de 0. Esto significa que se puede esperar un valor más grande de la estimación de la función potencia

$$\hat{\beta}_T(\delta) = \frac{\sum_{h=1}^R I(\text{p-valor}(T_h) < \alpha)}{R},$$

comparado con $\hat{\alpha}_T = \hat{\beta}_T(0)$, a medida que $\delta > 0$ vaya aumentando. Esta idea se basa en el hecho de que algunos valores de las componentes de $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}(\delta)$ disminuyen a medida que δ aumenta,

pero más lento que el incremento de los otros. Además, una vez fijado un valor de $\delta > 0$, cabe esperar valores mayores de $\widehat{\beta}_T(\delta)$ según vaya aumentando el valor de n , de esta forma, las peores potencias corresponderían al Escenario 1 y las mejores se encontrarían en el Escenario 3. Se puede destacar que a medida que aumenta δ , $\pi_{i+1,1}(\boldsymbol{\theta}(\delta))/\pi_{i1}(\boldsymbol{\theta}(\delta))$ se mantiene constante, $\pi_{i+1,2}(\boldsymbol{\theta}(\delta))/\pi_{i2}(\boldsymbol{\theta}(\delta))$ no es constante para $i = 1, 2, 3$, y $\pi_{i+1,2}(\boldsymbol{\theta}(\delta))/\pi_{i2}(\boldsymbol{\theta}(\delta))$ se aproxima al límite $(\pi_{i+1,2}(\boldsymbol{\theta}(\infty))/\pi_{i2}(\boldsymbol{\theta}(\infty)))$ por la derecha para $i = 1, 2, 3$.

Otro asunto de interés en el estudio de simulación consiste en identificar qué estadístico tiene un buen comportamiento respecto a las potencias y al mismo tiempo resulta eficaz en la aproximación de $\widehat{\alpha}_T$ al valor de α , para todos los escenarios.

	$\delta = 0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.5$	$\delta = 1$	$\delta = 1.5$	$\delta = \infty$
$\vartheta_{11} = \vartheta_{11}(\delta)$	1.000	1.091	1.333	1.500	1.600	2.000
$\vartheta_{12} = \vartheta_{12}(\delta)$	1.000	1.069	1.125	1.111	1.094	1.000
$\vartheta_{21} = \vartheta_{21}(\delta)$	1.000	1.083	1.250	1.333	1.375	1.500
$\vartheta_{22} = \vartheta_{22}(\delta)$	1.000	1.055	1.066	1.050	1.039	1.000
$\vartheta_{31} = \vartheta_{31}(\delta)$	1.000	1.077	1.200	1.250	1.273	1.333
$\vartheta_{32} = \vartheta_{32}(\delta)$	1.000	1.045	1.042	1.029	1.021	1.000

Tabla 5.3: Odds ratios locales teóricos para el estudio de simulación.

La Tabla 5.4 resume los niveles de significación estimados en todos los escenarios para los estadísticos de contraste $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in \Lambda}$, con $\Lambda = \{-1.5, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 1, 1.5, 2\}$. En la tabla se destacan en negrita los niveles de significación que se encuentran en el intervalo considerado en el criterio de Dale.

Escenario	$\widehat{\alpha}_{T_{-1.5}}$	$\widehat{\alpha}_{T_{-1}}$	$\widehat{\alpha}_{T_{-0.5}}$	$\widehat{\alpha}_{T_0}$	$\widehat{\alpha}_{T_{\frac{2}{3}}}$	$\widehat{\alpha}_{T_1}$	$\widehat{\alpha}_{T_{1.5}}$	$\widehat{\alpha}_{T_2}$
Escenario 1	0.0111	0.0079	0.1626	0.0706	0.0488	0.0481	0.0533	0.0651
Escenario 2	0.0623	0.0480	0.0888	0.0665	0.0501	0.0492	0.0502	0.0542
Escenario 3	0.0911	0.0702	0.0648	0.0529	0.0477	0.0474	0.0485	0.0531
Escenario 4	0.0827	0.0708	0.0620	0.0550	0.0494	0.0485	0.0487	0.0534
Escenario	$\widehat{\alpha}_{S_{-1.5}}$	$\widehat{\alpha}_{S_{-1}}$	$\widehat{\alpha}_{S_{-0.5}}$	$\widehat{\alpha}_{S_0}$	$\widehat{\alpha}_{S_{\frac{2}{3}}}$	$\widehat{\alpha}_{S_1}$	$\widehat{\alpha}_{S_{1.5}}$	$\widehat{\alpha}_{S_2}$
Escenario 1	0.2356	0.2299	0.1409	0.0706	0.0514	0.0498	0.0527	0.0599
Escenario 2	0.0966	0.0887	0.0809	0.0665	0.0521	0.0514	0.0512	0.0532
Escenario 3	0.0835	0.0697	0.0597	0.0529	0.0485	0.0479	0.0490	0.0516
Escenario 4	0.0726	0.0654	0.0590	0.0550	0.0516	0.0508	0.0505	0.0533

Tabla 5.4: $\widehat{\alpha}_T$, para $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in \Lambda}$ en los Escenarios 1, 2, 3 y 4.

Esc	δ	$\hat{\beta}_{T-1.5}$	$\hat{\beta}_{T-1}$	$\hat{\beta}_{T-0.5}$	$\hat{\beta}_{T_0}$	$\hat{\beta}_{T_{\frac{2}{3}}}$	$\hat{\beta}_{T_1}$	$\hat{\beta}_{T_{1.5}}$	$\hat{\beta}_{T_2}$
1	0.0	0.0111	0.0079	0.1626	0.0706	0.0488	0.0481	0.0533	0.0651
1	0.1	0.0232	0.0150	0.2222	0.1186	0.0850	0.0853	0.0947	0.1156
1	0.5	0.0214	0.0142	0.2873	0.1715	0.1377	0.1491	0.1856	0.2275
1	1.0	0.0181	0.0132	0.2657	0.1621	0.1405	0.1640	0.2167	0.2676
1	1.5	0.0165	0.0109	0.2307	0.1361	0.1262	0.1587	0.2226	0.2749
Esc	δ	$\hat{\beta}_{S-1.5}$	$\hat{\beta}_{S-1}$	$\hat{\beta}_{S-0.5}$	$\hat{\beta}_{S_0}$	$\hat{\beta}_{S_{\frac{2}{3}}}$	$\hat{\beta}_{S_1}$	$\hat{\beta}_{S_{1.5}}$	$\hat{\beta}_{S_2}$
1	0.0	0.2356	0.2299	0.1409	0.0706	0.0514	0.0498	0.0527	0.0599
1	0.1	0.2538	0.2439	0.2006	0.1183	0.0868	0.0845	0.0907	0.1046
1	0.5	0.3982	0.3864	0.2755	0.1715	0.1413	0.1463	0.1758	0.2027
1	1.0	0.5022	0.4962	0.2654	0.1620	0.1413	0.1555	0.2012	0.2246
1	1.5	0.5307	0.5265	0.2344	0.1361	0.1256	0.1484	0.2009	0.2205
Esc	δ	$\hat{\beta}_{T-1.5}$	$\hat{\beta}_{T-1}$	$\hat{\beta}_{T-0.5}$	$\hat{\beta}_{T_0}$	$\hat{\beta}_{T_{\frac{2}{3}}}$	$\hat{\beta}_{T_1}$	$\hat{\beta}_{T_{1.5}}$	$\hat{\beta}_{T_2}$
2	0.0	0.0623	0.0480	0.0888	0.0665	0.0501	0.0492	0.0502	0.0542
2	0.1	0.1396	0.1141	0.1397	0.1206	0.1079	0.1075	0.1113	0.1235
2	0.5	0.1556	0.1327	0.2403	0.2018	0.1906	0.1991	0.2206	0.2542
2	1.0	0.0797	0.0734	0.2990	0.2135	0.1942	0.2099	0.2493	0.2976
2	1.5	0.0486	0.0484	0.2965	0.1953	0.1852	0.2034	0.2515	0.3099
Esc	δ	$\hat{\beta}_{S-1.5}$	$\hat{\beta}_{S-1}$	$\hat{\beta}_{S-0.5}$	$\hat{\beta}_{S_0}$	$\hat{\beta}_{S_{\frac{2}{3}}}$	$\hat{\beta}_{S_1}$	$\hat{\beta}_{S_{1.5}}$	$\hat{\beta}_{S_2}$
2	0.0	0.0966	0.0887	0.0809	0.0665	0.0521	0.0514	0.0512	0.0532
2	0.1	0.1613	0.1415	0.1303	0.1206	0.1106	0.1111	0.1112	0.1192
2	0.5	0.2678	0.2477	0.2263	0.2018	0.1931	0.1996	0.2150	0.2386
2	1.0	0.3572	0.3464	0.2841	0.2135	0.1969	0.2124	0.2387	0.2751
2	1.5	0.4314	0.4261	0.2875	0.1953	0.1857	0.2033	0.2346	0.2792
Esc	δ	$\hat{\beta}_{T-1.5}$	$\hat{\beta}_{T-1}$	$\hat{\beta}_{T-0.5}$	$\hat{\beta}_{T_0}$	$\hat{\beta}_{T_{\frac{2}{3}}}$	$\hat{\beta}_{T_1}$	$\hat{\beta}_{T_{1.5}}$	$\hat{\beta}_{T_2}$
3	0.0	0.0911	0.0702	0.0648	0.0529	0.0477	0.0474	0.0485	0.0531
3	0.1	0.1665	0.1467	0.1367	0.1260	0.1199	0.1195	0.1249	0.1336
3	0.5	0.2507	0.2235	0.2471	0.2303	0.2293	0.2375	0.2578	0.2825
3	1.0	0.1639	0.1445	0.2885	0.2450	0.2372	0.2499	0.2779	0.3172
3	1.5	0.0979	0.0903	0.3027	0.2271	0.2169	0.2323	0.2722	0.3235
Esc	δ	$\hat{\beta}_{S-1.5}$	$\hat{\beta}_{S-1}$	$\hat{\beta}_{S-0.5}$	$\hat{\beta}_{S_0}$	$\hat{\beta}_{S_{\frac{2}{3}}}$	$\hat{\beta}_{S_1}$	$\hat{\beta}_{S_{1.5}}$	$\hat{\beta}_{S_2}$
3	0.0	0.0835	0.0697	0.0597	0.0529	0.0485	0.0479	0.0490	0.0516
3	0.1	0.1538	0.1432	0.1321	0.1260	0.1219	0.1215	0.1233	0.1294
3	0.5	0.2688	0.2511	0.2384	0.2303	0.2295	0.2361	0.2507	0.2743
3	1.0	0.3108	0.2916	0.2728	0.2450	0.2380	0.2516	0.2722	0.3016
3	1.5	0.3507	0.3394	0.2895	0.2271	0.2154	0.2356	0.2613	0.3023
Esc	δ	$\hat{\beta}_{T-1.5}$	$\hat{\beta}_{T-1}$	$\hat{\beta}_{T-0.5}$	$\hat{\beta}_{T_0}$	$\hat{\beta}_{T_{\frac{2}{3}}}$	$\hat{\beta}_{T_1}$	$\hat{\beta}_{T_{1.5}}$	$\hat{\beta}_{T_2}$
4	0.0	0.0827	0.0708	0.0620	0.0550	0.0494	0.0485	0.0487	0.0534
4	0.1	0.1829	0.1675	0.1556	0.1472	0.1426	0.1423	0.1465	0.1555
4	0.5	0.3103	0.2870	0.2875	0.2802	0.2850	0.2938	0.3111	0.3334
4	1.0	0.2442	0.2239	0.3107	0.2916	0.2941	0.3064	0.3351	0.3701
4	1.5	0.1703	0.1580	0.3283	0.2834	0.2836	0.2963	0.3274	0.3685
Esc	δ	$\hat{\beta}_{S-1.5}$	$\hat{\beta}_{S-1}$	$\hat{\beta}_{S-0.5}$	$\hat{\beta}_{S_0}$	$\hat{\beta}_{S_{\frac{2}{3}}}$	$\hat{\beta}_{S_1}$	$\hat{\beta}_{S_{1.5}}$	$\hat{\beta}_{S_2}$
4	0.0	0.0726	0.0654	0.0590	0.0550	0.0516	0.0508	0.0505	0.0533
4	0.1	0.1703	0.1596	0.1519	0.1472	0.1443	0.1434	0.1448	0.1504
4	0.5	0.3035	0.2922	0.2827	0.2802	0.2864	0.2923	0.3071	0.3266
4	1.0	0.3240	0.3061	0.2957	0.2916	0.2973	0.3069	0.3318	0.3609
4	1.5	0.3399	0.3277	0.3104	0.2834	0.2846	0.2984	0.3213	0.3547

Tabla 5.5: $\hat{\beta}_T$, para $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in \Lambda}$ en los Escenarios 1, 2, 3 y 4.

λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}
-1.5000	0.0111	0.2356	-0.3750	0.1245	0.1132	0.7500	0.0483	0.0511	1.8750	0.0621	0.0574
-1.4850	0.0112	0.2356	-0.3600	0.1217	0.1099	0.7650	0.0483	0.0510	1.8900	0.0624	0.0574
-1.4700	0.0111	0.2353	-0.3450	0.1179	0.1078	0.7800	0.0480	0.0511	1.9050	0.0628	0.0575
-1.4550	0.0108	0.2351	-0.3300	0.1150	0.1051	0.7950	0.0479	0.0509	1.9200	0.0634	0.0582
-1.4400	0.0109	0.2349	-0.3150	0.1114	0.1024	0.8100	0.0479	0.0509	1.9350	0.0637	0.0588
-1.4250	0.0109	0.2348	-0.3000	0.1084	0.0998	0.8250	0.0478	0.0507	1.9500	0.0638	0.0591
-1.4100	0.0108	0.2346	-0.2850	0.1056	0.0973	0.8400	0.0478	0.0507	1.9650	0.0641	0.0591
-1.3950	0.0106	0.2344	-0.2700	0.1024	0.0952	0.8550	0.0482	0.0506	1.9800	0.0645	0.0597
-1.3800	0.0107	0.2343	-0.2550	0.0990	0.0931	0.8700	0.0484	0.0505	1.9950	0.0651	0.0599
-1.3650	0.0110	0.2343	-0.2400	0.0970	0.0904	0.8850	0.0482	0.0503	2.0100	0.0658	0.0601
-1.3500	0.0106	0.2341	-0.2250	0.0949	0.0884	0.9000	0.0483	0.0502	2.0250	0.0662	0.0608
-1.3350	0.0108	0.2339	-0.2100	0.0928	0.0873	0.9150	0.0482	0.0500	2.0400	0.0665	0.0610
-1.3200	0.0109	0.2339	-0.1950	0.0906	0.0860	0.9300	0.0484	0.0500	2.0550	0.0668	0.0614
-1.3050	0.0110	0.2338	-0.1800	0.0890	0.0842	0.9450	0.0483	0.0502	2.0700	0.0672	0.0614
-1.2900	0.0111	0.2335	-0.1650	0.0877	0.0832	0.9600	0.0481	0.0502	2.0850	0.0678	0.0619
-1.2750	0.0118	0.2335	-0.1500	0.0859	0.0820	0.9750	0.0483	0.0500	2.1000	0.0685	0.0621
-1.2600	0.0126	0.2334	-0.1350	0.0836	0.0806	0.9900	0.0482	0.0498	2.1150	0.0691	0.0623
-1.2450	0.0136	0.2333	-0.1200	0.0824	0.0797	1.0050	0.0481	0.0498	2.1300	0.0696	0.0626
-1.2300	0.0148	0.2333	-0.1050	0.0807	0.0790	1.0200	0.0482	0.0498	2.1450	0.0702	0.0628
-1.2150	0.0161	0.2333	-0.0900	0.0795	0.0777	1.0350	0.0482	0.0498	2.1600	0.0707	0.0630
-1.2000	0.0178	0.2331	-0.0750	0.0782	0.0764	1.0500	0.0486	0.0497	2.1750	0.0711	0.0633
-1.1850	0.0190	0.2331	-0.0600	0.0764	0.0755	1.0650	0.0488	0.0497	2.1900	0.0719	0.0634
-1.1700	0.0204	0.2327	-0.0450	0.0752	0.0740	1.0800	0.0489	0.0498	2.2050	0.0722	0.0639
-1.1550	0.0223	0.2327	-0.0300	0.0732	0.0724	1.0950	0.0490	0.0500	2.2200	0.0725	0.0642
-1.1400	0.0248	0.2324	-0.0150	0.0717	0.0715	1.1100	0.0491	0.0499	2.2350	0.0731	0.0644
-1.1250	0.0279	0.2324	0.0000	0.0706	0.0706	1.1250	0.0492	0.0500	2.2500	0.0744	0.0648
-1.1100	0.0333	0.2323	0.0150	0.0695	0.0699	1.1400	0.0492	0.0501	2.2650	0.0750	0.0652
-1.0950	0.0371	0.2319	0.0300	0.0692	0.0693	1.1550	0.0491	0.0502	2.2800	0.0756	0.0653
-1.0800	0.0450	0.2315	0.0450	0.0677	0.0688	1.1700	0.0493	0.0503	2.2950	0.0765	0.0656
-1.0650	0.0562	0.2313	0.0600	0.0667	0.0680	1.1850	0.0494	0.0503	2.3100	0.0770	0.0657
-1.0500	0.0659	0.2310	0.0750	0.0654	0.0670	1.2000	0.0496	0.0504	2.3250	0.0779	0.0660
-1.0350	0.0811	0.2307	0.0900	0.0651	0.0666	1.2150	0.0495	0.0505	2.3400	0.0788	0.0664
-1.0200	0.0990	0.2300	0.1050	0.0648	0.0662	1.2300	0.0501	0.0507	2.3550	0.0790	0.0669
-1.0050	0.1252	0.2299	0.1200	0.0642	0.0657	1.2450	0.0500	0.0507	2.3700	0.0793	0.0671
-0.9900	0.5018	0.2292	0.1350	0.0636	0.0650	1.2600	0.0503	0.0509	2.3850	0.0803	0.0674
-0.9750	0.4760	0.2286	0.1500	0.0630	0.0649	1.2750	0.0505	0.0511	2.4000	0.0809	0.0677
-0.9600	0.4564	0.2284	0.1650	0.0624	0.0642	1.2900	0.0510	0.0512	2.4150	0.0813	0.0683
-0.9450	0.4391	0.2276	0.1800	0.0617	0.0637	1.3050	0.0510	0.0512	2.4300	0.0823	0.0683
-0.9300	0.4225	0.2267	0.1950	0.0612	0.0631	1.3200	0.0511	0.0513	2.4450	0.0830	0.0685
-0.9150	0.4080	0.2263	0.2100	0.0608	0.0627	1.3350	0.0512	0.0515	2.4600	0.0842	0.0686
-0.9000	0.3920	0.2262	0.2250	0.0599	0.0624	1.3500	0.0514	0.0515	2.4750	0.0848	0.0688
-0.8850	0.3790	0.2256	0.2400	0.0591	0.0621	1.3650	0.0517	0.0517	2.4900	0.0854	0.0694
-0.8700	0.3674	0.2252	0.2550	0.0585	0.0615	1.3800	0.0519	0.0518	2.5050	0.0864	0.0696
-0.8550	0.3549	0.2228	0.2700	0.0580	0.0612	1.3950	0.0521	0.0519	2.5200	0.0874	0.0699
-0.8400	0.3465	0.2220	0.2850	0.0574	0.0605	1.4100	0.0521	0.0519	2.5350	0.0878	0.0701
-0.8250	0.3357	0.2215	0.3000	0.0569	0.0602	1.4250	0.0522	0.0520	2.5500	0.0887	0.0703
-0.8100	0.3274	0.2208	0.3150	0.0564	0.0597	1.4400	0.0524	0.0521	2.5650	0.0891	0.0703
-0.7950	0.3203	0.2181	0.3300	0.0559	0.0589	1.4550	0.0525	0.0523	2.5800	0.0898	0.0707
-0.7800	0.3106	0.2155	0.3450	0.0553	0.0587	1.4700	0.0528	0.0526	2.5950	0.0902	0.0709
-0.7650	0.2990	0.2142	0.3600	0.0549	0.0580	1.4850	0.0530	0.0525	2.6100	0.0912	0.0713
-0.7500	0.2916	0.2117	0.3750	0.0546	0.0573	1.5000	0.0533	0.0527	2.6250	0.0918	0.0717
-0.7350	0.2848	0.2104	0.3900	0.0539	0.0569	1.5150	0.0536	0.0529	2.6400	0.0926	0.0723
-0.7200	0.2762	0.2065	0.4050	0.0536	0.0565	1.5300	0.0538	0.0530	2.6550	0.0934	0.0731
-0.7050	0.2668	0.2020	0.4200	0.0532	0.0562	1.5450	0.0540	0.0533	2.6700	0.0946	0.0740
-0.6900	0.2582	0.2004	0.4350	0.0530	0.0558	1.5600	0.0545	0.0534	2.6850	0.0953	0.0741
-0.6750	0.2504	0.1971	0.4500	0.0528	0.0554	1.5750	0.0547	0.0537	2.7000	0.0960	0.0746
-0.6600	0.2390	0.1889	0.4650	0.0527	0.0551	1.5900	0.0553	0.0539	2.7150	0.0964	0.0752
-0.6450	0.2308	0.1858	0.4800	0.0521	0.0546	1.6050	0.0554	0.0543	2.7300	0.0970	0.0758
-0.6300	0.2240	0.1834	0.4950	0.0519	0.0540	1.6200	0.0557	0.0543	2.7450	0.0981	0.0765
-0.6150	0.2163	0.1785	0.5100	0.0517	0.0539	1.6350	0.0557	0.0545	2.7600	0.0991	0.0769
-0.6000	0.2090	0.1741	0.5250	0.0515	0.0537	1.6500	0.0561	0.0548	2.7750	0.1004	0.0772
-0.5850	0.2004	0.1676	0.5400	0.0512	0.0529	1.6650	0.0562	0.0549	2.7900	0.1015	0.0776
-0.5700	0.1936	0.1629	0.5550	0.0508	0.0527	1.6800	0.0568	0.0550	2.8050	0.1024	0.0785
-0.5550	0.1872	0.1589	0.5700	0.0504	0.0525	1.6950	0.0574	0.0554	2.8200	0.1031	0.0789
-0.5400	0.1790	0.1549	0.5850	0.0499	0.0521	1.7100	0.0577	0.0554	2.8350	0.1039	0.0791
-0.5250	0.1733	0.1481	0.6000	0.0495	0.0517	1.7250	0.0577	0.0554	2.8500	0.1047	0.0797
-0.5100	0.1672	0.1430	0.6150	0.0493	0.0514	1.7400	0.0579	0.0555	2.8650	0.1051	0.0803
-0.4950	0.1609	0.1397	0.6300	0.0491	0.0512	1.7550	0.0584	0.0556	2.8800	0.1060	0.0803
-0.4800	0.1543	0.1342	0.6450	0.0490	0.0513	1.7700	0.0586	0.0559	2.8950	0.1066	0.0808
-0.4650	0.1491	0.1316	0.6600	0.0488	0.0514	1.7850	0.0590	0.0563	2.9100	0.1074	0.0809
-0.4500	0.1449	0.1278	0.6750	0.0488	0.0514	1.8000	0.0594	0.0564	2.9250	0.1083	0.0809
-0.4350	0.1397	0.1246	0.6900	0.0487	0.0513	1.8150	0.0598	0.0566	2.9400	0.1086	0.0812
-0.4200	0.1360	0.1213	0.7050	0.0487	0.0513	1.8300	0.0604	0.0567	2.9550	0.1097	0.0812
-0.4050	0.1311	0.1182	0.7200	0.0487	0.0512	1.8450	0.0609	0.0570	2.9700	0.1110	0.0817
-0.3900	0.1278	0.1154	0.7350	0.0486	0.0512	1.8600	0.0616	0.0572	2.9850	0.1117	0.0825

Tabla 5.6: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Escenario 1.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0232	0.2538	-0.3750	0.1882	0.1730	0.7500	0.0850	0.0856	1.8750	0.1107	0.1003
-1.4850	0.0233	0.2536	-0.3600	0.1838	0.1695	0.7650	0.0845	0.0855	1.8900	0.1110	0.1006
-1.4700	0.0235	0.2531	-0.3450	0.1810	0.1667	0.7800	0.0843	0.0854	1.9050	0.1116	0.1009
-1.4550	0.0238	0.2530	-0.3300	0.1766	0.1637	0.7950	0.0844	0.0855	1.9200	0.1122	0.1017
-1.4400	0.0238	0.2528	-0.3150	0.1721	0.1607	0.8100	0.0846	0.0854	1.9350	0.1126	0.1021
-1.4250	0.0233	0.2526	-0.3000	0.1682	0.1572	0.8250	0.0843	0.0854	1.9500	0.1134	0.1030
-1.4100	0.0234	0.2523	-0.2850	0.1640	0.1539	0.8400	0.0842	0.0854	1.9650	0.1138	0.1034
-1.3950	0.0237	0.2516	-0.2700	0.1593	0.1504	0.8550	0.0846	0.0853	1.9800	0.1147	0.1038
-1.3800	0.0239	0.2509	-0.2550	0.1554	0.1470	0.8700	0.0846	0.0852	1.9950	0.1155	0.1045
-1.3650	0.0242	0.2504	-0.2400	0.1518	0.1447	0.8850	0.0845	0.0850	2.0100	0.1161	0.1050
-1.3500	0.0244	0.2502	-0.2250	0.1485	0.1432	0.9000	0.0845	0.0847	2.0250	0.1167	0.1058
-1.3350	0.0245	0.2498	-0.2100	0.1469	0.1419	0.9150	0.0844	0.0847	2.0400	0.1178	0.1060
-1.3200	0.0241	0.2495	-0.1950	0.1440	0.1402	0.9300	0.0844	0.0846	2.0550	0.1190	0.1064
-1.3050	0.0247	0.2491	-0.1800	0.1422	0.1390	0.9450	0.0843	0.0844	2.0700	0.1199	0.1068
-1.2900	0.0248	0.2487	-0.1650	0.1404	0.1377	0.9600	0.0845	0.0842	2.0850	0.1203	0.1073
-1.2750	0.0250	0.2485	-0.1500	0.1379	0.1352	0.9750	0.0849	0.0844	2.1000	0.1213	0.1078
-1.2600	0.0259	0.2485	-0.1350	0.1350	0.1333	0.9900	0.0854	0.0844	2.1150	0.1222	0.1080
-1.2450	0.0272	0.2482	-0.1200	0.1338	0.1323	1.0050	0.0854	0.0845	2.1300	0.1228	0.1083
-1.2300	0.0282	0.2480	-0.1050	0.1324	0.1305	1.0200	0.0857	0.0845	2.1450	0.1241	0.1088
-1.2150	0.0303	0.2478	-0.0900	0.1297	0.1283	1.0350	0.0857	0.0847	2.1600	0.1248	0.1095
-1.2000	0.0328	0.2476	-0.0750	0.1280	0.1268	1.0500	0.0859	0.0847	2.1750	0.1253	0.1098
-1.1850	0.0348	0.2472	-0.0600	0.1254	0.1252	1.0650	0.0860	0.0847	2.1900	0.1259	0.1101
-1.1700	0.0374	0.2467	-0.0450	0.1236	0.1231	1.0800	0.0859	0.0848	2.2050	0.1270	0.1104
-1.1550	0.0402	0.2464	-0.0300	0.1212	0.1208	1.0950	0.0861	0.0855	2.2200	0.1277	0.1113
-1.1400	0.0444	0.2463	-0.0150	0.1196	0.1194	1.1100	0.0865	0.0856	2.2350	0.1288	0.1122
-1.1250	0.0500	0.2461	0.0000	0.1186	0.1183	1.1250	0.0867	0.0858	2.2500	0.1297	0.1126
-1.1100	0.0577	0.2458	0.0150	0.1164	0.1169	1.1400	0.0871	0.0857	2.2650	0.1305	0.1131
-1.0950	0.0636	0.2455	0.0300	0.1141	0.1146	1.1550	0.0875	0.0856	2.2800	0.1309	0.1135
-1.0800	0.0732	0.2452	0.0450	0.1125	0.1135	1.1700	0.0881	0.0858	2.2950	0.1319	0.1146
-1.0650	0.0873	0.2447	0.0600	0.1112	0.1123	1.1850	0.0883	0.0857	2.3100	0.1329	0.1148
-1.0500	0.0979	0.2445	0.0750	0.1103	0.1116	1.2000	0.0889	0.0860	2.3250	0.1342	0.1156
-1.0350	0.1159	0.2443	0.0900	0.1092	0.1108	1.2150	0.0889	0.0860	2.3400	0.1344	0.1159
-1.0200	0.1392	0.2440	0.1050	0.1082	0.1103	1.2300	0.0890	0.0861	2.3550	0.1351	0.1161
-1.0050	0.1671	0.2440	0.1200	0.1073	0.1093	1.2450	0.0892	0.0864	2.3700	0.1357	0.1163
-0.9900	0.5068	0.2435	0.1350	0.1068	0.1087	1.2600	0.0890	0.0866	2.3850	0.1364	0.1168
-0.9750	0.4805	0.2430	0.1500	0.1058	0.1078	1.2750	0.0890	0.0872	2.4000	0.1377	0.1174
-0.9600	0.4606	0.2429	0.1650	0.1052	0.1066	1.2900	0.0896	0.0873	2.4150	0.1382	0.1179
-0.9450	0.4443	0.2428	0.1800	0.1039	0.1058	1.3050	0.0896	0.0873	2.4300	0.1388	0.1184
-0.9300	0.4308	0.2425	0.1950	0.1032	0.1045	1.3200	0.0906	0.0874	2.4450	0.1401	0.1189
-0.9150	0.4149	0.2425	0.2100	0.1027	0.1035	1.3350	0.0909	0.0879	2.4600	0.1407	0.1192
-0.9000	0.3993	0.2420	0.2250	0.1021	0.1029	1.3500	0.0912	0.0880	2.4750	0.1420	0.1196
-0.8850	0.3860	0.2415	0.2400	0.1014	0.1024	1.3650	0.0915	0.0879	2.4900	0.1430	0.1203
-0.8700	0.3739	0.2415	0.2550	0.0999	0.1016	1.3800	0.0921	0.0881	2.5050	0.1438	0.1208
-0.8550	0.3645	0.2412	0.2700	0.0987	0.1002	1.3950	0.0923	0.0885	2.5200	0.1447	0.1211
-0.8400	0.3578	0.2411	0.2850	0.0977	0.0995	1.4100	0.0928	0.0890	2.5350	0.1461	0.1216
-0.8250	0.3494	0.2402	0.3000	0.0965	0.0990	1.4250	0.0929	0.0890	2.5500	0.1471	0.1219
-0.8100	0.3418	0.2399	0.3150	0.0955	0.0980	1.4400	0.0935	0.0889	2.5650	0.1479	0.1221
-0.7950	0.3345	0.2384	0.3300	0.0944	0.0972	1.4550	0.0937	0.0896	2.5800	0.1485	0.1226
-0.7800	0.3270	0.2372	0.3450	0.0935	0.0967	1.4700	0.0940	0.0899	2.5950	0.1498	0.1235
-0.7650	0.3200	0.2364	0.3600	0.0929	0.0961	1.4850	0.0944	0.0904	2.6100	0.1511	0.1237
-0.7500	0.3138	0.2357	0.3750	0.0922	0.0959	1.5000	0.0947	0.0907	2.6250	0.1521	0.1244
-0.7350	0.3087	0.2349	0.3900	0.0918	0.0946	1.5150	0.0950	0.0912	2.6400	0.1534	0.1257
-0.7200	0.3026	0.2330	0.4050	0.0912	0.0940	1.5300	0.0956	0.0919	2.6550	0.1544	0.1269
-0.7050	0.2969	0.2319	0.4200	0.0906	0.0933	1.5450	0.0960	0.0925	2.6700	0.1555	0.1271
-0.6900	0.2902	0.2314	0.4350	0.0898	0.0927	1.5600	0.0963	0.0926	2.6850	0.1570	0.1276
-0.6750	0.2850	0.2300	0.4500	0.0894	0.0921	1.5750	0.0970	0.0930	2.7000	0.1583	0.1284
-0.6600	0.2773	0.2280	0.4650	0.0888	0.0918	1.5900	0.0975	0.0935	2.7150	0.1591	0.1294
-0.6450	0.2718	0.2271	0.4800	0.0882	0.0914	1.6050	0.0981	0.0945	2.7300	0.1605	0.1310
-0.6300	0.2663	0.2252	0.4950	0.0877	0.0905	1.6200	0.0985	0.0949	2.7450	0.1614	0.1327
-0.6150	0.2619	0.2225	0.5100	0.0871	0.0899	1.6350	0.0989	0.0951	2.7600	0.1633	0.1343
-0.6000	0.2557	0.2186	0.5250	0.0870	0.0893	1.6500	0.0998	0.0957	2.7750	0.1642	0.1354
-0.5850	0.2501	0.2144	0.5400	0.0868	0.0892	1.6650	0.1005	0.0962	2.7900	0.1655	0.1362
-0.5700	0.2454	0.2126	0.5550	0.0862	0.0891	1.6800	0.1011	0.0966	2.8050	0.1665	0.1383
-0.5550	0.2421	0.2108	0.5700	0.0860	0.0886	1.6950	0.1018	0.0966	2.8200	0.1677	0.1392
-0.5400	0.2357	0.2089	0.5850	0.0861	0.0884	1.7100	0.1027	0.0968	2.8350	0.1680	0.1397
-0.5250	0.2302	0.2055	0.6000	0.0858	0.0878	1.7250	0.1034	0.0972	2.8500	0.1688	0.1408
-0.5100	0.2255	0.2021	0.6150	0.0859	0.0873	1.7400	0.1044	0.0978	2.8650	0.1701	0.1412
-0.4950	0.2208	0.2001	0.6300	0.0858	0.0872	1.7550	0.1055	0.0980	2.8800	0.1710	0.1414
-0.4800	0.2167	0.1968	0.6450	0.0854	0.0872	1.7700	0.1061	0.0982	2.8950	0.1723	0.1421
-0.4650	0.2127	0.1938	0.6600	0.0850	0.0869	1.7850	0.1069	0.0988	2.9100	0.1738	0.1433
-0.4500	0.2077	0.1890	0.6750	0.0850	0.0869	1.8000	0.1073	0.0991	2.9250	0.1750	0.1437
-0.4350	0.2037	0.1862	0.6900	0.0850	0.0867	1.8150	0.1080	0.0993	2.9400	0.1759	0.1445
-0.4200	0.2004	0.1842	0.7050	0.0855	0.0863	1.8300	0.1087	0.0995	2.9550	0.1768	0.1451
-0.4050	0.1967	0.1816	0.7200	0.0853	0.0860	1.8450	0.1097	0.0997	2.9700	0.1778	0.1456
-0.3900	0.1931	0.1769	0.7350	0.0854	0.0856	1.8600	0.1102	0.1001	2.9850	0.1784	0.1464

Tabla 5.7: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario 1.

λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}
-1.5000	0.0214	0.3982	-0.3750	0.2447	0.2321	0.7500	0.1387	0.1431	1.8750	0.2170	0.1973
-1.4850	0.0214	0.3981	-0.3600	0.2404	0.2272	0.7650	0.1390	0.1432	1.8900	0.2185	0.1979
-1.4700	0.0210	0.3980	-0.3450	0.2362	0.2224	0.7800	0.1391	0.1429	1.9050	0.2193	0.1986
-1.4550	0.0211	0.3978	-0.3300	0.2322	0.2209	0.7950	0.1397	0.1430	1.9200	0.2207	0.1988
-1.4400	0.0212	0.3978	-0.3150	0.2284	0.2184	0.8100	0.1402	0.1428	1.9350	0.2219	0.1992
-1.4250	0.0216	0.3975	-0.3000	0.2257	0.2155	0.8250	0.1406	0.1429	1.9500	0.2234	0.2001
-1.4100	0.0214	0.3966	-0.2850	0.2214	0.2129	0.8400	0.1415	0.1429	1.9650	0.2246	0.2003
-1.3950	0.0213	0.3964	-0.2700	0.2167	0.2092	0.8550	0.1418	0.1433	1.9800	0.2256	0.2011
-1.3800	0.0214	0.3955	-0.2550	0.2124	0.2061	0.8700	0.1419	0.1432	1.9950	0.2269	0.2020
-1.3650	0.0218	0.3952	-0.2400	0.2089	0.2034	0.8850	0.1426	0.1433	2.0100	0.2287	0.2037
-1.3500	0.0221	0.3948	-0.2250	0.2063	0.2017	0.9000	0.1434	0.1429	2.0250	0.2297	0.2044
-1.3350	0.0222	0.3945	-0.2100	0.2043	0.1999	0.9150	0.1443	0.1430	2.0400	0.2329	0.2044
-1.3200	0.0225	0.3945	-0.1950	0.2022	0.1978	0.9300	0.1458	0.1436	2.0550	0.2351	0.2051
-1.3050	0.0231	0.3938	-0.1800	0.1994	0.1952	0.9450	0.1468	0.1449	2.0700	0.2383	0.2054
-1.2900	0.0232	0.3938	-0.1650	0.1973	0.1928	0.9600	0.1471	0.1447	2.0850	0.2407	0.2061
-1.2750	0.0235	0.3937	-0.1500	0.1954	0.1904	0.9750	0.1481	0.1450	2.1000	0.2428	0.2071
-1.2600	0.0244	0.3928	-0.1350	0.1923	0.1877	0.9900	0.1486	0.1462	2.1150	0.2446	0.2077
-1.2450	0.0255	0.3925	-0.1200	0.1898	0.1855	1.0050	0.1497	0.1464	2.1300	0.2458	0.2078
-1.2300	0.0267	0.3924	-0.1050	0.1863	0.1838	1.0200	0.1505	0.1466	2.1450	0.2479	0.2087
-1.2150	0.0279	0.3924	-0.0900	0.1844	0.1823	1.0350	0.1520	0.1480	2.1600	0.2491	0.2099
-1.2000	0.0292	0.3915	-0.0750	0.1823	0.1808	1.0500	0.1527	0.1486	2.1750	0.2503	0.2109
-1.1850	0.0310	0.3910	-0.0600	0.1788	0.1770	1.0650	0.1544	0.1501	2.1900	0.2521	0.2125
-1.1700	0.0333	0.3904	-0.0450	0.1774	0.1760	1.0800	0.1558	0.1510	2.2050	0.2530	0.2138
-1.1550	0.0358	0.3902	-0.0300	0.1756	0.1744	1.0950	0.1576	0.1531	2.2200	0.2544	0.2149
-1.1400	0.0391	0.3900	-0.0150	0.1727	0.1724	1.1100	0.1584	0.1537	2.2350	0.2553	0.2155
-1.1250	0.0431	0.3895	0.0000	0.1715	0.1715	1.1250	0.1594	0.1544	2.2500	0.2570	0.2160
-1.1100	0.0495	0.3890	0.0150	0.1697	0.1701	1.1400	0.1610	0.1549	2.2650	0.2593	0.2170
-1.0950	0.0562	0.3885	0.0300	0.1679	0.1682	1.1550	0.1623	0.1552	2.2800	0.2612	0.2184
-1.0800	0.0706	0.3882	0.0450	0.1661	0.1667	1.1700	0.1629	0.1553	2.2950	0.2623	0.2193
-1.0650	0.0832	0.3879	0.0600	0.1647	0.1653	1.1850	0.1637	0.1560	2.3100	0.2651	0.2210
-1.0500	0.0956	0.3876	0.0750	0.1636	0.1648	1.2000	0.1650	0.1561	2.3250	0.2665	0.2228
-1.0350	0.1137	0.3871	0.0900	0.1624	0.1636	1.2150	0.1657	0.1568	2.3400	0.2682	0.2239
-1.0200	0.1403	0.3864	0.1050	0.1613	0.1626	1.2300	0.1666	0.1573	2.3550	0.2696	0.2264
-1.0050	0.1780	0.3864	0.1200	0.1597	0.1619	1.2450	0.1677	0.1578	2.3700	0.2716	0.2278
-0.9900	0.6341	0.3825	0.1350	0.1579	0.1604	1.2600	0.1681	0.1592	2.3850	0.2742	0.2305
-0.9750	0.6111	0.3795	0.1500	0.1566	0.1588	1.2750	0.1694	0.1596	2.4000	0.2761	0.2314
-0.9600	0.5906	0.3776	0.1650	0.1549	0.1576	1.2900	0.1703	0.1607	2.4150	0.2779	0.2322
-0.9450	0.5657	0.3764	0.1800	0.1536	0.1557	1.3050	0.1712	0.1610	2.4300	0.2798	0.2331
-0.9300	0.5516	0.3756	0.1950	0.1515	0.1545	1.3200	0.1727	0.1624	2.4450	0.2818	0.2334
-0.9150	0.5397	0.3744	0.2100	0.1503	0.1536	1.3350	0.1739	0.1639	2.4600	0.2838	0.2346
-0.9000	0.5291	0.3736	0.2250	0.1489	0.1526	1.3500	0.1750	0.1649	2.4750	0.2858	0.2353
-0.8850	0.5146	0.3730	0.2400	0.1475	0.1511	1.3650	0.1767	0.1658	2.4900	0.2873	0.2360
-0.8700	0.5022	0.3727	0.2550	0.1459	0.1500	1.3800	0.1778	0.1668	2.5050	0.2888	0.2371
-0.8550	0.4783	0.3725	0.2700	0.1451	0.1488	1.3950	0.1787	0.1674	2.5200	0.2907	0.2378
-0.8400	0.4676	0.3724	0.2850	0.1448	0.1474	1.4100	0.1791	0.1687	2.5350	0.2926	0.2384
-0.8250	0.4551	0.3657	0.3000	0.1440	0.1453	1.4250	0.1804	0.1706	2.5500	0.2946	0.2406
-0.8100	0.4375	0.3635	0.3150	0.1433	0.1450	1.4400	0.1816	0.1706	2.5650	0.2963	0.2418
-0.7950	0.4269	0.3540	0.3300	0.1425	0.1453	1.4550	0.1825	0.1720	2.5800	0.2978	0.2430
-0.7800	0.4178	0.3485	0.3450	0.1414	0.1446	1.4700	0.1836	0.1732	2.5950	0.3004	0.2433
-0.7650	0.4106	0.3431	0.3600	0.1409	0.1440	1.4850	0.1844	0.1745	2.6100	0.3024	0.2449
-0.7500	0.4057	0.3383	0.3750	0.1404	0.1436	1.5000	0.1856	0.1758	2.6250	0.3048	0.2468
-0.7350	0.3971	0.3359	0.3900	0.1398	0.1431	1.5150	0.1863	0.1771	2.6400	0.3069	0.2486
-0.7200	0.3899	0.3333	0.4050	0.1389	0.1430	1.5300	0.1868	0.1788	2.6550	0.3091	0.2501
-0.7050	0.3831	0.3315	0.4200	0.1382	0.1425	1.5450	0.1878	0.1800	2.6700	0.3115	0.2517
-0.6900	0.3751	0.3299	0.4350	0.1382	0.1428	1.5600	0.1891	0.1813	2.6850	0.3137	0.2540
-0.6750	0.3679	0.3262	0.4500	0.1383	0.1423	1.5750	0.1914	0.1828	2.7000	0.3150	0.2555
-0.6600	0.3602	0.3231	0.4650	0.1384	0.1425	1.5900	0.1922	0.1833	2.7150	0.3175	0.2601
-0.6450	0.3508	0.3203	0.4800	0.1387	0.1422	1.6050	0.1934	0.1856	2.7300	0.3196	0.2619
-0.6300	0.3431	0.3144	0.4950	0.1379	0.1422	1.6200	0.1939	0.1874	2.7450	0.3210	0.2647
-0.6150	0.3347	0.3012	0.5100	0.1378	0.1418	1.6350	0.1947	0.1880	2.7600	0.3224	0.2673
-0.6000	0.3278	0.2936	0.5250	0.1376	0.1413	1.6500	0.1961	0.1897	2.7750	0.3245	0.2687
-0.5850	0.3213	0.2898	0.5400	0.1376	0.1415	1.6650	0.1973	0.1909	2.7900	0.3265	0.2705
-0.5700	0.3143	0.2874	0.5550	0.1369	0.1414	1.6800	0.1979	0.1913	2.8050	0.3287	0.2716
-0.5550	0.3064	0.2830	0.5700	0.1371	0.1416	1.6950	0.1997	0.1917	2.8200	0.3307	0.2738
-0.5400	0.3015	0.2810	0.5850	0.1372	0.1419	1.7100	0.2015	0.1922	2.8350	0.3324	0.2751
-0.5250	0.2968	0.2784	0.6000	0.1376	0.1423	1.7250	0.2025	0.1927	2.8500	0.3341	0.2770
-0.5100	0.2909	0.2774	0.6150	0.1373	0.1412	1.7400	0.2049	0.1932	2.8650	0.3360	0.2787
-0.4950	0.2851	0.2752	0.6300	0.1378	0.1411	1.7550	0.2058	0.1938	2.8800	0.3378	0.2816
-0.4800	0.2804	0.2704	0.6450	0.1377	0.1415	1.7700	0.2064	0.1939	2.8950	0.3391	0.2845
-0.4650	0.2743	0.2622	0.6600	0.1377	0.1416	1.7850	0.2070	0.1943	2.9100	0.3414	0.2879
-0.4500	0.2695	0.2518	0.6750	0.1379	0.1421	1.8000	0.2086	0.1951	2.9250	0.3435	0.2893
-0.4350	0.2639	0.2464	0.6900	0.1380	0.1422	1.8150	0.2103	0.1953	2.9400	0.3447	0.2908
-0.4200	0.2585	0.2438	0.7050	0.1378	0.1428	1.8300	0.2114	0.1957	2.9550	0.3458	0.2917
-0.4050	0.2536	0.2410	0.7200	0.1386	0.1431	1.8450	0.2136	0.1959	2.9700	0.3476	0.2918
-0.3900	0.2492	0.2357	0.7350	0.1386	0.1429	1.8600	0.2158	0.1969	2.9850	0.3491	0.2924

Tabla 5.8: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario 1.

λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}
-1.5000	0.0181	0.5022	-0.3750	0.2209	0.2161	0.7500	0.1428	0.1452	1.8750	0.2498	0.2178
-1.4850	0.0181	0.5020	-0.3600	0.2168	0.2110	0.7650	0.1437	0.1458	1.8900	0.2511	0.2179
-1.4700	0.0181	0.5020	-0.3450	0.2137	0.2070	0.7800	0.1445	0.1461	1.9050	0.2529	0.2188
-1.4550	0.0180	0.5018	-0.3300	0.2093	0.2045	0.7950	0.1453	0.1469	1.9200	0.2543	0.2191
-1.4400	0.0179	0.5018	-0.3150	0.2066	0.2008	0.8100	0.1467	0.1468	1.9350	0.2568	0.2196
-1.4250	0.0177	0.5014	-0.3000	0.2036	0.1989	0.8250	0.1474	0.1471	1.9500	0.2591	0.2213
-1.4100	0.0172	0.5011	-0.2850	0.2007	0.1957	0.8400	0.1484	0.1479	1.9650	0.2619	0.2220
-1.3950	0.0172	0.5010	-0.2700	0.1975	0.1933	0.8550	0.1489	0.1487	1.9800	0.2639	0.2231
-1.3800	0.0168	0.5004	-0.2550	0.1941	0.1915	0.8700	0.1500	0.1488	1.9950	0.2673	0.2242
-1.3650	0.0166	0.5002	-0.2400	0.1923	0.1893	0.8850	0.1515	0.1489	2.0100	0.2702	0.2257
-1.3500	0.0166	0.5000	-0.2250	0.1901	0.1882	0.9000	0.1526	0.1487	2.0250	0.2720	0.2265
-1.3350	0.0168	0.4996	-0.2100	0.1877	0.1861	0.9150	0.1540	0.1490	2.0400	0.2783	0.2272
-1.3200	0.0170	0.4996	-0.1950	0.1853	0.1839	0.9300	0.1565	0.1506	2.0550	0.2826	0.2283
-1.3050	0.0170	0.4993	-0.1800	0.1834	0.1815	0.9450	0.1584	0.1521	2.0700	0.2877	0.2287
-1.2900	0.0177	0.4993	-0.1650	0.1822	0.1806	0.9600	0.1598	0.1520	2.0850	0.2922	0.2293
-1.2750	0.0180	0.4990	-0.1500	0.1808	0.1785	0.9750	0.1606	0.1527	2.1000	0.2935	0.2297
-1.2600	0.0183	0.4986	-0.1350	0.1785	0.1755	0.9900	0.1624	0.1552	2.1150	0.2950	0.2301
-1.2450	0.0187	0.4985	-0.1200	0.1773	0.1740	1.0050	0.1648	0.1559	2.1300	0.2964	0.2310
-1.2300	0.0196	0.4984	-0.1050	0.1754	0.1728	1.0200	0.1670	0.1575	2.1450	0.2980	0.2321
-1.2150	0.0199	0.4984	-0.0900	0.1735	0.1717	1.0350	0.1696	0.1598	2.1600	0.2995	0.2334
-1.2000	0.0211	0.4983	-0.0750	0.1723	0.1706	1.0500	0.1715	0.1607	2.1750	0.3008	0.2350
-1.1850	0.0218	0.4981	-0.0600	0.1704	0.1684	1.0650	0.1751	0.1645	2.1900	0.3029	0.2361
-1.1700	0.0228	0.4979	-0.0450	0.1676	0.1664	1.0800	0.1787	0.1692	2.2050	0.3046	0.2380
-1.1550	0.0248	0.4979	-0.0300	0.1658	0.1652	1.0950	0.1824	0.1769	2.2200	0.3071	0.2393
-1.1400	0.0271	0.4979	-0.0150	0.1635	0.1633	1.1100	0.1862	0.1795	2.2350	0.3082	0.2402
-1.1250	0.0306	0.4978	0.0000	0.1621	0.1620	1.1250	0.1881	0.1799	2.2500	0.3099	0.2406
-1.1100	0.0341	0.4976	0.0150	0.1603	0.1607	1.1400	0.1907	0.1805	2.2650	0.3118	0.2425
-1.0950	0.0404	0.4973	0.0300	0.1580	0.1583	1.1550	0.1928	0.1810	2.2800	0.3138	0.2439
-1.0800	0.0463	0.4973	0.0450	0.1575	0.1578	1.1700	0.1947	0.1814	2.2950	0.3148	0.2449
-1.0650	0.0547	0.4973	0.0600	0.1564	0.1571	1.1850	0.1958	0.1821	2.3100	0.3167	0.2469
-1.0500	0.0653	0.4972	0.0750	0.1553	0.1567	1.2000	0.1980	0.1822	2.3250	0.3183	0.2494
-1.0350	0.0814	0.4970	0.0900	0.1543	0.1557	1.2150	0.1987	0.1835	2.3400	0.3204	0.2502
-1.0200	0.1054	0.4964	0.1050	0.1538	0.1551	1.2300	0.2000	0.1837	2.3550	0.3228	0.2544
-1.0050	0.1442	0.4964	0.1200	0.1524	0.1541	1.2450	0.2008	0.1844	2.3700	0.3252	0.2569
-0.9900	0.6930	0.4834	0.1350	0.1512	0.1537	1.2600	0.2018	0.1856	2.3850	0.3287	0.2597
-0.9750	0.6738	0.4709	0.1500	0.1500	0.1529	1.2750	0.2031	0.1861	2.4000	0.3326	0.2633
-0.9600	0.6574	0.4672	0.1650	0.1494	0.1513	1.2900	0.2042	0.1869	2.4150	0.3355	0.2649
-0.9450	0.6184	0.4652	0.1800	0.1490	0.1506	1.3050	0.2051	0.1878	2.4300	0.3388	0.2660
-0.9300	0.6044	0.4636	0.1950	0.1472	0.1495	1.3200	0.2058	0.1898	2.4450	0.3419	0.2664
-0.9150	0.5942	0.4627	0.2100	0.1453	0.1483	1.3350	0.2067	0.1909	2.4600	0.3445	0.2667
-0.9000	0.5849	0.4610	0.2250	0.1447	0.1475	1.3500	0.2078	0.1917	2.4750	0.3471	0.2676
-0.8850	0.5685	0.4596	0.2400	0.1441	0.1469	1.3650	0.2097	0.1921	2.4900	0.3486	0.2684
-0.8700	0.5537	0.4583	0.2550	0.1425	0.1449	1.3800	0.2113	0.1930	2.5050	0.3504	0.2692
-0.8550	0.5154	0.4574	0.2700	0.1414	0.1438	1.3950	0.2119	0.1934	2.5200	0.3516	0.2701
-0.8400	0.4962	0.4566	0.2850	0.1413	0.1419	1.4100	0.2125	0.1939	2.5350	0.3535	0.2712
-0.8250	0.4804	0.4400	0.3000	0.1407	0.1409	1.4250	0.2129	0.1952	2.5500	0.3557	0.2728
-0.8100	0.4595	0.4343	0.3150	0.1408	0.1416	1.4400	0.2140	0.1954	2.5650	0.3568	0.2740
-0.7950	0.4454	0.4160	0.3300	0.1401	0.1412	1.4550	0.2149	0.1973	2.5800	0.3579	0.2753
-0.7800	0.4340	0.4002	0.3450	0.1389	0.1408	1.4700	0.2151	0.1992	2.5950	0.3603	0.2762
-0.7650	0.4271	0.3863	0.3600	0.1383	0.1408	1.4850	0.2160	0.2001	2.6100	0.3629	0.2779
-0.7500	0.4231	0.3762	0.3750	0.1379	0.1399	1.5000	0.2167	0.2012	2.6250	0.3647	0.2790
-0.7350	0.4102	0.3691	0.3900	0.1377	0.1387	1.5150	0.2179	0.2023	2.6400	0.3661	0.2804
-0.7200	0.4032	0.3637	0.4050	0.1374	0.1393	1.5300	0.2189	0.2040	2.6550	0.3675	0.2814
-0.7050	0.3944	0.3613	0.4200	0.1366	0.1396	1.5450	0.2202	0.2044	2.6700	0.3710	0.2825
-0.6900	0.3839	0.3575	0.4350	0.1370	0.1401	1.5600	0.2208	0.2050	2.6850	0.3721	0.2842
-0.6750	0.3731	0.3463	0.4500	0.1368	0.1400	1.5750	0.2220	0.2056	2.7000	0.3740	0.2864
-0.6600	0.3609	0.3364	0.4650	0.1374	0.1393	1.5900	0.2236	0.2059	2.7150	0.3759	0.2917
-0.6450	0.3473	0.3318	0.4800	0.1372	0.1390	1.6050	0.2246	0.2068	2.7300	0.3780	0.2939
-0.6300	0.3380	0.3204	0.4950	0.1376	0.1391	1.6200	0.2257	0.2080	2.7450	0.3808	0.2975
-0.6150	0.3272	0.3046	0.5100	0.1376	0.1392	1.6350	0.2272	0.2090	2.7600	0.3826	0.3004
-0.6000	0.3164	0.2919	0.5250	0.1380	0.1388	1.6500	0.2281	0.2105	2.7750	0.3847	0.3027
-0.5850	0.3053	0.2866	0.5400	0.1380	0.1389	1.6650	0.2294	0.2117	2.7900	0.3871	0.3058
-0.5700	0.2955	0.2833	0.5550	0.1382	0.1391	1.6800	0.2302	0.2125	2.8050	0.3891	0.3084
-0.5550	0.2858	0.2766	0.5700	0.1386	0.1395	1.6950	0.2320	0.2133	2.8200	0.3918	0.3112
-0.5400	0.2804	0.2735	0.5850	0.1391	0.1396	1.7100	0.2339	0.2137	2.8350	0.3948	0.3148
-0.5250	0.2759	0.2706	0.6000	0.1394	0.1402	1.7250	0.2349	0.2139	2.8500	0.3976	0.3181
-0.5100	0.2700	0.2680	0.6150	0.1396	0.1404	1.7400	0.2370	0.2141	2.8650	0.3997	0.3207
-0.4950	0.2631	0.2648	0.6300	0.1398	0.1406	1.7550	0.2382	0.2148	2.8800	0.4026	0.3268
-0.4800	0.2584	0.2566	0.6450	0.1400	0.1421	1.7700	0.2393	0.2150	2.8950	0.4034	0.3339
-0.4650	0.2505	0.2452	0.6600	0.1405	0.1419	1.7850	0.2405	0.2155	2.9100	0.4055	0.3395
-0.4500	0.2453	0.2348	0.6750	0.1407	0.1423	1.8000	0.2415	0.2159	2.9250	0.4075	0.3427
-0.4350	0.2415	0.2303	0.6900	0.1410	0.1424	1.8150	0.2432	0.2160	2.9400	0.4086	0.3438
-0.4200	0.2366	0.2265	0.7050	0.1409	0.1435	1.8300	0.2445	0.2166	2.9550	0.4103	0.3442
-0.4050	0.2294	0.2233	0.7200	0.1417	0.1440	1.8450	0.2462	0.2170	2.9700	0.4116	0.3443
-0.3900	0.2253	0.2198	0.7350	0.1422	0.1437	1.8600	0.2482	0.2174	2.9850	0.4134	0.3450

Tabla 5.9: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \hat{p}(\tilde{\theta}), \hat{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\hat{p}(\tilde{\theta}), \hat{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario 1.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0165	0.5307	-0.3750	0.1844	0.1812	0.7500	0.1316	0.1312	1.8750	0.2520	0.2139
-1.4850	0.0164	0.5307	-0.3600	0.1808	0.1785	0.7650	0.1321	0.1316	1.8900	0.2532	0.2144
-1.4700	0.0161	0.5304	-0.3450	0.1772	0.1750	0.7800	0.1331	0.1321	1.9050	0.2554	0.2151
-1.4550	0.0159	0.5302	-0.3300	0.1746	0.1735	0.7950	0.1342	0.1327	1.9200	0.2570	0.2159
-1.4400	0.0158	0.5302	-0.3150	0.1726	0.1696	0.8100	0.1350	0.1327	1.9350	0.2601	0.2162
-1.4250	0.0159	0.5302	-0.3000	0.1707	0.1685	0.8250	0.1354	0.1333	1.9500	0.2625	0.2170
-1.4100	0.0158	0.5302	-0.2850	0.1682	0.1662	0.8400	0.1374	0.1347	1.9650	0.2665	0.2181
-1.3950	0.0158	0.5301	-0.2700	0.1657	0.1637	0.8550	0.1385	0.1366	1.9800	0.2689	0.2194
-1.3800	0.0152	0.5291	-0.2550	0.1639	0.1625	0.8700	0.1406	0.1369	1.9950	0.2739	0.2201
-1.3650	0.0149	0.5288	-0.2400	0.1619	0.1607	0.8850	0.1424	0.1376	2.0100	0.2778	0.2217
-1.3500	0.0147	0.5286	-0.2250	0.1608	0.1597	0.9000	0.1431	0.1377	2.0250	0.2808	0.2223
-1.3350	0.0150	0.5285	-0.2100	0.1586	0.1584	0.9150	0.1448	0.1377	2.0400	0.2885	0.2230
-1.3200	0.0150	0.5285	-0.1950	0.1569	0.1551	0.9300	0.1489	0.1403	2.0550	0.2947	0.2241
-1.3050	0.0154	0.5284	-0.1800	0.1549	0.1537	0.9450	0.1520	0.1443	2.0700	0.3011	0.2250
-1.2900	0.0158	0.5284	-0.1650	0.1539	0.1528	0.9600	0.1532	0.1443	2.0850	0.3063	0.2253
-1.2750	0.0157	0.5280	-0.1500	0.1519	0.1511	0.9750	0.1549	0.1457	2.1000	0.3089	0.2261
-1.2600	0.0154	0.5277	-0.1350	0.1504	0.1489	0.9900	0.1572	0.1482	2.1150	0.3109	0.2267
-1.2450	0.0151	0.5277	-0.1200	0.1500	0.1479	1.0050	0.1592	0.1487	2.1300	0.3129	0.2275
-1.2300	0.0156	0.5276	-0.1050	0.1485	0.1469	1.0200	0.1621	0.1510	2.1450	0.3162	0.2286
-1.2150	0.0160	0.5276	-0.0900	0.1470	0.1459	1.0350	0.1658	0.1536	2.1600	0.3186	0.2301
-1.2000	0.0164	0.5276	-0.0750	0.1461	0.1447	1.0500	0.1685	0.1547	2.1750	0.3197	0.2313
-1.1850	0.0173	0.5275	-0.0600	0.1446	0.1425	1.0650	0.1734	0.1611	2.1900	0.3219	0.2327
-1.1700	0.0188	0.5275	-0.0450	0.1421	0.1407	1.0800	0.1803	0.1682	2.2050	0.3230	0.2353
-1.1550	0.0200	0.5275	-0.0300	0.1396	0.1394	1.0950	0.1874	0.1809	2.2200	0.3249	0.2362
-1.1400	0.0206	0.5271	-0.0150	0.1377	0.1372	1.1100	0.1928	0.1853	2.2350	0.3261	0.2373
-1.1250	0.0231	0.5270	0.0000	0.1361	0.1361	1.1250	0.1960	0.1861	2.2500	0.3278	0.2376
-1.1100	0.0266	0.5268	0.0150	0.1352	0.1355	1.1400	0.1983	0.1862	2.2650	0.3302	0.2395
-1.0950	0.0320	0.5268	0.0300	0.1344	0.1341	1.1550	0.2010	0.1871	2.2800	0.3327	0.2411
-1.0800	0.0373	0.5268	0.0450	0.1340	0.1334	1.1700	0.2035	0.1874	2.2950	0.3335	0.2427
-1.0650	0.0420	0.5268	0.0600	0.1329	0.1326	1.1850	0.2050	0.1879	2.3100	0.3356	0.2455
-1.0500	0.0527	0.5268	0.0750	0.1320	0.1323	1.2000	0.2063	0.1879	2.3250	0.3371	0.2481
-1.0350	0.0662	0.5268	0.0900	0.1311	0.1319	1.2150	0.2074	0.1884	2.3400	0.3394	0.2496
-1.0200	0.0888	0.5266	0.1050	0.1307	0.1312	1.2300	0.2086	0.1889	2.3550	0.3424	0.2550
-1.0050	0.1294	0.5266	0.1200	0.1299	0.1306	1.2450	0.2097	0.1895	2.3700	0.3448	0.2571
-0.9900	0.6797	0.5074	0.1350	0.1289	0.1302	1.2600	0.2101	0.1901	2.3850	0.3489	0.2602
-0.9750	0.6628	0.4868	0.1500	0.1279	0.1295	1.2750	0.2107	0.1905	2.4000	0.3510	0.2627
-0.9600	0.6465	0.4817	0.1650	0.1268	0.1284	1.2900	0.2114	0.1909	2.4150	0.3550	0.2636
-0.9450	0.6039	0.4790	0.1800	0.1260	0.1274	1.3050	0.2123	0.1914	2.4300	0.3575	0.2648
-0.9300	0.5853	0.4759	0.1950	0.1254	0.1261	1.3200	0.2126	0.1934	2.4450	0.3600	0.2649
-0.9150	0.5756	0.4738	0.2100	0.1242	0.1254	1.3350	0.2133	0.1943	2.4600	0.3620	0.2654
-0.9000	0.5676	0.4717	0.2250	0.1245	0.1249	1.3500	0.2140	0.1945	2.4750	0.3642	0.2655
-0.8850	0.5541	0.4700	0.2400	0.1237	0.1244	1.3650	0.2146	0.1946	2.4900	0.3663	0.2662
-0.8700	0.5389	0.4687	0.2550	0.1228	0.1238	1.3800	0.2164	0.1951	2.5050	0.3672	0.2669
-0.8550	0.4919	0.4681	0.2700	0.1222	0.1232	1.3950	0.2179	0.1959	2.5200	0.3688	0.2677
-0.8400	0.4718	0.4665	0.2850	0.1225	0.1221	1.4100	0.2188	0.1962	2.5350	0.3707	0.2685
-0.8250	0.4563	0.4438	0.3000	0.1219	0.1212	1.4250	0.2192	0.1972	2.5500	0.3730	0.2708
-0.8100	0.4352	0.4302	0.3150	0.1218	0.1216	1.4400	0.2202	0.1973	2.5650	0.3747	0.2719
-0.7950	0.4173	0.4092	0.3300	0.1215	0.1216	1.4550	0.2207	0.1985	2.5800	0.3755	0.2743
-0.7800	0.4039	0.3911	0.3450	0.1211	0.1213	1.4700	0.2212	0.1992	2.5950	0.3770	0.2753
-0.7650	0.3969	0.3755	0.3600	0.1210	0.1215	1.4850	0.2218	0.2002	2.6100	0.3785	0.2767
-0.7500	0.3932	0.3631	0.3750	0.1205	0.1209	1.5000	0.2226	0.2009	2.6250	0.3805	0.2772
-0.7350	0.3807	0.3536	0.3900	0.1206	0.1206	1.5150	0.2229	0.2018	2.6400	0.3823	0.2779
-0.7200	0.3738	0.3483	0.4050	0.1200	0.1207	1.5300	0.2234	0.2026	2.6550	0.3839	0.2786
-0.7050	0.3655	0.3461	0.4200	0.1203	0.1218	1.5450	0.2237	0.2030	2.6700	0.3872	0.2803
-0.6900	0.3580	0.3412	0.4350	0.1208	0.1221	1.5600	0.2246	0.2035	2.6850	0.3881	0.2813
-0.6750	0.3466	0.3261	0.4500	0.1211	0.1220	1.5750	0.2267	0.2041	2.7000	0.3896	0.2829
-0.6600	0.3333	0.3095	0.4650	0.1222	0.1214	1.5900	0.2279	0.2042	2.7150	0.3910	0.2869
-0.6450	0.3174	0.3017	0.4800	0.1223	0.1216	1.6050	0.2292	0.2053	2.7300	0.3930	0.2886
-0.6300	0.3074	0.2915	0.4950	0.1227	0.1220	1.6200	0.2305	0.2064	2.7450	0.3947	0.2919
-0.6150	0.2961	0.2760	0.5100	0.1229	0.1222	1.6350	0.2313	0.2067	2.7600	0.3965	0.2943
-0.6000	0.2847	0.2641	0.5250	0.1227	0.1224	1.6500	0.2325	0.2073	2.7750	0.3990	0.2969
-0.5850	0.2689	0.2579	0.5400	0.1226	0.1225	1.6650	0.2338	0.2083	2.7900	0.4016	0.3021
-0.5700	0.2580	0.2546	0.5550	0.1225	0.1231	1.6800	0.2347	0.2094	2.8050	0.4038	0.3047
-0.5550	0.2488	0.2466	0.5700	0.1233	0.1243	1.6950	0.2356	0.2103	2.8200	0.4068	0.3088
-0.5400	0.2444	0.2438	0.5850	0.1232	0.1247	1.7100	0.2370	0.2106	2.8350	0.4107	0.3134
-0.5250	0.2398	0.2413	0.6000	0.1239	0.1249	1.7250	0.2378	0.2107	2.8500	0.4139	0.3175
-0.5100	0.2356	0.2378	0.6150	0.1245	0.1254	1.7400	0.2389	0.2106	2.8650	0.4149	0.3203
-0.4950	0.2279	0.2335	0.6300	0.1247	0.1252	1.7550	0.2400	0.2116	2.8800	0.4177	0.3276
-0.4800	0.2242	0.2258	0.6450	0.1251	0.1254	1.7700	0.2417	0.2116	2.8950	0.4185	0.3346
-0.4650	0.2172	0.2143	0.6600	0.1261	0.1257	1.7850	0.2430	0.2120	2.9100	0.4201	0.3411
-0.4500	0.2110	0.2015	0.6750	0.1266	0.1266	1.8000	0.2442	0.2124	2.9250	0.4223	0.3437
-0.4350	0.2072	0.1966	0.6900	0.1274	0.1268	1.8150	0.2461	0.2127	2.9400	0.4232	0.3450
-0.4200	0.2000	0.1914	0.7050	0.1273	0.1279	1.8300	0.2470	0.2129	2.9550	0.4245	0.3458
-0.4050	0.1931	0.1886	0.7200	0.1288	0.1291	1.8450	0.2485	0.2131	2.9700	0.4255	0.3460
-0.3900	0.1888	0.1856	0.7350	0.1305	0.1289	1.8600	0.2504	0.2136	2.9850	0.4272	0.3468

Tabla 5.10: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\tilde{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\tilde{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario 1.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0623	0.0966	-0.3750	0.0820	0.0772	0.7500	0.0501	0.0522	1.8750	0.0524	0.0525
-1.4850	0.0619	0.0962	-0.3600	0.0809	0.0770	0.7650	0.0499	0.0521	1.8900	0.0528	0.0526
-1.4700	0.0614	0.0960	-0.3450	0.0802	0.0769	0.7800	0.0499	0.0518	1.9050	0.0531	0.0526
-1.4550	0.0608	0.0958	-0.3300	0.0798	0.0765	0.7950	0.0499	0.0517	1.9200	0.0534	0.0526
-1.4400	0.0603	0.0957	-0.3150	0.0791	0.0760	0.8100	0.0498	0.0518	1.9350	0.0535	0.0526
-1.4250	0.0601	0.0954	-0.3000	0.0789	0.0756	0.8250	0.0496	0.0516	1.9500	0.0535	0.0527
-1.4100	0.0596	0.0953	-0.2850	0.0783	0.0753	0.8400	0.0494	0.0516	1.9650	0.0535	0.0529
-1.3950	0.0591	0.0952	-0.2700	0.0776	0.0749	0.8550	0.0495	0.0516	1.9800	0.0536	0.0530
-1.3800	0.0587	0.0949	-0.2550	0.0766	0.0743	0.8700	0.0495	0.0515	1.9950	0.0541	0.0531
-1.3650	0.0583	0.0947	-0.2400	0.0763	0.0739	0.8850	0.0495	0.0515	2.0100	0.0544	0.0534
-1.3500	0.0579	0.0945	-0.2250	0.0759	0.0737	0.9000	0.0493	0.0514	2.0250	0.0546	0.0535
-1.3350	0.0577	0.0943	-0.2100	0.0748	0.0728	0.9150	0.0493	0.0515	2.0400	0.0549	0.0539
-1.3200	0.0579	0.0941	-0.1950	0.0744	0.0725	0.9300	0.0494	0.0515	2.0550	0.0555	0.0539
-1.3050	0.0577	0.0939	-0.1800	0.0738	0.0719	0.9450	0.0496	0.0514	2.0700	0.0556	0.0539
-1.2900	0.0571	0.0935	-0.1650	0.0728	0.0710	0.9600	0.0496	0.0513	2.0850	0.0559	0.0539
-1.2750	0.0570	0.0934	-0.1500	0.0719	0.0705	0.9750	0.0493	0.0514	2.1000	0.0562	0.0542
-1.2600	0.0567	0.0929	-0.1350	0.0712	0.0701	0.9900	0.0493	0.0515	2.1150	0.0563	0.0543
-1.2450	0.0566	0.0928	-0.1200	0.0709	0.0697	1.0050	0.0491	0.0513	2.1300	0.0565	0.0545
-1.2300	0.0568	0.0924	-0.1050	0.0705	0.0693	1.0200	0.0491	0.0512	2.1450	0.0571	0.0546
-1.2150	0.0559	0.0923	-0.0900	0.0694	0.0691	1.0350	0.0491	0.0513	2.1600	0.0573	0.0547
-1.2000	0.0555	0.0919	-0.0750	0.0689	0.0684	1.0500	0.0491	0.0514	2.1750	0.0578	0.0547
-1.1850	0.0552	0.0918	-0.0600	0.0681	0.0676	1.0650	0.0485	0.0514	2.1900	0.0579	0.0547
-1.1700	0.0556	0.0914	-0.0450	0.0675	0.0674	1.0800	0.0484	0.0515	2.2050	0.0579	0.0549
-1.1550	0.0557	0.0911	-0.0300	0.0672	0.0671	1.0950	0.0483	0.0515	2.2200	0.0581	0.0550
-1.1400	0.0566	0.0908	-0.0150	0.0671	0.0670	1.1100	0.0484	0.0516	2.2350	0.0585	0.0551
-1.1250	0.0574	0.0905	0.0000	0.0665	0.0665	1.1250	0.0485	0.0516	2.2500	0.0588	0.0552
-1.1100	0.0585	0.0903	0.0150	0.0659	0.0660	1.1400	0.0485	0.0516	2.2650	0.0592	0.0554
-1.0950	0.0591	0.0900	0.0300	0.0656	0.0658	1.1550	0.0486	0.0515	2.2800	0.0598	0.0555
-1.0800	0.0607	0.0897	0.0450	0.0654	0.0654	1.1700	0.0486	0.0516	2.2950	0.0600	0.0559
-1.0650	0.0616	0.0895	0.0600	0.0652	0.0652	1.1850	0.0485	0.0516	2.3100	0.0604	0.0560
-1.0500	0.0636	0.0892	0.0750	0.0644	0.0646	1.2000	0.0486	0.0515	2.3250	0.0607	0.0563
-1.0350	0.0658	0.0889	0.0900	0.0642	0.0643	1.2150	0.0487	0.0515	2.3400	0.0607	0.0564
-1.0200	0.0689	0.0887	0.1050	0.0639	0.0639	1.2300	0.0488	0.0515	2.3550	0.0611	0.0565
-1.0050	0.0716	0.0887	0.1200	0.0629	0.0633	1.2450	0.0488	0.0517	2.3700	0.0612	0.0566
-0.9900	0.1351	0.0887	0.1350	0.0623	0.0628	1.2600	0.0490	0.0516	2.3850	0.0616	0.0566
-0.9750	0.1325	0.0883	0.1500	0.0617	0.0623	1.2750	0.0490	0.0517	2.4000	0.0621	0.0567
-0.9600	0.1301	0.0879	0.1650	0.0614	0.0620	1.2900	0.0493	0.0515	2.4150	0.0625	0.0569
-0.9450	0.1284	0.0876	0.1800	0.0611	0.0614	1.3050	0.0494	0.0515	2.4300	0.0632	0.0571
-0.9300	0.1261	0.0874	0.1950	0.0606	0.0610	1.3200	0.0497	0.0517	2.4450	0.0635	0.0571
-0.9150	0.1234	0.0874	0.2100	0.0601	0.0607	1.3350	0.0498	0.0517	2.4600	0.0639	0.0572
-0.9000	0.1213	0.0870	0.2250	0.0596	0.0600	1.3500	0.0497	0.0518	2.4750	0.0646	0.0574
-0.8850	0.1197	0.0870	0.2400	0.0589	0.0597	1.3650	0.0497	0.0518	2.4900	0.0650	0.0574
-0.8700	0.1180	0.0867	0.2550	0.0582	0.0592	1.3800	0.0500	0.0518	2.5050	0.0652	0.0574
-0.8550	0.1158	0.0866	0.2700	0.0575	0.0590	1.3950	0.0501	0.0517	2.5200	0.0654	0.0574
-0.8400	0.1144	0.0861	0.2850	0.0569	0.0586	1.4100	0.0502	0.0516	2.5350	0.0659	0.0577
-0.8250	0.1123	0.0859	0.3000	0.0564	0.0586	1.4250	0.0500	0.0515	2.5500	0.0661	0.0577
-0.8100	0.1112	0.0857	0.3150	0.0563	0.0584	1.4400	0.0501	0.0514	2.5650	0.0666	0.0579
-0.7950	0.1106	0.0853	0.3300	0.0556	0.0581	1.4550	0.0501	0.0513	2.5800	0.0668	0.0582
-0.7800	0.1089	0.0851	0.3450	0.0552	0.0581	1.4700	0.0501	0.0513	2.5950	0.0671	0.0587
-0.7650	0.1072	0.0850	0.3600	0.0548	0.0577	1.4850	0.0501	0.0513	2.6100	0.0672	0.0587
-0.7500	0.1063	0.0848	0.3750	0.0545	0.0571	1.5000	0.0502	0.0512	2.6250	0.0675	0.0588
-0.7350	0.1056	0.0845	0.3900	0.0542	0.0567	1.5150	0.0502	0.0512	2.6400	0.0682	0.0591
-0.7200	0.1044	0.0842	0.4050	0.0540	0.0563	1.5300	0.0502	0.0512	2.6550	0.0685	0.0594
-0.7050	0.1029	0.0838	0.4200	0.0537	0.0559	1.5450	0.0500	0.0515	2.6700	0.0688	0.0595
-0.6900	0.1016	0.0835	0.4350	0.0531	0.0554	1.5600	0.0503	0.0515	2.6850	0.0695	0.0597
-0.6750	0.1002	0.0834	0.4500	0.0527	0.0554	1.5750	0.0503	0.0515	2.7000	0.0699	0.0599
-0.6600	0.0991	0.0834	0.4650	0.0521	0.0550	1.5900	0.0504	0.0515	2.7150	0.0706	0.0599
-0.6450	0.0979	0.0830	0.4800	0.0515	0.0549	1.6050	0.0504	0.0515	2.7300	0.0708	0.0603
-0.6300	0.0966	0.0826	0.4950	0.0517	0.0544	1.6200	0.0502	0.0515	2.7450	0.0711	0.0605
-0.6150	0.0958	0.0824	0.5100	0.0517	0.0542	1.6350	0.0501	0.0517	2.7600	0.0713	0.0609
-0.6000	0.0949	0.0820	0.5250	0.0515	0.0541	1.6500	0.0504	0.0517	2.7750	0.0717	0.0610
-0.5850	0.0940	0.0820	0.5400	0.0514	0.0537	1.6650	0.0505	0.0517	2.7900	0.0724	0.0612
-0.5700	0.0925	0.0817	0.5550	0.0514	0.0537	1.6800	0.0508	0.0517	2.8050	0.0725	0.0615
-0.5550	0.0920	0.0816	0.5700	0.0512	0.0536	1.6950	0.0510	0.0517	2.8200	0.0727	0.0616
-0.5400	0.0912	0.0816	0.5850	0.0511	0.0535	1.7100	0.0512	0.0517	2.8350	0.0728	0.0618
-0.5250	0.0901	0.0812	0.6000	0.0511	0.0530	1.7250	0.0511	0.0518	2.8500	0.0733	0.0621
-0.5100	0.0895	0.0810	0.6150	0.0509	0.0526	1.7400	0.0511	0.0518	2.8650	0.0735	0.0622
-0.4950	0.0886	0.0809	0.6300	0.0507	0.0524	1.7550	0.0511	0.0519	2.8800	0.0740	0.0625
-0.4800	0.0880	0.0803	0.6450	0.0504	0.0523	1.7700	0.0511	0.0518	2.8950	0.0742	0.0627
-0.4650	0.0870	0.0801	0.6600	0.0502	0.0522	1.7850	0.0512	0.0518	2.9100	0.0749	0.0628
-0.4500	0.0860	0.0797	0.6750	0.0501	0.0521	1.8000	0.0514	0.0518	2.9250	0.0755	0.0632
-0.4350	0.0852	0.0791	0.6900	0.0499	0.0523	1.8150	0.0515	0.0517	2.9400	0.0760	0.0636
-0.4200	0.0846	0.0789	0.7050	0.0497	0.0521	1.8300	0.0517	0.0519	2.9550	0.0766	0.0637
-0.4050	0.0839	0.0786	0.7200	0.0500	0.0522	1.8450	0.0519	0.0523	2.9700	0.0768	0.0642
-0.3900	0.0830	0.0779	0.7350	0.0501	0.0523	1.8600	0.0521	0.0524	2.9850	0.0773	0.0645

Tabla 5.11: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, \hat{p}(\bar{\theta}), \hat{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\hat{p}(\bar{\theta}), \hat{p}(\hat{\theta}))$. Escenario 2.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1396	0.1613	-0.3750	0.1329	0.1275	0.7500	0.1073	0.1103	1.8750	0.1192	0.1161
-1.4850	0.1389	0.1606	-0.3600	0.1320	0.1273	0.7650	0.1073	0.1103	1.8900	0.1195	0.1164
-1.4700	0.1378	0.1603	-0.3450	0.1315	0.1271	0.7800	0.1069	0.1105	1.9050	0.1199	0.1169
-1.4550	0.1374	0.1596	-0.3300	0.1309	0.1268	0.7950	0.1070	0.1106	1.9200	0.1204	0.1170
-1.4400	0.1364	0.1587	-0.3150	0.1303	0.1264	0.8100	0.1067	0.1106	1.9350	0.1210	0.1172
-1.4250	0.1354	0.1578	-0.3000	0.1296	0.1265	0.8250	0.1069	0.1104	1.9500	0.1215	0.1177
-1.4100	0.1345	0.1572	-0.2850	0.1289	0.1262	0.8400	0.1067	0.1106	1.9650	0.1222	0.1179
-1.3950	0.1338	0.1563	-0.2700	0.1279	0.1256	0.8550	0.1070	0.1105	1.9800	0.1227	0.1183
-1.3800	0.1323	0.1557	-0.2550	0.1273	0.1253	0.8700	0.1071	0.1106	1.9950	0.1235	0.1190
-1.3650	0.1314	0.1549	-0.2400	0.1263	0.1250	0.8850	0.1069	0.1107	2.0100	0.1237	0.1193
-1.3500	0.1302	0.1543	-0.2250	0.1263	0.1245	0.9000	0.1068	0.1106	2.0250	0.1242	0.1197
-1.3350	0.1292	0.1534	-0.2100	0.1259	0.1243	0.9150	0.1069	0.1107	2.0400	0.1249	0.1198
-1.3200	0.1281	0.1526	-0.1950	0.1252	0.1242	0.9300	0.1071	0.1108	2.0550	0.1257	0.1202
-1.3050	0.1277	0.1520	-0.1800	0.1248	0.1240	0.9450	0.1071	0.1108	2.0700	0.1264	0.1204
-1.2900	0.1272	0.1519	-0.1650	0.1244	0.1238	0.9600	0.1074	0.1108	2.0850	0.1268	0.1209
-1.2750	0.1271	0.1510	-0.1500	0.1241	0.1233	0.9750	0.1073	0.1110	2.1000	0.1270	0.1211
-1.2600	0.1269	0.1502	-0.1350	0.1236	0.1228	0.9900	0.1072	0.1110	2.1150	0.1276	0.1213
-1.2450	0.1268	0.1497	-0.1200	0.1235	0.1226	1.0050	0.1074	0.1113	2.1300	0.1281	0.1214
-1.2300	0.1262	0.1490	-0.1050	0.1231	0.1222	1.0200	0.1076	0.1112	2.1450	0.1289	0.1217
-1.2150	0.1259	0.1489	-0.0900	0.1230	0.1220	1.0350	0.1076	0.1112	2.1600	0.1295	0.1219
-1.2000	0.1254	0.1480	-0.0750	0.1225	0.1220	1.0500	0.1076	0.1109	2.1750	0.1297	0.1221
-1.1850	0.1263	0.1473	-0.0600	0.1222	0.1217	1.0650	0.1076	0.1109	2.1900	0.1302	0.1222
-1.1700	0.1268	0.1468	-0.0450	0.1221	0.1216	1.0800	0.1078	0.1111	2.2050	0.1306	0.1225
-1.1550	0.1274	0.1465	-0.0300	0.1217	0.1215	1.0950	0.1077	0.1111	2.2200	0.1308	0.1228
-1.1400	0.1281	0.1455	-0.0150	0.1211	0.1208	1.1100	0.1078	0.1111	2.2350	0.1314	0.1230
-1.1250	0.1297	0.1448	0.0000	0.1206	0.1206	1.1250	0.1077	0.1110	2.2500	0.1320	0.1233
-1.1100	0.1309	0.1446	0.0150	0.1202	0.1203	1.1400	0.1075	0.1112	2.2650	0.1325	0.1239
-1.0950	0.1313	0.1442	0.0300	0.1201	0.1200	1.1550	0.1076	0.1112	2.2800	0.1332	0.1241
-1.0800	0.1336	0.1440	0.0450	0.1197	0.1198	1.1700	0.1078	0.1114	2.2950	0.1334	0.1247
-1.0650	0.1374	0.1435	0.0600	0.1192	0.1194	1.1850	0.1076	0.1111	2.3100	0.1340	0.1252
-1.0500	0.1406	0.1432	0.0750	0.1192	0.1192	1.2000	0.1077	0.1111	2.3250	0.1342	0.1260
-1.0350	0.1434	0.1427	0.0900	0.1186	0.1187	1.2150	0.1078	0.1112	2.3400	0.1351	0.1264
-1.0200	0.1470	0.1421	0.1050	0.1181	0.1184	1.2300	0.1081	0.1110	2.3550	0.1359	0.1267
-1.0050	0.1514	0.1416	0.1200	0.1176	0.1181	1.2450	0.1087	0.1109	2.3700	0.1362	0.1268
-0.9900	0.1926	0.1413	0.1350	0.1173	0.1179	1.2600	0.1092	0.1110	2.3850	0.1368	0.1274
-0.9750	0.1897	0.1410	0.1500	0.1168	0.1177	1.2750	0.1091	0.1111	2.4000	0.1374	0.1281
-0.9600	0.1882	0.1408	0.1650	0.1166	0.1172	1.2900	0.1091	0.1111	2.4150	0.1378	0.1285
-0.9450	0.1854	0.1404	0.1800	0.1160	0.1171	1.3050	0.1091	0.1112	2.4300	0.1386	0.1289
-0.9300	0.1815	0.1402	0.1950	0.1156	0.1168	1.3200	0.1091	0.1110	2.4450	0.1392	0.1292
-0.9150	0.1781	0.1399	0.2100	0.1152	0.1165	1.3350	0.1091	0.1110	2.4600	0.1398	0.1293
-0.9000	0.1747	0.1398	0.2250	0.1145	0.1164	1.3500	0.1092	0.1109	2.4750	0.1402	0.1295
-0.8850	0.1728	0.1395	0.2400	0.1143	0.1158	1.3650	0.1094	0.1108	2.4900	0.1404	0.1295
-0.8700	0.1704	0.1391	0.2550	0.1137	0.1153	1.3800	0.1094	0.1109	2.5050	0.1411	0.1298
-0.8550	0.1679	0.1388	0.2700	0.1131	0.1149	1.3950	0.1099	0.1111	2.5200	0.1423	0.1304
-0.8400	0.1655	0.1384	0.2850	0.1131	0.1148	1.4100	0.1101	0.1111	2.5350	0.1430	0.1305
-0.8250	0.1634	0.1378	0.3000	0.1131	0.1145	1.4250	0.1107	0.1110	2.5500	0.1434	0.1307
-0.8100	0.1620	0.1374	0.3150	0.1127	0.1142	1.4400	0.1106	0.1110	2.5650	0.1444	0.1307
-0.7950	0.1603	0.1371	0.3300	0.1124	0.1140	1.4550	0.1108	0.1111	2.5800	0.1451	0.1312
-0.7800	0.1590	0.1368	0.3450	0.1120	0.1138	1.4700	0.1109	0.1111	2.5950	0.1451	0.1314
-0.7650	0.1577	0.1364	0.3600	0.1117	0.1137	1.4850	0.1110	0.1111	2.6100	0.1454	0.1318
-0.7500	0.1561	0.1357	0.3750	0.1115	0.1135	1.5000	0.1113	0.1112	2.6250	0.1460	0.1322
-0.7350	0.1549	0.1356	0.3900	0.1109	0.1134	1.5150	0.1116	0.1113	2.6400	0.1465	0.1322
-0.7200	0.1536	0.1356	0.4050	0.1106	0.1131	1.5300	0.1118	0.1115	2.6550	0.1472	0.1327
-0.7050	0.1522	0.1352	0.4200	0.1104	0.1128	1.5450	0.1118	0.1121	2.6700	0.1477	0.1330
-0.6900	0.1509	0.1347	0.4350	0.1100	0.1130	1.5600	0.1121	0.1123	2.6850	0.1483	0.1332
-0.6750	0.1493	0.1344	0.4500	0.1099	0.1129	1.5750	0.1124	0.1124	2.7000	0.1485	0.1335
-0.6600	0.1485	0.1341	0.4650	0.1094	0.1128	1.5900	0.1126	0.1125	2.7150	0.1494	0.1336
-0.6450	0.1476	0.1333	0.4800	0.1089	0.1128	1.6050	0.1130	0.1125	2.7300	0.1499	0.1340
-0.6300	0.1472	0.1329	0.4950	0.1087	0.1124	1.6200	0.1132	0.1125	2.7450	0.1505	0.1345
-0.6150	0.1464	0.1328	0.5100	0.1086	0.1120	1.6350	0.1137	0.1128	2.7600	0.1510	0.1348
-0.6000	0.1455	0.1328	0.5250	0.1082	0.1118	1.6500	0.1137	0.1129	2.7750	0.1517	0.1350
-0.5850	0.1439	0.1325	0.5400	0.1080	0.1116	1.6650	0.1142	0.1130	2.7900	0.1526	0.1352
-0.5700	0.1432	0.1319	0.5550	0.1079	0.1115	1.6800	0.1147	0.1132	2.8050	0.1531	0.1357
-0.5550	0.1424	0.1315	0.5700	0.1077	0.1115	1.6950	0.1150	0.1132	2.8200	0.1536	0.1358
-0.5400	0.1416	0.1311	0.5850	0.1078	0.1114	1.7100	0.1152	0.1133	2.8350	0.1543	0.1360
-0.5250	0.1410	0.1309	0.6000	0.1080	0.1114	1.7250	0.1152	0.1132	2.8500	0.1550	0.1368
-0.5100	0.1405	0.1305	0.6150	0.1082	0.1115	1.7400	0.1155	0.1135	2.8650	0.1561	0.1374
-0.4950	0.1396	0.1301	0.6300	0.1081	0.1112	1.7550	0.1162	0.1138	2.8800	0.1566	0.1377
-0.4800	0.1388	0.1297	0.6450	0.1077	0.1112	1.7700	0.1165	0.1140	2.8950	0.1574	0.1380
-0.4650	0.1381	0.1294	0.6600	0.1078	0.1107	1.7850	0.1168	0.1142	2.9100	0.1583	0.1384
-0.4500	0.1374	0.1293	0.6750	0.1078	0.1105	1.8000	0.1173	0.1147	2.9250	0.1592	0.1385
-0.4350	0.1362	0.1287	0.6900	0.1078	0.1107	1.8150	0.1176	0.1148	2.9400	0.1594	0.1388
-0.4200	0.1358	0.1282	0.7050	0.1074	0.1103	1.8300	0.1179	0.1152	2.9550	0.1603	0.1391
-0.4050	0.1352	0.1279	0.7200	0.1073	0.1102	1.8450	0.1184	0.1155	2.9700	0.1614	0.1396
-0.3900	0.1337	0.1277	0.7350	0.1073	0.1103	1.8600	0.1190	0.1158	2.9850	0.1623	0.1399

Tabla 5.12: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\tilde{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario 2.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1556	0.2678	-0.3750	0.2277	0.2198	0.7500	0.1924	0.1945	1.8750	0.2457	0.2319
-1.4850	0.1551	0.2676	-0.3600	0.2265	0.2194	0.7650	0.1925	0.1948	1.8900	0.2469	0.2329
-1.4700	0.1542	0.2671	-0.3450	0.2253	0.2191	0.7800	0.1928	0.1964	1.9050	0.2479	0.2335
-1.4550	0.1532	0.2665	-0.3300	0.2243	0.2176	0.7950	0.1931	0.1964	1.9200	0.2495	0.2341
-1.4400	0.1525	0.2661	-0.3150	0.2227	0.2162	0.8100	0.1935	0.1972	1.9350	0.2503	0.2351
-1.4250	0.1520	0.2648	-0.3000	0.2218	0.2156	0.8250	0.1937	0.1972	1.9500	0.2510	0.2360
-1.4100	0.1504	0.2637	-0.2850	0.2210	0.2149	0.8400	0.1942	0.1970	1.9650	0.2520	0.2371
-1.3950	0.1498	0.2623	-0.2700	0.2203	0.2139	0.8550	0.1945	0.1974	1.9800	0.2534	0.2377
-1.3800	0.1496	0.2618	-0.2550	0.2196	0.2137	0.8700	0.1949	0.1977	1.9950	0.2539	0.2384
-1.3650	0.1496	0.2612	-0.2400	0.2187	0.2133	0.8850	0.1956	0.1981	2.0100	0.2550	0.2390
-1.3500	0.1488	0.2608	-0.2250	0.2170	0.2127	0.9000	0.1960	0.1982	2.0250	0.2563	0.2399
-1.3350	0.1477	0.2602	-0.2100	0.2156	0.2119	0.9150	0.1964	0.1981	2.0400	0.2576	0.2414
-1.3200	0.1472	0.2596	-0.1950	0.2146	0.2115	0.9300	0.1968	0.1984	2.0550	0.2586	0.2424
-1.3050	0.1464	0.2592	-0.1800	0.2138	0.2106	0.9450	0.1969	0.1988	2.0700	0.2599	0.2434
-1.2900	0.1462	0.2588	-0.1650	0.2125	0.2097	0.9600	0.1975	0.1992	2.0850	0.2606	0.2443
-1.2750	0.1461	0.2581	-0.1500	0.2116	0.2089	0.9750	0.1980	0.1995	2.1000	0.2622	0.2459
-1.2600	0.1458	0.2577	-0.1350	0.2107	0.2080	0.9900	0.1987	0.1998	2.1150	0.2632	0.2470
-1.2450	0.1455	0.2574	-0.1200	0.2095	0.2074	1.0050	0.1991	0.1996	2.1300	0.2640	0.2476
-1.2300	0.1457	0.2568	-0.1050	0.2081	0.2071	1.0200	0.1992	0.1998	2.1450	0.2649	0.2482
-1.2150	0.1459	0.2560	-0.0900	0.2072	0.2058	1.0350	0.1995	0.2001	2.1600	0.2662	0.2491
-1.2000	0.1469	0.2548	-0.0750	0.2065	0.2049	1.0500	0.1999	0.2008	2.1750	0.2679	0.2499
-1.1850	0.1499	0.2546	-0.0600	0.2057	0.2043	1.0650	0.1999	0.2010	2.1900	0.2688	0.2510
-1.1700	0.1529	0.2538	-0.0450	0.2047	0.2033	1.0800	0.2014	0.2019	2.2050	0.2696	0.2516
-1.1550	0.1547	0.2533	-0.0300	0.2038	0.2029	1.0950	0.2019	0.2022	2.2200	0.2707	0.2523
-1.1400	0.1568	0.2523	-0.0150	0.2023	0.2020	1.1100	0.2022	0.2022	2.2350	0.2715	0.2535
-1.1250	0.1602	0.2519	0.0000	0.2018	0.2018	1.1250	0.2029	0.2025	2.2500	0.2726	0.2541
-1.1100	0.1647	0.2514	0.0150	0.2005	0.2009	1.1400	0.2034	0.2027	2.2650	0.2738	0.2546
-1.0950	0.1692	0.2511	0.0300	0.1998	0.2001	1.1550	0.2043	0.2031	2.2800	0.2751	0.2554
-1.0800	0.1749	0.2505	0.0450	0.1987	0.1997	1.1700	0.2046	0.2036	2.2950	0.2758	0.2572
-1.0650	0.1858	0.2501	0.0600	0.1980	0.1994	1.1850	0.2055	0.2042	2.3100	0.2769	0.2590
-1.0500	0.1935	0.2493	0.0750	0.1974	0.1987	1.2000	0.2065	0.2044	2.3250	0.2781	0.2606
-1.0350	0.2016	0.2490	0.0900	0.1963	0.1979	1.2150	0.2070	0.2049	2.3400	0.2788	0.2612
-1.0200	0.2101	0.2486	0.1050	0.1958	0.1976	1.2300	0.2075	0.2051	2.3550	0.2807	0.2621
-1.0050	0.2236	0.2481	0.1200	0.1958	0.1974	1.2450	0.2079	0.2052	2.3700	0.2818	0.2629
-0.9900	0.3629	0.2474	0.1350	0.1954	0.1969	1.2600	0.2089	0.2061	2.3850	0.2825	0.2635
-0.9750	0.3562	0.2473	0.1500	0.1949	0.1967	1.2750	0.2093	0.2064	2.4000	0.2834	0.2642
-0.9600	0.3507	0.2471	0.1650	0.1947	0.1965	1.2900	0.2101	0.2068	2.4150	0.2843	0.2647
-0.9450	0.3454	0.2465	0.1800	0.1944	0.1961	1.3050	0.2106	0.2069	2.4300	0.2858	0.2657
-0.9300	0.3407	0.2459	0.1950	0.1938	0.1958	1.3200	0.2110	0.2072	2.4450	0.2867	0.2663
-0.9150	0.3344	0.2454	0.2100	0.1932	0.1957	1.3350	0.2121	0.2078	2.4600	0.2879	0.2672
-0.9000	0.3282	0.2453	0.2250	0.1929	0.1953	1.3500	0.2125	0.2084	2.4750	0.2895	0.2674
-0.8850	0.3227	0.2450	0.2400	0.1927	0.1949	1.3650	0.2134	0.2088	2.4900	0.2904	0.2675
-0.8700	0.3165	0.2447	0.2550	0.1926	0.1949	1.3800	0.2145	0.2097	2.5050	0.2916	0.2682
-0.8550	0.3114	0.2442	0.2700	0.1925	0.1944	1.3950	0.2153	0.2100	2.5200	0.2925	0.2686
-0.8400	0.3080	0.2439	0.2850	0.1923	0.1944	1.4100	0.2158	0.2102	2.5350	0.2938	0.2690
-0.8250	0.3036	0.2432	0.3000	0.1923	0.1946	1.4250	0.2160	0.2113	2.5500	0.2951	0.2699
-0.8100	0.2996	0.2427	0.3150	0.1925	0.1945	1.4400	0.2166	0.2120	2.5650	0.2961	0.2705
-0.7950	0.2957	0.2422	0.3300	0.1923	0.1945	1.4550	0.2177	0.2124	2.5800	0.2967	0.2715
-0.7800	0.2901	0.2412	0.3450	0.1922	0.1943	1.4700	0.2186	0.2128	2.5950	0.2984	0.2723
-0.7650	0.2863	0.2402	0.3600	0.1916	0.1937	1.4850	0.2193	0.2140	2.6100	0.2996	0.2731
-0.7500	0.2825	0.2390	0.3750	0.1908	0.1938	1.5000	0.2206	0.2150	2.6250	0.3008	0.2739
-0.7350	0.2783	0.2378	0.3900	0.1905	0.1932	1.5150	0.2213	0.2161	2.6400	0.3021	0.2748
-0.7200	0.2756	0.2373	0.4050	0.1898	0.1930	1.5300	0.2220	0.2169	2.6550	0.3032	0.2754
-0.7050	0.2728	0.2366	0.4200	0.1895	0.1928	1.5450	0.2229	0.2177	2.6700	0.3037	0.2762
-0.6900	0.2693	0.2361	0.4350	0.1896	0.1920	1.5600	0.2239	0.2182	2.6850	0.3048	0.2766
-0.6750	0.2658	0.2361	0.4500	0.1891	0.1915	1.5750	0.2247	0.2191	2.7000	0.3065	0.2775
-0.6600	0.2636	0.2352	0.4650	0.1888	0.1914	1.5900	0.2265	0.2202	2.7150	0.3080	0.2784
-0.6450	0.2613	0.2335	0.4800	0.1889	0.1914	1.6050	0.2270	0.2206	2.7300	0.3095	0.2794
-0.6300	0.2584	0.2325	0.4950	0.1889	0.1911	1.6200	0.2276	0.2212	2.7450	0.3104	0.2801
-0.6150	0.2561	0.2314	0.5100	0.1891	0.1909	1.6350	0.2284	0.2216	2.7600	0.3120	0.2810
-0.6000	0.2548	0.2309	0.5250	0.1891	0.1911	1.6500	0.2288	0.2224	2.7750	0.3141	0.2817
-0.5850	0.2530	0.2304	0.5400	0.1892	0.1913	1.6650	0.2292	0.2229	2.7900	0.3156	0.2827
-0.5700	0.2503	0.2301	0.5550	0.1894	0.1914	1.6800	0.2303	0.2233	2.8050	0.3167	0.2834
-0.5550	0.2482	0.2303	0.5700	0.1893	0.1917	1.6950	0.2313	0.2241	2.8200	0.3185	0.2837
-0.5400	0.2467	0.2297	0.5850	0.1896	0.1920	1.7100	0.2322	0.2248	2.8350	0.3198	0.2844
-0.5250	0.2446	0.2292	0.6000	0.1897	0.1925	1.7250	0.2331	0.2257	2.8500	0.3209	0.2868
-0.5100	0.2431	0.2282	0.6150	0.1896	0.1923	1.7400	0.2343	0.2260	2.8650	0.3220	0.2883
-0.4950	0.2398	0.2257	0.6300	0.1898	0.1923	1.7550	0.2359	0.2265	2.8800	0.3234	0.2898
-0.4800	0.2378	0.2248	0.6450	0.1901	0.1926	1.7700	0.2373	0.2275	2.8950	0.3243	0.2910
-0.4650	0.2365	0.2243	0.6600	0.1904	0.1932	1.7850	0.2383	0.2287	2.9100	0.3255	0.2920
-0.4500	0.2354	0.2235	0.6750	0.1909	0.1933	1.8000	0.2395	0.2293	2.9250	0.3268	0.2931
-0.4350	0.2337	0.2219	0.6900	0.1910	0.1934	1.8150	0.2409	0.2299	2.9400	0.3282	0.2938
-0.4200	0.2321	0.2212	0.7050	0.1909	0.1934	1.8300	0.2423	0.2307	2.9550	0.3289	0.2947
-0.4050	0.2307	0.2207	0.7200	0.1915	0.1939	1.8450	0.2437	0.2314	2.9700	0.3311	0.2955
-0.3900	0.2289	0.2205	0.7350	0.1921	0.1939	1.8600	0.2445	0.2316	2.9850	0.3319	0.2962

Tabla 5.13: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario 2.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0797	0.3572	-0.3750	0.2690	0.2619	0.7500	0.1973	0.2028	1.8750	0.2854	0.2682
-1.4850	0.0792	0.3568	-0.3600	0.2663	0.2602	0.7650	0.1979	0.2045	1.8900	0.2877	0.2690
-1.4700	0.0786	0.3565	-0.3450	0.2641	0.2585	0.7800	0.1986	0.2053	1.9050	0.2891	0.2695
-1.4550	0.0782	0.3557	-0.3300	0.2604	0.2537	0.7950	0.1993	0.2060	1.9200	0.2904	0.2703
-1.4400	0.0783	0.3553	-0.3150	0.2564	0.2492	0.8100	0.1999	0.2064	1.9350	0.2915	0.2708
-1.4250	0.0782	0.3552	-0.3000	0.2520	0.2465	0.8250	0.2006	0.2072	1.9500	0.2933	0.2717
-1.4100	0.0779	0.3548	-0.2850	0.2501	0.2441	0.8400	0.2010	0.2079	1.9650	0.2946	0.2724
-1.3950	0.0779	0.3542	-0.2700	0.2473	0.2426	0.8550	0.2019	0.2087	1.9800	0.2963	0.2735
-1.3800	0.0780	0.3541	-0.2550	0.2452	0.2411	0.8700	0.2025	0.2098	1.9950	0.2974	0.2745
-1.3650	0.0782	0.3540	-0.2400	0.2433	0.2393	0.8850	0.2032	0.2098	2.0100	0.2991	0.2754
-1.3500	0.0780	0.3534	-0.2250	0.2415	0.2376	0.9000	0.2042	0.2096	2.0250	0.3001	0.2771
-1.3350	0.0775	0.3533	-0.2100	0.2389	0.2359	0.9150	0.2045	0.2098	2.0400	0.3012	0.2786
-1.3200	0.0768	0.3532	-0.1950	0.2367	0.2343	0.9300	0.2060	0.2101	2.0550	0.3033	0.2802
-1.3050	0.0775	0.3532	-0.1800	0.2346	0.2324	0.9450	0.2069	0.2104	2.0700	0.3051	0.2813
-1.2900	0.0773	0.3531	-0.1650	0.2332	0.2308	0.9600	0.2080	0.2111	2.0850	0.3077	0.2817
-1.2750	0.0771	0.3528	-0.1500	0.2317	0.2300	0.9750	0.2086	0.2116	2.1000	0.3091	0.2826
-1.2600	0.0777	0.3524	-0.1350	0.2306	0.2284	0.9900	0.2095	0.2121	2.1150	0.3103	0.2835
-1.2450	0.0780	0.3519	-0.1200	0.2296	0.2279	1.0050	0.2104	0.2127	2.1300	0.3119	0.2844
-1.2300	0.0799	0.3516	-0.1050	0.2285	0.2270	1.0200	0.2109	0.2129	2.1450	0.3131	0.2852
-1.2150	0.0813	0.3514	-0.0900	0.2261	0.2260	1.0350	0.2118	0.2137	2.1600	0.3149	0.2862
-1.2000	0.0832	0.3512	-0.0750	0.2241	0.2241	1.0500	0.2131	0.2149	2.1750	0.3160	0.2865
-1.1850	0.0844	0.3506	-0.0600	0.2232	0.2220	1.0650	0.2143	0.2154	2.1900	0.3171	0.2873
-1.1700	0.0863	0.3501	-0.0450	0.2213	0.2200	1.0800	0.2156	0.2164	2.2050	0.3179	0.2880
-1.1550	0.0890	0.3499	-0.0300	0.2185	0.2177	1.0950	0.2175	0.2170	2.2200	0.3190	0.2890
-1.1400	0.0912	0.3492	-0.0150	0.2157	0.2152	1.1100	0.2185	0.2174	2.2350	0.3195	0.2897
-1.1250	0.0944	0.3488	0.0000	0.2135	0.2135	1.1250	0.2202	0.2189	2.2500	0.3210	0.2908
-1.1100	0.0989	0.3486	0.0150	0.2118	0.2122	1.1400	0.2218	0.2208	2.2650	0.3225	0.2913
-1.0950	0.1045	0.3482	0.0300	0.2104	0.2113	1.1550	0.2241	0.2209	2.2800	0.3235	0.2923
-1.0800	0.1147	0.3477	0.0450	0.2091	0.2106	1.1700	0.2259	0.2222	2.2950	0.3260	0.2935
-1.0650	0.1292	0.3475	0.0600	0.2072	0.2090	1.1850	0.2268	0.2226	2.3100	0.3278	0.2948
-1.0500	0.1392	0.3472	0.0750	0.2057	0.2077	1.2000	0.2274	0.2228	2.3250	0.3293	0.2965
-1.0350	0.1503	0.3470	0.0900	0.2045	0.2065	1.2150	0.2285	0.2235	2.3400	0.3308	0.2976
-1.0200	0.1721	0.3468	0.1050	0.2036	0.2058	1.2300	0.2292	0.2242	2.3550	0.3325	0.2988
-1.0050	0.1938	0.3465	0.1200	0.2028	0.2049	1.2450	0.2301	0.2248	2.3700	0.3337	0.2993
-0.9900	0.5328	0.3440	0.1350	0.2019	0.2039	1.2600	0.2308	0.2252	2.3850	0.3354	0.2996
-0.9750	0.5178	0.3436	0.1500	0.2011	0.2032	1.2750	0.2317	0.2253	2.4000	0.3365	0.3004
-0.9600	0.5060	0.3430	0.1650	0.2003	0.2027	1.2900	0.2321	0.2263	2.4150	0.3380	0.3015
-0.9450	0.4935	0.3422	0.1800	0.1999	0.2024	1.3050	0.2327	0.2271	2.4300	0.3399	0.3026
-0.9300	0.4873	0.3412	0.1950	0.1992	0.2008	1.3200	0.2338	0.2277	2.4450	0.3426	0.3042
-0.9150	0.4772	0.3408	0.2100	0.1988	0.2004	1.3350	0.2351	0.2282	2.4600	0.3449	0.3056
-0.9000	0.4672	0.3407	0.2250	0.1977	0.1996	1.3500	0.2363	0.2292	2.4750	0.3462	0.3076
-0.8850	0.4564	0.3406	0.2400	0.1968	0.1986	1.3650	0.2373	0.2297	2.4900	0.3494	0.3091
-0.8700	0.4478	0.3405	0.2550	0.1966	0.1982	1.3800	0.2384	0.2303	2.5050	0.3508	0.3101
-0.8550	0.4341	0.3403	0.2700	0.1961	0.1975	1.3950	0.2394	0.2311	2.5200	0.3525	0.3121
-0.8400	0.4251	0.3401	0.2850	0.1958	0.1972	1.4100	0.2415	0.2328	2.5350	0.3541	0.3125
-0.8250	0.4180	0.3380	0.3000	0.1954	0.1974	1.4250	0.2422	0.2336	2.5500	0.3551	0.3138
-0.8100	0.4093	0.3377	0.3150	0.1955	0.1975	1.4400	0.2432	0.2345	2.5650	0.3561	0.3154
-0.7950	0.4041	0.3328	0.3300	0.1952	0.1973	1.4550	0.2439	0.2353	2.5800	0.3581	0.3174
-0.7800	0.3997	0.3303	0.3450	0.1952	0.1971	1.4700	0.2456	0.2362	2.5950	0.3596	0.3182
-0.7650	0.3945	0.3272	0.3600	0.1952	0.1968	1.4850	0.2478	0.2373	2.6100	0.3602	0.3190
-0.7500	0.3900	0.3258	0.3750	0.1953	0.1965	1.5000	0.2493	0.2387	2.6250	0.3612	0.3204
-0.7350	0.3830	0.3249	0.3900	0.1954	0.1962	1.5150	0.2507	0.2400	2.6400	0.3626	0.3214
-0.7200	0.3764	0.3241	0.4050	0.1949	0.1952	1.5300	0.2516	0.2412	2.6550	0.3640	0.3231
-0.7050	0.3704	0.3225	0.4200	0.1947	0.1945	1.5450	0.2530	0.2424	2.6700	0.3653	0.3243
-0.6900	0.3624	0.3201	0.4350	0.1945	0.1948	1.5600	0.2548	0.2431	2.6850	0.3664	0.3257
-0.6750	0.3539	0.3182	0.4500	0.1941	0.1945	1.5750	0.2560	0.2444	2.7000	0.3678	0.3278
-0.6600	0.3474	0.3170	0.4650	0.1937	0.1943	1.5900	0.2578	0.2462	2.7150	0.3693	0.3297
-0.6450	0.3422	0.3108	0.4800	0.1936	0.1946	1.6050	0.2595	0.2477	2.7300	0.3706	0.3315
-0.6300	0.3367	0.3036	0.4950	0.1931	0.1947	1.6200	0.2614	0.2483	2.7450	0.3720	0.3321
-0.6150	0.3321	0.3009	0.5100	0.1931	0.1947	1.6350	0.2629	0.2497	2.7600	0.3734	0.3332
-0.6000	0.3276	0.2984	0.5250	0.1932	0.1951	1.6500	0.2636	0.2506	2.7750	0.3758	0.3340
-0.5850	0.3223	0.2970	0.5400	0.1932	0.1952	1.6650	0.2646	0.2516	2.7900	0.3783	0.3361
-0.5700	0.3163	0.2947	0.5550	0.1931	0.1954	1.6800	0.2664	0.2526	2.8050	0.3807	0.3379
-0.5550	0.3124	0.2935	0.5700	0.1930	0.1956	1.6950	0.2679	0.2545	2.8200	0.3826	0.3402
-0.5400	0.3092	0.2926	0.5850	0.1932	0.1960	1.7100	0.2684	0.2561	2.8350	0.3844	0.3428
-0.5250	0.3063	0.2914	0.6000	0.1933	0.1958	1.7250	0.2703	0.2570	2.8500	0.3867	0.3461
-0.5100	0.3028	0.2888	0.6150	0.1932	0.1961	1.7400	0.2718	0.2579	2.8650	0.3883	0.3502
-0.4950	0.2970	0.2825	0.6300	0.1930	0.1964	1.7550	0.2734	0.2593	2.8800	0.3899	0.3548
-0.4800	0.2910	0.2777	0.6450	0.1931	0.1963	1.7700	0.2748	0.2610	2.8950	0.3921	0.3564
-0.4650	0.2864	0.2765	0.6600	0.1937	0.1968	1.7850	0.2760	0.2622	2.9100	0.3934	0.3586
-0.4500	0.2833	0.2740	0.6750	0.1945	0.1974	1.8000	0.2777	0.2640	2.9250	0.3946	0.3611
-0.4350	0.2794	0.2697	0.6900	0.1950	0.1981	1.8150	0.2793	0.2651	2.9400	0.3965	0.3621
-0.4200	0.2756	0.2671	0.7050	0.1954	0.1991	1.8300	0.2805	0.2663	2.9550	0.3984	0.3643
-0.4050	0.2733	0.2658	0.7200	0.1958	0.2001	1.8450	0.2820	0.2674	2.9700	0.4004	0.3651
-0.3900	0.2713	0.2637	0.7350	0.1966	0.2011	1.8600	0.2837	0.2678	2.9850	0.4015	0.3653

Tabla 5.14: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario 2.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0486	0.4314	-0.3750	0.2577	0.2526	0.7500	0.1893	0.1924	1.8750	0.2958	0.2732
-1.4850	0.0486	0.4309	-0.3600	0.2548	0.2501	0.7650	0.1900	0.1938	1.8900	0.2979	0.2738
-1.4700	0.0484	0.4307	-0.3450	0.2523	0.2483	0.7800	0.1906	0.1944	1.9050	0.2989	0.2739
-1.4550	0.0477	0.4307	-0.3300	0.2480	0.2441	0.7950	0.1914	0.1951	1.9200	0.3005	0.2744
-1.4400	0.0471	0.4305	-0.3150	0.2442	0.2380	0.8100	0.1927	0.1952	1.9350	0.3019	0.2751
-1.4250	0.0469	0.4304	-0.3000	0.2387	0.2344	0.8250	0.1934	0.1959	1.9500	0.3039	0.2764
-1.4100	0.0466	0.4303	-0.2850	0.2357	0.2309	0.8400	0.1941	0.1965	1.9650	0.3057	0.2775
-1.3950	0.0465	0.4303	-0.2700	0.2317	0.2290	0.8550	0.1950	0.1985	1.9800	0.3075	0.2784
-1.3800	0.0462	0.4302	-0.2550	0.2297	0.2276	0.8700	0.1956	0.2004	1.9950	0.3094	0.2790
-1.3650	0.0456	0.4300	-0.2400	0.2257	0.2250	0.8850	0.1958	0.2005	2.0100	0.3115	0.2793
-1.3500	0.0454	0.4299	-0.2250	0.2245	0.2233	0.9000	0.1967	0.2007	2.0250	0.3133	0.2799
-1.3350	0.0451	0.4299	-0.2100	0.2217	0.2211	0.9150	0.1979	0.2008	2.0400	0.3157	0.2809
-1.3200	0.0443	0.4297	-0.1950	0.2195	0.2188	0.9300	0.1981	0.2010	2.0550	0.3180	0.2813
-1.3050	0.0446	0.4295	-0.1800	0.2172	0.2163	0.9450	0.1994	0.2014	2.0700	0.3212	0.2828
-1.2900	0.0448	0.4294	-0.1650	0.2157	0.2156	0.9600	0.2006	0.2021	2.0850	0.3253	0.2835
-1.2750	0.0453	0.4286	-0.1500	0.2137	0.2140	0.9750	0.2012	0.2025	2.1000	0.3272	0.2845
-1.2600	0.0462	0.4285	-0.1350	0.2118	0.2118	0.9900	0.2021	0.2029	2.1150	0.3285	0.2855
-1.2450	0.0467	0.4284	-0.1200	0.2105	0.2105	1.0050	0.2038	0.2036	2.1300	0.3299	0.2877
-1.2300	0.0482	0.4282	-0.1050	0.2090	0.2094	1.0200	0.2050	0.2040	2.1450	0.3313	0.2886
-1.2150	0.0493	0.4279	-0.0900	0.2079	0.2085	1.0350	0.2061	0.2047	2.1600	0.3329	0.2891
-1.2000	0.0504	0.4277	-0.0750	0.2054	0.2067	1.0500	0.2073	0.2050	2.1750	0.3339	0.2898
-1.1850	0.0516	0.4274	-0.0600	0.2039	0.2045	1.0650	0.2095	0.2066	2.1900	0.3351	0.2910
-1.1700	0.0539	0.4270	-0.0450	0.2017	0.2021	1.0800	0.2108	0.2076	2.2050	0.3365	0.2917
-1.1550	0.0564	0.4271	-0.0300	0.1996	0.1993	1.0950	0.2136	0.2085	2.2200	0.3376	0.2930
-1.1400	0.0597	0.4269	-0.0150	0.1973	0.1973	1.1100	0.2159	0.2104	2.2350	0.3389	0.2932
-1.1250	0.0636	0.4267	0.0000	0.1953	0.1953	1.1250	0.2186	0.2126	2.2500	0.3401	0.2947
-1.1100	0.0656	0.4266	0.0150	0.1936	0.1936	1.1400	0.2219	0.2171	2.2650	0.3411	0.2953
-1.0950	0.0705	0.4263	0.0300	0.1923	0.1927	1.1550	0.2245	0.2176	2.2800	0.3421	0.2963
-1.0800	0.0787	0.4263	0.0450	0.1919	0.1922	1.1700	0.2261	0.2179	2.2950	0.3431	0.2966
-1.0650	0.0919	0.4261	0.0600	0.1908	0.1913	1.1850	0.2278	0.2185	2.3100	0.3444	0.2972
-1.0500	0.1012	0.4260	0.0750	0.1894	0.1900	1.2000	0.2294	0.2194	2.3250	0.3464	0.2982
-1.0350	0.1183	0.4261	0.0900	0.1882	0.1890	1.2150	0.2302	0.2196	2.3400	0.3486	0.2990
-1.0200	0.1438	0.4261	0.1050	0.1876	0.1883	1.2300	0.2306	0.2200	2.3550	0.3502	0.2998
-1.0050	0.1730	0.4261	0.1200	0.1869	0.1879	1.2450	0.2315	0.2205	2.3700	0.3516	0.3010
-0.9900	0.6260	0.4197	0.1350	0.1859	0.1866	1.2600	0.2325	0.2209	2.3850	0.3539	0.3016
-0.9750	0.6087	0.4177	0.1500	0.1856	0.1863	1.2750	0.2333	0.2213	2.4000	0.3560	0.3035
-0.9600	0.5908	0.4161	0.1650	0.1853	0.1853	1.2900	0.2348	0.2218	2.4150	0.3586	0.3048
-0.9450	0.5696	0.4155	0.1800	0.1850	0.1843	1.3050	0.2355	0.2226	2.4300	0.3623	0.3060
-0.9300	0.5635	0.4145	0.1950	0.1842	0.1839	1.3200	0.2361	0.2237	2.4450	0.3661	0.3095
-0.9150	0.5551	0.4135	0.2100	0.1837	0.1837	1.3350	0.2368	0.2244	2.4600	0.3687	0.3126
-0.9000	0.5442	0.4131	0.2250	0.1834	0.1835	1.3500	0.2381	0.2255	2.4750	0.3710	0.3145
-0.8850	0.5309	0.4128	0.2400	0.1831	0.1826	1.3650	0.2392	0.2265	2.4900	0.3740	0.3156
-0.8700	0.5180	0.4122	0.2550	0.1829	0.1822	1.3800	0.2408	0.2274	2.5050	0.3759	0.3170
-0.8550	0.4886	0.4117	0.2700	0.1826	0.1820	1.3950	0.2418	0.2279	2.5200	0.3780	0.3183
-0.8400	0.4748	0.4115	0.2850	0.1826	0.1817	1.4100	0.2434	0.2293	2.5350	0.3798	0.3192
-0.8250	0.4655	0.4038	0.3000	0.1826	0.1818	1.4250	0.2444	0.2306	2.5500	0.3817	0.3200
-0.8100	0.4504	0.4010	0.3150	0.1833	0.1813	1.4400	0.2452	0.2309	2.5650	0.3831	0.3210
-0.7950	0.4417	0.3876	0.3300	0.1829	0.1815	1.4550	0.2467	0.2317	2.5800	0.3853	0.3224
-0.7800	0.4376	0.3807	0.3450	0.1828	0.1815	1.4700	0.2483	0.2325	2.5950	0.3867	0.3235
-0.7650	0.4350	0.3741	0.3600	0.1827	0.1820	1.4850	0.2496	0.2338	2.6100	0.3875	0.3254
-0.7500	0.4288	0.3694	0.3750	0.1826	0.1813	1.5000	0.2515	0.2346	2.6250	0.3886	0.3266
-0.7350	0.4175	0.3666	0.3900	0.1824	0.1811	1.5150	0.2528	0.2369	2.6400	0.3901	0.3286
-0.7200	0.4094	0.3647	0.4050	0.1823	0.1805	1.5300	0.2550	0.2383	2.6550	0.3917	0.3303
-0.7050	0.4004	0.3627	0.4200	0.1818	0.1799	1.5450	0.2566	0.2393	2.6700	0.3929	0.3315
-0.6900	0.3883	0.3558	0.4350	0.1819	0.1798	1.5600	0.2585	0.2406	2.6850	0.3944	0.3329
-0.6750	0.3750	0.3521	0.4500	0.1822	0.1802	1.5750	0.2602	0.2425	2.7000	0.3967	0.3339
-0.6600	0.3620	0.3490	0.4650	0.1821	0.1804	1.5900	0.2618	0.2453	2.7150	0.3981	0.3355
-0.6450	0.3554	0.3391	0.4800	0.1822	0.1808	1.6050	0.2636	0.2468	2.7300	0.4000	0.3372
-0.6300	0.3466	0.3251	0.4950	0.1821	0.1804	1.6200	0.2652	0.2472	2.7450	0.4019	0.3386
-0.6150	0.3393	0.3206	0.5100	0.1823	0.1803	1.6350	0.2670	0.2484	2.7600	0.4039	0.3401
-0.6000	0.3347	0.3148	0.5250	0.1823	0.1803	1.6500	0.2682	0.2496	2.7750	0.4066	0.3418
-0.5850	0.3270	0.3121	0.5400	0.1822	0.1805	1.6650	0.2692	0.2512	2.7900	0.4087	0.3435
-0.5700	0.3194	0.3083	0.5550	0.1826	0.1806	1.6800	0.2707	0.2531	2.8050	0.4109	0.3464
-0.5550	0.3142	0.3051	0.5700	0.1831	0.1814	1.6950	0.2725	0.2554	2.8200	0.4129	0.3480
-0.5400	0.3090	0.3034	0.5850	0.1834	0.1823	1.7100	0.2744	0.2575	2.8350	0.4153	0.3516
-0.5250	0.3057	0.3013	0.6000	0.1839	0.1828	1.7250	0.2755	0.2599	2.8500	0.4174	0.3570
-0.5100	0.3008	0.2970	0.6150	0.1840	0.1833	1.7400	0.2776	0.2607	2.8650	0.4194	0.3609
-0.4950	0.2936	0.2848	0.6300	0.1844	0.1844	1.7550	0.2793	0.2635	2.8800	0.4215	0.3654
-0.4800	0.2858	0.2782	0.6450	0.1847	0.1852	1.7700	0.2808	0.2665	2.8950	0.4241	0.3677
-0.4650	0.2807	0.2745	0.6600	0.1850	0.1854	1.7850	0.2817	0.2687	2.9100	0.4257	0.3711
-0.4500	0.2773	0.2711	0.6750	0.1855	0.1860	1.8000	0.2830	0.2705	2.9250	0.4279	0.3756
-0.4350	0.2729	0.2661	0.6900	0.1864	0.1866	1.8150	0.2855	0.2715	2.9400	0.4296	0.3783
-0.4200	0.2674	0.2612	0.7050	0.1873	0.1878	1.8300	0.2881	0.2720	2.9550	0.4317	0.3814
-0.4050	0.2636	0.2587	0.7200	0.1881	0.1891	1.8450	0.2906	0.2725	2.9700	0.4336	0.3827
-0.3900	0.2606	0.2557	0.7350	0.1884	0.1912	1.8600	0.2938	0.2727	2.9850	0.4355	0.3830

Tabla 5.15: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario 2.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0911	0.0835	-0.3750	0.0616	0.0583	0.7500	0.0477	0.0484	1.8750	0.0516	0.0507
-1.4850	0.0905	0.0832	-0.3600	0.0617	0.0580	0.7650	0.0477	0.0484	1.8900	0.0520	0.0508
-1.4700	0.0897	0.0828	-0.3450	0.0610	0.0578	0.7800	0.0476	0.0485	1.9050	0.0520	0.0511
-1.4550	0.0895	0.0827	-0.3300	0.0606	0.0576	0.7950	0.0474	0.0485	1.9200	0.0521	0.0511
-1.4400	0.0891	0.0826	-0.3150	0.0603	0.0574	0.8100	0.0474	0.0486	1.9350	0.0522	0.0512
-1.4250	0.0885	0.0819	-0.3000	0.0601	0.0572	0.8250	0.0473	0.0486	1.9500	0.0522	0.0514
-1.4100	0.0884	0.0811	-0.2850	0.0597	0.0569	0.8400	0.0472	0.0486	1.9650	0.0523	0.0515
-1.3950	0.0875	0.0811	-0.2700	0.0597	0.0565	0.8550	0.0472	0.0484	1.9800	0.0525	0.0516
-1.3800	0.0869	0.0805	-0.2550	0.0596	0.0564	0.8700	0.0472	0.0482	1.9950	0.0530	0.0516
-1.3650	0.0863	0.0800	-0.2400	0.0591	0.0564	0.8850	0.0471	0.0481	2.0100	0.0532	0.0518
-1.3500	0.0852	0.0792	-0.2250	0.0580	0.0562	0.9000	0.0474	0.0481	2.0250	0.0532	0.0519
-1.3350	0.0845	0.0785	-0.2100	0.0576	0.0558	0.9150	0.0473	0.0480	2.0400	0.0533	0.0519
-1.3200	0.0839	0.0782	-0.1950	0.0569	0.0555	0.9300	0.0473	0.0480	2.0550	0.0533	0.0520
-1.3050	0.0833	0.0777	-0.1800	0.0562	0.0552	0.9450	0.0472	0.0480	2.0700	0.0535	0.0521
-1.2900	0.0827	0.0774	-0.1650	0.0559	0.0550	0.9600	0.0473	0.0478	2.0850	0.0536	0.0522
-1.2750	0.0823	0.0771	-0.1500	0.0557	0.0549	0.9750	0.0474	0.0477	2.1000	0.0541	0.0523
-1.2600	0.0819	0.0768	-0.1350	0.0554	0.0547	0.9900	0.0474	0.0478	2.1150	0.0543	0.0524
-1.2450	0.0809	0.0768	-0.1200	0.0551	0.0540	1.0050	0.0474	0.0479	2.1300	0.0547	0.0524
-1.2300	0.0802	0.0764	-0.1050	0.0548	0.0540	1.0200	0.0474	0.0480	2.1450	0.0550	0.0525
-1.2150	0.0794	0.0762	-0.0900	0.0545	0.0537	1.0350	0.0474	0.0480	2.1600	0.0552	0.0525
-1.2000	0.0787	0.0760	-0.0750	0.0541	0.0536	1.0500	0.0474	0.0481	2.1750	0.0553	0.0526
-1.1850	0.0784	0.0757	-0.0600	0.0538	0.0536	1.0650	0.0474	0.0480	2.1900	0.0555	0.0526
-1.1700	0.0774	0.0754	-0.0450	0.0537	0.0534	1.0800	0.0474	0.0480	2.2050	0.0555	0.0528
-1.1550	0.0766	0.0750	-0.0300	0.0533	0.0532	1.0950	0.0472	0.0479	2.2200	0.0558	0.0529
-1.1400	0.0764	0.0747	-0.0150	0.0530	0.0530	1.1100	0.0474	0.0479	2.2350	0.0560	0.0530
-1.1250	0.0761	0.0742	0.0000	0.0529	0.0529	1.1250	0.0478	0.0480	2.2500	0.0562	0.0530
-1.1100	0.0756	0.0739	0.0150	0.0528	0.0528	1.1400	0.0477	0.0480	2.2650	0.0562	0.0530
-1.0950	0.0748	0.0730	0.0300	0.0527	0.0528	1.1550	0.0477	0.0480	2.2800	0.0566	0.0531
-1.0800	0.0742	0.0725	0.0450	0.0525	0.0528	1.1700	0.0479	0.0480	2.2950	0.0570	0.0533
-1.0650	0.0744	0.0720	0.0600	0.0523	0.0528	1.1850	0.0481	0.0477	2.3100	0.0573	0.0533
-1.0500	0.0742	0.0716	0.0750	0.0518	0.0526	1.2000	0.0483	0.0479	2.3250	0.0573	0.0535
-1.0350	0.0742	0.0711	0.0900	0.0519	0.0524	1.2150	0.0483	0.0480	2.3400	0.0573	0.0535
-1.0200	0.0739	0.0706	0.1050	0.0518	0.0525	1.2300	0.0482	0.0480	2.3550	0.0573	0.0537
-1.0050	0.0740	0.0698	0.1200	0.0518	0.0524	1.2450	0.0482	0.0480	2.3700	0.0576	0.0538
-0.9900	0.0831	0.0691	0.1350	0.0517	0.0521	1.2600	0.0481	0.0481	2.3850	0.0577	0.0538
-0.9750	0.0823	0.0689	0.1500	0.0515	0.0522	1.2750	0.0479	0.0482	2.4000	0.0579	0.0538
-0.9600	0.0813	0.0689	0.1650	0.0513	0.0521	1.2900	0.0481	0.0483	2.4150	0.0579	0.0538
-0.9450	0.0806	0.0687	0.1800	0.0511	0.0518	1.3050	0.0480	0.0483	2.4300	0.0582	0.0538
-0.9300	0.0798	0.0686	0.1950	0.0509	0.0517	1.3200	0.0481	0.0484	2.4450	0.0584	0.0539
-0.9150	0.0795	0.0686	0.2100	0.0508	0.0514	1.3350	0.0480	0.0486	2.4600	0.0588	0.0542
-0.9000	0.0786	0.0681	0.2250	0.0508	0.0513	1.3500	0.0480	0.0488	2.4750	0.0591	0.0543
-0.8850	0.0778	0.0674	0.2400	0.0503	0.0513	1.3650	0.0480	0.0488	2.4900	0.0592	0.0545
-0.8700	0.0771	0.0668	0.2550	0.0501	0.0510	1.3800	0.0480	0.0488	2.5050	0.0593	0.0545
-0.8550	0.0762	0.0665	0.2700	0.0499	0.0509	1.3950	0.0479	0.0488	2.5200	0.0594	0.0548
-0.8400	0.0759	0.0663	0.2850	0.0497	0.0508	1.4100	0.0478	0.0490	2.5350	0.0596	0.0549
-0.8250	0.0755	0.0660	0.3000	0.0496	0.0509	1.4250	0.0479	0.0490	2.5500	0.0596	0.0549
-0.8100	0.0748	0.0658	0.3150	0.0494	0.0509	1.4400	0.0479	0.0490	2.5650	0.0598	0.0551
-0.7950	0.0742	0.0655	0.3300	0.0493	0.0509	1.4550	0.0477	0.0491	2.5800	0.0604	0.0553
-0.7800	0.0739	0.0653	0.3450	0.0494	0.0508	1.4700	0.0480	0.0491	2.5950	0.0606	0.0554
-0.7650	0.0735	0.0649	0.3600	0.0493	0.0508	1.4850	0.0483	0.0491	2.6100	0.0608	0.0556
-0.7500	0.0728	0.0648	0.3750	0.0490	0.0505	1.5000	0.0485	0.0490	2.6250	0.0614	0.0559
-0.7350	0.0724	0.0646	0.3900	0.0490	0.0505	1.5150	0.0486	0.0491	2.6400	0.0618	0.0561
-0.7200	0.0720	0.0643	0.4050	0.0488	0.0503	1.5300	0.0486	0.0491	2.6550	0.0619	0.0561
-0.7050	0.0716	0.0643	0.4200	0.0489	0.0503	1.5450	0.0486	0.0492	2.6700	0.0620	0.0563
-0.6900	0.0715	0.0639	0.4350	0.0489	0.0503	1.5600	0.0486	0.0492	2.6850	0.0622	0.0566
-0.6750	0.0708	0.0636	0.4500	0.0487	0.0503	1.5750	0.0487	0.0494	2.7000	0.0624	0.0567
-0.6600	0.0700	0.0632	0.4650	0.0487	0.0500	1.5900	0.0488	0.0495	2.7150	0.0627	0.0569
-0.6450	0.0696	0.0627	0.4800	0.0485	0.0499	1.6050	0.0488	0.0496	2.7300	0.0629	0.0570
-0.6300	0.0694	0.0624	0.4950	0.0484	0.0499	1.6200	0.0488	0.0496	2.7450	0.0632	0.0572
-0.6150	0.0691	0.0624	0.5100	0.0483	0.0496	1.6350	0.0494	0.0497	2.7600	0.0632	0.0574
-0.6000	0.0691	0.0621	0.5250	0.0481	0.0497	1.6500	0.0494	0.0497	2.7750	0.0639	0.0575
-0.5850	0.0684	0.0620	0.5400	0.0479	0.0497	1.6650	0.0495	0.0497	2.7900	0.0645	0.0578
-0.5700	0.0678	0.0618	0.5550	0.0478	0.0498	1.6800	0.0497	0.0498	2.8050	0.0648	0.0579
-0.5550	0.0669	0.0614	0.5700	0.0478	0.0495	1.6950	0.0499	0.0499	2.8200	0.0650	0.0580
-0.5400	0.0662	0.0613	0.5850	0.0477	0.0494	1.7100	0.0500	0.0500	2.8350	0.0653	0.0581
-0.5250	0.0655	0.0607	0.6000	0.0478	0.0493	1.7250	0.0502	0.0500	2.8500	0.0654	0.0582
-0.5100	0.0651	0.0603	0.6150	0.0477	0.0490	1.7400	0.0503	0.0500	2.8650	0.0656	0.0583
-0.4950	0.0646	0.0595	0.6300	0.0476	0.0490	1.7550	0.0505	0.0502	2.8800	0.0661	0.0584
-0.4800	0.0641	0.0594	0.6450	0.0476	0.0487	1.7700	0.0507	0.0502	2.8950	0.0663	0.0583
-0.4650	0.0633	0.0592	0.6600	0.0478	0.0485	1.7850	0.0507	0.0503	2.9100	0.0665	0.0584
-0.4500	0.0632	0.0590	0.6750	0.0477	0.0486	1.8000	0.0507	0.0503	2.9250	0.0671	0.0587
-0.4350	0.0628	0.0589	0.6900	0.0478	0.0486	1.8150	0.0509	0.0504	2.9400	0.0674	0.0588
-0.4200	0.0627	0.0585	0.7050	0.0476	0.0486	1.8300	0.0512	0.0505	2.9550	0.0676	0.0588
-0.4050	0.0626	0.0584	0.7200	0.0475	0.0486	1.8450	0.0513	0.0505	2.9700	0.0679	0.0588
-0.3900	0.0620	0.0584	0.7350	0.0477	0.0486	1.8600	0.0515	0.0506	2.9850	0.0680	0.0592

Tabla 5.16: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Escenario 3.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1665	0.1538	-0.3750	0.1339	0.1299	0.7500	0.1201	0.1211	1.8750	0.1316	0.1276
-1.4850	0.1660	0.1537	-0.3600	0.1334	0.1299	0.7650	0.1200	0.1212	1.8900	0.1317	0.1279
-1.4700	0.1648	0.1529	-0.3450	0.1326	0.1297	0.7800	0.1203	0.1214	1.9050	0.1317	0.1282
-1.4550	0.1643	0.1525	-0.3300	0.1323	0.1297	0.7950	0.1205	0.1213	1.9200	0.1319	0.1286
-1.4400	0.1639	0.1520	-0.3150	0.1319	0.1293	0.8100	0.1202	0.1215	1.9350	0.1319	0.1287
-1.4250	0.1633	0.1514	-0.3000	0.1320	0.1292	0.8250	0.1200	0.1214	1.9500	0.1326	0.1292
-1.4100	0.1627	0.1510	-0.2850	0.1312	0.1287	0.8400	0.1199	0.1215	1.9650	0.1329	0.1291
-1.3950	0.1621	0.1507	-0.2700	0.1310	0.1290	0.8550	0.1198	0.1215	1.9800	0.1332	0.1294
-1.3800	0.1615	0.1505	-0.2550	0.1307	0.1291	0.8700	0.1198	0.1214	1.9950	0.1335	0.1294
-1.3650	0.1610	0.1502	-0.2400	0.1303	0.1290	0.8850	0.1195	0.1215	2.0100	0.1339	0.1296
-1.3500	0.1601	0.1498	-0.2250	0.1302	0.1288	0.9000	0.1196	0.1213	2.0250	0.1343	0.1299
-1.3350	0.1599	0.1492	-0.2100	0.1300	0.1287	0.9150	0.1196	0.1213	2.0400	0.1346	0.1300
-1.3200	0.1593	0.1490	-0.1950	0.1297	0.1287	0.9300	0.1197	0.1213	2.0550	0.1350	0.1300
-1.3050	0.1593	0.1486	-0.1800	0.1291	0.1286	0.9450	0.1196	0.1214	2.0700	0.1350	0.1304
-1.2900	0.1590	0.1484	-0.1650	0.1287	0.1286	0.9600	0.1196	0.1214	2.0850	0.1354	0.1304
-1.2750	0.1583	0.1484	-0.1500	0.1283	0.1285	0.9750	0.1195	0.1214	2.1000	0.1356	0.1305
-1.2600	0.1581	0.1481	-0.1350	0.1280	0.1284	0.9900	0.1195	0.1212	2.1150	0.1357	0.1306
-1.2450	0.1581	0.1478	-0.1200	0.1280	0.1282	1.0050	0.1195	0.1215	2.1300	0.1360	0.1307
-1.2300	0.1572	0.1476	-0.1050	0.1279	0.1280	1.0200	0.1197	0.1216	2.1450	0.1363	0.1308
-1.2150	0.1565	0.1472	-0.0900	0.1276	0.1277	1.0350	0.1197	0.1218	2.1600	0.1370	0.1315
-1.2000	0.1565	0.1469	-0.0750	0.1273	0.1275	1.0500	0.1197	0.1219	2.1750	0.1371	0.1315
-1.1850	0.1561	0.1468	-0.0600	0.1271	0.1276	1.0650	0.1196	0.1218	2.1900	0.1378	0.1317
-1.1700	0.1558	0.1466	-0.0450	0.1267	0.1267	1.0800	0.1200	0.1219	2.2050	0.1383	0.1320
-1.1550	0.1552	0.1467	-0.0300	0.1262	0.1264	1.0950	0.1202	0.1219	2.2200	0.1385	0.1320
-1.1400	0.1550	0.1464	-0.0150	0.1260	0.1262	1.1100	0.1206	0.1221	2.2350	0.1390	0.1325
-1.1250	0.1548	0.1458	0.0000	0.1260	0.1260	1.1250	0.1205	0.1221	2.2500	0.1395	0.1327
-1.1100	0.1547	0.1455	0.0150	0.1260	0.1260	1.1400	0.1207	0.1223	2.2650	0.1396	0.1332
-1.0950	0.1547	0.1454	0.0300	0.1257	0.1257	1.1550	0.1207	0.1223	2.2800	0.1403	0.1334
-1.0800	0.1545	0.1448	0.0450	0.1255	0.1254	1.1700	0.1209	0.1224	2.2950	0.1407	0.1337
-1.0650	0.1550	0.1444	0.0600	0.1253	0.1252	1.1850	0.1210	0.1223	2.3100	0.1412	0.1339
-1.0500	0.1552	0.1439	0.0750	0.1251	0.1250	1.2000	0.1211	0.1226	2.3250	0.1418	0.1343
-1.0350	0.1556	0.1438	0.0900	0.1251	0.1250	1.2150	0.1213	0.1226	2.3400	0.1427	0.1350
-1.0200	0.1558	0.1436	0.1050	0.1250	0.1250	1.2300	0.1214	0.1225	2.3550	0.1432	0.1351
-1.0050	0.1554	0.1433	0.1200	0.1246	0.1250	1.2450	0.1217	0.1225	2.3700	0.1436	0.1355
-0.9900	0.1576	0.1432	0.1350	0.1246	0.1248	1.2600	0.1217	0.1227	2.3850	0.1439	0.1356
-0.9750	0.1567	0.1429	0.1500	0.1245	0.1248	1.2750	0.1218	0.1228	2.4000	0.1444	0.1356
-0.9600	0.1558	0.1424	0.1650	0.1245	0.1248	1.2900	0.1220	0.1227	2.4150	0.1447	0.1359
-0.9450	0.1554	0.1422	0.1800	0.1244	0.1249	1.3050	0.1220	0.1226	2.4300	0.1449	0.1359
-0.9300	0.1547	0.1421	0.1950	0.1242	0.1251	1.3200	0.1222	0.1227	2.4450	0.1451	0.1360
-0.9150	0.1536	0.1415	0.2100	0.1239	0.1250	1.3350	0.1224	0.1226	2.4600	0.1453	0.1362
-0.9000	0.1527	0.1411	0.2250	0.1239	0.1249	1.3500	0.1226	0.1228	2.4750	0.1457	0.1363
-0.8850	0.1523	0.1407	0.2400	0.1240	0.1248	1.3650	0.1228	0.1227	2.4900	0.1462	0.1365
-0.8700	0.1515	0.1403	0.2550	0.1240	0.1248	1.3800	0.1231	0.1226	2.5050	0.1465	0.1366
-0.8550	0.1510	0.1401	0.2700	0.1241	0.1244	1.3950	0.1235	0.1227	2.5200	0.1473	0.1368
-0.8400	0.1500	0.1401	0.2850	0.1241	0.1242	1.4100	0.1234	0.1231	2.5350	0.1476	0.1371
-0.8250	0.1488	0.1398	0.3000	0.1240	0.1242	1.4250	0.1235	0.1232	2.5500	0.1477	0.1375
-0.8100	0.1485	0.1392	0.3150	0.1240	0.1241	1.4400	0.1238	0.1231	2.5650	0.1482	0.1380
-0.7950	0.1475	0.1391	0.3300	0.1238	0.1240	1.4550	0.1239	0.1231	2.5800	0.1490	0.1383
-0.7800	0.1473	0.1387	0.3450	0.1236	0.1238	1.4700	0.1242	0.1231	2.5950	0.1497	0.1387
-0.7650	0.1468	0.1384	0.3600	0.1233	0.1237	1.4850	0.1245	0.1232	2.6100	0.1507	0.1390
-0.7500	0.1465	0.1381	0.3750	0.1233	0.1235	1.5000	0.1249	0.1233	2.6250	0.1513	0.1393
-0.7350	0.1453	0.1379	0.3900	0.1232	0.1235	1.5150	0.1252	0.1234	2.6400	0.1515	0.1397
-0.7200	0.1446	0.1373	0.4050	0.1232	0.1234	1.5300	0.1253	0.1237	2.6550	0.1522	0.1402
-0.7050	0.1439	0.1371	0.4200	0.1229	0.1233	1.5450	0.1254	0.1239	2.6700	0.1528	0.1403
-0.6900	0.1436	0.1367	0.4350	0.1225	0.1231	1.5600	0.1258	0.1241	2.6850	0.1531	0.1403
-0.6750	0.1427	0.1362	0.4500	0.1223	0.1230	1.5750	0.1262	0.1242	2.7000	0.1532	0.1407
-0.6600	0.1424	0.1360	0.4650	0.1221	0.1230	1.5900	0.1266	0.1243	2.7150	0.1537	0.1410
-0.6450	0.1419	0.1359	0.4800	0.1215	0.1226	1.6050	0.1269	0.1244	2.7300	0.1544	0.1415
-0.6300	0.1417	0.1353	0.4950	0.1213	0.1225	1.6200	0.1269	0.1245	2.7450	0.1548	0.1417
-0.6150	0.1409	0.1349	0.5100	0.1210	0.1226	1.6350	0.1271	0.1246	2.7600	0.1555	0.1420
-0.6000	0.1403	0.1347	0.5250	0.1211	0.1225	1.6500	0.1272	0.1246	2.7750	0.1562	0.1425
-0.5850	0.1399	0.1341	0.5400	0.1210	0.1224	1.6650	0.1274	0.1249	2.7900	0.1569	0.1428
-0.5700	0.1394	0.1340	0.5550	0.1210	0.1222	1.6800	0.1282	0.1252	2.8050	0.1573	0.1430
-0.5550	0.1389	0.1339	0.5700	0.1208	0.1218	1.6950	0.1285	0.1253	2.8200	0.1579	0.1431
-0.5400	0.1378	0.1335	0.5850	0.1204	0.1220	1.7100	0.1291	0.1256	2.8350	0.1585	0.1434
-0.5250	0.1376	0.1331	0.6000	0.1204	0.1222	1.7250	0.1294	0.1257	2.8500	0.1591	0.1442
-0.5100	0.1370	0.1327	0.6150	0.1203	0.1223	1.7400	0.1297	0.1258	2.8650	0.1599	0.1445
-0.4950	0.1366	0.1321	0.6300	0.1201	0.1221	1.7550	0.1299	0.1260	2.8800	0.1604	0.1446
-0.4800	0.1357	0.1319	0.6450	0.1203	0.1221	1.7700	0.1301	0.1261	2.8950	0.1611	0.1449
-0.4650	0.1356	0.1318	0.6600	0.1200	0.1218	1.7850	0.1306	0.1264	2.9100	0.1621	0.1452
-0.4500	0.1352	0.1316	0.6750	0.1196	0.1218	1.8000	0.1308	0.1266	2.9250	0.1629	0.1454
-0.4350	0.1348	0.1315	0.6900	0.1195	0.1216	1.8150	0.1309	0.1266	2.9400	0.1636	0.1463
-0.4200	0.1348	0.1312	0.7050	0.1196	0.1215	1.8300	0.1311	0.1271	2.9550	0.1642	0.1463
-0.4050	0.1346	0.1306	0.7200	0.1199	0.1214	1.8450	0.1312	0.1271	2.9700	0.1646	0.1468
-0.3900	0.1344	0.1302	0.7350	0.1201	0.1212	1.8600	0.1315	0.1274	2.9850	0.1654	0.1469

Tabla 5.17: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario 3.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.2507	0.2688	-0.3750	0.2405	0.2347	0.7500	0.2308	0.2306	1.8750	0.2760	0.2695
-1.4850	0.2498	0.2687	-0.3600	0.2400	0.2343	0.7650	0.2310	0.2309	1.8900	0.2767	0.2702
-1.4700	0.2490	0.2683	-0.3450	0.2387	0.2339	0.7800	0.2317	0.2313	1.9050	0.2778	0.2709
-1.4550	0.2482	0.2682	-0.3300	0.2382	0.2337	0.7950	0.2319	0.2320	1.9200	0.2782	0.2714
-1.4400	0.2470	0.2672	-0.3150	0.2377	0.2335	0.8100	0.2319	0.2320	1.9350	0.2791	0.2724
-1.4250	0.2464	0.2670	-0.3000	0.2372	0.2330	0.8250	0.2323	0.2322	1.9500	0.2800	0.2731
-1.4100	0.2455	0.2665	-0.2850	0.2368	0.2327	0.8400	0.2329	0.2324	1.9650	0.2808	0.2733
-1.3950	0.2445	0.2662	-0.2700	0.2363	0.2325	0.8550	0.2338	0.2324	1.9800	0.2814	0.2736
-1.3800	0.2432	0.2654	-0.2550	0.2361	0.2326	0.8700	0.2341	0.2328	1.9950	0.2823	0.2741
-1.3650	0.2425	0.2647	-0.2400	0.2355	0.2324	0.8850	0.2342	0.2330	2.0100	0.2837	0.2743
-1.3500	0.2411	0.2639	-0.2250	0.2351	0.2327	0.9000	0.2345	0.2332	2.0250	0.2844	0.2745
-1.3350	0.2413	0.2627	-0.2100	0.2346	0.2326	0.9150	0.2348	0.2337	2.0400	0.2849	0.2748
-1.3200	0.2411	0.2618	-0.1950	0.2340	0.2325	0.9300	0.2351	0.2342	2.0550	0.2857	0.2753
-1.3050	0.2412	0.2606	-0.1800	0.2335	0.2321	0.9450	0.2354	0.2342	2.0700	0.2863	0.2758
-1.2900	0.2407	0.2602	-0.1650	0.2333	0.2320	0.9600	0.2358	0.2349	2.0850	0.2878	0.2763
-1.2750	0.2409	0.2596	-0.1500	0.2327	0.2316	0.9750	0.2368	0.2354	2.1000	0.2891	0.2775
-1.2600	0.2403	0.2591	-0.1350	0.2328	0.2314	0.9900	0.2375	0.2362	2.1150	0.2902	0.2778
-1.2450	0.2404	0.2587	-0.1200	0.2324	0.2313	1.0050	0.2375	0.2360	2.1300	0.2910	0.2789
-1.2300	0.2410	0.2579	-0.1050	0.2323	0.2313	1.0200	0.2378	0.2364	2.1450	0.2915	0.2797
-1.2150	0.2411	0.2572	-0.0900	0.2315	0.2310	1.0350	0.2385	0.2370	2.1600	0.2920	0.2806
-1.2000	0.2411	0.2568	-0.0750	0.2317	0.2311	1.0500	0.2394	0.2375	2.1750	0.2933	0.2818
-1.1850	0.2420	0.2567	-0.0600	0.2310	0.2307	1.0650	0.2400	0.2377	2.1900	0.2943	0.2826
-1.1700	0.2426	0.2565	-0.0450	0.2307	0.2306	1.0800	0.2407	0.2384	2.2050	0.2952	0.2837
-1.1550	0.2433	0.2562	-0.0300	0.2304	0.2304	1.0950	0.2408	0.2389	2.2200	0.2960	0.2845
-1.1400	0.2430	0.2556	-0.0150	0.2303	0.2303	1.1100	0.2416	0.2398	2.2350	0.2970	0.2852
-1.1250	0.2434	0.2547	0.0000	0.2303	0.2303	1.1250	0.2427	0.2404	2.2500	0.2985	0.2857
-1.1100	0.2446	0.2541	0.0150	0.2297	0.2297	1.1400	0.2433	0.2406	2.2650	0.2991	0.2863
-1.0950	0.2470	0.2536	0.0300	0.2292	0.2294	1.1550	0.2436	0.2409	2.2800	0.2999	0.2870
-1.0800	0.2475	0.2531	0.0450	0.2288	0.2292	1.1700	0.2448	0.2417	2.2950	0.3007	0.2878
-1.0650	0.2503	0.2528	0.0600	0.2285	0.2287	1.1850	0.2453	0.2421	2.3100	0.3016	0.2885
-1.0500	0.2525	0.2525	0.0750	0.2283	0.2288	1.2000	0.2457	0.2429	2.3250	0.3025	0.2893
-1.0350	0.2562	0.2521	0.0900	0.2276	0.2284	1.2150	0.2465	0.2437	2.3400	0.3036	0.2902
-1.0200	0.2585	0.2516	0.1050	0.2274	0.2280	1.2300	0.2475	0.2439	2.3550	0.3051	0.2905
-1.0050	0.2623	0.2512	0.1200	0.2264	0.2276	1.2450	0.2478	0.2441	2.3700	0.3062	0.2911
-0.9900	0.2975	0.2507	0.1350	0.2263	0.2271	1.2600	0.2483	0.2446	2.3850	0.3069	0.2918
-0.9750	0.2957	0.2502	0.1500	0.2259	0.2269	1.2750	0.2488	0.2450	2.4000	0.3083	0.2927
-0.9600	0.2937	0.2497	0.1650	0.2258	0.2268	1.2900	0.2493	0.2453	2.4150	0.3093	0.2934
-0.9450	0.2915	0.2492	0.1800	0.2259	0.2271	1.3050	0.2497	0.2460	2.4300	0.3104	0.2947
-0.9300	0.2889	0.2489	0.1950	0.2256	0.2271	1.3200	0.2501	0.2463	2.4450	0.3114	0.2953
-0.9150	0.2867	0.2481	0.2100	0.2256	0.2270	1.3350	0.2507	0.2464	2.4600	0.3129	0.2960
-0.9000	0.2846	0.2478	0.2250	0.2253	0.2273	1.3500	0.2512	0.2465	2.4750	0.3140	0.2967
-0.8850	0.2834	0.2473	0.2400	0.2251	0.2274	1.3650	0.2519	0.2469	2.4900	0.3156	0.2979
-0.8700	0.2819	0.2469	0.2550	0.2254	0.2273	1.3800	0.2525	0.2472	2.5050	0.3170	0.2988
-0.8550	0.2800	0.2466	0.2700	0.2254	0.2270	1.3950	0.2529	0.2475	2.5200	0.3181	0.3004
-0.8400	0.2781	0.2458	0.2850	0.2256	0.2269	1.4100	0.2533	0.2481	2.5350	0.3190	0.3023
-0.8250	0.2758	0.2451	0.3000	0.2254	0.2272	1.4250	0.2538	0.2486	2.5500	0.3202	0.3028
-0.8100	0.2737	0.2445	0.3150	0.2258	0.2273	1.4400	0.2543	0.2493	2.5650	0.3213	0.3034
-0.7950	0.2718	0.2440	0.3300	0.2257	0.2272	1.4550	0.2551	0.2495	2.5800	0.3223	0.3036
-0.7800	0.2692	0.2435	0.3450	0.2257	0.2274	1.4700	0.2556	0.2497	2.5950	0.3234	0.3041
-0.7650	0.2680	0.2432	0.3600	0.2259	0.2276	1.4850	0.2567	0.2502	2.6100	0.3248	0.3054
-0.7500	0.2667	0.2428	0.3750	0.2261	0.2276	1.5000	0.2578	0.2507	2.6250	0.3255	0.3059
-0.7350	0.2655	0.2425	0.3900	0.2262	0.2276	1.5150	0.2586	0.2518	2.6400	0.3261	0.3064
-0.7200	0.2641	0.2424	0.4050	0.2264	0.2277	1.5300	0.2591	0.2524	2.6550	0.3278	0.3071
-0.7050	0.2624	0.2422	0.4200	0.2261	0.2276	1.5450	0.2597	0.2532	2.6700	0.3284	0.3076
-0.6900	0.2609	0.2419	0.4350	0.2264	0.2276	1.5600	0.2607	0.2537	2.6850	0.3288	0.3076
-0.6750	0.2597	0.2415	0.4500	0.2265	0.2277	1.5750	0.2617	0.2543	2.7000	0.3297	0.3079
-0.6600	0.2587	0.2413	0.4650	0.2262	0.2280	1.5900	0.2628	0.2551	2.7150	0.3306	0.3083
-0.6450	0.2579	0.2409	0.4800	0.2266	0.2280	1.6050	0.2631	0.2558	2.7300	0.3314	0.3092
-0.6300	0.2568	0.2405	0.4950	0.2269	0.2285	1.6200	0.2637	0.2565	2.7450	0.3329	0.3093
-0.6150	0.2552	0.2405	0.5100	0.2271	0.2286	1.6350	0.2646	0.2576	2.7600	0.3342	0.3104
-0.6000	0.2545	0.2403	0.5250	0.2276	0.2287	1.6500	0.2653	0.2585	2.7750	0.3352	0.3112
-0.5850	0.2539	0.2400	0.5400	0.2278	0.2289	1.6650	0.2660	0.2594	2.7900	0.3360	0.3116
-0.5700	0.2529	0.2397	0.5550	0.2278	0.2287	1.6800	0.2672	0.2603	2.8050	0.3369	0.3128
-0.5550	0.2521	0.2396	0.5700	0.2282	0.2286	1.6950	0.2676	0.2609	2.8200	0.3373	0.3132
-0.5400	0.2505	0.2395	0.5850	0.2282	0.2287	1.7100	0.2680	0.2612	2.8350	0.3385	0.3144
-0.5250	0.2491	0.2394	0.6000	0.2282	0.2287	1.7250	0.2692	0.2616	2.8500	0.3393	0.3154
-0.5100	0.2476	0.2390	0.6150	0.2280	0.2292	1.7400	0.2702	0.2619	2.8650	0.3401	0.3159
-0.4950	0.2468	0.2382	0.6300	0.2280	0.2291	1.7550	0.2705	0.2629	2.8800	0.3413	0.3168
-0.4800	0.2463	0.2377	0.6450	0.2284	0.2289	1.7700	0.2710	0.2639	2.8950	0.3420	0.3173
-0.4650	0.2451	0.2371	0.6600	0.2289	0.2293	1.7850	0.2715	0.2644	2.9100	0.3425	0.3177
-0.4500	0.2439	0.2366	0.6750	0.2297	0.2294	1.8000	0.2720	0.2652	2.9250	0.3439	0.3184
-0.4350	0.2430	0.2361	0.6900	0.2301	0.2293	1.8150	0.2725	0.2665	2.9400	0.3446	0.3191
-0.4200	0.2422	0.2359	0.7050	0.2304	0.2295	1.8300	0.2735	0.2672	2.9550	0.3453	0.3199
-0.4050	0.2415	0.2357	0.7200	0.2310	0.2296	1.8450	0.2746	0.2685	2.9700	0.3468	0.3207
-0.3900	0.2410	0.2352	0.7350	0.2307	0.2303	1.8600	0.2751	0.2691	2.9850	0.3477	0.3215

Tabla 5.18: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario 3.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1639	0.3108	-0.3750	0.2730	0.2661	0.7500	0.2388	0.2390	1.8750	0.3057	0.2968
-1.4850	0.1633	0.3101	-0.3600	0.2709	0.2637	0.7650	0.2392	0.2396	1.8900	0.3069	0.2976
-1.4700	0.1626	0.3098	-0.3450	0.2694	0.2616	0.7800	0.2391	0.2402	1.9050	0.3087	0.2980
-1.4550	0.1622	0.3093	-0.3300	0.2681	0.2607	0.7950	0.2395	0.2409	1.9200	0.3102	0.2984
-1.4400	0.1620	0.3080	-0.3150	0.2675	0.2606	0.8100	0.2403	0.2412	1.9350	0.3117	0.2990
-1.4250	0.1619	0.3075	-0.3000	0.2666	0.2600	0.8250	0.2408	0.2418	1.9500	0.3125	0.2994
-1.4100	0.1610	0.3063	-0.2850	0.2661	0.2599	0.8400	0.2417	0.2423	1.9650	0.3139	0.3000
-1.3950	0.1609	0.3057	-0.2700	0.2652	0.2597	0.8550	0.2432	0.2434	1.9800	0.3155	0.3006
-1.3800	0.1603	0.3049	-0.2550	0.2640	0.2585	0.8700	0.2440	0.2447	1.9950	0.3168	0.3012
-1.3650	0.1599	0.3044	-0.2400	0.2625	0.2576	0.8850	0.2445	0.2457	2.0100	0.3187	0.3020
-1.3500	0.1595	0.3036	-0.2250	0.2616	0.2574	0.9000	0.2453	0.2472	2.0250	0.3197	0.3031
-1.3350	0.1588	0.3030	-0.2100	0.2612	0.2568	0.9150	0.2459	0.2482	2.0400	0.3213	0.3043
-1.3200	0.1582	0.3023	-0.1950	0.2597	0.2562	0.9300	0.2467	0.2492	2.0550	0.3224	0.3049
-1.3050	0.1581	0.3016	-0.1800	0.2581	0.2550	0.9450	0.2481	0.2496	2.0700	0.3236	0.3059
-1.2900	0.1583	0.3007	-0.1650	0.2572	0.2540	0.9600	0.2487	0.2505	2.0850	0.3254	0.3066
-1.2750	0.1582	0.2999	-0.1500	0.2556	0.2541	0.9750	0.2487	0.2511	2.1000	0.3260	0.3076
-1.2600	0.1584	0.2989	-0.1350	0.2546	0.2529	0.9900	0.2495	0.2516	2.1150	0.3273	0.3086
-1.2450	0.1590	0.2985	-0.1200	0.2542	0.2527	1.0050	0.2501	0.2518	2.1300	0.3281	0.3101
-1.2300	0.1593	0.2981	-0.1050	0.2523	0.2510	1.0200	0.2505	0.2527	2.1450	0.3288	0.3106
-1.2150	0.1599	0.2973	-0.0900	0.2503	0.2495	1.0350	0.2510	0.2535	2.1600	0.3302	0.3120
-1.2000	0.1609	0.2970	-0.0750	0.2483	0.2479	1.0500	0.2518	0.2543	2.1750	0.3315	0.3137
-1.1850	0.1621	0.2970	-0.0600	0.2475	0.2470	1.0650	0.2529	0.2546	2.1900	0.3330	0.3154
-1.1700	0.1640	0.2966	-0.0450	0.2462	0.2461	1.0800	0.2535	0.2551	2.2050	0.3348	0.3166
-1.1550	0.1652	0.2962	-0.0300	0.2457	0.2457	1.0950	0.2544	0.2557	2.2200	0.3357	0.3181
-1.1400	0.1668	0.2957	-0.0150	0.2452	0.2452	1.1100	0.2558	0.2562	2.2350	0.3372	0.3194
-1.1250	0.1699	0.2951	0.0000	0.2450	0.2450	1.1250	0.2567	0.2570	2.2500	0.3386	0.3201
-1.1100	0.1741	0.2947	0.0150	0.2446	0.2445	1.1400	0.2577	0.2575	2.2650	0.3400	0.3211
-1.0950	0.1779	0.2946	0.0300	0.2433	0.2435	1.1550	0.2590	0.2580	2.2800	0.3416	0.3219
-1.0800	0.1830	0.2940	0.0450	0.2426	0.2425	1.1700	0.2597	0.2585	2.2950	0.3422	0.3225
-1.0650	0.1899	0.2937	0.0600	0.2419	0.2419	1.1850	0.2604	0.2588	2.3100	0.3432	0.3232
-1.0500	0.1947	0.2933	0.0750	0.2409	0.2412	1.2000	0.2609	0.2595	2.3250	0.3439	0.3248
-1.0350	0.2015	0.2928	0.0900	0.2404	0.2405	1.2150	0.2615	0.2599	2.3400	0.3450	0.3257
-1.0200	0.2094	0.2922	0.1050	0.2396	0.2394	1.2300	0.2625	0.2607	2.3550	0.3467	0.3262
-1.0050	0.2208	0.2918	0.1200	0.2392	0.2390	1.2450	0.2634	0.2615	2.3700	0.3477	0.3275
-0.9900	0.4049	0.2911	0.1350	0.2389	0.2390	1.2600	0.2644	0.2622	2.3850	0.3488	0.3289
-0.9750	0.3969	0.2905	0.1500	0.2391	0.2388	1.2750	0.2649	0.2625	2.4000	0.3498	0.3304
-0.9600	0.3920	0.2894	0.1650	0.2384	0.2389	1.2900	0.2655	0.2627	2.4150	0.3519	0.3317
-0.9450	0.3879	0.2891	0.1800	0.2380	0.2387	1.3050	0.2664	0.2632	2.4300	0.3542	0.3334
-0.9300	0.3839	0.2890	0.1950	0.2377	0.2385	1.3200	0.2670	0.2635	2.4450	0.3554	0.3353
-0.9150	0.3770	0.2888	0.2100	0.2373	0.2385	1.3350	0.2678	0.2640	2.4600	0.3571	0.3364
-0.9000	0.3709	0.2884	0.2250	0.2370	0.2387	1.3500	0.2688	0.2644	2.4750	0.3585	0.3385
-0.8850	0.3656	0.2879	0.2400	0.2367	0.2390	1.3650	0.2695	0.2647	2.4900	0.3600	0.3396
-0.8700	0.3605	0.2875	0.2550	0.2366	0.2389	1.3800	0.2701	0.2650	2.5050	0.3619	0.3408
-0.8550	0.3564	0.2871	0.2700	0.2355	0.2374	1.3950	0.2709	0.2655	2.5200	0.3630	0.3416
-0.8400	0.3519	0.2865	0.2850	0.2352	0.2368	1.4100	0.2718	0.2664	2.5350	0.3639	0.3422
-0.8250	0.3462	0.2861	0.3000	0.2350	0.2367	1.4250	0.2728	0.2672	2.5500	0.3647	0.3432
-0.8100	0.3416	0.2852	0.3150	0.2348	0.2363	1.4400	0.2733	0.2676	2.5650	0.3662	0.3441
-0.7950	0.3380	0.2847	0.3300	0.2346	0.2362	1.4550	0.2745	0.2692	2.5800	0.3680	0.3446
-0.7800	0.3360	0.2838	0.3450	0.2345	0.2358	1.4700	0.2761	0.2698	2.5950	0.3693	0.3452
-0.7650	0.3344	0.2832	0.3600	0.2342	0.2357	1.4850	0.2769	0.2708	2.6100	0.3716	0.3469
-0.7500	0.3309	0.2828	0.3750	0.2340	0.2354	1.5000	0.2779	0.2722	2.6250	0.3733	0.3475
-0.7350	0.3264	0.2826	0.3900	0.2338	0.2354	1.5150	0.2787	0.2735	2.6400	0.3749	0.3483
-0.7200	0.3246	0.2824	0.4050	0.2338	0.2356	1.5300	0.2797	0.2748	2.6550	0.3755	0.3488
-0.7050	0.3202	0.2825	0.4200	0.2342	0.2357	1.5450	0.2804	0.2756	2.6700	0.3772	0.3494
-0.6900	0.3155	0.2823	0.4350	0.2344	0.2359	1.5600	0.2807	0.2767	2.6850	0.3782	0.3499
-0.6750	0.3128	0.2818	0.4500	0.2344	0.2358	1.5750	0.2817	0.2770	2.7000	0.3794	0.3504
-0.6600	0.3104	0.2806	0.4650	0.2345	0.2360	1.5900	0.2828	0.2780	2.7150	0.3807	0.3516
-0.6450	0.3080	0.2789	0.4800	0.2346	0.2360	1.6050	0.2842	0.2794	2.7300	0.3817	0.3519
-0.6300	0.3047	0.2778	0.4950	0.2344	0.2362	1.6200	0.2858	0.2817	2.7450	0.3831	0.3525
-0.6150	0.3031	0.2775	0.5100	0.2344	0.2367	1.6350	0.2866	0.2839	2.7600	0.3840	0.3529
-0.6000	0.3013	0.2770	0.5250	0.2345	0.2371	1.6500	0.2880	0.2856	2.7750	0.3856	0.3534
-0.5850	0.2994	0.2766	0.5400	0.2346	0.2375	1.6650	0.2893	0.2870	2.7900	0.3864	0.3550
-0.5700	0.2980	0.2762	0.5550	0.2354	0.2380	1.6800	0.2906	0.2878	2.8050	0.3877	0.3561
-0.5550	0.2963	0.2759	0.5700	0.2358	0.2381	1.6950	0.2917	0.2886	2.8200	0.3892	0.3568
-0.5400	0.2947	0.2759	0.5850	0.2360	0.2383	1.7100	0.2932	0.2889	2.8350	0.3907	0.3577
-0.5250	0.2921	0.2755	0.6000	0.2362	0.2385	1.7250	0.2944	0.2896	2.8500	0.3919	0.3593
-0.5100	0.2901	0.2734	0.6150	0.2364	0.2385	1.7400	0.2951	0.2905	2.8650	0.3939	0.3602
-0.4950	0.2873	0.2725	0.6300	0.2369	0.2381	1.7550	0.2962	0.2917	2.8800	0.3949	0.3614
-0.4800	0.2857	0.2718	0.6450	0.2369	0.2382	1.7700	0.2973	0.2925	2.8950	0.3961	0.3631
-0.4650	0.2841	0.2709	0.6600	0.2371	0.2381	1.7850	0.2989	0.2931	2.9100	0.3981	0.3650
-0.4500	0.2815	0.2687	0.6750	0.2372	0.2381	1.8000	0.2999	0.2936	2.9250	0.3989	0.3673
-0.4350	0.2793	0.2679	0.6900	0.2373	0.2384	1.8150	0.3009	0.2942	2.9400	0.4007	0.3704
-0.4200	0.2773	0.2677	0.7050	0.2377	0.2386	1.8300	0.3012	0.2951	2.9550	0.4020	0.3716
-0.4050	0.2761	0.2671	0.7200	0.2380	0.2385	1.8450	0.3022	0.2961	2.9700	0.4032	0.3720
-0.3900	0.2747	0.2661	0.7350	0.2387	0.2386	1.8600	0.3037	0.2964	2.9850	0.4047	0.3723

Tabla 5.19: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario 3.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.0979	0.3507	-0.3750	0.2809	0.2723	0.7500	0.2190	0.2170	1.8750	0.3089	0.2984
-1.4850	0.0973	0.3506	-0.3600	0.2749	0.2686	0.7650	0.2199	0.2177	1.8900	0.3101	0.2990
-1.4700	0.0971	0.3501	-0.3450	0.2711	0.2634	0.7800	0.2205	0.2182	1.9050	0.3114	0.2992
-1.4550	0.0969	0.3501	-0.3300	0.2680	0.2609	0.7950	0.2210	0.2187	1.9200	0.3138	0.2998
-1.4400	0.0960	0.3497	-0.3150	0.2662	0.2590	0.8100	0.2214	0.2197	1.9350	0.3161	0.3000
-1.4250	0.0957	0.3490	-0.3000	0.2637	0.2567	0.8250	0.2220	0.2210	1.9500	0.3173	0.3003
-1.4100	0.0951	0.3483	-0.2850	0.2620	0.2556	0.8400	0.2225	0.2219	1.9650	0.3198	0.3012
-1.3950	0.0952	0.3479	-0.2700	0.2595	0.2550	0.8550	0.2234	0.2235	1.9800	0.3211	0.3017
-1.3800	0.0950	0.3475	-0.2550	0.2575	0.2525	0.8700	0.2246	0.2248	1.9950	0.3232	0.3021
-1.3650	0.0948	0.3472	-0.2400	0.2550	0.2507	0.8850	0.2256	0.2269	2.0100	0.3245	0.3028
-1.3500	0.0944	0.3466	-0.2250	0.2528	0.2494	0.9000	0.2263	0.2284	2.0250	0.3254	0.3036
-1.3350	0.0942	0.3464	-0.2100	0.2512	0.2488	0.9150	0.2270	0.2305	2.0400	0.3263	0.3046
-1.3200	0.0941	0.3462	-0.1950	0.2491	0.2475	0.9300	0.2276	0.2325	2.0550	0.3284	0.3050
-1.3050	0.0939	0.3457	-0.1800	0.2471	0.2459	0.9450	0.2283	0.2333	2.0700	0.3293	0.3060
-1.2900	0.0937	0.3455	-0.1650	0.2459	0.2446	0.9600	0.2295	0.2342	2.0850	0.3306	0.3063
-1.2750	0.0934	0.3447	-0.1500	0.2446	0.2430	0.9750	0.2305	0.2347	2.1000	0.3321	0.3077
-1.2600	0.0935	0.3443	-0.1350	0.2417	0.2406	0.9900	0.2316	0.2352	2.1150	0.3333	0.3086
-1.2450	0.0942	0.3436	-0.1200	0.2401	0.2397	1.0050	0.2328	0.2358	2.1300	0.3355	0.3106
-1.2300	0.0944	0.3432	-0.1050	0.2382	0.2369	1.0200	0.2329	0.2368	2.1450	0.3374	0.3121
-1.2150	0.0958	0.3429	-0.0900	0.2348	0.2342	1.0350	0.2347	0.2375	2.1600	0.3383	0.3139
-1.2000	0.0976	0.3427	-0.0750	0.2325	0.2319	1.0500	0.2355	0.2379	2.1750	0.3400	0.3153
-1.1850	0.0991	0.3423	-0.0600	0.2306	0.2302	1.0650	0.2369	0.2383	2.1900	0.3408	0.3166
-1.1700	0.1006	0.3421	-0.0450	0.2290	0.2293	1.0800	0.2385	0.2388	2.2050	0.3425	0.3186
-1.1550	0.1024	0.3421	-0.0300	0.2283	0.2283	1.0950	0.2397	0.2396	2.2200	0.3440	0.3195
-1.1400	0.1053	0.3416	-0.0150	0.2279	0.2277	1.1100	0.2409	0.2403	2.2350	0.3459	0.3207
-1.1250	0.1088	0.3412	0.0000	0.2271	0.2271	1.1250	0.2427	0.2417	2.2500	0.3471	0.3215
-1.1100	0.1123	0.3410	0.0150	0.2256	0.2256	1.1400	0.2450	0.2428	2.2650	0.3489	0.3225
-1.0950	0.1179	0.3410	0.0300	0.2242	0.2237	1.1550	0.2461	0.2442	2.2800	0.3502	0.3235
-1.0800	0.1228	0.3405	0.0450	0.2231	0.2231	1.1700	0.2480	0.2446	2.2950	0.3516	0.3241
-1.0650	0.1337	0.3402	0.0600	0.2216	0.2218	1.1850	0.2485	0.2456	2.3100	0.3524	0.3252
-1.0500	0.1414	0.3400	0.0750	0.2207	0.2206	1.2000	0.2499	0.2464	2.3250	0.3538	0.3268
-1.0350	0.1514	0.3397	0.0900	0.2201	0.2198	1.2150	0.2509	0.2474	2.3400	0.3549	0.3275
-1.0200	0.1654	0.3397	0.1050	0.2194	0.2193	1.2300	0.2516	0.2482	2.3550	0.3563	0.3288
-1.0050	0.1855	0.3395	0.1200	0.2184	0.2186	1.2450	0.2529	0.2493	2.3700	0.3574	0.3294
-0.9900	0.5117	0.3380	0.1350	0.2181	0.2185	1.2600	0.2540	0.2498	2.3850	0.3586	0.3304
-0.9750	0.5007	0.3377	0.1500	0.2179	0.2179	1.2750	0.2550	0.2504	2.4000	0.3603	0.3314
-0.9600	0.4899	0.3370	0.1650	0.2174	0.2171	1.2900	0.2558	0.2511	2.4150	0.3622	0.3332
-0.9450	0.4794	0.3367	0.1800	0.2168	0.2161	1.3050	0.2570	0.2518	2.4300	0.3637	0.3348
-0.9300	0.4762	0.3360	0.1950	0.2161	0.2164	1.3200	0.2582	0.2523	2.4450	0.3658	0.3356
-0.9150	0.4660	0.3358	0.2100	0.2157	0.2168	1.3350	0.2589	0.2531	2.4600	0.3678	0.3367
-0.9000	0.4582	0.3359	0.2250	0.2158	0.2167	1.3500	0.2597	0.2532	2.4750	0.3699	0.3382
-0.8850	0.4488	0.3356	0.2400	0.2155	0.2159	1.3650	0.2612	0.2542	2.4900	0.3719	0.3405
-0.8700	0.4410	0.3353	0.2550	0.2155	0.2154	1.3800	0.2624	0.2545	2.5050	0.3744	0.3424
-0.8550	0.4289	0.3347	0.2700	0.2151	0.2147	1.3950	0.2633	0.2548	2.5200	0.3761	0.3434
-0.8400	0.4223	0.3345	0.2850	0.2149	0.2147	1.4100	0.2646	0.2557	2.5350	0.3779	0.3445
-0.8250	0.4159	0.3331	0.3000	0.2148	0.2144	1.4250	0.2655	0.2561	2.5500	0.3801	0.3459
-0.8100	0.4093	0.3327	0.3150	0.2143	0.2134	1.4400	0.2666	0.2569	2.5650	0.3815	0.3469
-0.7950	0.4039	0.3298	0.3300	0.2139	0.2132	1.4550	0.2684	0.2585	2.5800	0.3833	0.3475
-0.7800	0.3997	0.3273	0.3450	0.2134	0.2123	1.4700	0.2697	0.2596	2.5950	0.3854	0.3483
-0.7650	0.3958	0.3257	0.3600	0.2128	0.2119	1.4850	0.2713	0.2607	2.6100	0.3870	0.3492
-0.7500	0.3902	0.3244	0.3750	0.2122	0.2117	1.5000	0.2722	0.2613	2.6250	0.3886	0.3506
-0.7350	0.3815	0.3235	0.3900	0.2123	0.2113	1.5150	0.2733	0.2622	2.6400	0.3896	0.3517
-0.7200	0.3776	0.3220	0.4050	0.2124	0.2117	1.5300	0.2743	0.2642	2.6550	0.3903	0.3535
-0.7050	0.3701	0.3214	0.4200	0.2126	0.2120	1.5450	0.2761	0.2657	2.6700	0.3914	0.3551
-0.6900	0.3596	0.3198	0.4350	0.2124	0.2116	1.5600	0.2769	0.2668	2.6850	0.3927	0.3558
-0.6750	0.3535	0.3178	0.4500	0.2125	0.2116	1.5750	0.2784	0.2679	2.7000	0.3936	0.3572
-0.6600	0.3493	0.3164	0.4650	0.2126	0.2118	1.5900	0.2799	0.2693	2.7150	0.3954	0.3588
-0.6450	0.3457	0.3095	0.4800	0.2127	0.2121	1.6050	0.2824	0.2719	2.7300	0.3963	0.3599
-0.6300	0.3403	0.3070	0.4950	0.2132	0.2124	1.6200	0.2847	0.2741	2.7450	0.3976	0.3604
-0.6150	0.3362	0.3051	0.5100	0.2130	0.2127	1.6350	0.2865	0.2767	2.7600	0.3985	0.3618
-0.6000	0.3315	0.3035	0.5250	0.2131	0.2129	1.6500	0.2881	0.2787	2.7750	0.4005	0.3630
-0.5850	0.3277	0.3021	0.5400	0.2136	0.2134	1.6650	0.2887	0.2808	2.7900	0.4029	0.3648
-0.5700	0.3234	0.3009	0.5550	0.2137	0.2135	1.6800	0.2902	0.2819	2.8050	0.4045	0.3663
-0.5550	0.3186	0.3002	0.5700	0.2142	0.2138	1.6950	0.2914	0.2828	2.8200	0.4067	0.3683
-0.5400	0.3154	0.2997	0.5850	0.2141	0.2139	1.7100	0.2930	0.2831	2.8350	0.4089	0.3698
-0.5250	0.3121	0.2985	0.6000	0.2143	0.2140	1.7250	0.2942	0.2841	2.8500	0.4109	0.3720
-0.5100	0.3060	0.2911	0.6150	0.2149	0.2142	1.7400	0.2958	0.2852	2.8650	0.4130	0.3735
-0.4950	0.3016	0.2892	0.6300	0.2156	0.2145	1.7550	0.2970	0.2864	2.8800	0.4154	0.3750
-0.4800	0.2991	0.2867	0.6450	0.2158	0.2146	1.7700	0.2981	0.2876	2.8950	0.4175	0.3785
-0.4650	0.2964	0.2847	0.6600	0.2166	0.2150	1.7850	0.2998	0.2882	2.9100	0.4194	0.3818
-0.4500	0.2920	0.2809	0.6750	0.2171	0.2155	1.8000	0.3015	0.2888	2.9250	0.4218	0.3865
-0.4350	0.2889	0.2789	0.6900	0.2173	0.2155	1.8150	0.3027	0.2902	2.9400	0.4242	0.3893
-0.4200	0.2864	0.2768	0.7050	0.2176	0.2161	1.8300	0.3044	0.2927	2.9550	0.4257	0.3913
-0.4050	0.2843	0.2752	0.7200	0.2178	0.2162	1.8450	0.3058	0.2956	2.9700	0.4273	0.3937
-0.3900	0.2831	0.2739	0.7350	0.2181	0.2167	1.8600	0.3068	0.2970	2.9850	0.4284	0.3942

Tabla 5.20: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \hat{p}(\bar{\theta}), \hat{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\hat{p}(\bar{\theta}), \hat{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario 3.

λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}
-1.5000	0.0827	0.0726	-0.3750	0.0598	0.0579	0.7500	0.0489	0.0507	1.8750	0.0525	0.0529
-1.4850	0.0826	0.0723	-0.3600	0.0595	0.0578	0.7650	0.0489	0.0506	1.8900	0.0526	0.0530
-1.4700	0.0825	0.0722	-0.3450	0.0594	0.0578	0.7800	0.0487	0.0506	1.9050	0.0526	0.0531
-1.4550	0.0818	0.0721	-0.3300	0.0594	0.0576	0.7950	0.0485	0.0505	1.9200	0.0526	0.0531
-1.4400	0.0814	0.0721	-0.3150	0.0593	0.0575	0.8100	0.0486	0.0505	1.9350	0.0526	0.0532
-1.4250	0.0811	0.0715	-0.3000	0.0591	0.0573	0.8250	0.0486	0.0505	1.9500	0.0530	0.0532
-1.4100	0.0804	0.0712	-0.2850	0.0588	0.0569	0.8400	0.0485	0.0505	1.9650	0.0531	0.0531
-1.3950	0.0798	0.0710	-0.2700	0.0584	0.0567	0.8550	0.0484	0.0505	1.9800	0.0531	0.0533
-1.3800	0.0793	0.0705	-0.2550	0.0584	0.0566	0.8700	0.0484	0.0505	1.9950	0.0533	0.0533
-1.3650	0.0786	0.0700	-0.2400	0.0582	0.0566	0.8850	0.0485	0.0505	2.0100	0.0536	0.0534
-1.3500	0.0783	0.0696	-0.2250	0.0583	0.0565	0.9000	0.0486	0.0506	2.0250	0.0537	0.0534
-1.3350	0.0779	0.0695	-0.2100	0.0582	0.0565	0.9150	0.0486	0.0508	2.0400	0.0541	0.0534
-1.3200	0.0777	0.0695	-0.1950	0.0580	0.0565	0.9300	0.0483	0.0508	2.0550	0.0543	0.0535
-1.3050	0.0772	0.0693	-0.1800	0.0579	0.0564	0.9450	0.0483	0.0508	2.0700	0.0543	0.0535
-1.2900	0.0769	0.0691	-0.1650	0.0578	0.0564	0.9600	0.0482	0.0507	2.0850	0.0543	0.0536
-1.2750	0.0765	0.0688	-0.1500	0.0576	0.0562	0.9750	0.0482	0.0507	2.1000	0.0544	0.0536
-1.2600	0.0761	0.0684	-0.1350	0.0574	0.0560	0.9900	0.0482	0.0508	2.1150	0.0547	0.0539
-1.2450	0.0756	0.0683	-0.1200	0.0568	0.0559	1.0050	0.0484	0.0508	2.1300	0.0549	0.0539
-1.2300	0.0751	0.0680	-0.1050	0.0566	0.0559	1.0200	0.0482	0.0507	2.1450	0.0550	0.0540
-1.2150	0.0747	0.0678	-0.0900	0.0565	0.0558	1.0350	0.0482	0.0508	2.1600	0.0551	0.0540
-1.2000	0.0747	0.0676	-0.0750	0.0563	0.0557	1.0500	0.0482	0.0510	2.1750	0.0551	0.0541
-1.1850	0.0744	0.0675	-0.0600	0.0562	0.0555	1.0650	0.0482	0.0512	2.1900	0.0556	0.0543
-1.1700	0.0743	0.0675	-0.0450	0.0558	0.0552	1.0800	0.0481	0.0511	2.2050	0.0556	0.0544
-1.1550	0.0739	0.0672	-0.0300	0.0553	0.0552	1.0950	0.0482	0.0510	2.2200	0.0556	0.0544
-1.1400	0.0734	0.0672	-0.0150	0.0551	0.0552	1.1100	0.0481	0.0508	2.2350	0.0558	0.0545
-1.1250	0.0730	0.0670	0.0000	0.0550	0.0550	1.1250	0.0478	0.0508	2.2500	0.0560	0.0545
-1.1100	0.0727	0.0668	0.0150	0.0547	0.0548	1.1400	0.0479	0.0505	2.2650	0.0562	0.0547
-1.0950	0.0726	0.0665	0.0300	0.0545	0.0546	1.1550	0.0479	0.0507	2.2800	0.0563	0.0548
-1.0800	0.0726	0.0664	0.0450	0.0543	0.0544	1.1700	0.0480	0.0508	2.2950	0.0565	0.0551
-1.0650	0.0722	0.0663	0.0600	0.0539	0.0543	1.1850	0.0479	0.0506	2.3100	0.0566	0.0551
-1.0500	0.0721	0.0660	0.0750	0.0539	0.0540	1.2000	0.0478	0.0505	2.3250	0.0569	0.0552
-1.0350	0.0719	0.0659	0.0900	0.0535	0.0540	1.2150	0.0479	0.0505	2.3400	0.0571	0.0554
-1.0200	0.0718	0.0657	0.1050	0.0532	0.0539	1.2300	0.0479	0.0503	2.3550	0.0572	0.0555
-1.0050	0.0714	0.0655	0.1200	0.0531	0.0536	1.2450	0.0480	0.0502	2.3700	0.0577	0.0557
-0.9900	0.0741	0.0654	0.1350	0.0530	0.0535	1.2600	0.0482	0.0502	2.3850	0.0579	0.0558
-0.9750	0.0737	0.0651	0.1500	0.0530	0.0535	1.2750	0.0483	0.0501	2.4000	0.0581	0.0558
-0.9600	0.0727	0.0648	0.1650	0.0529	0.0535	1.2900	0.0484	0.0500	2.4150	0.0582	0.0558
-0.9450	0.0724	0.0644	0.1800	0.0526	0.0534	1.3050	0.0483	0.0498	2.4300	0.0583	0.0559
-0.9300	0.0720	0.0641	0.1950	0.0526	0.0533	1.3200	0.0484	0.0499	2.4450	0.0585	0.0560
-0.9150	0.0717	0.0639	0.2100	0.0526	0.0532	1.3350	0.0486	0.0499	2.4600	0.0587	0.0562
-0.9000	0.0712	0.0639	0.2250	0.0522	0.0530	1.3500	0.0485	0.0499	2.4750	0.0590	0.0565
-0.8850	0.0709	0.0638	0.2400	0.0522	0.0529	1.3650	0.0487	0.0498	2.4900	0.0593	0.0568
-0.8700	0.0705	0.0635	0.2550	0.0520	0.0529	1.3800	0.0487	0.0498	2.5050	0.0596	0.0568
-0.8550	0.0702	0.0632	0.2700	0.0520	0.0529	1.3950	0.0488	0.0500	2.5200	0.0600	0.0569
-0.8400	0.0701	0.0629	0.2850	0.0518	0.0529	1.4100	0.0487	0.0500	2.5350	0.0603	0.0571
-0.8250	0.0697	0.0628	0.3000	0.0516	0.0528	1.4250	0.0487	0.0500	2.5500	0.0604	0.0572
-0.8100	0.0692	0.0628	0.3150	0.0514	0.0529	1.4400	0.0489	0.0502	2.5650	0.0606	0.0572
-0.7950	0.0688	0.0626	0.3300	0.0513	0.0528	1.4550	0.0488	0.0503	2.5800	0.0608	0.0572
-0.7800	0.0683	0.0624	0.3450	0.0513	0.0528	1.4700	0.0488	0.0504	2.5950	0.0609	0.0573
-0.7650	0.0680	0.0623	0.3600	0.0511	0.0528	1.4850	0.0488	0.0506	2.6100	0.0613	0.0573
-0.7500	0.0676	0.0620	0.3750	0.0510	0.0527	1.5000	0.0487	0.0505	2.6250	0.0614	0.0575
-0.7350	0.0673	0.0620	0.3900	0.0512	0.0526	1.5150	0.0487	0.0506	2.6400	0.0618	0.0577
-0.7200	0.0671	0.0616	0.4050	0.0512	0.0525	1.5300	0.0489	0.0507	2.6550	0.0621	0.0580
-0.7050	0.0667	0.0616	0.4200	0.0510	0.0524	1.5450	0.0490	0.0506	2.6700	0.0621	0.0583
-0.6900	0.0664	0.0613	0.4350	0.0507	0.0523	1.5600	0.0492	0.0507	2.6850	0.0623	0.0586
-0.6750	0.0660	0.0612	0.4500	0.0507	0.0523	1.5750	0.0493	0.0507	2.7000	0.0627	0.0587
-0.6600	0.0656	0.0607	0.4650	0.0507	0.0523	1.5900	0.0498	0.0508	2.7150	0.0629	0.0588
-0.6450	0.0654	0.0605	0.4800	0.0505	0.0522	1.6050	0.0502	0.0508	2.7300	0.0629	0.0589
-0.6300	0.0650	0.0603	0.4950	0.0504	0.0521	1.6200	0.0502	0.0508	2.7450	0.0629	0.0590
-0.6150	0.0649	0.0601	0.5100	0.0504	0.0520	1.6350	0.0505	0.0508	2.7600	0.0630	0.0593
-0.6000	0.0641	0.0597	0.5250	0.0502	0.0519	1.6500	0.0505	0.0508	2.7750	0.0633	0.0593
-0.5850	0.0640	0.0596	0.5400	0.0502	0.0518	1.6650	0.0507	0.0508	2.7900	0.0637	0.0594
-0.5700	0.0639	0.0592	0.5550	0.0501	0.0515	1.6800	0.0508	0.0510	2.8050	0.0638	0.0596
-0.5550	0.0636	0.0590	0.5700	0.0498	0.0516	1.6950	0.0508	0.0511	2.8200	0.0641	0.0598
-0.5400	0.0634	0.0590	0.5850	0.0497	0.0515	1.7100	0.0511	0.0512	2.8350	0.0642	0.0598
-0.5250	0.0630	0.0590	0.6000	0.0497	0.0515	1.7250	0.0513	0.0513	2.8500	0.0642	0.0601
-0.5100	0.0626	0.0590	0.6150	0.0497	0.0516	1.7400	0.0515	0.0514	2.8650	0.0643	0.0601
-0.4950	0.0619	0.0590	0.6300	0.0494	0.0516	1.7550	0.0516	0.0514	2.8800	0.0644	0.0602
-0.4800	0.0618	0.0590	0.6450	0.0494	0.0516	1.7700	0.0517	0.0515	2.8950	0.0647	0.0603
-0.4650	0.0617	0.0590	0.6600	0.0494	0.0516	1.7850	0.0518	0.0518	2.9100	0.0648	0.0605
-0.4500	0.0615	0.0587	0.6750	0.0494	0.0515	1.8000	0.0519	0.0519	2.9250	0.0649	0.0608
-0.4350	0.0613	0.0587	0.6900	0.0494	0.0514	1.8150	0.0519	0.0521	2.9400	0.0650	0.0609
-0.4200	0.0610	0.0584	0.7050	0.0492	0.0511	1.8300	0.0521	0.0522	2.9550	0.0651	0.0610
-0.4050	0.0605	0.0583	0.7200	0.0489	0.0509	1.8450	0.0523	0.0525	2.9700	0.0653	0.0611
-0.3900	0.0603	0.0582	0.7350	0.0489	0.0508	1.8600	0.0523	0.0526	2.9850	0.0657	0.0614

Tabla 5.21: Niveles de significación simulados para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$. Escenario 4.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1829	0.1703	-0.3750	0.1531	0.1493	0.7500	0.1422	0.1438	1.8750	0.1532	0.1494
-1.4850	0.1820	0.1700	-0.3600	0.1525	0.1493	0.7650	0.1423	0.1437	1.8900	0.1536	0.1496
-1.4700	0.1816	0.1697	-0.3450	0.1522	0.1490	0.7800	0.1420	0.1437	1.9050	0.1537	0.1496
-1.4550	0.1815	0.1695	-0.3300	0.1519	0.1490	0.7950	0.1420	0.1439	1.9200	0.1538	0.1497
-1.4400	0.1807	0.1692	-0.3150	0.1514	0.1489	0.8100	0.1419	0.1437	1.9350	0.1545	0.1499
-1.4250	0.1804	0.1687	-0.3000	0.1511	0.1489	0.8250	0.1418	0.1437	1.9500	0.1549	0.1502
-1.4100	0.1795	0.1685	-0.2850	0.1510	0.1490	0.8400	0.1417	0.1436	1.9650	0.1551	0.1502
-1.3950	0.1787	0.1683	-0.2700	0.1506	0.1490	0.8550	0.1416	0.1434	1.9800	0.1553	0.1502
-1.3800	0.1785	0.1678	-0.2550	0.1503	0.1490	0.8700	0.1415	0.1432	1.9950	0.1555	0.1504
-1.3650	0.1780	0.1678	-0.2400	0.1502	0.1490	0.8850	0.1416	0.1432	2.0100	0.1558	0.1504
-1.3500	0.1774	0.1677	-0.2250	0.1501	0.1486	0.9000	0.1417	0.1432	2.0250	0.1562	0.1506
-1.3350	0.1772	0.1674	-0.2100	0.1500	0.1485	0.9150	0.1418	0.1431	2.0400	0.1567	0.1506
-1.3200	0.1764	0.1669	-0.1950	0.1495	0.1484	0.9300	0.1418	0.1431	2.0550	0.1570	0.1507
-1.3050	0.1759	0.1664	-0.1800	0.1494	0.1482	0.9450	0.1421	0.1433	2.0700	0.1573	0.1507
-1.2900	0.1754	0.1659	-0.1650	0.1495	0.1483	0.9600	0.1420	0.1434	2.0850	0.1574	0.1511
-1.2750	0.1749	0.1655	-0.1500	0.1494	0.1482	0.9750	0.1420	0.1435	2.1000	0.1575	0.1511
-1.2600	0.1746	0.1650	-0.1350	0.1491	0.1480	0.9900	0.1423	0.1436	2.1150	0.1579	0.1513
-1.2450	0.1742	0.1647	-0.1200	0.1489	0.1481	1.0050	0.1420	0.1433	2.1300	0.1582	0.1514
-1.2300	0.1738	0.1642	-0.1050	0.1486	0.1480	1.0200	0.1423	0.1433	2.1450	0.1586	0.1515
-1.2150	0.1736	0.1638	-0.0900	0.1484	0.1480	1.0350	0.1426	0.1433	2.1600	0.1588	0.1518
-1.2000	0.1731	0.1637	-0.0750	0.1482	0.1478	1.0500	0.1426	0.1432	2.1750	0.1591	0.1518
-1.1850	0.1728	0.1635	-0.0600	0.1483	0.1478	1.0650	0.1427	0.1430	2.1900	0.1597	0.1522
-1.1700	0.1723	0.1631	-0.0450	0.1480	0.1476	1.0800	0.1427	0.1432	2.2050	0.1598	0.1526
-1.1550	0.1723	0.1629	-0.0300	0.1477	0.1474	1.0950	0.1427	0.1432	2.2200	0.1602	0.1530
-1.1400	0.1719	0.1625	-0.0150	0.1475	0.1475	1.1100	0.1430	0.1434	2.2350	0.1609	0.1532
-1.1250	0.1717	0.1622	0.0000	0.1472	0.1472	1.1250	0.1434	0.1436	2.2500	0.1613	0.1536
-1.1100	0.1715	0.1618	0.0150	0.1470	0.1472	1.1400	0.1434	0.1437	2.2650	0.1614	0.1537
-1.0950	0.1714	0.1619	0.0300	0.1468	0.1470	1.1550	0.1435	0.1437	2.2800	0.1621	0.1538
-1.0800	0.1708	0.1617	0.0450	0.1468	0.1467	1.1700	0.1436	0.1438	2.2950	0.1623	0.1541
-1.0650	0.1708	0.1614	0.0600	0.1463	0.1464	1.1850	0.1436	0.1439	2.3100	0.1623	0.1544
-1.0500	0.1702	0.1610	0.0750	0.1461	0.1463	1.2000	0.1438	0.1440	2.3250	0.1627	0.1548
-1.0350	0.1696	0.1606	0.0900	0.1460	0.1461	1.2150	0.1440	0.1438	2.3400	0.1631	0.1548
-1.0200	0.1691	0.1604	0.1050	0.1458	0.1460	1.2300	0.1440	0.1439	2.3550	0.1632	0.1550
-1.0050	0.1687	0.1598	0.1200	0.1457	0.1457	1.2450	0.1442	0.1439	2.3700	0.1634	0.1556
-0.9900	0.1692	0.1594	0.1350	0.1451	0.1455	1.2600	0.1439	0.1439	2.3850	0.1638	0.1563
-0.9750	0.1685	0.1592	0.1500	0.1452	0.1457	1.2750	0.1442	0.1439	2.4000	0.1640	0.1566
-0.9600	0.1675	0.1588	0.1650	0.1449	0.1457	1.2900	0.1444	0.1439	2.4150	0.1644	0.1570
-0.9450	0.1672	0.1585	0.1800	0.1448	0.1456	1.3050	0.1445	0.1441	2.4300	0.1645	0.1572
-0.9300	0.1669	0.1584	0.1950	0.1443	0.1455	1.3200	0.1443	0.1440	2.4450	0.1648	0.1574
-0.9150	0.1663	0.1580	0.2100	0.1443	0.1453	1.3350	0.1442	0.1439	2.4600	0.1654	0.1575
-0.9000	0.1661	0.1578	0.2250	0.1442	0.1453	1.3500	0.1443	0.1439	2.4750	0.1657	0.1579
-0.8850	0.1659	0.1574	0.2400	0.1442	0.1453	1.3650	0.1441	0.1438	2.4900	0.1663	0.1581
-0.8700	0.1655	0.1573	0.2550	0.1440	0.1452	1.3800	0.1443	0.1438	2.5050	0.1667	0.1582
-0.8550	0.1652	0.1572	0.2700	0.1437	0.1449	1.3950	0.1446	0.1438	2.5200	0.1670	0.1585
-0.8400	0.1644	0.1568	0.2850	0.1436	0.1449	1.4100	0.1449	0.1441	2.5350	0.1674	0.1585
-0.8250	0.1638	0.1567	0.3000	0.1433	0.1449	1.4250	0.1452	0.1442	2.5500	0.1678	0.1590
-0.8100	0.1636	0.1564	0.3150	0.1429	0.1445	1.4400	0.1456	0.1445	2.5650	0.1680	0.1593
-0.7950	0.1631	0.1562	0.3300	0.1430	0.1445	1.4550	0.1459	0.1446	2.5800	0.1688	0.1599
-0.7800	0.1621	0.1562	0.3450	0.1429	0.1443	1.4700	0.1461	0.1448	2.5950	0.1690	0.1604
-0.7650	0.1613	0.1559	0.3600	0.1429	0.1442	1.4850	0.1463	0.1447	2.6100	0.1691	0.1608
-0.7500	0.1607	0.1559	0.3750	0.1427	0.1442	1.5000	0.1465	0.1448	2.6250	0.1696	0.1611
-0.7350	0.1602	0.1555	0.3900	0.1426	0.1442	1.5150	0.1464	0.1451	2.6400	0.1702	0.1613
-0.7200	0.1600	0.1553	0.4050	0.1426	0.1443	1.5300	0.1465	0.1452	2.6550	0.1707	0.1615
-0.7050	0.1596	0.1550	0.4200	0.1427	0.1445	1.5450	0.1465	0.1456	2.6700	0.1712	0.1616
-0.6900	0.1594	0.1548	0.4350	0.1427	0.1445	1.5600	0.1469	0.1458	2.6850	0.1715	0.1625
-0.6750	0.1590	0.1546	0.4500	0.1425	0.1443	1.5750	0.1474	0.1460	2.7000	0.1720	0.1625
-0.6600	0.1586	0.1545	0.4650	0.1424	0.1441	1.5900	0.1477	0.1461	2.7150	0.1725	0.1627
-0.6450	0.1587	0.1543	0.4800	0.1425	0.1437	1.6050	0.1480	0.1463	2.7300	0.1734	0.1630
-0.6300	0.1583	0.1542	0.4950	0.1426	0.1436	1.6200	0.1480	0.1464	2.7450	0.1738	0.1632
-0.6150	0.1579	0.1540	0.5100	0.1426	0.1438	1.6350	0.1482	0.1464	2.7600	0.1743	0.1637
-0.6000	0.1576	0.1537	0.5250	0.1430	0.1438	1.6500	0.1483	0.1466	2.7750	0.1747	0.1638
-0.5850	0.1574	0.1534	0.5400	0.1430	0.1438	1.6650	0.1488	0.1469	2.7900	0.1753	0.1639
-0.5700	0.1569	0.1532	0.5550	0.1431	0.1439	1.6800	0.1490	0.1470	2.8050	0.1760	0.1642
-0.5550	0.1565	0.1530	0.5700	0.1431	0.1439	1.6950	0.1492	0.1472	2.8200	0.1766	0.1647
-0.5400	0.1562	0.1528	0.5850	0.1430	0.1442	1.7100	0.1496	0.1474	2.8350	0.1777	0.1647
-0.5250	0.1559	0.1523	0.6000	0.1428	0.1443	1.7250	0.1499	0.1474	2.8500	0.1783	0.1650
-0.5100	0.1557	0.1521	0.6150	0.1427	0.1443	1.7400	0.1501	0.1477	2.8650	0.1786	0.1652
-0.4950	0.1556	0.1515	0.6300	0.1428	0.1443	1.7550	0.1503	0.1479	2.8800	0.1790	0.1654
-0.4800	0.1553	0.1512	0.6450	0.1428	0.1441	1.7700	0.1508	0.1480	2.8950	0.1796	0.1655
-0.4650	0.1549	0.1507	0.6600	0.1428	0.1444	1.7850	0.1515	0.1483	2.9100	0.1800	0.1658
-0.4500	0.1547	0.1505	0.6750	0.1425	0.1442	1.8000	0.1516	0.1485	2.9250	0.1803	0.1663
-0.4350	0.1544	0.1501	0.6900	0.1422	0.1442	1.8150	0.1520	0.1488	2.9400	0.1809	0.1667
-0.4200	0.1540	0.1502	0.7050	0.1420	0.1440	1.8300	0.1526	0.1489	2.9550	0.1809	0.1671
-0.4050	0.1538	0.1501	0.7200	0.1420	0.1440	1.8450	0.1526	0.1491	2.9700	0.1812	0.1673
-0.3900	0.1535	0.1494	0.7350	0.1421	0.1439	1.8600	0.1529	0.1491	2.9850	0.1815	0.1674

Tabla 5.22: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$, con $\delta = 0.1$. Escenario 4.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.3103	0.3035	-0.3750	0.2846	0.2817	0.7500	0.2870	0.2875	1.8750	0.3275	0.3210
-1.4850	0.3096	0.3031	-0.3600	0.2844	0.2817	0.7650	0.2878	0.2878	1.8900	0.3283	0.3219
-1.4700	0.3086	0.3028	-0.3450	0.2843	0.2815	0.7800	0.2877	0.2879	1.9050	0.3286	0.3227
-1.4550	0.3074	0.3022	-0.3300	0.2839	0.2814	0.7950	0.2879	0.2883	1.9200	0.3293	0.3232
-1.4400	0.3066	0.3018	-0.3150	0.2838	0.2814	0.8100	0.2881	0.2885	1.9350	0.3297	0.3237
-1.4250	0.3059	0.3013	-0.3000	0.2837	0.2816	0.8250	0.2883	0.2884	1.9500	0.3302	0.3241
-1.4100	0.3049	0.3010	-0.2850	0.2836	0.2816	0.8400	0.2891	0.2888	1.9650	0.3310	0.3248
-1.3950	0.3040	0.3006	-0.2700	0.2836	0.2815	0.8550	0.2892	0.2891	1.9800	0.3320	0.3257
-1.3800	0.3032	0.3002	-0.2550	0.2831	0.2816	0.8700	0.2894	0.2896	1.9950	0.3328	0.3265
-1.3650	0.3027	0.3000	-0.2400	0.2830	0.2813	0.8850	0.2899	0.2897	2.0100	0.3337	0.3269
-1.3500	0.3017	0.2998	-0.2250	0.2828	0.2810	0.9000	0.2904	0.2899	2.0250	0.3344	0.3278
-1.3350	0.3007	0.2995	-0.2100	0.2824	0.2812	0.9150	0.2911	0.2898	2.0400	0.3351	0.3282
-1.3200	0.3004	0.2994	-0.1950	0.2821	0.2811	0.9300	0.2915	0.2903	2.0550	0.3356	0.3291
-1.3050	0.3001	0.2992	-0.1800	0.2817	0.2810	0.9450	0.2917	0.2906	2.0700	0.3365	0.3296
-1.2900	0.2998	0.2987	-0.1650	0.2818	0.2809	0.9600	0.2921	0.2911	2.0850	0.3375	0.3308
-1.2750	0.2994	0.2982	-0.1500	0.2813	0.2807	0.9750	0.2932	0.2916	2.1000	0.3385	0.3319
-1.2600	0.2989	0.2980	-0.1350	0.2812	0.2802	0.9900	0.2936	0.2921	2.1150	0.3396	0.3321
-1.2450	0.2982	0.2968	-0.1200	0.2812	0.2805	1.0050	0.2939	0.2925	2.1300	0.3402	0.3330
-1.2300	0.2977	0.2963	-0.1050	0.2812	0.2807	1.0200	0.2947	0.2925	2.1450	0.3409	0.3335
-1.2150	0.2977	0.2962	-0.0900	0.2807	0.2805	1.0350	0.2954	0.2925	2.1600	0.3417	0.3339
-1.2000	0.2973	0.2960	-0.0750	0.2807	0.2807	1.0500	0.2954	0.2931	2.1750	0.3427	0.3344
-1.1850	0.2973	0.2958	-0.0600	0.2803	0.2806	1.0650	0.2958	0.2937	2.1900	0.3434	0.3350
-1.1700	0.2973	0.2954	-0.0450	0.2803	0.2802	1.0800	0.2965	0.2947	2.2050	0.3444	0.3364
-1.1550	0.2972	0.2951	-0.0300	0.2802	0.2801	1.0950	0.2965	0.2950	2.2200	0.3452	0.3368
-1.1400	0.2970	0.2949	-0.0150	0.2801	0.2799	1.1100	0.2970	0.2960	2.2350	0.3461	0.3372
-1.1250	0.2967	0.2948	0.0000	0.2802	0.2802	1.1250	0.2974	0.2968	2.2500	0.3467	0.3375
-1.1100	0.2960	0.2946	0.0150	0.2800	0.2800	1.1400	0.2975	0.2973	2.2650	0.3474	0.3378
-1.0950	0.2955	0.2941	0.0300	0.2800	0.2802	1.1550	0.2980	0.2977	2.2800	0.3480	0.3385
-1.0800	0.2954	0.2939	0.0450	0.2798	0.2806	1.1700	0.2985	0.2980	2.2950	0.3492	0.3392
-1.0650	0.2959	0.2935	0.0600	0.2802	0.2809	1.1850	0.2992	0.2987	2.3100	0.3498	0.3397
-1.0500	0.2966	0.2932	0.0750	0.2802	0.2808	1.2000	0.2996	0.2993	2.3250	0.3502	0.3406
-1.0350	0.2975	0.2929	0.0900	0.2803	0.2809	1.2150	0.2999	0.3000	2.3400	0.3511	0.3410
-1.0200	0.2978	0.2925	0.1050	0.2803	0.2812	1.2300	0.3004	0.3006	2.3550	0.3518	0.3417
-1.0050	0.2980	0.2922	0.1200	0.2807	0.2813	1.2450	0.3008	0.3011	2.3700	0.3525	0.3422
-0.9900	0.3105	0.2918	0.1350	0.2809	0.2812	1.2600	0.3013	0.3015	2.3850	0.3537	0.3435
-0.9750	0.3091	0.2914	0.1500	0.2809	0.2816	1.2750	0.3018	0.3018	2.4000	0.3544	0.3451
-0.9600	0.3085	0.2911	0.1650	0.2811	0.2818	1.2900	0.3030	0.3021	2.4150	0.3556	0.3458
-0.9450	0.3076	0.2910	0.1800	0.2809	0.2819	1.3050	0.3037	0.3024	2.4300	0.3566	0.3464
-0.9300	0.3073	0.2907	0.1950	0.2811	0.2822	1.3200	0.3042	0.3028	2.4450	0.3578	0.3471
-0.9150	0.3063	0.2906	0.2100	0.2810	0.2821	1.3350	0.3049	0.3031	2.4600	0.3591	0.3477
-0.9000	0.3055	0.2901	0.2250	0.2809	0.2819	1.3500	0.3052	0.3035	2.4750	0.3597	0.3484
-0.8850	0.3044	0.2897	0.2400	0.2811	0.2820	1.3650	0.3060	0.3040	2.4900	0.3607	0.3488
-0.8700	0.3033	0.2889	0.2550	0.2810	0.2821	1.3800	0.3065	0.3045	2.5050	0.3613	0.3497
-0.8550	0.3025	0.2885	0.2700	0.2813	0.2822	1.3950	0.3072	0.3046	2.5200	0.3623	0.3509
-0.8400	0.3017	0.2885	0.2850	0.2815	0.2823	1.4100	0.3074	0.3053	2.5350	0.3632	0.3515
-0.8250	0.3014	0.2879	0.3000	0.2816	0.2827	1.4250	0.3080	0.3056	2.5500	0.3641	0.3522
-0.8100	0.3007	0.2876	0.3150	0.2817	0.2835	1.4400	0.3084	0.3057	2.5650	0.3650	0.3527
-0.7950	0.2999	0.2874	0.3300	0.2822	0.2835	1.4550	0.3092	0.3059	2.5800	0.3655	0.3532
-0.7800	0.2989	0.2872	0.3450	0.2820	0.2836	1.4700	0.3097	0.3065	2.5950	0.3661	0.3537
-0.7650	0.2983	0.2868	0.3600	0.2821	0.2837	1.4850	0.3101	0.3069	2.6100	0.3670	0.3544
-0.7500	0.2978	0.2866	0.3750	0.2824	0.2836	1.5000	0.3111	0.3071	2.6250	0.3679	0.3548
-0.7350	0.2974	0.2863	0.3900	0.2829	0.2836	1.5150	0.3117	0.3077	2.6400	0.3683	0.3552
-0.7200	0.2965	0.2865	0.4050	0.2827	0.2838	1.5300	0.3121	0.3082	2.6550	0.3692	0.3555
-0.7050	0.2954	0.2859	0.4200	0.2829	0.2839	1.5450	0.3131	0.3088	2.6700	0.3697	0.3562
-0.6900	0.2945	0.2854	0.4350	0.2829	0.2838	1.5600	0.3138	0.3094	2.6850	0.3706	0.3566
-0.6750	0.2936	0.2849	0.4500	0.2830	0.2839	1.5750	0.3151	0.3097	2.7000	0.3718	0.3570
-0.6600	0.2931	0.2842	0.4650	0.2833	0.2841	1.5900	0.3156	0.3104	2.7150	0.3725	0.3572
-0.6450	0.2930	0.2838	0.4800	0.2835	0.2841	1.6050	0.3163	0.3110	2.7300	0.3735	0.3575
-0.6300	0.2924	0.2834	0.4950	0.2836	0.2839	1.6200	0.3167	0.3118	2.7450	0.3749	0.3581
-0.6150	0.2919	0.2834	0.5100	0.2837	0.2844	1.6350	0.3171	0.3122	2.7600	0.3757	0.3586
-0.6000	0.2914	0.2837	0.5250	0.2835	0.2845	1.6500	0.3180	0.3127	2.7750	0.3763	0.3592
-0.5850	0.2906	0.2837	0.5400	0.2835	0.2845	1.6650	0.3185	0.3133	2.7900	0.3770	0.3599
-0.5700	0.2898	0.2836	0.5550	0.2836	0.2847	1.6800	0.3191	0.3134	2.8050	0.3777	0.3609
-0.5550	0.2896	0.2832	0.5700	0.2836	0.2849	1.6950	0.3195	0.3139	2.8200	0.3787	0.3614
-0.5400	0.2889	0.2832	0.5850	0.2841	0.2851	1.7100	0.3200	0.3139	2.8350	0.3794	0.3621
-0.5250	0.2881	0.2829	0.6000	0.2840	0.2854	1.7250	0.3204	0.3143	2.8500	0.3802	0.3629
-0.5100	0.2878	0.2828	0.6150	0.2841	0.2856	1.7400	0.3212	0.3154	2.8650	0.3815	0.3634
-0.4950	0.2875	0.2826	0.6300	0.2844	0.2856	1.7550	0.3219	0.3159	2.8800	0.3827	0.3637
-0.4800	0.2871	0.2823	0.6450	0.2849	0.2858	1.7700	0.3223	0.3169	2.8950	0.3835	0.3643
-0.4650	0.2864	0.2821	0.6600	0.2850	0.2862	1.7850	0.3232	0.3176	2.9100	0.3844	0.3647
-0.4500	0.2857	0.2823	0.6750	0.2849	0.2865	1.8000	0.3237	0.3181	2.9250	0.3853	0.3652
-0.4350	0.2858	0.2823	0.6900	0.2851	0.2866	1.8150	0.3243	0.3187	2.9400	0.3863	0.3660
-0.4200	0.2856	0.2821	0.7050	0.2855	0.2866	1.8300	0.3248	0.3192	2.9550	0.3869	0.3671
-0.4050	0.2851	0.2823	0.7200	0.2858	0.2865	1.8450	0.3260	0.3198	2.9700	0.3872	0.3679
-0.3900	0.2850	0.2822	0.7350	0.2864	0.2873	1.8600	0.3265	0.3206	2.9850	0.3883	0.3684

Tabla 5.23: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(p(\hat{\theta}), p(\hat{\theta}))$, con $\delta = 0.5$. Escenario 4.

λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}	λ	β_{T_λ}	β_{S_λ}
-1.5000	0.2442	0.3240	-0.3750	0.3043	0.2951	0.7500	0.2972	0.3012	1.8750	0.3594	0.3537
-1.4850	0.2440	0.3230	-0.3600	0.3037	0.2948	0.7650	0.2979	0.3019	1.8900	0.3608	0.3554
-1.4700	0.2435	0.3221	-0.3450	0.3038	0.2949	0.7800	0.2981	0.3019	1.9050	0.3618	0.3564
-1.4550	0.2425	0.3215	-0.3300	0.3029	0.2951	0.7950	0.2985	0.3020	1.9200	0.3634	0.3575
-1.4400	0.2417	0.3205	-0.3150	0.3024	0.2950	0.8100	0.2989	0.3021	1.9350	0.3647	0.3580
-1.4250	0.2408	0.3200	-0.3000	0.3020	0.2945	0.8250	0.2994	0.3022	1.9500	0.3662	0.3587
-1.4100	0.2401	0.3191	-0.2850	0.3013	0.2943	0.8400	0.2997	0.3023	1.9650	0.3675	0.3592
-1.3950	0.2391	0.3185	-0.2700	0.3010	0.2940	0.8550	0.3005	0.3022	1.9800	0.3688	0.3601
-1.3800	0.2379	0.3177	-0.2550	0.3006	0.2938	0.8700	0.3006	0.3023	1.9950	0.3697	0.3607
-1.3650	0.2375	0.3166	-0.2400	0.2999	0.2941	0.8850	0.3011	0.3023	2.0100	0.3709	0.3616
-1.3500	0.2369	0.3164	-0.2250	0.2992	0.2940	0.9000	0.3019	0.3029	2.0250	0.3719	0.3625
-1.3350	0.2362	0.3160	-0.2100	0.2991	0.2942	0.9150	0.3020	0.3035	2.0400	0.3730	0.3630
-1.3200	0.2353	0.3157	-0.1950	0.2981	0.2944	0.9300	0.3024	0.3036	2.0550	0.3742	0.3639
-1.3050	0.2352	0.3154	-0.1800	0.2979	0.2945	0.9450	0.3033	0.3042	2.0700	0.3752	0.3644
-1.2900	0.2355	0.3149	-0.1650	0.2975	0.2948	0.9600	0.3040	0.3046	2.0850	0.3764	0.3655
-1.2750	0.2351	0.3147	-0.1500	0.2978	0.2952	0.9750	0.3043	0.3057	2.1000	0.3772	0.3662
-1.2600	0.2350	0.3146	-0.1350	0.2969	0.2940	0.9900	0.3056	0.3065	2.1150	0.3780	0.3666
-1.2450	0.2351	0.3141	-0.1200	0.2956	0.2937	1.0050	0.3067	0.3073	2.1300	0.3793	0.3675
-1.2300	0.2357	0.3138	-0.1050	0.2948	0.2932	1.0200	0.3071	0.3081	2.1450	0.3812	0.3679
-1.2150	0.2359	0.3131	-0.0900	0.2945	0.2930	1.0350	0.3074	0.3084	2.1600	0.3821	0.3694
-1.2000	0.2354	0.3128	-0.0750	0.2937	0.2924	1.0500	0.3080	0.3091	2.1750	0.3828	0.3704
-1.1850	0.2356	0.3125	-0.0600	0.2933	0.2922	1.0650	0.3086	0.3095	2.1900	0.3844	0.3713
-1.1700	0.2373	0.3123	-0.0450	0.2925	0.2919	1.0800	0.3094	0.3102	2.2050	0.3864	0.3720
-1.1550	0.2382	0.3116	-0.0300	0.2922	0.2916	1.0950	0.3104	0.3116	2.2200	0.3878	0.3737
-1.1400	0.2381	0.3113	-0.0150	0.2919	0.2917	1.1100	0.3111	0.3126	2.2350	0.3890	0.3747
-1.1250	0.2387	0.3109	0.0000	0.2916	0.2916	1.1250	0.3122	0.3133	2.2500	0.3902	0.3756
-1.1100	0.2399	0.3102	0.0150	0.2910	0.2914	1.1400	0.3125	0.3138	2.2650	0.3917	0.3766
-1.0950	0.2420	0.3096	0.0300	0.2904	0.2912	1.1550	0.3137	0.3145	2.2800	0.3930	0.3777
-1.0800	0.2433	0.3094	0.0450	0.2903	0.2915	1.1700	0.3147	0.3159	2.2950	0.3947	0.3784
-1.0650	0.2469	0.3088	0.0600	0.2902	0.2918	1.1850	0.3156	0.3168	2.3100	0.3958	0.3790
-1.0500	0.2487	0.3075	0.0750	0.2904	0.2925	1.2000	0.3167	0.3173	2.3250	0.3967	0.3804
-1.0350	0.2513	0.3074	0.0900	0.2904	0.2929	1.2150	0.3175	0.3181	2.3400	0.3979	0.3816
-1.0200	0.2545	0.3068	0.1050	0.2905	0.2933	1.2300	0.3184	0.3191	2.3550	0.3994	0.3832
-1.0050	0.2581	0.3063	0.1200	0.2906	0.2937	1.2450	0.3192	0.3196	2.3700	0.4006	0.3843
-0.9900	0.3704	0.3059	0.1350	0.2904	0.2939	1.2600	0.3201	0.3204	2.3850	0.4017	0.3849
-0.9750	0.3675	0.3053	0.1500	0.2904	0.2942	1.2750	0.3208	0.3208	2.4000	0.4026	0.3858
-0.9600	0.3650	0.3050	0.1650	0.2906	0.2945	1.2900	0.3216	0.3211	2.4150	0.4040	0.3869
-0.9450	0.3627	0.3046	0.1800	0.2910	0.2947	1.3050	0.3228	0.3221	2.4300	0.4053	0.3875
-0.9300	0.3594	0.3042	0.1950	0.2909	0.2942	1.3200	0.3237	0.3231	2.4450	0.4064	0.3881
-0.9150	0.3565	0.3038	0.2100	0.2903	0.2936	1.3350	0.3243	0.3237	2.4600	0.4082	0.3893
-0.9000	0.3541	0.3034	0.2250	0.2903	0.2935	1.3500	0.3249	0.3240	2.4750	0.4091	0.3903
-0.8850	0.3511	0.3032	0.2400	0.2901	0.2936	1.3650	0.3262	0.3247	2.4900	0.4102	0.3923
-0.8700	0.3488	0.3029	0.2550	0.2902	0.2934	1.3800	0.3271	0.3256	2.5050	0.4110	0.3925
-0.8550	0.3464	0.3026	0.2700	0.2906	0.2931	1.3950	0.3278	0.3265	2.5200	0.4121	0.3934
-0.8400	0.3448	0.3025	0.2850	0.2905	0.2932	1.4100	0.3287	0.3270	2.5350	0.4131	0.3941
-0.8250	0.3425	0.3024	0.3000	0.2907	0.2939	1.4250	0.3301	0.3284	2.5500	0.4137	0.3952
-0.8100	0.3407	0.3024	0.3150	0.2903	0.2943	1.4400	0.3311	0.3287	2.5650	0.4148	0.3965
-0.7950	0.3392	0.3022	0.3300	0.2907	0.2943	1.4550	0.3324	0.3298	2.5800	0.4158	0.3981
-0.7800	0.3373	0.3021	0.3450	0.2910	0.2944	1.4700	0.3331	0.3306	2.5950	0.4165	0.3997
-0.7650	0.3366	0.3020	0.3600	0.2912	0.2944	1.4850	0.3342	0.3313	2.6100	0.4176	0.4007
-0.7500	0.3345	0.3018	0.3750	0.2913	0.2943	1.5000	0.3351	0.3318	2.6250	0.4185	0.4015
-0.7350	0.3328	0.3014	0.3900	0.2916	0.2946	1.5150	0.3362	0.3319	2.6400	0.4196	0.4020
-0.7200	0.3314	0.3010	0.4050	0.2916	0.2946	1.5300	0.3375	0.3325	2.6550	0.4205	0.4024
-0.7050	0.3296	0.3009	0.4200	0.2917	0.2952	1.5450	0.3389	0.3333	2.6700	0.4219	0.4029
-0.6900	0.3281	0.3002	0.4350	0.2920	0.2954	1.5600	0.3399	0.3342	2.6850	0.4229	0.4038
-0.6750	0.3263	0.2997	0.4500	0.2921	0.2952	1.5750	0.3410	0.3345	2.7000	0.4244	0.4044
-0.6600	0.3242	0.2993	0.4650	0.2920	0.2949	1.5900	0.3417	0.3355	2.7150	0.4253	0.4049
-0.6450	0.3227	0.2982	0.4800	0.2921	0.2948	1.6050	0.3427	0.3363	2.7300	0.4268	0.4058
-0.6300	0.3220	0.2978	0.4950	0.2922	0.2949	1.6200	0.3435	0.3375	2.7450	0.4274	0.4063
-0.6150	0.3206	0.2980	0.5100	0.2920	0.2952	1.6350	0.3443	0.3379	2.7600	0.4283	0.4068
-0.6000	0.3195	0.2978	0.5250	0.2922	0.2950	1.6500	0.3448	0.3384	2.7750	0.4294	0.4074
-0.5850	0.3183	0.2969	0.5400	0.2926	0.2947	1.6650	0.3459	0.3387	2.7900	0.4309	0.4079
-0.5700	0.3169	0.2969	0.5550	0.2925	0.2944	1.6800	0.3467	0.3402	2.8050	0.4317	0.4088
-0.5550	0.3152	0.2965	0.5700	0.2926	0.2946	1.6950	0.3478	0.3413	2.8200	0.4323	0.4093
-0.5400	0.3141	0.2961	0.5850	0.2926	0.2949	1.7100	0.3490	0.3419	2.8350	0.4330	0.4102
-0.5250	0.3132	0.2961	0.6000	0.2932	0.2950	1.7250	0.3500	0.3423	2.8500	0.4341	0.4107
-0.5100	0.3111	0.2954	0.6150	0.2932	0.2952	1.7400	0.3513	0.3433	2.8650	0.4351	0.4113
-0.4950	0.3102	0.2957	0.6300	0.2934	0.2955	1.7550	0.3522	0.3450	2.8800	0.4365	0.4117
-0.4800	0.3091	0.2959	0.6450	0.2938	0.2959	1.7700	0.3530	0.3464	2.8950	0.4380	0.4122
-0.4650	0.3084	0.2957	0.6600	0.2942	0.2970	1.7850	0.3535	0.3479	2.9100	0.4391	0.4130
-0.4500	0.3078	0.2954	0.6750	0.2947	0.2985	1.8000	0.3546	0.3488	2.9250	0.4401	0.4141
-0.4350	0.3072	0.2951	0.6900	0.2952	0.2996	1.8150	0.3553	0.3498	2.9400	0.4408	0.4150
-0.4200	0.3062	0.2950	0.7050	0.2958	0.3001	1.8300	0.3562	0.3504	2.9550	0.4427	0.4161
-0.4050	0.3057	0.2948	0.7200	0.2966	0.3007	1.8450	0.3572	0.3514	2.9700	0.4437	0.4172
-0.3900	0.3050	0.2949	0.7350	0.2964	0.3011	1.8600	0.3582	0.3523	2.9850	0.4444	0.4180

Tabla 5.24: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.0$. Escenario 4.

λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$	λ	$\hat{\beta}_{T_\lambda}$	$\hat{\beta}_{S_\lambda}$
-1.5000	0.1703	0.3399	-0.3750	0.3137	0.3032	0.7500	0.2856	0.2869	1.8750	0.3564	0.3473
-1.4850	0.1695	0.3393	-0.3600	0.3116	0.3015	0.7650	0.2864	0.2871	1.8900	0.3582	0.3492
-1.4700	0.1683	0.3389	-0.3450	0.3109	0.3009	0.7800	0.2866	0.2874	1.9050	0.3599	0.3505
-1.4550	0.1676	0.3380	-0.3300	0.3101	0.3007	0.7950	0.2869	0.2875	1.9200	0.3607	0.3511
-1.4400	0.1673	0.3374	-0.3150	0.3091	0.3002	0.8100	0.2874	0.2877	1.9350	0.3620	0.3515
-1.4250	0.1667	0.3365	-0.3000	0.3086	0.3000	0.8250	0.2877	0.2878	1.9500	0.3635	0.3523
-1.4100	0.1664	0.3358	-0.2850	0.3076	0.2996	0.8400	0.2882	0.2884	1.9650	0.3651	0.3530
-1.3950	0.1662	0.3354	-0.2700	0.3061	0.2985	0.8550	0.2890	0.2890	1.9800	0.3663	0.3537
-1.3800	0.1659	0.3350	-0.2550	0.3049	0.2981	0.8700	0.2895	0.2893	1.9950	0.3681	0.3544
-1.3650	0.1659	0.3342	-0.2400	0.3038	0.2974	0.8850	0.2898	0.2897	2.0100	0.3694	0.3553
-1.3500	0.1659	0.3338	-0.2250	0.3026	0.2973	0.9000	0.2901	0.2904	2.0250	0.3703	0.3560
-1.3350	0.1655	0.3331	-0.2100	0.3006	0.2960	0.9150	0.2910	0.2912	2.0400	0.3714	0.3565
-1.3200	0.1651	0.3330	-0.1950	0.2996	0.2952	0.9300	0.2924	0.2922	2.0550	0.3731	0.3568
-1.3050	0.1644	0.3330	-0.1800	0.2987	0.2946	0.9450	0.2933	0.2932	2.0700	0.3744	0.3577
-1.2900	0.1642	0.3326	-0.1650	0.2964	0.2938	0.9600	0.2945	0.2945	2.0850	0.3754	0.3586
-1.2750	0.1647	0.3323	-0.1500	0.2957	0.2929	0.9750	0.2954	0.2958	2.1000	0.3770	0.3598
-1.2600	0.1649	0.3322	-0.1350	0.2928	0.2905	0.9900	0.2957	0.2977	2.1150	0.3778	0.3604
-1.2450	0.1648	0.3320	-0.1200	0.2914	0.2896	1.0050	0.2969	0.2985	2.1300	0.3787	0.3611
-1.2300	0.1639	0.3319	-0.1050	0.2902	0.2885	1.0200	0.2973	0.2990	2.1450	0.3805	0.3621
-1.2150	0.1644	0.3313	-0.0900	0.2895	0.2881	1.0350	0.2984	0.2991	2.1600	0.3812	0.3629
-1.2000	0.1655	0.3308	-0.0750	0.2887	0.2876	1.0500	0.2989	0.2998	2.1750	0.3822	0.3641
-1.1850	0.1672	0.3305	-0.0600	0.2876	0.2866	1.0650	0.2994	0.3002	2.1900	0.3834	0.3651
-1.1700	0.1687	0.3299	-0.0450	0.2865	0.2864	1.0800	0.3001	0.3004	2.2050	0.3858	0.3667
-1.1550	0.1706	0.3298	-0.0300	0.2859	0.2857	1.0950	0.3007	0.3009	2.2200	0.3874	0.3682
-1.1400	0.1721	0.3298	-0.0150	0.2840	0.2842	1.1100	0.3014	0.3013	2.2350	0.3889	0.3697
-1.1250	0.1746	0.3295	0.0000	0.2834	0.2834	1.1250	0.3024	0.3018	2.2500	0.3900	0.3709
-1.1100	0.1778	0.3294	0.0150	0.2827	0.2829	1.1400	0.3040	0.3027	2.2650	0.3916	0.3719
-1.0950	0.1809	0.3290	0.0300	0.2823	0.2826	1.1550	0.3056	0.3042	2.2800	0.3933	0.3731
-1.0800	0.1849	0.3288	0.0450	0.2817	0.2825	1.1700	0.3063	0.3051	2.2950	0.3950	0.3747
-1.0650	0.1907	0.3283	0.0600	0.2817	0.2828	1.1850	0.3069	0.3052	2.3100	0.3964	0.3762
-1.0500	0.1949	0.3281	0.0750	0.2821	0.2832	1.2000	0.3083	0.3060	2.3250	0.3980	0.3778
-1.0350	0.2019	0.3279	0.0900	0.2819	0.2836	1.2150	0.3093	0.3067	2.3400	0.3988	0.3790
-1.0200	0.2095	0.3277	0.1050	0.2815	0.2833	1.2300	0.3097	0.3073	2.3550	0.4006	0.3804
-1.0050	0.2193	0.3280	0.1200	0.2814	0.2831	1.2450	0.3104	0.3079	2.3700	0.4011	0.3812
-0.9900	0.4419	0.3271	0.1350	0.2812	0.2835	1.2600	0.3113	0.3089	2.3850	0.4027	0.3819
-0.9750	0.4349	0.3261	0.1500	0.2813	0.2834	1.2750	0.3127	0.3094	2.4000	0.4035	0.3829
-0.9600	0.4296	0.3261	0.1650	0.2810	0.2838	1.2900	0.3137	0.3100	2.4150	0.4047	0.3835
-0.9450	0.4252	0.3260	0.1800	0.2811	0.2834	1.3050	0.3143	0.3111	2.4300	0.4061	0.3843
-0.9300	0.4222	0.3255	0.1950	0.2812	0.2830	1.3200	0.3152	0.3113	2.4450	0.4068	0.3857
-0.9150	0.4151	0.3252	0.2100	0.2808	0.2820	1.3350	0.3163	0.3124	2.4600	0.4081	0.3866
-0.9000	0.4106	0.3250	0.2250	0.2806	0.2820	1.3500	0.3170	0.3140	2.4750	0.4099	0.3884
-0.8850	0.4060	0.3252	0.2400	0.2802	0.2815	1.3650	0.3183	0.3154	2.4900	0.4111	0.3896
-0.8700	0.4012	0.3250	0.2550	0.2799	0.2818	1.3800	0.3199	0.3161	2.5050	0.4125	0.3904
-0.8550	0.3961	0.3246	0.2700	0.2793	0.2816	1.3950	0.3211	0.3169	2.5200	0.4131	0.3911
-0.8400	0.3921	0.3243	0.2850	0.2789	0.2816	1.4100	0.3222	0.3179	2.5350	0.4144	0.3926
-0.8250	0.3886	0.3245	0.3000	0.2790	0.2823	1.4250	0.3230	0.3185	2.5500	0.4158	0.3934
-0.8100	0.3845	0.3243	0.3150	0.2786	0.2821	1.4400	0.3241	0.3194	2.5650	0.4172	0.3947
-0.7950	0.3823	0.3239	0.3300	0.2785	0.2825	1.4550	0.3250	0.3198	2.5800	0.4186	0.3960
-0.7800	0.3798	0.3228	0.3450	0.2786	0.2820	1.4700	0.3259	0.3202	2.5950	0.4204	0.3969
-0.7650	0.3768	0.3229	0.3600	0.2784	0.2817	1.4850	0.3264	0.3208	2.6100	0.4213	0.3986
-0.7500	0.3738	0.3227	0.3750	0.2790	0.2822	1.5000	0.3274	0.3213	2.6250	0.4225	0.3992
-0.7350	0.3703	0.3227	0.3900	0.2791	0.2824	1.5150	0.3283	0.3217	2.6400	0.4240	0.4002
-0.7200	0.3678	0.3219	0.4050	0.2795	0.2821	1.5300	0.3291	0.3225	2.6550	0.4250	0.4014
-0.7050	0.3628	0.3217	0.4200	0.2799	0.2826	1.5450	0.3299	0.3229	2.6700	0.4258	0.4029
-0.6900	0.3583	0.3213	0.4350	0.2803	0.2830	1.5600	0.3307	0.3235	2.6850	0.4267	0.4040
-0.6750	0.3556	0.3212	0.4500	0.2801	0.2830	1.5750	0.3318	0.3248	2.7000	0.4274	0.4049
-0.6600	0.3540	0.3209	0.4650	0.2801	0.2827	1.5900	0.3330	0.3260	2.7150	0.4285	0.4057
-0.6450	0.3522	0.3184	0.4800	0.2799	0.2828	1.6050	0.3342	0.3271	2.7300	0.4298	0.4066
-0.6300	0.3498	0.3178	0.4950	0.2797	0.2826	1.6200	0.3352	0.3276	2.7450	0.4315	0.4076
-0.6150	0.3477	0.3167	0.5100	0.2795	0.2825	1.6350	0.3369	0.3279	2.7600	0.4331	0.4079
-0.6000	0.3454	0.3160	0.5250	0.2802	0.2825	1.6500	0.3374	0.3288	2.7750	0.4337	0.4090
-0.5850	0.3424	0.3153	0.5400	0.2804	0.2826	1.6650	0.3386	0.3306	2.7900	0.4350	0.4093
-0.5700	0.3395	0.3152	0.5550	0.2807	0.2827	1.6800	0.3402	0.3319	2.8050	0.4368	0.4101
-0.5550	0.3369	0.3152	0.5700	0.2810	0.2828	1.6950	0.3418	0.3343	2.8200	0.4382	0.4115
-0.5400	0.3348	0.3149	0.5850	0.2810	0.2831	1.7100	0.3431	0.3356	2.8350	0.4397	0.4121
-0.5250	0.3325	0.3142	0.6000	0.2816	0.2832	1.7250	0.3441	0.3372	2.8500	0.4408	0.4132
-0.5100	0.3297	0.3115	0.6150	0.2821	0.2833	1.7400	0.3450	0.3377	2.8650	0.4426	0.4145
-0.4950	0.3275	0.3103	0.6300	0.2825	0.2838	1.7550	0.3462	0.3383	2.8800	0.4436	0.4157
-0.4800	0.3262	0.3098	0.6450	0.2830	0.2840	1.7700	0.3475	0.3395	2.8950	0.4449	0.4165
-0.4650	0.3238	0.3088	0.6600	0.2835	0.2840	1.7850	0.3486	0.3404	2.9100	0.4462	0.4181
-0.4500	0.3215	0.3075	0.6750	0.2836	0.2848	1.8000	0.3503	0.3415	2.9250	0.4476	0.4195
-0.4350	0.3202	0.3074	0.6900	0.2837	0.2854	1.8150	0.3516	0.3427	2.9400	0.4490	0.4220
-0.4200	0.3198	0.3070	0.7050	0.2850	0.2854	1.8300	0.3532	0.3432	2.9550	0.4513	0.4247
-0.4050	0.3177	0.3065	0.7200	0.2853	0.2856	1.8450	0.3546	0.3444	2.9700	0.4528	0.4260
-0.3900	0.3167	0.3057	0.7350	0.2856	0.2866	1.8600	0.3559	0.3453	2.9850	0.4539	0.4272

Tabla 5.25: Potencias Simuladas para $T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))$, con $\delta = 1.5$. Escenario 4.

A continuación se muestran las gráficas para las potencias y las eficiencias relativas agrupadas en tres filas y dos columnas. En la primera fila de las Figuras se muestran las gráficas de la potencia estimada incluyendo en color negro los niveles de significación estimados para los estadísticos considerados. La gráfica de la izquierda corresponde a las potencias de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ mientras que la gráfica de la derecha corresponde a las potencias de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$. En la segunda fila de las Figuras se muestran las gráficas de las eficiencias relativas ρ_T y en la tercera fila de las Figuras se muestran las gráficas de las eficiencias relativas ρ_T^* , la gráfica de la izquierda corresponde a las eficiencias relativas de $T = T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ mientras que la gráfica de la derecha corresponde a las eficiencias relativas de $T = S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$.

No es posible comparar las potencias dado que los niveles de significación son distintos. Por lo tanto se divide el procedimiento en dos etapas, utilizando el criterio explicado en el Capítulo 2. Este criterio ha sido tomado como referencia por varios autores, Cressie y otros (2003) y Martín y Pardo (2012), entre otros. Los casos que cumplen esta condición están destacados en negrita en la Tabla 5.4. En las gráficas los casos que cumplen esta condición corresponden a los valores que se encuentran en la banda punteada, y la línea de puntos en el interior de la banda punteada representa el nivel de significación fijado inicialmente. De ambas formas podemos concluir que no se deben considerar en el estudio los estadísticos de contraste $T \in \{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 0]}$.

Es importante mencionar que se realiza la comparación de los estadísticos propuestos con respecto al estadístico del cociente de verosimilitudes ($G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$), por ser el único estadístico de contraste considerado en la literatura para contrastar (5.2a) frente a (5.2b), sin embargo también se compara con el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson ($X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) por ser muy conocido en otros tipos de ordenaciones y por presentar una buena ejecución asintótica (véase Martín y Balakrishnan (2013) y sus referencias en esa publicación). Es destacable que el estadístico ji-cuadrado de Pearson es clásico, en general, en el análisis de datos categóricos, pero apenas en inferencia estadística con restricciones de desigualdad.

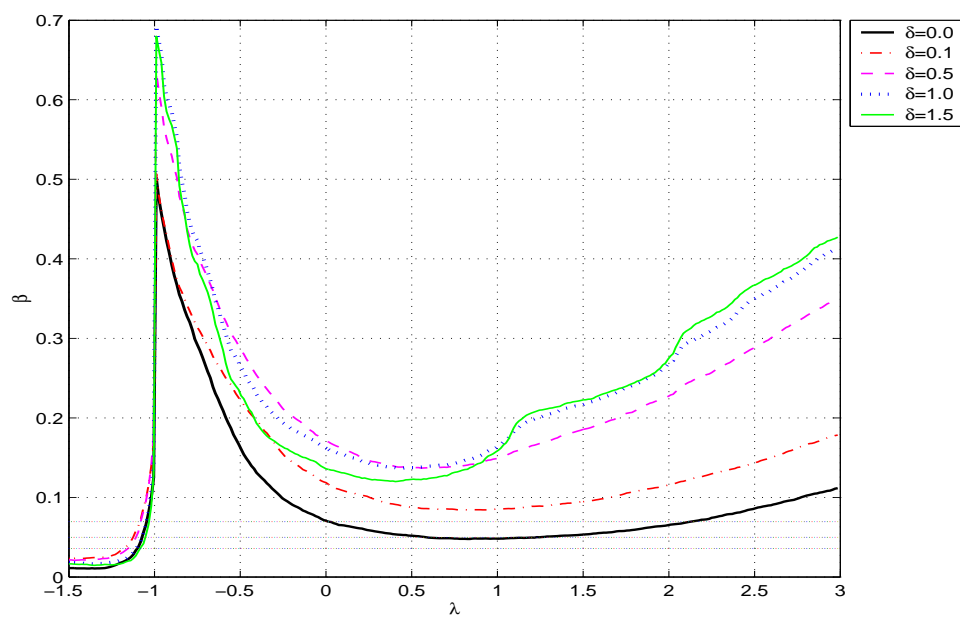


Figura 5.1: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 1 de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

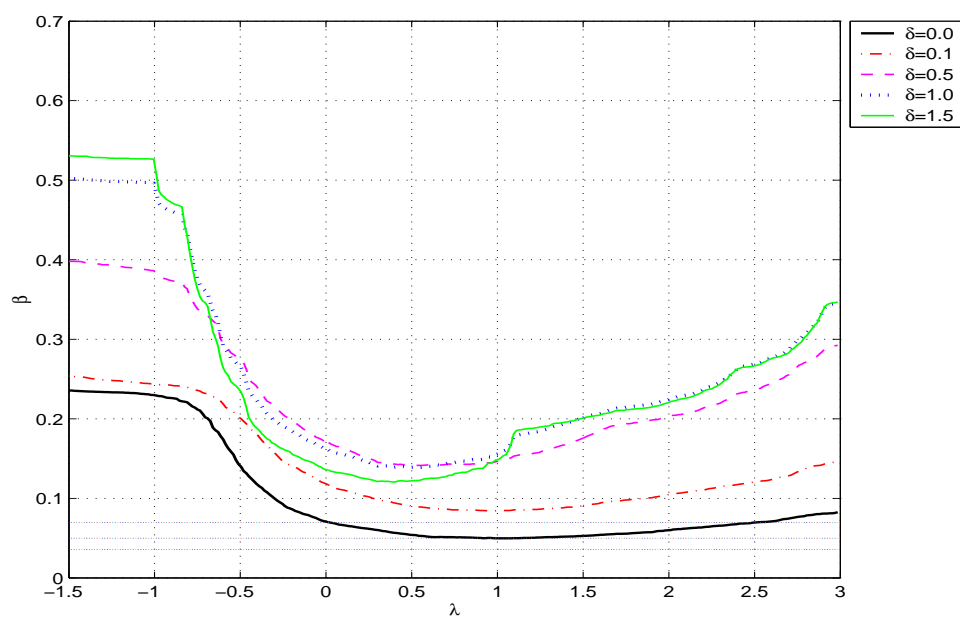


Figura 5.2: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 1 de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

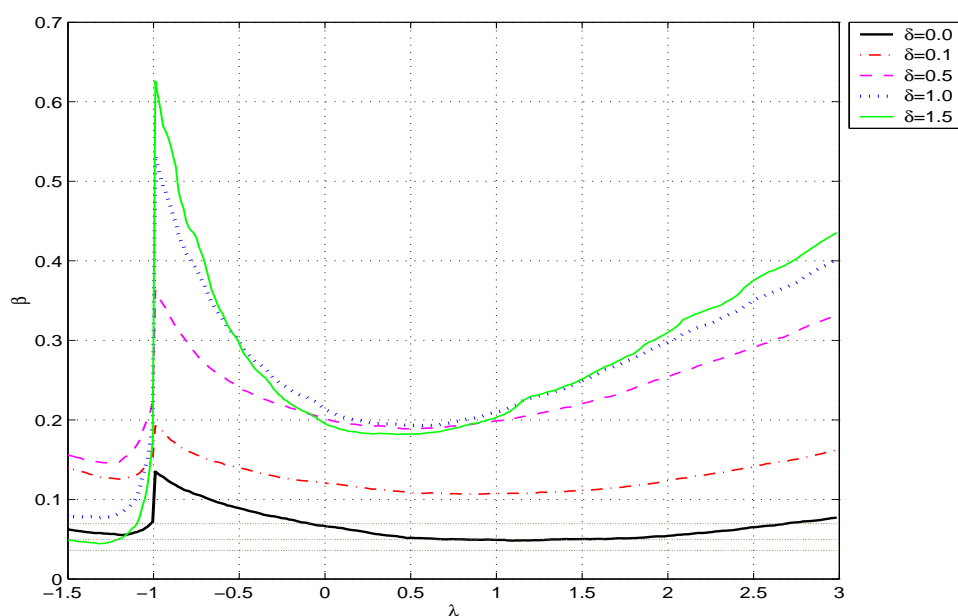


Figura 5.3: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 2 de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

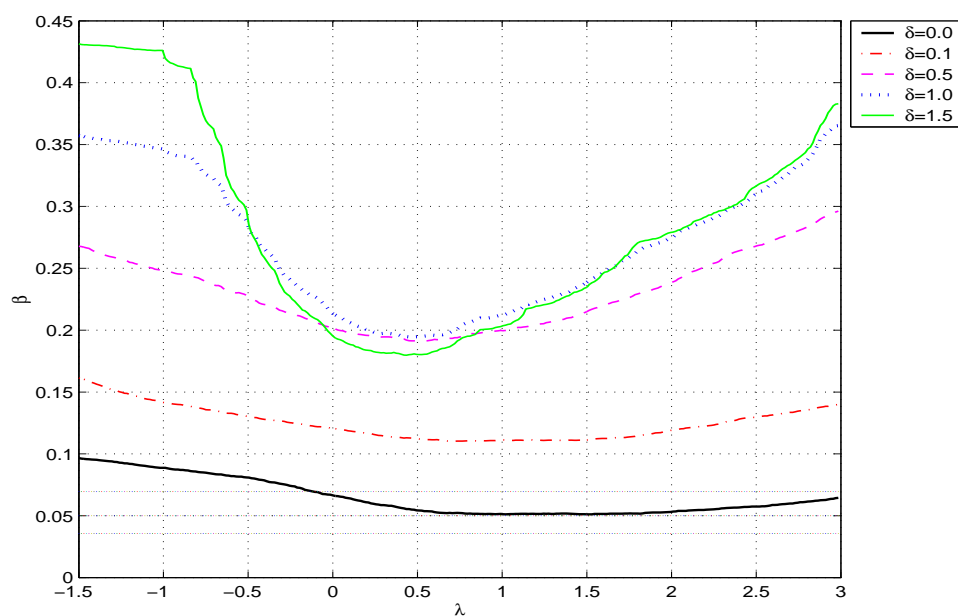


Figura 5.4: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 2 de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

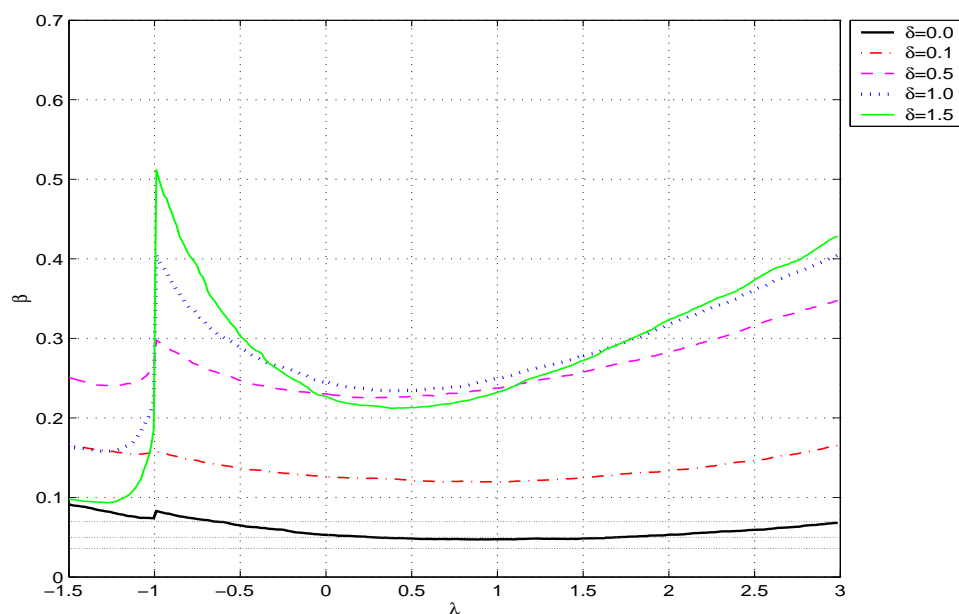


Figura 5.5: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 3 de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

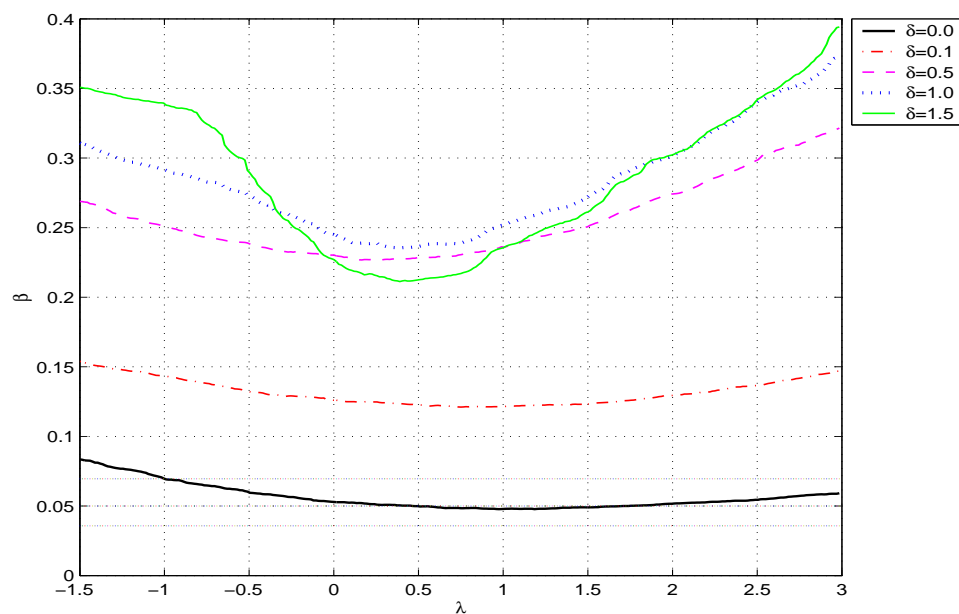


Figura 5.6: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 3 de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

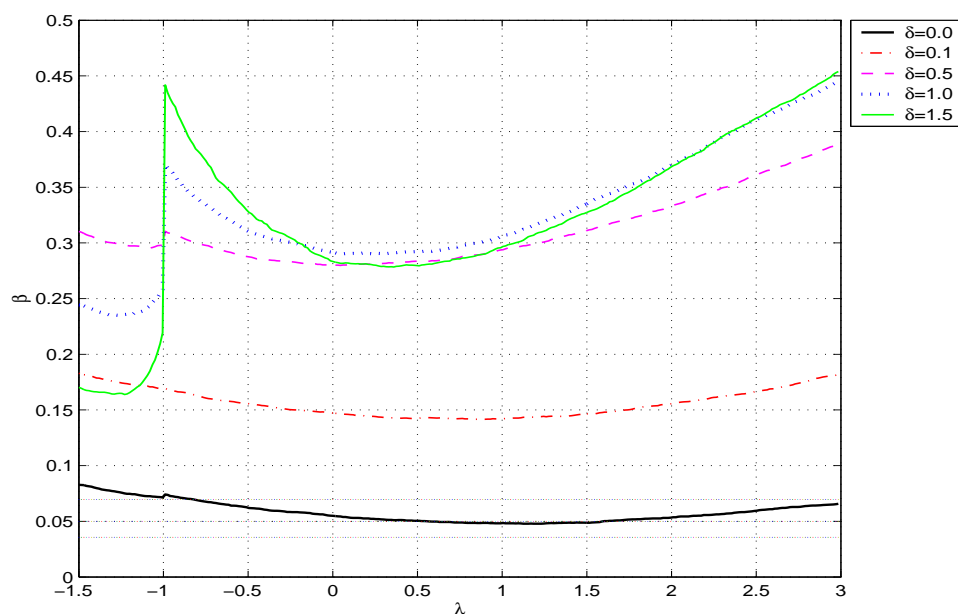


Figura 5.7: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 4 de la familia $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

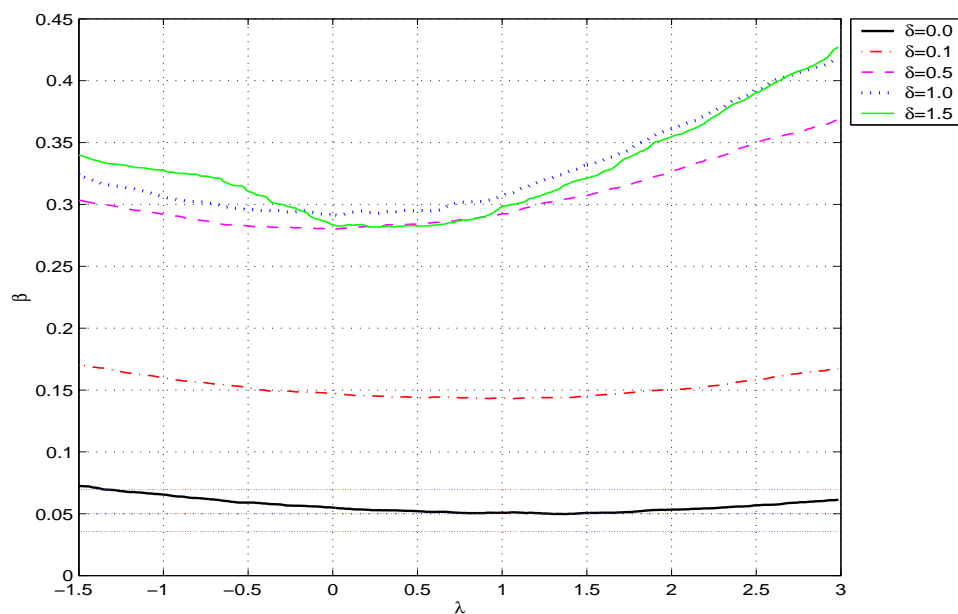


Figura 5.8: Niveles de significación y potencias simuladas para el Escenario 4 de la familia $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$.

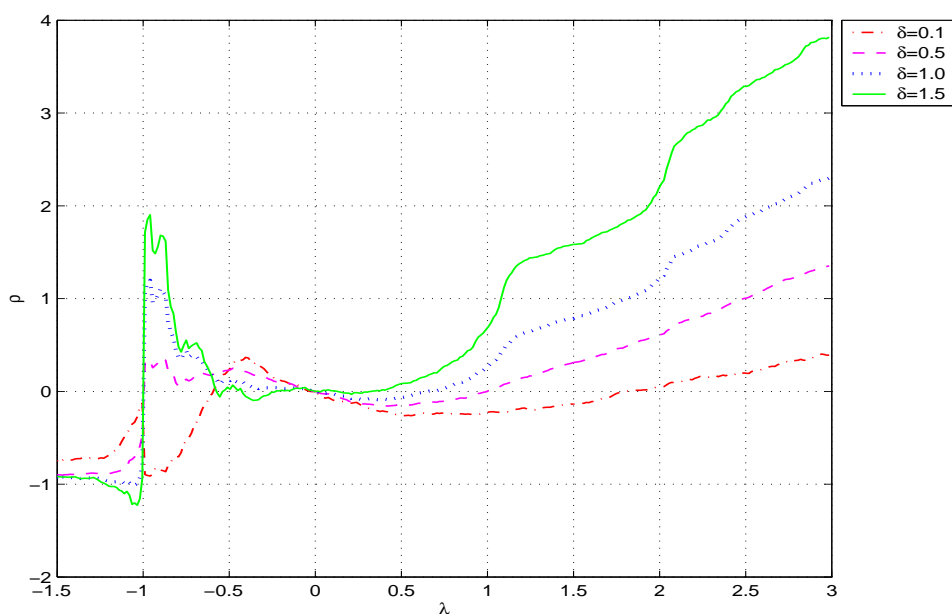


Figura 5.9: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 1.

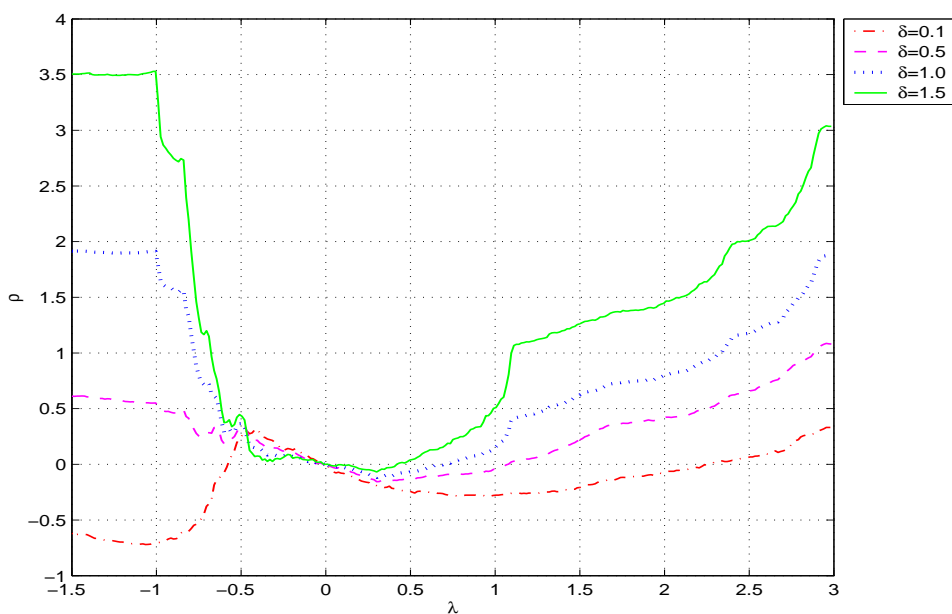


Figura 5.10: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 1.

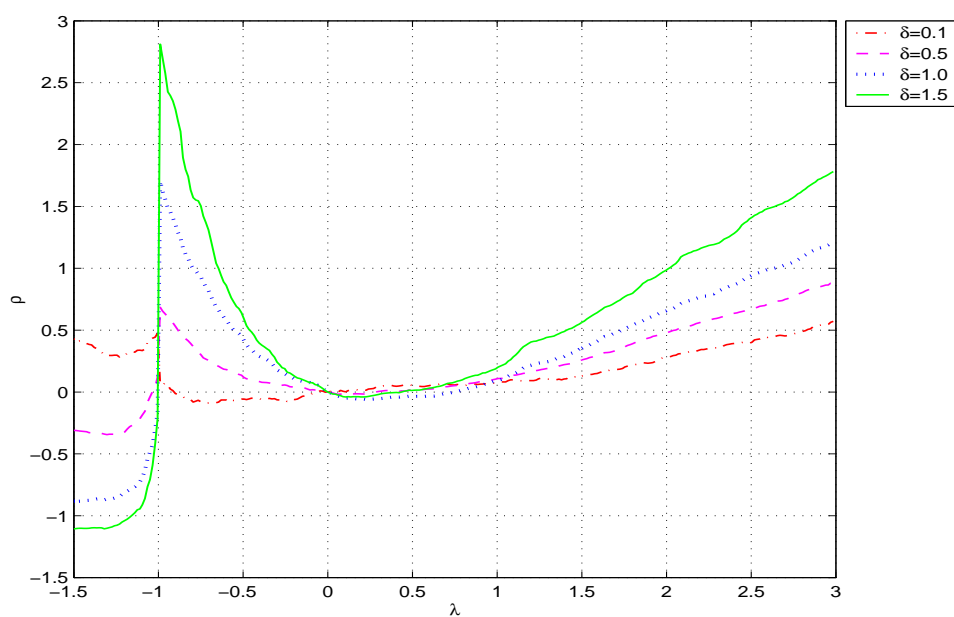


Figura 5.11: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 2.

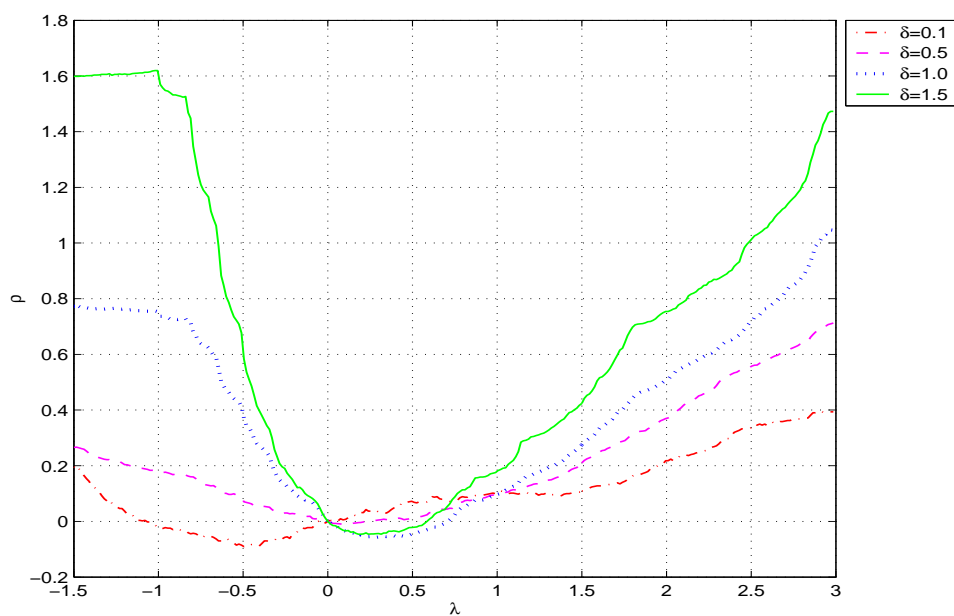


Figura 5.12: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 2.

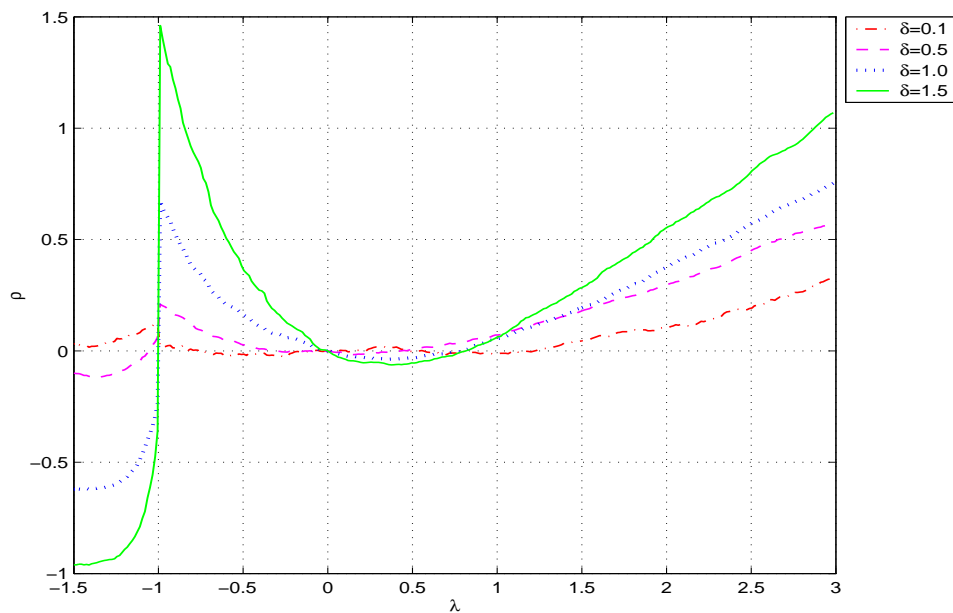


Figura 5.13: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 3.

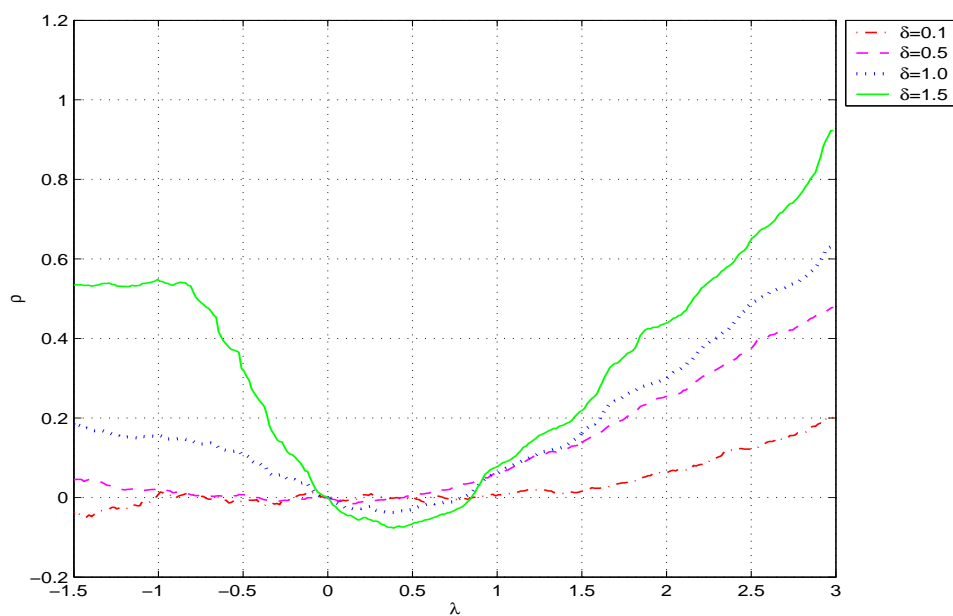


Figura 5.14: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 3.

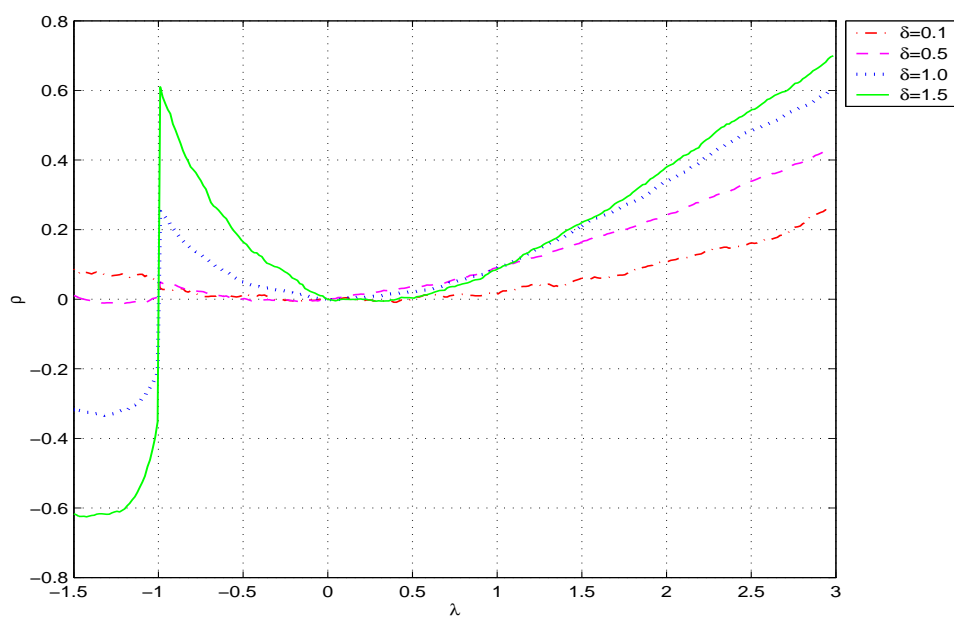


Figura 5.15: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 4.

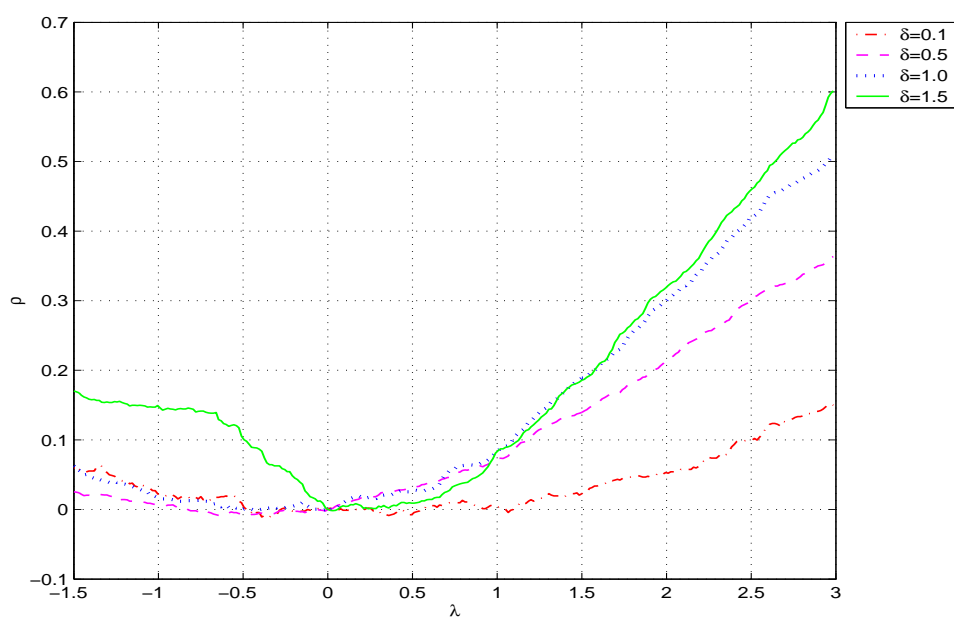


Figura 5.16: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a G^2 para el Escenario 4.

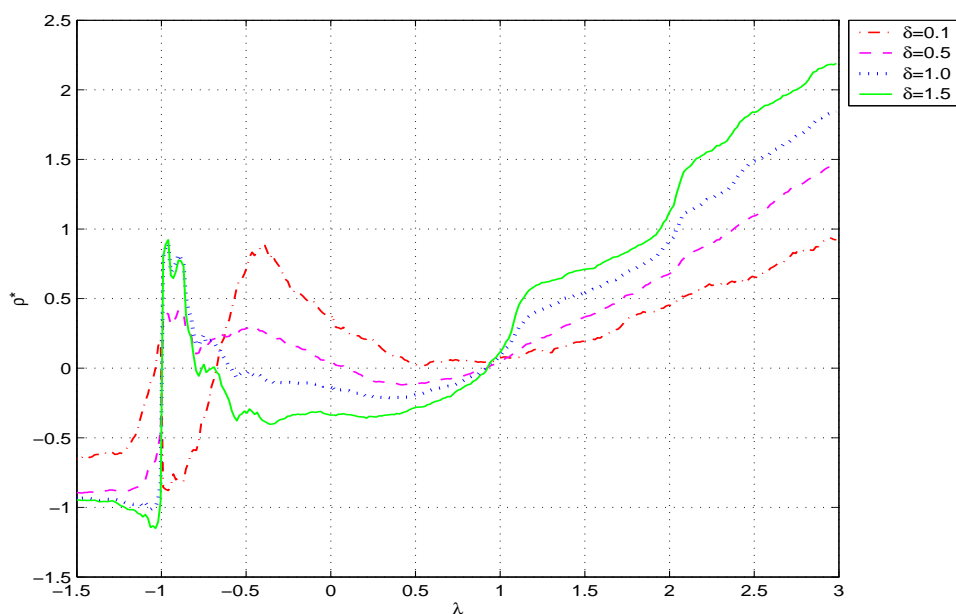


Figura 5.17: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 1.

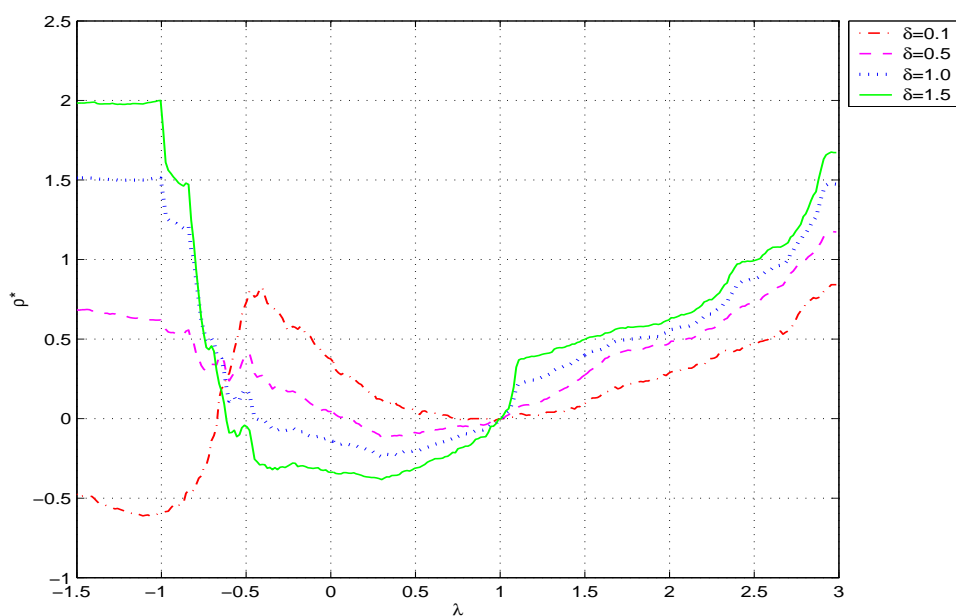


Figura 5.18: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 1.

En las Figuras 5.25-5.28 se muestran las potencias y las eficiencias relativas juntas.

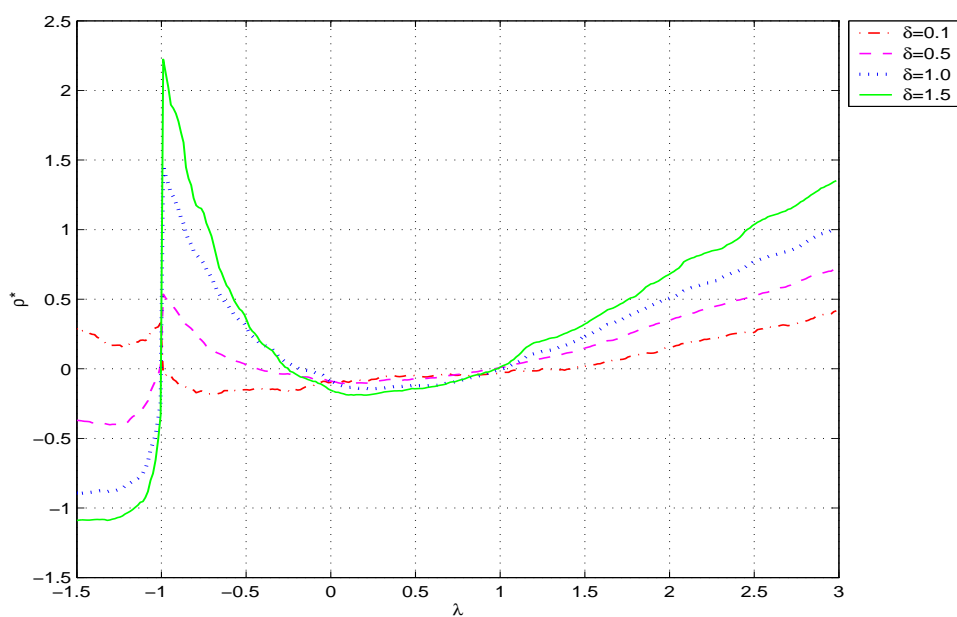


Figura 5.19: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 2.

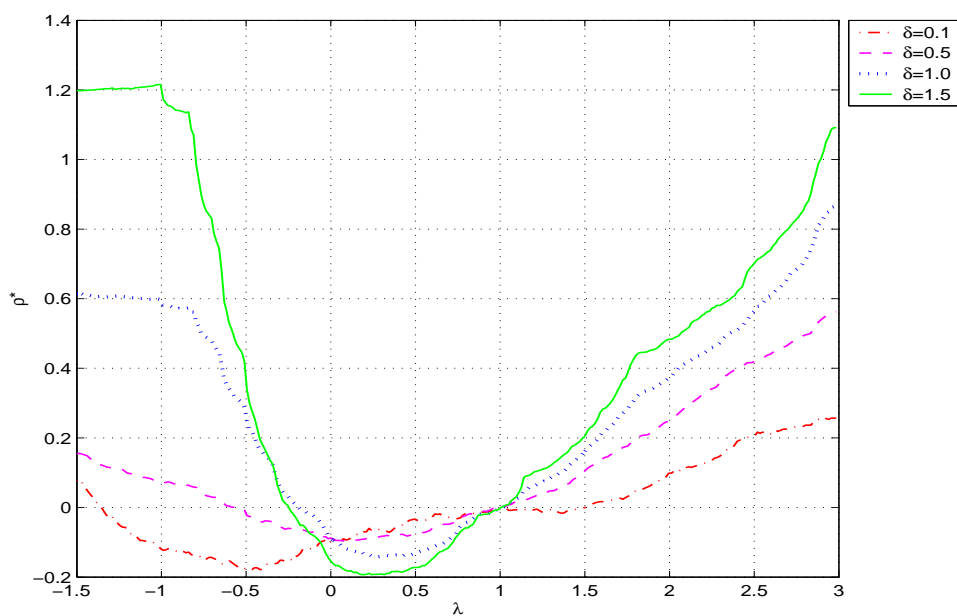


Figura 5.20: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 2.

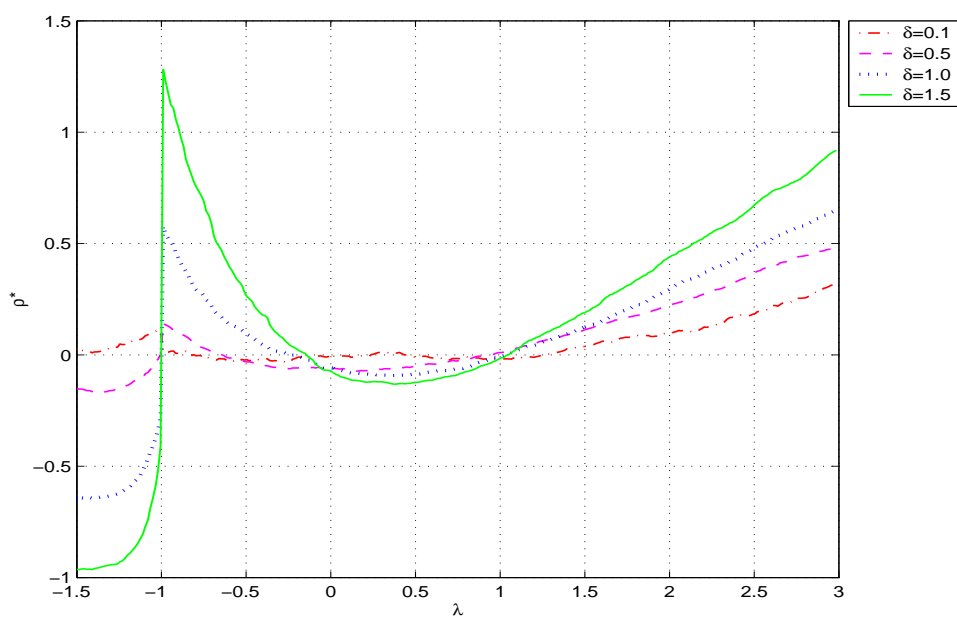


Figura 5.21: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{p}, \mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 3.

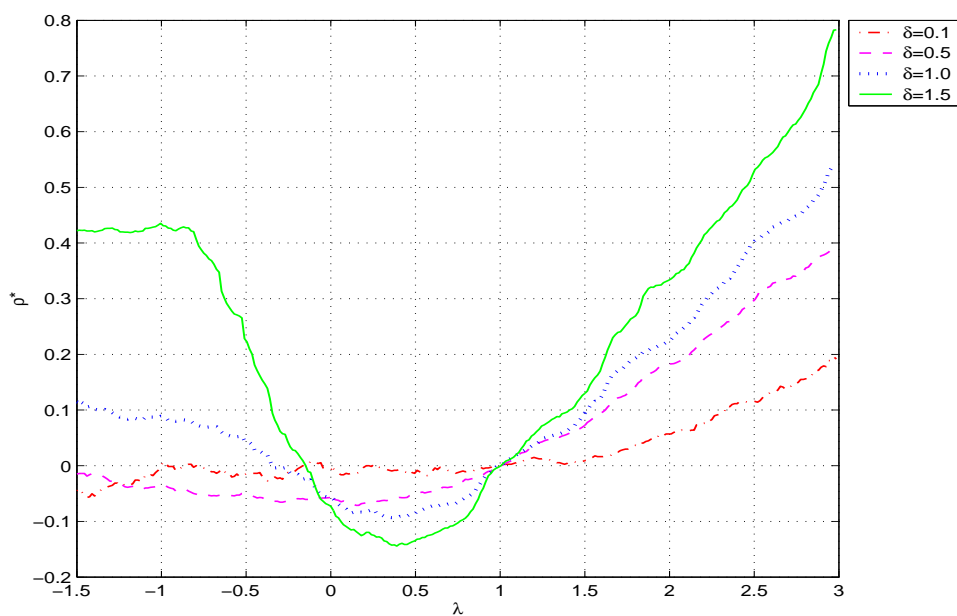


Figura 5.22: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\theta}), \mathbf{p}(\hat{\theta}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 3.

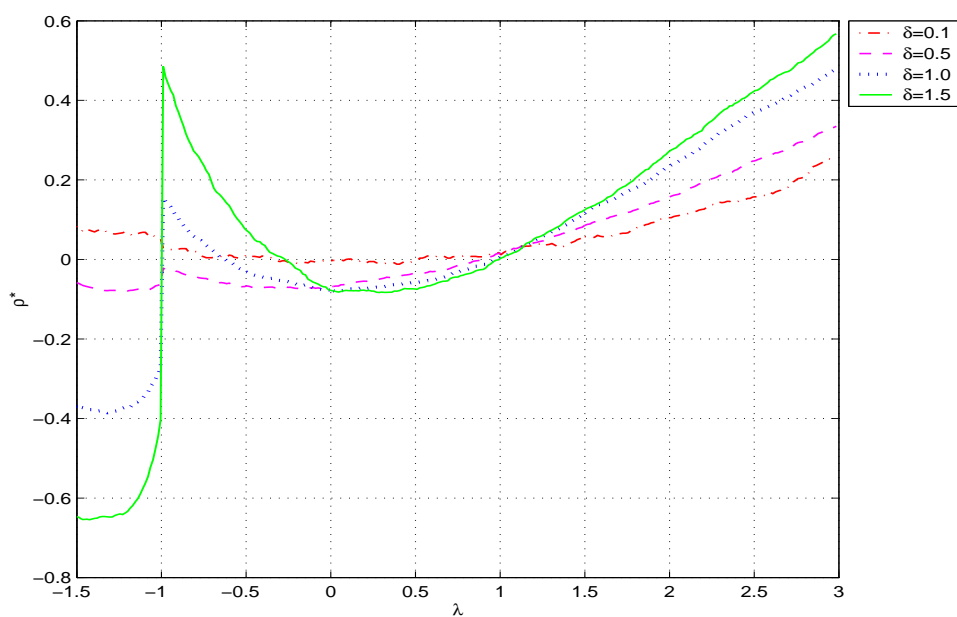


Figura 5.23: Eficiencias relativas de $\{T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 4.

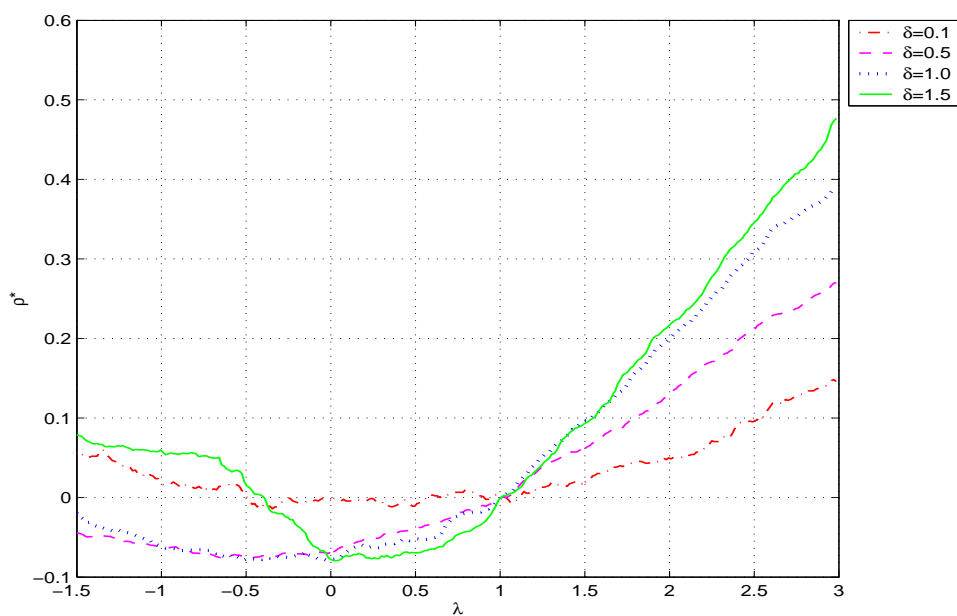


Figura 5.24: Eficiencias relativas de $\{S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\}_{\lambda \in [-1.5, 3]}$ con respecto a X^2 para el Escenario 4.

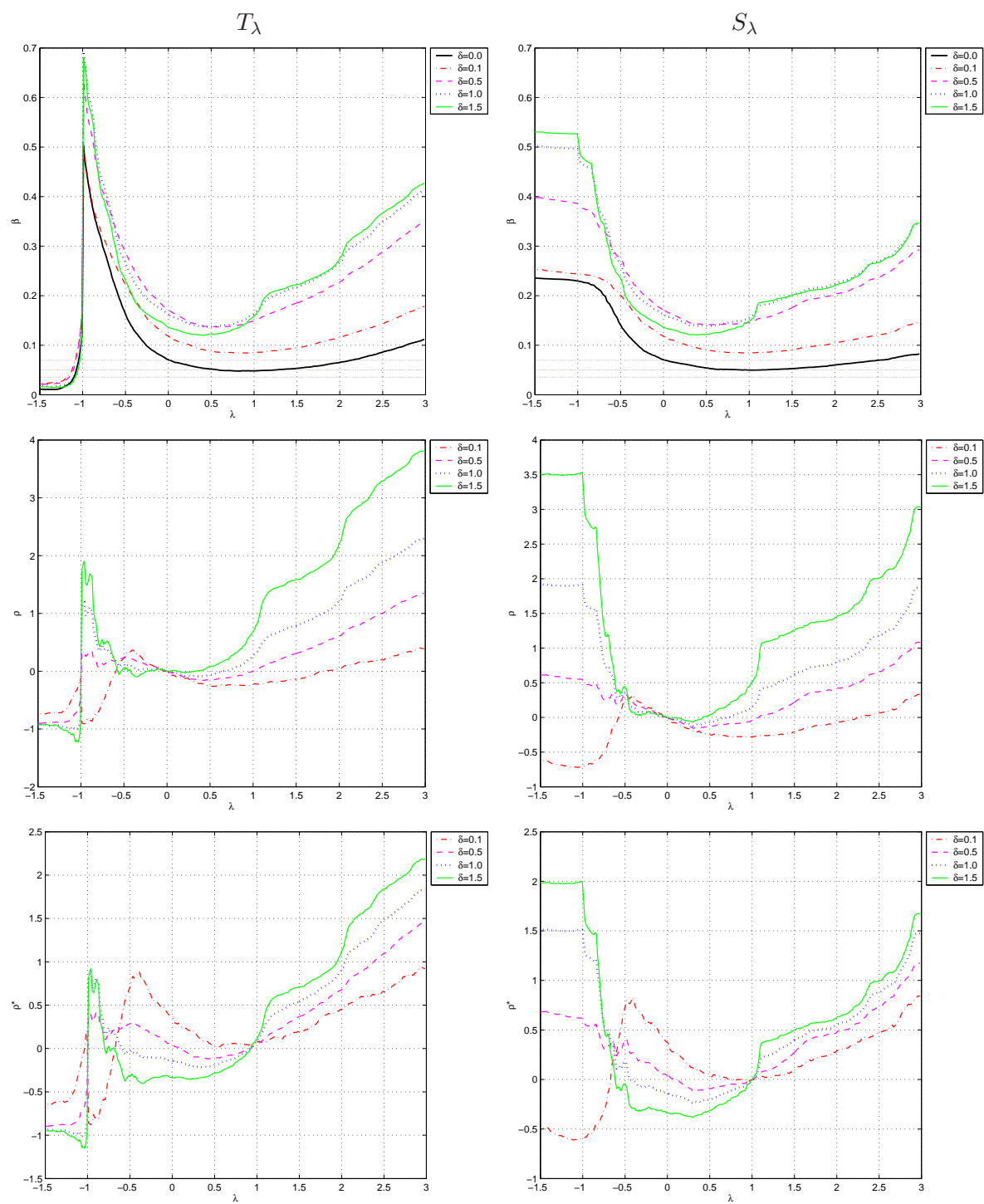


Figura 5.25: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario 1.

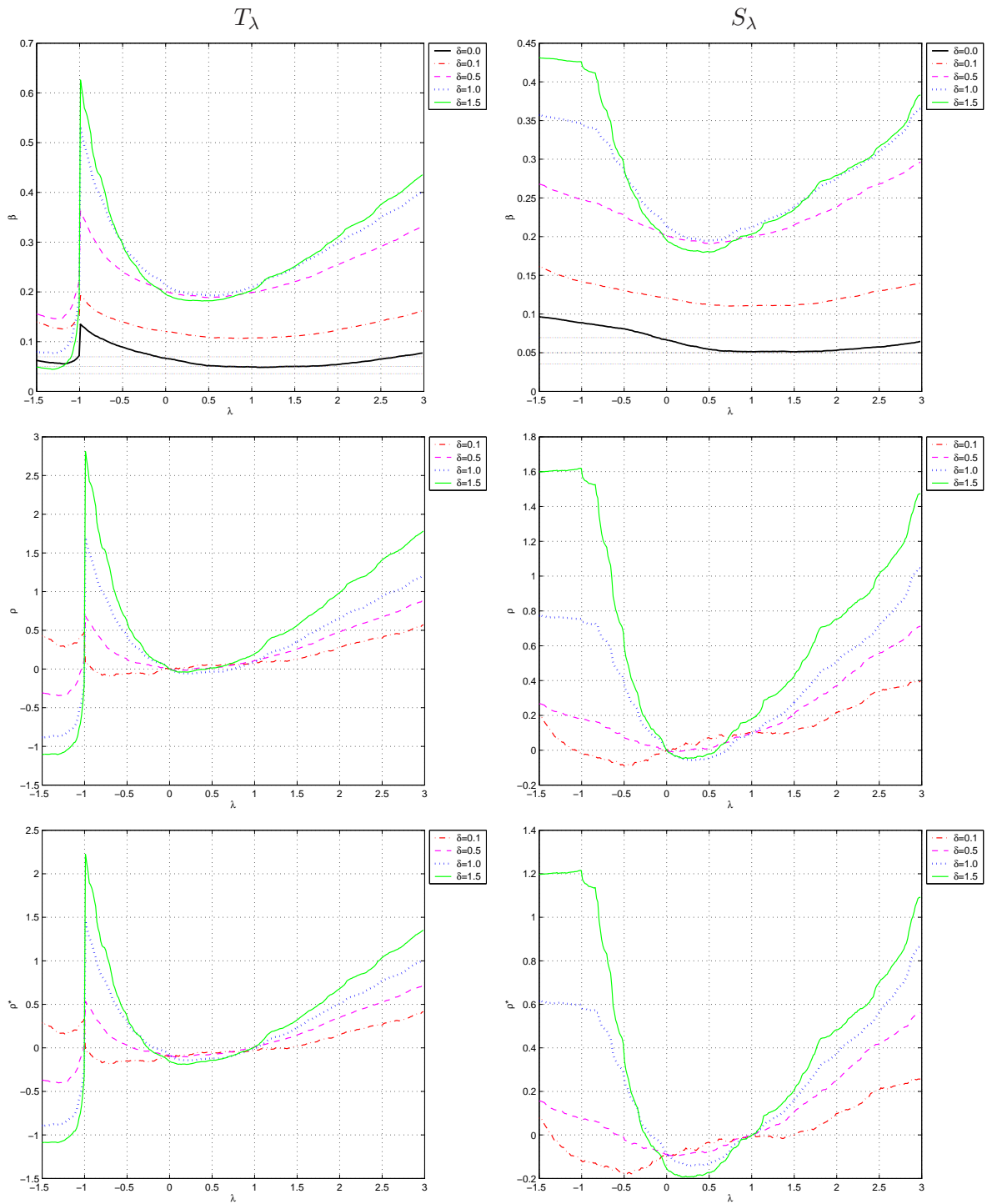


Figura 5.26: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario 2.

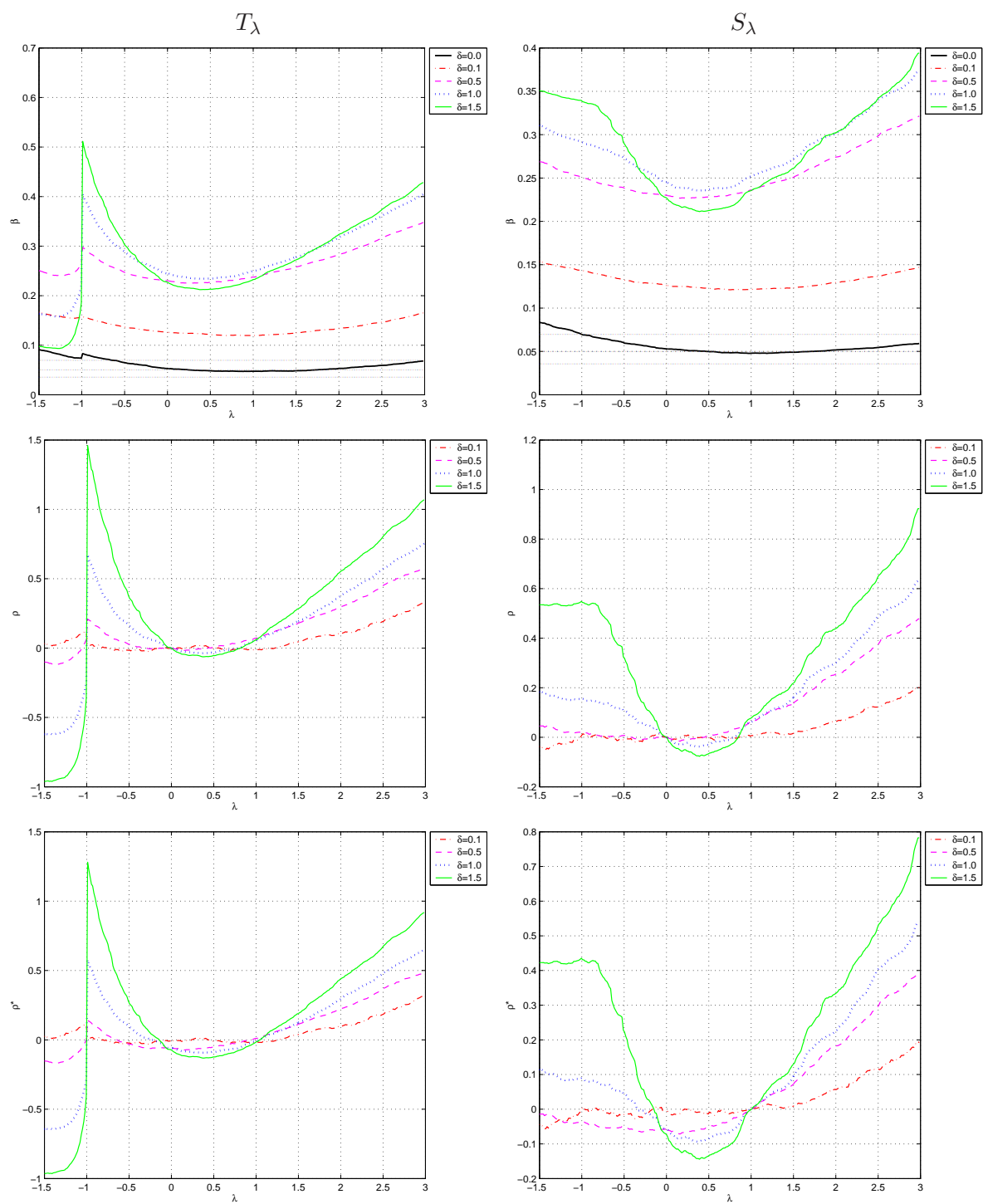


Figura 5.27: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario 3.

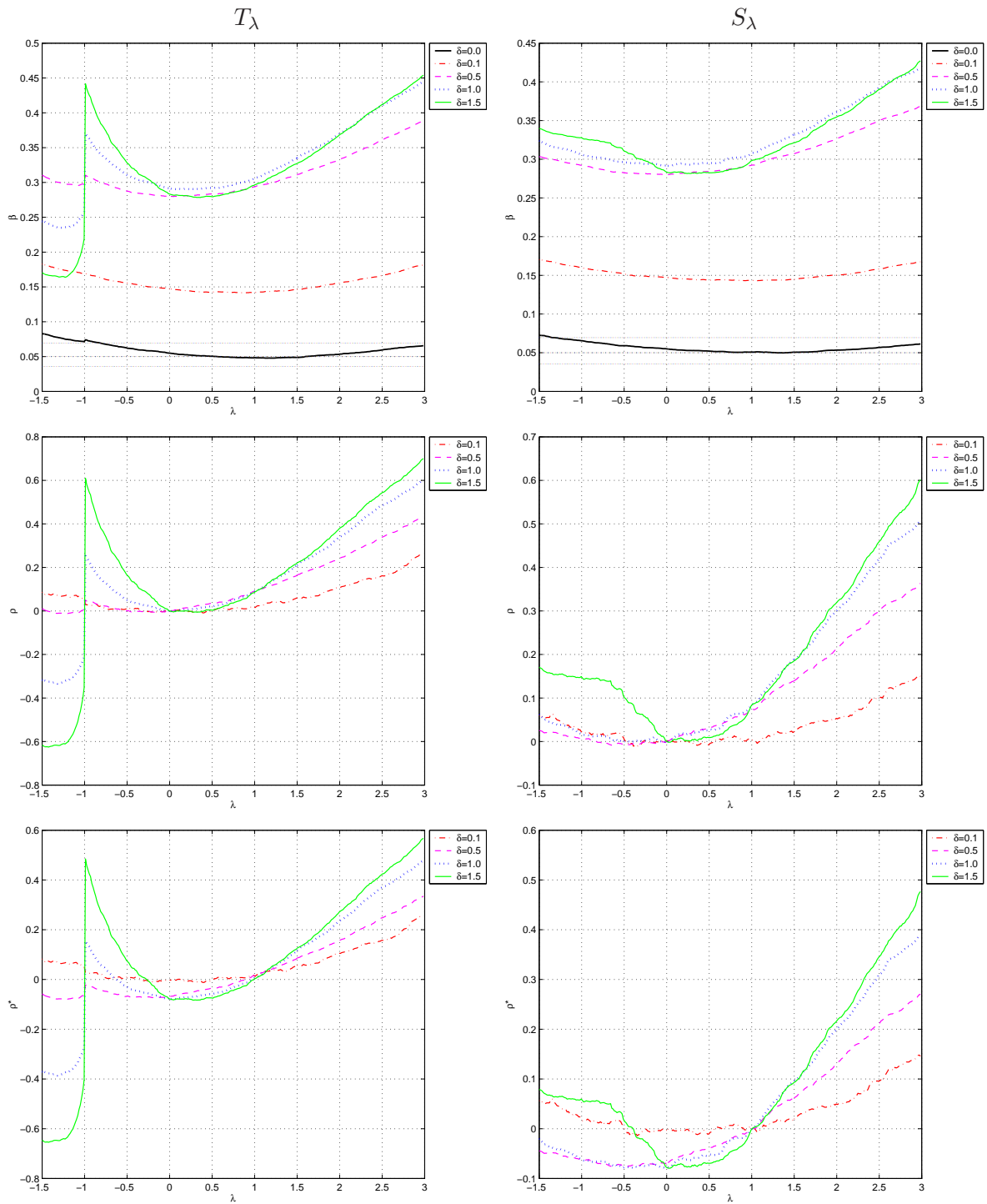


Figura 5.28: Potencias y eficiencias relativas para T_λ y S_λ en el Escenario 4.

5.6. Conclusiones del estudio de simulación

En esta sección se analizan las gráficas obtenidas en el estudio de simulación para el ejemplo considerado en este Capítulo. Teniendo en cuenta la primera fila de las gráficas que representa las potencias para los estadísticos $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ para valores de $\lambda \in [-1.5, 3]$ en las Figuras 5.25-5.28, se puede concluir fácilmente que algunos de los estadísticos que se plantean tienen mejor comportamiento en cuanto a la potencia que los clásicos estadísticos mencionados anteriormente.

Para todos los escenarios considerados (1-4) se observa un perfil similar al representar gráficamente la curva de potencia $\hat{\beta}_T$, para $\lambda \in (-1, 3)$. Se puede apreciar que para los valores de $\lambda \in (-1, 3)$, la curva de potencia $\hat{\beta}_T$ tiene forma de U. Es decir, los valores más altos de la potencia corresponden a los extremos del intervalo, por lo tanto los estadísticos para estos valores de λ en los extremos del intervalo tendrán mayor potencia que los clásicos estadísticos mencionados anteriormente, el estadístico del cociente de verosimilitudes ($G^2 = T_0(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) y el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson ($X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$), por lo tanto, existen estadísticos que tienen mejor comportamiento que los clásicos en cuanto a la potencia.

El estadístico del cociente de verosimilitudes tiene un mal comportamiento en relación con el nivel de significación estimado, y teniendo en cuenta los niveles de significación simulados, el estudio se restringe al intervalo $(0, 2]$. El estadístico de Cressie-Read ($T_{2/3}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) y el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson ($X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) muestran un buen comportamiento con respecto al nivel de significación simulado puesto que es muy próximo al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

En cuanto a las eficiencias locales con respecto a G^2 y X^2 , ρ_T y ρ_T^* , $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ con λ próximo a 2 tienen valores altos ya que sus potencias son mayores en comparación con $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ con λ próximo a 0. Para λ cercano a 2, los valores de ρ_T son ligeramente superiores en comparación con ρ_T^* . Teniendo en cuenta las gráficas, se concluye que T_2 y S_2 tienen claramente el mejor comportamiento para tamaños muestrales moderados (Escenarios 3 y 4) y para tamaños muestrales pequeños (Escenarios 1 y 2). Los mismos estadísticos tienen un buen comportamiento para ρ_T y ρ_T^* , sin embargo con el estadístico de Cressie-Read ($T_{2/3}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) y el estadístico de la ji-cuadrado de Pearson ($X^2 = S_1(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$) se obtuvieron unos niveles de significación simulados mejores que para el resto de estadísticos.

En este Capítulo se han propuesto y estudiado dos nuevas familias de estadísticos de contraste, útiles para contrastar si existe homogeneidad entre I muestras multinomiales independientes, o por el contrario existe ordenación de verosimilitud. Su distribución asintótica, ji-barra cuadrado, es común, con pesos fáciles de estimar, mediante la matriz $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, y tienen una sencilla interpretación en términos de la modelización loglineal. Dos algoritmos proporcionan el procedimiento para computar la estimación de los pesos y los p -valores asintóticos de los estadísticos. En la literatura solamente se ha considerado el estadístico del cociente de verosimilitudes y la ordenación de razón de verosimilitudes, usando técnicas asintóticas. El estudio de simulación realizado muestra que este estadístico tiene un comportamiento bastante pobre para tamaños muestrales pequeños y se concluye que es mejor utilizar otros estadísticos de contraste como $T_\lambda(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ y $S_\lambda(\mathbf{p}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$ con $\lambda = 2$.

Capítulo 6

Algunas extensiones y trabajos futuros

En el Capítulo primero se han introducido una serie de “odd ratios” asociados a distintos órdenes, sin embargo en la literatura se han considerado muchos otros dependiendo del problema bajo consideración. A lo largo de la presente memoria se ha considerado el orden estocástico del cociente de verosimilitudes por ser el más apropiado en el contexto en el que se ha desarrollado la memoria.

Desde un punto de vista analítico, como se ha visto a lo largo de la memoria, tiene la ventaja que los “odds ratios” asociados, a través de la parametrización que proporcionan los modelos loglineales, se podían escribir como restricciones lineales de parámetros del modelo loglineal considerado. Sin embargo para todos los distintos tipos de odds ratios existentes no es posible una expresión directa a través de los modelos loglineales que conduzcan a restricciones lineales sobre los parámetros de interés (como se ha modelizado el orden estocástico del cociente de verosimilitudes).

Siendo la $I \times J$ la dimensión de la tabla de contingencia bidimensional bajo estudio y $S(i, j)$ un conjunto de índices de una subtabla de contingencia 2×2 igual a $\{i, i + 1\} \times \{j, j + 1\}$, los *odds ratios generalizados* se pueden definir como

$$\vartheta_{\ell}^{+} = \prod_{s \in S(\ell)} \left(\sum_{h \in \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\}} c_{hs} p_h \right)^{k_s}, \quad \ell \in R = \{1, \dots, I - 1\} \times \{1, \dots, J - 1\}, \quad (6.1)$$

donde c_{hs} y k_s , $h \in \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\}$, $s \in S(\ell)$, son unas constantes conocidas y $p_s = P(X = i, Y = j)$, la probabilidad conjunta de la celda $s = (i, j)$. Obsérvese que para el caso

concreto del orden estocástico del cociente de verosimilitudes, $S(i, j) = \{i, i + 1\} \times \{j, j + 1\}$, $k_{(i,j)} = k_{(i+1,j+1)} = 1$, $k_{(i,j+1)} = k_{(i+1,j)} = -1$, $c_{hs} = I(h = s)$, siendo $I(\bullet)$ una función indicatriz.

Sea $\boldsymbol{\vartheta}^+$ el vector de ϑ_ℓ^+ , $\ell \in R$ ordenado lexicográficamente. Los *log-odds ratios generalizados*, $\boldsymbol{\theta} = \log \boldsymbol{\vartheta}^+$, se pueden expresar matricialmente como

$$\mathbf{K} \log(\mathbf{C}^T \mathbf{p}), \quad (6.2)$$

donde \mathbf{K} es una matriz $r \times t$ denominada “de contraste” porque sus filas suman cero ($\mathbf{K}\mathbf{1}_t = \mathbf{0}_r$), con $r = \text{card}(R) = (I - 1)(J - 1)$, $t = \text{card}(S(i, j))\text{card}(R) = 4(I - 1)(J - 1)$, y \mathbf{C} es una matriz de constantes $IJ \times t$ denominada “de marginalización”. Los espacios paramétricos de los modelos anidados correspondientes a las desigualdades de los log Odds Ratios Generalizados a partir de los modelos (6.1) pueden definirse como

$$\Theta_2 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{IJ} : \mathbf{1}_{IJ}^T \mathbf{p} = 1\}, \quad (6.3)$$

$$\Theta_1 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{IJ} : \mathbf{1}_{IJ}^T \mathbf{p} = 1, \quad \mathbf{K} \log(\mathbf{C}^T \mathbf{p}) \geq \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}\}, \quad (6.4)$$

$$\Theta_0 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{IJ} : \mathbf{1}_{IJ}^T \mathbf{p} = 1, \quad \mathbf{K} \log(\mathbf{C}^T \mathbf{p}) = \mathbf{0}_{(I-1)(J-1)}\}, \quad (6.5)$$

siendo Θ_0 equivalente al modelo de independencia.

Con el fin de clarificar el modelo (6.2) se modelizarán los odds ratios de razón de verosimilitudes (ϑ_{ij}^L) y los de tipo Global (ϑ_{ij}^G). A tal fin se introducirá la siguiente notación para todo i, j, k y l tales que $i \in \{1, \dots, I - 1\}$, $j \in \{1, \dots, J - 1\}$; $k \in \{1, \dots, I\}$, y $l \in \{1, \dots, J\}$:

$$q_{kl}^L(i, j) = \begin{cases} 1, & k = i, l = j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad r_{kl}^L(i, j) = \begin{cases} 1, & k = i, l = j + 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$s_{kl}^L(i, j) = \begin{cases} 1, & k = i + 1, l = j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad t_{kl}^L(i, j) = \begin{cases} 1, & k = i + 1, l = j + 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases};$$

$$q_{kl}^G(i, j) = \begin{cases} 1, & k \leq i, l \leq j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad r_{kl}^G(i, j) = \begin{cases} 1, & k \leq i, l > j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$s_{kl}^G(i, j) = \begin{cases} 1, & k > i, l \leq j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad t_{kl}^G(i, j) = \begin{cases} 1, & k > i, l > j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Sea $\mathbf{Q}^\bullet(i, j)$ la matriz cuyo elemento (k, l) viene dado por $q_{kl}^\bullet(i, j)$, siendo \bullet bien L o bien G. Análogamente se definen las matrices $\mathbf{R}^\bullet(i, j)$, $\mathbf{S}^\bullet(i, j)$ y $\mathbf{T}^\bullet(i, j)$. Sea \mathbf{q}_{ij}^\bullet el vector IJ -dimensional cuyos elementos $q_{kl}^{(h)}(i, j)$, están ordenados lexicográficamente según (k, l) , es decir $\mathbf{q}_{ij}^\bullet = \text{vec}(\mathbf{Q}^\bullet(i, j)^T)$, y sea \mathbf{Q}^\bullet la matriz de dimension $IJ \times (I-1)(J-1)$ cuyas columnas, \mathbf{q}_{ij}^\bullet , están ordenadas lexicográficamente según (i, j) , es decir $\mathbf{Q}^\bullet = (\mathbf{q}_{11}^\bullet, \mathbf{q}_{12}^\bullet, \dots, \mathbf{q}_{I-1, J-2}^\bullet, \mathbf{q}_{I-1, J-1}^\bullet)$. Análogamente se definen las matrices $\mathbf{R}^\bullet, \mathbf{S}^\bullet, \mathbf{T}^\bullet$. Con esta notación se tiene $\mathbf{C} = (\mathbf{Q}^\bullet, \mathbf{R}^\bullet, \mathbf{S}^\bullet, \mathbf{T}^\bullet)$ y $\mathbf{K} = (\mathbf{I}_{(I-1)(J-1)}, -\mathbf{I}_{(I-1)(J-1)}, -\mathbf{I}_{(I-1)(J-1)}, \mathbf{I}_{(I-1)(J-1)})$.

Es importante señalar que la formulación (6.2) no solamente es válida para las probabilidades conjuntas, \mathbf{p} , sino que puede utilizarse también con las probabilidades condicionadas, bien $\pi^{X|Y}$ ó $\pi^{Y|X}$. Para todos los órdenes estocásticos definidos en el primer capítulo de esta memoria, ambas probabilidades condicionadas generan condiciones equivalentes, sin embargo existen órdenes estocásticos monótonos para los que la equivalencia no se verifica. En tales órdenes, se puede estudiar la dependencia de X condicionada para valores de Y y la de Y condicionada para valores de X separadamente, y también las denominadas dependencias dobles que considera a ambas simultáneamente. Una hipótesis de dependencia doble establece que tanto la distribución condicionada de X sobre Y y la de Y sobre X están ordenadas de acuerdo a un criterio estocástico que sea coherente con el orden de las categorías de la variable condicionante. En dicho caso los $(I-1)(J-1)$ log odds ratios se pueden expresar matemáticamente también como (6.2)

$$\mathbf{K} = \bigoplus_{i=1}^2 \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{C} = \bigoplus_{i=1}^2 \mathbf{C}_i, \quad (6.6)$$

siendo \mathbf{K}_1 la matriz de contrastes, \mathbf{C}_1 una matriz de marginalización para la distribución condicionada de X sobre Y , \mathbf{K}_2 la matriz de contrastes y \mathbf{C}_2 una matriz de marginalización para la distribución condicionada de Y sobre X .

Estas ideas permitirían seguir avanzando en la dirección expuesta en la presente memoria y con toda seguridad permitirá obtener resultados de interés.

El hecho de que la presente memoria se haya centrado en tablas de contingencia bidimensionales con muestreo multinomial o producto multinomial no supone en sí una limitación sino que constituyen un punto de partida para su extensión a tablas multidimensionales y otros tipos de muestreo. En Molenberghs y Lesaffre (1999) se presenta el marco teórico necesario para la extensión a tablas multidimensionales a partir de los denominados *odds ratios marginales*. En Lang (2004) se presenta un modelo que trata conjuntamente varios tipos de muestreo, entre los que se encuentra el muestreo de Poisson, que permite estudiar restricciones de igualdad sobre los odds ratios. La versión con restricciones de desigualdad obtenida como extensión se

encuentra implementada en Cazzaro y Colombi (2009). En Agresti y Coull (1998a), y también en los trabajos que se acaban de mencionar, pueden verse algunos ejemplos de aplicación de ambas extensiones. En concreto, en la Sección 4 de Agresti y Coull (1998) se estudia una tabla tridimensional mientras que en la Sección 5 se considera un muestreo producto multinomial. Esta es otra línea que queda abierta para su desarrollo en los próximos meses.

Bibliografía

- [1] AGRESTI, A.; COULL, B.A. (1998). An empirical comparison of inference using a order-restricted and linear logit models for a binary response. *Communications in Statistics (Simulation)*, **27**, 147-166.
- [2] AGRESTI, A.; COULL, B. A. (1998a). Order-restricted inference for monotone trend alternatives in contingency tables. *Computational Statistics and Data Analysis*, **28**, 139-155.
- [3] ARMITAGE, P. (1955). Tests for Linear Trends in Proportions and Frequencies. *Biometrics*, **11**, 375-386.
- [4] BAPAT, R.B.; KOCHAR, S.C. (1994). On Likelihood-Ratio Ordering of Order Statistics. *Matrix algebra and its applications*, **199**, 281-291.
- [5] BARLOW, R.E.; BARTHOLOMEW, D.J.; BRUNK, H.D. (1972). *Statistical inference under order restrictions*. Wiley.
- [6] BARTHOLOMEW, D.J. (1959). A test of homogeneity for ordered alternatives. *Biometrika*, **46**, 36-48.
- [7] BARTHOLOMEW, D.J. (1961). Ordered tests in the analysis of variance. *Biometrika*, **48**, 325-332.
- [8] BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms* (3rd Edition). John Wiley and Sons.
- [9] BISHOP, Y.M.M.; FIENBERG, S.E.; HOLLAND, P.H. (1975). *Discrete Multivariate Analysis. Theory and Practice*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [10] CAZZARO, M.; COLOMBI, R. (2009). *Multinomial-Poisson models subject to inequality constraints*. *Statistical Modelling*. **9(3)**, 215-233.
- [11] CHRISTENSEN, R. (1997). *Log-linear models and logistic regression*. Springer.
- [12] COCHRAN, W.G. (1954). Some Methods for Strengthening the Common χ^2 Tests. *Biometrics*, **10**, 417-451.

- [13] COX, D.R. (1957). Note on Grouping. *Journal of the American Statistical Association*, **52**, 543-547.
- [14] COX, D.R. (1970). *Analysis of Binary Data*. Methuen, London.
- [15] CRESSIE, N.; READ, T.R.C. (1984). Multinomial goodness-of-fit tests. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **46**, 440-464.
- [16] CRESSIE, N.; PARDO, L. (2002). Phi-divergence statistics. *Encyclopedia of Environmetrics* (A. H. Elshaarawi and W. W. Piegorsch, Eds.). Volume 3, 1551-1555, John Wiley and Sons, New York.
- [17] CRESSIE, N.; PARDO, L. (2002). Model checking in loglinear models using ϕ -divergences and MLEs. *Journal of statistical planning and inference*, **103**, 437-453.
- [18] CRESSIE, N.; PARDO, L. (2003). Minimum phi-divergence estimator and hierarchical testing in loglinear models. *Statistica Sinica*, **10**, 867-884.
- [19] CRESSIE, N.; PARDO, L.; PARDO, M.C. (2003). Size and power considerations for testing loglinear models using ϕ -divergence test statistics. *Statistica Sinica*, **13**, 550-570.
- [20] DALE, J.R. (1986). Asymptotic normality of goodness-of-fit statistics for sparse product multinomials. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 48-59.
- [21] DARDANONI, V.; FORCINA, A. (1998). A Unified Approach to Likelihood Inference on Stochastic Orderings in a Nonparametric Context. *Journal of American Association*, **93**, 1112-1123.
- [22] DAVIDOV, O.; FOKIANOS, K.; ILIOPOULOS, G. (2010). Order-Restricted Semiparametric Inference for the Power Bias Model. *Biometrics* **66**, 549-557.
- [23] DOLL, R.; PYGOTT, F. (1952). Factors influencing the rate of healing of gastric ulcers. *Lancet*, **259**, 171-175.
- [24] DOUGLAS, R.; FIENBERG, S.E. (1990). An overview of dependency models for cross-classified categorical data involving ordinal variables. *Topics in Statistical Dependence* (H.W. Block, A.R. Sampson, T.H. Savits, eds.), *IMS Lecture Notes/Monograph Series*. Hayward, CA.
- [25] DOUGLAS, R.; FIENBERG, S.E.; SAMPSON, A.R.; WHITACKER, L.R. (1990). Positive dependence concepts for ordinal contingency tables. *Topics in Statistical Dependence* (H.W. Block, A.R. Sampson, T.H. Savits, eds.), *IMS Lecture Notes/Monograph Series*. Hayward, CA.
- [26] DYKSTRA, R.L. (1983). An algorithm for restricted least squares regression. *J. Am. Statist. Assoc.*, **78**, 837-842.
- [27] DYKSTRA, R.L.; ROBERTSON, T. (1982). An algorithm for isotonic regression for two or more independent variables. *Ann. Statist.*, **10**, 708-716.

- [28] DYKSTRA, R.L.; KOCBAR, S.; ROBERTSON, T. (1995). Inference for Likelihood Ratio Ordering in the Two-Sample Problem. *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 1034-1040.
- [29] FERGUSON, T.S. (1996). *A Course in Large Sample Theory*. Chapman & Hall.
- [30] FLEISS, J.L.; LEVIN, B.; PAIK, M.C. (2003). *Statistical Methods for Rates and Proportions*. Wiley Interscience.
- [31] GRAUBARD, B.I.; KORN, E.L. (1987). Choice of Column Scores for Testing Independence in Ordered $2 \times I$ Contingency Tables. *Biometrics*, **43**, 471-476.
- [32] HARVILLE, D.A. (2008). *Matrix algebra from a statistician's perspective*. Springer.
- [33] HELLINGER, E. (1909). Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **136**, 210-271.
- [34] HIRJI, K.F.; TANG, M.L. (1998). A comparison of Tests for Trend. *Communications in Statistics (Theory and Methods)*, **27**, 943-963.
- [35] KANG, S.; LEE, J. (2007). The size of the Cochran-Armitage trend test in $2 \times C$ contingency tables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 1851-1861.
- [36] KUDÔ, A. (1963). A multivariate analogue of the one-sided test. *Biometrika*, **50**, 403-418.
- [37] KUDÔ, A.; CHOI, J.R. (1975). A generalized multivariate analogue of the one sided test. *Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. A*, **29**, 303-328.
- [38] LANG, J.B. (1996). On the Comparison of Multinomial and Poisson Log-Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **58**, 253-266.
- [39] LANG, J.B. (2004). Multinomial-poisson homogeneous models for contingency tables. *Annals of Statistics*. *Annals of Statistics*, **32(1)**, 340-383.
- [40] LEHMANN, E.L. (1966). Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1137-1153.
- [41] LETIERCE, A.; TUBERT-BITTER, P.; KRAMAR, A.; MACCARIO, J. (2003). Two-treatment comparison based on joint toxicity and efficacy ordered alternatives in cancer trials. *Statistics in Medicine*, **22**, 859-868.
- [42] LEURAUD, K.; BENICHOU J. (2001). A comparison of several methods to test for the existence of a monotonic dose-response relationship in clinical and epidemiological studies. *Statistics in Medicine*, **20**, 3335-3351.
- [43] MANTEL, N. (1963). Chi-square Tests with one degree of freedom extensions of the Mantel-Haenszel procedure. *Journal of the American Statistical Association*, **58**, 690-700.
- [44] MANCUSO, J.Y.; AHAN, H.; CHEN, J.J. (2001). Order-restricted dose-related trend tests. *Statistics in Medicine*, **20**, 2305-2318.

- [45] MARTIN, N.; PARDO, L.(2006). Choosing the best phi-divergence goodness-of-fit statistic in multinomial sampling for loglinear models with linear constraints. *Kybernetika*, **42**, 711-722.
- [46] MARTIN, N.; PARDO, L.(2008a). New families of estimators and test statistics in log-linear models. *Journal of Multivariate Analysis*, **99**(8), 1590-1609.
- [47] MARTIN, N.; PARDO, L. (2008b). Phi-divergence estimators for loglinear models with linear constraints and multinomial sampling. *Statistical Papers*, **49**, 15-36
- [48] MARTIN, N.; PARDO, L. (2011). Fitting DNA sequences through log-linear modelling with linear constraints. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **45**, 605-621.
- [49] MARTIN, N.; PARDO, L. (2012). Poisson-loglinear modeling with linear constraints on the expected cell frequencies. *Sankhya B*, **74**(2), 238-267.
- [50] MARTIN, N.; BALAKRISHNAN, N. (2013). Hypothesis testing in a generic nesting framework for general distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **118**, 1-23.
- [51] MEHTA, C.R.; PATEL, N.R.; TSIATIS, A.A. (1984). Exact Significance Testing to Establish Treatment Equivalence with Ordered Categorical Data. *Biometrics*, **40**(3), 819-825.
- [52] MITCHELL, B.F.; DEMYANOV, V.F.; MALOZEMOV, V.N. (1974). Finding the point of a polyhedron closest to the origin. *SIAM J. Control*, **12**, 19-26.
- [53] MOLENBERGHS, G.; LESAFFRE, E. (1999). Marginal modelling of multivariate categorical data. *Statistics in Medicine*, **18**, 2237-2255.
- [54] NÜESCH, P.E. (1964). *Multivariate tests of location for restricted alternatives*. Doctoral dissertation, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich.
- [55] NÜESCH, P.E. (1966). On the problem of testing location in multivariate populations for restricted alternatives. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 113-119.
- [56] PARDO, L. (2006). *Statistical Inference Based on Divergence Measures*. Statistics series of Textbooks and Monographs. Chapman & Hall / CRC.
- [57] PARIS C.; THIERRY, S.; BROCHARD, P.; LETOURNEUX, M.; SCHORLE, E.; STOUFFLET, A.; AMEILLE, J.; CONSO, F.; PAIRON, J.C. (2009). Pleural plaques and asbestosis: dose- and time-response relationships based on HRCT data. *European Respiratory Journal*, **34**, 72-79.
- [58] SHAN, G.; MA, C. (2004). Unconditional tests for comparing two ordered multinomials. *Statistical Methods in Medical Research* (in Press). DOI: <http://dx.doi.org/10.1177/0962280212450957>
- [59] SEN, P.K.; SINGER, J.M.; PEDROSO DE LIMA, A.C. (2010). *From Finite Sample to Asymptotic Methods in Statistics*. Cambridge University Press.

- [60] SHAPIRO, A. (1985). Asymptotic Distribution of Test Statistics in the Analysis of Moment Structures Under Inequality Constraints. *Biometrika*, **72**, 133-144.
- [61] SHAPIRO, A. (1988). Toward a Unified Theory of Inequality Constrained Testing in Multivariate Analysis. *International Statistical Review*, **56**, 49-62.
- [62] SILVAPULLE, M.J.; SEN, P.K. (2005). *Constrained statistical inference. Inequality, order, and shape restrictions*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience (John Wiley & Sons).
- [63] RAO, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York: Wiley.
- [64] ROBERTSON, T.; WRIGHT, F.T.; DYKSTRA, R.L. (1988). *Order Restricted Statistical Inference*. New York: John Wiley & Sons.
- [65] TANG, M.L.; CHAN, P.S.; CHAN, W. (2000). On Exact Unconditional Test for Linear Trend in Dose-Response Studies. *Biometrical Journal*, **42**, 795-806.
- [66] TARONE, R.E.; GART, J.J. (1980). On the Robustness of Combined Test for Trends in Proportions. *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 110-116.
- [67] TEBBS, J.M.; BILDER, C.R. (2006). Hypothesis Tests for and against a Simple Order among Proportions Estimated by Pooled Testing. *Biometrical Journal*, **48**, 792-804.
- [68] WANG, Y. (1996). A likelihood ratio test against Stochastic ordering in several populations. *Journal of American Association*, **91**, 1676-1683.
- [69] WOLFE, P. (1976). Finding the nearest point in a polytope. *Math. Program.*, **11**, 128-149.
- [70] ZOGRAFOS, K.; FERENTINOS, K.; PAPAIOANNOU, T. (1990). ϕ -divergence statistics: Sampling properties and multinomial goodness of fit and divergence tests. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **19**, 1785-1802.