

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS**



**TESIS DOCTORAL**

**Detección de comunidades en redes mediante el uso de  
medidas borrosas**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

**Inmaculada Gutiérrez García-Pardo**

Directores

**Daniel Gómez González**  
**Javier Castro Cantalejo**  
**María Rosario Espínola Vílchez**

Madrid

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS**



**TESIS DOCTORAL**

Detección de comunidades en redes mediante el uso de medidas borrosas

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Inmaculada Gutiérrez García-Pardo

DIRECTOR

Daniel Gómez González, Javier Castro Cantalejo y María Rosario Espínola Vílchez

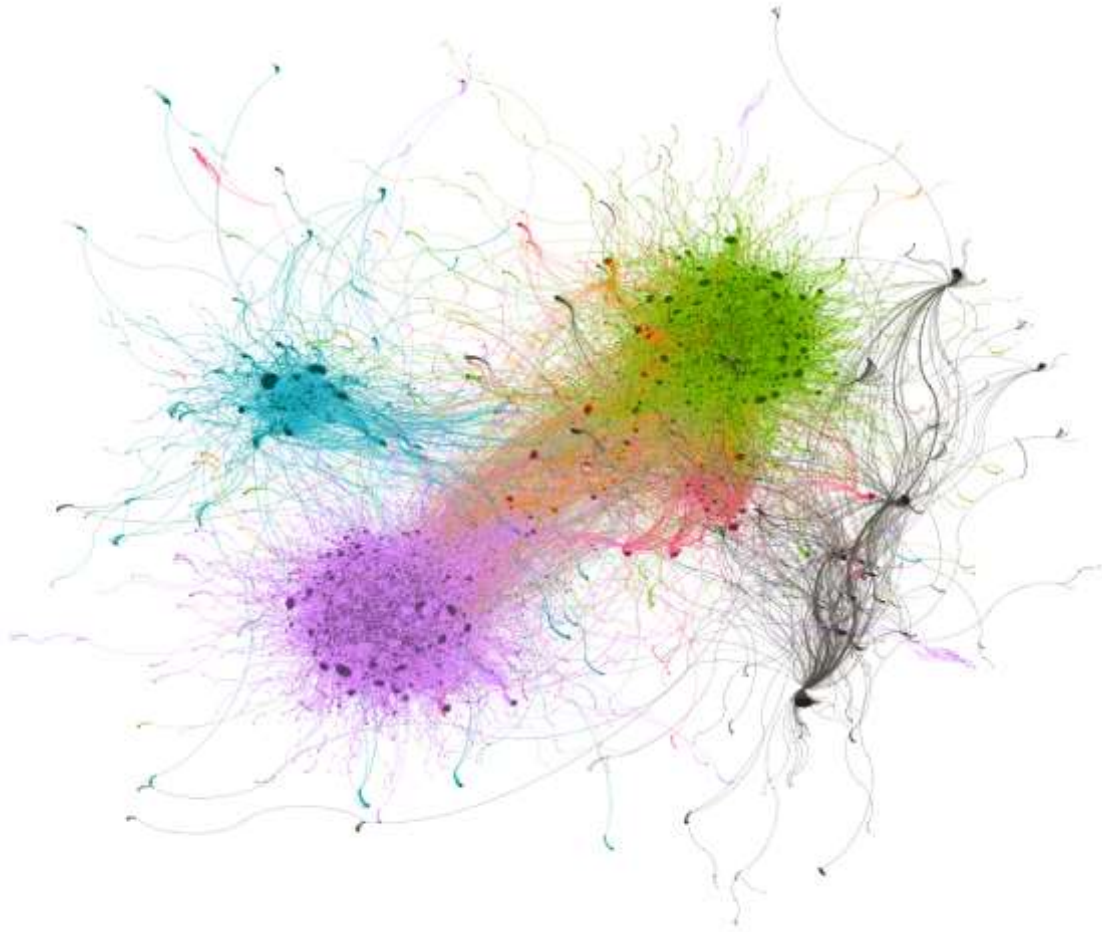
Madrid, Enero 2021

# DETECCIÓN DE COMUNIDADES EN REDES MEDIANTE EL USO DE MEDIDAS BORROSAS

COMMUNITY DETECTION PROBLEM THROUGH THE USE OF FUZZY MEASURES

Tesis realizada por:

**INMACULADA GUTIÉRREZ GARCÍA-PARDO**



Tesis dirigida por:

**DANIEL GÓMEZ GONZÁLEZ**

**JAVIER CASTRO CANTALEJO**

**MARÍA ROSARIO ESPÍNOLA VÍLCHEZ**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Estudios Estadísticos







---

---

# Detección de comunidades en redes mediante el uso de medidas borrosas.

---

---

Memoria para optar al grado de doctor presentada por

INMACULADA GUTIÉRREZ GARCÍA-PARDO



Facultad de Estudios Estadísticos  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Tesis dirigida por:  
DANIEL GÓMEZ GONZÁLEZ, JAVIER CASTRO CANTALEJO  
Y MARÍA ROSARIO ESPÍNOLA VÍLCHEZ

MADRID, ENERO 2021

*A la abuela Kika*



# Agradecimientos

*La humildad no es pensar menos de ti mismo, es pensar menos en ti mismo.*

C.S. Lewis

*“Dentro de veinte años, estarás más decepcionado por lo que no hiciste que por lo que hiciste. Así que explora, sueña y descubre”.* Esta frase de Mark Twain define claramente el *por qué* de esta tesis, que nace como cura a una comodidad rutinaria que cerca estuvo de arruinar mis aspiraciones. Con mis primeras palabras, quisiera mostrar mi gratitud a todos los que han hecho realidad este trabajo.

Una tesis con tintes estadísticos no es el marco ideal para hablar de casualidades, pero la siguiente coincidencia se merece una excepción. Dos personas con el mismo nombre han protagonizado dos momentos decisivos en mi corta trayectoria. Javier de la Torre me devolvió el amor por la música cuando más lo necesitaba. Este fue el inicio de una forma de vida basada en perseverancia, constancia, esfuerzo y trabajo.

Años después, Javier Castro me contagió su entrega a la investigación, marcando el inicio de mi labor científica. Este trabajo nunca hubiera visto la luz sin el apoyo de mis supervisores, el mismo Javier, Daniel Gómez y Rosa Espínola. Sin vuestra ayuda, consejo y guía, esta tesis y todo lo que hay detrás, nunca habrían sido realidad. Mi más profunda admiración e infinita gratitud hacia vosotros.

Gracias a todos los trabajadores de la Facultad de Estudios Estadísticos, muy especialmente a su Decano, Cristóbal Pareja, por su confianza.

*Thank you very much to the Centre for Management Studies of Instituto Superior Técnico of the University of Lisbon for hosting me during my research stay. I specially thank to the Head of CEG-IST, José Rui Figueira.*

Gracias a cada persona que se cruzó conmigo en Nielsen. Gracias Paloma, por pensar que podría ser una buena becaria, y también por tus *muffins* y todo tu cariño. Gracias Mónica, eres un ejemplo para mí. Gracias Carlos por estar siempre dispuesto a leer borradores incomprensibles.

Gracias a todos los que me han acompañado durante mi vida en Madrid desde la etapa Universitaria. A Antonio, Luis, Paco, Alejandro y Jesús. Irene

y María, Margarita, Carlota y Elena, Elo, Ana y Cristina. A Pablo, por conseguir estar tan presente desde el otro lado del océano. A Rocío, por tu empatía y tu sensatez. A Natalia y Marta, por la convivencia en los años más duros. A Carlos, por hacer fácil lo difícil. Gracias Gorka, que siempre tienes tiempo y paciencia para mí, por abrazarme bien fuerte aún en la distancia. Gracias Ferro, Isabel y Lucía, por seguir compartiendo escenario.

A los amigos de siempre. No hay nada como volver a Herrera y sentir que aunque la vida cambie, nosotros seguimos igual. Gracias Andrea, que siempre sabes cómo relativizar las dificultades y nunca dices no.

Marichi, Alex, Montse. Sois familia, y a vosotros os he elegido. Gracias por construir un hogar en medio de la vorágine madrileña. Gracias también a Chapi, que llegó para completar el equipo.

Gracias Nieves, María José e Irene. Sois el hombro fuerte en que apoyarse, la fuente inagotable de risa, la cura en los tiempos menos buenos. Gracias Fer, ejemplo de dedicación absoluta, corazón enorme y sencillez abrumadora. Gracias Elena, que has estado siempre en mi vida. Chus, gracias por creer, confiar y admirar, por todo el ánimo que me das y por entenderme tan bien. Gracias Arturo, eres el mejor amigo que nadie podría tener.

A mis compañeros de despacho y fatigas. Sólo desde dentro se puede apreciar la inmensidad de este mundo, que, compartido con vosotros, es mucho más llevadero. Juan Antonio, gracias por tu pasión contagiosa y tu trabajo incansable, la Ciencia necesita más gente como tú. Gracias Dani, porque haces pequeños mis problemas y grande mi optimismo.

A Juan, por aceptar mis silencios, espantar mis miedos y callar mis dudas, por enseñarme que mostrarse débil no es sino otra manera de ser fuerte. Gracias por tu comprensión y tu paciencia inagotable, por tener ánimo para los dos cuando a mí me falta, por ser resorte y paracaídas a la vez.

Finalmente, quiero dar las gracias a toda mi familia; en las siguientes páginas hay un trocito de cada uno de vosotros. Ojalá pudiera escribir todos vuestros nombres. Gracias a mis hermanos, Pablo y Laura, que siempre están conmigo y para mí. Gracias a mis padres, Inma y Pablo, por su generosidad infinita y su entrega absoluta a la felicidad de sus hijos. Vosotros cuatro sois los responsables de todos mis éxitos, que son también vuestros.

Esta Tesis doctoral y todo el trabajo de investigación desarrollado durante mi etapa de formación predoctoral han sido financiados por los proyectos MTM2015-70550-P, PGC2018096509-B-I00, TIN2015-66471-P del Plan Nacional de I+D+i del Gobierno de España, así como por las ayudas recibidas de parte de la UCM, EB25/20 y CT17/17-CT18/17.

# Resumen

## Detección de comunidades en redes mediante el uso de medidas borrosas

La manipulación y análisis de grandes volúmenes de datos es un asunto cada vez más relevante en el mundo actual. En el área de la Ciencia y Análisis de Datos, existe una gran cantidad de herramientas desarrolladas para el modelado y resolución de problemas basados en situaciones reales, entre las que cabe destacar las redes complejas o grafos, modelos muy útiles para la representación de conjuntos de unidades o elementos conectados entre sí. Redes neuronales, especies animales que interactúan entre sí, sistemas biológicos y químicos, la *World Wide Web* y las diferentes redes sociales on line como Facebook, Twitter, LinkedIn, son algunos ejemplos de situaciones comúnmente modeladas mediante redes complejas. Este tipo de redes tiene ciertas propiedades topológicas y funcionales, y sus elementos suelen presentar patrones de interconexión que están lejos de ser regulares o aleatorios. Algunas de estas características incluyen la distribución del grado de los elementos, un alto coeficiente de agrupamiento y ciertas composiciones jerárquicas. Esta memoria se ha centrado en el estudio de la estructura de comunidades que suele caracterizar a las redes complejas. El problema relativo a la búsqueda de grupos de elementos altamente conectados en un grafo recibe el nombre de *problema de detección de comunidades*, y ha atraído el interés de muchos científicos en las últimas décadas, convirtiéndose en una importante materia multi-disciplinar. Obtener una buena partición del conjunto de nodos, coherente, cohesiva, robusta y con buenas propiedades, simplifica enormemente el proceso de análisis de una red compleja, sea cual sea el contexto. A lo largo de los años se han propuesto muchos métodos con los que llevar a cabo esta ‘búsqueda’, así como varias métricas con las que evaluar la calidad de los resultados obtenidos. Por su alta velocidad de ejecución y por la gran calidad de los resultados proporcionados, entre los métodos existentes destaca el algoritmo de Louvain [18], propuesto en 2008 por un grupo de investigadores de la Universidad Católica de Lovaina. Se trata de un proceso voraz basado en la heurística de movimiento local y optimización de la modularidad, medida de calidad que fuera previamente definida por M.E.J. Newman y M.

Girvan [142]. Como la inmensa mayoría de los métodos clásicos de agrupamiento, el algoritmo de Louvain proporciona una partición del conjunto de nodos atendiendo a las características topológicas o estructurales del grafo, en concreto, a sus aristas. No obstante, parece justo aceptar que cualquier evento modelado por una red compleja tiene muchos más detalles de los abarcados por la representación de un grafo. Es por ello que surgió la necesidad de disponer de herramientas complejas con las que poder modelar todo el conocimiento disponible. En este ámbito, las medidas borrosas introducidas por M. Sugeno [176] desarrollan una tarea esencial. Este tipo de funciones de conjunto monótonas engloba medidas de posibilidad, plausibilidad o capacidad, muy sensibles al tratamiento de la incertidumbre y la vaguedad. Por este motivo, resultan ser la herramienta perfecta para el modelado de aspectos de la realidad difícilmente representables mediante técnicas clásicas y modelos nítidos, detalles como relaciones, afinidades, sinergias, similitudes, disimilitudes o disparidades. Fruto de la combinación de una medida borrosa con un grafo nítido, se define una nueva herramienta de modelado, que será una de las piedras angulares de esta memoria: el grafo borroso extendido. Este modelo enriquece notablemente la representación de la realidad, dotando a los grafos de una fuente externa de conocimiento con la que considerar relaciones independientes al sistema modelado por una red compleja.

Tomando el grafo borroso extendido como base, se ha trabajado en una nueva consideración del problema de búsqueda de grupos en un grafo: el problema de detección de comunidades en redes mediante el uso de medidas borrosas. Esta nueva concepción incluye una variación en la noción de *grupo*, de manera que no sólo intervienen las conexiones directas entre elementos en el proceso de agrupación, sino que también el conocimiento externo representado por la medida borrosa en cuestión juega un papel esencial. Para la resolución de esta nueva percepción del problema de detección de comunidades, se ha planteado una metodología innovadora basada en el algoritmo de Louvain. En esta memoria se especifica el algoritmo propuesto, así como su aplicación atendiendo a distintos escenarios en los que se pueden encontrar medidas borrosas de naturaleza diversa, analizando también su desarrollo en un contexto multi-dimensional y su aplicación en un caso real. El desarrollo de esta metodología de agrupamiento va secundada por la definición de nuevas herramientas que facilitan el proceso de manipulación y análisis de una medida borrosa, como el grafo valorado asociado a la misma, con las especificaciones pertinentes para obtener su caracterización en distintos escenarios, y ciertas aproximaciones del índice de interacción que propusieran T. Murofushi y S. Soneda [133], y también de la generalización del mismo desarrollada por M. Grabisch [74].

Pese a que esta tesis se enmarca en un contexto concreto, las herramientas y modelos presentados podrían aplicarse en otros ámbitos relacionados con el análisis de redes sociales (SNA), que se abordarán en el futuro.

# Abstract

## Community detection in networks through the use of fuzzy measures

The analysis and manipulation of large volumes of data is becoming increasingly relevant nowadays. In the field of Data Science and Data Analysis, there is a wide range of different tools devoted to the modeling and resolution of problems based on real situations. Among these tools, it is worth highlighting the complex networks or graphs, which are useful models for the representation of sets of individuals or elements interconnected between them. Neural networks, interacting animal species, biological or chemical systems, the *World Wide Web*, and the different online social networks such as Facebook, Twitter or LinkedIn, are some examples of situations which are generally modeled by means of complex networks or graphs. This type of network has several topological and functional properties, and its elements usually present interconnection patterns that are far from being regular or random. Some of these characteristics are the degree distribution of the elements, a high grouping coefficient, and various hierarchical compositions. The main focus of this thesis is the study of the community structures typically arisen from such complex networks. The problem of finding highly connected groups of elements in a graph is known as *community detection problem*. It has attracted the interest of many scientists in recent decades, growing to become an important multidisciplinary field. In any given context, having a partition of a complex network which is coherent and cohesive as well as robust and with desirable properties, greatly simplifies the analytical process itself. In recent years, many different methods haven been proposed to carry out this search, besides several measures with which to evaluate the quality of the obtained results. Among all the methods, it is worth highlighting the Louvain algorithm [18] due to its high performance speed and the outstanding quality of the results. It was proposed in 2008 by a group of researchers of the Catholic University of Louvain. It is a greedy algorithm based on the local moving heuristic and the optimization of the modularity, which is a quality measure defined by M.E.J. Newman y M. Girvan [142]. As almost all methods do, the Louvain algorithm provides a partition of

the set of nodes according to the topological or structural properties of the graph, in particular to the edges. Nevertheless, it is fair to accept that any event modeled by means of a complex network involves much more details than those encompassed by the representation of a graph. For this reason, it arises the need to have complex tools with which to be able to model as much knowledge as possible. In this field, the fuzzy measures introduced by M. Sugeno [176] play an essential role. Some of these monotonic set functions, such as possibility, plausibility or capacity measures, are very responsive to the management of uncertainty and vagueness. This ability to handle ambiguity turns fuzzy measures into the perfect tool to deal with the modeling of those details of the reality which can not be adequately represented by classical techniques and crisp models, such as relationships, affinities, synergies, similarities, dissimilarities or disparities. From the combination of a fuzzy measure with a crisp graph, it is defined a new modeling tool, which is a cornerstone of this dissertation: the extended fuzzy graph. This new model greatly enriches the representation of reality, bestowing the graphs on an external knowledge source with which to consider relations that are independent of the system modeled by the complex network itself.

On the basis of the extended fuzzy graph, a new perspective of the problem of searching groups in a graph has been analyzed: community detection in networks through the use of fuzzy measures. This new approach implies a variation in the notion of *group*, so that not only the direct connections between the elements are considered in the grouping process, but also the external knowledge represented by a fuzzy measure. For the resolution of this new perception of the community detection problem, an innovative methodology based on the Louvain algorithm has been developed. The proposed algorithm is detailed in this dissertation, as well as its application in various scenarios involving fuzzy measures of different nature, in addition to a deep analysis of its development in a multidimensional context and its application in a real case. The development of this methodology is accompanied by the definition of new tools which simplify the management and analysis of fuzzy measures, such as the weighted graph associated with a fuzzy measure, with the relevant specifications dedicated to having its characterization in different scenarios, and several approaches to the interaction index defined by T. Murofushi and S. Soneda [133] and its generalization proposed by M. Grabisch [74].

This dissertation is developed on a very specific context; however, it is worth highlighting that the tools and models which are shown on the following pages could be applied in many other areas related to the field of Social Networks Analytics, which are meant to be addressed in the near future.

# Índice

<b>Agradecimientos</b>	v
<b>Introduction</b>	1
<b>Tasks</b> . . . . .	2
<b>Methodology</b> . . . . .	5
<b>Contributions</b> . . . . .	6
<b>1. Introducción</b>	9
<b>1.1. Objetivos</b> . . . . .	11
<b>1.2. Metodología</b> . . . . .	14
<b>1.3. Contribuciones</b> . . . . .	15
<b>2. Preliminares</b>	17
<b>2.1. Teoría de la medida.</b> . . . . .	18
<b>2.1.1. Medidas Borrosas</b> . . . . .	19
<b>2.1.2. Números borrosos trapezoidales</b> . . . . .	21
<b>2.1.3. Valor de Shapley.</b> . . . . .	22
<b>2.1.4. Índice de Interacción</b> . . . . .	24
<b>2.2. Teoría de Grafos</b> . . . . .	25
<b>2.2.1. Redes Complejas: Problema de detección de comuni-</b> <b>        dades</b> . . . . .	31
<b>2.3. Operadores de agregación y otras funciones</b> . . . . .	42
<b>3. El índice de interacción</b>	45
<b>3.1. Definición alternativa de los índices de interacción</b> . . . . .	45
<b>3.2. Estimación no estratificada del índice de interacción</b> . . . . .	49
<b>3.3. Estimación estratificada del índice de interacción</b> . . . . .	53
<b>3.4. Cálculo real de <math>I_{ij}</math>. Algunos ejemplos</b> . . . . .	58
<b>3.5. Resultados experimentales</b> . . . . .	65
<b>4. Medidas borrosas: el grafo asociado a una medida borrosa</b>	69
<b>4.1. Introducción</b> . . . . .	69

4.2. El grafo asociado a una medida borrosa . . . . .	70
4.2.1. Aplicación del valor de Shapley . . . . .	71
4.2.2. Aplicación del índice de interacción . . . . .	72
4.3. Algunas medidas borrosas concretas . . . . .	72
4.3.1. $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno: medidas borrosas ob- tenidas a partir de un vector . . . . .	73
4.3.2. Medidas borrosas obtenidas a partir de una matriz . . . . .	79
4.3.3. Medidas borrosas bipolares . . . . .	86
4.4. El multi-grafo asociado a una familia de medidas borrosas . . . . .	88
<b>5. Grafos borrosos, Grafos borrosos extendidos, Grafos borro- sos extendidos multi-dimensionales</b> . . . . .	<b>93</b>
5.1. Grafos borrosos . . . . .	94
5.2. Grafos borrosos extendidos . . . . .	95
5.2.1. Grafo borroso extendido de vector . . . . .	97
5.2.2. Grafo borroso extendido de matriz . . . . .	98
5.2.3. Grafo borroso extendido bipolar . . . . .	99
5.3. Grafos borrosos extendidos multi-dimensionales . . . . .	101
5.3.1. Grafo borroso extendido de vector multi-dimensional . . . . .	102
5.3.2. Grafo borroso extendido multi-dimensional de matriz . . . . .	104
5.3.3. Grafo borroso extendido bipolar multi-dimensional . . . . .	105
<b>6. Problemas de detección de comunidades basados en grafos borrosos extendidos</b> . . . . .	<b>107</b>
6.1. Algunas carencias del problema de detección de comunidades: posibles mejoras . . . . .	108
6.2. Detección de comunidades con información adicional . . . . .	109
6.3. Redes con información adicional: detección de comunidades basada en medidas borrosas . . . . .	114
6.3.1. Comunidades basadas en un grafo borroso extendido de vector . . . . .	115
6.3.2. Comunidades basadas en un grafo borroso extendido de matriz . . . . .	121
<b>7. Problemas de detección de comunidades basados en grafos borrosos extendidos multi-dimensionales</b> . . . . .	<b>127</b>
7.1. Medidas borrosas bipolares . . . . .	127
7.2. Familias de medidas borrosas . . . . .	131
7.2.1. Familia $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a par- tir de múltiples vectores. . . . .	132
7.2.2. Familia de medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de múltiples matrices. . . . .	138

7.2.3. Familia de medidas borrosas bipolares . . . . .	142
<b>8. Resultados experimentales</b>	<b>151</b>
8.1. Familia $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de múltiples vectores. . . . .	152
8.1.1. Diseño del experimento . . . . .	152
8.1.2. Grafo de referencia. Modelo 1. . . . .	160
8.1.3. Grafo de referencia. Modelo 2. . . . .	161
8.1.4. Grafo de referencia. Modelo 3. . . . .	162
8.1.5. Grafo de referencia. Modelo 4. . . . .	163
8.2. Familia de medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de múltiples matrices. . . . .	164
8.2.1. Diseño del experimento . . . . .	165
8.2.2. Grafo de referencia. Modelo 1. . . . .	165
8.2.3. Grafo de referencia. Modelo 2. . . . .	166
8.2.4. Grafo de referencia. Modelo 3. . . . .	167
8.2.5. Grafo de referencia. Modelo 4. . . . .	168
8.3. Familia de medidas borrosas bipolares . . . . .	169
8.3.1. Diseño del experimento . . . . .	170
8.3.2. Grafo de referencia. Modelo 1. . . . .	170
8.3.3. Grafo de referencia. Modelo 2. . . . .	171
8.3.4. Grafo de referencia. Modelo 3. . . . .	173
8.3.5. Grafo de referencia. Modelo 4. . . . .	174
<b>9. Problema de detección de comunidades basado en medidas de polarización. Una aplicación a Twitter: COVID-19 en Es- paña</b>	<b>175</b>
9.1. Polarización . . . . .	176
9.2. Diseño del experimento . . . . .	179
9.2.1. Metodología . . . . .	179
9.2.2. Definición de la medida borrosa de polarización $\mu_P$ . . . . .	183
9.3. Caso de estudio . . . . .	185
<b>10. Conclusiones y Trabajo futuro</b>	<b>193</b>
10.1. Conclusiones . . . . .	193
10.2. Relación entre propuestas, objetivos y contribuciones . . . . .	196
10.3. Futuras líneas de investigación . . . . .	210
<b>Conclusions and Future Work</b>	<b>213</b>
Conclusions . . . . .	213
Relation between proposed tasks and contributions . . . . .	216
Future research lines . . . . .	228

<b>A. El índice de interacción</b>	<b>231</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>233</b>

# Índice de figuras

2.1. Función de pertenencia de un número borroso trapezoidal.	22
2.2. Problema de los puentes de Königsberg.	25
2.3. Grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ .	26
2.4. Grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ .	27
2.5. Grafo $G_1^w = (V_1, E_1)$ con función de pesos $w$ .	28
2.6. Grafo $G_2^{w'} = (V_2, E_2)$ con función de pesos $w'$ .	28
2.7. Matriz de adyacencia del grafo no valorado $G_1$ .	29
2.8. Matriz de adyacencia del grafo valorado $G_1^w$ .	29
2.9. Matriz de adyacencia del grafo no valorado $G_2$ .	29
2.10. Matriz de adyacencia del grafo valorado $G_2^{w'}$ .	29
2.11. Digrafo $G^d$ con función de pesos $w$ , y su matriz de adyacencia.	30
2.12. Grafo $G$ con función de pesos $w$ , y su matriz de adyacencia.	30
3.1. Medida borrosa $\mu^1$ .	59
3.2. Medida borrosa $\mu^2$ .	60
4.1. Matriz $X$ , adyacencia de $G_{\mu_x^a}$ .	79
4.2. Matriz de relaciones $R$ .	86
4.3. Matrices de adyacencia del MAWG bipolar $G_{\mu^b}$ .	88
4.4. Adyacencia del MAWG de familia de vector $G_{(\mu_{x_1}^a, \mu_{x_2}^a, \mu_{x_3}^a, \mu_{x_4}^a)}$ .	90
4.5. Adyacencia del MAWG de familia de matriz $G_{(\mu_{R1}, \mu_{R2}, \mu_{R3}, \mu_{R4})}$ .	91
4.6. Adyacencia del MAWG bipolar $G_{(\mu^{b1}, \mu^{b2})}$ .	92
5.1. Grafo borroso $\widehat{G} = (V, E, \varphi)$ .	95
5.2. EFG $\widetilde{G} = (V, E, \mu)$ .	97
5.3. Grafo $G = (V, E)$ .	98
5.4. Matriz $X$ , adyacencia de $G_{\mu_x^a}$ .	98
5.5. EFG de afinidad $\widetilde{G} = (V, E, \mu_R)$ .	99
5.6. EFG bipolar $\widetilde{G} = (V, E, \mu^b = (\mu^-, \mu^+))$ .	100
5.7. MEFG $\widetilde{G} = (V, E, (\mu^1, \mu^2))$ .	102
5.8. MEFG de familia de vector $\widetilde{G} = (V, E, (\mu_{x_1}^a, \mu_{x_2}^a, \mu_{x_3}^a, \mu_{x_4}^a))$ .	103

5.9. MEFG de matriz $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4}))$ .	105
5.10. MEFG bipolar $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \mu^{b_2}))$ .	106
6.1. Grafo $G = (V, E)$ .	118
6.2. Matriz $X$ .	118
6.3. Partición obtenida en la red de delfines con la aplicación del Algoritmo de Louvain.	120
6.4. Partición obtenida en la red de delfines con la aplicación del Algoritmo <i>Sugeno Louvain 1-aditivo</i> .	120
6.5. EFG de matriz $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$ .	124
6.6. EFG de matriz $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$ .	125
7.1. EFG bipolar $G = (V, E, \mu^b = (\mu^-, \mu^+))$ .	131
7.2. Grafo $G = (V, E)$ .	136
7.3. Matrices $X^1, X^2, X^3, X^4$ y $X = \max\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$ .	137
7.4. MEFG $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4}))$ .	140
7.5. MEFG $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4}))$ .	142
7.6. Ejemplo. Grafo de 8 nodos.	148
7.7. MEFG bipolar $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \mu^{b_2}))$ .	149
8.1. Número borroso trapezoidal <i>bajo</i> .	154
8.2. Número borroso trapezoidal <i>alto</i> .	156
8.3. Grafo de referencia. Modelo 1.	161
8.4. Grafo de referencia. Modelo 2.	162
8.5. Grafo de referencia. Modelo 3.	163
8.6. Grafo de referencia. Modelo 4.	164
8.7. Grafo de referencia. Modelo 1.	166
8.8. Grafo de referencia. Modelo 2.	167
8.9. Grafo de referencia. Modelo 3.	168
8.10. Grafo de referencia. Modelo 4.	169
8.11. Grafo de referencia. Modelo 1.	171
8.12. Grafo de referencia. Modelo 2.	172
8.13. Grafo de referencia. Modelo 3.	173
8.14. Grafo de referencia. Modelo 4.	174
9.1. Ejemplo de bi-polarización.	179
9.2. Grafo $G = (V, E)$ .	186
9.3. Partición obtenida con el algoritmo de Louvain en $G = (V, E)$ .	187
9.4. Partición obtenida con el algoritmo <i>Duo Louvain</i> en el EFG $\tilde{G} = (V, E, \mu_P)$ , cuando $\varphi = \max$ , $\phi = \min$ y $\gamma = 0$ .	188
9.5. Partición obtenida con el algoritmo <i>Duo Louvain</i> en el EFG $\tilde{G} = (V, E, \mu_P)$ , cuando $\varphi = \max$ , $\phi = prod$ y $\gamma = 0$ .	188

---

9.6. Valores de polarización de la comunidad $P$ dependiendo del operador utilizado. . . . .	190
9.7. Comunidades de los nodos <i>iunidas</i> , <i>PODEMOS</i> , <i>populares</i> y <i>bea_fanjul</i> según el algoritmo de Louvain. . . . .	190
9.8. Comunidades de los nodos <i>iunidas</i> , <i>PODEMOS</i> , <i>populares</i> y <i>bea_fanjul</i> según el algoritmo <i>Duo Louvain</i> . . . . .	190



# Índice de Tablas

2.1. Principales órdenes de complejidad algorítmica. . . . .	39
3.1. Ejemplo 1. Medida borrosa simétrica escalonada. Errores cometidos por los algoritmos <i>ApproInteraction</i> y <i>StratifiedApproInteraction</i> . . . . .	67
3.2. Ejemplo 2. Medida borrosa simétrica creciente. Errores cometidos por los algoritmos <i>ApproInteraction</i> y <i>StratifiedApproInteraction</i> . . . . .	67
3.3. Ejemplo 3. Medida borrosa con peso máximo. Errores cometidos por los algoritmos <i>ApproInteraction</i> y <i>StratifiedApproInteraction</i> . . . . .	67
3.4. Ejemplo 4. Medida borrosa bi-cluster. Errores cometidos por los algoritmos <i>ApproInteraction</i> y <i>StratifiedApproInteraction</i> . . . . .	67
4.1. Caracterización de $\mu_x$ para $p = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ . . . . .	76
6.1. Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos <i>Sugeno Louvain 1-aditivo</i> y de Louvain para distintos valores de $\gamma$ . . . . .	118
6.2. Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos <i>Duo Affinity Louvain</i> y de Louvain para distintos valores de $\gamma$ . . . . .	124
6.3. Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos <i>Duo Affinity Louvain</i> y de Louvain para distintos valores de $\gamma$ . . . . .	125
7.1. Particiones y modularidad obtenidas con los algoritmos <i>Modified Louvain</i> y Louvain, siendo $F_b^* = \frac{1}{2}F^{-op} + \frac{1}{2}F^+$ . . . . .	131
7.2. Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos <i>Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo</i> y de Louvain para distintos valores de $\gamma$ . . . . .	137
7.3. Particiones y modularidad obtenidas con los algoritmos <i>Multi-dimensional Duo Affinity Louvain</i> y Louvain para distintos valores de $\gamma$ . . . . .	141

7.4. Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos <i>Multi-dimensional Duo Affinity Louvain</i> y Louvain para distintos valores de $\gamma$ .	142
7.5. Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos <i>Multiple Bipolar Duo Louvain</i> y de Louvain para distintos valores de $\gamma$ . $\psi = \text{mín.}$	150
7.6. Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos <i>Multiple Bipolar Duo Louvain</i> y de Louvain para distintos valores de $\gamma$ . $\psi = \text{promedio.}$	150
8.1. Parámetros para generar la matriz $A$ del modelo de referencia.	153
8.2. Parámetros para generar la matriz $X$ del modelo de referencia.	158
8.3. NMI. Modelo 1.	161
8.4. NMI. Modelo 2.	162
8.5. NMI. Modelo 3.	163
8.6. NMI. Modelo 4.	164
8.7. NMI. Modelo 1.	166
8.8. NMI. Modelo 2.	167
8.9. NMI. Modelo 3.	168
8.10. NMI. Modelo 4.	169
8.11. NMI. Modelo 1.	171
8.12. NMI. Modelo 2.	172
8.13. NMI. Modelo 3.	173
8.14. NMI. Modelo 4.	174
9.1. Resultados proporcionados por un SVM lineal para las funciones 'TEMA' y 'POSICIÓN'.	182
9.2. Comparación de las particiones obtenidas. $\varphi = \text{máx}$ y $\phi = \text{mín.}$	189
9.3. Comparación de las particiones obtenidas. $\varphi = \text{máx}$ y $\phi = \text{prod.}$	189

# Introduction

*Symphony No.5 C minor, Op.67*

L.V. Beethoven

**RESUMEN:** This introductory chapter is devoted to detail the motivations that led the author to develop this thesis. The general objectives pursued by the development of this research work are detailed, as well as the different specific goals related to them. Then, the methodology applied to reach these objectives is explained. The last section of this chapter includes a review of the main scientific contributions developed by the author, specifically those that have been the starting point of the writing of this dissertation.

Problems related to the field of Social Network Analysis (SNA) encompass a set of methodological approaches which are based on a theoretical frame in which the main goal is to analyze the relationships between the involved agents is the main goal, assuming that these individuals would represent individual people, different countries, organizations or just ordinary things. Pondering the interactions between the different employees of a large company, your personal connections beyond one degree of separation, the synergies within various animal communities, or the liaison between websites, is essentially an intuitive depiction of what a Social Network consists of.

The problems faced by the human mind when analyzing and visualizing large sets of relations which involve complex structures of connections, were slightly mitigated by the definition of various theories and methods which facilitated the processes of generation, evolution and analysis of networks. A network is made up of a set of nodes or vertices which represent the entities involved, and a set of edges or links that are the lines which represent the liaisons, relations, connections or synergies between the entities. This way of organizing the representation is a prior step, necessary for a more in-depth analysis of the entire structure of players and links with the aim of obtaining different types of information, such as the cohesion, the groups in which the elements are organized into, or the centrality, as well as the composition of the nodes and their relevance in the generation of links.

The work developed in this dissertation is focused on the study of the group organization of the individuals of a network, including the approach to the well known community detection problem. One of the peculiarities of social networks obtained from modeling real situations is that the individuals are usually organized into modular structures. In this type of partitions, whose modules are commonly benamed communities, the elements of the same group are highly connected to each other (there are many links between them), whereas hardly any connections between the individuals of different groups can be found. The main aim of this sort of problems is to find a *good* partition of the set of players, assuming that a *good* partition is that whose groups are highly cohesive according to the situation modeled. Graphs are one of the most typical tools to address this problem, so that the players or individuals are represented by nodes, and the links are represented by edges.

Classical algorithms to solve the community detection problem in graphs are based on the structure defined by the edges. A large amount of methods which provide high-quality partitions of the set of nodes in a short execution time can be found. Nevertheless, it is fair to acknowledge the need to add some extra information besides the connections already displayed by the graph (edges) to increase the cohesion of the obtained groups. Several authors have worked on adding additional information to a graph in different contexts, as it can be read in the contributions [\[49, 59, 71, 96, 115, 119, 121, 134, 166, 172, 191\]](#). In this thesis it is assumed that the extra knowledge available is about the relations between the players, regardless of the links that connect them. The selected approach to deal with it this has been the study of fuzzy measures. This sort of monotonic set functions encompasses several possibility, plausibility or capacity measures, which enable the managamente, modeling and analysis of the vagueness related to real problems. This ability to handle the vagueness facilitates the considerations of relations between players. This information is a rich source of knowledge when it comes to decide which elements should remain together, which should be separated, and what kind of attractions or repulsions exist between them.

## Tasks

Within the framework of fuzzy measures, it is worth highlighting the ability to handle, represent, visualice and analyze the underlying knowledge of these functions, whose characterization in itself is already a problem of exponentially growing complexity.

A great deal has been done on the definition of a tool to easily represent the intrinsic information of a fuzzy measure. Closely related to this new tool, it arises the problem of computing the interaction or representation index [\[74, 133\]](#), on which some estimation methods are shown.

On the other hand, a new knowledge representation model is defined,

obtained as a result of the combination of a crisp graph with a fuzzy measure. Also, it is proposed its generalization to a multidimensional context, so that it is possible to accept the existence of many measures. The characterization process related to each context is illustrated considering several scenarios for which different types of fuzzy measures are chosen.

Finally a specific application of the new defined tools is developed, related to the detection of communities in graphs with additional information. It is worth mentioning that many other SNA issues could be addressed with the models presented, as for example centrality or propagation problems.

General tasks of this dissertation and the specific aims related to them are shown below, according to their order of appearance on the following pages.

**Task 1:** To propose a methodology to approach the interaction index [74, 133]. This index concerns the measurement of the interaction degree between elements. Nevertheless, few contributions have been found in the literature related to this index, at least from an applied point of view. New methods have been developed to approach it avoiding the exponential complexity of calculating its real value.

1. To propose an alternative characterization of the interaction index between pairs of elements, which is based on orders (permutations).
2. To develop two estimation algorithms to approach the real value of the interaction index  $I_{ij}$ .
3. To evaluate the quality of the estimations by comparing them with the real value of the interaction index related to certain fuzzy measures.
4. To generalize the alternative characterization of the interaction index based on orders (permutations) to facilitate the consideration of sets of any cardinal.
5. To propose an estimation algorithm to approach the interaction index related to the elements of a set with any cardinal  $I_T$ .

**Task 2:** To propose a tool to model and visualize the relations between elements defined by a fuzzy measure.

1. To define the weighted graph associated with a fuzzy measure, AWG. To propose two different ways for its calculations: the interaction index and the Shapley value.
2. To detail the characterization of certain particular fuzzy measures: fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures obtained from a vector; affinity fuzzy measu-

res obtained from a matrix, and bipolar fuzzy measures. To detail the characterization of the corresponding AWG.

3. To propose a generalization of the AWG to a multidimensional context: the weighted multi-graph associated with multiple fuzzy measures (MAWG). To detail the characterization of the MAWG related to certain particular fuzzy measures.

**Task 3:** To propose a new knowledge representation model, obtained as a result of the existence of a crisp graph and a fuzzy measure related to the relations between the individuals: the extended fuzzy graph (EFG).

1. To assess and provide a description of the preexisting models of representation, in order to identify their weak points.
2. To propose a new knowledge representation model derived from the information displayed on a crisp graph and an external fuzzy measure which depicts relations between the vertex: the extended fuzzy graph (EFG). To illustrate the characterization of the EFG related to certain particular fuzzy measures.
3. To generalize the EFG to a multidimensional context, so that it is feasible to address situations modeled by a graph in which there are multiple fuzzy measures independent to it: the extended multiple fuzzy graph (MEFG). To illustrate the characterization of the MEFG related to certain particular fuzzy measures in a multidimensional context.

**Task 4:** Within the SNA field, propose a specific application of the EFG: community detection in graphs based on fuzzy measures.

1. For a given network, to study the detection of groups of the nodes considering information sources independent of the structure of the graph on which classical methods are based. To propose an algorithm with which analyze a matrix independent of the adjacency of the graph.
2. To study the community detection considering various fuzzy measures.
3. To propose several specifications of the core version of the community detection problem, adapted to different scenarios.

**Task 5:** In the field of SNA, to propose a specific application of the MEFG: community detection in graphs based on multiple fuzzy measures.

1. To study the detection of groups in graphs considering a bipolar fuzzy measure, highlighting that the notion of *group* is affected by the bipolar nature of this measure. To suggest a modification of the Louvain algorithm with which incorporate the information defined by a bipolar fuzzy measure to the process of detecting of groups.

2. To study the detection of communities in graphs when the existence of fuzzy measures independent to it affects the notion of group. To propose several specifications of the core method to include the additional information provided by a family of fuzzy measures.
3. To evaluate the quality of the proposed algorithm considering several benchmarks models in combination with the calculation of the NMI (*Normalized Mutual Information*).

**Task 6:** To apply the proposed methodology in a real case.

1. To generate, debug and analyze a database obtained from the social network Twitter.
2. To define a fuzzy measure from several membership functions.
3. To apply the community detection algorithms based on fuzzy measures in the obtained network, considering a polarization measure as the basis of the additional information.

## Methodology

The methodology below has been followed to achieve the tasks described.

- Regarding the analysis and visualization of a fuzzy measure, it was necessary to have a knowledge representation tool. A preliminary definition of the weighted graph associated with a fuzzy measure was proposed in [88]. Then, several specifications of it were detailed in [89, 85, 86, 87], adapted to some concret scenarios.
- There are two options to obtain the weighted graph associated with a fuzzy measure. One of them is the Shapley value, about which there is a large amount of research done. On the contrary, little is known about the interaction index. Hence, an alternative characterization of it is proposed, which facilitates the development of two estimation methods to obtain adequate approaches of its real value. Inspired by [30, 31], these methods were developed and evaluated in [90].
- To alleviate the lack of representation of the existent methods, a great deal has been done to define a new representation model, obtained from a fuzzy measure with a crisp graph (EFG). This tool, firstly introduced in [88], enables the modeling of synergies between any pair of elements of the graph, regardless the conections fixed by the structure.
- A particular problem related of the SNA field is addressed, related to the detection of communities in graphs with additional information. A

specific application of the EFG is proposed, devoted to find groups in situations modeled by a graph about whose individuals there is more information. It is necessary a thorough analysis of the behaviour and performance of one of the most widely used methods in the community detection literature: the Louvain algorithm [18], a method based on the local moving heuristic and modularity optimization. Then, it is proposed an alternative interpretation of the same, in which two different input parameters can be distinguished, so that each of them has a particular role. Then, it is possible to find the neighbouring relations in one of the parameters, and then to use the other to evaluate the variation of modularity. This duality facilitates the consideration of the information defined by a fuzzy measure when finding groups. A main algorithm is proposed, from which several specifications are proposed. Then, different situations can be addressed. The evaluation of these methods is published in [85, 87], where several benchmark models are considered in combination with the calculation of the NMI. The obtained results reaffirm the good performance of these methods.

- The community detection algorithms based on fuzzy measures have been applied in a real databased obtained from the social network Twitter. A real complex network is defined, obtained from a massive download of that on line site, and it is based on some political posts obtained during the global pandemic of the COVID-19, between March and July 2020. The intention is to analyze how the structure of communities keep changing when incorporating the political position against the Spanish government of the users considered.

## Contributions

The research work done by the author is reviewed in this Section by chronological order. Most of it is related to the work presented in this dissertation.

**Contribution 1:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection algorithm based on fuzzy measures*. In Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making Proceedings of INFUS Congress 2019 **1029**:133–140. (Scopus).

**Contribution 2:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures*. In Studies in Computational Intelligence Proceedings of ESCIM Congress 2019. (Scopus) [\[1\]](#).

---

<sup>1</sup>Due to COVID-19 pandemic, this publication has suffered a delay.

**Contribution 3:** Barroso, M., Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Group definition based on flow in community detection*. Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. IPMU 2020. Communications in Computer and Information Science **1239**:524-538, Springer, Charm. (Scopus).

**Contribution 4:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures and theirs applications to community detection problems*. In Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020, Glasgow, UK 2020, 1–6. (Scopus).

**Contribution 5:** Gutiérrez, I., Barroso, M., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Pattern-based clustering problem based on fuzzy measures*. In Proceedings of 14th International FLINS Conference on Robotics and Artificial Intelligence. FLINS 2020. Developments of Artificial Intelligence Technologies in Computation and Robotics **12**:412-420. (Scopus).

**Contribution 6:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information*. In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

**Contribución 7:** Castro, J., Espínola, R., Gutiérrez, I., Gómez, D. (2020): *Auctions. A New Method For Selling Objects With Bimodal Density Functions*. Computational Economics *2<sup>o</sup> review* (JCR).

**Contribution 8:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Multiple Bipolar Fuzzy Measures: an application to community detection problems for networks with additional information*. In International Journal of Computational Intelligence Systems **13**(1):1636–1649. (JCR).

**Contribution 9:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Polynomial Calculation Based on Sampling of the Interaction Index*. Sent to: Mathematics (JCR).

**Contribution 10:** Gutiérrez, I., Guevara, J.A., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2021): *Community Detection Problem Based on Polarization Measures: an application to the COVID-19 case in Spain*. Preprints Mathematics, (JCR) 2021010080 (doi: 10.20944/preprints202101.0080.v1).



# Capítulo 1

## Introducción

*Sinfonía N.º 5 Do menor, Op.67*

L.V. Beethoven

**RESUMEN:** Sirva este capítulo introductorio para detallar las motivaciones que han llevado a la autora al desarrollo de esta memoria. En la Sección [1.1](#) se exponen los objetivos generales perseguidos en la elaboración de este trabajo, así como los distintos objetivos específicos relativos a los mismos. En la Sección [1.2](#) se presenta la metodología seguida para alcanzar los objetivos enunciados. Finalmente, en la Sección [1.3](#) se hace una reseña de las principales contribuciones científicas aportadas por la autora, particularmente aquellas que han servido como punto de partida para la escritura de esta memoria.

Los problemas relativos al análisis de redes sociales, *Social Network Analysis (SNA)*, conforman un conjunto de aproximaciones metodológicas que parten de un fundamento teórico en que se presta especial atención al análisis de las relaciones entre los actores involucrados, aceptando que la identidad de estos entes puede ir desde la representación de personas individuales, a países, organizaciones o simples *cosas*. Una red social puede entenderse como una herramienta de modelado de las relaciones existentes entre individuos. Al imaginar las relaciones existentes entre los trabajadores de una gran empresa, los contactos de los amigos de mis amigos, las sinergias establecidas entre animales que viven en comunidad, o los enlaces que existen entre páginas web, no estamos más que definiendo mentalmente una red social.

Los problemas a los que se enfrenta la mente humana a la hora de analizar y visualizar grandes conjuntos de elementos en los que se involucran complejos entramados de conexiones, fueron ligeramente mitigados con la aparición de distintas teorías y métodos que facilitaron los procesos de generación, evolución y análisis de redes. Una red consta de un conjunto de

nodos o vértices que representan a los actores involucrados, y otro de aristas o arcos, que son las líneas que representan los enlaces, relaciones, conexiones o sinergias entre actores. Esta forma de organizar la representación no es más que un paso previo necesario para un posterior análisis de toda la estructura de actores y enlaces, con el fin de obtener distintos tipos de información, como la cohesión, los grupos en que se organizan los actores o su centralidad, la composición de los nodos y su relevancia en la creación de enlaces.

En esta memoria se ha prestado especial atención a la organización en grupos de los actores de una red, abordando el conocido problema de detección de comunidades. Una de las particularidades que presentan muchas de las redes sociales procedentes del modelado de situaciones reales es que sus actores tienden a estar organizados en estructuras modulares. En este tipo de particiones, cuyos módulos son comúnmente llamados comunidades, los elementos del mismo grupo están muy conectados (existen muchos enlaces entre ellos), mientras que apenas se pueden encontrar conexiones entre actores de distintos grupos. El objetivo principal de los problemas de este tipo es encontrar *buenas* particiones de actores, entendiendo por *buena* aquella partición en la que sus grupos presenten altos niveles de cohesión atendiendo a la situación abordada. Los grafos son una de las herramientas soporte más típicas en estos problemas, de modo que los actores se representan mediante vértices, y los enlaces se caracterizan mediante aristas.

Los algoritmos clásicos de detección de comunidades en grafos se basan en la estructura gráfica presentada por el conjunto de aristas. Si bien existe una gran cantidad de métodos que proporcionan en *poco tiempo* particiones de calidad del conjunto de nodos, parece evidente la necesidad de incorporar información al proceso de modelado independiente a los enlaces relativos al grafo, con el fin de incrementar la cohesión de los grupos obtenidos. Muchos autores han trabajado en la incorporación de información adicional a un grafo en distintos contextos, como se puede contemplar en los trabajos [49, 59, 71, 96, 115, 119, 121, 134, 166, 172, 191]. Para tratar de enriquecer el proceso de modelado, en esta tesis se ha trabajado ante la asunción de conocimiento extra acerca de posibles relaciones, sinergias o desavenencias entre actores, ajenas a los enlaces que los conectan. Para ello, se ha hecho un acercamiento al estudio de las medidas borrosas. Este tipo de funciones de conjunto monótonas engloba ciertas medidas de posibilidad, capacidad o plausibilidad, que posibilitan el tratamiento, modelado y análisis de la incertidumbre propia de cualquier problema real. Esta posibilidad de manipular la incertidumbre facilita la consideración de relaciones entre actores, información que supondrá una rica fuente de conocimiento ante la decisión de qué elementos deben permanecer juntos, cuáles separados, y qué tipo de atracciones o repulsiones existen entre ellos.

## 1.1. Objetivos

En el marco de las medidas borrosas, se incide en la necesidad de ser capaz de manipular, representar, visualizar y analizar el conocimiento subyacente a este tipo de funciones, cuya caracterización supone en sí misma un problema de complejidad exponencial. Se ha trabajado en la definición de una herramienta con la que representar sencillamente la información intrínseca medida borrosa. En relación con esta nueva herramienta, surge la necesidad de abordar el problema de cómputo del índice de interacción o representación [74, 133], a cuyo respecto se presentan sendos métodos de estimación.

Por otra parte, se ha trabajado en la caracterización de un nuevo modelo de representación del conocimiento, fruto de la combinación de un grafo nítido con una medida borrosa. Se propone también la generalización a un plano multi-dimensional de este modelo, contemplando así la posibilidad de disponer de una cierta cantidad variable de medidas. El proceso de caracterización seguido en sendos casos es ilustrado para varios escenarios concretos ante la consideración de distintos tipos de medidas borrosas.

Finalmente, se ha trabajado en una aplicación concreta de las herramientas mencionadas, relativa a la detección de comunidades en grafos con información adicional. Note que muchos otros asuntos de temática SNA como los problemas de centralidad o propagación podrían haber sido abordados mediante el uso de los nuevos modelos aquí presentados.

A continuación se concretan los objetivos generales a desarrollar en esta memoria, así como los objetivos específicos relativos a cada uno de ellos, atendiendo al orden de aparición de los mismos en las siguientes páginas.

**Objetivo 1:** Proponer una metodología de aproximación del índice de interacción relativo a la medición del grado de interacción entre elementos [74, 133]. Se han encontrado escasas aportaciones en la literatura acerca de este índice, al menos desde una perspectiva práctica. Es por ello que se ha perseguido la obtención de nuevos métodos con los que, evitando la complejidad relativa al cálculo de su valor real, obtener buenas aproximaciones.

1. Proponer una caracterización alternativa del índice de interacción entre pares de elementos basada en órdenes (permutaciones).
2. Desarrollar dos algoritmos de estimación para aproximar el valor real del índice de interacción entres pares de elementos  $I_{ij}$ .
3. Evaluar la calidad de las estimaciones obtenidas mediante la comparativa con el valor real del índice de interacción concerniente a ciertas medidas borrosas.
4. Generalizar la caracterización alternativa del índice de interacción ba-

sada en órdenes (permutaciones) para facilitar la consideración de conjuntos de cualquier cardinal.

5. Proponer un algoritmo de estimación para obtener el índice de interacción entre los elementos de un conjunto de cualquier cardinal  $I_T$ .

**Objetivo 2:** Proponer una herramienta de modelado y visualización de las relaciones entre individuos definidas por una medida borrosa.

1. Definir el grafo valorado asociado a una medida borrosa, AWG. Proponer dos vías de cálculo necesarias para la construcción del AWG: índice de interacción y valor de Shapley.
2. Detallar el proceso de cálculo y obtención de ciertas medidas borrosas particulares:  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de un vector, medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de una matriz, y medidas borrosas bipolares. Detallar el proceso de construcción del AWG correspondiente.
3. Proponer una generalización al plano multi-dimensional del AWG: el multi-grafo valorado asociado a una familia de medidas borrosas (MAWG). Detallar el proceso de construcción de un MAWG para ciertas medidas.

**Objetivo 3:** Proponer un nuevo modelo de representación del conocimiento, fruto de la existencia de un grafo nítido y de una medida borrosa relativa a las relaciones entre los vértices del mismo: el grafo borroso extendido (EFG).

1. Hacer una revisión de los modelos de representación existentes, así como una exposición de sus carencias.
2. Proponer un nuevo mecanismo de representación del conocimiento a partir de la información representada por un grafo nítido en un conjunto con una medida borrosa externa que establece relaciones entre los vértices: grafo borroso extendido (EFG). Ilustrar el proceso de caracterización del EFG relativo a ciertas medidas borrosas concretas.
3. Generalizar el EFG a un plano multi-dimensional, de manera que sea posible abordar situaciones modeladas por un grafo en las que existen múltiples medidas borrosas independientes al mismo: grafo borroso extendido multi-dimensional (MEFG). Ilustrar el proceso de caracterización del MEFG relativo a familias de medidas borrosas concretas.

**Objetivo 4:** En el contexto de SNA, plantear una aplicación específica del EFG: detección de comunidades en grafos basada en medidas borrosas.

1. Trabajar en la detección de grupos de los nodos de una red considerando fuentes de información adicional independiente a la estructura

gráfica en que se basan las técnicas de agrupación clásicas. Propuesta de un algoritmo a través del cual poder analizar la información de una matriz ajena a la adyacencia de un grafo.

2. Trabajar en la detección de comunidades ante la existencia de medidas borrosas de distinta naturaleza.
3. Proponer diversas especificaciones de la versión preliminar del algoritmo de detección de comunidades atendiendo a distintos escenarios.

**Objetivo 5:** En el contexto de SNA, plantear una aplicación específica del MEFG: detección de comunidades en grafos basada en múltiples medidas borrosas.

1. Trabajar en la detección de grupos en grafos ante la existencia de una medida borrosa bipolar, haciendo hincapié en cómo la noción de *grupo* se ve afectada por la naturaleza bipolar de la medida en cuestión. Planteamiento de una modificación del algoritmo de Louvain mediante la cual incorporar la información definida por una medida borrosa bipolar a la detección de grupos.
2. Trabajar la detección de comunidades en grafos cuando la existencia de múltiples medidas borrosas ajenas a la estructura gráfica afecta a la noción de grupo. Proponer distintas especificaciones del método preliminar para incorporar la información adicional definida por una familia de medidas borrosas a la detección de comunidades en un grafo.
3. Evaluar la calidad del algoritmo propuesto considerando distintos modelos de referencia en combinación con el cálculo del NMI (*Normalized Mutual Information*).

**Objetivo 6:** Aplicar la metodología de detección de comunidades propuesta a un caso real.

1. Generación, depuración y análisis de una base de datos obtenida a partir de la red social Twitter.
2. Definición de una medida borrosa a partir de ciertas funciones de pertenencia o membresía.
3. Aplicación de algoritmos de detección de comunidades basadas en medidas borrosas en la red obtenida, considerando una medida de polarización como elemento base de la información adicional.

## 1.2. Metodología

Para alcanzar los objetivos descritos se ha seguido la siguiente metodología.

- Para el análisis y visualización de una medida borrosa, primero fue necesario contar con una herramienta de representación del conocimiento modelado por la misma. Así, una definición preliminar del grafo valorado asociado a una medida borrosa fue publicada en [88]. Posteriormente, en los trabajos [89, 85, 86, 87] se publicaron ciertas especificaciones de esta herramienta adaptadas a escenarios concretos.
- Dos alternativas son propuestas para la obtención del grafo valorado asociado a una medida borrosa. Una de ellas es el valor de Shapley, acerca del cual se dispone de una amplia gama de trabajos. Por el contrario, poco se conoce acerca de la otra vía sugerida, el índice de interacción. Es por ello que se trabajó en una caracterización alternativa del mismo, que facilitaría el desarrollo de un par de métodos de estimación con los que obtener buenas aproximaciones del valor real de este índice. Con la inspiración encontrada en [30, 31], estos métodos se desarrollaron y testaron en el trabajo [90].
- Para paliar algunas de las carencias de representación presentadas por métodos existentes, se trabajó en la generalización de un nuevo modelo de representación, fruto de una extensión de los grafos borrosos, resultante al considerar una medida borrosa junto con un grafo (EFG). Esta herramienta, introducida por primera vez en [88], permitiría el modelado de sinergias entre cualquier par de elementos de un grafo, independientemente de las conexiones de la estructura gráfica.
- Se aborda un problema específico de temática SNA, relativo a la detección de comunidades en grafos con información adicional. Se trabaja en una aplicación concreta del EFG para encontrar grupos en situaciones modeladas por un grafo acerca de cuyos individuos se tienen otras fuentes de información. Para ello, se hace imprescindible un análisis en profundidad del comportamiento y funcionamiento de uno de los métodos más usados en la temática de detección de comunidades: el algoritmo de Louvain [18]. Se trabaja en una interpretación alternativa de este método en la que se pueden distinguir dos parámetros de entrada. Esto permite evaluar las relaciones de vecindad en uno de los parámetros de entrada y medir la modularidad de la que depende el movimiento local de nodos en el otro parámetro. Esta dualidad facilita la incorporación de la información definida por una medida borrosa al proceso de definición de grupos. Se trabaja en el desarrollo de un algoritmo troncal, a partir del cual se proponen ciertas especificaciones que permiten abordar situaciones de diversa índole. La evaluación de los

métodos obtenidos se publica en [85, 87], donde se presentan modelos de referencia que, en combinación con el cálculo del NMI, permiten aseverar el buen desempeño de los procedimientos propuestos.

- Se trabaja en la aplicación de la metodología de detección de comunidades basadas en medidas borrosas en una base de datos real, obtenida de la red social Twitter. Se prepara una red compleja real, fruto de una extracción de dicha red social basada en ciertas publicaciones de talante político que se descargaron durante la pandemia provocada por la COVID-19 entre los meses de marzo y junio de 2020. Se pretende analizar cómo varía la estructura de comunidades al incorporar la posición política frente el gobierno español de los usuarios considerados.

### 1.3. Contribuciones

En esta sección se enumeran cronológicamente las contribuciones aportadas por el autor de esta memoria. La mayor parte de ellas se extraen del trabajo presentado en las siguientes páginas.

**Contribución 1:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection algorithm based on fuzzy measures*. In Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making Proceedings of INFUS Congress 2019 **1029**:133–140. (Scopus).

**Contribución 2:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures*. In Studies in Computational Intelligence Proceedings of ESCIM Congress 2019. (Scopus) [\[4\]](#).

**Contribución 3:** Barroso, M., Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Group definition based on flow in community detection*. Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. IPMU 2020. Communications in Computer and Information Science **1239**:524-538, Springer, Charm. (Scopus).

**Contribución 4:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures and theirs applications to community detection problems*. In Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020, Glasgow, UK 2020, 1–6. (Scopus).

**Contribución 5:** Gutiérrez, I., Barroso, M., Gómez, D., Castro, J., Espínola,

---

<sup>1</sup>La pandemia mundial provocada por la COVID-19 ha provocado un retraso en la publicación de este artículo.

R. (2020): *Pattern-based clustering problem based on fuzzy measures*. In Proceedings of 14th International FLINS Conference on Robotics and Artificial Intelligence. FLINS 2020. Developments of Artificial Intelligence Technologies in Computation and Robotics **12**: 412-420. (Scopus).

**Contribución 6:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information*. In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

**Contribución 7:** Castro, J., Espínola, R., Gutiérrez, I., Gómez, D. (2020): *Auctions. A New Method For Selling Objects With Bimodal Density Functions*. Computational Economics *2<sup>o</sup> revisión* (JCR).

**Contribución 8:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Multiple Bipolar Fuzzy Measures: an application to community detection problems for networks with additional information*. In International Journal of Computational Intelligence Systems **13**(1):1636–1649. (JCR).

**Contribución 9:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Polynomial Calculation Based on Sampling of the Interaction Index*. Envía-do a: Mathematics (JCR).

**Contribución 10:** Gutiérrez, I., Guevara, J.A., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Community Detection Problem Based on Polarization Measures: an application to the COVID-19 case in Spain*. Preprints Mathematics, (JCR) 2021010080 (doi: 10.20944/preprints202101.0080.v1).

## Capítulo 2

# Preliminares

*Concierto para Violonchelo N.º 2  
Si menor, Op.104*

A. Dvořák

**RESUMEN:** En este capítulo se enuncian los conceptos que asentarán la base de la memoria, concretando también la notación que se utilizará. Para ello se hace una distinción de la materia en tres temáticas. Por una parte, en la Sección 2.1 se presentan los conceptos esenciales relativos a la Teoría de la Medida, sobre los que se construirán distintas medidas borrosas. La Sección 2.2 se reserva a la presentación de los principios básicos de la Teoría de Grafos, haciendo especial hincapié en el problema de detección de comunidades en grafos. Se presenta uno de los algoritmos más populares y usados en este campo, el algoritmo de Louvain, metodología esencial en este trabajo. Finalmente, en la Sección 2.3 se presentan ciertos operadores de agregación, imprescindibles para la combinación de las dos temáticas mencionadas.

En esta memoria se hará referencia al conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$  con  $n$  elementos que pueden ser entendidos como actores, atributos, criterios, votos en un problema de decisión, o jugadores de un juego cooperativo entre otros ejemplos [83]. Particularmente, en los casos en que este conjunto represente al conjunto de vértices o nodos de un grafo, la notación usada será  $V$ . Por otra parte,  $\mathcal{P}(S)$  denotará el conjunto de todos los subconjuntos de  $S$ , mientras que el conjunto de todas las matrices cuadradas de tamaño  $n$  será denotado como  $\Pi(n)$ , o simplemente  $\Pi$  cuando no se preste a confusión. En el marco de las medidas borrosas, el valor del elemento  $i$  en la misma se denotará como  $\mu(i)$ ,  $\mu_i$  ó  $\mu(\{i\})$  indistintamente. Particularmente, al tratar con medidas obtenidas a partir de un vector  $x$ , se denotará como  $\mu_x$  a la medida asociada

a un cierto vector  $x$ , de modo que  $\mu_x(i)$  o  $\mu_x(\{i\})$  denotarán indistintamente el valor del elemento  $i$  en la medida borrosa  $\mu_x$ .

En todos los casos, se ha intentado adaptar la notación empleada a la utilizada en distintos trabajos de investigación publicados previamente en diversos medios.

## 2.1. Teoría de la medida.

El concepto de *medida* surgió ante la necesidad del manejo y cálculo de áreas, longitudes y volúmenes. Los papiros de Moscú y el de Ahmes o Rhind, datados en el siglo XIX a.C., son los documentos conocidos más antiguos en los que se trata este problema. Siglos después, en el tratado *Los elementos de Euclides* (300 a.C.) aparecerían las primeras demostraciones matemáticas de teoremas relativos a medidas de áreas y volúmenes. En este tratado, además de algunas aportaciones atribuidas a Euxodo, Arquímedes y otros autores, se recopilan ciertos axiomas que regirían los principios de la medida hasta 1883, año en que G. Cantor propuso la primera definición de medida  $m(K)$  como conjunto arbitrario (acotado)  $K \subset \mathbb{R}^n$ . La definición de la medida de Lebesgue a principios del siglo XX por E. Borel y H. Lebesgue, supuso un hito que revolucionó el desarrollo de la teoría de la medida. Esta aportación facilitó la medición de objetos en la recta real. Después de esta, surgirían otras importantes medidas, como la dimensión topológica, propuesta por H. Poincaré y generalizada por F. Hausdorff con la dimensión o medida que lleva su mismo nombre. En los años 20, el matemático ruso A.S. Besicovitch definió las bases de la Teoría Matemática de la Medida, una importante rama de las matemáticas cuya popularidad creció de manera exponencial, especialmente en la segunda mitad del siglo XX [93]. Este área de conocimiento ha sido esencial para el desarrollo de diferentes ámbitos científicos, como las medidas de capacidad de G. Choquet [36]; las medidas borrosas, introducidas por M. Sugeno [176]; el concepto de granularidad y las medidas de necesidad y posibilidad propuestas por L.A. Zadeh [203, 207]; además de las medidas de especificidad propuestas por R.R. Yager [195], las de no-especificidad, discutidas por M. Higashi y G.J. Klir [97], y el concepto de especificidad mínima, de D. Dubois y H. Prade [53].

Un concepto muy importantes en el campo de la medida es la aditividad, esencial al tratar con probabilidades o con la medida de Lebesgue. No obstante, en distintas disciplinas se han propuesto otras soluciones con propiedades eficaces como la subaditividad y la superaditividad, para el caso de las medidas borrosas de M. Sugeno [176]; las medidas de posibilidad basadas en el supremo, la intersección o el ínfimo que conforman la teoría de la posibilidad y la necesidad de L.A. Zadeh [207]; o las medidas con propiedades monótonas, como las  $\lambda$ -medidas borrosas generalizadas por M. Sugeno [177].

### 2.1.1. Medidas Borrosas

A continuación se presenta una reseña acerca de uno de los pilares que conforman la estructura de esta memoria: las medidas borrosas. Estas funciones de conjunto monótonas engloban medidas de plausibilidad, posibilidad o capacidad, entre otras. Como señala G. Beliakov, [15], las medidas difusas ó de capacidad son fundamentales para modelar dependencias entre elementos. Constituyen una herramienta natural de modelado en muchos ámbitos relacionados con el análisis de decisiones de multi-criterio, la agregación, toma de decisiones grupales o Teoría de Juegos. Dichas medidas posibilitan el tratamiento de la incertidumbre inevitable e inherente a la vida y a la vaguedad del lenguaje humano a la hora de modelar problemas reales, ofreciendo un razonamiento mucho más flexible que el alcanzado mediante técnicas convencionales [27, 28, 104]. En su libro *Utopía*, Isaac Asimov escribía *‘La incertidumbre, no obstante, formaba parte de la vida. Esperar hasta contar con una certeza absoluta equivalía a quedarse atascado hasta que fuera demasiado tarde. [...] Sabía que nunca tendría información completa o totalmente precisa; pero aun así debía actuar, debía decidir, debía emplear los datos que tenía o creía tener, y dejar que me llevaran a donde fuese’*. Sirva esta extracción literaria para ilustrar la necesidad de contar con herramientas de modelado sofisticadas como las medidas borrosas, con las que poder representar y manipular la ambigüedad, incertidumbre y vaguedad.

Las medidas borrosas han atraído la atención de muchos científicos en las últimas décadas, provocando la producción de cientos de trabajos como los de M. Grabisch [73] o los de D. Dubóis [51], por mencionar algunos. Es evidente su utilidad y aplicación en numerosas disciplinas, como por ejemplo en el modelado de interacciones entre elementos. Desafortunadamente, su manejo no comprende un proceso trivial. Además de la dificultad derivada de la cantidad de valores necesarios para la definición de una medida borrosa, la interpretación y comprensión de su significado se vuelven tareas tediosas y en absoluto sencillas, cuya complejidad crece exponencialmente a medida que aumenta la cantidad de elementos considerados.

**Definición 2.1.1 (Medida borrosa [176]).** Sea  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  un conjunto finito. Una medida borrosa es una función  $\mu : \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$  que cumple las siguientes premisas:

- $\mu(\emptyset) = 0$  y  $\mu(S) = 1$ ;
- Monotonía: para cualquier par  $A, B$  de subconjuntos de  $S$  tales que  $A \subseteq B \subseteq S$ , se cumple  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

Para caracterizar una medida borrosa son necesarios  $2^n$  coeficientes, cada uno de los cuales representa el valor de dicha medida borrosa en cada uno de los posibles subconjuntos de  $S$ . Dependiendo de si satisfacen ciertas

propiedades, las medidas borrosas pueden ser clasificadas en diferentes tipos, que se enuncian a continuación. Así, una medida borrosa es:

- **Medida borrosa Booleana** ó **0 – 1 medida borrosa**, si únicamente toma los valores 0 y 1.
- **Supermodular**, si para todo par  $A, B \subset S$ , se cumple que  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A) + \mu(B)$ .
- **Submodular**, si para todo par  $A, B \subset S$ , se cumple que  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ .
- **Superaditiva**, si para todo par  $A, B \subset S$  tal que  $A \cap B = \emptyset$ , se cumple que  $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$ .
- **Subaditiva**, si para todo par  $A, B \subset S$  tal que  $A \cap B = \emptyset$ , se cumple que  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ .
- **Simétrica**, si para todo par  $A, B \subset S$  tal que  $|A| = |B|$ , se cumple  $\mu(A) = \mu(B)$ .
- **$k$ -monótona** [33], si, siendo  $k \geq 2$ , para toda familia de  $k$  subconjuntos,  $A_1, \dots, A_k$ , con  $A_i \subset S$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , se cumple

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

De una medida borrosa con la propiedad de 1-monotonidad, se dirá que es monótona. Una medida borrosa  $k$ -monótona  $\forall k \geq 2$  será llamada medida borrosa totalmente monótona.

- **$k$ -alternativa**, si, siendo  $k \geq 2$ , para toda familia de  $k$  subconjuntos,  $A_1, \dots, A_k$ , con  $A_i \subset S$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ , se cumple

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|+1} \mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

Note que la supermodularidad coincide con la 2-monotonidad. Esta propiedad, también conocida como convexidad [170], implica superaditividad. Por otra parte, las medidas submodulares son también 2-alternas.

Hay otro tipo de medidas borrosas en que merece hacer hincapié: las medidas borrosas  **$k$ -aditivas**. El dilema de la  $k$ -aditividad es que su comprobación suele ser una tarea ardua, dependiendo de la medida borrosa. M. Grabisch propuso una solución para aliviar esta complejidad, basada en la función pseudo-Booleana relativa a una medida borrosa, definiendo una condición necesaria y suficiente que garantiza la  $k$ -aditividad [74].

En [94] se pueden encontrar muchos avances y aplicaciones relativos a las funciones pseudo-Booleanas (función real  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ). Particularmente, cualquier función pseudo-Booleana se puede escribir como un polinomio multi-lineal de la forma  $f(x) = a + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{i < j}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{i < j}^n \sum_{j < k}^n a_{ijk} x_i x_j x_k + \dots$ , de manera que el grado de este polinomio es el grado de la función pseudo-Booleana correspondiente. Equivalentemente, una función pseudo-Booleana se puede caracterizar como  $f(x) = \sum_{T \subset S} [a_T \prod_{i \in T} x_i]$ , donde  $a_T \in \mathbb{R}$  y  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ . Particularmente, una medida borrosa es una clase específica de función pseudo-Booleana:  $\forall A \subset S$ ,  $A$  es equivalente a un punto  $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ , donde  $x_i = 1 \iff i \in A$ , donde, dado  $T \subset S$ , el conjunto de coeficientes  $a_T$  puede considerarse como la correspondiente transformación de Möbius. Una vez asentado el concepto de función pseudo-Booleana, se plantea la caracterización de medida borrosa  $k$ -aditiva propuesta por M. Grabisch.

**Definición 2.1.2 (k-aditividad [74]).** Sea  $\mu$  una medida borrosa definida sobre el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$ , y sea  $k \in \mathbb{N}$  un número natural. La medida borrosa  $\mu$  es  $k$ -aditiva si su correspondiente función pseudo-Booleana es una función multilineal polinómica de grado  $k$ , i.e.  $a_T = 0$  para todo subconjunto  $T \subset S$ , tal que  $|T| > k$ , y existe al menos un subconjunto  $K$  cuyo cardinal es  $|K| = k$ , tal que  $a_K \neq 0$ .

Note que, dada una medida borrosa  $k$ -aditiva, cuando menor sea el valor de  $k$ , menor cantidad de coeficientes serán necesarios para su definición. En particular, esta cantidad puede calcularse como  $\sum_{j=1}^k \binom{n}{j}$ .

### 2.1.2. Números borrosos trapezoidales

En esta sección se presentan los números borrosos [52, 100, 101], herramienta propia de la lógica borrosa. Particularmente se tratan los números borrosos trapezoidales [185], utilizados posteriormente para su aplicación en diversos modelos de evaluación de los algoritmos que se propondrán.

Introducidos por L.A. Zadeh en 1975 [204, 205, 206], los números borrosos se definen en situaciones de incertidumbre, y son aplicados a la resolución de muchos problemas reales, particularmente en el ámbito de análisis y toma de decisiones [50]. Hasta la aparición de las leyes de la lógica multivaluada, la Ley de Identidad, la del Medio Excluido o la Ley de No Contradicción, se carecía de herramientas con las que representar la noción de vaguedad [122]. La enunciación de estas leyes cimentaría las bases de la lógica borrosa, marco en que se ambienta la caracterización de los números borrosos. Como se puede apreciar en la siguiente definición, los números borrosos no son más que el resultado de una extensión de los números reales.

**Definición 2.1.3** (Número borroso [204, 205, 206]). Un número borroso o difuso es una generalización de un número real. Se trata de un conjunto conectado de valores posibles, donde cada uno de ellos está relacionado a un peso entre 0 y 1, asignado mediante una función de pertenencia. Matemáticamente, la función  $f_{\mathcal{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , tal que  $f_{\mathcal{A}}(x) = 1 \Leftrightarrow x = \mathcal{A}$  y  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f_{\mathcal{A}}(x) = 0$  es la función de pertenencia del número borroso  $\mathcal{A}$ .

En esta memoria se considera un tipo concreto de número borroso para la generación de los grafos de referencia: los números borrosos trapezoidales. Son aquellos cuya función de pertenencia forma un trapecio con el eje de abscisas (Figura 2.1).

**Definición 2.1.4** (Número borroso trapezoidal [185, 187]). Un número borroso  $\mathcal{A} = (a, b, c, d)$  es trapezoidal si su función de pertenencia  $f_{\mathcal{A}}$  se define como:

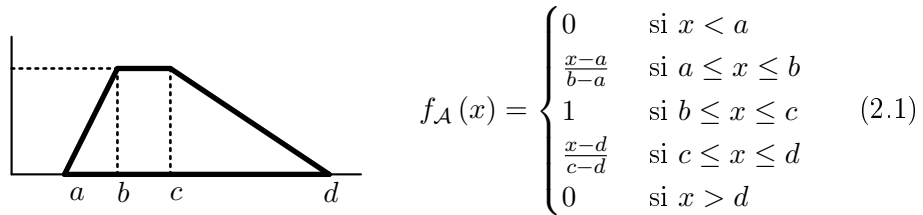


Figura 2.1: Función de pertenencia de un número borroso trapezoidal.

Como se puede intuir por su nombre, la función de pertenencia de este tipo de número borroso es lineal y trapezoidal por partes, característica que facilita un tratamiento más flexible de la información, dotando a la representación de la vaguedad e incertidumbre consecuentes de la transformación de ciertas evaluaciones lingüísticas en variables numéricas.

### 2.1.3. Valor de Shapley.

Uno de los dilemas comprendidos en el entendimiento de las medidas borrosas es acerca de la interpretación de la importancia de un elemento. Un acercamiento a la representación de la importancia del elemento  $i \in S$ , relativa a la medida borrosa  $\mu$  definida en  $S$ , podría ser considerando únicamente el valor  $\mu_i$ . El problema de esta definición intuitiva es que no recorre todos los valores  $\mu(K)$ , donde  $i \in K$ , que tal vez, sí deberían ser considerados. En 1953, L.S. Shapley propuso una solución en forma de índice de importancia, con la que cuantificar la trascendencia de los distintos elementos de un conjunto, atendiendo a una medida borrosa [169]. Este índice de importancia ha

sido estudiado, analizado y modificado en las últimas décadas, apareciendo múltiples propuestas de aplicación en distintas áreas [7, 13, 117, 197]. Se ha incidido particularmente en su estudio teórico, ya que, desde un punto de vista computacional, se trata de un problema NP [48, 58], esto es, no existe ningún algoritmo polinomial para su resolución. Se trata de una herramienta fundamental en Teoría de Juegos, que también ha sido caracterizada en el marco de medidas borrosas, como se muestra en la siguiente definición.

**Definición 2.1.5 (Índice de Shapley [74, 77, 169]).** Sea  $S$  un conjunto finito de cardinalidad  $n$ , y sea  $\mu$  una medida borrosa definida en  $S$ . Para cada elemento  $i \in S$ , su índice de Shapley se define como sigue:

$$Sh_i(\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \sum_{\substack{K \subset S \setminus \{i\} \\ |K|=k}} (\mu_{iK} - \mu_K) \quad (2.2)$$

donde

$$\gamma_k = \frac{(n-k-1)!k!}{n!} = \frac{1}{\binom{n-2}{k}(n-1)}$$

Para cada elemento  $i \in S$ , su índice de Shapley,  $Sh_i(\mu)$ , puede ser interpretado como un promedio de las contribuciones de dicho elemento  $i$  en todas las coaliciones posibles, dependiendo de  $\mu$ . En general, el valor de Shapley de la medida borrosa  $\mu : \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$  queda definido por el vector  $Sh(\mu) = (Sh_1(\mu), \dots, Sh_n(\mu))$ .

Se conoce una caracterización de este índice basada en órdenes, que facilita su interpretación y manipulación [29].

**Definición 2.1.6 (Índice de Shapley basado en órdenes [29, 169]).** Dado un conjunto finito  $S$  de cardinal  $|S| = n$ , se considera el elemento  $i \in S$ . Sea  $\pi(S)$  el conjunto de todas las posibles permutaciones de todos los elementos de  $S$ , y sea  $o \in \pi(S)$  uno de estos órdenes. Se considera también el conjunto  $Pred(i)$  de los elementos de  $S$  que son predecesores de  $i$  en el orden  $o$ . El índice de Shapley de  $i$  relativo a  $\mu$  se define como sigue:

$$Sh_i(\mu) = \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(S)} [\mu(Pred(i) + \{i\}) - \mu(Pred(i))] \quad (2.3)$$

Las referencias encontradas relativas a la aproximación del valor de Shapley se limitan a algunos problemas específicos, como por ejemplo, los juegos simples, estudiados por G. Owen [149], o ciertos casos particulares en los que la población presenta un comportamiento específico, como los estudiados por W.G. Cochran [39] o H. Lohr [120]. Más allá de estas soluciones tan concretas, en 2009 J. Castro et al [31] propusieron un método de muestreo para

aproximar el valor de Shapley, en el que se combinan técnicas estadísticas con el estudio de la Teoría de Juegos. Poco después, plantearon una mejora del mismo, con la propuesta de un método de muestreo estratificado con asignación óptima [30]. Ambas aproximaciones se basan en la caracterización alternativa del índice de Shapley basada en órdenes descrita previamente.

#### 2.1.4. Índice de Interacción

Más allá de la fuerza o importancia de los individuos en las distintas coaliciones cuantificada por el valor de Shapley, hay muchos otros aspectos interesantes que analizar en el marco de las medidas borrosas, como por ejemplo, las interacciones entre los distintos elementos [78, 107, 108]. En 1993, T. Murofushi y S. Soneda propusieron un índice de interacción [133] basado en ciertos conceptos tomados de la Teoría de multi-atributos de utilidad.

**Definición 2.1.7 (Índice de Interacción [133]).** Sea  $S$  un conjunto finito de cardinal  $|S| = n$ , y sea  $\mu$  una medida borrosa en  $S$ . Dados dos elementos  $i, j \in S$ , su índice de interacción se define como sigue:

$$I_{ij}(\mu) = \sum_{k=0}^{n-2} \zeta_k \sum_{\substack{K \subset S \setminus \{i,j\} \\ |K|=k}} (\mu_{ijK} - \mu_{iK} - \mu_{jK} + \mu_K) \quad (2.4)$$

donde

$$\zeta_k = \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!} = \frac{1}{\binom{n-2}{k}(n-1)}$$

Haciendo una interpretación análoga a la dada para el índice de Shapley introducido en la Definición 2.1.5, el índice de interacción  $I_{ij}(\mu)$  se puede entender como un promedio del valor añadido obtenido al considerar los elementos  $i$  y  $j$  juntos en la misma coalición, dependiendo de  $\mu$ . Entre otros investigadores, cabe resaltar el trabajo de M. Grabisch et al., quienes han dedicado grandes esfuerzos al análisis de este índice, presentando un completo estudio en [77]. En 1997, poco después de la aparición de este trabajo, M. Grabisch desarrolló en [74] una generalización del índice de interacción de T. Murofushi y S. Soneda [133]. Esta caracterización, desarrollada por analogía con las clases de primer y segundo orden, cuenta con un ámbito de aplicación más amplio que la anterior. Se trata de un índice de interacción de elementos, también conocido como representación de las interacciones entre elementos, que puede ser aplicado a conjuntos con más de dos elementos.

**Definición 2.1.8 (Índice de Interacción de Grabisch/Representación de la Interacción [74]).** Sea  $S$  un conjunto finito de cardinal  $|S| = n$ , y sea  $\mu$  una medida borrosa definida en  $S$ . Para cualquier subconjunto  $T \subset S$ , el

índice de interacción de sus elementos se define como sigue:

$$I_T(\mu) = \sum_{k=0}^{n-|T|} \zeta_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset S \setminus T \\ |K|=k}} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|} \mu_{LK} \quad (2.5)$$

donde

$$\zeta_k^p = \frac{(n-k-p)!k!}{(n-p+1)!} = \frac{1}{\binom{n-p}{k}(n-p+1)}$$

Cuando se consideran conjuntos con un único elemento,  $T = \{i\}$ , la definición anterior es análoga al valor de Shapley de  $i$  en  $\mu$ ,  $Sh_i(\mu)$ . Análogamente, al tratar con conjuntos de dos elementos, la representación de la interacción de los elementos del conjunto  $T = \{i, j\}$  en  $\mu$ ,  $I_T(\mu)$  se corresponde con el índice de interacción de los elementos  $\{i, j\}$  en  $\mu$  introducido en la Definición [2.1.7](#),  $I_{ij}(\mu)$ .

## 2.2. Teoría de Grafos

El nacimiento de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII. Había en esa época un famoso problema abierto, conocido como ‘Problema de los puentes de Königsberg’. La ciudad de Königsberg, actual Kaliningrado, estaba situada en la desembocadura del río Pregolya, cuyo curso atravesaba la localidad, dividiéndola en varias zonas. La ciudad contaba con siete puentes que favorecían la comunicación entre las distintas áreas. Partiendo de esta estructura, surgió entre sus habitantes una cuestión que se alzó con gran popularidad: se planteaban la posibilidad de que existiera un camino que cruzara todos los puentes, pasando una sola vez por cada uno de ellos. En 1736, el matemático suizo Leonhard Euler logró demostrar la imposibilidad de encontrar dicho camino: demostró que con la configuración ofrecida por la estructura de la ciudad no es posible formar un ciclo euleriano. Esta solución, considerada el primer teorema de teoría de grafos y grafos planares, situó a Euler como padre de la teoría de grafos.

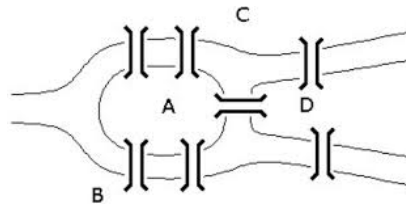


Figura 2.2: Problema de los puentes de Königsberg.

El concepto de grafo tal y como lo entendemos en la actualidad, fue

acuñado por J. Sylvester en 1878, en un trabajo publicado en Nature [179]. En [17] se recogen las bases que marcarían los inicios de la teoría de grafos.

**Definición 2.2.1 (Grafo [179]).** Sea  $V = \{1, \dots, n\}$  un conjunto finito de elementos, llamados vértices. Sea  $E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V\}$  un conjunto no ordenado de pares de vértices, llamados aristas o arcos. El par  $G = (V, E)$  es llamado grafo o red.

Se dice que dos vértices  $i, j \in V$  están conectados en  $G$  si existe la arista  $\{i, j\} \in E$ . El número de vértices se denota como  $n = |V|$ , y el número de aristas como  $m = |E|$ . Para cada vértice  $i \in V$ ,  $H(i)$  representa el conjunto de vértices vecinos o adyacentes a  $i$ . El grado de  $i$ , denotado por  $k_i$ , es la cardinalidad de su conjunto de vecinos,  $k_i = |H(i)|$ .

**Ejemplo 2.2.1.**

(1) Se considera el grafo  $G_1 = (V_1, E_1)$  representado en la Figura 2.3. Está constituido por un conjunto de  $n_1 = |V_1| = 6$  nodos,  $V_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$ , y un conjunto de  $m = |E| = 5$  aristas,  $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, F\}, \{B, E\}, \{C, D\}\}$ . Por otra parte, para cada vértice  $i$ , su conjunto de nodos vecinos,  $H(i)$ , y su cardinalidad,  $k_i$ , son:

- |                        |             |
|------------------------|-------------|
| ▪ $H(A) = \{B, C, F\}$ | ▪ $k_A = 3$ |
| ▪ $H(B) = \{A, E\}$    | ▪ $k_B = 2$ |
| ▪ $H(C) = \{A, D\}$    | ▪ $k_C = 2$ |
| ▪ $H(D) = \{C\}$       | ▪ $k_D = 1$ |
| ▪ $H(E) = \{B\}$       | ▪ $k_E = 1$ |
| ▪ $H(F) = \{A\}$       | ▪ $k_F = 1$ |

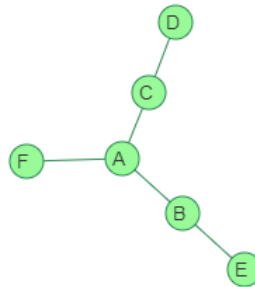


Figura 2.3: Grafo  $G_1 = (V_1, E_1)$ .

(2) Se considera el grafo  $G_2 = (V_2, E_2)$  representado en la Figura 2.4. Está constituido por un conjunto de  $n_2 = |V_2| = 6$  nodos,  $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ , y un conjunto de  $m = |E| = 7$  aristas,  $E = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, E\}, \{D, E\}\}$ . Por otra parte, para cada vértice  $i$ , su conjunto de nodos vecinos,  $H(i)$ , y su cardinalidad,  $k_i$ , son:

- |                           |             |
|---------------------------|-------------|
| ▪ $H(A) = \{B, D, E\}$    | ▪ $k_A = 3$ |
| ▪ $H(B) = \{A, D, E\}$    | ▪ $k_B = 3$ |
| ▪ $H(C) = \{E\}$          | ▪ $k_C = 1$ |
| ▪ $H(D) = \{A, B, E\}$    | ▪ $k_D = 3$ |
| ▪ $H(E) = \{A, B, C, D\}$ | ▪ $k_E = 4$ |
| ▪ $H(F) = \emptyset$      | ▪ $k_F = 0$ |

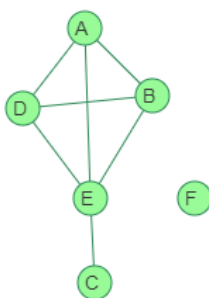


Figura 2.4: Grafo  $G_2 = (V_2, E_2)$ .

**Definición 2.2.2 (Grafo Valorado [179]).** Del grafo  $G = (V, E)$  se dice que es valorado si cada una de sus aristas tiene asignado un peso, ponderación o factor, i.e. existe una función definida sobre el conjunto de aristas que a cada una de ellas le asigna un valor,  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $w(\{i, j\})$  es el peso de la arista  $\{i, j\}$ . Para simplificar la notación, se considerará  $w_{ij} := w(\{i, j\})$ .

### Ejemplo 2.2.2.

(1) Se considera el grafo  $G_1^w = (V_1, E_1)$  introducido en el Ejemplo 2.2.1. Se asume que existe una función  $w$  definida sobre el conjunto de aristas  $E_1$ , que asigna un peso o valor a cada arco, como se puede observar en la Figura 2.5. Así, la función de pesos  $w$  se define como sigue:

- $w_{AB} = 4.3$
- $w_{AC} = 1.9$
- $w_{AF} = 0.5$
- $w_{BE} = 10$
- $w_{CD} = 1.1$

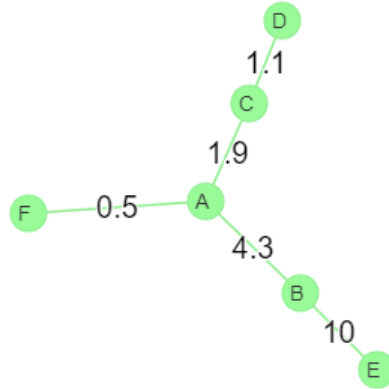


Figura 2.5: Grafo  $G_1^w = (V_1, E_1)$  com função de pesos  $w$ .

(2) Se considera el grafo  $G_2^w = (V_2, E_2)$  introducido en el Ejemplo [2.2.1](#). Se asume que existe una función  $w'$  definida sobre el conjunto de aristas  $E_2$ , que asigna un peso o valor a cada arco, como se puede observar en la Figura [2.6](#). Así, la función de pesos  $w'$  se define como sigue:

- $w'_{AB} = 0.9$
- $w'_{AD} = 1.9$
- $w'_{AE} = 3$
- $w'_{BD} = 1.9$
- $w'_{CE} = 1$
- $w'_{BE} = 10$
- $w'_{DE} = 5$

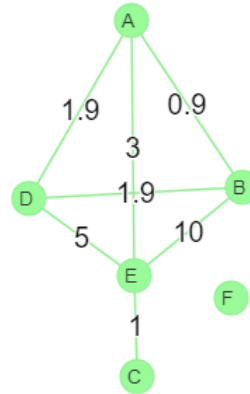


Figura 2.6: Grafo  $G_2^{w'} = (V_2, E_2)$  con función de pesos  $w'$ .

Una manera alternativa de representar un grafo, sea o no valorado, es mediante su matriz de adyacencia,  $A$ .

**Definición 2.2.3 (Matriz de adyacencia [\[179\]](#)).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Su matriz de adyacencia  $A(G)$  ( $A$  abusando de notación) se define para cada par de vértices  $i, j \in V$  como

$$A_{ij}(G) = \begin{cases} w_{ij} & \text{si } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin E \end{cases}$$

donde  $w_{ij}$  es el peso asignado a la arista  $\{i, j\}$ .

En el caso particular de grafos no valorados, se asume que  $w_{ij} = 1$ ,  $\forall \{i, j\} \in E$ . A continuación se muestran las matrices de adyacencia de los grafos introducidos en el Ejemplo 2.2.1 y el Ejemplo 2.2.2. Para ello, se considera el orden lexicográfico de los nodos, de modo que el nodo  $A_i$  y  $F_i$  serán el primer y el último nodo del grafo  $G_i$ , respectivamente.

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.7: Matriz de adyacencia del grafo no valorado  $G_1$ .

$$A(G_1^w) = \begin{pmatrix} 0 & 4.3 & 1.9 & 0 & 0 & 0.5 \\ 4.3 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 1.9 & 0 & 0 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.8: Matriz de adyacencia del grafo valorado  $G_1^w$ .

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.9: Matriz de adyacencia del grafo no valorado  $G_2$ .

$$A(G_2^{w'}) = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 1.9 & 3 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 1.9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1.9 & 10 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 10 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.10: Matriz de adyacencia del grafo valorado  $G_2^{w'}$ .

En las definiciones y ejemplos previos se ha asumido la no direccionalidad de las conexiones; sin embargo, se puede dotar de direccionalidad a las aristas.

**Definición 2.2.4 (Grafo dirigido).** Se dice de un grafo que es dirigido o un digrafo si sus arcos tienen un sentido definido, esto es, cada arista es un par ordenado de nodos, que tiene establecido un vértice de origen y otro de fin. Así, la arista  $(i, j)$  del digrafo  $G$  tendrá a  $i$  como nodo origen o cabeza, y a  $j$  como nodo destino o cola. En los grafos dirigidos, las conexiones entre nodos no tienen por qué ser simétricas, a diferencia de lo que ocurre con grafos no dirigidos. Cada arista de un grafo no dirigido es un par no ordenado de nodos, de modo que la arista  $\{i, j\}$  es la misma que  $\{j, i\}$  (lógicamente, si existe una, ha de existir la otra). Cuando se trata de grafos no dirigidos, la relación sobre los elementos de  $V$  es simétrica.

La direccionalidad de un digrafo también se puede representar mediante su matriz de adyacencia, de modo que, si existiera la arista  $(i, j) \in E$ , y tuviera un peso asignado  $w_{ij}$ , entonces  $A_{ij} = w_{ij}$ . Al contrario de lo que sucedería en un grafo no dirigido, esto no implica que  $A_{ji} = w_{ji}$ . También hay que tener en cuenta que un digrafo puede ser o no valorado.

**Ejemplo 2.2.3.** En este ejemplo se consideran un digrafo y un grafo no dirigido, ambos con una función de pesos asignada, la cual los convierte en grafo/digrafo valorados. Se ofrecen dos formas de representación para cada uno de ellos: un gráfico y la matriz de adyacencia correspondiente. Note que en ambos casos se han considerado grafos valorados o ponderados, pero también podría darse el caso de que no existiera ninguna función de pesos definida sobre el conjunto de aristas, de manera que cada valor no nulo de las matrices de adyacencia pasarían a tomar el valor 1. En este supuesto, se dispondría de un grafo no dirigido y de un digrafo, ambos no valorados.

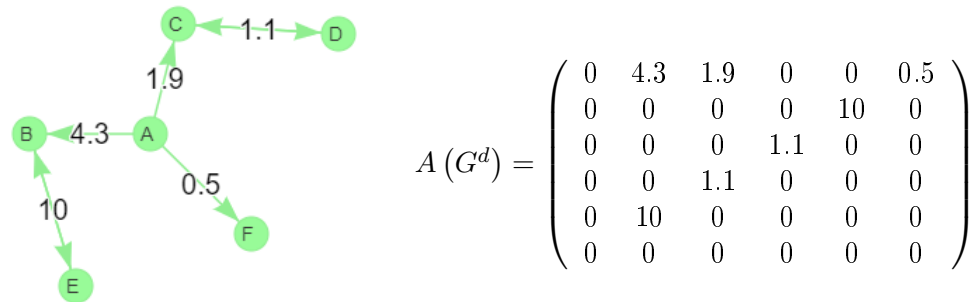


Figura 2.11: Digrafo  $G^d$  con función de pesos  $w$ , y su matriz de adyacencia.

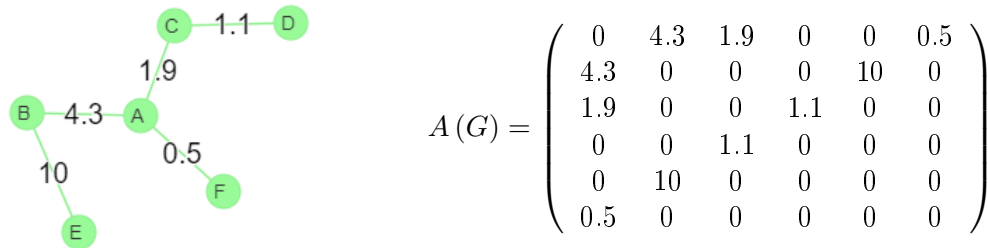


Figura 2.12: Grafo  $G$  con función de pesos  $w$ , y su matriz de adyacencia.

En aspectos concernientes a la estructura de una red, en esta memoria se trabajará principalmente con grafos no dirigidos, que serán referenciados únicamente como grafos. Así, considerando el grafo  $G = (V, E)$  cuya matriz de adyacencia es  $A$ , tendremos que  $A_{ij} = A_{ji} \forall i, j \in V$ . En algunos escenarios, particularmente en el experimento presentado en el Capítulo 9, el grafo considerado tendrá asociada una función de pesos.

Por otra parte, en las siguientes páginas se considerarán distintas matrices de adyacencia. Atendiendo a la naturaleza del grafo correspondiente, se usará una u otra notación. Así, cuando se refiera a un grafo  $G = (V, E)$ , la matriz de adyacencia pertinente será denotada como  $A$ . Por otra parte, la matriz de adyacencia del grafo valorado asociado a una medida borrosa,  $G_\mu$ ,

será denotada de forma general como  $F$  (ver Sección 4.2 para más detalles), especificando en caso que sea necesario si su caracterización se ha llevado a cabo aplicando el valor de Shapley o el índice de interacción. Atendiendo a la naturaleza de la medida borrosa en cuestión,  $\mu$ , esta matriz  $F$  también podría denotarse como  $X$ , cuando se trate de una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir de un vector  $x$  (Sección 4.3.1), y  $R$  en caso de contemplar una medida borrosa de afinidad obtenida a partir de una matriz (Sección 4.3.2). Para el caso concreto en que la medida borrosa considerada es bipolar y por tanto el multi-grafo el grafo asociado correspondiente tiene dos componente y por ende dos matrices de adyacencia, estas serán denotadas como  $F^-$  y  $F^+$  (Sección 4.3.3).

### 2.2.1. Redes Complejas: Problema de detección de comunidades

El concepto de red compleja fue acuñado al final de la década de los 90, y se asienta en los principios de las ciencias sociales y la teoría de grafos. En definitiva, una red compleja no es más que un grafo (red) que presenta ciertas propiedades que no son propias de las redes más sencillas o aleatorias, pero que suelen aparecer con el tratamiento de sistemas reales [19, 41, 56, 112, 141]. En lo que sigue se usarán indistintamente los conceptos grafo-red (compleja), asumiendo que las estructuras consideradas tendrán características no triviales. Una de las propiedades más notables de los problemas modelados mediante redes complejas es que suelen presentar cierta estructura de comunidades: los nodos tienden a estar organizados en grupos de elementos densamente conectados entre sí, con escasas relaciones con los nodos de otro grupo [10, 137]. La detección de estos grupos o comunidades facilita la comprensión de la topología y funcionalidad de las redes complejas, aumentando su eficacia [9, 80, 165, 178, 188]. Este tipo de problemas se ha convertido en un campo interdisciplinario muy importante con muchas aplicaciones en diversas áreas [16, 32, 95, 158, 174, 180]. Por ejemplo, una red de interacción de proteínas se puede dividir en grupos modulares formados por conjuntos de proteínas que interactúan física o funcionalmente, y módulos separables de proteínas; una red social se puede dividir en grupos atendiendo a los intereses o antecedentes de los individuos, de modo que cada comunidad es un conjunto de individuos vinculados socialmente mediante relaciones cercanas.

El objetivo final de los problemas de detección de comunidades es la obtención de una partición *buena* de vértices. Para la resolución de este tipo de problemas, se proponen métodos de aprendizaje no supervisado [20, 21, 25, 154, 184] conocidos como métodos de *clustering*. Dado un conjunto de objetos, el resultado proporcionado por estos algoritmos es una partición del conjunto inicial de vértices en subgrupos. Algunos de los nombres que reciben estos subgrupos son comunidad, módulo o *cluster*. La par-

tición obtenida depende de las conexiones o relaciones existentes entre los elementos a agrupar. Es fundamental que los objetos asignados a una misma comunidad sean muy similares entre sí, y al mismo tiempo, lo menos similares posible a los elementos de otros grupos. Es decir, se busca una partición del conjunto inicial en subgrupos que presente una alta homogeneidad intra-grupal y una alta heterogeneidad inter-grupal. N.E. Friedkin, catedrático de la Universidad de California, resumió esta situación en la siguiente frase: *‘the more distant two vertices are, the less they influence each other’* [69].

En sus orígenes, los problemas de detección de comunidades fueron definidos para la resolución de problemas relacionados con redes no valoradas y no dirigidas, cuyo modelado se podía simplificar en el grafo relativo a su matriz de adyacencia. Más tarde, estos problemas fueron analizados en un contexto más general concerniente a grafos valorados no dirigidos. Con el paso de los años, el ámbito de estudio ha llegado a abarcar la consideración de redes dirigidas y valoradas. Desde un punto de vista matemático, el parámetro de entrada de los métodos propuestos es el mismo: la matriz de adyacencia relativa al grafo,  $A$ , que puede ser dirigida/no dirigida y/o valorada/no valorada. Los métodos de *clustering* se han convertido en una herramienta fundamental en el desarrollo de modelado y análisis exploratorio de datos en un buen número de disciplinas como medicina, biología, astronomía e ingeniería [114, 126, 175, 182], así como en tareas de procesamiento de imágenes y problemas de reconocimiento de patrones [192, 209].

El impacto provocado en la vida cotidiana por las redes sociales o complejas, así como el crecimiento exponencial tanto de la cantidad de redes disponibles como de su tamaño, ha atraído el interés de muchos investigadores. Hay un sinfín de redes que modelan situaciones reales cuyos elementos tienden a estar intrínsecamente organizados en una estructura modular [34, 43]. Pese a su ascendente popularidad e importancia, el tratamiento de los métodos de detección de comunidades no es trivial. Algunos autores lo consideran un problema de optimización [138, 140] acerca del cual se sabe que la formulación exacta para su resolución es computacionalmente intratable, implicando una alta complejidad en el procesamiento de estructuras complejas, hecho que eleva dicho problema a un contexto de complejidad NP completo al tratar con redes a gran escala [14] (un problema  $C$  es NP completo si pertenece a la clase NP de problemas para cuya resolución no existe un algoritmo polinómico). No obstante, en las últimas décadas se han propuesto numerosos algoritmos que, de una forma relativamente rápida, proporcionan particiones razonablemente buenas [102, 116, 201, 208]. Los algoritmos clásicos de detección de comunidades plantean su base en un grafo que representa las conexiones entre los elementos a agrupar. Estos métodos pueden clasificarse en tres categorías. Por una parte, los algoritmos divisi-

vos. Estos métodos detectan los arcos que unen grupos, y los ‘eliminan’ de la red, hasta obtener una partición. Algunos de los más importantes son los propuestos por M. Girvan y M.E.J. Newman en 2002 y 2004 [70, 142] o el método propuesto por F. Radicchi et al. en 2004 [157]. Otra categoría está formada por los métodos aglomerativos, que forman comunidades de nodos similares o que comparten alguna propiedad, como el propuesto por P. Pons y M. Latapy en 2006 [155]. La última categoría está formada por algoritmos basados en la optimización de una función objetivo [38, 139, 190].

Hay muchas medidas para evaluar el comportamiento de los algoritmos de detección de comunidades. Una de las más conocidas es la modularidad, definida por M.E.J. Newman y M. Girvan en 2004 [142]. Esta función de calidad mide la fuerza de la división de un grafo en una partición de comunidades, relacionando la cantidad de aristas que caen dentro de un grupo con la cantidad esperada de las mismas que cabría esperar en un grafo aleatorio.

**Definición 2.2.5 (Modularidad [142]).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido, cuya matriz de adyacencia es  $A$ . Sean  $i, j \in V$  dos vértices y  $m = |E|$  el número de aristas de  $G$ . Sea  $P$  una partición del conjunto de nodos,  $V$ . La función de modularidad  $Q(P)$  se calcula como sigue:

$$Q(P) = \frac{1}{2m} \sum_{i,j \in V} \left[ A(i, j) - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \delta(C_i, C_j) \quad (2.6)$$

siendo  $k_i$  el grado del nodo  $i$  y  $C_i$  el clúster al que pertenece dicho nodo;  $\delta(C_i, C_j) = 1$  si  $C_i = C_j$ , y  $\delta(C_i, C_j) = 0$  en otro caso.

Esta función suele utilizarse para comparar la calidad de las particiones proporcionadas por diferentes algoritmos de detección de comunidades. También ha sido considerada como función objetivo a optimizar en algunos métodos [138]. El inconveniente de esta consideración vuelve a ser la complejidad computacional intrínseca a este problema de optimización [22]. Nuevamente, el trabajo con redes de tamaño medio exige el uso de métodos de aproximación para el cálculo de la modularidad óptima.

### 2.2.1.1. Algoritmo de Louvain

El interés suscitado por los problemas de detección de comunidades en la comunidad científica ha venido acompañado de la propuesta de innumerables algoritmos para su resolución. Un buen número de ellos garantizan un alto nivel de efectividad, proporcionando particiones del conjunto de nodos con muy buenas propiedades. Entre ellos, destaca el método conocido como algoritmo de Louvain [18], propuesto en 2008 por un grupo de investigadores de la Universidad Católica de Lovaina, V.D. Blondel, J.L. Guillaume, R. Lambiotte, R. y E. Lefevre. Este método, un algoritmo voraz basado en la heurística de

movimiento local y optimización de la modularidad [129, 186], proporciona resultados muy buenos a gran velocidad, particularmente cuando se consideran redes de gran tamaño (de hecho, no es improbable que presente ciertas dificultades en la detección de comunidades *pequeñas*) [110, 199]. Estas propiedades han potenciado notablemente su popularidad, convirtiéndose así en uno de los algoritmos de detección de comunidades más aplicados del momento [171]. Se trata de un proceso multi-fase, que proporciona una partición no jerárquica del conjunto de nodos. Se basa en dos conceptos esenciales: la modularidad de una partición, cuyo cálculo se detalla en la Definición 2.2.5; y la variación de dicha modularidad cuando el nodo  $i$  se mueve desde la comunidad a la que pertenece hasta  $C_j$ , la comunidad a la que pertenece el nodo  $j$ . Esta variación, denotada como  $\Delta Q_i(j)$ , se formaliza a continuación.

**Definición 2.2.6 (Variación de la modularidad  $\Delta Q_i(j)$  [18]).** Se considera el grafo  $G = (V, E)$ , y el par de vértices  $i, j \in V$ . Dada una partición del conjunto de nodos, sea  $C_j$  el clúster al que es asignado el nodo  $j$  en dicha partición. La suma de pesos de los arcos que están dentro del grupo  $C_j$  se denota  $\sum_{in}$ , y  $\sum_{tot}$  es la suma de los pesos de los arcos tales que alguno de sus extremos pertenece a  $C_j$ . Por otra parte,  $k_i$  es el grado del nodo  $i$ ;  $k_{i,in}$  es el número de aristas que unen el nodo  $i$  con alguno de los nodos de  $C_j$ , y  $m = |E|$  es el número total de aristas en  $G$ . La variación de modularidad obtenida cuando se mueve el nodo  $i$  desde la comunidad a la que ha sido asignado hasta  $C_j$  se calcula como se indica a continuación:

$$\Delta Q_i(j) = \left[ \frac{\sum_{in} + 2k_{i,in}}{2m} - \left( \frac{\sum_{tot} + k_i}{2m} \right)^2 \right] - \left[ \frac{\sum_{in}}{2m} - \left( \frac{\sum_{tot}}{2m} \right)^2 - \left( \frac{k_i}{2m} \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

Para finalizar esta sección se presenta un pequeño esquema ilustrativo del algoritmo de Louvain, además de su pseudocódigo. En ambos casos, se trata de la versión original del método, en la que se parte de una partición en la que cada nodo pertenece a su propia comunidad. No obstante, se conocen ciertas variaciones del mismo en las que el proceso se inicia a partir de una partición distinta [186], por ejemplo, en un proceso iterativo consistente en la aplicación del método de manera que la solución identificada en cada iteración sea la partición de partida de la iteración posterior.

- ◊ **Fase 1.** Inicialmente, cada nodo define por sí mismo una comunidad. Se fija un nodo  $i$ , y se toma una permutación cualquiera de los elementos de  $V$ ,  $o = (o^1, \dots, o^i, \dots, o^n)$ . Para todos los vecinos de  $o^i$  (nodos adyacentes),  $H(o^i) = (e_1, \dots, e_h)$  (note que la cantidad de vecinos  $h$  depende del nodo considerado; formalmente,  $(e_1, \dots, e_h) := (e_1^i, \dots, e_h^i)$ ), y siguiendo el orden establecido en  $o$ , se calcula la variación de modularidad  $\Delta Q_{o^i}(e_j)$ . Sea  $j^*$  el nodo vecino para el que el valor de esta variación es máximo, i.e.  $j^* = \arg(\max\{\Delta Q_{o^i}(e_j) : \{o^i, e_j\} \in E\})$ . Si

$\Delta Q_{o^i}(j^*) > 0$ ,  $o^i$  se mueve a  $C_{j^*}$ , la comunidad a la que pertenece  $j^*$ .  
En otro caso,  $o^i$  permanece en  $C_{o^i}$ .

Este proceso se aplica secuencial y repetidamente en todos los nodos de  $V$ , tomándolos aleatoriamente. Esta aleatoriedad implica que un nodo pueda ser analizado varias veces. Una vez alcanzado un máximo local en el valor de la variación de la modularidad, termina la Fase 1.

- ◊ **Fase 2.** A partir de las comunidades definidas en la Fase 1, se define lo que se conoce como *supervértices*: cada comunidad encontrada en la Fase 1 será un nodo en la Fase 2, tal y como se detalla en [5]. El primer paso de la Fase 2 es la construcción de un nuevo grafo, cuyos nodos son estos *supervértices*. Se asume que dos *supervértices* están conectados en la nueva red si hay al menos un arco entre ellos, esto es, una arista entre al menos un nodo de cada uno de los *supervértices* implicados. El peso de cada *supervértice* es la suma del peso de los arcos entre las comunidades encontradas en la Fase 1. Puede darse la existencia de bucles, provocados por las aristas entre nodos que pertenecen al mismo *supervértice*. Tras la construcción del nuevo grafo, el siguiente paso de la Fase 2 no es más que la aplicación de la Fase 1, considerando este nuevo grafo como parámetro de entrada.

Ambas fases se repiten de manera iterativa mientras haya alguna modificación en el valor de la modularidad, hasta alcanzar un máximo local de la misma. El resultado proporcionado por este método es  $P = \{C_1, \dots, C_t\}$ , una partición en comunidades del conjunto de nodos. En el Algoritmo [1] se proporciona una esquematización del funcionamiento de este método a través de su pseudocódigo.

Note que la permutación considerada afectará notablemente a la partición obtenida, lo que lleva a señalar el hecho de que la solución proporcionada por el algoritmo de Louvain no es única [63]. Para paliar este problema normalmente se analizan diferentes resultados de la misma red, considerando varias re-ordenaciones aleatorias del orden en que se evalúan los nodos [167].

**Observación 1.** La búsqueda de vecinos a cada nodo puede realizarse en el punto indicado en el Algoritmo [1] (línea 14), o bien justo después de tomar el orden  $o$  (después de la línea 9). La primera opción suele ser más eficiente en memoria, pues sólo almacena los vecinos de un nodo en cada iteración, mientras que la segunda opción suele ser más eficiente en tiempo, pues sólo calcula una vez los vecinos de cada nodo, pero ha de almacenarlos en la memoria. Dependiendo de las características de la red y las propiedades del ordenador, es probable que una opción sea más conveniente que la otra.

**Algoritmo 1** *Louvain*


---

```

1: Input:  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3: Preliminary
4:  $C_i \leftarrow \{i\}, \forall i \in V$  (cada nodo  $i$  es una comunidad aislada);
5:  $P \leftarrow (1, 2, \dots, n)$  (partición inicial);
6: end Preliminary
7: Phase 1
8: Tomar  $o = (o^1, \dots, o^i, \dots, o^n) \in \pi(V)$ ;
9:  $stop \leftarrow 0$ ;
10: while ( $stop == 0$ ) do
11:    $stop \leftarrow 1$ 
12:   for ( $i = 1$ ) to ( $n$ ) do
13:      $(e_1, \dots, e_h) \leftarrow H(o^i)$  (encontrar los vecinos de  $o^i$  en  $A$ );
14:     for ( $j = 1$ ) to ( $h$ ) do
15:       Calcular  $\Delta Q_{o^i}(e_j)$  en  $A$ ;
16:     end for
17:      $j^* \leftarrow \left\{ e_\ell \mid \Delta Q_{o^i}(j^*) = \max_{\ell \in \{1, \dots, h\}} \{ \Delta Q_{o^i}(e_\ell) \} \right\}$ ;
18:     if ( $\Delta Q_{o^i}(j^*) > 0$ ) then
19:        $C_{P(o^i)} \leftarrow C_{P(o^i)} \setminus \{o^i\}$ ;
20:        $C_{P(j^*)} \leftarrow C_{P(j^*)} \cup \{o^i\}$ ;
21:        $P(o^i) \leftarrow P(j^*)$ ;
22:        $stop \leftarrow 0$ ;
23:     end if
24:   end for
25: end while
26: end Phase 1
27: Phase 2
28: Obtener  $A^*$  a partir  $A$  (los nodos de  $A^*$  son las comunidades encontradas
    previamente);
29: if ( $A^* \neq A$ ) then
30:    $A \leftarrow A^*$ ;
31:   Ejecutar Phase 1 y Phase 2;
32: end if
33: end Phase 2
34: return( $P$ );

```

---

Este algoritmo es uno de los puntos clave de la metodología que se presenta en esta memoria. Para su aplicación, se ha partido de la implementación para Matlab desarrollada por A. Scherrer y publicada en GitHub [\[1\]](#).

### 2.2.1.2. Complejidad algorítmica

Aceptando cierto abuso del lenguaje, se ha venido empleando el concepto *algoritmo* obviando su formalización ante una asunción de conocimiento, omitiendo así el rigor de las ciencias exactas, con el consecuente deterioro del conocimiento que esta omisión conlleva. Por ello, a continuación se plantea un pequeño inciso en el que se propone una posible caracterización del concepto algoritmo, fundamental en lo sucesivo. Esta definición está inspirada en la entrada encontrada en el diccionario Merriam-Webster.

**Definición 2.2.7 (Algoritmo).** Se considera un problema concreto y un método de resolución del mismo basado en la descripción precisa del conjunto de acciones o/y operaciones a ejecutar sobre ciertos objetos para alcanzar la solución de dicho problema, partiendo de una instancia (*input*) y proporcionando un resultado (*output*). Este método recibe el nombre de algoritmo si tiene las siguientes propiedades:

- **Precisión:** un algoritmo debe estar exento de ambigüedad.
- **Determinismo:** fijadas una serie de condiciones, todo algoritmo debe responder del mismo modo.
- **Finito:** un algoritmo ha de ser descrito de manera finita.

En lo sucesivo, en esta memoria se emplearán indistintamente los términos método y algoritmo, asumiendo el cumplimiento de las condiciones mencionadas previamente en cualquier situación. A continuación se aborda y expone el concepto de complejidad algorítmica, haciendo especial énfasis a la complejidad derivada de los problemas de detección de comunidades.

Para evaluar o medir las cualidades de un algoritmo, lo que se conoce como eficiencia algorítmica, se analizan dos conceptos básicos intrínsecos al mismo: su generalidad (es deseable que un algoritmo sea aplicable a la resolución de una amplia clase de problemas lo más general posible), y su eficiencia, evaluada en virtud de los recursos consumidos (tiempo de ejecución, procesadores, espacio en memoria).

Para lograr una máxima eficiencia, hay que minimizar este uso de recursos, escenario en que aparece la noción de complejidad algorítmica. La complejidad algorítmica no es más que una métrica de marcado carácter teórico, que facilita la descripción del comportamiento de un algoritmo en términos del tiempo que tarda en resolver un problema (tiempo de ejecución)

---

<sup>1</sup>[\github.com\jblocher\matlab-network-utilities/blob/master\Louvain\cluster\\_jl.m](https://github.com/jblocher/matlab-network-utilities/blob/master/Louvain/cluster_jl.m)

y de la cantidad de memoria imprescindible para el procesamiento de las instrucciones involucradas en el algoritmo en cuestión (memoria requerida). El análisis de la complejidad algorítmica permite discernir entre los distintos métodos existentes para la resolución de un mismo problema, facilitando la elección de alguno de ellos con base en una métrica informativa fiable.

Se pueden distinguir dos aspectos, no necesariamente vinculados entre sí, en el análisis de la complejidad algorítmica: la complejidad temporal y la complejidad espacial. Estas nociones suelen estar fuertemente relacionadas con el tamaño del problema o número de elementos o instancias considerados.

- **Complejidad temporal:** aspecto relacionado con el tiempo de ejecución necesario para la finalización del algoritmo analizado, en función del tamaño o cantidad de elementos involucrados. Esta medida es particularmente útil en la comparación de métodos que involucran grandes cantidades de datos. En la práctica, se suele medir a través de la consideración de modelos de referencia.
- **Complejidad espacial:** aspecto relacionado con la cantidad de memoria necesaria para la resolución de un problema mediante el algoritmo considerado. Esta noción involucra cuatro aspectos importantes e independientes: el código del algoritmo, el almacenamiento de los datos de entrada, el espacio de trabajo del algoritmo para llevar a cabo cálculos y asignaciones y, en muchos casos, la cantidad de memoria requerida por los datos de salida.

Estos puntos tienen sentido y significación en un marco teórico, pero su cálculo y consideración en la práctica puede estar afectado por diversos agentes externos, como el lenguaje de programación empleado o la potencia del procesador usado, siendo altamente sensibles a posibles variaciones en la configuración del *hardware* correspondiente. Para evitar incongruencias y poder dar una interpretación práctica de la complejidad de un algoritmo, se propone relacionar el cálculo de la complejidad algorítmica con el ritmo de crecimiento del número de instrucciones necesarias para resolver un problema en función de su tamaño. De esta manera se puede establecer la complejidad de un algoritmo sin que esta dependa de aspectos externos. La complejidad de un algoritmo suele ser expresada mediante la  $O$  ó Notación de Landau, empleada para la comparación asintótica de funciones, cuyo nombre fue otorgado en honor al matemático alemán E. Landau.

**Definición 2.2.8 (O(g) Notación de Landau).** Se dice que la función  $f$  pertenece a la clase de complejidad de  $g$ ,  $f \in O(g)$ , si existe cierta asignación  $c$  y un valor  $n_0$  tales que, para cada  $n \geq n_0$ , se cumple que  $|f(n)| \leq c|g(n)|$ .

En la Tabla [2.1](#) se presentan los principales órdenes de complejidad, en

disposición descendente de eficacia. Esta es una manera de agrupar en un mismo orden aquellas complejidades que crecen de manera similar.

Tabla 2.1: Principales órdenes de complejidad algorítmica.

Orden	$O(1)$	$O(\log(n))$	$O(n)$	$O(n \log(n))$	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(n^a)$	$O(a^n)$	$O(n!)$
Nombre	constante	logarítmica	lineal	cuasi lineal	cuadrática	cúbica	polinómica	exponencial	factorial

Retomando el marco de interés de esta memoria, relativo a problemas de detección de comunidades. T. Pontoizeau, investigador francés de la Universidad París-Dauphine, hizo un análisis exhaustivo de esta problemática, cuyos resultados y conclusiones pueden consultarse en su tesis doctoral [156]. Dicha memoria, datada en 2018, incluye una profunda reflexión del estado del arte, y sustenta gran parte de los comentarios que se exponen a continuación.

Como se ha mencionado previamente, el problema de detección de comunidades se clasifica en la categoría de complejidad NP completo. En este contexto, puede resultar interesante investigar la complejidad de forma parametrizada. En general, el tiempo de ejecución o complejidad temporal de un algoritmo, se expresa en función del tamaño de la instancia o problema considerado. La estructura del grafo en cuestión es también una importante fuente de variabilidad en la complejidad de la resolución. Es por ello que el análisis de la complejidad algorítmica está íntimamente relacionado con las especificaciones del problema abordado. Por mencionar algunos ejemplos, en 2013, M. Olsen enunció un teorema en su trabajo [147] mediante el que demostraba que es posible hallar una estructura de comunidades en tiempo polinómico en cualquier grafo conexo con al menos cuatro vértices, con la excepción de las estrellas. Se conocen otros resultados, demostrados en [156], que relacionan la existencia y detección en tiempo lineal de estructuras con dos comunidades en ciertos tipos de grafos bipartitos, o la existencia y detección con complejidad polinomial de ciertas estructuras de grupos en grafos 3-regulares. Estos son sólo algunos de los ejemplos que ilustran la dificultad a la hora de establecer un límite para la complejidad algorítmica relativa a la resolución de problemas de detección de comunidades.

Así mismo, existen ciertos algoritmos de talante más general, aplicables a cualquier tipo de grafo. En el contexto de problemas de detección de comunidades en grafos, este tamaño está referido al número  $n$  de vértices que define el grafo en cuestión, involucrando en ocasiones a la cantidad  $m$  de aristas. Las complejidades relativas a algunos de los métodos más populares de la literatura son de orden  $O(m^2n)$  (incluso  $O(n^3)$  en su versión más rápida ante la consideración de redes poco densas) para los algoritmos de M. Girvan y M.E.J. Newman [70, 142]; de orden  $O\left(\frac{m^4}{n^2}\right)$  para el algoritmo de F. Radicchi et al. [157] ( $O(n^2)$  para redes poco densas); complejidad tem-

poral de orden  $O(mn^2)$  y complejidad espacial de orden  $O(n^2)$  en el peor de los casos para el algoritmo de P. Pons y M. Latapy [155], y  $O(n^2 \log(n))$  de velocidad y  $O(n^2)$  de memoria en redes más realistas para el mismo algoritmo. Especial relevancia tiene en esta memoria el algoritmo de Louvain [118], el cual tiene como cota superior de complejidad el orden  $O(n \log(n))$ , pudiendo tratarse, según afirman sus autores, de una complejidad de orden lineal,  $O(n)$  ante la manipulación de redes poco densas. Ambos órdenes de complejidad garantizan la extraordinaria velocidad de este método para detectar grupos de vértices, siendo importante remarcar que dicha rapidez no merma la calidad de las comunidades encontradas. En los siguientes capítulos se proponen diversos algoritmos de detección de comunidades basados en distintas medidas borrosas. Se verá que, si bien la complejidad derivada de la aplicación más generalizada de algunos de estos métodos es ciertamente superior a la del método de Louvain (este aumento de complejidad lo provoca la manipulación de medidas borrosas, no tanto la estructura algorítmica), para todos los casos se propone una versión simplificada, cuya complejidad es idéntica a la del algoritmo de Louvain.

### 2.2.1.3. Modelos de referencia

En cualquier contexto, la definición de un nuevo algoritmo debe ir acompañada de un proceso de evaluación imprescindible para su aceptación. Hay dos puntos a destacar en este proceso: la valoración de su precisión o efectividad, y su complejidad computacional, siendo especialmente reseñable su comparación con las propuestas existentes en la literatura. Considerando diversos aspectos, el objetivo es comprobar si la nueva aportación es al menos tan buena como las existentes. Un punto clave en la evaluación de algoritmos de detección de comunidades es localizar la evidencia o característica que debe ser analizada: no basta con fijarse en la complejidad o velocidad del método en cuestión, también es importante medir la calidad de los resultados.

El problema es que cada método tiene sus propias características y peculiaridades, dándose el caso incluso de que los resultados obtenidos por algoritmos distintos no sean comparables [44]. Un ejemplo de esta incompatibilidad se da ante la comparativa de las particiones proporcionadas por un algoritmo jerárquico y otro no jerárquico; también cuando las consideraciones adoptadas por sendos métodos no son equivalentes. Lo ideal sería contar con una gran batería de redes reales cuyas comunidades fueran sobradamente conocidas, pero, lamentablemente, esta necesidad está lejos de la realidad. Para evitar situaciones de esta índole, los resultados experimentales de evaluación presentados en esta memoria se basan en la técnica conocida como evaluación comparativa, o *benchmarking* [111], en la cual se generan redes sintéticas a las que se les incorpora una estructura de comunidades. La base de este procedimiento se resume en la siguiente frase, tomada del trabajo de D.A. Bader et al, [8]: *‘Benchmarking refers to a repeatable performance*

*evaluation as a means to compare somebody's work to the state of the art in the respective field*'. De modo que la evaluación comparativa que aquí se presentará se basará en una evaluación de desempeño repetible que permitirá la evaluación del método en análisis con respecto al estado del arte.

El modelo de referencia más conocido y aplicado es el propuesto por M. Girvan y M.E.J. Newman [70], en el cual se define una clase de redes que constan de 128 nodos divididos en cuatro comunidades de 32 nodos cada una, siendo el grado promedio de cada nodo  $k = 16$ . En este tipo de redes, los nodos que están en el mismo grupo tienden a estar más conectados entre sí que con los nodos de otros módulos; el modelado se regula mediante un parámetro que indica la cantidad esperada de aristas entre pares de nodos. Este modelo de referencia o *benchmark model* es típicamente usado para la evaluación de algoritmos de detección de comunidades. No obstante, hay ciertos puntos que han de ser considerados. En este modelo, todos los nodos tienen el mismo grado, y todas las comunidades el mismo tamaño, características que impiden la consideración de estas redes sintéticas como una aproximación de redes reales, en las que, generalmente, el grado de nodos implicados presenta una distribución verdaderamente heterogénea. Es por eso que los modelos de referencia considerados deberían generarse considerando una distribución de los distintos grados sesgada, de modo que se asemejen en la medida de lo posible a escenarios reales. Otra asunción del modelo clásico que lo hace restrictivo es acerca del tamaño de las comunidades, que se presupone idéntico para todos los grupos. En las redes reales, la distribución del tamaño de las distintas comunidades cubre también un amplio rango de valores a considerar, motivo por el cual un modelo de referencia debería incluir comunidades de diversos tamaños [40, 81, 150, 152].

Para desarrollar la evaluación comparativa en esta memoria se trabaja con la construcción de modelos o grafos de referencia. Se trata de grafos sintéticos generados con una estructura o partición incrustada, de manera similar al proceso descrito en [70]. Para ello, se generarán redes de 256 nodos a las que se incorporarán diversas estructuras de grupos en las que se considerarán situaciones simétricas y asimétricas, así como diversas variaciones en los tamaños de las comunidades implicadas. Se asume que esta estructura es un estándar, y se trata de analizar la habilidad del algoritmo en estudio para detectarla. Esta habilidad se mide mediante el cálculo de la herramienta de medida conocida como *Información Mutua Normalizada*, *NMI* por sus siglas en inglés, que cuantifica cuánto se parece la partición proporcionada por el algoritmo que se desea evaluar [110] a la estructura estándar. A continuación se detalla el procedimiento seguido para la generación de los grafos sintéticos, así como el cálculo del *NMI*.

En primer lugar, para generar los grafos sintéticos de referencia, se asume que tanto el grado esperado de cada nodo,  $\langle k \rangle$ , como el tamaño de

las comunidades de la estructura prefijada,  $|C_t|$ , son leyes potenciales con exponentes  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, de modo que la construcción se basa en la ecuación (2.8) como sigue: dada la comunidad  $C_t$ , la probabilidad de que exista una arista entre los nodos  $i$  y  $j$  es:

$$P(i, j) = \begin{cases} \alpha & \text{si } i, j \in C_k \\ \beta & \text{si en otro caso} \end{cases} \quad (2.8)$$

**Definición 2.2.9 (Información Mutua Normalizada NMI [109]).** Sean  $X = \{x_i\}_{i \in V}$  e  $Y = \{y_i\}_{i \in V}$  dos particiones disjuntas del grafo  $G = (V, E)$ . Sea  $P(x)$  la probabilidad de que un nodo aleatorio pertenezca a la comunidad  $x$ , y sea  $P(x, y)$  la probabilidad condicionada de que un nodo aleatorio pertenezca a la comunidad  $x$  en la partición  $X$ , y a la comunidad  $y$  en la partición  $Y$ . La entropía de Shanon para la partición  $X$  se calcula como  $H(X) = -\sum_x P(x) \log(P(x))$ ; mientras que la entropía de Shanon para  $X$  e  $Y$  se calcula como  $H(X, Y) = -\sum_x \sum_y P(x, y) \log(P(x, y))$ . Así, la Información Mutua entre las particiones  $X$  e  $Y$ ,  $MI$ , se define como:

$$MI(X, Y) = \sum_x \sum_y P(x, y) \log \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} \quad (2.9)$$

El  $NMI$  no es más que la normalización de la ecuación (2.9).

$$NMI(X, Y) = \frac{2MI(X, Y)}{H(X) + H(Y)} \quad (2.10)$$

Como se puede deducir de la ecuación (2.10), el  $NMI$  representa cómo de similares son dos particiones, de modo que, si  $NMI = 1$ , ambas particiones son idénticas, mientras que si  $NMI = 0$ , son totalmente distintas.

### 2.3. Operadores de agregación y otras funciones

En sus orígenes, los operadores de agregación, conocidos como  $AO$  por sus siglas en inglés, fueron definidos para agregar los valores relativos a las funciones de pertenencia relacionadas con los conjuntos borrosos. La teoría sobre los conjuntos borrosos o difusos nació de la mano de L.A. Zadeh con la publicación de su trabajo ‘Fuzzy Sets’ [202], fechado en 1965. En este artículo se asentaron las bases que cimentarían la teoría de los conjuntos borrosos.

**Definición 2.3.1 (Conjunto borroso [202]).** Un conjunto borroso  $\tilde{A}$  en el dominio  $X$  se define como

$$\tilde{A} = \{(x, \eta_A(x)) \mid x \in X\}$$

donde  $\eta_A$  denota una función del grado de pertenencia, i.e.  $\eta_A : X \rightarrow [0, 1]$ .

Grosso modo, estos objetos se pueden entender como ‘conjuntos’ con límites no precisos, cuya función de pertenencia proporciona un valor del intervalo  $[0, 1]$ . Esta generalización de la noción clásica de conjunto resultó ser una construcción muy práctica para modelar problemas y fenómenos del mundo real. Además, supondría un alejamiento de la lógica clásica aristotélica ( $A$  es correcto, o  $A$  no es correcto), limitada a la dicotomía del blanco-negro, facilitando así la aproximación a una amplia gama de grises. Esta teoría de conjuntos borrosos permitirá la representación de eventos con características ‘difusas’, ‘imprecisas’, ‘borrosas’, que se alejan del alcance de la teoría clásica de conjuntos de Cantor [66, 127]. Son muchas las ramas científicas que se apoyan en la teoría de conjuntos borrosos: Estadística, Medicina, Física, Ciencias Sociales e Ingeniería, por mencionar algunas. Se pueden destacar los ámbitos relativos a Teoría de Control y de Modelos de Clasificación, Reconocimiento de Patrones y Sistemas de Soporte a Decisiones [45, 46, 135, 136]. También la Teoría de Grafos, área del conocimiento en que se enmarca esta memoria.

El estudio de los operadores o funciones de agregación ( $AO$ ) [76] es una de las disciplinas más candentes en el ámbito de las ciencias de la información. Estos operadores aparecen de forma natural a la hora de agregar información con cierta esencia de tipo *soft*, como pueda ser una posibilidad, una probabilidad o un grado difuso [125].

**Definición 2.3.2 (Funciones de agregación [76]).** La función  $\mathcal{B} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  es llamada función de agregación  $n$ -aria si cumple:

1.  $\mathcal{B}$  es creciente en todos sus argumentos: para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si  $x_i \leq y$ , entonces  $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n) \leq \mathcal{B}(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ;
2.  $\mathcal{B}$  está bien definida en los límites:  $\mathcal{B}(0, \dots, 0) = 0$  y  $\mathcal{B}(1, \dots, 1) = 1$ .

Los operadores de agregación suelen clasificarse en cuatro clases distintas, atendiendo a una comparación puntual con respecto a los operadores del máximo y el mínimo. Estas clases son las siguientes:

- **Operador de agregación disyuntivo:** un operador de agregación  $\mathcal{B}_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  es disyuntivo si y sólo si, para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ , se tiene que  $\mathcal{B}_n(x) \geq \max\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ .
- **Operador de agregación conjuntivo:** un operador de agregación  $\mathcal{B}_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  es conjuntivo si y sólo si, para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ , se tiene que  $\mathcal{B}_n(x) \leq \min\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ .
- **Operador de agregación promedio:** un operador de agregación  $\mathcal{B}_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  es un operador de agregación promedio si y sólo si, para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ , se tiene que  $\min\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \leq \mathcal{B}_n(x) \leq \max\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ .

- **Operador de agregación mixto:** un operador de agregación  $\mathcal{B}_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  recibe el nombre de mixto si no pertenece a ninguna de las tres clases definidas previamente.

Otro tipo de función está constituido por los operadores de tipo negación, también conocidos como complementos lógicos. Intuitivamente, en el contexto de la lógica clásica, un operador de negación se identifica con una función de verdad que modifica el valor *verdadero* a *falso*, y viceversa.

**Definición 2.3.3 (Operador de negación [26]).** Dado un conjunto parcialmente ordenado  $(S, <)$ , un operador de negación es una función  $N : S \rightarrow S$  que cumple las siguientes condiciones:

- (N1) Para todo  $a, b \in S$ , si  $a < b$  entonces  $N(b) < N(a)$ ;
- (N2) Para todo  $a \in S$ ,  $N(N(a)) = a$ .

Finalmente se presentan las funciones de agregación matricial, que permiten combinar la información representada por varias matrices en una matriz.

**Definición 2.3.4 (Agregador matricial [162, 198]).** Sea  $\Pi(n)$  el conjunto de matrices cuadradas de tamaño  $n$ . Un agregador matricial es una función  $\theta : \Pi(n)^s \rightarrow \Pi(n)$  usada para combinar, elemento a elemento, la información contenida en  $s$  matrices en una única matriz, de modo que si  $A = \theta(B^1, \dots, B^s)$ , entonces  $A_{ij} = \theta(B_{ij}^1, \dots, B_{ij}^s)$ , para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , siendo  $A, B^1, \dots, B^s$  sendas  $n$ -matrices.

## Capítulo 3

# El índice de interacción

*Nueve Danzas Españolas,  
Op. 21, 22, 23, 26, 28*

P. Sarasate

**RESUMEN:** Este capítulo se dedica al problema de representar la interacción relativa a medidas borrosas. A lo largo de los años se han propuesto innumerables medidas y representaciones que facilitan su manejo. Particularmente interesante es el índice de interacción, definido por T. Murofushi y S. Soneda en 1993, cuya finalidad es la representación de la interacción existente entre pares de elementos. Una generalización del mismo fue propuesta en 1997 por M. Grabisch, quien planteó una medida de interacción entre todos los elementos de un conjunto de cualquier cardinal. Ambos índices son una piedra angular fundamental en la literatura de medidas borrosas, cuyo cálculo sigue siendo un problema de alta complejidad computacional. Para paliar esta dificultad, en este capítulo se plantean dos algoritmos basados en muestreo a través de los cuales obtener una estimación de dicho índice de interacción. También se demuestra la eficacia de estas aproximaciones, comparando los resultados estimados con el valor real del índice en ciertos casos concretos en que este valor puede ser calculado polinómicamente.

### 3.1. Definición alternativa de los índices de interacción

El trabajo de este capítulo nace a partir de la representación alternativa del índice de Shapley basada en órdenes [29], fundamental en los métodos de estimación del valor de Shapley basados en procesos de muestreo [30, 31].

Siguiendo esta filosofía desarrollada para el valor de Shapley, en este capítulo se hace una analogía considerando el índice de interacción  $I$ . Este índice de interacción, definido por primera vez por Murofushi y Soneda en 1993, es una representación de las interacciones entre pares de elementos ambientada en el marco de medidas borrosas. El índice de interacción  $I_{ij}(\mu)$  se puede interpretar como el promedio del valor añadido obtenido al considerar a los elementos  $i$  y  $j$  en el mismo grupo, dependiendo de su relación en  $\mu$ . En [77] se incluye un extenso análisis del mismo. Años después de su definición, M. Grabisch propuso una generalización del mismo, mostrada en la Definición 2.1.8, que se basa en las clases de primer y segundo orden. Así, en [74], incluyó la caracterización de un índice de interacción con el que representar las interacciones entre los elementos de un conjunto de cualquier cardinal, ampliando así el ámbito de representación abarcado por  $I_{ij}$ .

A continuación se propone una nueva caracterización basada en órdenes del índice  $I_{ij}$ , inspirada en la caracterización alternativa basada en órdenes del valor de Shapley mostrada en la Definición 2.1.6.

**Proposición 3.1.1.** *Se considera el conjunto  $S$  de cardinal  $|S| = n$ . Dada la medida borrosa  $\mu : 2^S \rightarrow [0, 1]$ , para cada par de elementos  $\{i, j\}$  con  $i, j \in S$ , el índice de interacción  $I_{ij}$  definido en la ecuación (2.4) se puede caracterizar mediante una expresión basada en órdenes. Así, siendo  $\pi(S)$  el conjunto de todas las permutaciones posibles de los elementos de  $S$ , y siendo  $o \in \pi(S)$  uno de estos órdenes, una posible caracterización de  $I_{ij}$  es:*

$$I_{ij}(\mu) = \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [\mu(\text{Pred}_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) - \mu(\text{Pred}_j(o) \cup \{i\}) - \mu(\text{Pred}_j(o) \cup \{j\}) + \mu(\text{Pred}_j(o))] \quad (3.1)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!} \sum_{K \subset S \setminus \{i,j\}} (\mu_{ijK} - \mu_{iK} - \mu_{jK} + \mu_K) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!} \sum_{K \subset S \setminus \{i,j\}} (\mu_{ijK} - \mu_{iK}) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!} \sum_{K \subset S \setminus \{i,j\}} (\mu_{jK} - \mu_K) \end{aligned}$$

- (1) Se define la función  $\mu' : 2^{S'} \rightarrow [0, 1]$ , de manera que  $\forall T \subseteq S'$ ,  $\mu'(T) = \mu(T \cup \{i\})$ , siendo  $S' = S \setminus \{i\}$ .

Así, el valor  $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!} \sum_{K \subset S \setminus \{i,j\}} (\mu_{ijK} - \mu_{iK})$  es el índice de Shapley del elemento  $j$  dependiendo de la función  $\mu'$ . Lo que es lo mismo, la contribución o importancia del elemento  $j$  en una coalición, ante la asunción de que  $i$  pertenece a todas las posibles coaliciones.

- (2) De manera similar, se define la función  $\mu'' : 2^{S''} \rightarrow [0, 1]$ , tal que  $\forall T \subseteq S, \mu''(T) = \mu(T)$ , siendo  $S'' = S' = S \setminus \{i\}$ .

Así, el valor  $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-k-2)!k!}{(n-1)!} \sum_{K \subset S \setminus \{i,j\}} (\mu_{jK} - \mu_K)$  es el índice de Shapley del elemento  $j$  relativo a  $\mu''$ . Lo que es lo mismo, la contribución o importancia del elemento  $j$  en una coalición, ante la asunción de que  $i$  no pertenece a ninguna de todas las posibles coaliciones.

Atendiendo a (1) y (2), el índice de interacción se puede reescribir como:

$$I_{ij} = Sh_j(\mu') - Sh_j(\mu'') \quad (3.2)$$

siendo  $Sh_j(\mu')$  (ó  $Sh_j(\mu'')$ ) el índice de Shapley del elemento  $j$  en  $\mu'$  (ó  $\mu''$  respectivamente), cuando está en una coalición con todos los elementos de  $S'$ . Es importante tener en cuenta que los conjuntos  $S'$  y  $S''$  son iguales.

De acuerdo con la caracterización del valor de Shapley basada en órdenes, (Definición 2.1.6), la ecuación (3.2) se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_{o \in \pi(S')} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu'(Pred_j(o) \cup \{j\}) - \mu'(Pred_j(o)) \right] \\ &\quad - \sum_{o \in \pi(S')} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu''(Pred_j(o) \cup \{j\}) - \mu''(Pred_j(o)) \right] \\ &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) - \mu(Pred_j(o) \cup \{i\}) \right] \\ &\quad - \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu(Pred_j(o) \cup \{j\}) - \mu(Pred_j(o)) \right] \\ &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) - \mu(Pred_j(o) \cup \{i\}) \right. \\ &\quad \left. - \mu(Pred_j(o) \cup \{j\}) + \mu(Pred_j(o)) \right] \end{aligned}$$

□

Análogamente a como se ha procedido con el índice de interacción entre pares de elementos,  $I_{ij}$ , a continuación se propone una caracterización alternativa de la generalización de dicho índice, en su definición adaptada al modelado de interacciones entre grupos de elementos.

**Proposición 3.1.2.** *Se considera el conjunto finito  $S$ , siendo  $|S| = n$ . Dada la medida borrosa  $\mu : 2^S \rightarrow [0, 1]$ , para cada subconjunto  $T = \{t_1, \dots, t_{|T|}\} \subset S$ , el índice de interacción  $I_T$  introducido en la ecuación (2.5) se puede caracterizar como sigue:*

$$I_T(\mu) = \sum_{o \in \pi(S \setminus \{t_2, \dots, t_{|T|}\})} \frac{1}{(n - |T| + 1)!} [\chi(o)_T] \quad (3.3)$$

siendo

$$\chi(o)_T = \sum_{L \subset T} (-1)^{|T| - |L|} \mu(\text{Pred}_{t_1}(o) \cup L)$$

*Demostración.* A continuación se demuestra que el valor definido en la ecuación (3.3) se corresponde con  $I_T$ , el índice de interacción entre los elementos del conjunto  $T$ . Para ello, dado el subconjunto  $L \in S$ , se define la función  $\mu^L : 2^{S'} \rightarrow [0, 1]$ , tal que  $\forall S' \subseteq S$ ,  $\mu^L(S') = \mu(S' \cup L)$ , siendo  $S' = S \setminus \{t_2, \dots, t_{|T|}\}$ . El índice de Shapley del elemento  $t_1$  en  $\mu^L$  es:

$$Sh_{t_1}(\mu^L) = \sum_{k=0}^{n-|T|} \zeta_k^T \sum_{\substack{K \subset S' \setminus \{t_2, \dots, t_{|T|}\} \\ |K|=k}} (\mu_{t_1 K}^L - \mu_K^L) \quad (3.4)$$

donde

$$\zeta_k^T = \frac{(n - k - |T|)! k!}{(n - |T| + 1)!} = \frac{1}{\binom{n-|T|}{k} (n - |T| + 1)}$$

Así,

$$\begin{aligned} I_T(\mu) &= \sum_{k=0}^{n-|T|} \zeta_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset S' \setminus T \\ |K|=k}} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T| - |L|} \mu_{LK} \\ &= \sum_{k=0}^{n-|T|} \zeta_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset S' \setminus \{t_2, \dots, t_{|T|}\} \\ |K|=k}} \sum_{L \subset T \setminus t_1} (-1)^{|T| - |L| - 1} (\mu_{LK t_1} - \mu_{LK}) \\ &= \sum_{L \subset T \setminus t_1} (-1)^{|T| - |L| - 1} \sum_{k=0}^{n-|T|} \zeta_k^{|T|} \sum_{\substack{K \subset S' \setminus \{t_2, \dots, t_{|T|}\} \\ |K|=k}} (\mu_{K t_1}^L - \mu_K^L) \\ &= \sum_{L \subset T \setminus t_1} (-1)^{|T| - |L| - 1} Sh_{t_1}(\mu^L) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considerando la caracterización del índice de Shapley basada en órdenes y la definición de  $Sh_{t_1}(\mu^L)$  formalizada en la fórmula (3.4), la ecuación (3.5) se puede reescribir como:

$$I_T(\mu) = \sum_{L \subset T \setminus t_1} (-1)^{|T|-|L|-1} \sum_{o \in \pi(S')} \frac{1}{(n - |T| + 1)!} \left[ \mu^L(Pred_{t_1}(o) \cup \{t_1\}) - \mu^L(Pred_{t_1}(o)) \right] = \sum_{o \in \pi(S \setminus \{t_2, \dots, t_{|T|}\})} \frac{1}{(n - |T| + 1)!} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|} * \mu(Pred_{t_1}(o) \cup L)$$

□

### 3.2. Estimación no estratificada del índice de interacción

El cálculo del índice de interacción  $I$  es una ardua tarea. Tras una revisión bibliográfica, se puede afirmar que a día de hoy aún no se dispone de métodos destinados a la reducción de la complejidad de este proceso [160]. De hecho, el valor real de este índice sólo se puede calcular en tiempo polinomial para algunos casos concretos de medidas borrosas de caracterización sencilla.

En esta sección se propone una estimación del valor del índice de interacción entre dos elementos,  $I_{ij}$ , definiendo un algoritmo de complejidad polinomial basado en técnicas de muestreo. También se enuncian ciertas propiedades estadísticas inherentes a dicho valor estimado. Antes de proceder con el proceso de estimación del índice de interacción, se proporciona la definición de algunos conceptos básicos en el contexto del muestreo aleatorio simple. Un análisis en profundidad de las nociones que a continuación se enuncian, puede encontrarse en [113].

En el proceso de muestreo aleatorio simple se dispone de una población  $P$  de la que se extrae una muestra  $M$  en la que se incluyen  $m$  elementos. En este tipo de muestreo, todos los elementos que forman el universo tienen idéntica probabilidad de ser seleccionados para formar parte de la muestra, en concreto, esta probabilidad es  $\frac{1}{|P|}$ , siendo  $|P|$  el número de unidades en el universo o tamaño de la población.

El teorema central del límite es una importante propiedad inherente a las muestras obtenidas mediante un proceso de muestreo aleatorio simple. Este teorema es una teoría estadística que define una relación entre la muestra y la población: obtenida una muestra lo suficientemente grande de cierta población, la distribución de las medias muestrales sigue una distribución normal. También se afirma que, a medida que el tamaño muestral aumenta,

el valor de la media muestral se acerca más al valor de la media poblacional. Este teorema permite calcular la probabilidad de que el valor de la media muestral pertenezca a un intervalo concreto, lo cual posibilita la cuantificación del error máximo que se obtendrá al considerar el valor de la media muestral como una estimación de la media poblacional. En concreto, siendo  $e_{max}$  dicho error máximo,  $m$  el tamaño de la muestra,  $Z_{NC}$  el valor crítico de corte de una distribución con probabilidad normal para un nivel de confianza  $NC$ , y  $\sigma$  la desviación típica de la variable de interés, se cumple que  $e_{max} \leq Z_{NC} \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$ . Estas afirmaciones fundamentan el correcto funcionamiento del proceso de aproximación propuesto en esta sección.

En este contexto, fijado un par de elementos  $i, j$  pertenecientes al conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$ , se propone la estimación del índice de interacción relativo a dicho par,  $I_{ij}$  mediante un proceso único de muestro. Este procedimiento, cuya estructura se detalla en el Algoritmo [2](#), recibe el nombre de algoritmo *ApproInteraction*, y fue introducido por primera vez en [\[90\]](#).

En lo sucesivo, dada la medida borrosa  $\mu : 2^S \rightarrow [0, 1]$ , el valor estimado del índice de interacción entre los elementos  $i, j \in S$  será denotado como  $\hat{I}_{ij} := \hat{I}_{ij}(\mu)$ . El proceso de estimación propuesto para la estimación del índice de interacción  $I_{ij}$  consta de los siguientes pasos:

1. El conjunto de todas las posibles permutaciones de los elementos de  $S$ ,  $\pi(S)$ , constituye el universo o población  $P$  del proceso de muestreo (i.e.  $P = \pi(S)$ ).
2. El parámetro en estudio es la matriz  $\hat{I} = (\hat{I}_{ij})_{i,j \in S}$ ; para cada par  $\{i, j\} \in S$ ,  $\hat{I}_{ij}$  es la estimación del índice de interacción entre  $i$  y  $j$ .
3. Cada orden  $o \in \pi(S)$  será una unidad muestral. Por otra parte, dado un orden  $o = (o_1, \dots, o_n)$ , se dice que los elementos  $o_s$  y  $o_p$  son vecinos si  $s = p + 1$  ó  $p = s + 1$ . Así, asumiendo que los elementos  $i, j$  son vecinos o consecutivos en el orden  $o$ , las características observadas en cada unidad muestral son  $\chi(o)_{ij} = \mu(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) - \mu(Pred_j(o) \cup \{i\}) - \mu(Pred_j(o) \cup \{j\}) + \mu(Pred_j(o))$ .
4. El parámetro estimado  $\hat{I}$  es la media de las contribuciones marginales sobre la muestra  $M$ , esto es,  $\hat{I} = (\hat{I}_{ij})_{i,j \in S}$ , donde  $\hat{I}_{ij} = \frac{1}{m_{ij}} \sum_{o \in M} \chi(o)_{ij}$ , siendo  $m_{ij}$  la cantidad de permutaciones en las que  $i$  y  $j$  son vecinos de entre los  $m$  órdenes que forman la muestra. Al número total obtenido al estimar todos los valores de  $I_{ij}$  se denota como  $TotalData = m(n - 1)$ .

5. El proceso de selección de la muestra  $M$ , toma cualquier orden  $o$  de la población  $\pi(S)$  con probabilidad  $\frac{1}{n!}$ .

Este muestreo se resume en el pseudocódigo correspondiente, Algoritmo 2. El resultado es  $\hat{I}$ , una estimación del índice de interacción.

---

**Algoritmo 2** *ApproInteraction*


---

```

1: Input:  $(S, TotalData, \mu)$ ;
2: Output:  $\hat{I} = (\hat{I}_{ij})_{i,j \in S}$ ;
3:  $m \leftarrow \frac{TotalData}{(n-1)}$ ;
4:  $Cont \leftarrow 0$ ;
5:  $\hat{I}_{ij} \leftarrow 0$ ;  $m_{i,j} \leftarrow 0 \quad \forall i, j \in S$ ;
6: while  $(Cont < m)$  do
7:    $Cont \leftarrow Cont + 1$ ;
8:   Tomar  $o = (o_{(1)}, \dots, o_{(n)}) \in \pi(S)$  (con probabilidad  $\frac{1}{n!}$ );
9:   for  $(k = 1)$  to  $(n - 1)$  do
10:     $m_{o_{(k)}, o_{(k+1)}} \leftarrow m_{o_{(k)}, o_{(k+1)}} + 1$ ;
11:     $m_{o_{(k+1)}, o_{(k)}} \leftarrow m_{o_{(k)}, o_{(k+1)}}$ ;
12:     $A \leftarrow \mu \left( Pred_{o_{(k)}}(o) \cup \{o_{(k)}\} \cup \{o_{(k+1)}\} \right)$ ;
13:     $B \leftarrow \mu \left( Pred_{o_{(k)}}(o) \cup \{o_{(k+1)}\} \right)$ ;
14:     $C \leftarrow \mu \left( Pred_{o_{(k)}}(o) \cup \{o_{(k)}\} \right)$ ;
15:     $D \leftarrow \mu \left( Pred_{o_{(k)}}(o) \right)$ ;
16:     $\chi(o)_{o_{(k)} o_{(k+1)}} \leftarrow A - B - C + D$ ;
17:     $\hat{I}_{o_{(k)} o_{(k+1)}} \leftarrow \hat{I}_{o_{(k)} o_{(k+1)}} + \chi(o)_{o_{(k)} o_{(k+1)}}$ ;
18:     $\hat{I}_{o_{(k+1)} o_{(k)}} \leftarrow \hat{I}_{o_{(k)} o_{(k+1)}}$ ;
19:   end for
20: end while
21:  $\hat{I}_{ij} \leftarrow \frac{\hat{I}_{ij}}{m_{ij}}, \quad \forall i, j \in S$ ;
22: return  $(\hat{I})$ ;

```

---

A continuación se enuncian algunas propiedades inherentes al valor estimado del índice de interacción  $I$ , obtenido mediante la aplicación del algoritmo *ApproInteraction*.

**Proposición 3.2.1.** *Se considera el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$  y la medida borrosa  $\mu$  definida en  $S$ . Dada una muestra  $M_{ij}$  de tamaño  $m_{ij}$  seleccionada de la población  $\pi(S)$  mediante un proceso de muestreo aleatorio simple, el estimador  $\hat{I}_{ij}$  obtenido mediante el algoritmo *ApproInteraction* es insesgado,*

i.e.  $E[\hat{I}_{ij}] = I_{ij}$ . Además, su varianza se define como sigue:

$$\text{Var}[\hat{I}_{ij}] = \frac{\sigma^2}{m_{ij}} \quad (3.6)$$

donde

$$\sigma^2 = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} (\chi(o)_{ij} - I_{ij})^2$$

*Demostración.* Dado que el valor estimado  $\hat{I}_{ij}$  es la media muestral, y el parámetro  $I_{ij}$  es la media poblacional, la prueba de esta proposición es trivial. En [113] se incluye una extensa revisión de los conceptos esenciales del proceso de muestreo aleatorio simple en que se fundamenta esta demostración.  $\square$

**Corolario 3.2.2.** *El estimador  $\hat{I}_{ij}$  es probabilísticamente consistente, i.e.*

$$\lim_{m_{ij} \rightarrow \infty} p(|\hat{I}_{ij} - I_{ij}|) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

**Corolario 3.2.3.** *Dado un conjunto finito, se consideran dos elementos cualesquiera,  $i, j \in S$ . Si  $\forall K, K' \subset S \setminus \{i, j\}$  se cumple que  $\mu_{Kij} - \mu_{Ki} - \mu_{Kj} + \mu_K = \mu_{K'ij} - \mu_{K'i} - \mu_{K'j} + \mu_{K'}$ , entonces, siempre que  $m_{ij} > 0$ , se cumple  $\hat{I}_{ij} = I_{ij}$ .*

*Demostración.* El valor  $\chi(o)_{ij}$  es constante para cualquier orden  $o \in \pi(S \setminus \{i\})$ , por lo que la media muestral siempre es igual a la media poblacional.  $\square$

Hasta el momento no se ha concretado qué valor debe tomar el tamaño muestral,  $m_{ij}$ , con el fin de que el estimador obtenido sea el adecuado. A continuación se detalla el proceso de cálculo de dicho valor. Dados los parámetros  $e_{th}$  y  $\alpha$ , el tamaño muestral elegido,  $m_{ij}$ , debe ser tal que, con una probabilidad mayor que  $(1 - \alpha)$ , se garantice un error provocado por el proceso de estimación menor que  $e_{th}$ . Aplicando el teorema central del límite y la Proposición 3.2.1 se puede garantizar que  $\hat{I}_{ij} \sim N\left(I_{ij}, \frac{\sigma^2}{m_{ij}}\right)$ . Por tanto, si  $m_{ij} \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{e_{th}^2}$ , entonces  $p(|\hat{I}_{ij} - I_{ij}| \leq e_{th}) \geq (1 - \alpha)$ , donde el valor  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  es tal que  $p\left(Z \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$  y  $Z \sim N(0, 1)$ .

Por otra parte, puesto que no se conoce el valor de la varianza  $\sigma^2$ , el tamaño de la muestra,  $m_{ij}$ , se debe acotar tanto inferior como superiormente. Para ello, en primer lugar se establecen unos valores mínimo y máximo entre los que oscila el valor de  $\hat{I}_{ij}$ . Estos límites son  $\chi_{min} = \min_{\{o \in \pi(S \setminus \{i\}); i, j \in S\}} \chi(o)_{ij}$ ; y  $\chi_{max} = \max_{\{o \in \pi(S \setminus \{i\}); i, j \in S\}} \chi(o)_{ij}$ , respectivamente.

Es importante tener en cuenta que, para cualquier variable aleatoria acotada por dos valores, el máximo valor de la varianza se alcanza cuando la

variable en estudio toma uno de los valores extremos o cotas. Esta situación ocurre para ambos extremos con la misma probabilidad,  $\frac{1}{2}$ . Concretamente en el caso que nos ocupa, los valores extremos que acotan la variable de interés son  $\chi_{min}$  y  $\chi_{max}$ , de modo que se cumple la inecuación [3.7](#), fijándose así una cota para el valor de la varianza  $\sigma^2$ .

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\leq \frac{1}{2} \left( \chi_{max} - \frac{\chi_{max} + \chi_{min}}{2} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left( \chi_{min} - \frac{\chi_{max} + \chi_{min}}{2} \right)^2 = \frac{(\chi_{max} - \chi_{min})^2}{4} \end{aligned} \quad (3.7)$$

En conclusión, el error cometido estará acotado como sigue:

$$p \left( e_{th} \geq \sqrt{\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{m_{ij}} + \frac{(\chi_{max} - \chi_{min})^2}{4}} \right) \leq 1 - \alpha$$

### 3.3. Estimación estratificada del índice de interacción

Al igual que en otros contextos en los que la aplicación de un proceso de muestreo aleatorio simple provoca una gran varianza, se pueden dar situaciones en las que la consideración del algoritmo *ApproInteraction* no garantice ciertos niveles de precisión. Particularmente en el problema de estimación del índice de interacción  $I_{ij}$ , uno de los factores decisivos en el desencadenamiento de esta situación es la existencia de una gran diferencia en la varianza relativa a los distintos pares de elementos considerados, dependiendo de su posición en la permutación seleccionada. Una posible forma de aplacar este foco de variabilidad es mediante la consideración de diversos estratos. De entre todos los procesos existentes destinados a la reducción de la varianza, uno de los más populares a la hora de considerar algún método de Monte Carlo es la aplicación de un sistema de estratificación para estimar las expectativas a partir de una cierta población [\[39, 120\]](#). Siguiendo la idea propuesta por J. Castro et al. en [\[30\]](#), en esta sección se propone un refinamiento del proceso definido previamente para la estimación del índice de interacción entre dos elementos. El método que se detallará a continuación tiene su base en un proceso de muestro estratificado, a diferencia del algoritmo *ApproInteraction*, fundamentado en un proceso de muestreo aleatorio simple. La consideración de diversos estratos a la hora de proceder con la estimación mejorará los resultados obtenidos mediante el algoritmo original en aquellos casos en que haya diferencia entre la varianza poblacional y las varianzas en cada estrato. Es importante tener en cuenta que aquellas situaciones en las que no existan estas diferencias no precisarán de la consideración de este refinamiento.

El punto clave de cualquier proceso de estratificación es la división de la población en subgrupos, de modo que los estratos obtenidos sean internamente homogéneos y tan heterogéneos entre sí como sea posible. En el problema de estimación que ocupa esta sección, la definición de los estratos en que se basará el proceso de muestreo dependerá de las dos fuentes más importantes de variación: los pares de elementos tomados y la posición que cada uno de los individuos ocupa en cada coalición.

La distribución del total de la muestra (llamada *TotalData* en el algoritmo *ApproInteraction*) es calculada mediante la técnica de asignación óptima:

$$m_{ij\ell} = TotalData * \frac{\sigma_{ij\ell}^2}{n-1}, \forall i, j \in S, \ell = 1, \dots, n-1, . \quad (3.8)$$

$$\sum_{s,r \in S} \sum_{k=1} \sigma_{srk}^2$$

Para poder fijar el tamaño de cada estrato,  $P_{ij}^\ell$ , se debe estimar la varianza  $\sigma_{ij\ell}^2$ , ya que su valor real no es conocido. A continuación se detalla el método propuesto. Se trata de un proceso organizado en dos fases. El primer paso consiste en la división de la muestra en dos partes,  $m_{ij\ell} = m_{ij\ell}^{exp} + m_{ij\ell}^{st}$ . Las muestras relativas a una de las divisiones,  $m_{ij\ell}^{exp}$ , se usan para calcular estimaciones insesgadas de las distintas varianzas reales,  $\sigma_{ij\ell}^2$ . Por otra parte, las muestras correspondientes a la otra división,  $m_{ij\ell}^{st}$ , se usan para garantizar que los distintos valores finales  $m_{ij\ell}$  son proporcionales a las estimaciones de las varianzas calculadas previamente. Lógicamente, la selección de  $m_{ij\ell}^{exp}$  y  $m_{ij\ell}^{st}$  depende de las características del problema abordado. No obstante, en general no es necesario un proceso excesivamente refinado para la selección de estos tamaños, ya que no alterarán sobremanera el resultado final. Por tanto, en este caso se fijará un porcentaje equilibrado, de modo que a cada parte del análisis se le asignará un 50% del total de la muestra.

A continuación se detalla el método propuesto para estimar el índice de interacción  $I_{ij}$  mediante un proceso de muestro estratificado. En lo sucesivo, dada la medida borrosa  $\mu : 2^S \rightarrow [0, 1]$ , el valor estimado de  $I_{ij}$  obtenido mediante un proceso estratificado será denotado como  $\hat{I}_{ij}^{st} := \hat{I}_{ij}(\mu)^{st}$ .

**Fase 1.** *Estimación experimental.* Para cada posición  $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$  y cada par de elementos  $i, j \in S$ :

1. El tamaño de la muestra en el estudio experimental será el mismo para todos los estratos  $P_{ij}^\ell$ , i.e.  $m_{ij\ell}^{exp} = \frac{TotalData}{n(n-1)^2}$ .
2. La característica observada en cada unidad muestral será  $\chi(o)_{ij} =$

$\mu(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) - \mu(Pred_j(o) \cup \{i\}) - \mu(Pred_j(o) \cup \{j\}) + \mu(Pred_j(o))$ , donde  $i, j \in S$  y  $o \in \pi(S \setminus \{i\})$ .

3. Para cada  $i, j \in S$ ,  $\ell = 1, \dots, n-1$ , se considera el estrato  $P_{ij}^\ell$ , que es el conjunto de todos los posibles órdenes,  $o \in \pi(S \setminus \{i\})$ , en los cuales el elemento  $j$  está en la posición  $\ell$ -ésima.
4. Se aplica un proceso de muestreo aleatorio simple con reemplazamiento en cada estrato  $P_{ij}^\ell$ , obteniendo una muestra  $M_{ij\ell}^{exp}$  de tamaño  $m_{ij\ell}^{exp}$ . Note que, para cada estrato  $P_{ij}^\ell$ , la probabilidad de que un orden forme parte de la muestra es  $\frac{1}{(n-2)!}$ .
5. Para cada  $i, j \in S$ ,  $\ell = 1, \dots, n-1$ ,  $s_{ij\ell}^2$  es la varianza muestral insesgada de las contribuciones marginales sobre la muestra  $M_{ij\ell}^{exp}$ :

$$s_{ij\ell}^2 = \frac{1}{m_{ij\ell}^{exp} - 1} \sum_{o \in M_{ij\ell}^{exp}} \left( \chi(o)_{ij} - \bar{T}_{ij\ell}^{exp} \right)^2,$$

siendo  $\bar{T}_{ij\ell}^{exp}$  la media de  $\chi(o)_{ij}$  sobre la muestra  $M_{ij\ell}^{exp}$ .

### Fase 2. Asignación óptima:

1. En cada estrato, el tamaño muestral total es proporcional al valor estimado de la varianza  $s_{ij\ell}^2$ . Por tanto, en el estudio estratificado completo, el tamaño de la muestra  $m_{ij\ell}^{st}$  se calcula para cada estrato  $P_{ij}^\ell$  como sigue:

$$m_{ij\ell} = TotalData * \frac{s_{ij\ell}^2}{\sum_{ij \in S} \sum_{k=1}^{n-1} s_{ijk}^2},$$

$$m_{ij\ell}^{st} = m_{ij\ell} - m_{ij\ell}^{exp},$$

Por tanto, en la segunda fase, únicamente se seleccionan aleatoriamente las  $(m_{ij\ell} - m_{ij\ell}^{exp})$  muestras restantes. Si se diera el caso de que  $m_{ij\ell}^{st} \leq 0$ , no se generarían más muestras para el estrato correspondiente,  $P_{ij}^\ell$ , y el resto de tamaños muestrales  $m_{ij\ell}$  serían proporcionalmente re-calculados en función de  $(m_{ij\ell} - m_{ij\ell}^{exp})$ .

2. En este punto, tanto la característica observada en cada unidad muestral, como el estrato, y el proceso de muestreo aleatorio simple son los mismos que en la Fase 1. La diferencia reside tanto en la muestra,  $M_{ij\ell}^{st}$ , como en su tamaño,  $m_{ij\ell}^{st}$ .
3. Calcular  $\bar{T}_{ij\ell}^{st}$  como la media de  $\chi(o)_{ij}$  sobre la muestra  $M_{ij\ell}^{st}$ .
4. Calcular  $\hat{I}_{ij}^{st} = \frac{(m_{ij\ell}^{st} * \bar{T}_{ij\ell}^{st}) + (m_{ij\ell}^{exp} * \bar{T}_{ij\ell}^{exp})}{m_{ij\ell}^{exp} + m_{ij\ell}^{st}}$ , una estimación del índice de interacción.

Este proceso se resume en el Algoritmo 3, presentando su estructura en forma de pseudocódigo. El resultado obtenido es  $\hat{I}^{st}$ , una estimación del índice de interacción obtenida mediante muestreo estratificado.

---

**Algoritmo 3** *StratifiedApproInteraction*


---

```

1: Input:  $(S, TotalData, \mu)$ ;
2: Output:  $\hat{I}^{st} = \left( \hat{I}_{ij}^{st} \right)_{i,j \in S}$ ;
3:  $\bar{I}_{ij\ell}^{exp} \leftarrow 0$ ;  $\bar{I}_{ij\ell}^{st} \leftarrow 0$ ;  $s_{ij\ell}^2 \leftarrow 0$ ,  $\forall i, j \in S, \forall \ell = 1, \dots, n-1$ ;
4: for  $(i = 1)$  to  $(n)$  do
5:   for  $(j = 1)$  to  $(n)$  do
6:     for  $(\ell = 1)$  to  $(n-1)$  do
7:        $Cont1 \leftarrow 0$ ;  $Cont2 \leftarrow 0$ ;  $m_{ij\ell}^{exp} \leftarrow \frac{TotalData}{n(n-1)^2}$ ;
8:       while  $(Cont1 < m_{ij\ell}^{exp})$  do
9:          $Cont1 \leftarrow Cont1 + 1$ ;
10:        Tomar  $o = (o_{(1)}, \dots, o_{(n-1)}) \in P_{ij}^\ell$  (con probabilidad  $\frac{1}{(n-2)!}$ );
11:         $\chi(o)_{ij} \leftarrow \mu(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) - \mu(Pred_j(o) \cup \{j\}) -$ 
12:           $\mu(Pred_j(o) \cup \{i\}) + \mu(Pred_j(o))$ ;
13:         $\bar{I}_{ij\ell}^{exp} \leftarrow \bar{I}_{ij\ell}^{exp} + \chi(o)_{ij}$ ;
14:         $s_{ij\ell}^2 \leftarrow s_{ij\ell}^2 + (\chi(o)_{ij})^2$ ;
15:      end while
16:       $s_{ij\ell}^2 \leftarrow \frac{1}{m_{ij\ell}^{exp} - 1} (s_{ij\ell}^2 - \frac{(\bar{I}_{ij\ell}^{exp})^2}{m_{ij\ell}^{exp}})$ ;
17:       $\bar{I}_{ij\ell}^{exp} \leftarrow \frac{\bar{I}_{ij\ell}^{exp}}{m_{ij\ell}^{exp}}$ ;
18:       $m_{ij\ell}^{st} \leftarrow \max\{0, \frac{TotalData * s_{ij\ell}^2}{\sum_{rt \in X} \sum_{k=1}^{n-1} s_{rtk}^2} - m_{ij\ell}^{exp}\}$ ;
19:      while  $(Cont2 < m_{ij\ell}^{st})$  do
20:        Tomar  $o = (o_{(1)}, \dots, o_{(n-1)}) \in P_{ij}^\ell$  (con probabilidad  $\frac{1}{(n-2)!}$ );
21:         $\chi(o)_{ij} \leftarrow \mu(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) - \mu(Pred_j(o) \cup \{j\}) -$ 
22:           $\mu(Pred_j(o) \cup \{i\}) + \mu(Pred_j(o))$ ;
23:         $\bar{I}_{ij\ell}^{st} \leftarrow \bar{I}_{ij\ell}^{st} + \chi(o)_{ij}$ ;
24:         $Cont2 \leftarrow Cont2 + 1$ ;
25:      end while
26:       $\bar{I}_{ij\ell}^{st} \leftarrow \frac{\bar{I}_{ij\ell}^{st}}{m_{ij\ell}^{st}}$ ;
27:    end for
28:  end for
29: end for
30:  $\hat{I}_{ij}^{st} \leftarrow \frac{1}{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(\bar{I}_{ij\ell}^{st} * m_{ij\ell}^{st}) + (\bar{I}_{ij\ell}^{exp} * m_{ij\ell}^{exp})}{(m_{ij\ell}^{st} + m_{ij\ell}^{exp})}$ ,  $\forall i, j \in S$ ;
31: return  $(\hat{I}^{st})$ ;

```

---

A continuación se enuncian algunas propiedades inherentes al valor estimado del índice de interacción  $I$ , obtenido mediante la aplicación del algoritmo *StratifiedApproInteraction*.

**Proposición 3.3.1.** *Se considera el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$  y la medida borrosa  $\mu$  definida en  $S$ . El estimador  $\hat{I}_{ij}^{st}$  obtenido mediante el algoritmo *StratifiedApproInteraction* es insesgado, i.e.  $E[\hat{I}_{ij}] = I_{ij}$ . Además, su varianza se define como sigue:*

$$\text{Var}[\hat{I}_{ij}^{st}] = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\sigma_{ij\ell}^2}{m_{ij\ell}} \quad (3.9)$$

donde

$$\sigma_{ij\ell}^2 = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{o \in P_{ij}^\ell} \left( \chi(o)_{ij} - I_{ij}^\ell \right)^2$$

*Demostración.* Considerando el valor estimado  $\hat{I}_{ij}^{st}$  como la media muestral de un proceso de muestreo estratificado, y considerando el parámetro  $I_{ij}$  como la media poblacional, la prueba de esta proposición es trivial. En [113] se incluye una extensa revisión de los conceptos esenciales del proceso de muestreo estratificado en que se fundamenta esta demostración.  $\square$

**Corolario 3.3.2.** *El estimador  $\hat{I}_{ij}^{st}$  es probabilísticamente consistente, i.e.*

$$\lim_{m_{ij} \rightarrow \infty} p \left( |\hat{I}_{ij}^{st} - I_{ij}| \right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

**Corolario 3.3.3.** *Dado un conjunto finito, se consideran dos elementos cualesquiera,  $i, j \in S$ . Si  $\forall o, o' \in P_{ij}^\ell$  y  $\forall \ell = 1, \dots, n-1$  se cumple que  $\chi(o)_{ij} = \chi(o')_{ij}$ , entonces, siempre que  $m_{ij} > 0$ , se cumple  $\hat{I}_{ij} = I_{ij}$ .*

*Demostración.* El valor  $\chi(o)_{ij}$  es constante para cualquier orden  $o \in P_{ij}^\ell$ , por lo que la media muestral siempre es igual a la media poblacional  $\square$

Por otra parte, hay que calcular el tamaño de la muestra en cada estrato,  $m_{ij\ell}$ . Para ello, se debe acotar el valor de la varianza correspondiente,  $\sigma_{ij\ell}^2$ . En este caso, y aunque se podrían obtener cotas más precisas, se considerarían los valores extremos  $\frac{(\chi_{max} - \chi_{min})^2}{4}$ . Así, cuando los tamaños de las muestras sean similares, el error teórico obtenido será el mismo que el error obtenido mediante la aplicación del método propuesto en la Sección 3.2, el algoritmo *ApproInteraction*.

### 3.4. Cálculo real de $I_{ij}$ . Algunos ejemplos

Existen algunos casos de medidas borrosas sencillas para las que la complejidad de cómputo del índice  $I$  es polinomial. Se tomarán algunos para ilustrar el cálculo del valor real del índice de interacción entre dos elementos. Los resultados obtenidos serán más tarde utilizados para verificar la eficacia de los algoritmos propuestos.

Se considera el conjunto finito  $S = \{1, \dots, n\}$ , y uno de los posibles órdenes de sus elementos,  $o \in \pi(S)$ . Para llevar a cabo el proceso de cálculo del índice de interacción entre un par de elementos, el primer paso consiste en la definición de los valores  $A, B, C, D$ , que serán más tarde usados en todos los ejemplos. Sea  $Pred_j(o)$  el conjunto de los predecesores de  $j$  en el orden  $o$ , esto es, siendo  $o = (o_1, \dots, o_s, j, \dots, o_n)$ , entonces  $Pred_j(o) = \{o_1, \dots, o_s\}$ . Se considera la medida borrosa  $\mu$  definida en  $S$ . Se define:

- $A = \mu(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\})$
- $B = \mu(Pred_j(o) \cup \{i\})$
- $C = \mu(Pred_j(o) \cup \{j\})$
- $D = \mu(Pred_j(o))$

A continuación se procede al cálculo del valor real del índice de interacción entre un par de elementos, tomando ejemplos en los que dicho cómputo puede realizarse con complejidad polinomial en el peor de los casos.

#### Ejemplo 1. Medida borrosa simétrica escalonada

Sea la medida borrosa  $\mu^1 : 2^S \rightarrow [0, 1]$ , siendo  $S = \{1, \dots, 100\}$ . Esta función es un caso particular de medida borrosa en la cual todos los elementos son iguales, y el único factor a tener en cuenta es el tamaño de  $S$ . El valor asignado por  $\mu^1$  para aquellos subconjuntos de  $S$  de cardinal relativamente pequeño es prácticamente despreciable. Además, existe un valor  $p$  a partir del cual el valor obtenido es el mismo para cualquier subconjunto  $T \subseteq S$  tal que  $t = |T| \geq p$ .

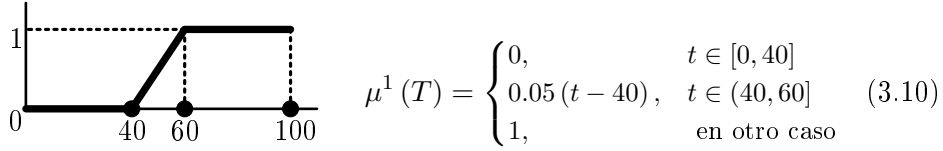


Figura 3.1: Medida borrosa  $\mu^1$ .

donde  $T \subseteq S$  y  $t = |T|$

▷ **Cálculo del valor real de  $I_{ij}$  en  $\mu^1$ .**

Para cada par de elementos  $i, j \in S$ , de acuerdo con la Proposición [3.1.1](#), el índice de interacción  $I_{ij}$  se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} I_{ij}(\mu^1) &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu^1(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) \right. \\ &\quad \left. - \mu^1(Pred_j(o) \cup \{i\}) - \mu^1(Pred_j(o) \cup \{j\}) + \mu^1(Pred_j(o)) \right] \\ &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [A - B - C + D] = \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [\chi(o)_{ij}] \end{aligned}$$

- Si  $|Pred_j(o)| \leq 38$ , entonces  $A = B = C = D = 0$ , luego  $\chi(o)_{ij} = 0$ .
- Si  $|Pred_j(o)| = 39$ , entonces  $A = 0.05$  y  $B = C = D = 0$ , luego  $\chi(o)_{ij} = 0.05$ .
- Si  $|Pred_j(o)| \in [40, 58]$ , entonces  $A = B + 0.05$ , y  $C = D + 0.05$ , luego  $\chi(o)_{ij} = (B + 0.05) - B - (D + 0.05) + D = 0$ .
- Si  $|Pred_j(o)| = 59$ , entonces  $A = B = C = 1$ , y  $D = 0.95$ , luego  $\chi(o)_{ij} = 1 - 1 - 1 + 0.95 = -0.05$ .
- Si  $|Pred_j(o)| \in [60, 98]$ , entonces  $A = B = C = D = 1$ , luego  $\chi(o)_{ij} = 0$ .

Por tanto, el cálculo del índice de interacción  $I_{ij}$  será:

$$\begin{aligned} I_{ij}(\mu^1) &= \frac{1}{99!} \left[ \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) / \\ |Pred_j(o)| \leq 38}} (0) + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) / \\ |Pred_j(o)| = 39}} (0.05) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) / \\ |Pred_j(o)| \in [40, 58]}} (0) + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) / \\ |Pred_j(o)| = 59}} (-0.05) + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) / \\ |Pred_j(o)| \in [60, 98]}} (0) \right] \end{aligned}$$

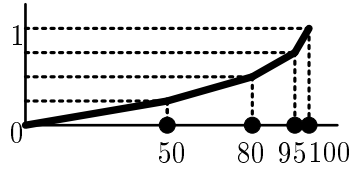
Por otra parte, la cantidad de órdenes en los cuales  $j$  ocupa una posición  $\ell$  específica es  $\frac{(n-1)!}{n-1} = \frac{99!}{99}$ , con lo que la expresión anterior se puede simplificar como sigue:

$$I_{ij}(\mu^1) = \frac{1}{99!} \left[ \frac{99!}{99} 0.05 + \frac{99!}{99} (-0.05) \right] = 0$$

Así, dada la medida borrosa  $\mu^1$  definida en la ecuación (3.10), para cada par de elementos  $i, j \in S$ , el valor real del índice de interacción es  $I_{ij}(\mu^1) = 0$ .

### Ejemplo 2. Medida borrosa simétrica creciente

Sea la medida borrosa  $\mu^2 : 2^S \rightarrow [0, 1]$ , siendo  $S = \{1, \dots, 100\}$ .  $\mu^2$  es un caso particular de medida borrosa simétrica en la que todos los elementos son iguales, siendo el tamaño del conjunto  $S$  el único factor a tener en cuenta. En este ejemplo, el valor asignado por  $\mu^2$  crecerá más despacio para aquellos subconjuntos de  $S$  relativamente pequeños, y más rápidamente para los subconjuntos más grandes.



$$\mu^2(T) = \begin{cases} \frac{t}{200}, & t \in [0, 50] \\ 0.25 + \frac{t-50}{120}, & t \in (50, 80] \\ 0.5 + \frac{t-80}{60}, & t \in (80, 95] \\ 0.75 + \frac{t-95}{20}, & t \in (95, 100] \end{cases} \quad (3.11)$$

Figura 3.2: Medida borrosa  $\mu^2$ .

donde  $T \subseteq S$  y  $t = |T|$

#### ▷ Cálculo del valor real de $I_{ij}$ en $\mu^2$ .

Para cada par de elementos  $i, j \in S$ , de acuerdo con la Proposición 3.1.1, el índice de interacción  $I_{ij}$  se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} I_{ij}(\mu^2) &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu^2(\text{Pred}_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) \right. \\ &\quad \left. - \mu^2(\text{Pred}_j(o) \cup \{i\}) - \mu^2(\text{Pred}_j(o) \cup \{j\}) + \mu^2(\text{Pred}_j(o)) \right] \\ &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [A - B - C + D] = \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [\chi(o)_{ij}] \end{aligned}$$

- Si  $|Pred_j(o)| \leq 48$ , entonces  $A = (0.005 + B)$  y  $C = (0.005 + D)$ , con lo que  $\chi(o)_{ij} = (B + 0.005) - B - (D + 0.005) + D = 0$ .
- Si  $|Pred_j(o)| = 49$ , entonces  $A = (0.25 + \frac{1}{120})$ ,  $B = C = 0.25$ , y  $D = (0.25 - \frac{1}{200})$ , luego  $\chi(o)_{ij} = (0.25 + \frac{1}{120}) - 0.25 - (0.25 - \frac{1}{120}) + 0.25 = \frac{1}{120} - \frac{1}{200} = \frac{1}{300}$ .
- Si  $|Pred_j(o)| \in [50, 78]$ , entonces  $A = (B + \frac{1}{120})$  y  $C = (D + \frac{1}{120})$ , luego  $\chi(o)_{ij} = (B + \frac{1}{120}) - B - (D + \frac{1}{120}) + D = 0$ .
- Si  $|Pred_j(o)| = 79$ , entonces  $A = (0.5 + \frac{1}{60})$ ,  $B = C = 0.5$ , y  $D = (0.5 - \frac{1}{120})$ , luego  $\chi(o)_{ij} = (0.5 + \frac{1}{60}) - 0.5 - 0.5 + (0.5 - \frac{1}{120}) = \frac{1}{60} - \frac{1}{120} = \frac{1}{120}$ .
- Si  $|Pred_j(o)| \in [80, 93]$ , entonces  $A = (B + \frac{1}{60})$  y  $C = (D + \frac{1}{60})$ , luego  $\chi(o)_{ij} = (B + \frac{1}{60}) - B - (D + \frac{1}{60}) + D = 0$ .
- Si  $|Pred_j(o)| = 94$ , entonces  $A = (0.75 + \frac{1}{20})$ ,  $B = C = 0.75$ , y  $D = (0.75 - \frac{1}{60})$ , luego  $\chi(o)_{ij} = (0.75 + \frac{1}{20}) - 0.75 - 0.75 + (0.75 - \frac{1}{60}) = \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$ .
- Si  $|Pred_j(o)| \in [95, 98]$ , entonces  $A = (B + \frac{1}{20})$  y  $C = (D + \frac{1}{20})$ , luego  $\chi(o)_{ij} = (B + \frac{1}{20}) - B - (D + \frac{1}{20}) + D = 0$ .

Por tanto, el cálculo del índice de interacción será  $I_{ij}$  será:

$$\begin{aligned}
 I_{ij}(\mu^2) = \frac{1}{99!} & \left[ \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)| \leq 48}} (0) + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)| = 49}} \left( \frac{1}{300} \right) + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)| \in [50, 78]}} (0) \right. \\
 & + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)| = 79}} \left( \frac{1}{120} \right) + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)| \in [80, 93]}} (0) + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)| = 94}} \left( \frac{1}{30} \right) \\
 & \left. + \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)| \in [95, 100]}} (0) \right]
 \end{aligned}$$

Por otra parte, la cantidad de órdenes en los cuales  $j$  ocupa una posición  $\ell$  específica es  $\frac{(n-1)!}{n-1} = \frac{99!}{99}$ , con lo que la expresión anterior se puede simplificar como sigue:

$$\begin{aligned}
 I_{ij}(\mu^2) = \frac{1}{99!} & \left( \frac{99!}{99} \frac{1}{300} + \frac{99!}{99} \frac{1}{120} + \frac{99!}{99} \frac{1}{30} \right) = \frac{1}{99} \left( \frac{1}{300} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{120} + \frac{1}{30} \right) = \frac{1}{2200}
 \end{aligned}$$

Así, dada la medida borrosa  $\mu^2$  definida en la ecuación (3.11), para cada par de elementos  $i, j \in S$ , el valor real del índice de interacción es  $I_{ij}(\mu^2) = \frac{1}{2200}$ .

### Ejemplo 3. Medida borrosa con peso máximo

Se considera la medida borrosa  $\mu^3 : 2^S \rightarrow [0, 1]$  definida en la ecuación (3.12), siendo  $S = \{1, \dots, 100\}$ . Se trata de un caso particular de medida borrosa en el cual cada elemento tiene un peso asignado. En este ejemplo, el valor definido por la medida borrosa para cada subconjunto resulta ser el máximo de entre los distintos pesos asociados a los elementos que forman dicho subconjunto. Así, para cada  $T \subseteq S$ ,

$$\mu^3(T) = \max_{i \in T} \{w_i\}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} w_i = 0.1, & \forall i \in \{1, \dots, 8\} \\ w_i = 0.2, & \forall i \in \{9, \dots, 20\} \\ w_i = 0.3, & \forall i \in \{21, \dots, 26\} \\ w_i = 0.4, & \forall i \in \{27, \dots, 40\} \\ w_i = 0.5, & \forall i \in \{41, \dots, 48\} \\ w_i = 0.6, & \forall i \in \{49, \dots, 57\} \\ w_i = 0.7, & \forall i \in \{58, \dots, 70\} \\ w_i = 0.8, & \forall i \in \{71, \dots, 80\} \\ w_i = 0.9, & \forall i \in \{81, \dots, 90\} \\ w_i = 1, & \forall i \in \{91, \dots, 100\} \end{cases} \quad (3.12)$$

#### ▷ Cálculo del valor real de $I_{ij}$ en $\mu^3$ .

Para cada par de elementos  $i, j \in S$ , de acuerdo con la Proposición 3.1.1, el índice de interacción  $I_{ij}$  se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} I_{ij}(\mu^3) &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu^3(\text{Pred}_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) \right. \\ &\quad \left. - \mu^3(\text{Pred}_j(o) \cup \{i\}) - \mu^3(\text{Pred}_j(o) \cup \{j\}) + \mu^3(\text{Pred}_j(o)) \right] \\ &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [A - B - C + D] = \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [\chi(o)_{ij}] \end{aligned}$$

Se define el valor  $Min_{ij} = \min\{w_i, w_j\}$ ; y, sin pérdida de generalidad, se asume que  $w_i \geq w_j$ . Por tanto,  $I_{ij}(\mu^3) = \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [A - B - C + D] = - \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [C - D]$ .

La única diferencia entre los valores  $A$  y  $B$  la provoca el elemento  $\{j\}$ , por lo que en este caso,  $A = B$ . Así, asumiendo

sin pérdida de generalidad que  $w_i \geq w_j$ , se tiene  $I_{ij}(\mu^3) = -\sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [C - D]$  es el opuesto al índice de Shapley del elemento  $j$  en  $\mu^3$ , cuando el elemento  $i$  ‘no existe’. Concretamente,  $I_{ij}(\mu^3) = -Sh_j(\mu^{3i})$ , donde  $\mu^{3i}(S) = \mu^3(S)$ ,  $\forall S \subseteq S^i = S \setminus \{i\}$ . El valor de Shapley relativo a estas las medidas borrosas  $\mu^3$  y  $\mu^{3i}$  se puede calcular explícitamente, como se explica en [31]. Así, de acuerdo con el desarrollo propuesto por los autores para este cómputo, dado un par de elementos  $i, j \in S$ , el valor real del índice de interacción  $I_{ij}$  depende del valor  $Min_{ij}$  como sigue:

$$\begin{aligned} \triangleright Min_{ij} = 0.1, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 0.2, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 0.3, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91} + \frac{0.1}{79}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 0.4, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91} + \frac{0.1}{79} + \frac{0.1}{73}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 0.5, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91} + \frac{0.1}{79} + \frac{0.1}{73} + \frac{0.1}{53}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 0.6, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91} + \frac{0.1}{79} + \frac{0.1}{73} + \frac{0.1}{53} + \frac{0.1}{51}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 0.7, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91} + \frac{0.1}{79} + \frac{0.1}{73} + \frac{0.1}{53} + \frac{0.1}{51} + \frac{0.1}{42}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 0.8, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91} + \frac{0.1}{79} + \frac{0.1}{73} + \frac{0.1}{53} + \frac{0.1}{51} + \frac{0.1}{42} + \frac{1}{29}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 0.9, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91} + \frac{0.1}{79} + \frac{0.1}{73} + \frac{0.1}{53} + \frac{0.1}{51} + \frac{0.1}{42} + \frac{1}{29} + \frac{1}{19}\right] \\ \triangleright Min_{ij} = 1, & \Rightarrow I_{ij}(\mu^3) = -\left[\frac{0.1}{99} + \frac{0.1}{91} + \frac{0.1}{79} + \frac{0.1}{73} + \frac{0.1}{53} + \frac{0.1}{51} + \frac{0.1}{42} + \frac{1}{29} + \frac{1}{19} + \frac{1}{9}\right] \end{aligned}$$

#### Ejemplo 4. Medida borrosa bi-cluster

Se considera la función  $\mu^4 : 2^S \rightarrow [0, 1]$ , definida en la ecuación (3.13), siendo  $S = \{1, \dots, 100\}$ . Se trata de un caso particular de medida borrosa en la que los elementos se organizan en dos grupos, de modo que el valor asignado a cada grupo depende de la cantidad de pares de cierto tipo que se pueden formar con los entes que están en él. Este ejemplo es análogo al popular juego de los zapatos, uno de los problemas clásicos de la Teoría de Juegos [31]. Sean los subconjuntos  $C_T^1 = T \cap \{1, \dots, 50\}$  y  $C_T^2 = T \cap \{51, \dots, 100\}$ , y sea  $n_i(T) = |C_T^i|$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\mu^4$  se define como:

$$\mu^4(T) = 0.02 \min\{n_1(S), n_2(T)\} \quad (3.13)$$

#### ▷ Cálculo del valor real de $I_{ij}$ en $\mu^4$ .

Para cada par de elementos  $i, j \in S$ , de acuerdo con la Proposición 3.1.1, el índice de interacción  $I_{ij}$  se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
I_{ij}(\mu^4) &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} \left[ \mu^4(Pred_j(o) \cup \{i\} \cup \{j\}) \right. \\
&\quad \left. - \mu^4(Pred_j(o) \cup \{i\}) - \mu^4(Pred_j(o) \cup \{j\}) + \mu^4(Pred_j(o)) \right] \\
&= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [A - B - C + D] = \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{(n-1)!} [\chi(o)_{ij}]
\end{aligned}$$

A continuación se plantea una distinción de casos:

1. Si  $i, j \in \{1, \dots, 50\} = C_T^1$ 
  - a) Si  $n_1(Pred_j(o)) \geq n_2(Pred_j(o))$ , entonces  $A = B = C = D$ , luego  $\chi(o)_{ij} = 0$ .
  - b) Si  $n_1(Pred_j(o)) \leq (n_2(Pred_j(o)) - 2)$ , entonces  $A = B + 0.02$  y  $C = D + 0.02$ , luego  $\chi(o)_{ij} = 0$ .
  - c) Si  $n_1(Pred_j(o)) = (n_2(Pred_j(o)) - 1)$  entonces  $A = B = C = D + 0.02$ , luego  $\chi(o)_{ij} = -0.02$ .

En conclusión, si  $\exists c \in \mathbb{N}$  tal que  $|Pred_j(o)| = 2c$ , entonces  $I_{ij}(\mu^4) = 0$ . En otro caso, si  $\exists c \in \mathbb{N}$  tal que  $|Pred_j(o)| = 2c - 1$ , entonces la probabilidad de que ocurra  $I_{ij}(\mu^4) = -0.02$  es igual a la probabilidad de obtener  $c$  elementos del tipo  $C_T^2$ , y  $(c-1)$  elementos del tipo  $C_T^1$ , asumiendo que existen 50 elementos de tipo 2, y 48 elementos de tipo 1. Esta probabilidad se calcula por medio de la distribución hipergeométrica, siendo  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(a_1, a_2, A_1, A_2) = \frac{\binom{A_1}{a_1} \binom{A_2}{a_2}}{\binom{A_1 + A_2}{a_1 + a_2}}$ . Además, hay  $\frac{(n-1)}{n-1} = \frac{99!}{99!}$  órdenes  $o$  para los que se cumple  $|Pred_j(o)| = k$ . Por tanto,

$$\begin{aligned}
I_{ij}(\mu^4) &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{99!} [\chi(o)_{ij}] = \frac{1}{99!} \sum_{k=0}^{98} \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)|=k}} [\chi(o)_{ij}] \\
&= \sum_{c=1}^{49} \frac{99!}{99} \mathcal{P}_{\mathcal{H}}(c, c-1, 50, 48) (-0.02) \\
&= \frac{-0.02}{99} \sum_{c=1}^{49} \frac{\binom{50}{c} \binom{48}{c-1}}{\binom{98}{2c-1}} = -0.00215602304
\end{aligned}$$

2. Si  $i, j \in \{51, \dots, 100\}$ , el proceso a seguir es análogo al detallado en el punto 1, con la diferencia de un intercambio de rol entre las clases  $C_1$  y  $C_2$ . Lógicamente, el resultado obtenido es el mismo,  $I_{ij}(\mu^4) = -0.00215602304$ .

3. Otro escenario tiene lugar si,  $i \in C_T^1$  y  $j \in C_T^2$ , ó viceversa. En esta situación, se asume sin pérdida de la generalidad que  $i \in \{1, \dots, 50\} = C_T^1$ , y  $j \in \{51, \dots, 100\} = C_T^2$ .
- Si  $n_1(Pred_j(o)) > n_2(Pred_j(o))$ , entonces  $A = C$  y  $B = D$ , con lo que  $\chi(o)_{ij} = 0$ .
  - Si  $n_1(Pred_j(o)) < n_2(Pred_j(o))$ , entonces  $A = B$  y  $C = D$ , con lo que  $\chi(o)_{ij} = 0$ .
  - Si  $n_1(Pred_j(o)) = n_2(Pred_j(o))$ , entonces  $A = (B + 0.02) = (C + 0.02) = (D + 0.02)$ , con lo que  $\chi(o)_{ij} = 0.02$ .

En conclusión, si  $\exists c \in \mathbb{N}$  tal que  $|Pred_j(o)| = 2c - 1$ , entonces  $I_{ij}(\mu^4) = 0$ . En otro caso, si  $\exists c \in \mathbb{N}$  tal que  $|Pred_j(o)| = 2c$ , la probabilidad de que  $I_{ij}(\mu^4) = 0.02$  es igual a la probabilidad de obtener  $c$  elementos de tipo  $C_T^1$ , y  $c$  elementos de tipo  $C_T^2$ , asumiendo que existen 49 elementos de tipo 2, y 49 elementos de tipo 1. Esta probabilidad se calcula por medio de la distribución hipergeométrica, siendo  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(a_1, a_2, A_1, A_2) = \frac{\binom{A_1}{a_1} \binom{A_2}{a_2}}{\binom{A_1 + A_2}{a_1 + a_2}}$ . Además, hay  $\frac{(n-1)}{n-1} = \frac{99!}{99}$  órdenes  $o$  para los que se cumple  $|Pred_j(o)| = k$ . Por tanto,

$$\begin{aligned}
 I_{ij}(\mu^4) &= \sum_{o \in \pi(S \setminus \{i\})} \frac{1}{99!} [\chi(o)_{ij}] = \frac{1}{99!} \sum_{k=0}^{98} \sum_{\substack{o \in \pi(S \setminus \{i\}) \\ |Pred_j(o)|=k}} [\chi(o)_{ij}] \\
 &= \sum_{c=1}^{49} \frac{99!}{99} \mathcal{P}_{\mathcal{H}}(c, c, 49, 49) (0.02) = \frac{0.02}{99} \sum_{c=1}^{49} \frac{\binom{49}{c} \binom{49}{c}}{\binom{98}{2c}} \\
 &= 0.00251290258037
 \end{aligned}$$

### 3.5. Resultados experimentales

En esta sección se analizan los resultados proporcionados por los nuevos algoritmos, para lo que se aproximará el valor del índice de interacción de las medidas borrosas introducidas en la sección anterior, para las que ha sido posible el cálculo del valor real del índice de interacción en tiempo polinómico. Este valor se considera para evaluar la eficacia de los algoritmos propuestos, comparando el valor real con las aproximaciones obtenidas.

Se ha optado por este procedimiento comparativo para evaluar los resultados obtenidos ante el desconocimiento de otros métodos para aproximar el valor del índice de interacción. Para cada caso, tomando como referencia el valor real del índice de interacción correspondiente, se verá que tanto el algoritmo *ApproInteraction* como el algoritmo *StratifiedApproInteraction* proporcionan resultados muy precisos, mostrando su precisión en las tablas

**3.1**, **3.2**, **3.3** y **3.4**. Para cada  $I_{ij}$ , el tamaño muestral promedio considerado es  $AvgData = TotalData \frac{2}{n(n-1)}$ . Por otra parte,  $e_{max}$  y  $e_{av}$  son, respectivamente, el error máximo y el error promedio obtenidos al considerar todas las estimaciones posibles de  $I_{ij}$ , resultantes de la aplicación del algoritmo *ApproInteraction*. Análogamente,  $e_{max}^{st}$  y  $e_{av}^{st}$  son, respectivamente, el error máximo y el error promedio obtenidos al considerar todas las estimaciones posibles de  $I_{ij}$  resultantes de la aplicación del algoritmo *StratifiedApproInteraction*;  $e_{th}$  representa una cota del error teórico,  $p\left(|I_{ij} - \hat{I}_{ij}| \geq e_{th}\right) \leq 1 - \alpha = 0.999$ . El cálculo de  $e_{th}$  depende del ejemplo considerado:

- Ejemplo 1,  $\mu^1$ :  $\chi_{max}^j = 0.05$  y  $\chi_{min}^j = -0.05$ .
- Ejemplo 2,  $\mu^2$ :  $\chi_{max}^j = \frac{1}{30}$  y  $\chi_{min}^j = 0$ .
- Ejemplo 3,  $\mu^3$ :  $\chi_{max}^j = 0$  y  $\chi_{min}^j = -1$ .
- Ejemplo 4,  $\mu^4$ :  $\chi_{max}^j = 0.02$  y  $\chi_{min}^j = -0.02$ .

Es importante tener en cuenta que hay ciertas medidas borrosas para las cuales el parámetro  $\chi(o)_{ij}$  varía mucho, de modo que su valor es fuertemente dependiente de los elementos  $i, j \in X$  considerados, así como de su posición  $\ell$  en la permutación  $o$  tomada. En estos casos, es preferible la aplicación de algoritmo *StratifiedApproInteraction*, ya que el uso de estratos facilitará la disminución de los diversos focos de variabilidad. Esta situación se ve claramente reflejada en los ejemplos 1, 2 y 3. Por otra parte, para aquellos otros escenarios en los que esto se produce en menor medida, como el mostrado en el ejemplo 4, no será tan necesaria la aplicación de un proceso estratificado.

Como consecuencia directa del Corolario **3.3.3**, el error cometido por el algoritmo *StratifiedApproInteraction* en los Ejemplos 1 y 2 es nulo. A continuación se muestra el análisis correspondiente a cada ejemplo. Para una mejor visualización de los datos presentados se ha considerado una escala 1 : 0.001, esto es, cada error se corresponde con el valor obtenido con el algoritmo correspondiente, multiplicado por 1000. Con respecto al error teórico correspondiente al muestreo estratificado, por definición es menor al muestreo teórico correspondiente al proceso de muestreo aleatorio no estratificado. Por tanto, siendo  $e_{th}$  el error correspondiente al muestreo aleatorio simple mostrado en las siguientes tablas, se toma este valor como cota para el error correspondiente al muestreo aleatorio estratificado.

Tabla 3.1: Ejemplo 1. Medida borrosa simétrica escalonada. Errores cometidos por los algoritmos *ApproInteraction* y *StratifiedApproInteraction*.

<b>AvgData</b>	<b>e<sub>max</sub></b>	<b>e<sub>av</sub></b>	<b>e<sub>max</sub><sup>st</sup></b>	<b>e<sub>av</sub><sup>st</sup></b>	<b>e<sub>th</sub></b>
10 <sup>3</sup>	8.08081	1.81791	0	0	5.20195
10 <sup>4</sup>	2.74474	0.57115	0	0	1.64500
10 <sup>5</sup>	0.81294	0.17876	0	0	0.52019
10 <sup>6</sup>	0.26205	0.05690	0	0	0.16450
10 <sup>7</sup>	0.08922	0.01815	0	0	0.05202

Tabla 3.2: Ejemplo 2. Medida borrosa simétrica creciente. Errores cometidos por los algoritmos *ApproInteraction* y *StratifiedApproInteraction*.

<b>AvgData</b>	<b>e<sub>max</sub></b>	<b>e<sub>av</sub></b>	<b>e<sub>max</sub><sup>st</sup></b>	<b>e<sub>av</sub><sup>st</sup></b>	<b>e<sub>th</sub></b>
10 <sup>3</sup>	4.10515	0.85948	0	0	1.73398
10 <sup>4</sup>	1.28224	0.27403	0	0	0.54833
10 <sup>5</sup>	0.39009	0.08637	0	0	0.17340
10 <sup>6</sup>	0.13403	0.02755	0	0	0.05483
10 <sup>7</sup>	0.03908	0.00887	0	0	0.01734

Tabla 3.3: Ejemplo 3. Medida borrosa con peso máximo. Errores cometidos por los algoritmos *ApproInteraction* y *StratifiedApproInteraction*.

<b>AvgData</b>	<b>e<sub>max</sub></b>	<b>e<sub>av</sub></b>	<b>e<sub>max</sub><sup>st</sup></b>	<b>e<sub>av</sub><sup>st</sup></b>	<b>e<sub>th</sub></b>
10 <sup>3</sup>	115.92435	11.16639	45.47629	3.31031	52.01947
10 <sup>4</sup>	43.03014	3.46081	4.29888	0.33309	16.45000
10 <sup>5</sup>	10.06615	1.08402	1.03843	0.08281	5.20195
10 <sup>6</sup>	3.69374	0.33845	0.26446	0.02507	1.64500
10 <sup>7</sup>	0.93719	0.10004	0.09780	0.00795	0.52019

Tabla 3.4: Ejemplo 4. Medida borrosa bi-cluster. Errores cometidos por los algoritmos *ApproInteraction* y *StratifiedApproInteraction*.

<b>AvgData</b>	<b>e<sub>max</sub></b>	<b>e<sub>av</sub></b>	<b>e<sub>max</sub><sup>st</sup></b>	<b>e<sub>av</sub><sup>st</sup></b>	<b>e<sub>th</sub></b>
10 <sup>3</sup>	8.41007	1.61541	6.74519	1.40705	2.08078
10 <sup>4</sup>	2.71840	0.51198	1.90963	0.42412	0.65800
10 <sup>5</sup>	0.73839	0.16361	0.63031	0.11466	0.20808
10 <sup>6</sup>	0.28346	0.05153	0.16600	0.03596	0.06580
10 <sup>7</sup>	0.08438	0.01921	0.05536	0.01183	0.02081



## Capítulo 4

# Medidas borrosas: el grafo asociado a una medida borrosa

*Aires Gitanos (Zigeunerweisen)  
Do menor, Op.20*

P. Sarasate

**RESUMEN:** En este capítulo se propone la caracterización de un nuevo instrumento de representación de una medida borrosa. Se trata de un grafo obtenido a partir de la misma, que permite conocer las sinergias entre los elementos involucrados en virtud de su capacidad. Para resumir una medida borrosa en su grafo valorado asociado (AWG), se plantea el cálculo de la matriz de adyacencia del mismo, para lo que se proponen dos vías o herramientas: el valor de Shapley y el índice de interacción propuesto por T. Murofushi y S. Soneda. Se desarrolla el cálculo del AWG en ciertos casos concretos, para lo cual se presentan distintas medidas borrosas: obtenidas a partir de un vector, enfatizando en medidas borrosas de Sugeno; obtenidas a partir de una matriz, y medidas bipolares. Finalmente se define el MAWG, una generalización al plano multi-dimensional del AWG, destinada a abordar situaciones en que existe una familia de medidas borrosas.

### 4.1. Introducción

La teoría de las medidas borrosas o difusas es una rama de las matemáticas en la que se toma en consideración una generalización conceptual de la noción más clásica de medida, en la que la aditividad se ve reemplazada por la monotonía. En su trabajo *'Theory of Capacities'* publicado en

1953, G. Choquet definió la piedra angular de la teoría de la medida difusa: la medida de capacidad [36]. Años después, en 1974, y en el contexto de integrales difusas, M. Sugeno propondría una definición de medida borrosa [176], presentada en la Definición 2.1.1. Estas medidas borrosas abarcan un gran conjunto que incluye desde medidas de creencia o plausibilidad, hasta medidas de probabilidad, pasando por medidas de posibilidad o necesidad.

La importancia de las medidas borrosas no va en absoluto ligada a una sencilla manipulación e interpretación de las mismas. La necesidad de calcular  $2^n$  coeficientes para la definición de una medida borrosa caracterizada en un conjunto de cardinal  $n$  aumenta de forma exponencial la complejidad de representación y comprensión del conocimiento modelado. Para paliar esta dificultad, se propone un nuevo instrumento de representación de una medida borrosa: el grafo valorado asociado a la misma, denotado AWG por sus siglas en inglés. Este nuevo modelo de representación del conocimiento permite entender de manera intuitiva y sencilla las sinergias o atracciones existentes entre los elementos de un conjunto, atendiendo a las diversas capacidades de los mismos. El AWG se caracterizará mediante su matriz de adyacencia, para cuyo cálculo se propondrán dos vías independientes e igual de válidas: el valor de Shapley y el índice de interacción.

Para el cálculo del valor de Shapley se aconseja o bien la consideración de medidas borrosas aditivas, o bien el uso de la estimación basada en órdenes [29, 30, 31] para evitar la complejidad computacional inherente al cálculo real de este valor. En cualquier caso, se presentan escenarios concretos en los que este cálculo es inmediato. En cuanto al índice de interacción se refiere, ante la carencia de resultados en la literatura, se propone el uso de los métodos de estimación definidos en el Capítulo 3 para su aproximación.

## 4.2. El grafo asociado a una medida borrosa

En esta sección se ilustra la definición del grafo asociado a una medida borrosa. Este grafo, que como se verá a continuación es valorado, permite modelar y visualizar sencillamente la capacidad o información proporcionada por la medida borrosa en cuestión. Se considera el conjunto  $S$  de cardinal  $n$ , y la medida borrosa  $\mu$  definida en  $S$ , ante la asunción de que  $\mu$  determina cierta relación entre los elementos de  $S$ . El grafo (valorado) asociado a  $\mu$ , denotado como  $G_\mu$ , es aquel cuya matriz de adyacencia es  $F$ , de manera que, para cada par de individuos  $i, j \in S$ , se pretende que el elemento matricial  $F_{ij}$  represente cómo le afecta a cada uno de los entes de la dupla estar o no en coalición con el otro atendiendo a las sinergias representadas por  $\mu$ . Se presentan ahora dos vías para el cálculo de  $F$ .

### 4.2.1. Aplicación del valor de Shapley

Uno de los puntos más trascendentales en el marco de las medidas borrosas es relativo al entendimiento de la *importancia* de los distintos elementos. Como posible solución a la hora de lidiar con la interpretación de la *importancia* de los elementos, L.S. Shapley propuso en 1953 un índice de importancia a través del cual distribuir las ganancias de los jugadores de un juego cooperativo [169]. Este índice es adaptado al marco de las medidas borrosas, de modo que permite cuantificar la relevancia de los diversos entes de un conjunto, en virtud de la capacidad definida por una medida borrosa [74, 77]. Se pueden encontrar más detalles acerca del índice de Shapley, la complejidad que lo acompaña y ciertas opciones de paliarla en la Sección 2.1.3.

A continuación se usa del índice de Shapley para obtener el grafo valorado asociado a una medida borrosa, por medio de su matriz de adyacencia.

**Definición 4.2.1 (Grafo valorado asociado a una medida borrosa relativo al valor de Shapley  $G_\mu(\text{Sh})$  [88]).** Sea  $S$  un conjunto finito, y sea la medida borrosa  $\mu : 2^S \rightarrow [0, 1]$ . Para cada par de elementos  $i, j \in S$ , se define el peso

$$F(\text{Sh})_{ij} = \phi \left( \text{Sh}_i(\mu) - \text{Sh}_i^j(\mu), \text{Sh}_j(\mu) - \text{Sh}_j^i(\mu) \right) \quad (4.1)$$

donde  $R_1, R_2 \subset \mathbb{R}$  son dos subconjuntos de la recta real,  $\phi : R_1 \times R_1 \rightarrow R_2$  es un operador de agregación bi-variado [198],  $\text{Sh}_i(\mu)$  es el índice de Shapley de  $i$  cuando está en coalición con todos los elementos de  $S$ , dependiendo de  $\mu$ ; y  $\text{Sh}_i^j(\mu)$  es el índice de Shapley de  $i$  cuando está en coalición con todos los elementos de  $S \setminus \{j\}$ , atendiendo a su relación en  $\mu$ .

El grafo valorado asociado a  $\mu$  (AWG en lo que sigue) relativo al valor de Shapley,  $G_\mu(\text{Sh})$ , es aquel que tiene a  $F(\text{Sh})$  como matriz de adyacencia.

El cálculo del valor de Shapley alcanza una complejidad computacional exponencial en el marco de las medidas borrosas, que puede ser parcialmente atenuada mediante la aplicación de ciertos procedimientos de aproximación, como por ejemplo, los algoritmos basados en técnicas de muestreo [30, 31] mencionados en capítulos anteriores. No obstante, no será necesario recurrir a ellos cuando el ámbito de trabajo se limite a la consideración de medidas borrosas aditivas, situación en la que el cálculo del verdadero valor del índice de Shapley es inmediato para cada elemento. Cualquiera de las dos opciones es adecuada para simplificar el proceso de modelado, visualización e interpretación de las sinergias y atracciones existentes entre los individuos involucrados atendiendo a la capacidad definida por una medida borrosa.

### 4.2.2. Aplicación del índice de interacción

El valor de Shapley es uno de los más populares de la literatura a la hora de abordar la representación e interpretación de la *capacidad* o *importancia* de los elementos de un conjunto cuando hay medidas borrosas involucradas; no obstante, existen otros muchos índices que permiten lidiar con este tipo de problemas. En concreto, las siguientes líneas se centran en el índice de interacción de M. Grabisch [74] (Definición 2.1.8), particularmente, en la versión preliminar del mismo definida por T. Murofushi y S. Soneda para pares de elementos [133]. Se propone una caracterización de la relación o sinergia existente entre pares de elementos basada en dicho índice, a través de la cual se obtendrá la matriz de adyacencia del grafo asociado a una medida borrosa.

**Definición 4.2.2 (Grafo valorado asociado a una medida borrosa relativo al índice de interacción  $G_\mu(I)$  [85]).** Sea  $S$  un conjunto finito, y sea la medida borrosa  $\mu : 2^S \rightarrow [0, 1]$ . Para cada par de elementos  $i, j \in S$ , se define el peso

$$F(I)_{ij} = I_{ij}(\mu) \quad (4.2)$$

siendo  $I_{ij}(\mu)$  el índice de interacción (Definición 2.1.7) entre los elementos  $i, j \in S$ , relativo a la caracterización de  $\mu$ .

El grafo valorado asociado a  $\mu$  (AWG en lo que sigue) relativo al índice de interacción  $I$ ,  $G_\mu(I)$ , es aquel que tiene a  $F(I)$  como matriz de adyacencia.

Haciendo un abuso de notación, el grafo valorado asociado a una medida borrosa será denotado como  $G_\mu$ , y la matriz de adyacencia correspondiente como  $F$ , puntualizando la vía de cálculo si fuera necesario.

En cuestiones relativas al cálculo del índice de interacción, tarea en absoluto baladí, hasta donde se alcanza a saber en el momento de escritura de esta memoria, no se conocen alternativas con las que evitar la complejidad inherente a dicho proceso para una medida borrosa arbitraria, más allá de los procesos de estimación detallados en el Capítulo 3.

### 4.3. Algunas medidas borrosas concretas

En esta sección se ilustra la obtención del AWG para ciertos casos concretos: se trabaja con medidas borrosas obtenidas a partir de un vector, tomando como base las  $\lambda$ -medidas de Sugeno; también con un tipo de medida borrosa obtenida a partir de una matriz, para finalizar con la consideración de medidas borrosas bipolares; enfatizando siempre en el uso de medidas borrosas

aditivas o 2-aditivas, según el contexto. Esta asunción simplifica los procesos de cálculo al evitar la aplicación de técnicas de estimación. También se detallan las características y propiedades de estas funciones.

#### 4.3.1. $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno: medidas borrosas obtenidas a partir de un vector

M. Sugeno fue uno de los pioneros en el campo de los conjuntos difusos [106, 144, 202]. Propuso un nuevo tipo de medidas borrosas, las  $\lambda$ -medidas de Sugeno, cuya definición y propiedades se detallan en su tesis doctoral [177]. Este nuevo tipo de medida tiene la peculiaridad de que, conocido su valor en dos conjuntos disjuntos cualesquiera, es posible conocerlo también en el conjunto resultante de la unión de ambos conjuntos [143].

**Definición 4.3.1** ( $\lambda$ -medida de Sugeno [177]). Se considera el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$  y el parámetro  $\lambda \in (-1, +\infty)$ . Una  $\lambda$ -medida de Sugeno es una función  $g : 2^S \rightarrow [0, 1]$  tal que para cualquier par de subconjuntos  $A, B \subseteq S$ , si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces se cumple:

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B) + \lambda g(A)g(B)$$

En esta sección se trabaja con  $\lambda$ -medidas de Sugeno a las que también se les impone la condición de ser medidas borrosas; nombradas como  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno. Una función  $\mu : \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$  será una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno si cumple las siguientes premisas:

$$(P1) \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda \mu(A)\mu(B), \quad \forall A, B \subseteq S \text{ tales que } A \cap B = \emptyset;$$

$$(P2) \quad \mu(A) \leq \mu(B), \quad \forall A \subseteq B \subseteq S;$$

$$(P3) \quad \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{y} \quad \mu(V) = 1 \implies \lambda + 1 = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda \mu(i)).$$

Se pueden diferenciar distintos escenarios en la caracterización de  $\mu$  atendiendo al contexto, de modo que esta medida borrosa se adapte de la mejor manera posible al problema abordado.

- (1) Si  $p = \sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ , entonces  $\lambda = 0$ , luego  $\forall K \subseteq S$ ,  $\mu(K) = \sum_{i \in K} \mu_i$ . En este caso  $\mu$  es una medida aditiva sin componente multiplicativa.
- (2) Si  $p = \sum_{i=1}^n \mu_i < 1$ , entonces  $\lambda > 0$ . En este caso  $p$  representa la componente aditiva de  $\mu$ , y  $(1 - p)$  representa la componente multiplicativa, simbolizando interacciones positivas entre elementos.
- (3) Si  $p = \sum_{i=1}^n \mu_i > 1$ , entonces  $\lambda < 0$ . En este caso,  $p$  representa la componente aditiva de  $\mu$  y  $(1 - p)$  representa la componente multiplicativa, simbolizando interacciones negativas entre elementos.

Las medidas que cumplen las premisas descritas en el escenario (1) son medidas 1-aditivas, o simplemente aditivas. Es un caso concreto de la  $k$ -aditividad de una medida, propiedad detallada en la Definición 2.1.2.

**Definición 4.3.2 (1-aditividad [74]).** Sea  $\mu$  una medida borrosa definida en el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$ .  $\mu$  es una medida borrosa 1-aditiva si para todo subconjunto  $K \subseteq S$ , es posible reescribir el valor de  $\mu$  en  $K$  como una combinación lineal del tipo  $\mu(K) = \sum_{i=1}^n a_i z_i$ , donde  $z_i = 1$  si  $i \in K$ , y  $z_i = 0$ , en otro caso.

En esta sección se trabaja con  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de un vector. Por tanto, dado el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$ , se considera el vector  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , aceptando que para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i \geq 0$  define cierta evidencia acerca del elemento  $i \in S$ . Con base en  $x$ , y considerando las premisas enunciadas en la Definición 2.1.8 y en la Definición 4.3.1, se define  $\mu_x$ , una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno asociada al vector  $x$ . A continuación se propone una caracterización natural para  $\mu_x$ .

**Definición 4.3.3 ( $\mu_x$  [86]).** Se considera el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$  y el vector  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , se asume que  $x_i \geq 0$  define cierta evidencia acerca del elemento  $i \in S$ . Sea  $p \in (0, 1]$  un parámetro. Una caracterización natural de  $\mu_x$  es:

$$\mu_x(i) = \frac{px_i}{\sum_{k=1}^n x_k}, \quad \forall i \in S$$

y

$$\mu_x(A \cup B) = \mu_x(A) + \mu_x(B) + \lambda \mu_x(A) \mu_x(B),$$

$\forall A, B \subseteq S$ , donde  $A \cap B = \emptyset$  y  $\lambda + 1 = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda \mu_x(i))$ .

La investigación desarrollada se ha centrado en el análisis y desarrollo de los escenarios (1) y (2), esto es, los casos  $p = 1$  y  $p < 1$ . La interpretación del carácter positivo de la componente multiplicativa  $(1 - p)$  puede representar el beneficio ocasionado por la inclusión de nuevos elementos en una coalición. Es importante tener en cuenta que, en esta situación, el añadir nuevos individuos a un grupo siempre supondrá un incremento en la ganancia del grupo. El análisis del punto (3),  $p > 1$ , se reserva para trabajos venideros.

**Proposición 4.3.4.** Se considera el parámetro  $p = 1$ . La función  $\mu_x$  caracterizada en la Definición 4.3.3 es una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno. Además,  $\mu_x$  es una medida borrosa 1-aditiva.

*Demostración.* Ante la asunción de que  $p = 1$  y debido a las premisas enunciadas en la Definición 4.3.3 se tiene que  $\lambda = 0$ . Por tanto,  $\forall A \subseteq S$ ,  $\mu_x(A) = \frac{\sum_{\ell \in A} \mu_\ell}{\sum_{k=1}^n \mu_k}$ . A continuación se demuestra que  $\mu_x$  cumple todas las premisas enunciadas en las Definiciones 2.1.1, 2.1.2 y 4.3.1.

1. Primero se demostrarán las premisas que garantizan que  $\mu_x$  es una medida borrosa.

- $\mu_x(\emptyset) = 0$  Trivial

- $\mu_x(S) = \frac{x_1}{\sum_{k=1}^n x_k} + \cdots + \frac{x_n}{\sum_{k=1}^n x_k} = 1$

- Sea  $A \subseteq B \subseteq S$ . Entonces:

$$\mu_x(B) = \frac{\sum_{\ell \in B} x_\ell}{\sum_{k=1}^n x_k} = \frac{\sum_{\ell \in A} x_\ell + \sum_{t \in B \setminus A} x_t}{\sum_{k=1}^n x_k} \geq \frac{\sum_{\ell \in A} x_\ell}{\sum_{k=1}^n x_k} = \mu_x(A)$$

2.  **$\lambda$ -medida de Sugeno:** la prueba de este punto es trivial por la propia definición de  $\mu_x$ .

3. **1-aditividad:** atendiendo a la Definición [4.3.2](#), la prueba de este punto es trivial si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , se define  $a_i = \mu_x(i)$ .

□

**Proposición 4.3.5.** *Se considera el parámetro  $p \in (0, 1)$ . La función  $\mu_x$  caracterizada en la Definición [4.3.3](#) es una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno.*

*Demostración.* Ante la asunción de que  $p \in (0, 1)$ , se tiene que  $\lambda > 0$ . A continuación se demuestra que  $\mu_x$  cumple todas las premisas enunciadas en las Definiciones [2.1.1](#) y [4.3.1](#).

1. Primero se demostrarán las premisas que garantizan que  $\mu_x$  es una medida borrosa.

- $\mu_x(\emptyset) = 0$  Trivial

- El parámetro  $\lambda$  se define siguiendo la caracterización de las  $\lambda$ -medidas de Sugeno, con lo que se cumple la propiedad  $\lambda + 1 = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda \mu_x(i))$ . Siempre que  $\mu_x$  sea calculada atendiendo a la formulación de Sugeno, las premisas enunciadas en la Definición [2.1.1](#) garantizan  $\mu_x(S) = 1$ . En este caso en concreto,  $\mu_x$  se ha definido de este modo, por lo que se puede garantizar  $\mu_x(S) = 1$ .

- Sean los subconjuntos  $A, B \subseteq S$  tales que  $A \subseteq B$ . Entonces  $\mu_x(B) = \mu_x(A) + \mu_x(B \setminus A) + \lambda \mu_x(A) \mu_x(B \setminus A)$ . Además, se cumple  $\lambda > 0$ ;  $0 \leq \mu_x(A) \leq 1$  y  $0 \leq \mu_x(B \setminus A) \leq 1$ . Por tanto,  $\mu_x(A) \leq \mu_x(B)$ .

Así se concluye que  $\mu_x$  es una medida borrosa.

2.  **$\lambda$ -medida de Sugeno:** trivial por la propia definición de  $\mu_x$ .

□

A continuación se enuncia otra de las propiedades inherentes a la medida  $\mu_x$  cuando  $p \leq 1$ . Se trata de la superaditividad, reseñada en el Capítulo [2](#).

**Proposición 4.3.6.** *Sea el parámetro  $p \in (0, 1]$ . La medida borrosa  $\mu_x$  caracterizada en la Definición 4.3.3 es una medida borrosa superaditiva.*

*Demostración.* Sean los subconjuntos no vacíos  $A, B \subseteq S$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Por la definición de  $\mu_x$ ,  $\mu_x(A \cup B) = \mu_x(A) + \mu_x(B) + \lambda\mu_x(A)\mu_x(B)$ . Además,  $\lambda \geq 0$ ;  $0 \leq \mu_x(A) \leq 1$ ; y  $0 \leq \mu_x(B) \leq 1$ . Por tanto,  $\mu_x(A \cup B) \geq \mu_x(A) + \mu_x(B)$ , cumpliendo así las premisas necesarias para ser una medida borrosa superaditiva.  $\square$

Con el siguiente ejemplo se ilustra la construcción de la medida  $\mu_x$  considerando distintos valores del parámetro  $p$ .

**Ejemplo 4.3.1.** Se considera el conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  y el vector  $x = (2, 1, 10, 10)$ . Sea  $\mu_x$  la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir del vector  $x$ , atendiendo a la Definición 4.3.3 y considerando la parrilla de valores:  $p = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ . En la Tabla 4.1 se muestra el valor de  $\mu_x$  para cada caso. Véase cómo varía dependiendo del valor de  $p$ .

Tabla 4.1: Caracterización de  $\mu_x$  para  $p = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ .

	$p = 0.25$ $\lambda = 24.01$	$p = 0.5$ $\lambda = 5.21$	$p = 0.75$ $\lambda = 1.33$	$p = 1$ $\lambda = 0$
$\mu_x(\{1\})$	0.0217	0.0435	0.0652	0.0870
$\mu_x(\{2\})$	0.0109	0.0217	0.0326	0.0435
$\mu_x(\{3\})$	0.1087	0.2174	0.3261	0.4348
$\mu_x(\{4\})$	0.1087	0.2174	0.3261	0.4348
$\mu_x(\{1, 2\})$	0.0383	0.0701	0.1006	0.1304
$\mu_x(\{1, 3\})$	0.1872	0.3101	0.4195	0.5217
$\mu_x(\{1, 4\})$	0.1872	0.3101	0.4195	0.5217
$\mu_x(\{2, 3\})$	0.1479	0.2638	0.3728	0.4783
$\mu_x(\{2, 4\})$	0.1479	0.2638	0.3728	0.4783
$\mu_x(\{3, 4\})$	0.5011	0.6810	0.7933	0.8696
$\mu_x(\{1, 2, 3\})$	0.2469	0.3670	0.4703	0.5652
$\mu_x(\{1, 2, 4\})$	0.2469	0.3670	0.4703	0.5652
$\mu_x(\{1, 3, 4\})$	0.7844	0.8788	0.9272	0.9565
$\mu_x(\{2, 3, 4\})$	0.6427	0.7799	0.8603	0.9130
$\mu_x(\{1, 2, 3, 4\})$	1	1	1	1

De este punto en adelante, siempre que  $\mu_x$  sea una medida aditiva, ( $p = 1$  y  $\lambda = 0$ ), será denotada como  $\mu_x^a$ . Por el contrario, cuando  $\mu$  tenga una componente multiplicativa (particularmente, situaciones en las que  $p \in (0, 1)$  y  $\lambda > 0$ ), será denotada como  $\mu_x^m$ .

Una vez formalizada la caracterización de la medida borrosa en estudio, se detalla el cálculo del AWG correspondiente, considerando aquellos casos en que  $\mu_x$  es una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno. En concreto, se hará uso del

valor de Shapley, de modo que, para cada par de elementos  $i, j \in S$  habrá que calcular el peso  $X_{ij} := F_{ij}$ , como se ha detallado en la ecuación (4.1), tomando  $R_1 = [-1, 1]$  y  $R_2 = [-1, 1]$ , de modo que el grafo valorado asociado a  $\mu_x$  será aquel cuya matriz de adyacencia es  $X$ .

**Definición 4.3.7 (Grafo valorado asociado a una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno [86]).** Sea  $S$  un conjunto con  $|S| = n$ , y sea  $x$  un  $n$ -vector definiendo cierta evidencia sobre los elementos de  $S$ ; sea  $\mu_x : 2^S \rightarrow [0, 1]$  la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir de  $x$ . Sea  $\phi : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$  un operador de agregación bivariado [198], y sean  $Sh_i(\mu_x)$  y  $Sh_j^j(\mu_x)$  los índices de Shapley de  $i \in S$  en  $\mu_x$ , cuando está en coalición con todos los elementos de  $S$  ó de  $S \setminus \{j\}$ , respectivamente. El peso  $X_{ij}$  se define como:

$$X_{ij} = \phi \left( Sh_i(\mu_x) - Sh_i^j(\mu_x), Sh_j(\mu_x) - Sh_j^i(\mu_x) \right) \quad (4.3)$$

El AWG relativo a  $\mu_x$ ,  $G_{\mu_x}$ , es aquel cuya matriz de adyacencia es  $X$ .

La complejidad de cómputo del valor de Shapley es un tema recurrente en estas páginas. Con el objetivo de ilustrar lo más sencillamente posible el tratamiento y aplicación de las  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno, los siguientes resultados se desarrollarán en el escenario en que  $\lambda = 0$ , trabajando con la función  $\mu_x^a$ . De cara a un futuro próximo, está previsto trabajar en la generalización de las aportaciones desarrolladas en esta sección, considerado el caso de medidas borrosas  $\mu_x^m$  con cierta componente multiplicativa. La única variación de este escenario con respecto a los resultados que se muestran a continuación está relacionada con el valor de Shapley, para cuyo caso, será necesario la aplicación de técnicas de aproximación.

En las siguientes proposiciones se recogen sendos resultados que relacionan directamente el cálculo del valor de Shapley relativo a  $\mu_x^a$  con las componentes del vector considerado.

**Proposición 4.3.8.** *Dado el  $n$ -vector  $x$ , sea  $\mu_x^a$  la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenido a partir de  $x$  atendiendo a la Definición 4.3.3, considerando el parámetro  $p = 1$ . Para cada  $i \in S$ , su índice de Shapley relativo a  $\mu_x^a$  cuando está en coalición con todos los entes de  $S$  se puede definir como:*

$$Sh_i(\mu_x^a) = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} \quad (4.4)$$

*Demostración.* Esta demostración se basa en la caracterización del índice de Shapley basada en órdenes, definida en la ecuación (2.3).

$$\begin{aligned}
Sh_i(\mu_x^a) &= \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} [\mu_x^a(\text{pred}(i) + \{i\}) - \mu_x^a(\text{pred}(i))] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} [(\mu_x^a(\text{pred}(i)) + \mu_x^a(i)) - \mu_x^a(\text{pred}(i))] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} \mu_x^a(i) = \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k}
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.3.9.** Dado el  $n$ -vector  $x$ , sea  $\mu_x^a$  una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir del vector  $x$ , de acuerdo a la Definición 4.3.3, considerando el parámetro  $p = 1$ . Para cada par de elementos  $\forall i, j \in S$ , el índice de Shapley relativo  $\mu_x^a$  del individuo  $i$  cuando está en coalición con todos los elementos de  $S \setminus \{j\}$  se puede definir como sigue:

$$Sh_i^j(\mu_x^a) = \frac{x_i}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k} \quad (4.5)$$

*Demostración.* Esta demostración se basa en la caracterización del índice de Shapley basada en órdenes, definida en la ecuación (2.3).

Se considera el vector  $x^* = (x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_{(j+1)}, \dots, x_n)$ .

$$\begin{aligned}
Sh_i^j(\mu_x^a) &= Sh_i(\mu_{x^*}^a) = \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} [\mu_{x^*}^a(\text{pred}(i) + \{i\}) - \mu_{x^*}^a(\text{pred}(i))] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} [(\mu_{x^*}^a(\text{pred}(i)) + \mu_{x^*}^a(i)) - \mu_{x^*}^a(\text{pred}(i))] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} \mu_{x^*}^a(i) = \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} \frac{x_i}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k} = \frac{x_i}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k}
\end{aligned}$$

□

A continuación se presenta un ejemplo sencillo en el que se ilustra la obtención del grafo asociado a una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno aditiva.

**Ejemplo 4.3.2.** Dado un conjunto  $S$  con 12 elementos, sea el vector  $x = (9, 9.5, 8, 9.2, 8.7, 10, 1, 1.5, 2, 1.7, 2.5, 0.5)$ , que representa el interés mostrado por los elementos de  $S$  ante una propuesta. Esta fuente de

información se utiliza para establecer correlaciones entre individuos, aceptando la existencia de fuertes sinergias entre aquellos a los cuales el vector asigne valores similares. Se calcula  $\mu_x^a$ , la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida atendiendo a la Proposición 4.3.3 cuando  $p = 1$ . A continuación se presenta la obtención de  $G_{\mu_x^a}$ , el AWG de  $\mu_x^a$ , cuya matriz de adyacencia es  $X$ , (Figura 4.1), siendo  $X_{ij} = \phi \left( Sh_i(\mu_x^a) - Sh_i^j(\mu_x^a), Sh_j(\mu_x^a) - Sh_j^i(\mu_x^a) \right) = \min \left\{ \left| \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} - \frac{x_i}{\sum_{k=1, k \neq j}^n x_k} \right|, \left| \frac{x_j}{\sum_{k=1}^n x_k} - \frac{x_j}{\sum_{k=1, k \neq i}^n x_k} \right| \right\}$ .

$$\frac{1}{10000} \begin{pmatrix} 0 & 246 & 203 & 238 & 224 & 259 & 22 & 34 & 45 & 38 & 57 & 11 \\ 246 & 0 & 214 & 252 & 236 & 276 & 23 & 36 & 48 & 41 & 61 & 11 \\ 203 & 214 & 0 & 208 & 196 & 226 & 20 & 30 & 40 & 34 & 51 & 9 \\ 238 & 252 & 208 & 0 & 229 & 265 & 23 & 34 & 46 & 39 & 59 & 11 \\ 224 & 236 & 196 & 229 & 0 & 249 & 21 & 33 & 44 & 37 & 55 & 10 \\ 259 & 276 & 226 & 265 & 249 & 0 & 25 & 37 & 51 & 43 & 64 & 12 \\ 22 & 23 & 20 & 23 & 21 & 25 & 0 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 34 & 36 & 30 & 34 & 33 & 37 & 3 & 0 & 7 & 6 & 9 & 1 \\ 45 & 48 & 40 & 46 & 44 & 51 & 5 & 7 & 0 & 8 & 12 & 2 \\ 38 & 41 & 34 & 39 & 37 & 43 & 4 & 6 & 8 & 0 & 10 & 2 \\ 57 & 61 & 51 & 59 & 55 & 64 & 6 & 9 & 12 & 10 & 0 & 3 \\ 11 & 11 & 9 & 11 & 10 & 12 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4.1: Matriz  $X$ , adyacencia de  $G_{\mu_x^a}$ .

#### 4.3.2. Medidas borrosas obtenidas a partir de una matriz

En esta sección se trabaja en la caracterización de una medida borrosa con la que se pretende representar las relaciones que surgen entre ciertos individuos a partir de las sinergias que pueda haber entre ellos. Se considerarán relaciones de naturaleza amistosa o positiva, de modo que la sinergia entre dos individuos será tan alta como lo sea el valor asignado por la medida borrosa.

Dado un conjunto  $S$ , se asume la existencia de una relación de afinidad de naturaleza difusa definida por una matriz  $R$ , de manera que el elemento  $R_{ij}$  representa el grado de afinidad entre los elementos  $i, j \in S$ . A partir de esta matriz se caracteriza la medida borrosa  $\mu_R$  como sigue.

**Definición 4.3.10 (Medida borrosa de matriz/afinidad  $\mu_R$  [88]).** Se considera el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$ . Sea  $R \in \Pi(n)$  una matriz tal que:

- (R1)  $R$  es simétrica, i.e.  $R_{ij} = R_{ji}$ ;
- (R2)  $R$  es no negativa, i.e.  $R_{ij} \geq 0, \forall i, j \in S$ ;
- (R3)  $R$  está normalizada, i.e.  $\sum_{i,j \in S} R_{ij} = 1$ ;
- (R4) La diagonal principal de  $R$  es nula, i.e.  $R_{ii} = 0, \forall i \in S$ .

Se define la función  $\mu_R : 2^S \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$\mu_R(K) = \sum_{i,j \in K} R_{ij} \quad (4.6)$$

$\mu_R$  es una medida obtenida a partir de la matriz  $R$ , basada en relaciones borrosas de afinidad.

A continuación se demuestra que la función  $\mu_R$  previamente definida es, efectivamente, una medida borrosa.

**Proposición 4.3.11.** *La función  $\mu_R$  caracterizada en la Definición (4.3.10) es una medida borrosa.*

*Demostración.* Para demostrar que  $\mu_R$  es una medida borrosa, hay que comprobar que cumple las premisas enunciadas en la Definición (2.1.1).

- $\mu_R(\emptyset) = 0$ , trivial.
- $\mu_R(S) = 1$ , debido a la normalidad de  $R$ .
- $\mu_R$  es monótona, debido a que  $R_{ij} \geq 0, \forall i, j \in S$ .

□

Así se puede concluir que, en efecto, la función  $\mu_R$  obtenida a partir de la matriz de relaciones de afinidad  $R$  es una medida borrosa.

**Proposición 4.3.12.** *La función  $\mu_R$  caracterizada en la ecuación (4.6) es una medida borrosa 2-aditiva.*

*Demostración.* La demostración de esta afirmación se basa en un resultado tomado de [74], donde se prueba que una medida borrosa es 2-aditiva si y sólo si, para cualquier subconjunto  $K \subset S$ , es posible definirla como una combinación lineal del tipo  $\mu_R(K) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i,j \in S} a_{ij} x_i x_j$ , donde  $x_i = 1$  si  $i \in K$  y  $x_i = 0$  en otro caso.

Se define  $a_i = 0 \forall i \in S$ , y  $a_{ij} = R_{ij} \forall \{i, j\} \subset S$ . Así, atendiendo a la ecuación (4.6), se cumple  $\mu_R(K) = \sum_{i,j \in K} R_{ij} = \sum_{i,j \in S} R_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i,j \in S} a_{ij} x_i x_j$ . □

**Proposición 4.3.13.** *Para cada  $\ell = 1, \dots, m$ , sea  $\hat{R}^\ell$  una matriz con las propiedades enunciadas en la Definición (4.3.10). La función  $\mu_R$  caracterizada en la ecuación (4.6) es cerrada para combinaciones lineales convexas:*

$$\mu(\sum_{k=1}^m \alpha_k \hat{R}^k) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu_{\hat{R}^k}$$

*Demostración.* Con base en la ecuación (4.6), y asumiendo,  $x_i = 1$  si  $i \in K$  y  $x_i = 0$  en otro caso, se tiene:

$$\begin{aligned} \mu(\sum_{k=1}^m \alpha_k \widehat{R}^k) &= \sum_{i,j \in S} \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k \widehat{R}_{ij}^k \right) x_i x_j = \sum_{k=1}^m \sum_{i,j \in K} \alpha_k \widehat{R}_{ij}^k x_i x_j \\ &= \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i,j \in K} \widehat{R}_{ij}^k x_i x_j = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu_{\widehat{R}^k} \end{aligned}$$

□

**Observación 2.** Como caso particular de la afirmación enunciada en la Proposición 4.3.13, cabe señalar que  $\mu_R$  es cerrada para la media:

$$\frac{\mu_{\widehat{R}^1} + \mu_{\widehat{R}^2}}{2} = \mu_{\frac{\widehat{R}^1 + \widehat{R}^2}{2}}$$

#### A. Grafo asociado a $\mu_R$ vía valor de Shapley.

Una vez definida la medida borrosa  $\mu_R$  y enunciadas sus propiedades, se detalla el cálculo de su AWG mediante el valor de Shapley. Para ello, es de vital importancia la propiedad de la 2-aditividad de  $\mu_R$ , que permite relacionar directamente la matriz  $R$  con la matriz de adyacencia de  $G_{\mu_R}(Sh)$ .

**Proposición 4.3.14.** *Sea la medida borrosa  $\mu_R$ , obtenida a partir de la matriz  $R$  según las premisas enunciadas en la Definición 4.3.10. Para cada elemento  $i \in S$ , el índice de Shapley se puede calcular como sigue:*

$$Sh_i(\mu_R) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S}} R_{ik} \quad (4.7)$$

*Demostración.* Para esta demostración se considera la caracterización alternativa del índice de Shapley mostrada en la Definición 2.1.6, donde se afirma que el índice de Shapley puede reformularse como el promedio de las contribuciones marginales de todos los órdenes del conjunto considerado:

$$Sh_i = \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} [\mu(pred(i) + \{i\}) - \mu(pred(i))]$$

Atendiendo a esta formulación y a la ecuación (4.6),

$$\mu(pred(i) + \{i\}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n R_{\ell k} x_\ell x_k + \sum_{k=1}^n (R_{ik} + R_{ki}) x_k$$

$$\mu(\text{pred}(i)) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n R_{\ell k} x_{\ell} x_k$$

siendo  $x_{\ell} = 1$  si  $\ell \in \text{pred}(i)$ , y  $x_{\ell} = 0$  en otro caso. Por tanto,

$$\begin{aligned} Sh_i &= \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n R_{jk} x_{\ell} x_k + \sum_{k=1}^n (R_{ik} + R_{ki}) x_k \right) - \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n R_{jk} x_{\ell} x_k \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} \sum_{k=1}^n (R_{ik} + R_{ki}) x_k \end{aligned}$$

Para la mitad de los órdenes  $o \in \pi(n)$ ,  $k \in \text{pred}(i)$ , con lo que, para la mitad de los valores del sumatorio previo se cumple que  $x_k = 1$ . Por tanto,

$$\frac{1}{n!} \sum_{o \in \pi(n)} \sum_{k=1}^n (R_{ik} + R_{ki}) x_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (R_{ik} + R_{ki}) x_k$$

La matriz  $R$  es simétrica por definición, con lo que,  $R_{ik} = R_{ki}$ . También se cumple que  $R_{ii} = 0$ . Por tanto,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (R_{ik} + R_{ki}) x_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2R_{ik} x_k = \sum_{k=1}^n R_{ik} x_k = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S}} R_{ik}$$

□

**Proposición 4.3.15.** *Sea la medida borrosa  $\mu_R$ , obtenida a partir de la matriz  $R$  según las premisas enunciadas en la Definición [4.3.10](#). Para cada par de elementos  $i, j \in S$ , el índice de Shapley de  $i$  cuando está en coalición con todos los elementos de  $S$  excepto  $j$  se puede calcular como sigue:*

$$Sh_i^j(\mu_R) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S \setminus \{j\}}} R_{ik} = \left( \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S}} R_{ik} \right) - R_{ij} \quad (4.8)$$

*Demostración.* Esta demostración es prácticamente idéntica a la prueba de la Proposición [4.3.14](#). En este caso, el conjunto base considerado es  $S^* = S \setminus \{j\}$ , tal que  $|S^*| = n^* = n - 1$ . Atendiendo a la formulación del índice de Shapley basada en órdenes y a la ecuación [4.6](#),

$$\mu(\text{pred}(i) + \{i\}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n^*} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n^*} R_{jk} x_{\ell} x_k + \sum_{k=1}^{n^*} (R_{ik} + R_{ki}) x_k$$

$$\mu(\text{pred}(i)) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n^*} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n^*} R_{\ell k} x_{\ell} x_k$$

siendo  $x_{\ell} = 1$  si  $\ell \in \text{pred}(i)$ , y  $x_{\ell} = 0$  en otro caso. Por tanto,

$$\begin{aligned} Sh_i &= \frac{1}{n^*!} \sum_{o \in \pi(n^*)} \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n^*} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n^*} R_{\ell k} x_{\ell} x_k + \sum_{k=1}^{n^*} (R_{ik} + R_{ki}) x_k \right) - \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n^*} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n^*} R_{\ell k} x_{\ell} x_k \right) \\ &= \frac{1}{n^*!} \sum_{o \in \pi(n^*)} \sum_{k=1}^{n^*} (R_{ik} + R_{ki}) x_k \end{aligned}$$

Para la mitad de los órdenes  $o \in \pi(n^*)$ ,  $k \in \text{pred}(i)$ , con lo que, para la mitad de los valores del sumatorio previo se cumple que  $x_k = 1$ . Por tanto,

$$\frac{1}{n^*!} \sum_{o \in \pi(n^*)} \sum_{k=1}^{n^*} (R_{ik} + R_{ki}) x_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^*} (R_{ik} + R_{ki}) x_k$$

La matriz  $R$  es simétrica por definición, con lo que,  $R_{ik} = R_{ki}$ . También se cumple que  $R_{ii} = 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^*} (R_{ik} + R_{ki}) x_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^*} 2R_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n^*} R_{ik} x_k = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S^*}} R_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^*} 2R_{ik} x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n^*} R_{ik} x_k = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in V^*}} R_{ik} = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S \setminus \{j\}}} R_{ik} = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S \\ k \neq j}} R_{ik} = \left( \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S}} R_{ik} \right) - R_{ij} \end{aligned}$$

□

Como consecuencia inmediata de las proposiciones [4.3.14](#) y [4.3.15](#), se establece una relación directa entre la definición del grafo valorado asociado a una medida borrosa y la matriz de partida,  $R$ .

**Proposición 4.3.16.** *Sea  $\mu_R$  la medida borrosa  $R$  atendiendo a la ecuación [\(4.6\)](#). Para cada par de elementos  $i, j \in S$ , se cumple:*

1.  $Sh_i(\mu_R) - Sh_i^j(\mu_R) = R_{ij}$
2.  $Sh_j(\mu_R) - Sh_j^i(\mu_R) = R_{ji}$

*Demostración.* Atendiendo a las proposiciones [4.3.14](#) y [4.3.15](#),

1.  $Sh_i(\mu_R) - Sh_i^j(\mu_R) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S}} R_{ik} - \left( \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S}} R_{ik} - R_{ij} \right) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S}} R_{ik} - \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in S}} R_{ik} + R_{ij} = R_{ij}.$
2.  $Sh_j(\mu_R) - Sh_j^i(\mu_R) = \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in S}} R_{jk} - \left( \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in S}} R_{jk} - R_{ji} \right) = \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in S}} R_{jk} - \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in S}} R_{jk} + R_{ji} = R_{ji}.$

□

A partir de todos los resultados enunciados, y tomando el operador de agregación bi-variado  $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , se puede concluir que la matriz que representa la afinidad entre los distintos pares de elementos atendiendo a  $\mu_R$ , o lo que es lo mismo, la matriz de adyacencia del grafo asociado correspondiente  $G_{\mu_R}$ , se puede definir como:

$$(F_{ij}(Sh))_{i,j \in S} = \phi \left( Sh_i - Sh_i^j, Sh_j - Sh_j^i \right) = \phi(R_{ij}, R_{ji}) \quad (4.9)$$

Note que, ante la simetría de  $R$ , muchos de los operadores que se podrían seleccionar (máx, mín, *mediana*, *promedio*), se comportan igual.

### B. Grafo asociado a $\mu_R$ vía índice de interacción.

En las siguientes líneas se detalla la obtención del AWG de  $\mu_R$  a través del índice de interacción, que será utilizado para calcular la matriz que representa la afinidad entre los distintos pares de elementos, la adyacencia de  $G_{\mu_R}(I)$ . Considerando la versión preliminar del índice de interacción de M. Grabisch definida por T. Murofushi y S. Soneda para pares de elementos [\[133\]](#), se demostrará cómo, tomando un operador concreto y ante la 2-aditividad de  $\mu_R$ , se cumple que  $F(I) = F(Sh)$ .

En caso de que se utilice el índice de interacción para obtener el AWG, se cumple que, para cada par de individuos  $i, j \in S$ , el elemento correspondiente de la matriz de adyacencia del AWG, coincide con el valor de su índice de interacción, esto es,  $F_{ij}(I) = I_{ij}$ . El cálculo de este índice será inmediato ante la consideración de medidas 2-aditivas, y fácilmente calculable mediante las técnicas de estimación desarrolladas en los algoritmos *ApproInteraction* o *StratifiedApproInteraction* introducidos en el Capítulo [3](#).

**Proposición 4.3.17.** *Para cada par  $\{i, j\}$ , con  $i, j \in S$ , si se considera  $\phi = \text{sum}(|\cdot|, |\cdot|)$  en la ecuación [\(4.1\)](#), el índice de interacción relativo a  $\mu_R$ ,  $I_{ij}(\mu_R)$ , coincide con el valor  $F_{ij}(Sh)$ , i.e.  $I_{ij}(\mu_R) = F_{ij}(Sh) = R_{ij}$ .*

*Demostración.* Se introduce cierta notación para facilitar el seguimiento de la demostración. Abusando de la notación, se considera  $\mu := \mu_R$ ;  $\mu_i := \mu(\{i\})$ ,  $\mu_{ij} := \mu(\{i, j\})$ ;  $\mu_{ijK} := \mu(\{i \cup j \cup K\})$ . Además, se define:

$$a = \sum_{\substack{\ell \in K \\ \ell \neq i, j}} \sum_{\substack{s \in K \\ s \neq i, j \\ s > \ell}} 2R_{\ell s} \quad b = \sum_{\substack{\ell \in K \\ \ell \neq i, j}} 2R_{\ell i} \quad c = \sum_{\substack{\ell \in K \\ \ell \neq i, j}} 2R_{\ell j}$$

Atendiendo a la ecuación [4.6](#), las componentes del índice de interacción se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\mu_{ijK} = a + b + c + 2R_{ij} \quad \mu_{iK} = a + b \quad \mu_{jK} = a + c \quad \mu_K = a$$

Así,

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_{k=0}^{n-2} \zeta_k \sum_{\substack{K \subset S \setminus \{i, j\} \\ |K|=k}} (\mu_{ijK} - \mu_{iK} - \mu_{jK} + \mu_K) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \zeta_k \sum_{\substack{K \subset S \setminus \{i, j\} \\ |K|=k}} (a + b + c + 2R_{ij}) - (a + b) - (a + c) + a \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \zeta_k \sum_{\substack{K \subset S \setminus \{i, j\} \\ |K|=k}} 2R_{ij} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n-2}{k}(n-1)} 2R_{ij} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n-1} 2R_{ij} \\ &= 2R_{ij} = R_{ij} + R_{ji} = (Sh_i - Sh_i^j) + (Sh_j - Sh_j^i) \\ &= \phi (Sh_i - Sh_i^j, Sh_j - Sh_j^i), \text{ cuando } \phi = \text{sum} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 4.3.3.** Se considera un conjunto  $S$  de 5 individuos, de los que se conoce su opinión acerca de un dirigente político, clasificada atendiendo a su carácter positivo/negativo. El vector  $O = (+, -, +, -, +)$  representa esta información, siendo  $O_i$  el tipo de opinión de  $i \in S$ . Con base en el vector  $O$  se construye la matriz  $R$  mostrada en la Figura [4.2](#), en la que se presentan las afinidades entre pares de nodos, las cuales surgen de las sinergias relativas a la perspectiva política de cada par de individuos, aceptando que existirán fuertes relaciones de afinidad entre pares de elementos que tengan la misma opinión, las cuales serán inexistentes entre individuos de distinta opinión.

$$R = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4.2: Matriz de relaciones  $R$ .

Es trivial comprobar que  $R$  cumple las premisas enunciadas en la Definición 4.3.10, con lo que, siendo  $\mu_R$  la medida borrosa obtenida a partir de  $R$  y definida en la ecuación (4.10), esta misma matriz será la adyacencia de  $G_{\mu_R}(Sh)$ , que coincidirá con la adyacencia de  $G_{\mu_R}(I)$  si  $\phi := \sum (|\cdot|, |\cdot|)$ .

$$\mu_R(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } |K| < 2 \\ \frac{2}{8} & \text{si } K = \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 5\} \\ 0 & \text{si } |K| = 2 \text{ y } K \neq \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 5\} \\ \frac{4}{8} & \text{si } K = \{1, 3, 5\} \\ \frac{2}{8} & \text{si } K = \{1, 3, j\}, \{1, 5, j\}, \{3, 5, j\}, \text{ y } j = 2, 4 \\ \frac{2}{8} & \text{si } K = \{2, 4, j\}, \text{ y } j = 1, 3, 5 \\ \frac{4}{8} & \text{si } |K| = 4 \\ 1 & \text{si } |K| = 5 \end{cases} \quad (4.10)$$

### 4.3.3. Medidas borrosas bipolares

En general las relaciones, comunicaciones o sentimientos entre humanos, tienen dos aspectos fácilmente distinguibles: el positivo y el negativo [68]. El primero de ellos representa evidencias posibles o permitidas que proporcionan satisfacción. Por su parte, el aspecto negativo es relativo a relaciones imposibles, situaciones inaceptables o no permitidas que proporcionan insatisfacción [54]. Cuando llega un mensaje a la conciencia humana, la mente automáticamente le dota de ciertas connotaciones negativas o positivas. Al ser capaces de lidiar de esta manera con la información, considerando simultáneamente evidencias positivas y negativas, los humanos consiguen representar y manejar situaciones y escenarios complejos relacionados con sensaciones, ambivalencia, conflictos o intereses [6]. Esta peculiar forma de gestionar la información se basa en la idea de bipolaridad, un concepto originalmente psicológico [145, 148, 194] que facilita un planteamiento acerca de la representación de afectos de naturaleza opuesta (*pros y contras*) [67].

Ambientada en dicho marco de bipolaridad, en esta sección se presenta una herramienta para la representación del conocimiento, capaz de distinguir las connotaciones positivas de las negativas. Se trata de las medidas borrosas

bipolares. En esencia, una medida borrosa bipolar no es más que un par constituido por sendas medidas borrosas, donde una de ellas representa la *verdad*, *bondad* o aquella información a la que se dota de carácter positivo, mientras que la otra medida representa la *falsedad*, *intolerancia* o aquella información a la que se presupone carácter negativo. Las medidas borrosas bipolares fueron definidas por M. Grabisch y C. Labreuche en su trabajo titulado *Bi-capacities-I: definition, Möbius transform and interaction* [75].

**Definición 4.3.18 (Medida Borrosa Bipolar  $\mu^b$  [75]).** Se considera el conjunto finito  $S$  y las medidas borrosas  $\mu^-, \mu^+ : 2^S \rightarrow [0, 1]$ . Asumiendo que en las relaciones entre los elementos de  $S$  se pueden distinguir dos vertientes diferentes e independientes atendiendo a su carácter, se considera que  $\mu^-$  representa cierta evidencia negativa acerca de las relaciones entre los elementos de  $S$ , mientras que  $\mu^+$  representa cierta evidencia positiva concierne a dichas relaciones. La función  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+) : 2^S \times 2^S \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  recibe el nombre de medida borrosa bipolar.

Una de las premisas respecto a las diversas relaciones entre dos elementos es que se presupone que cada una de ellas es una relación borrosa [82] representada por el conjunto borroso  $\mu^b$  [183, 202], de modo que la bipolaridad intrínseca a  $\mu^b$  proporciona una doble visión de la realidad modelada.

A continuación se detalla el cálculo del AWG de una medida borrosa bipolar vía valor de Shapley, a través del cual se pretende cuantificar para cada par de elementos cuánto le afecta a cada uno de sus integrantes estar o no en coalición con el otro, atendiendo a posibles sinergias que no han de ser simétricas en todos los casos. Para ello, y puesto que una medida borrosa bipolar  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+)$  se puede entender como un par de medidas borrosas independientes,  $\mu^-$  y  $\mu^+$ , el multi-grafo valorado bipolar asociado a una medida borrosa bipolar (MAWG bipolar) tendrá dos partes diferenciadas, una relativa a  $\mu^-$ , y otra concerniente a  $\mu^+$ . Para su caracterización, para cada par de elementos  $i, j \in S$ , se calculan mediante procesos análogos los pesos  $F^-(Sh)_{ij}$  y  $F^+(Sh)_{ij}$ , por medio de los cuáles se cuantifica cómo le afecta a cada elemento del par la ausencia o presencia del otro ente del par en una coalición, dependiendo de su disparidad o afinidad, atendiendo a las relaciones representadas por  $\mu^-$  y  $\mu^+$ , respectivamente. En este caso en que debido a su naturaleza bipolar la medida borrosa tiene dos componentes, el grafo asociado será en realidad un multi-grafo, denotado como MAWG.

**Definición 4.3.19 (Multi-grafo valorado bipolar asociado a  $\mu^b$  [87]).** Sea  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+) : 2^S \times 2^S \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  una medida borrosa bipolar definida en el conjunto  $S = \{1, \dots, n\}$ , y sean  $\phi^-, \phi^+ : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$  dos operadores de agregación bi-variados utilizados para hacer simétrica la relación entre cada par de elementos a partir de su relación asimétrica en

las medidas borrosas  $\mu^-$  y  $\mu^+$ . El multi-grafo valorado bipolar asociado a la medida borrosa bipolar  $\mu^b$  (MAWG) es aquel cuyas matrices de adyacencia son  $F^-$  y  $F^+$ . Sendas matrices, relativas a  $\mu^-$  y  $\mu^+$  respectivamente, se pueden calcular o bien vía valor de Shapley (ecuación (4.1)), o bien vía índice de interacción (ecuación (4.2)).

**Ejemplo 4.3.4.** Se considera un conjunto  $S$  de 12 elementos, acerca de los cuales se conocen sus relaciones personales: se sabe que los pares de individuos 1 y 4, y 6 y 8 se llevan muy mal, mientras que los pares 1 y 2; 3 y 4, y 5 y 6 son muy amigos. Sea la medida borrosa  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+)$  la herramienta empleada para el modelado de esta relación, de la que se supone cierta agregación en las matrices  $F^-$  y  $F^+$  (Figura 4.3). El MAWG bipolar asociado a  $\mu^b$ ,  $G_{\mu^b}$ , es aquel que tiene como matrices de adyacencia a  $(F^-, F^+)$ .

$$F^- = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4.3: Matrices de adyacencia del MAWG bipolar  $G_{\mu^b}$ .

Note la analogía entre el MAWG bipolar y el AWG de una medida borrosa, similitud evidente asumiendo que  $F^-$  y  $F^+$  son las matrices de adyacencia de los grafos valorados asociados a  $\mu^-$  y  $\mu^+$ , respectivamente. Por ello, todos los resultados previamente enunciados podrán generalizarse al contexto bipolar.

#### 4.4. El multi-grafo asociado a una familia de medidas borrosas

En la sección previa se ha tratado el problema de caracterizar una nueva herramienta de representación del conocimiento inherente a una medida borrosa: el grafo valorado asociado a la misma. En un primer acercamiento a este proceso de modelado, se ha asumido la existencia de una única medida borrosa. No obstante, es de sobra conocido que en muchos problemas estadísticos se hace necesaria la consideración de varias variables para conseguir una representación más realista de ciertas situaciones. En general los objetos no se pueden describir únicamente con una variable; es posible encontrar infinidad de escenarios en los que la similaridad (o diferencia) entre los elementos involucrados atienda a más de un criterio. Ante esta evidencia, parece justo asumir que las medidas borrosas que representan las relaciones, sinergias,

atracciones o repulsiones entre los elementos de un conjunto podrían no ser únicamente uni-dimensionales. En esta sección se plantea una generalización al plano multi-dimensional del grafo valorado asociado a una medida borrosa, proponiendo una extensión de esta herramienta para adaptarla a la existencia de una familia de medidas borrosas,  $(\mu^1, \dots, \mu^r)$ .

**Definición 4.4.1 (Multi-grafo valorado multi-dimensional asociado a múltiples medidas borrosas (MAWG) [85, 87]).** Sea  $S$  un conjunto finito. Para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ , sea  $\mu^\ell : 2^S \rightarrow [0, 1]$  una medida borrosa, cuyo multi-grafo valorado asociado,  $G_{\mu^\ell}$ , tiene a  $F^\ell$  como matriz de adyacencia. El multi-grafo valorado multi-dimensional asociado a la familia  $(\mu^1, \dots, \mu^r)$ ,  $G_{\mu^1, \dots, \mu^r}$ , es aquel cuyas matrices de adyacencia son  $(F^1, \dots, F^r)$ .

El cálculo de las correspondientes matrices de adyacencia  $F^\ell$  se puede ejecutar mediante cualquiera de las vías presentadas anteriormente. No obstante, fijada una familia de medidas borrosas, es recomendable (y lógico) emplear el mismo índice para calcular todas las matrices de adyacencia del MAWG correspondiente, ya sea el de Shapley o el de interacción. Sirva esta herramienta para representar y visualizar la información definida por una familia de medidas borrosas. Con infinidad de posibles aplicaciones en el marco de problemas de SNA, en las siguientes páginas se propone su aplicación para la resolución de problemas de detección de comunidades en grafos con información adicional acerca de las relaciones entre los nodos. A continuación se presentan distintas especificaciones del MAWG de una familia de medidas borrosas para ciertas medidas concretas.

**Definición 4.4.2 (Multi-grafo valorado asociado a una familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno).** Sea  $S$  un conjunto finito y sea la familia de vectores  $(x^1, \dots, x^r)$ , tal que cada vector representa un tipo de evidencia acerca de los elementos de  $S$ . Para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ , sea  $\mu_{x^\ell} : 2^S \rightarrow [0, 1]$  la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir del vector  $x^\ell$  atendiendo a la Definición 4.3.3. Sea  $X^\ell$  la matriz de adyacencia de su AWG, según la ecuación (4.3). El MAWG de la familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno  $(\mu_{x^1}, \dots, \mu_{x^r})$  es aquel cuyas matrices de adyacencia son  $(X^1, \dots, X^r)$ .

**Ejemplo 4.4.1.** Dada la familia  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  donde  $x^1 = (9, 9.5, 10, 1, 0.5, 1, 9.5, 8, 10, 1, 1, 5, 1)$ ,  $x^2 = (10, 9.5, 9, 1, 0.5, 1, 9, 9, 9.5, 1.5, 2, 0.5)$ ,  $x^3 = (9, 9.5, 10, 1, 1, 1, 10, 9.5, 9, 0.5, 1, 1)$ , se asume que cada vector define cierta evidencia acerca de los  $n = 12$  elementos del conjunto  $S$ .

Se considera la familia de funciones  $(\mu_{x^1}^a, \mu_{x^2}^a, \mu_{x^3}^a, \mu_{x^4}^a)$ , siendo cada una de ellas una  $\lambda$ -medidas borrosa de Sugeno obtenidas a partir de un vector de la familia descrita previamente, atendiendo a las premisas enunciadas en la Proposición 4.3.3 tomando  $p = 1$ . Para cada  $\ell = 1, 2, 3, 4$ ,  $G_{\mu_{x^\ell}^a}$  es el grafo valorado asociado a la medida  $\mu_{x^\ell}^a$ , cuya matriz de adyacencia es  $X^\ell$ , siendo  $X_{ij}^\ell = \phi \left( Sh_i(\mu_{x^\ell}^a) - Sh_i^j(\mu_{x^\ell}^a), Sh_j(\mu_{x^\ell}^a) - Sh_j^i(\mu_{x^\ell}^a) \right) =$

$\min\{|\frac{x_i^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell} - \frac{x_i^\ell}{\sum_{k=1, k \neq j}^n x_k^\ell}|, |\frac{x_j^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell} - \frac{x_j^\ell}{\sum_{k=1, k \neq i}^n x_k^\ell}|\}$ . El MAWG de la familia  $(\mu_{x^1}^a, \mu_{x^2}^a, \mu_{x^3}^a, \mu_{x^4}^a)$  es aquel que tiene como adyacencia  $(X^1, X^2, X^3, X^4)$ .

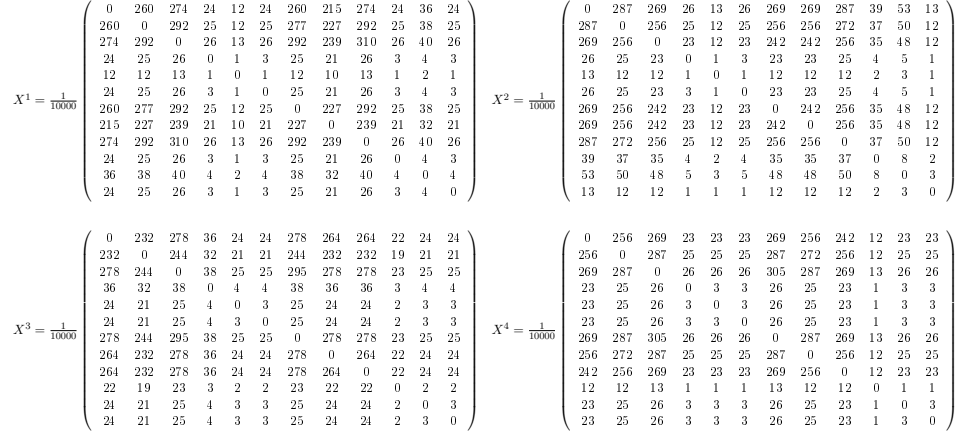


Figura 4.4: Adyacencia del MAWG de familia de vector  $G(\mu_{x^1}^a, \mu_{x^2}^a, \mu_{x^3}^a, \mu_{x^4}^a)$ .

**Definición 4.4.3 (Multi-grafo valorado multi-dimensional asociado a múltiples medidas borrosas de afinidad. [85]).** Sea  $S$  un conjunto finito, y sea la familia de matrices de afinidad  $(R^1, \dots, R^r)$ . Para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ , sea  $\mu_{R^\ell} : 2^S \rightarrow [0, 1]$  la medida borrosa de afinidad obtenida a partir de la matriz  $R^\ell$ , cuyo multi-grafo valorado asociado tiene a  $F^\ell = R^\ell$  como matriz de adyacencia. El MAWG asociado a la familia  $(\mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r})$  es aquel cuyas matrices de adyacencia son  $(F^1, \dots, F^r) = (R^1, \dots, R^r)$ .

**Ejemplo 4.4.2.** Dado un conjunto  $S$  de 7 elementos, se asume que existen cuatro matrices,  $R^1, R^2, R^3$  y  $R^4$ , cada una de las cuales define cierta relación de afinidad entre los distintos pares de nodos. Se considera la familia de medidas borrosas  $(\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4})$ , tal que,  $\forall \ell = 1, 2, 3, 4$ ,  $\mu_{R^\ell}$  se calcula a partir de la matriz  $R^\ell$ . Sabiendo que  $F_{ij}^\ell = R_{ij}^\ell$ , el MAWG de la familia de medidas borrosas  $(\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4})$  es aquel que tiene como adyacencia las matrices  $(R^1, R^2, R^3, R^4)$ .

$$\begin{aligned}
R^1 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} & R^2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
R^3 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & R^4 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Figura 4.5: Adyacencia del MAWG de familia de matriz  $G_{(\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4})}$ .

Cabría hacer especial énfasis en el contexto bipolar, en que, el caso ‘más sencillo’ ya involucra en sí mismo un multi-grafo, debido a las dos componentes que definen una medida borrosa bipolar. No obstante, la generalización al escenario bipolar del multi-grafo valorado multi-dimensional asociado a múltiples medidas borrosas es inmediata, como se muestra a continuación.

**Definición 4.4.4 (Multi-grafo valorado bipolar multi-dimensional asociado a múltiples medidas borrosas bipolares [87]).** Dado el conjunto finito  $S$ , se considera la familia de funciones  $(\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r})$  tal que, para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\mu^{b_\ell} : 2^S \times 2^S \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  es una medida borrosa bipolar, cuyo multi-grafo valorado bipolar asociado tiene como matrices de adyacencia las matrices  $(F^{-\ell}, F^{+\ell})$ . El MAWG de la tupla  $(\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r})$  es aquel cuyas matrices de adyacencia son  $(F^{-1}, \dots, F^{-r}, F^{+1}, \dots, F^{+r})$ .

**Ejemplo 4.4.3.** Se retoma el caso introducido en el Ejemplo 4.3.4, y se asume que, además de conocer las relaciones personales entre los individuos involucrados, se posee información acerca de sus relaciones laborales, de manera que los pares de individuos 1 y 3, 2 y 4, 5 y 7, 6 y 7 tienen intereses contrapuestos, mientras que los individuos 7 y 8 son socios. Sirva la medida borrosa bipolar  $\mu^{b_1}$  para modelar las relaciones personales, y  $\mu^{b_2}$  para modelar las relaciones laborales. El MAWG de la familia  $(\mu^{b_1}, \mu^{b_2})$  es aquel que tiene como adyacencia las matrices  $(F^{-1}, F^{-2}, F^{+1}, F^{+2})$ .

$$F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{-2} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{+1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{+2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4.6: Adyacencia del MAWG bipolar  $G_{(\mu^{b_1}, \mu^{b_2})}$ .

## Capítulo 5

# Grafos borrosos, Grafos borrosos extendidos, Grafos borrosos extendidos multi-dimensionales

*Sinfonía N.º 8 Fa Mayor, Op.93*

L.V. Beethoven

**RESUMEN:** En este capítulo se presenta la caracterización de un nuevo modelo de representación del conocimiento. Tomando como punto de partida las conexiones entre elementos modeladas por un grafo (nítido), en las siguientes páginas se estudian alternativas con las que suplir las carencias de representación relativas a opciones clásicas, presentadas en la Sección 5.1. Fruto de la unión de una medida borrosa y un grafo, en la Sección 5.2 se propone la definición del grafo borroso extendido (EFG), herramienta que permite la representación de relaciones entre los individuos de un grafo, independientemente de la estructura de conexiones que los una. Se presenta su caracterización ante la consideración de tres tipos concretos de medidas borrosas. El capítulo finaliza en la Sección 5.3 con la extensión del EFG a un plano multi-dimensional en el que se cuenta con la existencia de múltiples medidas borrosas independientes entre sí y ajenas a la estructura gráfica que definen relaciones entre los elementos de un grafo.

## 5.1. Grafos borrosos

En el Capítulo 2 se hace una extensa presentación de los grafos, herramienta de modelado especialmente útil para la representación de conexiones entre individuos. Preliminarmente se habla de grafos no dirigidos y no valorados, en los que únicamente se establece la existencia o no de una conexión entre un par de elementos; noción generalizada con la definición de propiedades tales como la valoración o direccionalidad de las aristas. La consideración de estas características supone una notable mejora en la capacidad de representación de los grafos con respecto al ámbito abarcado por su versión más sencilla. No obstante, en el proceso de manipulación y análisis de un conjunto de individuos y sus conexiones, no sólo se considerará la estructura modelada por un grafo no dirigido y no valorado. En ocasiones, debido a limitaciones en el tratamiento de la incertidumbre que surge de forma natural en los diferentes atributos de los sistemas, no es posible representar correctamente a través de un grafo muchos fenómenos. De esta dificultad nace la importancia de introducir una herramienta con que ampliar la noción de grafo. Se trata de los grafos borrosos, definidos en 1975 por A. Rosenfeld [163]. Su caracterización se basa en los fundamentos de las relaciones borrosas entre individuos de las que habló L.A. Zadeh [203, 207], y son muy útiles para el modelado de problemas reales, en los que es conveniente una representación matemática flexible de afectos, relaciones o enunciados, a través de la cual representar la vaguedad o incertidumbre intrínseca a la vida humana. Este tipo de modelado resulta muy apropiado para la resolución de problemas reales como la detección de comunidades basadas en relaciones borrosas [123], o problemas de comunicación, minería de datos o segmentación de imágenes [173].

**Definición 5.1.1 (Grafo Borroso [163]).** Dado un conjunto finito y no vacío  $V$ , y un operador conjuntivo  $\mathcal{B}$ , se consideran las funciones  $\eta : V \rightarrow [0, 1]$  y  $\varphi : V \times V \rightarrow [0, 1]$ , tales que  $\forall x, y \in V, \varphi(x, y) \leq \mathcal{B}(\eta(x), \eta(y))$ . Un grafo borroso es una tupla  $\widehat{G} = (V, \eta, \varphi)$ , donde  $\eta$  y  $\varphi$  son el conjunto borroso de vértices y el conjunto borroso de aristas de  $\widehat{G}$ , respectivamente.

Esta caracterización de grafo borroso es la más generalizada. No obstante, si  $\eta(x) = 1 \forall x \in V$ , las condiciones anteriores se cumplen trivialmente, por ser  $\mathcal{B}$  un operador de agregación (conjuntivo), con lo que  $\mathcal{B}(\eta(x), \eta(y)) = \mathcal{B}(1, 1) = 1$ . Debido a la caracterización de  $\varphi$ , es inmediato que  $\varphi(x, y) \leq \mathcal{B}(\eta(x), \eta(y)) = \mathcal{B}(1, 1) = 1$ . En este supuesto, si el conjunto de vértices es nítido, la información completa la proporciona el par  $\widehat{G} = (V, \varphi)$ .

**Definición 5.1.2 (Grafo nítido con conjunto borroso de aristas [132]).** Sea el grafo  $G = (V, E)$ , y sea el conjunto borroso  $\varphi : E \rightarrow [0, 1]$  una función definida sobre el conjunto nítido de aristas de  $G$ ,  $E$ . La tupla  $\widehat{G} = (V, E, \varphi)$  es un grafo borroso, también llamado grafo nítido  $G$  con aristas borrosas  $\varphi$ .

**Observación 3.** Dada una función de grado de pertenencia  $\varphi$ , se puede obtener fácilmente el conjunto  $E = \{(x, y) \in V \times V \mid \varphi(x, y) > 0\}$ . Así, un grafo nítido con conjunto borroso de aristas podría entenderse como el conjunto de grafos borrosos con conjunto nítido de vértices,  $V$ . En esta situación, una arista borrosa debe tener asignado un valor nulo si la arista nítida correspondiente no existe en  $E$ . Ante este supuesto, las definiciones previas sobre grafos borrosos son equivalentes.

**Ejemplo 5.1.1.** Sea  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  un conjunto de vértices,  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$  un conjunto de aristas, y sea  $\varphi : E \rightarrow [0, 1]$  una función de grado de pertenencia tal que  $\varphi(\{1, 2\}) = 0.5$ ,  $\varphi(\{1, 3\}) = 0.5$ ,  $\varphi(\{2, 3\}) = 0.1$ ,  $\varphi(\{2, 4\}) = 0$ ,  $\varphi(\{3, 5\}) = 0.9$ ,  $\varphi(\{4, 5\}) = 1$ ,  $\varphi = 0$  en otro caso. La tupla  $\widehat{G} = (V, E, \varphi)$  representada en la Figura 5.1 es un grafo nítido con conjunto borroso de aristas.

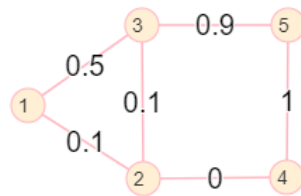


Figura 5.1: Grafo borroso  $\widehat{G} = (V, E, \varphi)$

Puesto que  $\varphi$  no puede definir grados de pertenencia entre nodos que no están directamente conectados, el ámbito de este modelo se limita notablemente; la información se puede resumir en la provista por el grafo nítido junto con el grado de pertenencia definido por  $\varphi$  para cada arista. Así, estos modelos podrían entenderse de alguna manera como grafos valorados, de modo que cada peso podría verse como el grado de pertenencia relativo a cada arista nítida. Por ejemplo, volviendo a  $\widehat{G} = (V, E, \varphi)$  (Figura 5.1), como no existe la arista  $\{3, 4\}$ , necesariamente debe cumplirse que  $\varphi(\{3, 4\}) = 0$  (el grado de pertenencia definido por  $\varphi$  relativo al par de vértices  $\{3, 4\}$  ha ser nulo al no existir la arista nítida correspondiente).

## 5.2. Grafos borrosos extendidos

Sin menospreciar la trascendencia de los grafos como herramienta de modelado, es evidente que estos instrumentos de representación, sean o no borrosos, presentan ciertas limitaciones ante la consideración de situaciones reales, debido a su incapacidad para mostrar capacidad, relaciones, sinergias, o repulsiones entre elementos que no estén conectados. El talón de Aquiles de los grafos borrosos ante una de las asunciones clásicas (Definición 5.1.2) es

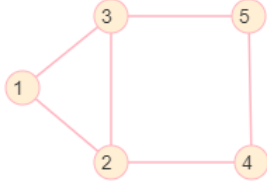
que dos nodos que no son adyacentes en el correspondiente grafo nítido, no pueden tener ningún grado de relación en el conjunto borroso de aristas  $\varphi$ .

Para aliviar en cierta manera esta carencia, se ha trabajado en la definición de una nueva herramienta de representación, fruto de una generalización de los grafos borrosos: el grafo borroso extendido. Como su nombre indica, tiene un margen de modelado más general que el de los propios grafos borrosos, facilitando la consideración de sinergias entre elementos no conectados o la representación de la capacidad de cualquier conjunto de elementos. Las componentes para su caracterización son un grafo nítido  $G = (V, E)$ , en el que  $V = \{1, \dots, n\}$  es el conjunto de  $|V| = n$  vértices o nodos y  $E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V\}$  es el conjunto de  $|E| = m$  aristas o arcos; y una medida borrosa  $\mu : 2^V \rightarrow [0, 1]$  definida sobre el conjunto de nodos. El dominio de definición de  $\mu$  permite constatar que esta medida borrosa hace posible la asignación de un grado de pertenencia a cualquier par de elementos de  $V$ , independientemente de si la arista correspondiente existe o no en  $E$ . Esta posibilidad aumenta notablemente la sofisticación del modelado de situaciones reales, facilitando la incorporación de cierto punto de incertidumbre a la manipulación de relaciones o sinergias entre elementos o la capacidad de conjuntos. Se presenta una definición matemática de este modelo, acerca del cual se habló por primera vez en el congreso *INFUS 2019*.

**Definición 5.2.1. Grafo Borroso Extendido (EFG)** [88] Sea el par  $G = (V, E)$  un grafo, y sea  $\mu : 2^V \rightarrow [0, 1]$  una medida borrosa definida sobre el conjunto de nodos  $V$ . La tupla  $\tilde{G} = (V, E, \mu)$  resultante al considerar juntos el grafo  $G$  y la medida borrosa  $\mu$  recibe el nombre de grafo borroso extendido.

Como se ha mencionado, el ámbito abarcado por un grafo borroso extendido es notablemente superior al relativo a un grafo borroso convencional, cuanto más si se compara con un grafo nítido no valorado. El EFG posibilita la opción de modelar mediante  $\mu$  una relación entre cualquier par de elementos, estén o no conectados en el grafo nítido  $G$ . De esta manera, para cada par de nodos  $i, j \in V$ , es posible que el valor  $\mu(\{i, j\})$  sea no nulo, aún cuando la arista  $\{i, j\}$  no exista en el conjunto  $E$ . La evidente mejora facilitada por la consideración de grafos borrosos extendidos viene acompañada de un aumento en la complejidad relativa al proceso de construcción del mismo, para el cual hace falta definir  $2^V$  valores, una cantidad notablemente superior a los  $|E|$  valores requeridos para caracterizar un grafo borroso convencional.

**Ejemplo 5.2.1.** Se retoma el grafo introducido en el Ejemplo 5.1.1, y se considera la medida borrosa  $\mu : 2^V \rightarrow [0, 1]$  definida en la ecuación (5.1).  $\tilde{G} = (V, E, \mu)$  es el grafo borroso extendido obtenido al considerar el grafo  $G = (V, E)$  junto con la medida borrosa  $\mu$ . Considerando  $\tilde{G}$  es posible establecer un grado de pertenencia entre nodos no conectados directamente mediante una arista, como los pares  $\{1, 4\}$  y  $\{1, 5\}$ , siendo  $\mu(\{1, 4\}) = \mu(\{1, 5\}) = 1$ .



$$\mu(K) = \begin{cases} 1 & \text{si } K = \{1, 4\}, \{1, 5\} \\ 0.5 & \text{si } K = \{1, 2\}, \{1, 3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.1)$$

Figura 5.2: EFG  $\tilde{G} = (V, E, \mu)$

En las siguientes secciones se ilustra la caracterización del EFG considerando ciertas medidas borrosas específicas (las presentadas en el Capítulo 4). Note que este modelo es fácilmente adaptable a distintas situaciones.

### 5.2.1. Grafo borroso extendido de vector

Dado el grafo  $G = (V, E)$ , se considera el  $n$ -vector  $x$ , asumiendo que cada una de sus componentes,  $x_i$  define una cierta evidencia acerca de  $i \in V$ . A partir de  $x$  se define la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno  $\mu_x$ , tal y como se describe en la Definición 4.3.3 del Capítulo 4. En este contexto, se propone una especificación del EFG: el grafo borroso extendido de vector, que debe su nombre a la naturaleza de la medida borrosa considerada.

**Definición 5.2.2 (Grafo borroso extendido de vector [86]).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo, y sea  $x$  un vector que define cierta evidencia acerca de los elementos de  $V$ . Sea  $\mu_x$  la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir de  $x$ . La tupla  $\tilde{G}_x = (V, E, \mu_x)$  es llamada grafo borroso extendido de vector.

Ahora se ilustra la caracterización de un EFG de vector, y cómo esta herramienta facilita la consideración de opciones inviables con otros recursos.

**Ejemplo 5.2.2.** Se considera el grafo  $G = (V, E)$  representado en la Figura 5.3, y el vector  $x = (10, 10, 0, 0, 9, 9, 8, 8)$ . Se asume que  $x$  representa las valoraciones a cierta película aportadas por las personas representadas por los elementos de  $V$ .

Se propone la consideración de la medida borrosa  $\mu_x^a$  a través de su grafo asociado,  $G_{\mu_x^a}$ , el cual, como se ha detallado en el Capítulo 4, se puede obtener directamente a partir de  $x$ . Para ello, se calcula la matriz de adyacencia de  $G_{\mu_x^a}$ , siendo  $X_{ij} = \phi \left( Sh_i(\mu_x^a) - Sh_i^j(\mu_x^a), Sh_j(\mu_x^a) - Sh_j^i(\mu_x^a) \right) = \min \left\{ \left| \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} - \frac{x_i}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k} \right|, \left| \frac{x_j}{\sum_{k=1}^n x_k} - \frac{x_j}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k} \right| \right\}$ .

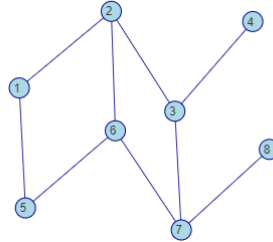


Figura 5.3: Grafo  $G = (V, E)$ .

$$X = \frac{1}{10000} \begin{pmatrix} 0 & 421 & 0 & 0 & 370 & 370 & 322 & 322 \\ 421 & 0 & 0 & 0 & 370 & 370 & 322 & 322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 370 & 370 & 0 & 0 & 0 & 333 & 290 & 290 \\ 370 & 370 & 0 & 0 & 333 & 0 & 290 & 290 \\ 322 & 322 & 0 & 0 & 290 & 290 & 0 & 258 \\ 322 & 322 & 0 & 0 & 290 & 290 & 258 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 5.4: Matriz  $X$ , adyacencia de  $G_{\mu_x^a}$ .

Con la única consideración de un grafo borroso no sería posible modelar la información proporcionada por el vector  $x$ , carencia que será fácilmente solventada mediante la tupla  $\tilde{G} = (V, E, \mu_x^a)$ , cuya manipulación se simplifica mediante la consideración de la adyacencia de  $G$  y la matriz  $X$ . Por ejemplo, la representación de las sinergias entre los elementos 1 y 6, que no están conectados mediante una arista pero tienen opiniones similares.

### 5.2.2. Grafo borroso extendido de matriz

Partiendo de un grafo  $G = (V, E)$  y de una medida borrosa  $\mu_R$  obtenida a partir de una matriz de relaciones  $R$  (Definición 4.3.10), se define una herramienta con la que representar la afinidad entre los vértices de  $G$ , independientemente de sus conexiones en el mismo. Para ello, se asume que cada componente matricial  $R_{ij}$  define una cierta relación de afinidad entre los vértices  $i, j \in V$ . Con la unión del grafo  $G$  y la medida borrosa  $\mu_R$ , se alcanza el concepto de grafo borroso extendido de matriz o afinidad.

#### Definición 5.2.3 (Grafo borroso extendido de matriz/afinidad [88]).

Sea el par  $G = (V, E)$  un grafo, y sea la matriz de relaciones  $R$ , definiendo cierta afinidad entre los elementos de  $V$ . Sea  $\mu_R : 2^V \rightarrow [0, 1]$  la medida borrosa obtenida a partir de  $R$  según la Definición 4.3.10. La tupla  $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$  resultante al considerar juntos el grafo  $G$  y la medida borrosa  $\mu_R$  recibe el nombre de grafo borroso extendido (EFG) de matriz o de afinidad.

**Ejemplo 5.2.3.** Considere una rueda con 7 nodos. En el mejor de los casos, un grafo borroso permitiría establecer cierto grado de pertenencia (o relación borrosa) entre los vértices que están directamente conectados; quedando fuera de toda posibilidad la representación de posibles sinergias entre nodos no conectados (directamente) como el 1 y 4. Ante la existencia de una fuerte relación de afinidad entre los cuatro primeros vértices, sea  $R$  la matriz a través de la cual se obtiene la medida borrosa  $\mu_R$ , como se detalla en el Capítulo 4. En la Figura 5.5 se presenta el EFG de afinidad  $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$ , en el que, además de representarse la estructura circular de la rueda, se puede apreciar en la matriz  $R$  las fuertes sinergias existentes entre los nodos 1, 2, 3 y 4.

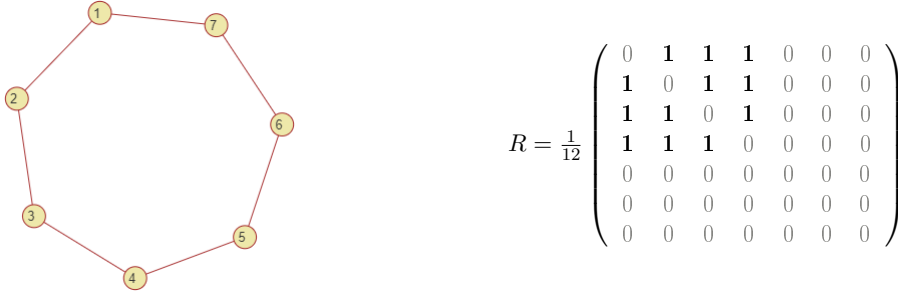


Figura 5.5: EFG de afinidad  $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$ .

### 5.2.3. Grafo borroso extendido bipolar

En las secciones previas se han considerado dos tipos de medidas borrosas, ambas acerca de relaciones de cierto talante positivo. A continuación se muestra cómo adaptar la construcción de un EFG a un contexto en el que, además de existir alguna relación positiva entre los individuos involucrados, también se conozcan las diferencias o desavenencias entre ellos. Para ello se hará uso de las medidas borrosas bipolares [75].

Se presenta una herramienta con la que, además de poder representar relaciones independientes al grafo de partida, es posible una disociación de los dos tipos de relaciones consideradas (positiva y negativa), de modo que entre dos elementos puede haber relación de ambos tipos, de uno de ellos, o de ninguno, independientemente de si están o no conectados en el grafo.

**Definición 5.2.4 (Grafo borroso extendido bipolar [89]).** Sea el par  $G = (V, E)$  un grafo, y sea la medida borrosa bipolar  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+)$ , tal que  $\mu^-, \mu^+ : 2^V \times 2^V \rightarrow [0, 1]$  son sendas medidas borrosas definiendo relaciones negativas y positivas entre los vértices de  $V$ , respectivamente. La tupla  $\tilde{G} = (V, E, \mu^b = (\mu^-, \mu^+))$  resultante al considerar juntos el grafo  $G$  y la medida borrosa bipolar  $\mu^b$  es un grafo borroso extendido bipolar (EFG bipolar).

**Ejemplo 5.2.4.** Se considera una cadena de 12 nodos, acerca de los cuales se conocen dos tipos de relaciones, una de naturaleza negativa y la otra de naturaleza positiva, modeladas por las medidas borrosas  $\mu^-$  y  $\mu^+$ , respectivamente, que definen la medida borrosa bipolar  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+)$ . Asumiendo una cierta agregación de la medida borrosa bipolar  $\mu^b$  que proporciona las matrices  $F^-$  y  $F^+$ , en la Figura 5.6 se presenta el EFG bipolar  $\tilde{G} = (V, E, \mu^b)$ , donde se puede apreciar la diversidad de relaciones entre nodos, además de la estructura definida por las aristas de  $E$ .

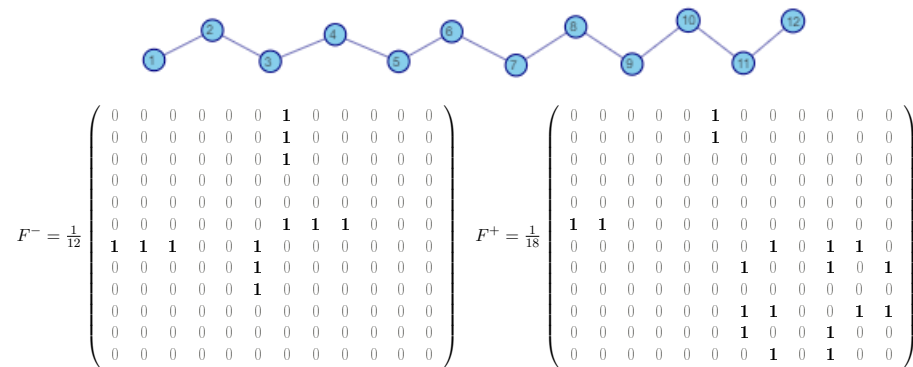


Figura 5.6: EFG bipolar  $\tilde{G} = (V, E, \mu^b = (\mu^-, \mu^+))$ .

En el contexto de bipolaridad, es de vital importancia tener en cuenta que las medidas borrosas  $\mu^-$  y  $\mu^+$  son de naturaleza contrapuesta, hecho que en muchas situaciones forzar  un pre-procesamiento de la información representada por el EFG bipolar antes de su aplicación, con el fin de obtener una representación del conocimiento coherente y concisa. Por ejemplo, en el contexto de problemas de detección de comunidades, parece justo aceptar que los elementos con fuertes relaciones en  $\mu^-$  podrían tender a estar separados, al contrario que aquellos que est n fuertemente relacionados en  $\mu^+$ . No obstante, esta es sólo una de las múltiples aplicaciones posibles de esta herramienta, que podría ser verdaderamente útil en otro tipo de problemas en que se precie la consideración de las relaciones entre elementos.

Cabría plantearse la dimensionalidad del EFG bipolar, en que intervienen dos medidas borrosas,  $\mu^-$  y  $\mu^+$ . Tal vez sería conveniente considerar este tipo concreto de grafo borroso extendido como una generalización al plano multi-dimensional del EFG. No obstante, se ha decidido darle cierto tratamiento uni-dimensional, en el sentido de que únicamente existe una medida borrosa,  $\mu^b$ , cuya bipolaridad propicia la diferenciación de dos componentes en la misma. Para evidenciar las razones que han fundamentado esta decisión, en la siguiente sección se presenta el tratamiento de familias de medidas borrosas, noción alejada de la dualidad de una medida borrosa bipolar. De

hecho, se analizará la consideración de múltiples medidas borrosas bipolares, cada una de las cuales contando con doble componente.

### 5.3. Grafos borrosos extendidos multi-dimensionales

En la sección anterior se presenta una herramienta de representación con la que obtener modelados de la realidad verdaderamente sofisticados. Pese a la notable mejora en la representación del conocimiento que aporta la consideración de un EFG con respecto a la capacidad de ajuste de un grafo nítido, parece evidente la insuficiencia de esta herramienta al abordar situaciones en las que existe más de una fuente de información adicional, además del grafo. No es descabellado aceptar la existencia de varios tipos diferentes e independientes de relaciones entre elementos. Como sucede en innumerables problemas matemáticos, sería conveniente trasladar el caso uni-dimensional previamente detallado a un plano multi-dimensional, para posibilitar la consideración de más de una variable a la hora de describir con gran precisión situaciones reales, tomando como elemento base un grafo. Se amplía la noción de grafo borroso extendido a un plano multi-dimensional en el que se cuenta con la existencia de múltiples medidas borrosas, cada una de las cuales representa una de las fuentes de información o relaciones existentes.

En lo siguiente se asume la existencia de una medida borrosa para modelar cada una de las relaciones descritas por las diversas fuentes de información. Así, se contará con un grafo nítido,  $G = (V, E)$ , y una familia de medidas borrosas,  $(\mu^1, \dots, \mu^r)$ . Esta asunción da lugar a la siguiente definición, en la que se propone una generalización del grafo borroso extendido.

**Definición 5.3.1 (Grafo borroso extendido multi-dimensional (MEFG) [85, 87]).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo nítido, y sea la familia de funciones  $(\mu^1, \dots, \mu^r)$ , donde, para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\mu^\ell : 2^V \rightarrow [0, 1]$  es una medida borrosa definida en el conjunto de nodos,  $V$ . La tupla  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^1, \dots, \mu^r))$  recibe el nombre de grafo borroso extendido multi-dimensional, MEFG.

A continuación se muestra un ejemplo de un grafo acerca de cuyos elementos se conocen dos tipos de relaciones. Todo el conocimiento se modelará mediante un MEFG cuyas componentes son independientes unas de otras.

**Ejemplo 5.3.1.** Para un conjunto de cinco personas conectadas entre sí, se sabe que los individuos involucrados tienen dos tipos de relaciones entre sí, una de naturaleza laboral, y otra de talante personal, modeladas por las medidas borrosas  $\mu^1$  y  $\mu^2$ , respectivamente. El MEFG  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^1, \mu^2))$  mostrado en la Figura 5.7 representa perfectamente toda la información disponible, tanto la estructura de conexiones como las diversas fuentes de información relativas a relaciones entre individuos, considerando la vaguedad inherente al conocimiento y tratamiento de relaciones personales.

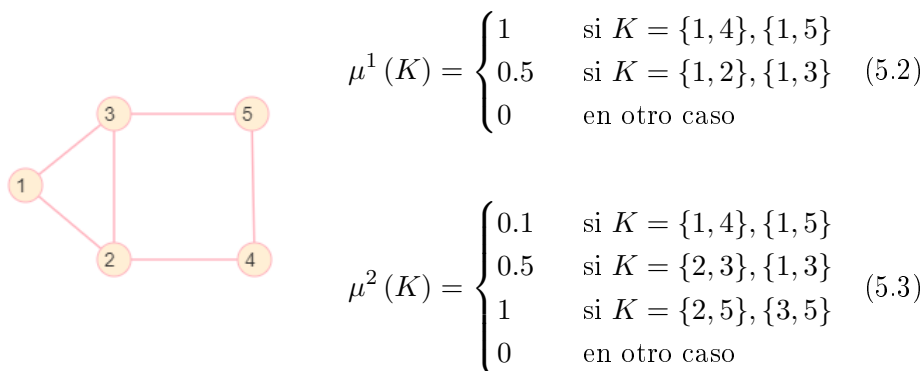


Figura 5.7: MEFG  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^1, \mu^2))$

### 5.3.1. Grafo borroso extendido de vector multi-dimensional

En secciones previas se ha considerado la existencia de un único vector definiendo cierta evidencia acerca de los nodos del grafo nítido considerado, a partir del cual se proponía la definición de una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno. En esta sección se considera la posibilidad de disponer de más de un vector, lo que facilitará la consideración y manipulación de diversos tipos de evidencias, no necesariamente relacionadas entre sí, y la consecuente caracterización de una familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno.

Se define una herramienta para modelar situaciones en las que existe un conjunto de elementos conectados, para los que se dispone de varias fuentes de información independientes e individuales. Se trata de la generalización al plano multi-dimensional del grafo borroso extendido de vector.

**Definición 5.3.2 (Grafo borroso extendido de vector multi-dimensional / grafo borroso extendido de familia de vector).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo nítido, y sea la familia de vectores  $(x^1, \dots, x^r)$ , donde, para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ , el vector  $x^\ell$  modela alguna certeza sobre los elementos de  $V$ , de modo que  $x_i^\ell$  representa la evidencia  $\ell$ -ésima relativa al elemento  $i \in V$ . Sea la familia de medidas borrosas  $(\mu_{x^1}, \dots, \mu_{x^r})$ , donde, para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\mu_{x^\ell}$  es la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir del vector  $x^\ell$  según la Definición 4.3.3. La tupla  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{x^1}, \dots, \mu_{x^r}))$  recibe el nombre de grafo borroso extendido de vector multi-dimensional o grafo borroso extendido de familia de vector (MEFG de vector).

**Ejemplo 5.3.2.** Se considera un grafo  $G = (V, E)$  con estructura de cadena, y se asume que el conjunto  $V$  representa un conjunto de 12 personas conectadas entre sí, atendiendo a las aristas de  $E$ . Se pregunta a estas personas por su interés en 4 deportes distintos, a lo que responden asignando una puntuación numérica. Para la representación y posterior manipulación de esta información adicional, se considera la familia de vectores  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ ,

con  $x^\ell = (x_1^\ell, \dots, x_{12}^\ell), \forall \ell = 1, 2, 3, 4$ , donde,  $\forall i = 1, \dots, 12$ ,  $x_i^\ell$  representa el interés mostrado por la persona  $i$  hacia el deporte  $\ell$ .

- $x^1 = (9, 9.5, 10, 1, 0.5, 1, 9.5, 8, 10, 1, 1, 5, 1)$
- $x^2 = (10, 9.5, 9, 1, 0.5, 1, 9, 9, 9.5, 1.5, 2, 0.5)$
- $x^3 = (9.5, 8.5, 10, 1.5, 1, 1, 10, 9.5, 9.5, 0.9, 1, 1)$
- $x^4 = (9, 9.5, 10, 1, 1, 1, 10, 9.5, 9, 0.5, 1, 1)$

Independientemente de si dos personas están conectadas o no en  $G$ , es justo aceptar la existencia de sinergias entre aquellos individuos que tengan intereses deportivos similares, atendiendo a las puntuaciones asignadas. Estas sinergias serán representadas mediante la familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno  $(\mu_{x^1}, \mu_{x^2}, \mu_{x^3}, \mu_{x^4})$ . Particularmente, si se considera el cálculo de estas  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno en su versión aditiva, sea para cada  $\ell = 1, 2, 3, 4$ ,  $G_{\mu_{x^\ell}^a}$  el AWG relativo a  $\mu_{x^\ell}^a$ , cuya matriz de adyacencia es  $X^\ell$ , siendo  $X_{ij}^\ell = \phi \left( Sh_i(\mu_{x^\ell}^a) - Sh_i^j(\mu_{x^\ell}^a), Sh_j(\mu_{x^\ell}^a) - Sh_j^i(\mu_{x^\ell}^a) \right) = \min \left\{ \left| \frac{x_i^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell} - \frac{x_i^\ell}{\sum_{k=1, k \neq j}^n x_k^\ell} \right|, \left| \frac{x_j^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell} - \frac{x_j^\ell}{\sum_{k=1, k \neq i}^n x_k^\ell} \right| \right\}$ .

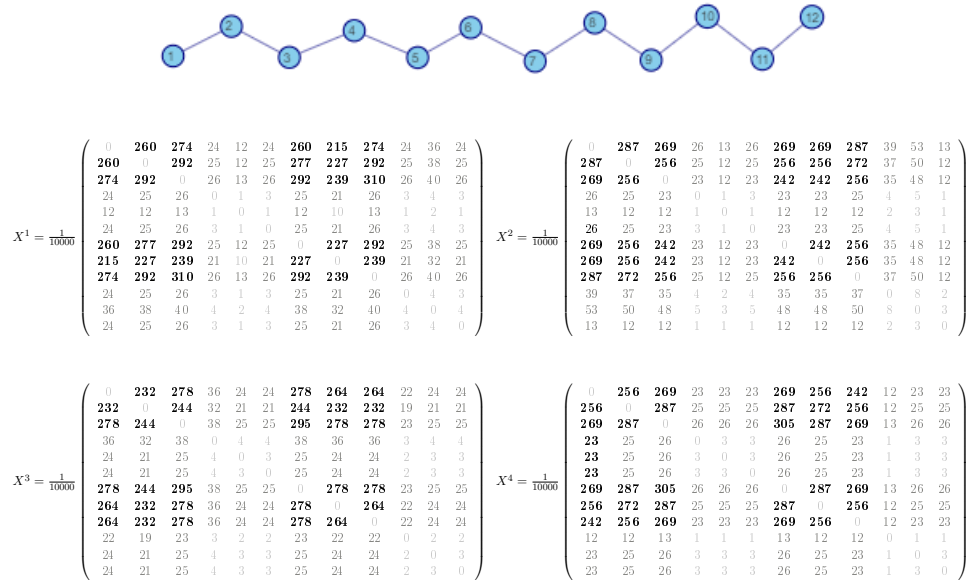


Figura 5.8: MEFG de familia de vector  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{x^1}^a, \mu_{x^2}^a, \mu_{x^3}^a, \mu_{x^4}^a))$ .

El MEFG de familia de vector  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{x^1}^a, \mu_{x^2}^a, \mu_{x^3}^a, \mu_{x^4}^a))$  (Figura 5.8) representa, no sólo las conexiones entre individuos, sino también las diversas sinergias que surgen entre ellos fruto de sus gustos deportivos, re-

presentadas por las matrices de adyacencia del MAWG correspondiente.

### 5.3.2. Grafo borroso extendido multi-dimensional de matriz

En esta sección se aborda la existencia de múltiples afinidades entre pares de elementos, todas ellas independientes entre sí. En las siguientes líneas se asume que cada una de estas relaciones está definida por una matriz  $R^\ell$ , a través de la cual se obtiene la medida borrosa de afinidad  $\mu_{R^\ell}$ . Así, se dispondrá de un grafo nítido,  $G = (V, E)$ , y de una familia de medidas borrosas  $(\mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r})$ , cada una de ellas definida en el conjunto de nodos. A partir de estas componentes se presenta la caracterización del grafo borroso extendido multi-dimensional de afinidad/matriz, herramienta con la que representar distintas afinidades entre elementos conectados.

**Definición 5.3.3 (Grafo borroso extendido multi-dimensional de matriz/afinidad [85]).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Sean las matrices de afinidad  $(R^1, \dots, R^r)$  a partir de las que se obtiene la familia de medidas borrosas de afinidad  $(\mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r})$ . La tupla  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r}))$  recibe el nombre de grafo borroso extendido multi-dimensional de matriz/afinidad.

**Ejemplo 5.3.3.** Se retoma el grafo del Ejemplo 5.2.3 relativo a una rueda de 7 nodos, siendo  $A$  su matriz de adyacencia. Aceptando la existencia de ciertas afinidades entre los nodos, se asume que hay cuatro matrices,  $R^1$ ,  $R^2$ ,  $R^3$  y  $R^4$ , cada una de las cuales define una cierta relación de afinidad entre pares de nodos, y se considera la familia de medidas borrosas  $(\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4})$ , tal que, para cada  $\ell = 1, 2, 3, 4$ , la medida borrosa  $\mu_{R^\ell}$  se calcula a partir de la matriz  $R^\ell$ . Tomando  $R_{ij}^\ell = F_{ij}^\ell = \phi\left(Sh_i(\mu_{R^\ell}) - Sh_i^j(\mu_{R^\ell}), Sh_j(\mu_{R^\ell}) - Sh_j^i(\mu_{R^\ell})\right)$  se calcula la matriz de adyacencia del grafo asociado a cada medida borrosa de afinidad  $\mu_{R^\ell}$ . Así, MEFG de matriz  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4}))$  representa las conexiones propias de la estructura de la rueda, así como las afinidades entre nodos.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
R^1 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 0 \end{pmatrix} & R^2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
R^3 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} & R^4 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Figura 5.9: MEFG de matriz  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4}))$ .

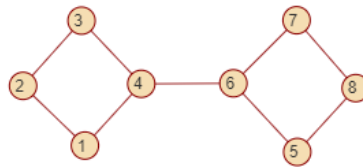
### 5.3.3. Grafo borroso extendido bipolar multi-dimensional

Hay infinidad de escenarios en los que la similaridad o diferencia, afinidad o desaveniencia, sinergias positivas o negativas entre los elementos involucrados depende de más de un criterio. Haciendo un paralelismo con las secciones previas, a continuación se analiza la existencia de múltiples pares de relaciones de carácter contrapuesto, contemplando medidas que representan las sinergias o similaridades entre elementos, y otras que representan las diferencias o sinergias negativas (antagonismo) entre los mismos, lo que conduce al contexto de bipolaridad [75] introducido en la Sección 4.3.3. A partir de estas medidas que representan ciertas relaciones entre los distintos pares de vértices de un grafo, a continuación se propone la definición de un instrumento de modelado basado en la existencia de una familia de medidas borrosas bipolares definidas sobre los vértices de cierto grafo.

**Definición 5.3.4 (Grafo borroso extendido bipolar multi-dimensional [87]).** Sea  $G = (V, E)$  un grafo nítido. Sea la familia  $(\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r})$ , donde,  $\forall \ell \in \{1, \dots, s\}$ ,  $\mu^{b_\ell} : 2^V \times 2^V \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  es una medida borrosa bipolar definida en el conjunto de nodos  $V$ . La tupla  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r}))$  es un grafo borroso extendido bipolar multi-dimensional (MEFG bipolar).

**Ejemplo 5.3.4.** Aceptando la existencia de un grafo nítido que modela las conexiones directas entre individuos, se retoma el Ejemplo 4.4.3, en que se disponía de fuentes de información independientes a las conexiones entre elementos: se conoce la relación personal entre los elementos involucrados, de manera que hay pares de individuos entre los que existen relaciones de enemistad, (1 y 4; 6 y 8), y pares de individuos entre los que existen relaciones de amistad (1 y 2; 3 y 4; 5 y 6); también se conocen las relaciones

laborales, sabiendo que los pares de individuos 1 y 3, 2 y 4, 5 y 7, 6 y 7, tienen intereses laborales opuestos, mientras que los elementos 7 y 8 comparten intereses. Para modelar estas relaciones, se definen las medidas borrosas bipolares  $\mu^{b_1}$  y  $\mu^{b_2}$ . Así, considerando el MEFG bipolar  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \mu^{b_2}))$  se facilita la representación de la estructura que conecta a los 8 elementos involucrados, además de las distintas relaciones existentes entre ellos. Para una mejor visualización y manipulación de las respectivas medidas borrosas bipolares se propone el cálculo del correspondiente MAWG bipolar mediante sus adyacencias,  $(F^{-1}, F^{-2}, F^{+1}, F^{+2})$ .



$$\begin{aligned}
 F^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} &
 F^{+1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 F^{-2} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &
 F^{+2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 5.10: MEFG bipolar  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \mu^{b_2}))$ .

Una vez definidos los grafos borrosos extendidos uni-dimensionales y multi-dimensionales, cabe plantearse el desafío que supone la resolución de algunos problemas de SNA, considerando estas nuevas herramientas de modelado en sustitución de los grafos clásicos. Note la tremenda importancia relativa al modelado de una red de comunicaciones mediante una estructura que disponga de la mayor cantidad de información posible, independientemente de cuál sea su aplicación posterior. Esta memoria se ha centrado en la resolución de problemas de detección de comunidades sobre grafos borrosos extendidos múltiples o no. No obstante, estas herramientas podrían aplicarse en distintos temas como predicción de aristas, centralidad o propagación, entre otros.

## Capítulo 6

# Problemas de detección de comunidades basados en grafos borrosos extendidos

*Concierto para Violonchelo Mi menor,  
Op. 85*

E. Elgar

**RESUMEN:** En este capítulo se explora la resolución de problemas de detección de comunidades contemplando una peculiaridad: en vez de considerar un grafo en su concepción más clásica, se toma un grafo borroso extendido. De esta manera se pretende incorporar información adicional al conocimiento proporcionado por la estructura gráfica, de manera que las comunidades detectadas sean consistentes y lo más cohesivas posibles con la realidad modelada. Para acometer la búsqueda de grupos basados en la existencia de un grafo borroso extendido, se parte del popular algoritmo de Louvain, a partir del cual se desarrolla una metodología que permite incorporar al proceso de agrupamiento la información representada por una medida borrosa. En un contexto general, se sientan las bases del problema de detección de comunidades basado en la existencia de un grafo borroso extendido, proporcionando sendos métodos para su resolución. Esta forma de proceder se detalla para ciertas medidas borrosas concretas, particularmente las  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de un vector (introducidas en la Sección [4.3.1](#)), y las medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de una matriz (introducidas en la Sección [4.3.2](#)).

## 6.1. Algunas carencias del problema de detección de comunidades: posibles mejoras

En la literatura de redes sociales, muchos autores han valorado la necesidad de incorporar información adicional al proceso de manipulación y estudio de una red [96, 115, 119, 166, 172]. Esta información adicional añadiría una importante dosis de realismo al modelado de problemas. Con la Teoría de Juegos como base del conocimiento, se proponen diversas medidas de centralidad y cohesión, incorporando a la red la información proporcionada por un juego entre jugadores, enriqueciendo notablemente el modelo [47, 61, 62, 71, 72]. En otro contexto relativo a conjuntos y medidas borrosas, varios autores entre los que destacan J. Wu y F. Chiclana, han dedicado parte de su trabajo al análisis de redes sociales considerando grafos borrosos, como se puede comprobar en [59, 134, 191]. También son notables ciertas contribuciones en las que se propone la consideración de un conjunto borroso, *fuzzy set*, para enriquecer y potenciar el problema de detección de comunidades, entre muchos otros asuntos relativos a la temática SNA [49, 121].

La inmensa mayoría de los algoritmos y métodos existentes en la literatura de problemas de detección de comunidades en grafos o redes complejas asientan su base en la asunción de que el grafo es un objeto nítido. Los algoritmos clásicos basan la búsqueda de grupos de nodos en las conexiones entre elementos representadas por las aristas del grafo en cuestión [37, 63, 98, 124, 139]. Sin lugar a duda, las conexiones entre objetos, sean o no valoradas, deben ser el factor principal al identificar grupos en una red. No obstante, parece coherente aceptar la existencia de fuentes de información adicional ajenas a la estructura gráfica relativa a las conexiones. Con un proceso apropiado de modelado y análisis, la incorporación de cierto conocimiento extra al problema abordado enriquece su resolución; en el caso concreto que aquí se trata, para ampliar el concepto de grupo o comunidad, aportando información acerca de las relaciones y sinergias entre los entes a agrupar. Note que el análisis de información adicional es enriquecedor en cualquier otro problema de SNA, no sólo en el de detección de comunidades.

Las diversas vertientes consideradas para enriquecer un modelo conforman una filosofía a partir de la cual, en este capítulo, se considera la posibilidad de dar un paso más con respecto a los grafos borrosos. En el Capítulo 5 se discuten algunas de las carencias de los grafos convencionales y los grafos borrosos a la hora de representar problemas de una forma lo más realista posible. El talón de Aquiles de los grafos borrosos en su forma convencional es que dos nodos que no son adyacentes en el correspondiente grafo nítido, no pueden tener ningún grado de relación en el conjunto borroso de aristas. Como posible solución para hacer frente a estas limitaciones, en el capítulo

anterior se ha introducido la noción de grafo borroso extendido, proponiendo diversas alternativas en su caracterización que facilitan el modelado de una amplia gama de situaciones.

Unificando la teoría de grafos con el marco de medidas borrosas mediante la consideración de grafos borrosos extendidos, y en el contexto de problemas de detección de comunidades, a continuación se propone una aplicación específica del EFG a través de la cual se trabaja en la búsqueda de particiones del conjunto de nodos lo más coherentes posible con la realidad modelada [12, 84, 86, 88, 89]. Dado un grafo  $G = (V, E)$  y una medida borrosa  $\mu$  definida sobre el conjunto de nodos, en las siguientes páginas de este capítulo se incorpora el uso del EFG  $\tilde{G} = (V, E, \mu)$  al problema de detección de comunidades. Para ello se toma como método de referencia el popular algoritmo de Louvain [18], a partir del cual se proponen diversas vías para encontrar grupos basados en la existencia de un grafo borroso extendido.

## 6.2. Detección de comunidades con información adicional

En esta sección se plantea, en un contexto muy genérico, un método de detección de comunidades en el que se puede considerar información externa al grafo. Para ello, se desarrolla un procedimiento cuyo punto de partida es el algoritmo de Louvain [18].

Para hacer realidad la idea de analizar y considerar información adicional en la definición de comunidades, es fundamental adoptar una visión alternativa del método de Louvain, distinguiendo dos tipos de fuentes de información, que serán dos matrices en este caso. Por una parte, la aportada por la estructura de la red, imprescindible para la definición de comunidades ‘factibles’ por medio de la matriz  $A$ . Por otra parte, se cuenta con cierta información adicional que dotará de cohesión a los grupos definidos, representada por la matriz  $F$ . El cálculo del valor óptimo de la modularidad dependerá de cierta combinación de sendas fuentes de información. Parece obvio afirmar que la especificación de dicha combinación ha de estar íntimamente ligada al problema abordado. La idea es calcular la variación de la modularidad sobre la matriz  $M = \theta(A, F)$ , resultante de una combinación de la información estructural aportada por la matriz de adyacencia  $A$ , y la información adicional definida por la matriz  $F$ , siendo  $\theta : \Pi(n)^2 \rightarrow \Pi(n)$  un operador matricial basado en la agregación elemento a elemento.

Es esencial tener en cuenta que los grupos han de ser conexos, por lo que, para encontrar grupos en el grafo nítido  $G = (V, E)$ , no es factible aplicar métodos como el de Louvain tomando como parámetro de entrada la matriz

agregada  $M$ , ya que esto podría proporcionar grupos no conexos en  $G$ . Por ello, en el método propuesto las relaciones de vecindad se analizan únicamente en la matriz  $A$ . La base sobre la que se calcula el máximo de modularidad depende de los intereses del problema. En la propuesta que se plantea se contempla la posibilidad de utilizar cualquier matriz  $M$  para este cálculo. Esta propuesta se resume en los siguientes puntos:

1. Establecer relaciones de vecindad tomando la información de  $A$ .
2. Calcular en  $M$  la variación de modularidad obtenida al mover un nodo de su comunidad a la de alguno de sus vecinos.

Esta visión alternativa del grueso del algoritmo de Louvain con doble parámetro de entrada es llamada *Additional Louvain* y su pseudocódigo se presenta en el Algoritmo [4](#). Siendo  $\Delta Q_{o^i}(e_j)$  la variación de modularidad que se obtendría al mover el nodo  $o^i$  de su comunidad a la comunidad a la que pertenece su vecino  $e_j$ , la parte central del nuevo método se define así:

1. Inicialmente, cada nodo define por sí mismo una comunidad.
2. Se toma una permutación de  $V$ ,  $o = (o^1, \dots, o^n) \in \pi(V)$ .
3. Para cada  $o^i \in V$ , y para todos los vecinos de  $o^i$  en  $o$  (nodos adyacentes a  $o^i$  en la ordenación  $o$ ),  $H(o^i) = (e_1, \dots, e_h)$ , se calcula en  $M$  la variación de modularidad  $\Delta Q_{o^i}(e_j)$ , siendo  $j^*$  el nodo vecino para el que este valor es máximo.

Si  $\Delta Q_{o^i}(j^*) > 0$ , el nodo  $o^i$  se mueve a  $C_{j^*}$ , la comunidad a la que pertenece  $j^*$ . En otro caso,  $o^i$  permanece en  $C_{o^i}$ .

Este proceso se aplica de manera secuencial y repetida en todos los nodos de  $V$ , tomándolos aleatoriamente. Esta aleatoriedad implica que un nodo pueda ser analizado varias veces. El resultado obtenido es  $P$ , una partición del conjunto de nodos en distintas comunidades.

Como se puede observar, la filosofía propuesta no dista demasiado de la del algoritmo de Louvain. De hecho, si se considerara  $M = A$ , al algoritmo *Additional Louvain* no es más que la parte central de la Fase 1 del algoritmo de Louvain, en la que, para cada nodo y sus vecinos, se aplica la heurística de movimiento local basado en la optimización de la modularidad [\[11, 129, 164, 168, 186, 200\]](#).

**Algoritmo 4** *Additional Louvain*


---

```

1: Input:  $(A, M)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3:  $C_i \leftarrow \{i\}, \forall i \in V$  (cada nodo  $i$  es una comunidad aislada);
4:  $P \leftarrow (1, 2, \dots, n)$  (partición inicial);
5: Tomar  $o = (o^1, \dots, o^i, \dots, o^n) \in \pi(V)$ ;
6:  $stop \leftarrow 0$ ;
7: while ( $stop == 0$ ) do
8:    $stop \leftarrow 1$ 
9:   for ( $i = 1$ ) to ( $n$ ) do
10:     $(e_1, \dots, e_h) \leftarrow H(o^i)$  (encontrar los vecinos de  $o^i$  en  $A$ );
11:    for ( $j = 1$ ) to ( $h$ ) do
12:     Calcular  $\Delta Q_{o^i}(e_j)$  en  $M$ ;
13:    end for
14:     $j^* \leftarrow \left\{ e_\ell \mid \Delta Q_{o^i}(j^*) = \max_{\ell \in \{1, \dots, h\}} \{ \Delta Q_{o^i}(e_\ell) \} \right\}$ ;
15:    if ( $\Delta Q_{o^i}(j^*) > 0$ ) then
16:      $C_{P(o^i)} \leftarrow C_{P(o^i)} \setminus \{o^i\}$ ;
17:      $C_{P(j^*)} \leftarrow C_{P(j^*)} \cup \{o^i\}$ ;
18:      $P(o^i) \leftarrow P(j^*)$ ;
19:      $stop \leftarrow 0$ ;
20:    end if
21:  end for
22: end while
23: return( $P$ );

```

---

Una vez detallada la parte principal del algoritmo en la que tiene lugar el movimiento local entre comunidades de los diversos nodos, se plantea un método completo de detección de comunidades que contempla la existencia de dos matrices, la adyacencia  $A$ , y otra que resume la información relevante para la definición de los grupos,  $M$ . Se trata de un método iterativo y recursivo, llamado *Duo Louvain*, que proporciona una partición del conjunto de nodos  $P$ . Su estructura se define en el Algoritmo [5](#).

---

**Algoritmo 5** *Duo Louvain*

---

```

1: Input:  $(A, M)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3:  $P_1 \leftarrow \{\{1, \dots, n\}\}$  (partición con una única comunidad que contiene a
    todos los vértices);
4:  $P_2 \leftarrow \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$  (partición de  $V$  tal que  $\forall i \in V$ ,  $i$  es una
    comunidad aislada en  $P_2$ );
5:  $A_1 \leftarrow A$ ,  $A_2 \leftarrow A$ ,  $M_1 \leftarrow M$ ,  $M_2 \leftarrow M$ ;
6: while  $(P_1 \neq P_2)$  do
7:    $P_1 \leftarrow P_2$ ;
8:    $P_2 \leftarrow \text{Additional Louvain}(A_2, M_2)$ ;
9:   Obtener  $A_2$  a partir de  $A_1$  (los nodos de  $A_2$  son las comunidades de
      $P_2$  encontradas previamente);
10:  Obtener  $M_2$  a partir de  $M_1$  (los nodos de  $M_2$  son las comunidades de
      $P_2$  encontradas previamente);
11:   $A_1 \leftarrow A_2$ ,  $M_1 \leftarrow M_2$ ;
12: end while
13:  $P \leftarrow P_2$ ;
14: return $(P)$ ;
    
```

---

Es trivial probar la similitud de este método con el algoritmo de Louvain. Basta con considerar  $M = A$ , en cuyo caso el algoritmo *Duo Louvain* será idéntico al algoritmo de Louvain aplicado sobre la matriz  $A$  (asumiendo que la permutación de nodos escogida es la misma). En el Algoritmo [6](#) se propone una estructura alternativa en la definición del método *Duo Louvain*, que evidencia aún más su similitud con el algoritmo de Louvain.

Note que la matriz  $M$  puede o no estar relacionada con medidas borrosas. El método aquí propuesto puede ser útil para abordar situaciones en que existe una matriz  $F$  independiente al grafo, cuya combinación con  $A$  proporciona  $M$ ; o directamente, a la existencia de la matriz  $M$ . Así, su ámbito de aplicación facilita la detección de comunidades en problemas en los que se disponga de una matriz adicional (o no) a la adyacencia. En la siguiente sección se trata el problema en que la naturaleza de esta matriz está vinculada a un grafo borroso extendido.

**Algoritmo 6** *Duo Louvain BIS*


---

```

1: Input:  $(A, M)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3: Preliminary
4:  $C_i \leftarrow \{i\}, \forall i \in V$  (cada nodo  $i$  es una comunidad aislada);
5:  $P \leftarrow (1, 2, \dots, n)$  (partición inicial);
6: end Preliminary
7: Phase 1
8: Tomar  $o = (o^1, \dots, o^i, \dots, o^n) \in \pi(V)$ ;
9:  $stop \leftarrow 0$ ;
10: while ( $stop == 0$ ) do
11:    $stop \leftarrow 1$ 
12:   for ( $i = 1$ ) to ( $n$ ) do
13:      $(e_1, \dots, e_h) \leftarrow H(o^i)$  (encontrar los vecinos de  $o^i$  en  $A$ );
14:     for ( $j = 1$ ) to ( $h$ ) do
15:       Calcular  $\Delta Q_{o^i}(e_j)$  en  $M$ ;
16:     end for
17:      $j^* \leftarrow \left\{ e_\ell \mid \Delta Q_{o^i}(j^*) = \max_{\ell \in \{1, \dots, h\}} \{ \Delta Q_{o^i}(e_\ell) \} \right\}$ ;
18:     if ( $\Delta Q_{o^i}(j^*) > 0$ ) then
19:        $C_{P(o^i)} \leftarrow C_{P(o^i)} \setminus \{o^i\}$ ;
20:        $C_{P(j^*)} \leftarrow C_{P(j^*)} \cup \{o^i\}$ ;
21:        $P(o^i) \leftarrow P(j^*)$ ;
22:        $stop \leftarrow 0$ ;
23:     end if
24:   end for
25: end while
26: end Phase 1
27: Phase 2
28: Obtener  $A^*$  a partir  $A$  (los nodos de  $A^*$  son las comunidades encontradas
    previamente);
29: Obtener  $M^*$  a partir de  $M$  (los nodos de  $M^*$  son las comunidades de  $M$ 
    encontradas previamente);
30: if ( $A^* \neq A$ ) then
31:    $A \leftarrow A^*$ ;
32:    $M \leftarrow M^*$ ;
33:   Ejecutar Phase 1 y Phase 2;
34: end if
35: end Phase 2
36: return( $P$ );

```

---

### 6.3. Redes con información adicional: detección de comunidades basada en medidas borrosas

Siguiendo la filosofía acerca del doble parámetro de entrada propuesta en el algoritmo *Duo Louvain* y en el marco de las medidas borrosas, se plantea un método de agrupación cuya base es un grafo borroso extendido. En esta variación del problema de detección de comunidades se procede a una agregación de la información proporcionada por una medida borrosa  $\mu$  con la información definida por el grafo nítido sobre las conexiones directas entre nodos. Se pretende encontrar grupos cuyos nodos estén conectados entre sí, y además presenten fuertes sinergias en  $\mu$ . Asumiendo la existencia del grafo borroso extendido  $\tilde{G} = (V, E, \mu)$ , los dos puntos fundamentales del método de detección de comunidades basadas en medidas borrosas son el cálculo del grafo asociado a  $\mu$ ,  $G_\mu$ , el cual se manipulará mediante su matriz de adyacencia  $F$ ; y la aplicación del método *Duo Louvain*, considerando la adyacencia de  $G$ ,  $A$ , y la matriz  $M = \theta(A, F)$ . Este método basado en medidas borrosas es llamado *Extended Louvain*; su estructura se muestra en el Algoritmo 7.

1. Definir  $G_\mu$ , el grafo asociado a la medida borrosa  $\mu$ . Para el cálculo de su matriz de adyacencia  $F$  se puede aplicar indistintamente el valor de Shapley o el índice de interacción.
2. Obtener la matriz  $M$  sobre la que se efectúa el cálculo de la variación de la modularidad en que se basa la heurística del movimiento local de nodos.  $F$  será el resultado de una combinación obtenida mediante  $\theta : \Pi^2 \rightarrow \Pi$  de las dos fuentes de información que conforman un grafo borroso extendido, la estructural,  $A$ , y la relativa a sinergias,  $F$ .
3. Aplicar el método *Duo Louvain* considerando las matrices  $A$  y  $M$ .

---

**Algoritmo 7** *Extended Louvain*

---

- 1: **Input:**  $(A, \mu_R)$ ;
  - 2: **Output:**  $P$ ;
  - 3:  $F$  es la adyacencia de  $G_\mu$ , el grafo asociado a  $\mu$ ;
  - 4:  $M \leftarrow \theta(A, F)$ ;
  - 5:  $P \leftarrow \text{Duo Louvain}(A, M)$ ;
  - 6: **return** $(P)$  ;
- 

Como se ha mencionado, el cálculo de la matriz  $F$  relativa a la medida borrosa  $\mu$  se puede llevar a cabo por cualquiera de las vías presentadas en el Capítulo 4, bien sea el valor de Shapley (ver Definición 4.2.1), o bien sea el índice de interacción (ver Definición 4.2.2). Esta disyunción de posibilidades facilita un mayor ajuste en la definición de grupos al contexto del problema

abordado. En las secciones que siguen se trabajarán casos muy concretos, prestando especial atención al cálculo de  $F$  mediante el valor de Shapley, particularmente para medidas borrosas en que dicho cómputo no implica un aumento de la complejidad algorítmica del método propuesto.

### 6.3.1. Comunidades basadas en un grafo borroso extendido de vector

Sea  $G = (V, E)$  un grafo, y sea  $x$  un  $n$ -vector definiendo alguna evidencia acerca de los vértices de  $G$ . Construida la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno  $\mu_x$  relativa al vector  $x$  (caracterizada en la Definición 4.3.3), en esta sección se trabaja con el grafo borroso extendido de vector  $\tilde{G} = (V, E, \mu_x)$  detallando una forma de analizar y aplicar las evidencias descritas por un vector al proceso de detección de comunidades.

Para facilitar la visualización y uso de  $\mu_x$ , se propone la obtención del AWG correspondiente mediante el valor de Shapley. Como se explica en el Capítulo 4,  $G_{\mu_x}$  representa para cada par de elementos cómo le afecta a cada ente la ausencia del otro en una coalición, atendiendo a la evidencia aportada por  $x$ , que podría interpretarse como una representación de una escala de Likert, o un ranking. Se presentan dos ejemplos ilustrativos del problema de detección de comunidades basado en un EFG de vector  $\tilde{G} = (V, E, \mu_x)$ .

**Ejemplo 6.3.1.** Se considera un grupo de críticos cinematográficos, acerca de los cuales se conoce la valoración que han otorgado a una película en concreto, definida por una puntuación de 1 a 10. Se establece una estructura de conexiones entre los críticos, atendiendo a sus interacciones en un foro cinéfilo. Esta estructura puede ser fácilmente modelada por un grafo  $G = (V, E)$  cuyos nodos representen a los críticos, y cada arista de  $E$  represente una conexión entre dos personas. Note que una interacción en un foro no tiene por qué ser de carácter positivo. De hecho, es natural encontrar interacciones en la que dos personas muestren ideas contrapuestas. Sin embargo, si se consideran las valoraciones mencionadas previamente, representadas por un vector  $X$  cuya componente  $i$ -ésima es la valoración del crítico  $i$ , se puede asumir que aquellos críticos que hayan dado puntuaciones similares tienen algo en común: una opinión similar sobre una película. Estas similitudes puede generar sinergias entre ellos, que podrían modelarse mediante la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno  $\mu_x$  obtenida a partir de  $x$ . Así, el EFG de vector  $\tilde{G} = (V, E, \mu_x)$  proporciona un modelado mucho más rico que  $G = (V, E)$ , con lo que las particiones encontradas en  $\tilde{G}$  se ajustan mejor a la realidad.

**Ejemplo 6.3.2.** Se considera el conjunto  $V$ , cuyos elementos representan a los usuarios de una determinada aplicación web, conectados atendiendo a sus interacciones en la misma. Se conoce el gusto por una determinada actividad de estas personas, representado mediante sus valoraciones individuales en

una escala numérica. Si se considera un grafo  $G$  cuyo conjunto de vértices  $V$  representa a los usuarios, y en el que existe una arista entre dos nodos si interactúan en la aplicación web, la detección de comunidades en  $G = (V, E)$  proporcionará grupos de personas que interactúan entre sí. Sin embargo, esta consideración no incluye sus gustos sobre la realización de una actividad. Para poder analizar esta información, se considera el vector de valoraciones  $x$ , siendo  $x_i$  la valoración del usuario  $i$ . La  $\lambda$ -medida borrosa  $\mu_x$  obtenida a partir de  $x$  representa la capacidad de los conjuntos de usuarios que tienen gustos similares por la actividad considerada. La detección de comunidades en el EFG de vector  $\tilde{G} = (V, E, \mu_x)$  proporciona grupos de personas que interactúan entre sí y con gustos similares por la realización de una actividad.

Para lidiar con problemas como este, se parte de la visión alternativa del algoritmo de Louvain previa que facilita la diferenciación de varias fuentes de información a la hora de establecer una partición del conjunto de nodos. Para encarar el caso particular en el que la información adicional está descrita por un vector, se propone el algoritmo *Sugeno Louvain*.

Tras el cálculo de  $\mu_x$ , una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno asociada al vector  $x$ , el primer paso de este método es la definición del AWG de  $\mu_x$ , cuya matriz de adyacencia es  $X$  (caracterizada en la ecuación (4.3.7)). Como sucede con el algoritmo de Louvain, el resultado proporcionado por el algoritmo *Sugeno-Louvain* depende de  $o \in \pi(V)$ , la permutación de los elementos de  $V$  considerada para su ejecución. El algoritmo *Sugeno Louvain* puede entenderse como un caso específico del método *Extended Louvain*. La estructura completa del algoritmo *Sugeno Louvain* se ilustra mediante su pseudocódigo en el Algoritmo 8, donde  $\theta : \Pi^2 \rightarrow \Pi$  es una función de agregación [162, 198] usada para combinar dos matrices en una.

---

**Algoritmo 8** *Sugeno Louvain*

---

- 1: **Input:**  $(A, x)$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
  - 2: **Output:**  $P$ ;
  - 3: **Preliminary**
  - 4: Calcular  $\mu_x$  (la medida borrosa relativa al vector  $x$ );
  - 5:  $X_{ij} \leftarrow \phi \left( Sh_i(\mu_x) - Sh_i^j(\mu_x), Sh_j(\mu_x) - Sh_j^i(\mu_x) \right), \forall i, j \in V$ ;
  - 6:  $M \leftarrow \theta(A, X)$ ;
  - 7: **end Preliminary**
  - 8:  $P \leftarrow Duo\ Louvain(A, M)$ ;
  - 9: **return**( $P$ );
- 

Para evitar la complejidad relativa al cálculo del valor de Shapley correspondiente a  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno, se propone el uso de medidas borrosas aditivas. Particularmente, la medida introducida en la Definición

**4.3.3**, para el caso concreto en que  $p = 1$ , esto es, la medida  $\mu_x^a$ . De acuerdo con las premisas recogidas en las Proposiciones **4.3.8** y **4.3.9**, la medida  $\mu_x^a$  tiene las siguientes propiedades:  $Sh_i(\mu_x^a) = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k}$  y  $Sh_i^j(\mu_x^a) = \frac{x_i}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k}$ .

Considerando este tipo de medidas borrosas aditivas, se presenta una aplicación específica del algoritmo *Sugeno Louvain*, el algoritmo *Sugeno Louvain 1-aditivo*. En esta especificación, el cálculo de la medida borrosa correspondiente se limita a la definición de la matriz  $X$ , cuyo cómputo es inmediato para este tipo de medidas. Así, la complejidad del algoritmo *Sugeno Louvain 1-aditivo* es idéntica a la del Algoritmo de Louvain. Note que, pese a que en el método propuesto se ha fijado  $\phi = \text{mín}$  en el proceso de definición de la matriz  $X$ , cualquier otro operador de agregación podría ser considerado.

---

**Algoritmo 9** *Sugeno Louvain 1 – aditivo*

---

- 1: **Input:**  $(A, x)$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
  - 2: **Output:**  $P$ ;
  - 3: **Preliminary**
  - 4:  $X_{ij} \leftarrow \text{mín}\left\{\left|\frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} - \frac{x_i}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k}\right|, \left|\frac{x_j}{\sum_{k=1}^n x_k} - \frac{x_j}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k}\right|\right\}, \forall i, j \in V$ ;
  - 5:  $M \leftarrow \theta(A, X)$ ;
  - 6: **end Preliminary**
  - 7:  $P \leftarrow \text{Duo Louvain}(A, M)$ ;
  - 8: **return**( $P$ );
- 

Sirvan los siguientes ejemplos para ilustrar la consideración de la información adicional proporcionada por un vector para la definición de comunidades, esto es, la aplicación del algoritmo *Sugeno Louvain 1 – aditivo*.

**Ejemplo 6.3.3.** Se considera el grafo  $G = (V, E)$  representado en la Figura **6.1**, y el vector  $x = (10, 10, 0, 0, 9, 9, 8, 8)$  que define cierta evidencia acerca de los elementos de  $V$ . Se considera  $\mu_x^a$ , la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida de acuerdo a las premisas enunciadas en la Proposición **4.3.3** cuando  $p = 1$ .  $G_{\mu_x^a}$  es el AWG de  $\mu_x^a$ , cuya matriz de adyacencia es  $X$ , (Figura **6.2**), siendo  $X_{ij} = \phi \left( Sh_i(\mu_x^a) - Sh_i^j(\mu_x^a), Sh_j(\mu_x^a) - Sh_j^i(\mu_x^a) \right) = \text{mín}\left\{\left|\frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} - \frac{x_i}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k}\right|, \left|\frac{x_j}{\sum_{k=1}^n x_k} - \frac{x_j}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k}\right|\right\}$ .

Atendiendo a la estructura de  $G$ , cualquier algoritmo de detección de comunidades basado en la optimización de la modularidad proporciona la partición  $P = \{\{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\}\}$ . No obstante, la partición que mejor se ajusta a la información aportada por  $x$  es  $P^x = \{\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{3, 4\}\}$ , ya que en este caso, los elementos para los que  $x$  define un valor alto están en el mismo grupo,  $\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ , y aquellos con un valor asociado bajo están también agrupados,  $\{3, 4\}$ . Esta solución es la proporcionada para cierta aplicación del algoritmo *Sugeno Louvain 1-aditivo*, utilizando la matriz  $X$ .

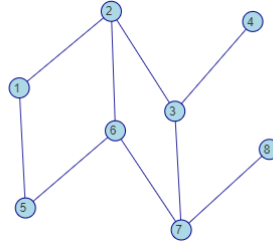


Figura 6.1: Grafo  $G = (V, E)$ .

$$X = \frac{1}{10000} \begin{pmatrix} 0 & 421 & 0 & 0 & 370 & 370 & 322 & 322 \\ 421 & 0 & 0 & 0 & 370 & 370 & 322 & 322 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 370 & 370 & 0 & 0 & 0 & 333 & 290 & 290 \\ 370 & 370 & 0 & 0 & 333 & 0 & 290 & 290 \\ 322 & 322 & 0 & 0 & 290 & 290 & 0 & 258 \\ 322 & 322 & 0 & 0 & 290 & 290 & 258 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 6.2: Matriz  $X$ .

En la Figura 6.2 se puede apreciar que los valores más altos se corresponden con los nodos que tienen un valor alto en  $x$ . En la Tabla 6.1 se presenta la comparación de los resultados proporcionados por el algoritmo *Sugeno Louvain 1-aditivo* y el de Louvain, considerando una combinación lineal de las matrices  $X$  y  $A$  mediante un parámetro de importancia  $\gamma \in [0, 1]$ , i.e.  $M = \theta(A, X) = \gamma A + (1 - \gamma) X$ , siendo  $A$  la adyacencia de  $G$ . Note que la modularidad agregada relativa al algoritmo *Sugeno Louvain 1-aditivo* es superior a la de Louvain.

Tabla 6.1: Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos *Sugeno Louvain 1-aditivo* y de Louvain para distintos valores de  $\gamma$ .

$\gamma$	Algoritmo <i>Sugeno Louvain 1-aditivo</i>				Algoritmo de Louvain			
	$Q_A$	$Q_X$	$\gamma Q_A + (1 - \gamma) Q_X$	Partición	$Q_A$	$Q_X$	$\gamma Q_A + (1 - \alpha) Q_X$	Partición
1	0.2716	-0.0755	0.2716	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}	0.2716	-0.0755	0.2716	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}
0.9	0.2716	-0.0755	0.2369	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}	0.2716	-0.0755	0.2369	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}
0.7	0.2716	-0.0755	0.1675	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}	0.2716	-0.0755	0.1675	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}
0.5	0.2716	-0.0755	0.0981	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}	0.2716	-0.0755	0.0981	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}
0.3	0.1235	0	0.0371	{{1, 2, 5, 6, 7, 8}, {3, 4}}	0.2716	-0.0755	0.0286	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}
0.1	0.1235	0	0.0124	{{1, 2, 5, 6, 7, 8}, {3, 4}}	0.2716	-0.0755	-0.0408	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}
0	0.1235	0	0	{{1, 2, 5, 6, 7, 8}, {3, 4}}	0.2716	-0.0755	-0.0755	{{1, 2, 5, 6}, {3, 4, 7, 8}}

**Ejemplo 6.3.4.** Entre los años 1994 y 2001, un grupo de investigadores de la Universidad de Otago lideró un estudio acerca del comportamiento de una población de delfines de la especie nariz de botella hallada cerca de Doubtful Sound, un fiordo de Nueva Zelanda. Tras la observación y análisis del comportamiento de estos animales, D. Lusseau et al. llegaron a la conclusión de que estos animales viven en grandes comunidades mixtas formadas por

individuos de diferentes edades que interactúan entre sí [92]. Este caso tan representativo del comportamiento animal ha servido para ilustrar uno de los ejemplos más populares en la literatura de redes sociales. La red de delfines [1] es uno de los prototipos de redes sociales más analizados en los últimos años, usado como modelo de referencia en infinidad de métodos. Se trata de un grafo no dirigido que consta de 62 nodos y 159 aristas. Cada nodo representa un delfín, de modo que una arista entre dos nodos simboliza la existencia de una relación entre los delfines correspondientes. Se puede considerar que este grafo lleva intrínseca una estructura de grupos, mostrada en la Figura 6.3] obtenida mediante la aplicación del algoritmo de Louvain. Esta partición consta de 5 grupos,  $C_1, \dots, C_5$  que incluyen los siguientes vértices:

- $C_1 = \{2, 6, 7, 10, 14, 18, 23, 26, 27, 28, 32, 33, 42, 49, 55, 57, 58, 61\}$ ;
- $C_2 = \{1, 3, 8, 11, 20, 31, 43, 48\}$ ;
- $C_3 = \{13, 15, 17, 34, 35, 38, 39, 41, 44, 45, 47, 50, 51, 53, 54, 59, 62\}$ ;
- $C_4 = \{5, 12, 16, 19, 22, 24, 26, 30, 36, 46, 52, 56\}$ ;
- $C_5 = \{4, 9, 21, 29, 37, 40, 60\}$ .

Como se ha explicado previamente, esta partición en comunidades es intrínseca a la estructura de esta red de delfines. Ahora bien, ¿qué sucedería en el caso de disponer de cierta información adicional, independiente a la disposición de los nodos y aristas. Por ejemplo, se considera el vector  $x$ , y se asume que define cierta evidencia acerca de los distintos delfines de la red, de modo que  $x_2 = x_8 = x_{24} = x_{37} = x_{41} = 1$ , y  $x_i = 0$  en otro caso.

Si se aplica el algoritmo *Sugeno Louvain 1 – aditivo* considerando  $x$ , la partición obtenida consta de 4 *clústers*,  $C_1^x, \dots, C_4^x$ , representados en la Figura 6.4. La presencia de  $x$  provoca que los nodos cuyo valor en dicho vector sea 1, cada uno de los cuales estaba antes en un grupo distinto, tiendan a permanecer en el mismo grupo, lo cual desencadena una serie de cambios en la estructura general de grupos en que está organizado el resto de vértices.

Asumiendo que la información aportada por  $x$  debe ser utilizada a la hora de definir grupos coherentes, y considerando este vector y la matriz de adyacencia del grafo original como parámetros de entrada del algoritmo *Sugeno Louvain 1-aditivo*, la partición obtenida es la siguiente:

- $C_1^x = C_1 \setminus \{2, 26, 27, 28\}$ ;
- $C_2^x = C_2 \cup \{2, 24, 26, 27, 28, 29, 37, 40, 41\}$ ;
- $C_3^x = (C_3 \setminus \{41\}) \cup \{21\}$ ;
- $C_4^x = (C_4 \setminus \{24\}) \cup \{4, 9, 60\}$ .

Note que en esta partición, todos los nodos con valor 1 en el vector  $x$  pertenecen al grupo  $C_2$ .

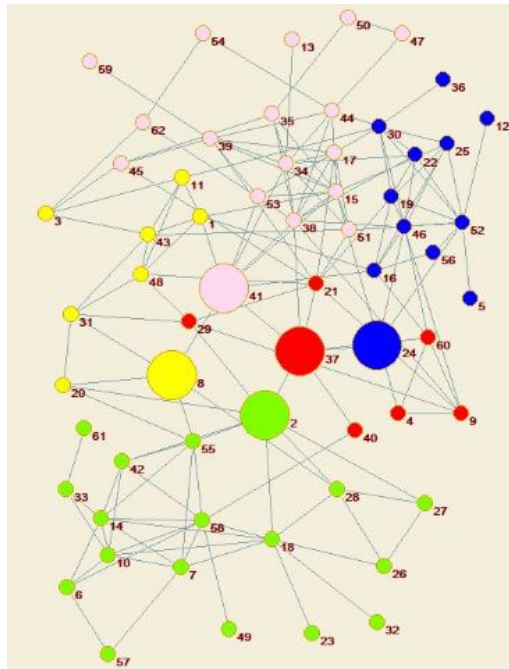


Figura 6.3: Partición obtenida en la red de delfines con la aplicación del Algoritmo de Louvain.

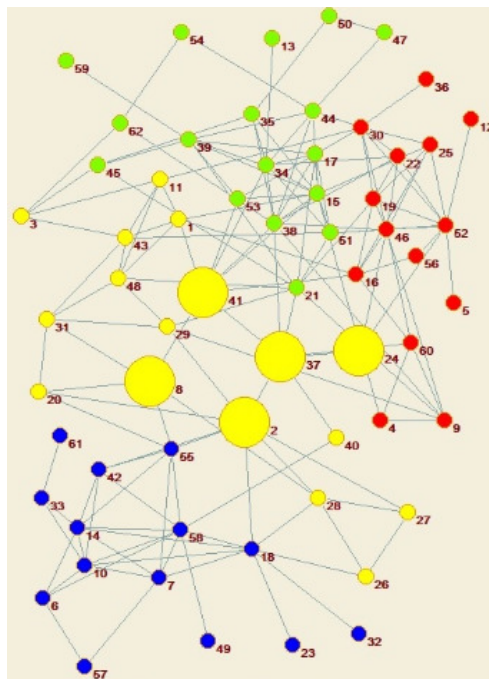


Figura 6.4: Partición obtenida en la red de delfines con la aplicación del Algoritmo *Sugeno Louvain 1-aditivo*.

### 6.3.2. Comunidades basadas en un grafo borroso extendido de matriz

En esta sección se trabaja con medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de una matriz. En combinación con un grafo, estas medidas borrosas relativas a relaciones de afinidad entre elementos, darán paso a los llamados grafos borrosos extendidos de matriz,  $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$ .

En la Sección [6.3.1](#) se presenta una posible modificación de la noción clásica del problema de detección de comunidades en la que se propone la inclusión de una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir de un vector. Si bien esta propuesta mejora de manera notable la cohesión de los grupos con respecto a los obtenidos mediante metodologías clásicas basadas en medidas estructurales, el margen de modelado abarcado por esta técnica se limita a la información individualizada de cada vértice definida por el vector, además de a la estructura de conexiones. Es innegable la existencia de innumerables criterios para definir un objeto que quedan fuera del ámbito abarcable por este modelo, y que también resultan enriquecedores para la representación de un problema real. Un ejemplo muy concreto es acerca de las posibles relaciones entre individuos. Si bien las aristas de un grafo definen la existencia o no de una conexión entre dos entes, posibilitando incluso la graduación de dicha conexión mediante el uso de aristas valoradas, se pretende concebir el concepto ‘relación’ como una idea mucho más amplia que esta. Atendiendo a la definición de ‘relación’ incluida en la RAE, *conexión, correspondencia, trato, comunicación de alguien/algo con otra persona/cosa*, se sugiere entender por relación entre elementos cualquier tipo de interacción, correspondencia, nexo, vínculo, similitud o sinergia entre pares de elementos, aceptando la posibilidad de que exista alguna relación entre elementos no conectados estructuralmente. Sirvan los siguientes ejemplos para ilustrar esta situación.

**Ejemplo 6.3.5.** Twitter es una de las redes sociales más en boga de la actualidad. Para su explotación, se suele modelar mediante un grafo, representando los distintos perfiles de usuario con un conjunto de vértices o nodos, y definiendo una arista entre dos nodos si los perfiles respectivos ‘se siguen’ mutuamente, o si comparten el mismo contenido o si se mencionan, por ejemplo. En el primer escenario, esta representación podría afinarse mediante el uso de un grafo dirigido, de manera que una arista del vértice  $i$  al vértice  $j$  indicaría que el usuario  $i$  sigue el perfil del usuario  $j$ . Este modelado de la red social facilita un adecuado análisis y explotación de la misma. No obstante, es evidente que la riqueza informativa de Twitter va mucho más allá de las conexiones entre perfiles. A la hora de definir una estructura de grupos de usuarios, parece adecuado llevar a cabo un análisis acerca de posibles sinergias entre los mismos, bien sea de índole político, comercial o personal, por ejemplo, extraídas de la información subyacente a cada post. Estas sinergias no necesariamente han de estar correladas con la existencia de una arista en el grafo. Sólo por mencionar un caso concreto, es incuestionable la existencia

de personas que se mueven por esferas políticas similares sin estar relacionadas en esta red social, pese a la evidente sinergia existente entre ambas. En el Capítulo 9 se presenta un experimento desarrollado en una base de datos obtenida de Twitter, añadiendo información adicional a la red de retweets.

**Ejemplo 6.3.6.** Para modelar cierta situación política, se define una red social cuyos nodos representan a los dirigentes de una serie de partidos políticos, estableciendo que existe una arista entre dos nodos si las personas representadas pertenecen al mismo partido político. Es evidente que los grupos detectados en una partición de elementos coincidirán con los distintos partidos políticos, pues la estructura del grafo ha sido definida para que así sea. No obstante, la existencia de ciertas sinergias entre dirigentes de distintos grupos es incuestionable, sinergias necesarias en el momento de formar un gobierno de coalición, por ejemplo. Atendiendo a la definición clásica de grafo, no es posible la representación de sinergias entre políticos de distintos partidos, puesto que no existirá una arista que los una. Por ello, se propone un enriquecimiento de la representación matemática de un problema con estas características a través de la inclusión de una medida borrosa que facilite la manipulación, modelado y análisis de la información adicional existente, definida en este caso por las sinergias entre diversos políticos.

**Ejemplo 6.3.7.** Se pretende agrupar a los alumnos de cierta Universidad, intentando formar grupos homogéneos internamente y diferentes entre sí. Se asume que existe una conexión entre dos alumnos si cursan alguna asignatura común. Una forma de resolver este problema de agrupamiento es mediante la aplicación de un algoritmo de detección de comunidades sobre un grafo cuyo conjunto de nodos representa a los alumnos de la Universidad en cuestión, y en el que existirá una arista entre dos vértices si los alumnos correspondientes cursan alguna asignatura común. Esta es sin duda una valiosa fuente de información que aportará una partición de grupos de alumnos muy acertada. No obstante, es incuestionable que la capacidad de modelado de un grafo nítido es muy limitada a la hora de representar la infinidad de sinergias y relaciones existentes entre alumnos, independientemente de las materias cursadas. Para enriquecer el modelado de una situación real de estas características, se propone considerar la utilización de una medida borrosa con la que representar, por ejemplo, el grado de amistad entre pares de alumnos.

Atendiendo a la cuarta acepción de la palabra ‘relación’ propuesta por la RAE, *trato de carácter amoroso*, en lo que resta de sección se consideran relaciones de cierta naturaleza ‘afectiva’, o, entendido más prácticamente, relaciones positivas. Se sobreentiende que aquellos elementos entre los que haya fuertes relaciones, serán propensos a permanecer en el mismo grupo, siempre y cuando las características estructurales del grafo lo permitan.

Con el fin de proporcionar una metodología que facilite la acometida de problemas de SNA en situaciones de gran complejidad, se propone una nueva forma de abordar la resolución de problemas de detección de comunidades en la que se incluye el uso de medidas borrosas de afinidad. En esta sección se analiza el problema de detección de comunidades cuando la información disponible se modela a través de un grafo nítido y una medida borrosa de afinidad definida sobre el conjunto de nodos, un EFG de matriz o de afinidad.

Este método de agrupamiento se inspira en el algoritmo *Duo Louvain*. En esta variación se procede a la agregación de la información proporcionada por la medida borrosa de afinidad  $\mu_R$ , con la información nítida proporcionada por el grafo sobre las conexiones directas entre nodos. Se pretende detectar grupos cuyos nodos estén conectados entre sí, y además presenten fuertes relaciones de afinidad. Para ello, se propone una aplicación particular en el algoritmo *Duo Affinity Louvain*, siendo  $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  un operador de agregación bi-variado, y  $\theta : \Pi^2 \rightarrow \Pi$  un agregador matricial basado en la agregación elemento a elemento y  $P$  una partición del conjunto de nodos.

---

**Algoritmo 10** *Duo Affinity Louvain*

---

- 1: **Input:**  $(A, \mu_R)$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
  - 2: **Output:**  $P$ ;
  - 3:  $F_{ij} \leftarrow \phi \left( Sh_i(\mu_R) - Sh_i^j(\mu_R), Sh_j(\mu_R) - Sh_j^i(\mu_R) \right), \forall i, j \in V$ ;
  - 4:  $M \leftarrow \theta(A, F)$ ;
  - 5:  $P \leftarrow Duo\ Louvain(A, M)$ ;
  - 6: **return**( $P$ );
- 

Aceptando que  $\mu_R$  se construye a partir de una matriz  $R$  tal y como se especifica en la Definición [4.3.10](#),  $F_{ij} = \phi(R_{ij}, R_{ji}) \forall i, j \in V$ . Debido a la simetría de  $R$ , hay un amplio conjunto de posibilidades a la hora de seleccionar el operador  $\phi$ , como pueden ser la media, el máximo o el mínimo, de manera que  $F_{ij} = R_{ij}$ . En situaciones de este tipo, trivialmente se tiene  $Duo\ Affinity\ Louvain(A, \mu_R) = Duo\ Louvain(A, \theta(A, R))$ , siendo  $\mu_R$  una medida borrosa 2-aditiva obtenida a partir de una estructura de  $n^2$  datos. Por otra parte, y pese a que se ha especificado el cálculo de la matriz de adyacencia de  $G_{\mu_R}$  mediante el valor de Shapley, en el contexto de medidas borrosas aditivas, tal y como se ha demostrado en la Proposición [4.3.17](#), se podría aplicar indistintamente el índice de interacción, ya que  $I_{ij}(\mu_R) = F_{ij}(Sh) = R_{ij}$ .

Es importante tener en cuenta que, si bien el algoritmo *Duo Affinity Louvain* se define empleando específicamente la medida  $\mu_R$ , cualquier otra medida borrosa de naturaleza ‘positiva’ podría ser usada. Debido al carácter de agrupamiento inherente al método, es importante la consideración de medidas de esta índole. En caso de estar ante otro tipo de información, como

podría ser el modelado y manipulación de cierta relación de enemistad, sería necesario el planteamiento de otras formas de agregación del dato, de manera que los grupos obtenidos mantuvieran la coherencia del problema tratado. Este caso será analizado posteriormente en el Capítulo 7, donde se trabaja con medidas borrosas bipolares en las que aparece la noción de disimilitud.

**Ejemplo 6.3.8.** Se considera una rueda de 7 nodos. La aplicación de cualquier algoritmo clásico de detección de comunidades, particularmente el de Louvain, proporciona, modificando aleatoriamente los nodos consecutivos que forman cada grupo, una partición del tipo  $P = \{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ . Aceptando la existencia de una relación de afinidad entre los nodos, cabría plantearse que la organización de dichos grupos varíe. Por ejemplo, ante la asunción de que los cuatro primeros nodos presentan fuertes sinergias entre sí, la partición resultante al analizar esta información, sin olvidar la estructura gráfica, debería mantener en la misma comunidad a los mencionados individuos. Siendo  $R$  la matriz a través de la cual se obtiene la medida borrosa  $\mu_R$ , en la Tabla 6.2, se presentan los valores de la modularidad relativa a las particiones obtenidas mediante el algoritmo de Louvain y el algoritmo *Duo Affinity Louvain*, sabiendo que  $F_{ij} = R_{ij}$  y tomando  $M = \theta(A, F) = \theta(A, R) = \gamma A + (1 - \gamma) R$ , asignando distintos pesos a cada una de las fuentes de información mediante el parámetro de importancia  $\gamma \in [0, 1]$ . Se puede observar que al introducir la información adicional con un peso o importancia mayor o igual a 0.1 ( $\gamma \leq 0.9$ ), la partición obtenida es la deseada, y la modularidad agregada mejora obtenida mediante el método *Duo Affinity Louvain* mejora a la del algoritmo de Louvain.

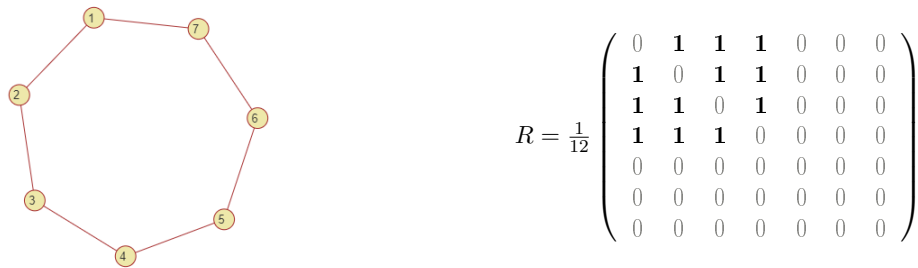


Figura 6.5: EFG de matriz  $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$ .

Tabla 6.2: Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos *Duo Affinity Louvain* y de Louvain para distintos valores de  $\gamma$ .

$\gamma$	Algoritmo <i>Duo Affinity Louvain</i>				Algoritmo de Louvain			
	$Q_A$	$Q_F$	$\gamma Q_A + (1 - \gamma) Q_F$	Partición	$Q_A$	$Q_F$	$\gamma Q_A + (1 - \alpha) Q_F$	Partición
1	0.2245	-0.0247	0.2245	$\{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$	0.2245	-0.0247	0.2245	$\{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
0.9	0.2041	0.4444	0.2281	$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$	0.2245	-0.0247	0.1995	$\{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
0.7	0.2041	0.4444	0.2762	$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$	0.2245	-0.0247	0.1497	$\{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
0.5	0.2041	0.4444	0.3243	$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$	0.2245	-0.0247	0.0999	$\{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
0.3	0.2041	0.4444	0.3723	$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$	0.2245	-0.0247	0.0500	$\{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
0.1	0.2041	0.4444	0.4204	$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$	0.2245	-0.0247	0.0002	$\{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
0	0.2041	0.4444	0.4444	$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$	0.2245	-0.0247	-0.0247	$\{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$

**Ejemplo 6.3.9.** Se considera el grafo  $G = (V, E)$  representado en la Figura 6.6. Se conoce la opinión de cada individuo acerca de un dirigente político, la cual se clasifica atendiendo a su carácter en positiva o negativa según el vector  $O = (+, +, +, -, -, +, +, -, -, -)$ , donde  $O_i$  es el tipo de opinión del individuo  $i \in V$ . Con base en  $O$  se construye la matriz  $R$ , en la que se presentan las afinidades entre pares de nodos, las cuales surgen de sus sinergias relativas a la perspectiva política de cada par de individuos, aceptando existirán fuertes relaciones de afinidad entre pares de elementos que tengan la misma opinión, inexistentes entre individuos de distinta opinión.

Sabiendo que  $F_{ij} = R_{ij}$ , y tomando una combinación lineal de las matrices  $A$  y  $R$  por medio del parámetro de importancia  $\gamma \in [0, 1]$ , i.e.  $M = \theta(A, F) = \gamma A + (1 - \gamma)$ , la partición obtenida con la aplicación del algoritmo *Duo Affinity Louvain* sobre el EFG de afinidad  $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$  cuando la información adicional toma cierta trascendencia ( $\gamma \leq 0.7$ ) es  $P^a = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9, 10\}\}$ , como se puede apreciar en la Tabla 6.3. Si únicamente se atiende a la estructura de la red, cualquier algoritmo clásico de detección de comunidades, particularmente el de Louvain, proporciona la partición  $P = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$ . Se puede observar cómo, al incluir la información adicional con un peso o importancia mayor a 0.3, la partición obtenida es la deseada y la modularidad obtenida mediante el método *Duo Affinity Louvain* es mayor que la del algoritmo de Louvain.

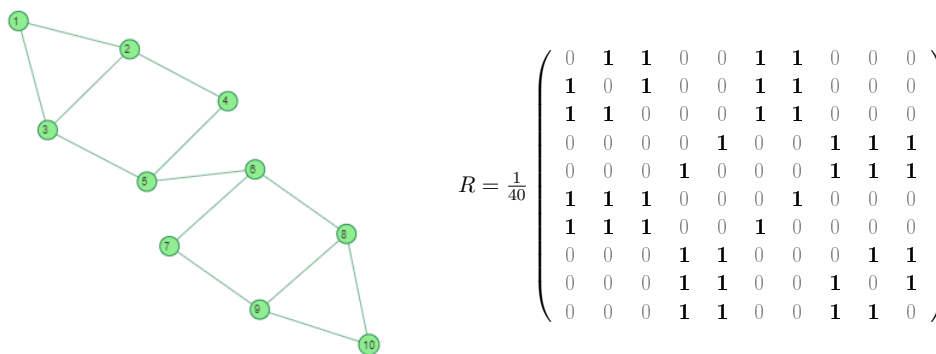


Figura 6.6: EFG de matriz  $\tilde{G} = (V, E, \mu_R)$

Tabla 6.3: Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos *Duo Affinity Louvain* y de Louvain para distintos valores de  $\gamma$ .

$\gamma$	Algoritmo <i>Duo Affinity Louvain</i>				Algoritmo de Louvain			
	$Q_A$	$Q_F$	$\gamma Q_A + (1 - \gamma) Q_F$	Partición	$Q_A$	$Q_F$	$\gamma Q_A + (1 - \alpha) Q_F$	Partición
1	0.4231	-0.1000	0.4231	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$	0.4231	-0.1000	0.4231	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$
0.9	0.4231	-0.100	0.3708	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$	0.4231	-0.1000	0.3708	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$
0.7	0.3521	0.1400	0.2885	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9, 10\}\}$	0.4231	-0.100	0.2662	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$
0.5	0.3521	0.1400	0.2461	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9, 10\}\}$	0.4231	-0.1000	0.1616	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$
0.3	0.3521	0.1400	0.2036	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9, 10\}\}$	0.4231	-0.1000	0.0569	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$
0.1	0.3521	0.1400	0.1612	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9, 10\}\}$	0.4231	-0.1000	-0.0477	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$
0	0.3521	0.1400	0.1400	$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9, 10\}\}$	0.4231	-0.1000	-0.1000	$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$



## Capítulo 7

# Problemas de detección de comunidades basados en grafos borrosos extendidos multi-dimensionales

*Concierto para Violín Si menor, Op.64*

F. Mendelssohn

**RESUMEN:** Se reservan estas páginas a la presentación de una generalización del problema presentado en el Capítulo 6: detección de comunidades en grafos basada en medidas borrosas. En este Capítulo se desarrolla la generalización de este problema a un plano multi-dimensional, tomando como elemento base un grafo borroso extendido multi-dimensional. La incorporación de múltiples medidas borrosas hace necesario un proceso de agregación de toda la información disponible. Como caso particular, y tal vez el más sencillo de los escenarios concernientes a la manipulación de varias medidas borrosas, en la Sección 7.1 se contempla el uso de medidas borrosas bipolares, mostrando la necesidad de cierta agregación aún cuando exista una única medida borrosa bipolar, provocada por la dualidad de la misma.

### 7.1. Medidas borrosas bipolares

Ambientada en el marco de bipolaridad ilustrado en la Sección 4.3.3 del Capítulo 4, en esta sección se propone la incorporación de una medida borrosa bipolar  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+)$  al problema de detección de comunidades. Para ello, se

plantea el modelado de la situación abordada mediante un grafo borroso extendido bipolar,  $\tilde{G} = (V, E, \mu^b)$ , y se propone un método para la resolución de problemas de detección de comunidades en los que existe cierta información adicional con una doble naturaleza contrapuesta (*pros* y *contras*), representada por una medida borrosa bipolar.

**Ejemplo 7.1.1.** Se considera un conjunto de individuos  $V$  conectados entre sí atendiendo a los enlaces del conjunto  $E$ . Sobre estos individuos se conocen sus intereses laborales, así como las sinergias que surgen entre ellos debido a estos intereses. Se pueden encontrar similitudes entre personas que trabajan en el mismo sector, que a la vez presentan ciertas desavenencias entre ellos al pertenecer a organismos rivales. De la misma manera, las disimilitudes entre trabajadores de distintos sectores puede ir acompañada de sinergias positivas entre personas cuyos trabajos se complementan. Esta situación podría modelarse mediante el grafo EFG bipolar  $\tilde{G} = (V, E, \mu^b)$ , siendo  $\mu_b = (\mu^-, \mu^+)$  una medida borrosa bipolar con la que modelar la relaciones laborales de naturaleza contrapuesta previamente mencionadas .

Para facilitar la comprensión del método que se propone, y para simplificar su implementación, se sugiere una división de todas las fuentes de conocimiento existentes en dos partes independientes. Por un lado, se cuenta con la información estructural del grafo  $G = (V, E)$ , para cuya manipulación se considera su matriz de adyacencia,  $A$ . Por otra parte, se cuenta con  $\mu^b$ , la medida borrosa bipolar que representa la capacidad de cada conjunto de elementos, atendiendo a posibles relaciones de afinidad o discrepancia entre ellos. Note que podría darse el caso en que dos nodos  $i, j$  conectados en el grafo ( $\exists\{i, j\} \in E$ ) no tengan ningún tipo de relación en  $\mu^b$ , o viceversa.

El método de detección de comunidades sobre grafos borrosos extendidos bipolares que se presenta, es una especificación, con ciertas particularidades, del método *Duo Louvain* presentado en el Capítulo 6, basado en la diferenciación de dos parámetros de entrada, uno con el que establecer relaciones de vecindad, y otro para calcular la variación de modularidad en que se basa la heurística del movimiento local. El algoritmo de Louvain tiene como único parámetro de entrada la matriz de adyacencia del grafo en análisis,  $A$ , pudiéndose distinguir dos utilidades de la misma. Por una parte, la relativa a la representación de las conexiones entre nodos, que limitan la estructura de las comunidades definidas. Por otra parte,  $A$  se utiliza en el proceso de evaluación de la variación de modularidad en que se basa el movimiento local de los nodos. Esta separación de las utilidades de  $A$ , incita un cambio de filosofía en la forma de entender el algoritmo de Louvain, diferenciando la matriz empleada para analizar la estructura del grafo de la matriz considerada para hallar el óptimo de modularidad,  $Louvain(matriz_{conexión}, matriz_{maxMOD}) = Louvain(A, A)$ , idea en que se basa el método descrito en el Algoritmo 11, el cual, desarrollado para su

publicación en [89], recibe el nombre de *Modified Louvain* y permite la consideración de una fuente de información distinta a la de adyacencia en los procesos relativos a los cálculos de modularidad, con una filosofía análoga a la presentada en el método *Duo Louvain*. En particular, se asume la existencia de una medida borrosa bipolar  $\mu^b$ . El método propuesto, cuya estructura se presenta en el Algoritmo [11], se desarrolla como sigue.

1. Dado el grafo borroso extendido bipolar  $\tilde{G} = (V, E, \mu^b)$ , obtener el multi-grafo valorado bipolar asociado a  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+)$ . Para ello se sugiere el cálculo de las matrices de adyacencia del MAWG bipolar relativo a  $(\mu^-, \mu^+)$  mediante el valor de Shapley,  $(F^-(Sh), F^+(Sh))$ , o el índice de interacción,  $(F^-(I), F^+(I))$ .
2. Calcular la matriz  $M = \theta(A, (F^-, F^+))$ , siendo  $\theta : \Pi^3 \rightarrow \Pi$  un agregador matricial basado en la agregación elemento a elemento. Esta matriz  $M$  será la base para el cálculo de la variación de la modularidad.
3. Aplicar al algoritmo de Louvain, considerando la matriz  $A$  para establecer relaciones de vecindad, *matriz<sub>conexión</sub>*, y la matriz  $M$  para calcular en cada caso la variación de modularidad, *matriz<sub>maxMOD</sub>*, o lo que es lo mismo, aplicar *Duo Louvain*( $A, M$ ).

---

**Algoritmo 11** *Modified Louvain*

---

- 1: **Input:**  $(A, \mu^b = (\mu^-, \mu^+))$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
  - 2: **Output:**  $P$ ;
  - 3: Agregar la medida borrosa  $\mu^-$  en la matriz  $F^-$ ; Agregar la medida borrosa  $\mu^+$  en la matriz  $F^+$ ;
  - 4:  $M \leftarrow \theta(A, (F^-, F^+))$ ;
  - 5:  $P \leftarrow \text{Duo Louvain}(A, M)$  ;
  - 6: **return**( $P$ );
- 

A continuación se presenta un caso particular del algoritmo *Modified Louvain*, proponiendo una definición específica tanto de las matrices  $F^-$  y  $F^+$ , como de la matriz  $M$ . Cuando se trabaja con medidas borrosas bipolares, es vital tener en cuenta que el conocimiento representado por  $\mu^-$  y  $\mu^+$  es antagónico, hecho crucial a la hora de llevar a cabo posibles agregaciones de ambas medidas. Por ello, en el caso mostrado a continuación se define la matriz  $F^{-op}$ , cuyo significado es de algún modo opuesto al de  $F^-$ . Así,  $F^{-op}$  se puede entender como una representación de sinergias positivas o relaciones de afinidad entre nodos, lo que facilita su agregación con las restantes fuentes de información ( $A$  y  $F^+$ ) en el sentido de que todas ellas representan nexos de naturaleza amistosa o positiva. A continuación se propone una aplicación concreta del método *Modified Louvain* en la que se aplica el valor de Shapley para calcular el MAWG bipolar, tomando los operadores  $\phi^- = \phi^+ = \text{mín}$

para la definición de  $F^-$  y  $F^+$ , y el parámetro de importancia  $\gamma \in [0, 1]$  para agregar la información estructural con la información adicional.

---

**Algoritmo 12** Aplicación específica de *Modified Louvain*

---

- 1: **Input:**  $(A, \mu^b = (\mu^-, \mu^+))$ ,  $A$  is a representation of  $G = (V, E)$ ;
  - 2: **Output:**  $P$ ;
  - 3:  $F_{ij}^- \leftarrow \min\{Sh_i(\mu^-) - Sh_i^j(\mu^-), Sh_j(\mu^-) - Sh_j^i(\mu^-)\}, \forall i, j \in V$ ;
  - 4:  $F_{ij}^+ \leftarrow \min\{Sh_i(\mu^+) - Sh_i^j(\mu^+), Sh_j(\mu^+) - Sh_j^i(\mu^+)\}, \forall i, j \in V$ ;
  - 5:  $I_{ii}^- \leftarrow 0$ ;  $I_{ij}^- \leftarrow \max\{F_{ij}^-, j \in V\}, \forall i \neq j, i, j \in V$ ;
  - 6:  $F^{-op} \leftarrow \frac{I^- - F^-}{\sum_i \sum_j (I_{ij}^- - F_{ij}^-)}$ ;
  - 7:  $M \leftarrow \gamma A + (1 - \gamma) (\frac{1}{2} F^{-op} + \frac{1}{2} F^+)$ ;
  - 8:  $P \leftarrow \text{Duo Louvain}(A, M)$ ;
  - 9: **return**( $P$ );
- 

La decisión acerca de qué elementos han estar en el mismo grupo, que debe adaptarse al problema abordado, está íntimamente relacionada con los operadores escogidos, así como con la definición de  $F^{-op}$ , la matriz opuesta a  $F^-$ . En este caso, al basar la definición de las matrices  $F^-$  y  $F^+$  en el operador mínimo, y con la caracterización propuesta para  $F^{-op}$ , los grupos buscados estarán formados por aquellos nodos que, en la medida de lo posible, tengan fuertes relaciones de afinidad (relativas a  $\mu^+$ ), y no tengan relaciones de disparidad o disimilitud (relativas a  $\mu^-$ ). El parámetro  $\gamma \in [0, 1]$  cuantifica la importancia o peso asignado cada una de las fuentes de información (estructural o de relaciones) en la de definición de grupos.

Si las medidas en uso son aditivas, el cálculo del valor de Shapley es inmediato, con lo que la complejidad de este método es idéntica a la del algoritmo de Louvain. A continuación se muestra un ejemplo ilustrativo del desempeño del algoritmo *Modified Louvain*, para el caso concreto presentado en el Algoritmo [12](#), tomando medidas borrosas aditivas.

**Ejemplo 7.1.2.** Se considera el EFG bipolar  $\tilde{G} = (V, E, \mu^b)$  representado en la Figura [7.1](#). Se asume cierta agregación de la medida borrosa bipolar  $\mu^b$  que proporciona las matrices  $F^-$  y  $F^+$ . Estas matrices representan respectivamente la amistad y enemistad entre los elementos. En la Tabla [7.1](#) se presentan las variaciones de modularidad de las particiones obtenidas con los algoritmos *Modified Louvain* y Louvain considerando distintos valores para el parámetro de asignación de pesos  $\gamma$ . Los resultados obtenidos evidencian que la partición proporcionada por el método *Modified Louvain* para ciertos valores de  $\gamma$ , ( $\gamma \leq 0.7$ ), tiene en cuenta las sinergias entre nodos al establecer una estructura de comunidades, proporcionando la partición deseada. Note que la modularidad agregada relativa el algoritmo *Modified Louvain* mejora a la del algoritmo de Louvain.

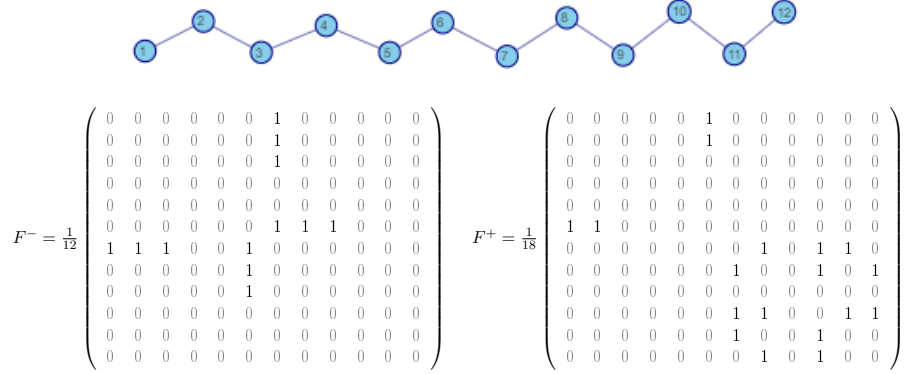


Figura 7.1: EFG bipolar  $G = (V, E, \mu^b = (\mu^-, \mu^+))$ .

Tabla 7.1: Particiones y modularidad obtenidas con los algoritmos *Modified Louvain* y *Louvain*, siendo  $F_b^* = \frac{1}{2}F^{-op} + \frac{1}{2}F^+$ .

$\gamma$	Algoritmo <i>Modified Louvain</i>				Algoritmo de <i>Louvain</i>			
	$Q_A$	$Q_{F_b^-}$	$\gamma Q_A + (1-\gamma)Q_{F_b^-}$	Partición	$Q_A$	$Q_{F_b^-}$	$\gamma Q_A + (1-\gamma)Q_{F_b^-}$	Partición
1	0.4835	-0.0509	0.4835	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0509	0.4835	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.9	0.4835	-0.0509	0.4301	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0509	0.4301	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.7	0.4091	0.2114	0.3498	{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0509	0.3232	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.5	0.4091	0.2114	0.3103	{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0509	0.2163	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.3	0.4091	0.2114	0.2707	{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0509	0.1094	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.1	0.4091	0.2114	0.2312	{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0509	0.0025	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0	0.4091	0.2114	0.2114	{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {7, 8, 9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0509	-0.0509	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}

## 7.2. Familias de medidas borrosas

En el Capítulo 6 se propone una aplicación concreta de los grafos borrosos extendidos, relativa a la búsqueda de comunidades en grafos. También se ha motivado la necesidad de contar con más de una medida borrosa para garantizar modelados más realistas de los problemas abordados. De la existencia de una familia de medidas borrosas  $(\mu^1, \dots, \mu^r)$ , en combinación con un grafo  $G = (V, E)$ , nace el grafo borroso extendido multi-dimensional  $(V, E, (\mu^1, \dots, \mu^r))$  introducido en la Definición 5.3.1. El MEFG es el elemento base del problema que se aborda a continuación, en el que la familia de medidas borrosas considerada es un factor importante al definir grupos.

En general, la detección de comunidades en un MEFG es análoga al proceso detallado sobre un EFG, con la diferencia de que la existencia de múltiples medidas borrosas hace necesario un proceso de agregación previo a la búsqueda de grupos. Se desarrolla un método llamado *Multi-dimensional Duo Louvain*, cuyo pseudocódigo se presenta en el Algoritmo 13. Grosso modo, se puede resumir en los siguientes pasos.

1. Para cada  $\mu^\ell$ , obtener  $F^\ell$ , adyacencia del AWG correspondiente,  $G_{\mu^\ell}$ .
2. Obtener la matriz  $F = \Phi(F^1, \dots, F^r)$ , siendo  $\Phi$  un operador de agregación usado para combinar  $r$  matrices,  $\Phi : \Pi(n)^r \rightarrow \Pi(n)$ .
3. Calcular  $M = \theta(A, F)$ , siendo  $\theta$  un operador matricial usado para combinar 2 matrices,  $\theta : \Pi(n)^2 \rightarrow \Pi(n)$ .
4. Aplicar *Duo Louvain*( $A, M$ ).

---

**Algoritmo 13** *Multi-dimensional Duo Louvain*

---

```

1: Input:  $(A, \mu^1, \dots, \mu^r)$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3: for  $(\ell = 1)$  to  $(r)$  do
4:   Calcular  $F^\ell$ ;
5: end for
6:  $F \leftarrow \Phi(F^1, \dots, F^r)$ ;
7:  $M \leftarrow \theta(A, F)$ ;
8:  $P \leftarrow \text{Duo Louvain}(A, M)$ ;
9: return( $P$ );
    
```

---

Dependiendo del tipo de medida borrosa involucrada, puede ser necesario considerar algún paso intermedio con el objetivo de obtener agregaciones coherentes. En las siguientes páginas se realizan las especificaciones convenientes al tratar con MEEFG de vector, de matriz, o bipolares.

**7.2.1. Familia  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de múltiples vectores.**

En una primera aproximación a la resolución de problemas de detección de comunidades basados en la existencia un EFG de vector (Sección [6.3.1](#)) se ha valorado la existencia de un único vector aportando alguna evidencia sobre los nodos del grafo considerado. A continuación se da un paso más, atendiendo a escenarios en los que existe más de un vector aportando información adicional. Tomando como base una familia de vectores y un grafo, se construye el grafo borroso extendido de familia de vector.

A continuación se presenta un caso representativo para ilustrar la necesidad de contar con varias fuentes de información adicional (vectores en este caso) para la detección de comunidades en grafos.

**Ejemplo 7.2.1.** Volviendo a la situación introducida en el Ejemplo [6.3.1](#) respecto al grupo de  $n$  críticos cinematográficos, es fácil pensar en una generalización de la misma ante la consideración de que se conoce la valoración

que estas personas han otorgado a  $r$  películas, no únicamente a una. De esta manera, si las valoraciones de la película  $\ell$  se representan mediante el  $n$ -vector  $x^\ell$ , la familia de vectores  $(x^1, \dots, x^r)$  representa las puntuaciones que cada uno de los  $n$  críticos ha asignado a cada una de las  $r$  películas. A partir de esta familia de vectores se obtiene una familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno que, en combinación con el grafo nítido que representa las interacciones de los críticos en un foro, proporciona el MEFG de vector  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{x^1}, \dots, \mu_{x^r}))$ . Al existir varias fuentes de información, se generan diversos tipos de sinergias entre los críticos que se reflejarán en los grupos detectados en  $\tilde{G}$ , a diferencia de la información aportada por los grupos encontrados en el grafo nítido  $G = (V, E)$ .

A continuación se propone una metodología de agregación a través de la cual se pretende resumir toda la información aportada por un MEFG de vector en dos matrices (estructural y de relaciones), que serán los parámetros de partida en la resolución del problema abordado. El primer paso de este proceso es obtener el MAWG de una familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno (ver Definición [4.4.2](#)), para posteriormente proceder a una agregación del mismo como pre-proceso antes de su aplicación en la resolución de problemas de agrupamiento basados en múltiples medidas borrosas de vector.

- **Paso 1: construir el multi-grafo valorado asociado a una familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno.** Dada la familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno  $(\mu_{x^1}, \dots, \mu_{x^r})$  obtenidas a partir de los vectores  $(x^1, \dots, x^r)$ , definir las matrices  $(X^1, \dots, X^r)$  atendiendo a la ecuación  $X_{ij}^\ell = \phi^\ell \left( Sh_i(\mu_{x^\ell}) - Sh_i^j(\mu_{x^\ell}), Sh_j(\mu_{x^\ell}) - Sh_j^i(\mu_{x^\ell}) \right)$ , de modo que, para cada  $\ell = 1, \dots, r$ ,  $\phi^\ell : [-1, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  es un operador de agregación,  $Sh_i(\mu_{x^\ell})$  y  $Sh_i^j(\mu_{x^\ell})$  son los índices de Shapley de  $i \in V$  relativos a  $\mu_{x^\ell}$  cuando está en coalición con todos los elementos de  $V$  ó de  $V \setminus \{j\}$ , respectivamente.
- **Paso 2: agregación de la información.** En este paso se agregan las matrices  $X^1, \dots, X^r$  para obtener la matriz  $X$ . Para ello, se usa la función de agregación  $\Phi : \Pi^r \rightarrow \Pi$ , definida en  $\Pi$ , el conjunto de matrices cuadradas de tamaño  $n$ . En concreto, se propone el uso de un agregador matricial basado en los operadores clásicos de agregación con transformación elemento a elemento. Matemáticamente,

$$X = \Phi (X^1, \dots, X^r)$$

**Observación 4.** En el proceso de agregación propuesto para calcular la matriz  $X$  se pueden distinguir dos tipos de funciones de agregación. Por una parte, las distintas  $\phi^\ell$ , usadas para obtener una matriz de sinergias a partir de la información representada por cada  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno.

Por otra parte,  $\Phi$ , empleada para combinar todas las matrices de sinergias y obtener la matriz final,  $X$ . Es importante tener en cuenta que la noción de grupo contemplada dependerá de la selección hecha para estos operadores.

En el caso uni-dimensional, sólo se atiende a un operador,  $\phi$ , usado para obtener la matriz de sinergias correspondiente a partir de una medida borrosa. Ante la existencia de varias fuentes de información, a las  $r$  funciones  $\phi^\ell$  hay que añadir otro tipo de agregador,  $\Phi$ , que afectará directamente a la estructura de los grupos detectados. Los casos extremos son:

- Si  $\Phi$  es un operador disyuntivo, los grupos buscados estarán formados por elementos entre los que existan fuertes sinergias, relativas a alguna(s) evidencias. El tamaño de los grupos ‘similares’ en cuanto a la información adicional se refiere, aumentará a medida que aumente el tamaño de la familia de vectores de base.
- Si  $\Phi$  es un operador conjuntivo, primarán los grupos formados por elementos entre los que existan sinergias relativas a todas las evidencias contempladas; los grupos ‘similares’ en cuanto a la información adicional se refiere, serán más restrictivos y su tamaño se verá reducido a medida que aumente la cantidad de vectores considerados.
- Si  $\Phi$  es un operador promedio, se establecerá un promedio entre los dos puntos previos.

Se considerarán los *ordered weighted averaging aggregation operators*, OWA [128, 131, 193, 196], en concreto, los operadores mínimo y máximo, y el operador promedio. Tomando  $\Phi = \text{máx}$ , los grupos buscados estarán formados por nodos con sinergias en alguna de las evidencias existentes, mientras que si  $\Phi = \text{mín}$  tenderán a estar juntos los elementos que presenten sinergias en todas las evidencias existentes.

A continuación se propone un método de detección de comunidades basado en la existencia de un MEFG de familia de vector. Es una generalización del método *Sugeno Louvain*, llamado *Multi-dimensional Sugeno Louvain*. Siguiendo el proceso de agregación previo para obtener las distintas matrices de sinergias, se emplean  $r$  funciones  $\phi^\ell : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  para calcular las matrices  $X^\ell$  a partir de cada medida  $\mu_{x^\ell}$ , esto es, el MAWG de familia de vector correspondiente. También es necesario el operador  $\Phi : \Pi^r \rightarrow \Pi$  para combinar todas las matrices de sinergias en una matriz final  $X$  que resume la información aportada por la familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno,  $(\mu_{x^1}, \dots, \mu_{x^r})$ . Finalmente, considerando la función de agregación matricial  $\theta : \Pi^2 \rightarrow \Pi$ , se define la matriz  $M = \theta(A, X)$ , de la que depende el cálculo de variación de la modularidad  $\Delta Q_{\phi^i}(e_j)$ . Para establecer qué grupos son posibles se tiene en cuenta únicamente la estructura de  $G = (V, E)$ . Este proceso se presenta esquematizado en el Algoritmo 14.

**Algoritmo 14** *Multi-dimensional Sugeno-Louvain*


---

```

1: Input:  $(A, (x^1, \dots, x^r))$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3: Preliminary
4: for  $(\ell = 1)$  to  $(r)$  do
5:   Calcular  $\mu_{x^\ell}$  (la medida borrosa relativa al vector  $x^\ell$ );
6:    $X_{ij}^\ell \leftarrow \phi \left( Sh_i(\mu_{x^\ell}) - Sh_i^j(\mu_{x^\ell}) Sh_j(\mu_{x^\ell}) - Sh_j^i(\mu_{x^\ell}) \right)$ ,  $\forall i, j \in V$ ;
7: end for
8:  $X \leftarrow \Phi(X^1, \dots, X^r)$ ;
9:  $M \leftarrow \theta(A, X)$ ;
10: end Preliminary
11:  $P \leftarrow Duo\ Louvain(A, M)$ ;
12: return $(P)$ ;

```

---

Al igual que en el caso uni-dimensional, es posible evitar la complejidad exponencial relativa al valor de Shapley considerando medidas borrosas aditivas. Particularmente, para cada vector  $x^\ell$ , se sugiere caracterizar la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno correspondiente atendiendo a la Definición 4.3.3 tomando  $p = 1$ , esto es,  $\mu_{x^\ell}^a$ , para la que se cumple  $Sh_i(\mu_{x^\ell}^a) = \frac{x_i^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell}$  y  $Sh_i^j(\mu_{x^\ell}^a) = \frac{x_i^\ell}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k^\ell}$ .

En este contexto, se propone una aplicación específica del algoritmo *Multi-dimensional Sugeno-Louvain*. Puesto que la definición de cada medida  $\mu_{x^\ell}$  se limita al cálculo de  $X^\ell$ , la complejidad del método *Multi-dimensional Sugeno-Louvain 1-aditivo* es idéntica a la del algoritmo de Louvain.

**Algoritmo 15** *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo*


---

```

1: Input:  $(A, (x^1, \dots, x^r))$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3: Preliminary
4: for  $(\ell = 1)$  to  $(r)$  do
5:    $X_{ij}^\ell \leftarrow \phi \left\{ \left| \frac{x_i^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell} - \frac{x_i^\ell}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n x_k^\ell} \right|, \left| \frac{x_j^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell} - \frac{x_j^\ell}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^\ell} \right| \right\}$ ;
6: end for
7:  $X \leftarrow \Phi(X^1, \dots, X^r)$ ;
8:  $M \leftarrow \theta(A, X)$ ;
9: end Preliminary
10:  $P \leftarrow Duo\ Louvain(A, M)$ ;
11: return $(P)$ ;

```

---

A continuación se muestra para un ejemplo muy sencillo que el algoritmo *Multi-dimensional Sugeno Louvain* proporciona la partición indicada por la

intuición al considerar la información aportada por una familia de vector.

**Ejemplo 7.2.2.** Se considera el grafo  $G = (V, E)$  (Figura 7.2), cuyos nodos representan a un grupo de 12 personas, y la familia de vectores  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ , que definen sendas evidencias acerca de los elementos de  $V$ , concretamente, el interés que muestran estas personas hacia 4 deportes distintos.

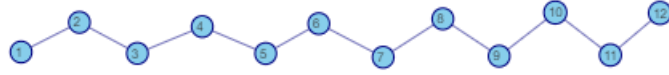


Figura 7.2: Grafo  $G = (V, E)$ .

- $x^1 = (9, 9.5, 10, 1, 0.5, 1, 9.5, 8, 10, 1, 1.5, 1)$
- $x^2 = (10, 9.5, 9, 1, 0.5, 1, 9, 9, 9.5, 1.5, 2, 0.5)$
- $x^3 = (9.5, 8.5, 10, 1.5, 1, 1, 10, 9.5, 9.5, 0.9, 1, 1)$
- $x^4 = (9, 9.5, 10, 1, 1, 1, 10, 9.5, 9, 0.5, 1, 1)$

A partir de los vectores  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  se define la familia de funciones  $(\mu_{x^1}^a, \mu_{x^2}^a, \mu_{x^3}^a, \mu_{x^4}^a)$ ; cada una es una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno obtenida a partir de un vector, según las premisas enunciadas en la Proposición 4.3.3 cuando  $p = 1$ . Para cada  $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ , la matriz de adyacencia del AWG relativo a  $\mu_{x^\ell}^a$  es  $X^\ell$ , donde  $X_{ij}^\ell = \phi^\ell \left( Sh_i(\mu_{x^\ell}^a) - Sh_j^j(\mu_{x^\ell}^a), Sh_j(\mu_{x^\ell}^a) - Sh_j^i(\mu_{x^\ell}^a) \right)$   
 $= \min \left\{ \left| \frac{x_i^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell} - \frac{x_i^\ell}{\sum_{k=1, k \neq j}^n x_k^\ell} \right|, \left| \frac{x_j^\ell}{\sum_{k=1}^n x_k^\ell} - \frac{x_j^\ell}{\sum_{k=1, k \neq i}^n x_k^\ell} \right| \right\}$ .

Cualquier algoritmo clásico basado en la optimización de la modularidad proporciona la partición  $P = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{9, 10, 11, 12\}\}$ . No obstante, considerando la información aportada por la familia de vectores  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ , cabría esperar obtener la partición  $P^x = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11, 12\}\}$ , donde, respetando la estructura de  $G$ , los elementos para los que la familia de vectores define un valor alto están en el mismo grupo,  $\{1, 2, 3\}$  y  $\{7, 8, 9\}$ , mientras que aquellos con un valor asociado bajo están también agrupados,  $\{4, 5, 6\}$  y  $\{10, 11, 12\}$ . Esta solución se muestra a través de las matrices  $X^1, X^2, X^3, X^4$ : en cada una de ellas, los valores más altos, se corresponden con los nodos cuyo valor relativo en el vector correspondiente es alto. La agregación de esta familia de matrices confluye en la matriz  $X$ , mostrada en la Figura 7.3, que se define como  $X = \Phi(X^1, X^2, X^3, X^4) = \max\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$ .

$$\begin{aligned}
 X^1 = \frac{1}{10000} & \begin{pmatrix} 0 & 260 & 274 & 24 & 12 & 24 & 260 & 215 & 274 & 24 & 36 & 21 \\ 260 & 0 & 292 & 25 & 12 & 25 & 277 & 227 & 292 & 25 & 38 & 25 \\ 274 & 292 & 0 & 26 & 13 & 26 & 292 & 239 & 310 & 26 & 40 & 26 \\ 24 & 25 & 26 & 0 & 1 & 3 & 25 & 21 & 26 & 3 & 4 & 3 \\ 12 & 12 & 13 & 1 & 0 & 1 & 12 & 10 & 13 & 1 & 2 & 1 \\ 24 & 25 & 26 & 3 & 1 & 0 & 25 & 21 & 26 & 3 & 4 & 3 \\ 260 & 277 & 292 & 25 & 12 & 25 & 0 & 227 & 292 & 25 & 38 & 25 \\ 215 & 227 & 239 & 21 & 10 & 21 & 227 & 0 & 239 & 21 & 32 & 21 \\ 274 & 292 & 310 & 26 & 13 & 26 & 292 & 239 & 0 & 26 & 40 & 26 \\ 24 & 25 & 26 & 3 & 1 & 3 & 25 & 21 & 26 & 0 & 4 & 3 \\ 36 & 38 & 40 & 4 & 2 & 4 & 38 & 32 & 40 & 4 & 0 & 4 \\ 24 & 25 & 26 & 3 & 1 & 3 & 25 & 21 & 26 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
 X^2 = \frac{1}{10000} & \begin{pmatrix} 0 & 287 & 269 & 26 & 13 & 26 & 269 & 269 & 287 & 39 & 53 & 13 \\ 287 & 0 & 256 & 25 & 12 & 25 & 256 & 256 & 272 & 37 & 50 & 12 \\ 269 & 256 & 0 & 23 & 12 & 23 & 242 & 242 & 256 & 35 & 48 & 12 \\ 26 & 25 & 23 & 0 & 1 & 3 & 23 & 23 & 25 & 4 & 5 & 1 \\ 13 & 12 & 12 & 1 & 0 & 1 & 12 & 12 & 12 & 2 & 3 & 1 \\ 26 & 25 & 23 & 3 & 1 & 0 & 23 & 23 & 25 & 4 & 5 & 1 \\ 269 & 256 & 242 & 23 & 12 & 23 & 0 & 242 & 256 & 35 & 48 & 12 \\ 269 & 256 & 242 & 23 & 12 & 23 & 242 & 0 & 256 & 35 & 48 & 12 \\ 287 & 272 & 256 & 25 & 12 & 25 & 256 & 256 & 0 & 37 & 50 & 12 \\ 39 & 37 & 35 & 4 & 2 & 4 & 35 & 35 & 37 & 0 & 8 & 2 \\ 53 & 50 & 48 & 5 & 3 & 5 & 48 & 48 & 50 & 8 & 0 & 4 \\ 13 & 12 & 12 & 1 & 1 & 1 & 12 & 12 & 12 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
 X^3 = \frac{1}{10000} & \begin{pmatrix} 0 & 232 & 278 & 36 & 24 & 24 & 278 & 264 & 264 & 22 & 24 & 24 \\ 232 & 0 & 244 & 32 & 21 & 21 & 244 & 232 & 232 & 19 & 21 & 21 \\ 278 & 244 & 0 & 38 & 25 & 25 & 295 & 278 & 278 & 23 & 25 & 25 \\ 36 & 32 & 38 & 0 & 4 & 4 & 38 & 36 & 36 & 3 & 4 & 4 \\ 24 & 21 & 25 & 4 & 0 & 3 & 25 & 24 & 24 & 2 & 3 & 3 \\ 24 & 21 & 25 & 4 & 3 & 0 & 25 & 24 & 24 & 2 & 3 & 3 \\ 278 & 244 & 295 & 38 & 25 & 25 & 0 & 278 & 278 & 23 & 25 & 25 \\ 264 & 232 & 278 & 36 & 24 & 24 & 278 & 0 & 264 & 22 & 24 & 24 \\ 264 & 232 & 278 & 36 & 24 & 24 & 278 & 264 & 0 & 22 & 24 & 24 \\ 22 & 19 & 23 & 3 & 2 & 2 & 23 & 22 & 22 & 0 & 2 & 2 \\ 24 & 21 & 25 & 4 & 3 & 3 & 25 & 24 & 24 & 2 & 0 & 3 \\ 24 & 21 & 25 & 4 & 3 & 3 & 25 & 24 & 24 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
 X^4 = \frac{1}{10000} & \begin{pmatrix} 0 & 256 & 269 & 23 & 23 & 23 & 269 & 256 & 242 & 12 & 23 & 23 \\ 256 & 0 & 287 & 25 & 25 & 25 & 287 & 272 & 256 & 12 & 25 & 25 \\ 269 & 287 & 0 & 26 & 26 & 26 & 305 & 287 & 269 & 13 & 26 & 26 \\ 23 & 25 & 26 & 0 & 3 & 3 & 26 & 25 & 23 & 1 & 3 & 3 \\ 23 & 25 & 26 & 3 & 0 & 3 & 26 & 25 & 23 & 1 & 3 & 3 \\ 23 & 25 & 26 & 3 & 3 & 0 & 26 & 25 & 23 & 1 & 3 & 3 \\ 269 & 287 & 305 & 26 & 26 & 26 & 0 & 287 & 269 & 13 & 26 & 26 \\ 256 & 272 & 287 & 25 & 25 & 25 & 287 & 0 & 256 & 12 & 25 & 25 \\ 242 & 256 & 269 & 23 & 23 & 23 & 269 & 256 & 0 & 12 & 23 & 23 \\ 12 & 12 & 13 & 1 & 1 & 1 & 13 & 12 & 12 & 0 & 1 & 1 \\ 23 & 25 & 26 & 3 & 3 & 3 & 26 & 25 & 23 & 1 & 0 & 3 \\ 23 & 25 & 26 & 3 & 3 & 3 & 26 & 25 & 23 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
 X = \frac{1}{10000} & \begin{pmatrix} 0 & 287 & 278 & 36 & 24 & 26 & 278 & 269 & 287 & 39 & 53 & 24 \\ 287 & 0 & 292 & 32 & 25 & 25 & 287 & 272 & 292 & 37 & 50 & 25 \\ 278 & 292 & 0 & 38 & 26 & 26 & 305 & 287 & 310 & 35 & 48 & 26 \\ 36 & 32 & 38 & 0 & 4 & 4 & 38 & 36 & 36 & 4 & 5 & 4 \\ 24 & 25 & 26 & 4 & 0 & 3 & 26 & 25 & 24 & 2 & 3 & 3 \\ 26 & 25 & 26 & 4 & 3 & 0 & 26 & 25 & 26 & 4 & 5 & 3 \\ 278 & 287 & 305 & 38 & 26 & 26 & 0 & 287 & 292 & 35 & 48 & 26 \\ 269 & 272 & 287 & 36 & 25 & 25 & 287 & 0 & 264 & 35 & 48 & 25 \\ 287 & 292 & 310 & 36 & 24 & 26 & 292 & 264 & 0 & 37 & 50 & 26 \\ 39 & 37 & 35 & 4 & 2 & 4 & 35 & 35 & 37 & 0 & 8 & 3 \\ 53 & 50 & 48 & 5 & 3 & 5 & 48 & 48 & 50 & 8 & 0 & 4 \\ 24 & 25 & 26 & 4 & 3 & 3 & 26 & 25 & 26 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 7.3: Matrices  $X^1, X^2, X^3, X^4$  y  $X = \max\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$ .

En la Tabla 7.2 se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante los algoritmos *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo* y *Louvain*, considerando la matriz  $X$  y una combinación de  $A$  y  $M$  por medio del parámetro de importancia  $\gamma \in [0, 1]$ , i.e.  $M = \theta(A, X) = \gamma A + (1 - \gamma) X$ . Note cómo la modularidad agregada relativa al método propuesto es siempre superior a la de *Louvain*. Además, el algoritmo *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo* proporciona la partición  $P^x$  previamente mencionada cuando la información adicional cobra cierta importancia ( $\gamma \leq 0.5$ ).

Tabla 7.2: Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo* y de *Louvain* para distintos valores de  $\gamma$ .

$\gamma$	Algoritmo <i>Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo</i>				Algoritmo de <i>Louvain</i>			
	$Q_A$	$Q_X$	$\gamma Q_A + (1 - \gamma) Q_X$	Partición	$Q_A$	$Q_X$	$\gamma Q_A + (1 - \gamma) Q_X$	Partición
1	0.4835	-0.0966	0.4835	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0966	0.4835	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.9	0.4835	-0.0966	0.4255	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0966	0.4255	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.7	0.4835	-0.0966	0.3095	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}	0.4835	-0.0966	0.3095	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.5	0.4752	-0.0841	0.1956	{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}, {10, 11, 12}}	0.4835	-0.0966	0.1925	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.3	0.4752	-0.0841	0.0837	{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}, {10, 11, 12}}	0.4835	-0.0966	0.0774	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0.1	0.4752	-0.0841	-0.0282	{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}, {10, 11, 12}}	0.4835	-0.0966	-0.0386	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
0	0.4752	-0.0841	-0.0841	{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}, {10, 11, 12}}	0.4835	-0.0966	-0.0966	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}

### 7.2.2. Familia de medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de múltiples matrices.

En esta sección se aborda el problema de detección de comunidades basado en la existencia de un grafo borroso extendido multi-dimensional, en este caso, de naturaleza matricial. Se analizarán y modelarán diversas fuentes de información adicionales relativas a distintas relaciones de afinidad entre elementos, para su posterior aplicación en la definición de grupos. Sirva el siguiente ejemplo para ilustrar esta situación.

**Ejemplo 7.2.3.** Se considera la situación planteada en el Ejemplo [6.3.5](#) acerca de la red social Twitter, y las distintas fuentes de información que se pueden obtener de la misma. Siguiendo la idea de representar las interacciones de cierto tipo entre usuarios mediante un grafo nítido  $G = (V, E)$ , es posible incorporar al modelado diversas fuentes de información acerca de las sinergias entre usuarios por medio de distintas medidas borrosas. Así, considerando una familia de medidas borrosas de afinidad en la que una de ellas representa un tipo de relación (afinidad política, sinergia laboral, amistad, intereses comunes, etc.), el MEFG de afinidad  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r}))$  ofrece una representación de la situación abordada con muchos detalles. Los grupos detectados en  $\tilde{G}$  serán fieles a todas las relaciones existentes entre los usuarios, no únicamente a las interacciones en la red entre ellos, como cabe esperar de los grupos detectados en  $G$ .

Para la resolución de este tipo de problemas en su versión multi-dimensional, se propone un pre-proceso a través del cual obtener una matriz a partir de un MEFG de afinidad. Posteriormente, esta matriz se aplica en la detección de grupos. Este pre-proceso se describe a continuación.

- **Paso 1: construir el multi-grafo valorado multi-dimensional asociado a una familia de medidas borrosas de afinidad.** Partiendo de la familia de matrices de afinidad  $(R^1, \dots, R^r)$  se obtienen las medidas borrosas  $(\mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r})$ . El MAWG es aquel cuya adyacencia es  $(F^1, \dots, F^r) = (R^1, \dots, R^r)$ , de modo que este paso es redundante.
- **Paso 2: agregación de la información.** En este paso se agregan las matrices  $R^1, \dots, R^r$  hasta obtener la matriz  $R$ . Para ello, se usa la función de agregación  $\Phi : \Pi^r \rightarrow \Pi$ . Se propone el uso de un agregador matricial basado en los operadores clásicos de agregación con transformación elemento a elemento. Matemáticamente,

$$R = \Phi(R^1, \dots, R^r)$$

**Observación 5.** Al igual que sucede ante la agregación de matrices obtenidas a partir de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno detallado en la sección anterior, (Observación 4), la determinación de  $\Phi$  hará que los grupos ‘similares’ en cuanto a información adicional se refiere, aumenten (si  $\Phi$  es un operador disyuntivo), disminuyan (si  $\Phi$  es un operador conjuntivo), o no se alteren (si  $\Phi$  es un operador promedio), a medida que aumente la cantidad de matrices de información adicional consideradas.

**Observación 6.** Como las medidas involucradas son de tipo  $\mu_{R^\ell}$ , cada una obtenida a partir de una matriz de afinidad  $R^\ell$ , el problema multi-dimensional pasa a ser prácticamente trivial. En este caso,  $\phi^\ell \left( (Sh_i(\mu_{R^\ell}) - Sh_i^j(\mu_{R^\ell})), (Sh_j(\mu_{R^\ell}) - Sh_j^i(\mu_{R^\ell})) \right) = R_{ij} = R_{ji}$ , con lo que, para la mayoría de operadores  $\phi^\ell$  que podrían considerarse,  $F_{ij} = R_{ij}$ .

El método que se propone para la detección de comunidades en un MEFG de matriz en que las medidas implicadas tratan sobre relaciones de afinidad, no es más que una generalización al caso múltiple del algoritmo *Duo Affinity Louvain*, llamado *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain*. De modo que, siendo  $\phi^\ell : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  un operador de agregación usado para hacer simétricas las relaciones asimétricas en  $\mu_{R^\ell}$  entre los elementos  $i, j \in V$  para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ ; siendo  $\Phi : \Pi^r \rightarrow \Pi$  un operador de agregación usado para combinar  $r$  matrices; y siendo  $\theta : \Pi^2 \rightarrow \Pi$  un operador matricial basado en la agregación elemento a elemento, el funcionamiento del nuevo método se describe en el Algoritmo 16.

---

**Algoritmo 16** *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain*

---

- 1: **Input:**  $(A, \mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r})$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
  - 2: **Output:**  $P$ ;
  - 3: **for**  $(\ell = 1)$  **to**  $(r)$  **do**
  - 4:    $F_{ij}^\ell \leftarrow \phi^\ell \left( Sh_i(\mu_{R^\ell}) - Sh_i^j(\mu_{R^\ell}), Sh_j(\mu_{R^\ell}) - Sh_j^i(\mu_{R^\ell}) \right)$ ,  $\forall i, j \in V$ ;
  - 5: **end for**
  - 6:  $F \leftarrow \Phi(F^1, \dots, F^r)$ ;
  - 7:  $M \leftarrow \theta(A, F)$ ;
  - 8:  $P \leftarrow Duo\ Louvain(A, M)$  ;
  - 9: **return** $(P)$ ;
- 

Pese a que las medidas borrosas consideradas en el algoritmo son del tipo  $\mu_{R^\ell}$ , obtenidas a partir de una matriz de afinidades (lo que facilita el proceso de cálculo de cada matriz  $F^\ell$ ), cualquier otro tipo de medida borrosa que trate sobre relaciones de afinidad podría contemplarse. Si se considera otra clase de medidas borrosas ajenas a la existencia de relaciones de afinidad entre elementos, habría que re-formular el proceso de agregación, de modo que los grupos obtenidos fueran coherentes con el problema abordado.

Se presentan ahora dos ejemplos para ilustrar cómo la incorporación de

información adicional influye en el proceso de detección de comunidades.

**Ejemplo 7.2.4.** Se considera una rueda de 7 nodos. Aceptando la existencia de ciertas afinidades entre los nodos del grafo, cabría esperar que la partición prototipo obtenida mediante métodos clásicos,  $P = \{\{1, 2, 7\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ , sufriera alguna variación. En concreto, se asume que existen cuatro matrices,  $R^1$ ,  $R^2$ ,  $R^3$  y  $R^4$ , cada una de las cuales define cierta relación de afinidad entre los pares de nodos. En la Tabla 7.3 se presentan los valores de la modularidad relativa a las particiones obtenidas mediante el algoritmo *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain* y el algoritmo de Louvain, sabiendo que  $F_{ij}^\ell = R_{ij}^\ell$ , y tomando  $F = \Phi(F^1, F^2, F^3, F^4) = \Phi(R^1, R^2, R^3, R^4) = \max\{F^1, F^2, F^3, F^4\}$  y  $M = \theta(A, R) = \gamma A + (1 - \gamma)R$  para  $\gamma \in [0, 1]$ . Cuando se considera la información adicional sobre las distintas afinidades, la partición obtenida mediante el método propuesto cambia con respecto a la partición clásica, de manera que, para ciertos valores de  $\gamma$ , ( $\gamma \leq 0.5$ ), los individuos 1, 5, 6 y 7 se asignan al mismo grupo, por tener relaciones de afinidad en alguna de las cuatro matrices. Esta agrupación hace que la modularidad agregada se maximice en el método *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain* con respecto al algoritmo de Louvain, que no la tiene en cuenta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^1 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^4 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 7.4: MEFG  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4}))$ .

Tabla 7.3: Particiones y modularidad obtenidas con los algoritmos *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain* y Louvain para distintos valores de  $\gamma$ .

$\gamma$	Algoritmo <i>Multi-dimensional Duo Affinity Louvain</i>				Algoritmo de Louvain			
	$Q_A$	$Q_F$	$\gamma Q_A + (1-\gamma) Q_F$	Partición	$Q_A$	$Q_F$	$\gamma Q_A + (1-\gamma) Q_F$	Partición
1	0.2245	-0.1471	0.2245	{{1, 2, 7}, {3, 4}, {5, 6}}	0.2245	-0.1471	0.2245	{{1, 2, 7}, {3, 4}, {5, 6}}
0.9	0.2245	-0.1401	0.1880	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6, 7}}	0.2245	-0.1471	0.1873	{{1, 2, 7}, {3, 4}, {5, 6}}
0.7	0.2245	-0.1401	0.1151	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6, 7}}	0.2245	-0.1471	0.1130	{{1, 2, 7}, {3, 4}, {5, 6}}
0.5	0.2041	0.0000	0.1021	{{1, 5, 6, 7}, {2, 3, 4}}	0.2245	-0.1471	0.0387	{{1, 2, 7}, {3, 4}, {5, 6}}
0.3	0.2041	0.0000	0.0612	{{1, 5, 6, 7}, {2, 3, 4}}	0.2245	-0.1471	-0.0356	{{1, 2, 7}, {3, 4}, {5, 6}}
0.1	0.2041	0.0000	0.0204	{{1, 5, 6, 7}, {2, 3, 4}}	0.2245	-0.1471	-0.1099	{{1, 2, 7}, {3, 4}, {5, 6}}
0	0.2041	0.0000	0.0000	{{1, 5, 6, 7}, {2, 3, 4}}	0.2245	-0.1471	-0.1471	{{1, 2, 7}, {3, 4}, {5, 6}}

**Ejemplo 7.2.5.** Se considera el grafo mostrado en el Ejemplo 6.3.9. Si se conociera cierta información adicional sobre las relaciones entre elementos, y asumiendo que los grupos obtenidos han de verse influidos por la misma, cabría esperar la posibilidad de que la partición prototipo de este grafo obtenida con la aplicación de métodos basados en la estructura del grafo,  $P = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$ , fuera modificada. Se asume que existen cuatro matrices,  $R^1$ ,  $R^2$ ,  $R^3$  y  $R^4$ , cada una de las cuales define cierta relación de afinidad entre los pares de nodos. A partir de estas matrices se obtiene la familia de medidas borrosas  $(\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4})$ , donde, para cada  $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ , la medida borrosa  $\mu_{R^\ell}$  se calcula a partir de  $R^\ell$ . En la Tabla 7.4, se presentan los valores de la modularidad relativa a las particiones obtenidas mediante el algoritmo *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain* y el algoritmo de Louvain, sabiendo que  $F_{ij}^\ell = R_{ij}^\ell$ , y tomando  $F = \Phi(F^1, F^2, F^3, F^4) = \Phi(R^1, R^2, R^3, R^4) = \max\{R^1, R^2, R^3, R^4\}$  y  $M = \theta(A, R) = \gamma A + (1 - \gamma) R$  para  $\gamma \in [0, 1]$ . Note que, cuando se acepta que la información adicional ha de influir en la formación de los grupos, ( $\gamma \leq 0.7$ ), la partición obtenida mediante el método propuesto cambia con respecto a la partición clásica, de manera que, los dos subgrupos clásicos de cinco elementos se dividan en dos cada uno, de manera que permanecen juntos los individuos 1, 2 y 3, que tienen relación en la matriz  $R^1$ ; también los individuos 4 y 5, que tienen relación en  $R^2$ ; 6 y 7, que tienen relación en  $R^3$ , y los individuos 8, 9 y 10, que tienen relación en  $R^4$ . Esta agrupación hace que se maximice la modularidad agregada con respecto al método en que no se considera.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^1 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R^4 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Figura 7.5: MEFG  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \mu_{R^2}, \mu_{R^3}, \mu_{R^4}))$ .

Tabla 7.4: Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain* y *Louvain* para distintos valores de  $\gamma$ .

$\gamma$	Algoritmo <i>Multi-dimensional Duo Affinity Louvain</i>				Algoritmo de Louvain			
	$Q_A$	$Q_F$	$\gamma Q_A + (1-\gamma) Q_F$	Partición	$Q_A$	$Q_F$	$\gamma Q_A + (1-\gamma) Q_F$	Partición
1	0.4231	0.5000	0.4231	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}	0.4231	0.5000	0.4231	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}
0.9	0.4231	0.5000	0.4308	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}	0.4231	0.5000	0.4308	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}
0.7	0.3521	0.7500	0.4715	{{1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7}, {8, 9, 10}}	0.4231	0.5000	0.4462	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}
0.5	0.3521	0.7500	0.5511	{{1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7}, {8, 9, 10}}	0.4231	0.5000	0.4616	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}
0.3	0.3521	0.7500	0.6306	{{1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7}, {8, 9, 10}}	0.4231	0.5000	0.4769	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}
0.1	0.3521	0.7500	0.7102	{{1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7}, {8, 9, 10}}	0.4231	0.5000	0.4923	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}
0	0.3521	0.7500	0.7500	{{1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7}, {8, 9, 10}}	0.4231	0.5000	0.5000	{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10}}

### 7.2.3. Familia de medidas borrosas bipolares

En el contexto definido por las relaciones descritas por medidas borrosas bipolares y aplicadas a problemas de SNA, y ante la evidente necesidad de contar con varias variables para modelar la realidad, en esta sección se trabaja en la detección de comunidades en grafos, adaptada a la existencia de múltiples medidas bipolares. Este tipo de problemas se basa en la existencia de un grafo borroso extendido bipolar multi-dimensional, MEFG bipolar.

**Ejemplo 7.2.6.** Se considera el grupo  $V$  de usuarios conectados en LinkedIn. Entendiendo que cada conexión entre un par de usuarios se puede modelar mediante una arista, esta situación es fácilmente representable mediante un grafo nítido  $G = (V, E)$ , cuya estructura de comunidades aporta información muy valiosa sobre la forma en que interactúan los usuarios de esta red social. Sin embargo, hay mucha más información inmersa en esta

red, independiente a las conexiones entre usuarios. Similitudes entre perfiles del mismo sector, desavenencias entre entes vinculados a organismos rivales, sinergias entre perfiles que buscan trabajo y los que lo ofrecen, discrepancia entre sectores enfrentados, etc. Profundizando más en la consideración de este tipo de relaciones, incluso se podría considerar la existencia de sinergias entre perfiles del mismo sector laboral, que a su vez presentan ciertas reticencias a interactuar por ser rivales. Esta situación bien podría modelarse mediante una o varias medidas borrosas, que, en combinación con el grafo que representa la estructura de conexiones, proporcionan una representación muy detallada. Los grupos detectados en este MEFG bipolar serán sin duda mucho más cohesivos con la realidad que aquellos basados únicamente en la estructura de interacciones.

Pese a que en este escenario la detección de comunidades se basa en relaciones de talante simétrico (amistad/enemistad; intereses laborales compartidos u opuestos), esta filosofía también podría adaptarse a la consideración de relaciones no simétricas. En cualquier caso, para abordar el proceso de análisis de este tipo de relaciones, es imprescindible medir y representar matemáticamente cómo cada una de ellas afecta a la noción de grupo.

Se propone una metodología de agregación en cinco pasos para simplificar la información representada por un MEFG bipolar para una posible aplicación posterior en problemas de detección de comunidades. Este proceso guarda cierta similitud con el seguido en la Definición 4.4.4 para obtener el multi-grafo valorado bipolar asociado a  $r$  medidas borrosas bipolares. Formalmente, la metodología de agregación se define como sigue.

▪ **Paso 1: construir el multi-grafo valorado bipolar multi-dimensional.**

El primer paso consiste en resumir la información representada por cada medida borrosa bipolar  $\mu^{b_\ell}$  en dos matrices,  $(F^{-\ell}, F^{+\ell})$ , que serán la adyacencia del MAWG bipolar asociado a  $\mu^{b_\ell}$ . Los  $r$  pares de matrices  $(F^{-\ell}, F^{+\ell})$  conforman la adyacencia del MAWG bipolar asociado a la familia de medidas borrosas bipolares  $(\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r})$ . El cálculo de las distintas matrices de adyacencia puede llevarse a cabo considerando el índice de interacción o el de Shapley, siendo recomendable el uso de la misma herramienta para todas las matrices implicadas. Se hará un énfasis especial en el uso de valor de Shapley proponiéndose una aplicación específica del mismo, de modo que el marco relativo al índice de interacción es una ventana abierta a trabajo futuro.

Dada una familia de medidas borrosas bipolares  $(\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_s})$ , se obtienen las matrices  $(F^{-1}, \dots, F^{-s}, F^{+1}, \dots, F^{+s})$ , donde,  $\forall \ell = 1, \dots, r$ :

$$F_{ij}^{-\ell} = \phi^{-\ell} \left( Sh_i(\mu^{-\ell}) - Sh_i^j(\mu^{-\ell}), Sh_j(\mu^{-\ell}) - Sh_j^i(\mu^{-\ell}) \right)$$

$$F_{ij}^{+\ell} = \phi^{+\ell} \left( Sh_i(\mu^{+\ell}) - Sh_i^j(\mu^{+\ell}), Sh_j(\mu^{+\ell}) - Sh_j^i(\mu^{+\ell}) \right)$$

siendo  $\phi^{-\ell}, \phi^{+\ell} : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$  operadores de agregación bi-variados usados para hacer simétrica la relación entre cada par de elementos, a partir de su relación asimétrica en las medidas borrosas  $\mu^{-\ell}$  y  $\mu^{+\ell}$ .

- **Paso 2: agregación de la información de naturaleza negativa.** Se agregan las matrices  $F^{-1}, \dots, F^{-r}$  hasta obtener  $F^{-}$  por medio de la función de agregación  $\Phi^{-} : \Pi^r \rightarrow \Pi$ . Se propone el uso de un agregador matricial basado en los operadores clásicos de agregación con transformación elemento a elemento. Matemáticamente,

$$F^{-} = \Phi^{-} (F^{-1}, \dots, F^{-r})$$

- **Paso 3: agregación de la información de naturaleza positiva.** De manera similar al Paso 2, se agregan las matrices  $F^{+1}, \dots, F^{+r}$  hasta obtener  $F^{+}$ , mediante  $\Phi^{+} : \Pi^r \rightarrow \Pi$ . Una vez más, se propone el uso de un operador de agregación matricial basado en los agregadores clásicos de transformación puntual. Matemáticamente,

$$F^{+} = \Phi^{+} (F^{+1}, \dots, F^{+r})$$

- **Paso 4: transformación de la información negativa.** Es importante tener en cuenta que las matrices  $F^{-}$  y  $F^{+}$  son antónimas, en el sentido de que una representa discrepancia y la otra afinidad. Por ello, en este punto se sugiere un pre-procesamiento consistente en una transformación de la matriz  $F^{-}$  en su opuesta o antónima,  $F^{-op}$ , entendiéndose que el concepto ‘opuesto’ puede tener diversas interpretaciones atendiendo al escenario contemplado para así garantizar una agregación coherente de toda la información disponible. Para ello, se considera el operador de negación  $N : \Pi \rightarrow \Pi$ , y se define  $F^{-op} = N(F^{-})$ . Evidentemente, el operador  $N$  debe ser elegido de manera que las matrices  $F^{+}$  y  $F^{-op}$  tengan interpretaciones o naturaleza similares.
- **Paso 5: agregación final.** Por último se plantea una combinación de la información definida por las matrices  $F^{-op}$  y  $F^{+}$ , para la cual se hace uso del operador de agregación  $\psi : \Pi(n)^2 \rightarrow \Pi(n)$  como sigue:

$$F_b^* = \psi (F^{-op}, F^{+})$$

**Observación 7.** Además de las funciones  $\phi^{-\ell}$  y  $\phi^{+\ell}$  relativas a cada par  $(F^{-\ell}, F^{+\ell})$ , en este proceso hay tres tipos distintos de operadores de agregación involucrados: dos relacionados con la agregaciones independientes de las fuentes de información negativa y positiva,  $\Phi^{-}$  y  $\Phi^{+}$ , y otro empleado para la

combinación de ambas,  $\psi$ . Ante la convicción de que la decisión concerniente a los distintos operadores es absolutamente dependiente del problema abordado, se ha presentado el problema/proceso de agregación de una manera muy genérica, sin especificar el operador utilizado en cada caso.

En el caso uni-dimensional, sólo habría que contemplar un tipo de operador,  $\psi$ , lo que limita la noción de grupo a la siguiente casuística:

- Si  $\psi$  es un operador disyuntivo, los elementos de los grupos buscados tendrán relaciones positivas o no tendrán relaciones negativas.
- Si  $\psi$  es un operador conjuntivo, los elementos de los grupos buscados tendrán relaciones positivas y no tendrán relaciones negativas.
- Si  $\psi$  es un operador promedio, se contempla un promedio de los puntos previos.

La complejidad de este problema aumenta ante la existencia de varias fuentes de información de diversa índole a agregar. Si se fuerza que los tres operadores  $\Phi^-$ ,  $\Phi^+$  y  $\psi$  pertenezcan a uno de los grupos enunciados en la Sección 2.3, los operadores disyuntivos, conjuntivos y promedio, se contemplarán 27 tipos de grupos. Los siguientes casos son los extremos:

- $\Phi^-$ ,  $\Phi^+$  y  $\psi$  son disyuntivos. En este caso, primarán los grupos cuyos elementos tengan alguna característica en común (positiva o negativa, indistintamente). El tamaño de los grupos ‘similares’ en cuanto a información adicional se refiere, crecerá a medida que aumente la cantidad  $r$  de medidas borrosas bipolares consideradas.
- $\Phi^-$ ,  $\Phi^+$  y  $\psi$  son conjuntivos. Es el caso opuesto al contemplado en el punto anterior. Ante esta selección, primarán los grupos cuyos elementos tengan características positivas en común y no presenten tendencia a estar separados a través de alguna fuente de información de talante negativo. En este caso, a medida que aumenta la cantidad  $r$  de medidas borrosas bipolares consideradas, los grupos ‘similares’ en cuanto a información adicional se refiere, se vuelven más restrictivos, disminuyendo por ende su tamaño.

Para el desarrollo de los resultados experimentales relativos a este proceso, detallado en la Sección 8.3 del Capítulo 8, se ha optado por el uso de operadores promedio para  $\Phi^-$  y  $\Phi^+$ , siendo  $\psi$  un operador conjuntivo.

A continuación se define un algoritmo de detección de comunidades en un MEFG bipolar,  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r}))$ . Se trata de una generalización del algoritmo *Modified Louvain*, desarrollado para la resolución de problemas de detección de comunidades basados en la existencia de múltiples medidas

borrosas bipolares y publicado en [87]. Recibe el nombre de algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain*, y su funcionamiento se muestra a través de su pseudocódigo, en el Algoritmo [17].

Para aplicar este método hay que especificar las funciones  $\phi^{-\ell}$  y  $\phi^{+\ell}$ , utilizadas para obtener individualmente las matrices  $F^{-\ell}, F^{+\ell}$  a partir de las medidas borrosas correspondientes,  $\mu^{-\ell}$  y  $\mu^{+\ell}$ . También son necesarios los operadores  $\Phi^{-}, \Phi^{+}$  para agregar toda la información negativa y positiva en dos matrices, y  $\psi$  para combinar toda la información existente en la matriz final  $F_b^*$ , la cual resume la información aportada por la familia de medidas borrosas  $\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r}$ . Como se menciona en la Observación [5], la elección estos operadores influirá directamente a la noción de grupo considerado. Como se ha detallado en secciones anteriores, este estudio se ha basado en la consideración de los operadores OWA, particularmente el mínimo, el máximo y el promedio. Considerando estas opciones, las posibles permutaciones de las elecciones realizadas para los operadores  $\Phi^{-}, \Phi^{+}$  y  $\psi$  proporcionan 27 nociones diferentes del concepto de grupo buscado.

El primer paso del proceso propuesto para detectar comunidades en  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r}))$  es el cálculo del MAWG bipolar correspondiente, seguido de la aplicación del proceso de agregación paso-a-paso descrito previamente para obtener la matriz  $F_b^*$ . Tras ello, se define la matriz  $M = \theta(A, F_b^*)$ , siendo  $\theta : \Pi^2 \rightarrow \Pi$  una función empleada para combinar dos matrices. Para obtener  $M$ , hay que especificar, para cada medida borrosa bipolar  $\mu^{b_\ell}$ , las funciones  $\phi^{-\ell} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  y  $\phi^{+\ell} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , empleadas para simetrizar las relaciones asimétricas de los distintos pares de nodos atendiendo a las consideraciones detalladas; además, hay que concretar los operadores  $\Phi^{-} : \Pi^r \rightarrow \Pi$  y  $\Phi^{+} : \Pi^r \rightarrow \Pi$  para obtener las matrices  $F^{-}$  y  $F^{+}$ , el operador de negación  $N : \Pi \rightarrow \Pi$  a través del cual se obtiene la matriz antónima de  $F^{-}$ ,  $F^{-op}$ , y  $\psi : \Pi^2 \rightarrow \Pi$ , mediante el cual se obtiene la matriz  $F_b^*$ . Finalmente, se usa la matriz de adyacencia del grafo nítido,  $A$ , para detectar grupos ‘posibles’, mientras que el cálculo de la variación de modularidad se lleva a cabo considerando la matriz  $M$ . Ante la consideración de medidas borrosas aditivas, la complejidad del algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain* es idéntica a la del algoritmo de Louvain.

**Algoritmo 17** *Multiple Bipolar Duo Louvain*


---

```

1: Input:  $(A, (\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r}))$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3: for  $(\ell = 1)$  to  $(r)$  do
4:    $F_{ij}^{-\ell} \leftarrow \phi^{-\ell} (Sh_i(\mu^{-\ell}) - Sh_i^j(\mu^{-\ell}), Sh_j(\mu^{-\ell}) - Sh_j^i(\mu^{-\ell}))$ ,  $\forall i, j \in V$ ;
5:    $F_{ij}^{+\ell} \leftarrow \phi^{+\ell} (Sh_i(\mu^{+\ell}) - Sh_i^j(\mu^{+\ell}), Sh_j(\mu^{+\ell}) - Sh_j^i(\mu^{+\ell}))$ ,  $\forall i, j \in V$ ;
6: end for
7:  $F^- \leftarrow \Phi^- (F^{-1}, \dots, F^{-r})$ ;
8:  $F^+ \leftarrow \Phi^+ (F^{+1}, \dots, F^{+r})$ ;
9:  $F^{-op} \leftarrow N(F^-)$ ;
10:  $F_b^* \leftarrow \psi(F^{-op}, F^+)$ ;
11:  $M \leftarrow \theta(A, F_b^*)$ ;
12:  $P \leftarrow Duo\ Louvain(A, M)$ ;
13: return $(P)$ ;

```

---

A continuación se presenta un caso particular del algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain*. Concretamente, para cada  $\ell \in \{1, \dots, r\}$ , se propone el uso del operador del mínimo para obtener las matrices  $(F^{-\ell}, F^{+\ell})$ ,  $\phi^{-\ell} = \phi^{+\ell} = \min$ . Tras la agregación de las familias de matrices  $(F^{-1}, \dots, F^{-r})$  y  $(F^{+1}, \dots, F^{+r})$  en  $F^-$  y  $F^+$  respectivamente, se define la matriz  $F^{-op}$ , de carácter opuesto de  $F^-$ ; que se agrega con  $F^+$  para obtener  $F_b^*$ , que resume toda la información adicional. Finalmente, se utiliza el parámetro de importancia  $\gamma \in [0, 1]$  para definir la matriz  $M$  como una agregación de  $A$  y  $F_b^*$ . Esta aplicación específica se define formalmente a continuación.

**Algoritmo 18** Aplicación específica de *Multiple Bipolar Duo Louvain*


---

```

1: Input:  $(A, \mu^b = (\mu^-, \mu^+))$ ,  $A$  es una representación de  $G = (V, E)$ ;
2: Output:  $P$ ;
3: for  $(\ell = 1)$  to  $(r)$  do
4:    $F_{ij}^{-\ell} \leftarrow \min\{Sh_i(\mu^{-\ell}) - Sh_i^j(\mu^{-\ell}), Sh_j(\mu^{-\ell}) - Sh_j^i(\mu^{-\ell})\}$ ,  $\forall i, j \in V$ ;
5:    $F_{ij}^{+\ell} \leftarrow \min\{Sh_i(\mu^{+\ell}) - Sh_i^j(\mu^{+\ell}), Sh_j(\mu^{+\ell}) - Sh_j^i(\mu^{+\ell})\}$ ,  $\forall i, j \in V$ ;
6: end for
7:  $F^- \leftarrow \Phi^- (F^{-1}, \dots, F^{-r})$ ;
8:  $F^+ \leftarrow \Phi^+ (F^{+1}, \dots, F^{+r})$ ;
9:  $I_{ii}^- \leftarrow 0$ ;  $I_{ij}^- \leftarrow \max\{F_{ij}^- | i, j \in V\}$ ,  $\forall i \neq j, i, j \in V$ ;
10:  $F^{-op} \leftarrow \frac{I^- - F^-}{\sum_i \sum_j (I_{ij}^- - F_{ij}^-)}$ ;
11:  $F_b^* \leftarrow \psi(F^{-op}, F^+)$ ;
12:  $M \leftarrow \gamma A + (1 - \gamma) F_b^*$ ;
13:  $P \leftarrow Duo\ Louvain(A, M)$ ;
14: return $(P)$ ;

```

---

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo del caso específico de aplicación del algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain* previamente detallado.

**Ejemplo 7.2.7.** Sea  $G = (V, E)$  el grafo mostrado en la Figura 7.6. Con base en el conjunto nítido de aristas,  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}\}$ , cualquier algoritmo clásico de detección de comunidades proporcionaría los módulos  $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $C_2 = \{5, 6, 7, 8\}$ .

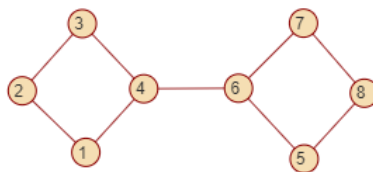


Figura 7.6: Ejemplo. Grafo de 8 nodos.

En un contexto más complejo, se asume que se dispone de otras fuentes de información independientes a las conexiones entre elementos. Por una parte se conoce la relación personal entre los elementos involucrados, de manera que hay pares de individuos entre los que existen relaciones de enemistad, (1 y 4; 6 y 8), y pares de individuos entre los que existen relaciones de amistad (1 y 2; 3 y 4; 5 y 6); por otro lado se conocen las relaciones laborales, sabiendo que los pares de individuos (1 y 3, 2 y 4, 5 y 7, 6 y 7) tienen intereses laborales opuestos, mientras que los elementos (7 y 8) son asociados y comparten intereses. Si se re-formula la noción de grupo con base en toda la información disponible, parece lógico intuir que deberían detectarse cuatro grupos, a saber  $C_1^* = \{1, 2\}$ ,  $C_2^* = \{3, 4\}$ ,  $C_3^* = \{5, 6\}$ ,  $C_4^* = \{7, 8\}$ . Se presenta la aplicación específica del algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain* previa, considerando dos opciones para el operador  $\psi = \text{mín, promedio}$ .

Sean  $\mu^{b_1}$  y  $\mu^{b_2}$  las medidas borrosas bipolares basadas en estas relaciones. Junto con el grafo  $G$ , cuya adyacencia  $A$  se muestra en la Figura 7.7, conforman el MEFG bipolar  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \mu^{b_2}))$ , a partir del cual se obtienen las matrices  $F^{-1}$  y  $F^{-2}$ , que definen respectivamente la evidencia negativa de las relaciones personales y laborales, y las matrices  $F^{+1}$  y  $F^{+2}$ , que definen de manera análoga la evidencia positiva de estas relaciones. Estas matrices, mostradas en la Figura 7.7, representan la evolución del grafo nítido  $G$  a un MEFG bipolar, y su cálculo se efectúa como sigue.

- ▷  $F^- = \Phi^-(F^{-1}, F^{-2}) = \text{máx}\{F^{-1}, F^{-2}\}$
- ▷  $F^+ = \Phi^+(F^{+1}, F^{+2}) = \text{máx}\{F^{+1}, F^{+2}\}$
- ▷  $F^{-op} = N(F^-) = 1 * \text{máx}_{i,j}\{F^-\} - F^-$
- ▷  $F_b^* = \psi(F^{-op}, F^+)$ . Se proponen dos escenarios:

$$1. F_b^* = \min\{F^{-op}, F^+\}$$

$$2. F_b^* = \frac{1}{2}F^{-op} + \frac{1}{2}F^+$$

$$\triangleright M = \theta(A, F_b^*) = \gamma A + \gamma F_b^*$$

En las Tablas [7.5](#) y [7.6](#) se puede observar cómo, para las dos elecciones del operador  $\psi$  propuestas, cuando la información adicional toma cierta relevancia atendiendo al parámetro de importancia  $\gamma$  ( $\gamma \leq 0.5$ ), el algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain* proporciona la partición  $P^a$ . Note también que la modularidad agregada relativa a este método es siempre superior a la relativa al algoritmo de Louvain.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F^{+1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{-2} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F^{+2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 7.7: MEFG bipolar  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \mu^{b_2}))$ .

Tabla 7.5: Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos *Multiple Bipolar Duo Louvain* y de Louvain para distintos valores de  $\gamma$ .  $\psi = \text{mín.}$

$\gamma$	Algoritmo <i>Multiple Bipolar Duo Louvain</i>				Algoritmo de Louvain			
	$Q_A$	$Q_{F_b}$	$\gamma Q_A + (1-\gamma)Q_{F_b}$	Partición	$Q_A$	$Q_{F_b}$	$\gamma Q_A + (1-\alpha)Q_{F_b}$	Partición
1	0.3889	0.5000	0.3889	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}	0.3889	0.5000	0.3889	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.9	0.3889	0.5000	0.4000	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}	0.3889	0.5000	0.4000	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.7	0.3889	0.5000	0.4222	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}	0.3889	0.5000	0.4222	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.5	0.1914	0.7500	0.4707	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}}	0.3889	0.5000	0.4445	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.3	0.1914	0.7500	0.5824	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}}	0.3889	0.5000	0.4667	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.1	0.1914	0.7500	0.6941	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}}	0.3889	0.5000	0.4889	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0	0.1914	0.7500	0.7500	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}}	0.3889	0.5000	0.5000	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}

Tabla 7.6: Particiones y modularidad obtenidas mediante los algoritmos *Multiple Bipolar Duo Louvain* y de Louvain para distintos valores de  $\gamma$ .  $\psi = \text{promedio.}$

$\gamma$	Algoritmo <i>Multiple Bipolar Duo Louvain</i>				Algoritmo de Louvain			
	$Q_A$	$Q_{F_b}$	$\gamma Q_A + (1-\gamma)Q_{F_b}$	Partición	$Q_A$	$Q_{F_b}$	$\gamma Q_A + (1-\alpha)Q_{F_b}$	Partición
1	0.3889	0.1923	0.3889	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}	0.3889	0.1923	0.3889	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.9	0.3889	0.1923	0.3692	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}	0.3889	0.1923	0.3692	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.7	0.3889	0.1923	0.3299	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}	0.3889	0.1923	0.3299	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.5	0.1914	0.4038	0.2976	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}}	0.3889	0.1923	0.2906	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.3	0.1914	0.4038	0.3401	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}}	0.3889	0.1923	0.2513	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0.1	0.1914	0.4038	0.3826	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}}	0.3889	0.1923	0.2120	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}
0	0.1914	0.4038	0.4038	{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}, {7, 8}}	0.3889	0.1923	0.1923	{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}}

## Capítulo 8

# Resultados experimentales

*Scheherezade, Op.35*

N. Rimski-Kórsakov

**RESUMEN:** En este Capítulo se presentan los resultados experimentales correspondientes a la evaluación de la metodología desarrollada en esta memoria. Se consideran diversos escenarios, cada uno de ellos relativo a uno de los tipos de medidas borrosas específicas presentadas:  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno, medidas borrosas de afinidad y medidas borrosas bipolares. Para la evaluación se utilizan distintos modelos de referencia en combinación con el cálculo del NMI.

Este Capítulo se divide en tres secciones, cada una de ellas dedicada al estudio de uno de los tipos de medidas borrosas específicos presentados previamente. Así, en las siguientes páginas se presenta la evaluación de la metodología de detección de comunidades basada en medidas borrosas desarrollada en esta memoria. Esta asunción no se ha tomado previamente en ningún método de la literatura, con lo que la evaluación no se puede llevar a cabo mediante la comparativa con otros procesos existentes.

Siguiendo la idea propuesta en [70], se procede a la evaluación mediante *benchmarking* y cálculo del NMI [109]. El objetivo es cuantificar cuánta información de la configuración prefijada en un modelo de referencia es capaz de recuperar el algoritmo en evaluación. El valor del NMI representa cuánto se parece una partición a la partición estándar. Cuanto más cercano a 1 sea el valor del NMI, más se parecerá la partición obtenida a la partición estándar, con lo cual, mejor será la eficacia del algoritmo en estudio. Para cada tipo de medida borrosa se proponen cuatro modelos de referencia en los que se combinan distintas configuraciones, considerando estructuras simétricas y asimétricas. La intención es que cada uno de estos modelos de referencia sea la representación de un grafo borroso extendido (multi-dimensional

o no) en su versión agregada. Esto es, cada modelo de referencia constará de dos matrices, una relativa a la adyacencia del grafo borroso extendido, y la otra relativa a una cierta agregación de la(s) medidas borrosas implicadas. En caso de que se asuma que la herramienta implicada es un EFG,  $\tilde{G} = (V, E, \mu)$ , esta segunda componente se puede considerar la adyacencia  $F$  del AWG relativo a  $\mu$ . Si por el contrario se asume la consideración de un MEFG,  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^1, \dots, \mu^r))$ , esta segunda componente del modelo de referencia puede verse como una agregación de las matrices  $F^\ell$  relativas a las  $r$  medidas  $\mu^\ell$ ,  $F = \Phi(F^1, \dots, F^r)$ . En cualquier caso, se evaluará el funcionamiento de la metodología relativa a la incorporación de información adicional modelada por medidas borrosas al problema de detección de comunidades, cuyo método troncal es el algoritmo *Duo Louvain*.

En cada uno de los modelos de referencia considerado, se combinarán distintos niveles de densidad, tanto de la matriz de adyacencia como de la matriz de relaciones. En cada uno de estos niveles, se trabajará en un proceso de simulación basado en la generación de 100 matrices de cada tipo (adyacencia y relaciones), atendiendo a unos ciertos parámetros que controlan la aleatoriedad y que se presentarán en cada uno de los escenarios. Para cada modelo de referencia y cada nivel de densidad, se muestra el cálculo del NMI promedio relativo a la generación de los 100 pares (o tríos) de redes.

## 8.1. Familia $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de múltiples vectores.

En esta sección se presentan los resultados experimentales relativos al uso de  $\lambda$ -medidas borrosa de Sugeno, esto es, considerando un MEFG de vector. Primero se detalla la definición del experimento, para a continuación presentar los resultados correspondientes a cuatro modelos de referencia distintos.

### 8.1.1. Diseño del experimento

En este caso, la matriz de adyacencia  $A$  se genera aleatoriamente según la ecuación (2.8) para un conjunto  $V$  de 256 nodos, considerando las distintas combinaciones posibles de los grados de entrada/salida ( $z_{in}$  y  $z_{out}$ ) dependiendo del valor de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  mostrados en la Tabla 8.1, a partir de los que se regula la densidad de las conexiones representadas por  $A$ . El proceso para generar la matriz de adyacencia se muestra en el Algoritmo 19.

Tabla 8.1: Parámetros para generar la matriz  $A$  del modelo de referencia.

Leyenda	$\alpha$	$\beta$
Red 1	0.45	0.016
Red 2	0.4	0.033
Red 3	0.35	0.05
Red 4	0.325	0.058
Red 5	0.3	0.066
Red 6	0.275	0.075
Red 7	0.25	0.083
Red 8	0.225	0.091
Red 9	0.2	0.1

---

**Algoritmo 19** *Genera Adyacencia*

---

```

1: Input: ( $|C_1|, \dots, |C_r|$ ),  $\alpha, \beta, n$ ;
2: Output:  $A$ ;
3:  $A(i, j) \leftarrow 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ ;
4: for ( $i = 1$ ) to ( $n$ ) do
5:   for ( $i = 1$ ) to ( $n$ ) do
6:     for ( $\ell = 1$ ) to ( $r$ ) do
7:        $\epsilon \leftarrow \text{rand}(0, 1)$ ;
8:       if ( $|C_{\ell-1}| < i \leq |C_\ell|$ ) and ( $|C_{\ell-1}| < j \leq |C_\ell|$ ) then
9:         if  $\epsilon < \alpha$  then
10:           $A(i, j) \leftarrow 1$ ;
11:        end if
12:       else
13:         if  $\epsilon < \beta$  then
14:           $A(i, j) \leftarrow 1$ ;
15:        end if
16:       end if
17:     end for
18:   end for
19: end for
20: return( $A$ );

```

---

La componente relativa a la información adicional del MCFG de todos los modelos de referencia que se presentan en esta sección se construye a partir de cierta familia de vectores. La generación de estos vectores se ha basado en el uso de números borrosos [52, 100, 101]. Concretamente, en los llamados números borrosos trapezoidales [185].

Para acercar el concepto de *benchmarking* a la consideración de vectores, se propone la generación de vectores cuyo valor depende de ciertos números borrosos trapezoidales. Se distingue entre número borroso ‘bajo’, relativos a la generación de las componentes de cada uno de los vector que más tarde

implicarán conexiones escasas entre nodos; y números borrosos ‘altos’, relativos a la generación de las componentes de cada uno de los vector que más tarde implicarán conexiones abundantes entre nodos. Por ejemplo, si se trabaja en la generación de un grafo de referencia con 4 comunidades, será necesario generar 4 vectores. Los elementos de la primera comunidad tendrán valor ‘alto’ en el vector  $x^1$ , y ‘bajo’ en el resto. De la misma manera, los elementos de las comunidades 2, 3 y 4 tendrán valores ‘altos’ únicamente en los vectores  $x^2$ ,  $x^3$  o  $x^4$ , respectivamente. La definición y simulación de estos números borrosos trapezoidales se detalla a continuación.

▷ **Generación número borroso ‘bajo’**

Este tipo de números borrosos, representados en la Figura 8.1, se generan para representar, en cada vector, las componentes relativas a los elementos con valor ‘bajo’ en la característica relativa al vector en cuestión.

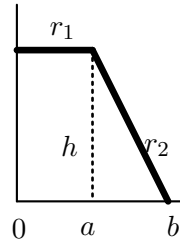


Figura 8.1: Número borroso trapezoidal *bajo*.

Fijados los valores  $a$  y  $b$ , se pueden calcular las ecuaciones de las rectas  $r_1$  y  $r_2$  de modo que el área del trapezoido debajo de ellas tenga valor 1.

Concretamente, la ecuación de la recta  $r_1$  se define como  $y = h$ , siendo el valor  $h$  seleccionado de manera que el valor de la integral sea 1:

$$1 = ah + \left( \frac{b-a}{2} \right) h \implies h = \frac{2}{a+b}$$

Por su parte,  $r_2$  es la recta que pasa por los puntos  $\left( \frac{2}{a+b}, a \right)$  y  $(0, b)$ , obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$r_2 = \begin{cases} \frac{2}{a+b} = \alpha + \beta a \\ 0 = \alpha + \beta b \end{cases}$$

Despejando  $\alpha$  y  $\beta$ , se tiene  $\alpha = \frac{-2b}{(a+b)(a-b)}$  y  $\beta = \frac{2}{(a+b)(a-b)}$ , por lo que la ecuación de la función de distribución del número borroso será:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a+b} & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{2a}{a+b} + \int_{z=a}^{z=x} \left( \frac{-2b}{(a+b)(a-b)} + \frac{2z}{(a+b)(a-b)} \right) dz & \text{si } x \in (a, b] \end{cases}$$

donde

$$\frac{2a}{a+b} + \int_{z=a}^{z=x} \left( \frac{-2b}{(a+b)(a-b)} + \frac{2z}{(a+b)(a-b)} \right) dz = \frac{2a}{a+b} + \int_{z=a}^{z=x} \left( \frac{2(z-b)}{(a+b)(a-b)} \right) dz = \frac{2a}{a+b} + \left[ \frac{2(z-b)^2}{(a+b)(a-b)2} \right]_{z=a}^{z=x} = \frac{2a}{a+b} + \frac{(x-b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)(a-b)}.$$

Una vez caracterizado el número borroso ‘bajo’ (identificado en lo que sigue como  $\ell$ ) para simular los valores concretos del mismo que se emplearán para la generación de los vectores, se aplica el método de la inversa. Para ello, es necesario calcular la función inversa de  $F$ ,  $F^{-1}(x)$ , y después simular un valor entre 0 y 1 ( $p$ ). Finalmente, el valor  $F^{-1}(p)$  será el valor asignado a una arista entre nodos que no están en la misma comunidad. Concretamente:

- Si  $p \leq \frac{2a}{a+b} \implies p = \frac{2x}{a+b} \implies x = \frac{(a+b)p}{2}$
- Si  $p > \frac{2a}{a+b} \implies p = \frac{2a}{a+b} + \frac{(x-b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)(a-b)}$   
 $\implies x = b - \sqrt{\left(p - \frac{2a}{a+b}\right) (a+b)(a-b) + (a-b)^2}$

Se toma el signo ‘-’ porque  $x - b < 0$ .

Por tanto, siendo  $randUni(0, 1)$  un valor aleatorio obtenido de una distribución uniforme  $U(0, 1)$ , los valores ‘bajos’ considerados en la simulación se obtendrán atendiendo a la siguiente expresión:

$$p = randUni(0, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(a+b)p}{2} & \text{si } p \leq \frac{2a}{a+b} \\ x = b - \sqrt{\left(p - \frac{2a}{a+b}\right) (a+b)(a-b) + (a-b)^2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este proceso de simulación se resume en el Algoritmo [20](#).

**Algoritmo 20** *Low Fuzzy Number*


---

```

1: Input:  $a, b$ ;
2: Output:  $\ell$ ;
3:  $p \leftarrow \text{rand}(0, 1)$ ;
4: if  $p \leq \frac{2a}{a+b}$  then
5:    $\ell \leftarrow \frac{(a+b)p}{2}$ ;
6: else
7:    $\ell \leftarrow b - \sqrt{\left(p - \frac{2a}{a+b}\right) (a+b) (a-b) + (a+b)^2}$ ;
8: end if
9: return( $\ell$ );

```

---

▷ **Generación número borroso ‘alto’**

Este tipo de números borrosos, representados en la Figura 8.2, se generan para representar, en cada vector, las componentes relativas a los elementos con valor ‘alto’ en la característica relativa al vector en cuestión.

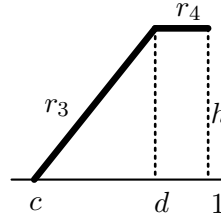


Figura 8.2: Número borroso trapezoidal *alto*.

Fijados los valores  $c$  y  $d$ , se pueden calcular las ecuaciones de las rectas  $r_3$  y  $r_4$  de modo que el área del trapecio debajo de ellas tenga valor 1.

Concretamente, la ecuación de la recta  $r_3$  se define como  $y = h$ , siendo el valor  $h$  seleccionado de manera que el valor de la integral sea 1:

$$1 = \frac{(d-c)h}{2} (1-d)h \implies h = \frac{2}{(1-d) + (1-c)}$$

Por su parte,  $r_4$  es la recta que pasa por los puntos  $\left(\frac{2}{(1-d)+(1-c)}, d\right)$  y  $(0, c)$ , obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$r_4 = \begin{cases} \frac{2}{(1-d)+(1-c)} = \alpha + \beta d \\ 0 = \alpha + \beta c \end{cases}$$

Despejando  $\alpha$  y  $\beta$ , se tiene  $\alpha = \frac{-2c}{[(1-d)+(1-c)](d-c)}$  y  $\beta = \frac{2}{[(1-d)+(1-c)](d-c)}$ , por lo que la ecuación de la función de distribución será:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{z=c}^{z=x} \left( \frac{-2c+2z}{[(1-d)+(1-c)](d-c)} \right) dz & \text{si } x \in [c, d] \\ \int_{z=c}^{z=d} \left( \frac{-2c+2z}{[(1-d)+(1-c)](d-c)} \right) dz + \int_{z=d}^{z=x} \frac{2}{(1-d)+(1-c)} & \text{si } x \in (d, 1] \end{cases}$$

donde

- $\int_{z=c}^{z=x} \left( \frac{-2c+2z}{[(1-d)+(1-c)](d-c)} \right) dz = \frac{[(z-c)^2]_c^x}{[(1-d)+(1-c)](d-c)} = \frac{(x-c)^2}{[(1-d)+(1-c)](d-c)}$
- $\int_{z=c}^{z=d} \left( \frac{-2c+2z}{[(1-d)+(1-c)](d-c)} \right) dz + \int_{z=d}^{z=x} \frac{2}{(1-d)+(1-c)} = \frac{[(z-c)^2]_c^d}{[(1-d)+(1-c)](d-c)} + \frac{2[z]_{z=d}^{z=x}}{(1-d)+(1-c)} = \frac{(d-c)^2}{[(1-d)+(1-c)](d-c)} + \frac{2(x-d)}{(1-d)+(1-c)} = \frac{(x-d)+(x-c)}{(1-d)+(1-c)}$

Análogamente al proceso definido para la simulación de números borrosos ‘bajos’, se utiliza el método de la inversa para simular los valores del número borroso ‘alto’ ( $\tilde{h}$  en lo que sigue) que se utilizarán para la generación de vectores. Así, el valor  $F^{-1}(p)$  será:

- Si  $p \leq \frac{d-c}{(1-d)+(1-c)} \implies p = \frac{(x-c)^2}{[(1-d)+(1-c)](d-c)} \implies x = c + \sqrt{p(d-c)[(1-d)+(1-c)]}$
- Si  $p > \frac{d-c}{(1-d)+(1-c)} \implies p = \frac{(x-d)+(x-c)}{(1-d)+(1-c)} \implies p = \frac{(x-d)+(x-c)}{(1-d)+(1-c)} \implies x = \frac{p[(1-d)+(1-c)+d+c]}{2}$

Se toma el signo ‘+’ porque  $x - d > 0$ .

Por tanto, siendo  $randUni(0, 1)$  un valor aleatorio obtenido de una distribución uniforme  $U(0, 1)$ , los valores ‘altos’ considerados en la simulación se obtendrán atendiendo a la siguiente expresión:

$$p = randUni(0, 1) \implies \begin{cases} x = c + \sqrt{p(d-c)[(1-c)+(1-d)]} & \text{si } p \leq \frac{d-c}{(1-c)+(1-d)} \\ x = \frac{p[(1-c)+(1-d)]+c+d}{2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este proceso de simulación se resume en el Algoritmo 21.

**Algoritmo 21** *High Fuzzy Number*


---

```

1: Input:  $c, d$ ;
2: Output:  $\bar{h}$ ;
3:  $p \leftarrow \text{rand}(0, 1)$ ;
4: if  $\left(p \leq \frac{d-c}{(1-c)+(1-d)}\right)$  then
5:    $\bar{h} \leftarrow c + \sqrt{p(d-c)((1-c) + (1-d))}$ ;
6: else
7:    $\bar{h} \leftarrow \frac{p((1-c)+(1-d))+c+d}{2}$ ;
8: end if
9: return( $\bar{h}$ );

```

---

Una vez definido el proceso de generación de los vectores, se procede a detallar los parámetros que intervienen en los resultados experimentales.

En cada vector, las componentes relativas a nodos de la misma comunidad se generan como números borrosos ‘altos’, mientras que las componentes correspondientes a nodos de distintas comunidades se generan como números borrosos ‘bajos’. En cada modelo de referencia se cuenta con una familia de  $r$  vectores como punto de partida, siendo  $r$  la cantidad de comunidades incrustadas en la matriz de sinergias. Para ello, cada vector  $x^i$  estará asociado a la comunidad  $C_i$ , de tal manera que los nodos que pertenezcan a dicha comunidad tendrán un valor asociado en  $x^i$  ‘alto’, mientras que los nodos que no pertenezcan a este vector tendrán un valor ‘bajo’ ( $x_j^i = \bar{h}$ , si  $j \in C_i$ ;  $x_j^i = \ell$ , si  $j \notin C_i$ ). Siendo  $a, b, c$  y  $d$  los parámetros utilizados en el proceso de obtención de los números borrosos ‘altos’ y ‘bajos’, se consideran distintas combinaciones de los mismos, que variarán la dispersión de la definición de número borroso  $\ell$  y  $\bar{h}$ . Este proceso se resume en el Algoritmo [22](#)

En la Tabla [8.2](#) se presenta la parrilla de valores usada, así como el nombre asignado a la red en cada caso.

Tabla 8.2: Parámetros para generar la matriz  $X$  del modelo de referencia.

	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
a	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2
b	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3
c	0.9	0.8	0.7	0.9	0.8	0.7	0.9	0.8	0.7
d	1	0.9	0.8	1	0.9	0.8	1	0.9	0.8

Relativa a la familia de vectores previamente descrita, se tiene la familia de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno  $(\mu_{x^1}^a, \dots, \mu_{x^r}^a)$ . Se consideran las matrices  $(X^1, \dots, X^r)$ , adyacencia del MAWG correspondiente según la Definición [4.4.2](#). Para todos los modelos de referencia, la segunda componente será la agregación de estas matrices,  $X = \Phi(X^1, \dots, X^r) = \text{máx}(X^1, \dots, X^r)$ . En el Algoritmo [23](#) se presenta el desarrollo de este proceso.

---

**Algoritmo 22** *Genera Familia Vector*

---

```

1: Input:  $(|C_1|, \dots, |C_r|), a, b, c, d;$ 
2: Output:  $familiaVector;$ 
3:  $|C_0| \leftarrow 0;$ 
4:  $familiaVector \leftarrow 0;$  (matriz  $r \times n$ , la fila  $\ell$  representa el vector  $x^\ell$ )
5: for  $(\ell = 1)$  to  $(r)$  do
6:   for  $(i = 1)$  to  $(n)$  do
7:     if  $|C_{\ell-1}| < i \leq |C_\ell|$  then
8:        $familiaVector(\ell, i) \leftarrow HighFuzzyNumber(c, d);$ 
9:     else
10:       $familiaVector(\ell, i) \leftarrow LowFuzzyNumber(a, b);$ 
11:    end if
12:  end for
13: end for
14: return $(familiaVector);$ 

```

---



---

**Algoritmo 23** *Matriz de Familia Vector*

---

```

1: Input:  $(|C_1|, \dots, |C_r|), a, b, c, d;$ 
2: Output:  $X;$ 
3:  $familiaVector \leftarrow GeneraFamiliaVector((|C_1|, \dots, |C_r|), a, b, c, d);$ 
4: for  $(\ell = 1)$  to  $(r)$  do
5:   for  $(i = 1)$  to  $(n)$  do
6:      $Sh(\ell, i) \leftarrow \frac{familiaVector(\ell, i)}{\sum_{k=1}^n familiaVector(\ell, k)}$ ; (índice de Shapley de  $i$ )
7:     for  $(j = 1)$  to  $(n)$  do
8:        $Sh_j(\ell, i) \leftarrow \frac{familiaVector(\ell, i)}{\sum_{\substack{k \neq i \\ k \in V}}^n familiaVector(\ell, k)}$ ; (índice de Shapley de  $i$  sin  $j$ )
9:     end for
10:   end for
11: end for
12: for  $(\ell = 1)$  to  $(r)$  do
13:   for  $(i = 1)$  to  $(n)$  do
14:     for  $(j = 1)$  to  $(n)$  do
15:        $X^\ell(i, j) \leftarrow \min\{|Sh(\ell, i) - Sh_j(\ell, i)|, |Sh(\ell, j) - Sh_i(\ell, j)|\};$ 
16:     end for
17:   end for
18: end for
19:  $X \leftarrow \max\{X^1, \dots, X^r\};$ 
20: return $(X);$ 

```

---

A continuación se presenta la evaluación del algoritmo *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo*, definido en el Algoritmo [15](#), considerando distintas estructuras que varían en tamaño y número de grupos. Cada una representa un MEFG de familia de vector  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{x^1}^a, \dots, \mu_{x^r}^a))$  con dos componentes independientes. Una de ellas,  $G = (V, E)$ , es la relativa a las conexiones directas entre nodos representadas por aristas. La otra, definida por las medidas borrosas  $\mu_{x^1}^a, \dots, \mu_{x^r}^a$  obtenidas a partir de la familia de vectores  $(x^1, \dots, x^r)$ , se emplea para definir una matriz de relaciones  $X$ .

Para cada combinación de los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ ;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , se analiza la combinación lineal  $M = \theta(A, X) = \gamma A + (1 - \gamma) X$ , considerando  $\gamma = 0$ , por ser este el único caso en que, incluyendo información adicional, se conoce la partición que habría de obtenerse (cuando se asignan distintos valores de importancia a cada fuente de información, no es posible decidir qué partición ha de ser considerada como estándar). En las tablas [8.3](#), [8.4](#), [8.5](#), [8.6](#), se muestra el NMI promedio resultante de 100 iteraciones de cada combinación de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  para la adyacencia  $A$ , y los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para la definición de los vectores que dan lugar a la matriz de sinergias  $X$ .

### 8.1.2. Grafo de referencia. Modelo 1.

Se analiza el desempeño del algoritmo *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo* en el modelo de referencia más sencillo. Los nodos de la matriz de adyacencia están agrupados en dos comunidades bien diferenciadas, cada una de ellas con un tamaño esperado de 128, siendo  $\langle k \rangle = 128\alpha + 128\beta$  el grado esperado de cada nodo. La matriz de sinergias  $X$ , obtenida a partir de la familia de vectores  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ , es tal que sus 256 nodos forman cuatro grupos  $C_1^X, \dots, C_4^X$  con tamaño esperado  $|C_i^X| = 64$ . Los nodos que se espera estén en la comunidad  $C_i^X$  tendrán valores ‘altos’ en el vector  $x^i$ ; el resto de nodos tendrán valores ‘bajos’ en dicho vector.

En la Tabla [8.3](#) se presentan los resultados obtenidos para las distintas combinaciones de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , y  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , considerando las parrillas de valores mostradas en las tablas [8.1](#) y [8.2](#), respectivamente. Note que en esta situación aparentemente sencilla, el algoritmo evaluado siempre consigue recuperar la partición estándar, aún considerando redes poco densas.

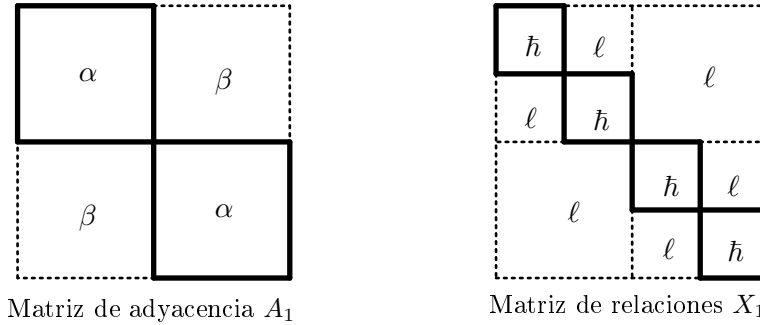


Figura 8.3: Grafo de referencia. Modelo 1.

Tabla 8.3: NMI. Modelo 1.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Adyacencia Red 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Adyacencia Red 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Adyacencia Red 4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Adyacencia Red 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Adyacencia Red 6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Adyacencia Red 7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Adyacencia Red 8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Adyacencia Red 9	1	1	1	1	1	1	1	1	1

### 8.1.3. Grafo de referencia. Modelo 2.

Es sabido que el algoritmo de Louvain es muy sensible a las variaciones del tamaño de los grupos a detectar, presentando serias dificultades cuando se trata de establecer grupos pequeños [2, 146, 118] debido al límite de resolución de la modularidad [64]. Por ello, se ha querido evaluar el algoritmo *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo* en este contexto, en un intento de verificar si aún considerando comunidades de tamaño reducido, el método en análisis sigue proporcionando resultados aceptablemente buenos.

La estructura estándar considerada está definida por grupos más pequeños que en el modelo anterior. La matriz de sinergias  $X_2$  tiene incorporada partición de ocho grupos, cada uno de los cuales con 32 nodos. Como se ha explicado para el Modelo 1, cada una de las comunidades será relativa a un vector de la familia  $(x^1, \dots, x^8)$ , siendo la misma idea de generación de números borrosos trapezoidales ‘bajos’ y ‘altos’.

Por otra parte, también se reduce el tamaño de las comunidades de la

matriz de adyacencia, como se puede observar en la Figura 8.4. En este caso, la red  $A_2$  se divide en cuatro comunidades,  $C_1^A, \dots, C_4^A$ , cada una de las cuales con un tamaño esperado de 64 nodos, siendo  $\langle k \rangle = 64\alpha + 192\beta$  el grado esperado de cada uno de ellos.

Los resultados obtenidos para este modelo se presentan en la Tabla 8.4. Pese a la reducción del tamaño de las comunidades estándar, los resultados obtenidos con el algoritmo *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo* son muy buenos.

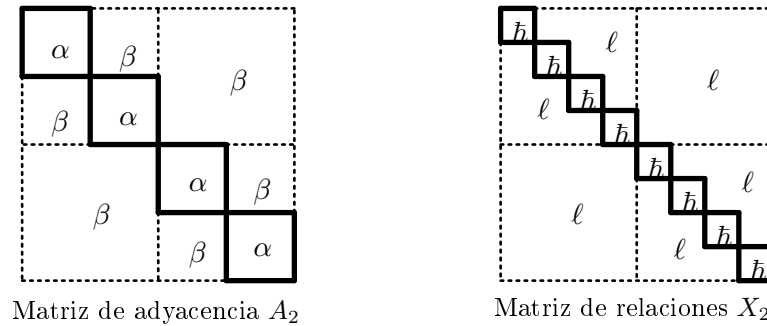


Figura 8.4: Grafo de referencia. Modelo 2.

Tabla 8.4: NMI. Modelo 2.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	1	1	1	1	0.9987	0.9981	0.9994
Adyacencia Red 2	1	1	1	1	1	1	0.9986	0.9980	0.9994
Adyacencia Red 3	1	1	1	1	1	1	0.9993	0.9992	0.9994
Adyacencia Red 4	1	1	1	1	1	1	0.9986	0.9980	0.9996
Adyacencia Red 5	1	1	1	1	1	1	<b>0.9984</b>	0.9990	0.9991
Adyacencia Red 6	1	1	1	1	1	1	0.9986	0.9984	0.9990
Adyacencia Red 7	1	1	1	1	1	1	0.9990	0.9992	0.9992
Adyacencia Red 8	1	1	1	1	1	1	<b>0.9968</b>	0.9992	0.9989
Adyacencia Red 9	1	1	1	1	1	1	0.9993	0.9992	0.9996

#### 8.1.4. Grafo de referencia. Modelo 3.

Los resultados previos evidencian el buen funcionamiento del método testado en estructuras simétricas. No obstante, hay que tener en cuenta que el interés principal de un método va más allá de su desempeño en estructuras artificiales, siendo su objetivo principal la resolución de problemas reales. Con la intención de asemejar la estructura estándar a la representación de

un problema real [38], se trabaja con redes cuyas particiones están formadas por comunidades de distintos tamaños. En este modelo, la estructura es asimétrica en la componente relativa a las sinergias entre nodos,  $X_3$ , considerando comunidades de distintos tamaños,  $|C_1^X| = 43$ ,  $|C_2^X| = 42$ ,  $|C_3^X| = 43$ ,  $|C_4^X| = 96$ ,  $|C_5^X| = 32$ . La matriz de adyacencia  $A_3$  es igual que  $A_1$ .

En la Tabla 8.5 se presentan los experimentos relativos a este modelo, evidenciándose el buen desempeño del algoritmo testado también frente a estructuras asimétricas con grupos de tamaño desigual.

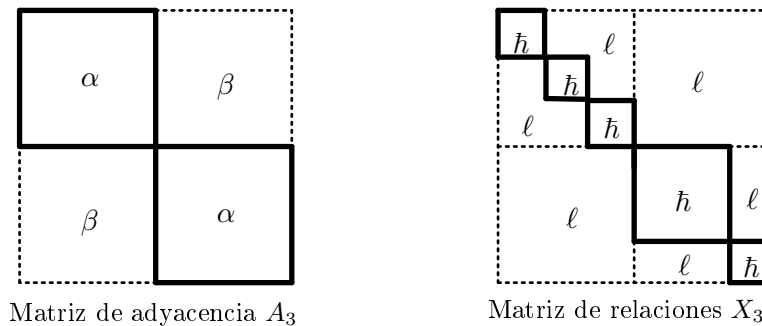


Figura 8.5: Grafo de referencia. Modelo 3.

Tabla 8.5: NMI. Modelo 3.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9994	0.9997
Adyacencia Red 2	1	1	1	1	1	1	0.9997	1	1
Adyacencia Red 3	1	1	1	1	1	1	0.9997	1	1
Adyacencia Red 4	1	1	1	1	1	1	<b>0.9990</b>	1	1
Adyacencia Red 5	1	1	1	1	1	1	1	0.9996	<b>0.9992</b>
Adyacencia Red 6	1	1	1	1	1	1	1	0.9994	0.9994
Adyacencia Red 7	1	1	1	1	1	1	0.9997	0.9996	0.9997
Adyacencia Red 8	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9994
Adyacencia Red 9	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9995

### 8.1.5. Grafo de referencia. Modelo 4.

El último modelo considerado para testar el algoritmo *Multi-dimensional Sugeno Louvain 1-aditivo* combina la reducción del tamaño de las comunidades con la asimetría de la partición, dando lugar a un escenario altamente complejo para la evaluación, como se puede observar en la Figura 8.6. En este caso, la matriz de adyacencia  $A_4$  se define de manera análoga a  $A_2$ . Por

su parte, la matriz de sinergias  $X_4$  tiene ocho comunidades claramente diferenciadas, cuyos tamaños esperados son  $|C_1^X| = 24$ ,  $|C_2^X| = 40$ ,  $|C_3^X| = 64$ ,  $|C_4^X| = 21$ ,  $|C_5^X| = 22$ ,  $|C_6^X| = 21$ ,  $|C_7^X| = 32$  y  $|C_8^X| = 32$ . Pese a la evidente complejidad de esta estructura, los resultados presentados en la Tabla 8.6 evidencian el buen desempeño del algoritmo testado.

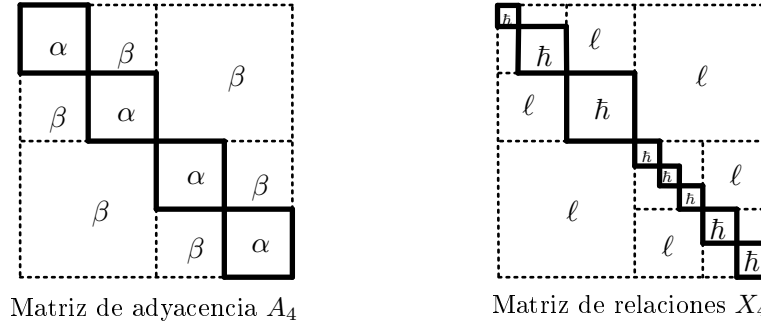


Figura 8.6: Grafo de referencia. Modelo 4.

Tabla 8.6: NMI. Modelo 4.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	0.9975	0.9969	0.9974	0.9976	0.9970	0.9968	<b>0.9937</b>	1	0.9994
Adyacencia Red 2	0.9956	0.9960	0.9962	0.9977	0.9982	0.9981	<b>0.9960</b>	0.9991	1
Adyacencia Red 3	0.9951	0.9964	0.9956	0.9980	0.9972	0.9970	0.9974	0.9975	0.9997
Adyacencia Red 4	<b>0.9949</b>	0.9964	0.9963	0.9978	0.9963	0.9980	<b>0.9943</b>	0.9990	0.9973
Adyacencia Red 5	0.9952	0.9956	0.9975	0.9960	0.9978	0.9976	0.9957	0.9988	0.9979
Adyacencia Red 6	0.9954	0.9957	0.9972	0.9967	0.9954	0.9989	0.9973	0.9961	0.9990
Adyacencia Red 7	<b>0.9944</b>	0.9955	0.9978	0.9971	0.9969	0.9971	0.9980	0.9989	1
Adyacencia Red 8	0.9952	0.9958	0.9973	0.9974	0.9969	0.9980	0.9996	0.9984	1
Adyacencia Red 9	0.9952	0.9967	0.9974	0.9965	0.9969	0.9972	0.9972	0.9968	1

## 8.2. Familia de medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de múltiples matrices.

En esta sección se presentan los resultados experimentales relativos a la evaluación de la eficacia del método de detección de comunidades basado en medidas borrosas, el Algoritmo *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain*, en que se incluye como novedad la consideración de una familia de medidas borrosas de afinidad a la hora de establecer grupos de nodos.

### 8.2.1. Diseño del experimento

Cada modelo de referencia propuesto representa un MEFG de matriz,  $\tilde{G} = (V, E, (\mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r}))$ , en que se diferencian dos partes: el grafo  $G = (V, E)$  que define las aristas o conexiones directas entre nodos, y la otra acerca de las relaciones de afinidad entre nodos, definidas por la familia de medidas borrosas  $(\mu_{R^1}, \dots, \mu_{R^r})$ . La matriz agregada que resume toda la información relativa a las afinidades entre nodos,  $R = \Phi(R^1, \dots, R^s)$ , será simulada directamente. Esto permite la validación simultánea de cualquier agregador  $\Phi$  cuya aplicación diera lugar a esta matriz de afinidades,  $R$ . Note que la complejidad de este método es igual a la del algoritmo de Louvain.

Para construir las matrices  $A$  y  $R$  aleatoriamente, se toman diferentes valores de grado de entrada/salida ( $z_{in}$  y  $z_{out}$ ), siguiendo la ecuación (2.8). Los valores considerados se muestran en la Tabla 8.1. La partición tomada como estándar dependerá del grafo de referencia considerado. El proceso seguido en ambos casos se presenta en el Algoritmo 19.

Se generan cuatro modelos de referencia en los que se varía la simetría o asimetría de los grupos, así como sus tamaños. Todos estos modelos se basan en la construcción de grafos sintéticos, ante la asunción de que los nodos que están en las cajas que forman la ‘diagonal’ principal de cada matriz de relaciones tienen mucha afinidad. De la misma manera, los nodos que están en las cajas que forman la ‘diagonal’ principal de cada matriz de adyacencia están estrechamente conectados. Atendiendo a la noción de grupo propuesta previamente atendiendo a la afinidad entre nodos, se asume que, en la medida de lo posible, aquellos nodos que, además de estar conectados entre sí, tengan un alto nivel de afinidad, deben pertenecer a la misma comunidad.

Para cada combinación de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , se ha analizado la combinación lineal de las matrices  $A$  y  $R$ ,  $M = \theta(A, R) = \gamma A + (1 - \gamma) R$ , tomando  $\gamma = 0$ , por ser este el caso en que se conoce con seguridad la partición que debería obtenerse al tener en cuenta la información adicional. En las siguientes tablas se presenta el valor promedio del NMI obtenido con 100 iteraciones en cada uno de los escenarios.

### 8.2.2. Grafo de referencia. Modelo 1.

Se evalúa el algoritmo *Multi-dimensional Duo Affinity Louvain* en el modelo de referencia más sencillo. En este caso, la matriz de relaciones  $R_1$  se define siguiendo la idea propuesta en [70]. Los nodos se organizan en cuatro comunidades,  $C_1^R, \dots, C_4^R$ , de tamaño esperado  $|C_i^R| = 64 \forall i$ , de manera que el grado esperado de cada nodo es  $\langle k \rangle = 64\alpha + 192\beta$ . En la matriz de adyacencia  $A_1$  los nodos se organizan en dos módulos de tamaño esperado  $|C_i^A| = 128$ . De esta manera, el grafo esperado de cada nodo en la matriz de adyacencia es  $\langle k \rangle = 128\alpha + 128\beta$ . Los resultados obtenidos para las distintas combinaciones de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se muestran en la Tabla

8.7. Se puede observar que los resultados obtenidos son muy buenos, salvo quizás cuando se consideran relaciones del tipo Red 9 (la más dispersa).

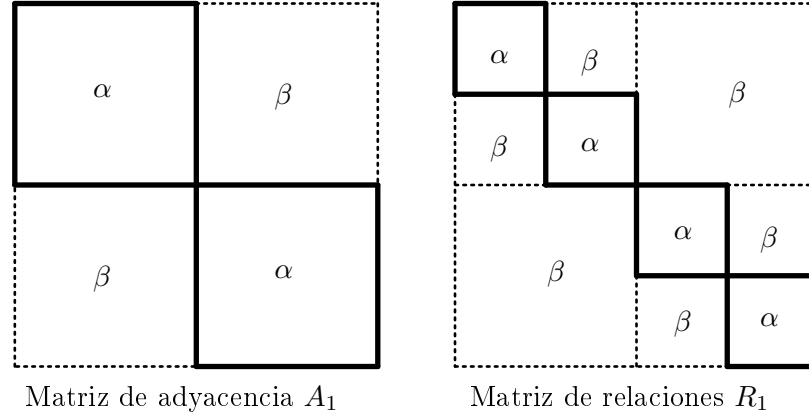


Figura 8.7: Grafo de referencia. Modelo 1.

Tabla 8.7: NMI. Modelo 1.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	1	1	1	1	0.9966	0.9473	<b>0.8022</b>
Adyacencia Red 2	1	1	1	1	1	1	0.9950	0.9267	<b>0.7999</b>
Adyacencia Red 3	1	1	1	1	1	0.9999	0.9940	0.9238	<b>0.8043</b>
Adyacencia Red 4	1	1	1	1	1	1	0.9963	0.9237	<b>0.7998</b>
Adyacencia Red 5	1	1	1	1	1	0.9996	0.9963	0.9335	<b>0.7986</b>
Adyacencia Red 6	1	1	1	1	1	0.9996	0.9951	0.9206	<b>0.8004</b>
Adyacencia Red 7	1	1	1	1	1	0.9994	0.9949	0.9258	<b>0.8011</b>
Adyacencia Red 8	1	1	1	1	1	0.9997	0.9945	0.9220	<b>0.7958</b>
Adyacencia Red 9	1	1	1	1	1	0.9999	0.9953	0.9263	<b>0.7973</b>

### 8.2.3. Grafo de referencia. Modelo 2.

En este caso la estructura de referencia está formada por grupos más pequeños que en la anterior, de modo que en la matriz de adyacencia  $A_2$  los nodos forman cuatro módulos, siendo  $|C_i^A| = 64, \forall i = 1, 2, 3, 4$ , y el grado esperado de cada nodo  $\langle k \rangle = 64\alpha + 192\beta$ . En la matriz de relaciones  $R_2$ , los 256 nodos están agrupados en ocho comunidades, tales que  $|C_i^R| = 32, \forall i = 1, \dots, 8$ , siendo  $\langle k \rangle = 32\alpha + 224\beta$  el grado esperado de cada nodo. Pese a que el algoritmo de Louvain es muy sensible ante posibles variaciones del tamaño de los grupos, las particiones obtenidas para

las distintas combinaciones de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  mediante el algoritmo propuesto resultan notablemente acertadas, como se puede observar en los distintos valores del NMI mostrados en la Tabla 8.8

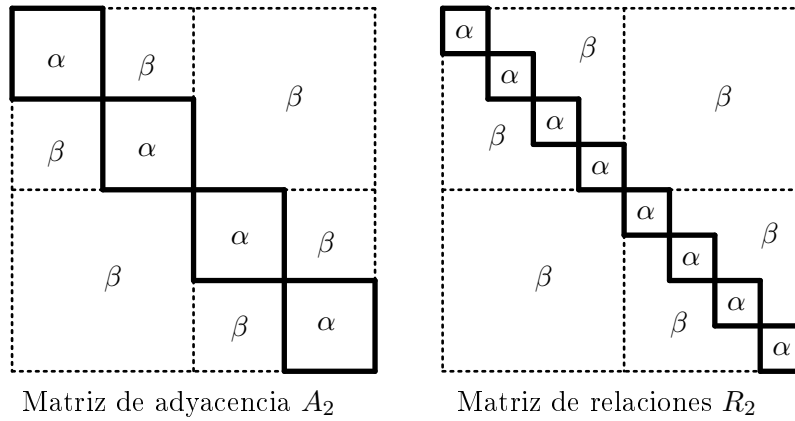


Figura 8.8: Grafo de referencia. Modelo 2.

Tabla 8.8: NMI. Modelo 2.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	1	1	0.9985	0.9912	<b>0.9842</b>	0.9984	0.9990
Adyacencia Red 2	1	1	1	1	0.9993	0.9939	0.9936	0.9982	0.9960
Adyacencia Red 3	1	1	1	1	0.9986	0.9931	0.9958	0.9941	0.9931
Adyacencia Red 4	1	1	1	1	0.9999	0.9963	0.9963	0.9916	<b>0.9871</b>
Adyacencia Red 5	1	1	1	1	0.9997	0.9925	0.9957	0.9969	<b>0.9895</b>
Adyacencia Red 6	1	1	1	1	0.9985	0.9984	0.9937	0.9907	0.9904
Adyacencia Red 7	1	1	1	1	0.9995	0.9951	0.9962	<b>0.9828</b>	0.9946
Adyacencia Red 8	1	1	1	1	0.9991	0.9932	<b>0.9894</b>	0.9924	<b>0.9873</b>
Adyacencia Red 9	1	1	1	1	1	0.9965	0.9967	<b>0.9837</b>	<b>0.9877</b>

### 8.2.4. Grafo de referencia. Modelo 3.

Para aumentar la complejidad del modelo de referencia, se rompe la simetría estructural de la matriz de relaciones,  $R_3$ , dificultando así el proceso de agrupamiento. En este caso, los 256 nodos de  $R_3$  forman cinco grupos, de manera que  $|C_1^R| = 42$ ,  $|C_2^R| = 43$ ,  $|C_3^R| = 43$ ,  $|C_4^R| = 88$ ,  $|C_5^R| = 40$ . En cuanto a la matriz de adyacencia correspondiente,  $A_3$ , es análoga a  $A_1$ . A pesar de la complejidad inherente a la asimetría de este modelo de referencia en el que las comunidades son de distintos tamaños, los resultados mostrados

en la Tabla [8.9](#) evidencian la eficacia del algoritmo testado (mejor cuanto más densa sea la matriz de relaciones).

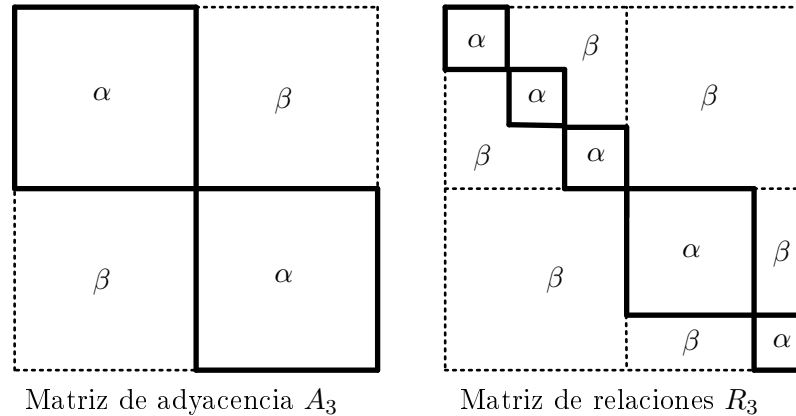


Figura 8.9: Grafo de referencia. Modelo 3.

Tabla 8.9: NMI. Modelo 3.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	0.9998	0.9997	0.9994	0.9942	0.9620	b	<b>0.8516</b>
Adyacencia Red 2	1	1	0.9996	0.9995	<b>0.9977</b>	0.9927	0.9680	<b>0.8958</b>	<b>0.8409</b>
Adyacencia Red 3	1	1	0.9998	0.9990	0.9996	0.9936	0.9719	<b>0.8837</b>	<b>0.8389</b>
Adyacencia Red 4	1	1	0.9997	0.9995	0.9988	0.9947	0.9598	<b>0.8868</b>	<b>0.8408</b>
Adyacencia Red 5	1	1	0.9998	0.9995	0.9982	0.9914	0.9686	<b>0.8873</b>	<b>0.8411</b>
Adyacencia Red 6	1	1	0.9995	0.9987	0.9979	0.9910	0.9703	<b>0.8816</b>	<b>0.8442</b>
Adyacencia Red 7	1	1	0.9996	0.9997	0.9989	0.9944	0.9651	<b>0.8829</b>	<b>0.8411</b>
Adyacencia Red 8	0.9999	1	0.9999	0.9997	0.9992	0.9974	0.9569	<b>0.8845</b>	<b>0.842</b>
Adyacencia Red 9	0.9999	0.9999	0.9998	0.9994	0.9997	0.9935	0.9616	<b>0.8824</b>	<b>0.8485</b>

### 8.2.5. Grafo de referencia. Modelo 4.

En el último modelo de referencia, el más complejo de todos los considerados, no sólo se rompe la simetría de la matriz de relaciones, también se reduce el tamaño de las comunidades en dicha matriz, como se puede observar en la Figura [8.10](#)). Así, los 256 nodos de la matriz  $R_2$  están organizados en ocho comunidades, tales que  $|C_1^R| = 40$ ,  $|C_2^R| = 24$ ,  $|C_3^R| = 32$ ,  $|C_4^R| = 32$ ,  $|C_5^R| = 64$ ,  $|C_6^R| = 21$ ,  $|C_7^R| = 22$  y  $|C_8^R| = 21$ . Por otra parte, la matriz de adyacencia  $A_4$  es análoga a  $A_2$ . A pesar de la complejidad del modelo de referencia considerado, con comunidades asimétricas y de tamaño no muy

grande, los distintos valores de NMI mostrados en la Tabla 8.10 evidencian la capacidad del algoritmo evaluado para recuperar la información de la partición incrustada en el modelo de referencia.

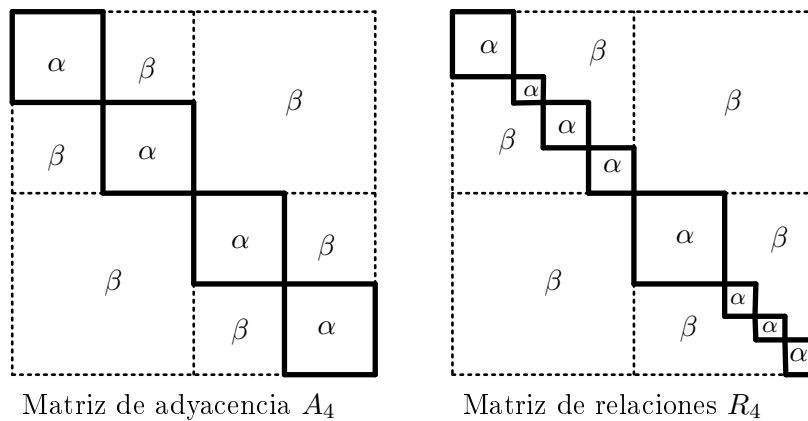


Figura 8.10: Grafo de referencia. Modelo 4.

Tabla 8.10: NMI. Modelo 4.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	0.9996	0.9990	0.9970	0.9979	0.9971	0.9987	0.9896	0.9803	0.9881
Adyacencia Red 2	0.9997	0.9996	0.9958	1	0.9963	0.9949	0.9944	0.9733	0.9805
Adyacencia Red 3	0.9996	0.9990	0.9976	0.9999	0.9994	0.9979	0.9918	0.9828	0.9794
Adyacencia Red 4	0.9994	0.9993	0.9991	1	0.9959	0.9940	0.9851	0.9745	<b>0.9690</b>
Adyacencia Red 5	1	1	0.9981	1	0.9978	0.9980	0.9858	0.9757	<b>0.9695</b>
Adyacencia Red 6	0.9998	1	0.9997	1	1	0.9891	0.9915	0.9721	<b>0.9686</b>
Adyacencia Red 7	0.9994	0.9997	1	1	1	0.9939	0.9827	0.9787	<b>0.9654</b>
Adyacencia Red 8	0.9987	1	1	0.9975	1	0.9895	0.9872	0.9725	<b>0.9628</b>
Adyacencia Red 9	0.9999	1	0.9979	1	0.9949	0.9869	0.9802	0.9705	<b>0.9591</b>

### 8.3. Familia de medidas borrosas bipolares

En esta sección se presentan los resultados experimentales relativos a las contribuciones relativas a familias de medidas borrosas bipolares. El objetivo es evaluar el algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain*.

### 8.3.1. Diseño del experimento

Se proponen cuatro modelos de referencia o estructuras estándar. Cada uno representa un MEFG bipolar,  $\tilde{G} = (V, E, (\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r}))$ , en el que se pueden diferenciar dos componentes independientes. Una de ellas,  $G = (V, E)$ , relativa a las conexiones directas entre los nodos. La otra componente, que a su vez consta de dos matrices, se obtiene a partir de la agregación de una familia de medidas borrosas bipolares,  $(\mu^{b_1}, \dots, \mu^{b_r})$  en las matrices  $F^-$  y  $F^+$ , que representan las relaciones de discrepancia/afinidad existentes.

En cada modelo de referencia, tanto la matriz de adyacencia,  $A$ , como las matrices de relaciones  $F^-$  y  $F^+$ , se generan aleatoriamente para un conjunto  $V$  de 256 nodos, atendiendo a la ecuación 2.8 y considerando las distintas combinaciones posibles de los grados de entrada/salida ( $z_{in}$  y  $z_{out}$ ) dependiendo del valor de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  mostrados en la Tabla 8.1. El método de generación de estas matrices se presenta en el Algoritmo 19.

En todos los casos, la agregación de las matrices  $F^{-op}$  y  $F^+$  se lleva a cabo mediante un operador conjuntivo, en concreto, el operador del mínimo, esto es,  $F_b^* = \psi(F^{-op}, F^+) = \min\{F^{-op}, F^+\}$ , siendo  $F^{-op} = N(F^-) = 1 \times \max_{i,j}\{F^-\} - F^-$ . Cabe remarcar que esta definición de la matriz  $F_b^*$  es consistente con la noción particular de grupo que sostiene que una comunidad debe estar compuesta por aquellos vértices entre los que hay muchas relaciones de gran afinidad, sin existir (o al menos no demasiadas) relaciones de discrepancia. Evidentemente, cualquier otro operador puede ser considerado, lo cual implicará una variación en la definición de grupo considerada.

Para cada combinación de los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , se analiza la combinación lineal,  $M = \theta(A, F_b^*) = \gamma A + (1 - \gamma) F_b^*$ , considerando  $\gamma = 0$ . Se muestra este caso concreto porque es el único en el que es evidente cuál es la estructura estándar que debe recuperar el algoritmo en evaluación. Cuando entran en juego distintos valores de importancia, representados por  $\gamma$ , no es posible decidir qué partición debe ser la considerada estándar. En las tablas 8.11, 8.12, 8.13, 8.14, se muestra el NMI promedio correspondiente a cada uno de los modelos de referencia, resultante de 100 iteraciones de cada combinación de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  para la matrices  $A$ ,  $F^-$  y  $F^+$ .

### 8.3.2. Grafo de referencia. Modelo 1.

Se analiza el desempeño del algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain* en un modelo de referencia representación de un MEFG bipolar cuyos 256 nodos se agrupan en dos comunidades bien diferenciadas en la matriz de adyacencia; esperando que cada una de ellas contenga 128 nodos, siendo  $\langle k \rangle = 128 \times \alpha + 128\beta$  el grado esperado de cada vértice. En las matrices de relaciones  $F_1^-$  y  $F_1^+$  los 256 nodos están organizados en cuatro grupos,  $C_1, \dots, C_4$ , cuyo tamaño esperado es  $|C_i^B| = 64$ . El grado esperado de cada nodo será  $\langle k \rangle = 64\alpha + 192\beta$  en la matriz de afinidades  $F_1^+$ , y  $\langle k \rangle = 192\alpha + 64\beta$  en la matriz

de discrepancias  $F_1^-$ . En la Tabla 8.11 se presentan los resultados obtenidos para distintas combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$ . El desempeño del algoritmo evaluado no depende únicamente de la matriz de adyacencia; los resultados empeoran a medida que las matrices de relaciones pierden densidad (el valor del NMI disminuye por columnas). En cualquier caso, en este grafo de referencia en que la partición estándar es simétrica y suficientemente grande, los resultados obtenidos son muy buenos, como reflejan los distintos valores del NMI, hasta la Red 9, en la que los resultados no son tan sobresalientes.

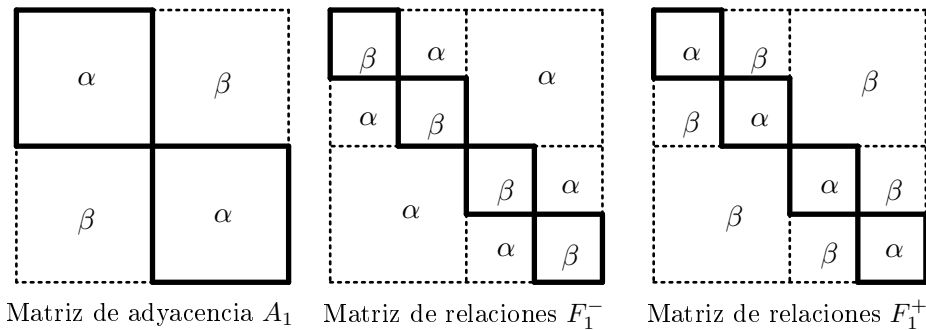


Figura 8.11: Grafo de referencia. Modelo 1

Tabla 8.11: NMI. Modelo 1.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9985	0.9667	<b>0.8159</b>
Adyacencia Red 2	1	1	1	1	1	1	0.9980	0.9712	<b>0.8115</b>
Adyacencia Red 3	1	1	1	1	1	1	0.9983	0.9597	<b>0.8056</b>
Adyacencia Red 4	1	1	1	1	1	1	0.9970	0.9964	<b>0.8029</b>
Adyacencia Red 5	1	1	1	1	1	1	0.9983	0.9640	<b>0.8091</b>
Adyacencia Red 6	1	1	1	1	1	1	0.9987	0.9555	<b>0.8087</b>
Adyacencia Red 7	1	1	1	1	1	1	0.9978	0.9686	<b>0.8004</b>
Adyacencia Red 8	1	1	1	1	1	1	0.9964	0.9591	<b>0.8067</b>
Adyacencia Red 9	1	1	1	1	1	1	0.9978	0.9683	<b>0.8091</b>

### 8.3.3. Grafo de referencia. Modelo 2.

Para encarar la sensibilidad del algoritmo de Louvain frente a las variaciones de tamaño, y las dificultades que presenta en la detección de grupos relativamente pequeños [146, 2, 118], se trabaja con un modelo de referencia en el que se reduce el tamaño de las comunidades consideradas, con el

propósito de demostrar que el algoritmo propuesto proporciona muy buenos resultados aún en situaciones complejas. Se define una estructura estándar en la que los nodos en cada una de las matrices de relaciones están organizados en ocho grupos, cada uno con tamaño esperado de 32, siendo  $\langle k \rangle = 32\alpha + 224\beta$  el grado esperado de cada nodo en la matriz de relaciones  $F_2^+$ , y  $\langle k \rangle = 224\alpha + 32\beta$  el grado de cada nodo relativo a la matriz  $F_2^-$ . En cuanto a la componente estructural del modelo, el tamaño de las comunidades de la matriz de adyacencia también se reduce, como se puede observar en la Figura 8.12. En este caso, la red  $A_2$  presenta cuatro comunidades,  $C_1^A, \dots, C_4^A$ , cada una de las cuales con un tamaño esperado de 64 nodos, siendo  $\langle k \rangle = 64\alpha + 192\beta$  el grado esperado de los distintos nodos.

Los resultados relativos a este modelo se presentan en la Tabla 8.12. Pese a la reducción del tamaño de los grupos estándar, las particiones obtenidas son prácticamente idénticas a la estructura de referencia.

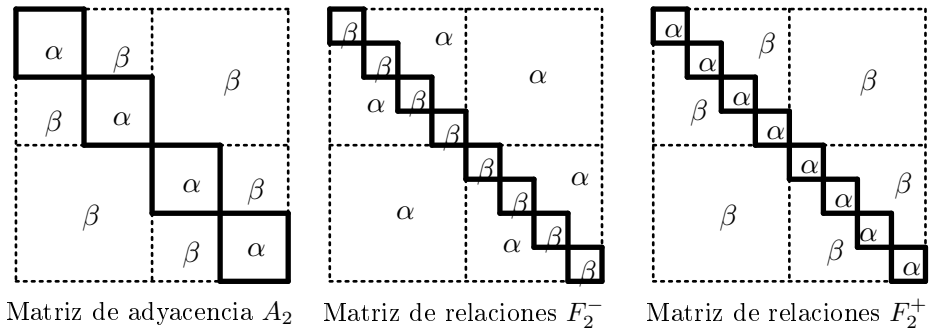


Figura 8.12: Grafo de referencia. Modelo 2

Tabla 8.12: NMI. Modelo 2.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	1	1	0.9978	0.9891	0.9703	0.9814	0.9939
Adyacencia Red 2	1	1	1	1	0.9995	0.9900	<b>0.9801</b>	<b>0.9883</b>	0.9999
Adyacencia Red 3	1	1	1	1	0.9981	0.9943	0.9935	0.9919	0.9937
Adyacencia Red 4	1	1	1	1	0.9991	0.9948	0.9921	0.9907	0.9997
Adyacencia Red 5	1	1	1	1	0.9992	0.9929	<b>0.9877</b>	<b>0.9701</b>	0.9950
Adyacencia Red 6	0.9999	1	1	1	0.9998	0.9935	<b>0.9849</b>	<b>0.9882</b>	0.9903
Adyacencia Red 7	0.9999	1	1	1	0.9995	0.9981	0.9928	0.9935	0.9917
Adyacencia Red 8	0.9998	0.9998	1	1	1	0.9971	0.9950	<b>0.9878</b>	<b>0.9821</b>
Adyacencia Red 9	0.9991	0.9997	0.9991	0.9997	0.9994	0.9991	0.9979	<b>0.9899</b>	<b>0.9895</b>

**8.3.4. Grafo de referencia. Modelo 3.**

Los resultados presentados en las secciones previas arrojan bastante luz acerca de la eficacia del algoritmo en evaluación. No obstante, como las comunidades estándar son simétricas, tal vez estas estructuras no sean un buen reflejo de ciertas situaciones reales. Con la intención de trabajar con un modelo de referencia *bueno*, cuya distribución de los distintos grados de los nodos sea similar a la de los grafos reales [38], se plantea un modelo cuya estructura estándar de comunidades es asimétrica en la componente relativa a las relaciones entre nodos,  $F_3^-$  y  $F_3^+$ . Los tamaños esperados de las distintas comunidades de esta red son  $|C_1^B| = 43$ ,  $|C_2^B| = 42$ ,  $|C_3^B| = 43$ ,  $|C_4^B| = 96$ ,  $|C_5^B| = 32$ . La adyacencia  $A_3$  se define de manera análoga a  $A_1$ .

Los resultados mostrados en la Tabla 8.13 evidencian el buen desempeño del algoritmo evaluado aún tratándose de una estructura estándar asimétrica. Cabe remarcar que el parámetro que más afecta al empeoramiento de los resultados es la dispersión de las matrices de relaciones.

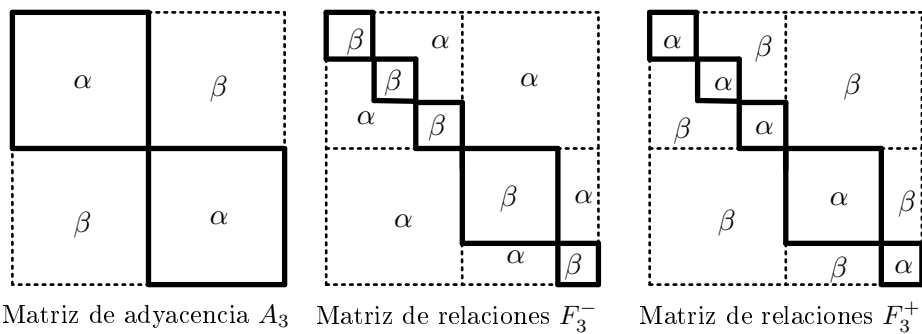


Figura 8.13: Grafo de referencia. Modelo 3

Tabla 8.13: NMI. Modelo 3.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	1	1	1	1	0.9995	0.9929	0.9680	<b>0.9145</b>	<b>0.8431</b>
Adyacencia Red 2	1	1	1	1	0.9989	0.9916	0.9608	<b>0.9116</b>	<b>0.8405</b>
Adyacencia Red 3	1	1	1	1	0.9984	0.9935	0.9627	<b>0.9067</b>	<b>0.8418</b>
Adyacencia Red 4	1	1	0.9997	0.9997	0.9989	0.9938	0.9600	<b>0.9045</b>	<b>0.8398</b>
Adyacencia Red 5	1	1	1	0.9999	0.9976	0.9859	0.9721	<b>0.9068</b>	<b>0.8431</b>
Adyacencia Red 6	1	1	1	0.9987	0.9980	0.9926	0.9615	<b>0.8947</b>	<b>0.8452</b>
Adyacencia Red 7	1	1	1	0.9995	0.9999	0.9960	0.9624	<b>0.9081</b>	<b>0.8453</b>
Adyacencia Red 8	0.9999	1	1	0.9993	0.9978	0.9920	0.9639	<b>0.9056</b>	<b>0.8471</b>
Adyacencia Red 9	0.9998	0.9995	0.9998	0.9997	0.9981	0.9867	0.9882	<b>0.9015</b>	<b>0.8385</b>

### 8.3.5. Grafo de referencia. Modelo 4.

En este modelo se combinan la disminución del tamaño de las comunidades con la asimetría de la estructura considerada, como se puede observar en la Figura 8.14. La matriz de adyacencia  $A_4$  es análoga a  $A_2$ . En cuanto a las matrices de relaciones,  $F_4^-$  y  $F_4^+$ , ambas tienen ocho comunidades claramente diferenciadas, cuyos tamaños esperados son  $|C_1^B| = 24$ ,  $|C_2^B| = 40$ ,  $|C_3^B| = 64$ ,  $|C_4^B| = 21$ ,  $|C_5^B| = 22$ ,  $|C_6^B| = 21$ ,  $|C_7^B| = 32$  y  $|C_8^B| = 32$ . Pese a la evidente complejidad de esta estructura, el valor del NMI en los distintos casos evidencia el buen desempeño del algoritmo evaluado, como se puede apreciar en los resultados de la Tabla 8.14, todos sobresalientes.

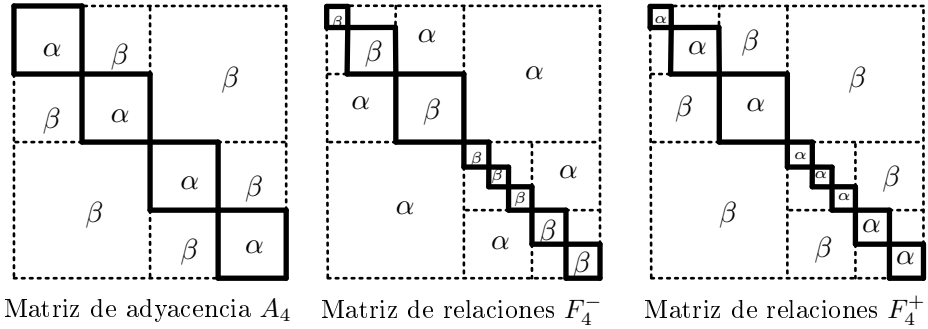


Figura 8.14: Grafo de referencia. Modelo 4

Tabla 8.14: NMI. Modelo 4.

NMI	Relaciones Red 1	Relaciones Red 2	Relaciones Red 3	Relaciones Red 4	Relaciones Red 5	Relaciones Red 6	Relaciones Red 7	Relaciones Red 8	Relaciones Red 9
Adyacencia Red 1	0.9996	0.9973	0.9927	<b>0.9897</b>	<b>0.9808</b>	<b>0.9839</b>	0.9764	0.9794	0.9748
Adyacencia Red 2	0.9999	0.9996	0.9931	0.9922	<b>0.9857</b>	0.9948	<b>0.9860</b>	<b>0.9728</b>	0.9775
Adyacencia Red 3	0.9999	0.9983	0.9955	0.9933	0.9989	0.9933	<b>0.9899</b>	<b>0.9755</b>	<b>0.9786</b>
Adyacencia Red 4	0.9998	0.9981	0.9987	0.9933	0.9987	0.9969	<b>0.9885</b>	<b>0.9808</b>	<b>0.9746</b>
Adyacencia Red 5	0.9997	0.9995	0.9946	0.9981	0.9965	0.9965	0.9969	<b>0.9791</b>	<b>0.9765</b>
Adyacencia Red 6	0.9996	0.9999	0.9980	0.9984	0.9992	0.9943	<b>0.9875</b>	<b>0.9741</b>	<b>0.9771</b>
Adyacencia Red 7	0.9999	0.9986	0.9988	0.9997	0.9982	0.9989	0.9917	<b>0.9792</b>	<b>0.9754</b>
Adyacencia Red 8	0.9989	0.9990	0.9982	0.9992	0.9991	0.9986	<b>0.9814</b>	<b>0.9772</b>	<b>0.9669</b>
Adyacencia Red 9	0.9997	0.9986	0.9985	0.9963	0.9977	0.9979	<b>0.9845</b>	<b>0.9754</b>	<b>0.9716</b>

## Capítulo 9

# Problema de detección de comunidades basado en medidas de polarización. Una aplicación a Twitter: COVID-19 en España

*Réquiem - Homenaje a los fallecidos por  
COVID-19*

Ara Malikian

**RESUMEN:** En este capítulo se presenta la aplicación, en un problema real, de la metodología de detección de comunidades basada en medidas borrosas desarrollada en esta memoria. Para ello se ha trabajado con la red social Twitter. Se ha considerado una base de datos descargada durante los primeros meses de la pandemia mundial provocada por la COVID-19, relacionada con el posicionamiento político de ciertos usuarios ante el gobierno español, y se ha trabajado en la búsqueda de comunidades atendiendo a diversos aspectos ajenos a la propia estructura de la red social.

Los primeros párrafos de este capítulo se dedican a una breve presentación de las nociones relativas al ámbito de la polarización que serán consideradas, para después detallar el experimento realizado y la metodología de trabajo. Finalmente, se detallan los resultados obtenidos mediante la aplicación a una base de datos real de las técnicas presentadas en esta memoria.

El objetivo principal al aplicar algoritmos de detección de comunidades en redes sociales on line es agrupar a los individuos en comunidades, con

la intención de conocer la estructura de una sociedad determinada. Desde este punto de vista, el estudio del problema de detección de comunidades y de la polarización social están estrechamente relacionadas [91]. En términos generales, la polarización puede entenderse como la división de una población en dos grupos opuestos, ambos de tamaño significativo y similar. Las medidas de polarización producen un valor único que muestra todas estas características, teniendo en cuenta cierto conocimiento acerca de la similitud entre los individuos o los grupos de la población, entre otros aspectos. La estructura de un determinado conjunto de individuos afecta a los valores de polarización proporcionados por una medida, del mismo modo que la existencia de cierto grado de polarización determina la estructura de una red. Esta correlación entre ambas disciplinas ha sido determinante para escoger el estudio del caso a analizar, tomando para ello el marco de polarización.

En el contexto de gran inestabilidad política potenciada por la crisis global del COVID-19, las redes sociales son un foro de debate muy útil para analizar la posición política de ciertas personas. El estudio de los sentimientos, la ideología y los principios políticos es siempre un tema difícil en el que hay que tener en cuenta muchos detalles ambiguos, propicia el uso de medidas borrosas, que permiten lidiar con la vaguedad e incertidumbre relativas al análisis de la actitud política.

## 9.1. Polarización

En las últimas décadas, el estudio de la polarización y sus medidas ha suscitado un gran interés en la comunidad científica. Debido al desarrollo de las nuevas tecnologías, la Web 2.0 y el análisis social promovido por las técnicas de *big data*, el análisis del conflicto social es ahora más accesible que nunca. Grosso modo, la polarización se puede entender como una división de un grupo social en dos grupos diferentes y opuestos a lo largo de un determinado eje actitudinal. Son muchas las disciplinas en las que se ha abordado el estudio de la medida de la polarización [4, 55, 153, 159]. No obstante se observa cierta falta de consenso acerca de la manera más acertada de medir la polarización. Por ejemplo, los estudios basados en polarización política, polarización de ingresos o polarización social difieren entre sí en la decisión acerca de qué sub-conceptos pertenecen al fenómeno de la polarización.

En el contexto de ciencias sociales, la medida de la polarización se inició formalmente a finales del siglo XX, con los trabajos de J.M. Esteban y D. Ray, y de J.E. Foster y M.C. Wolfson [55, 65]. Desde entonces se han propuesto diversas medidas de polarización; algunas de ellas basadas en estos trabajos que se desarrollan sobre el concepto de desigualdad; otras arraigadas a otros enfoques como puede ser la medida de la diversidad de etnias y religiones [130] basadas en la medición de la distancia de la bimodalidad; u otros relacionados con el modelado de la opinión pública considerando la he-

terogeneidad individual [35]. El origen de esta diversidad se puede encontrar en las distintas naturalezas de los datos involucrados (por ejemplo, datos ordinales o de carácter continuo), así como en las distintas disciplinas en que se ha estudiado la medida de la polarización. Es comúnmente aceptado que el hecho de tener variables continuas o categóricas en el modelo considerado es un factor muy importante a tener en cuenta para la selección de una medida concreta. Este hecho es una limitación en sí mismo; de modo que los científicos están atados a las limitaciones de un modelo concreto, debido a la dependencia que presenta la medida aplicada con respecto a los datos disponibles. Esta situación está provocando que muchos modelos con gran potencia sean rechazados debido a su adaptabilidad inadecuada.

Por otra parte, existen otros conceptos como segregación o dispersión, que se han utilizado como sinónimo de polarización. Según [79], estos conceptos no deberían ser considerados como perspectivas separables de la noción de polarización, sino como propiedades subyacentes a la misma. Además, se considera imperativa la concordancia entre el concepto de polarización y su modelo de medida. Aunque ya existen algunas medidas de polarización basadas en este principio, como el enfoque de identificación-alienación de J.M. Esteban y D. Ray, se podrían encontrar ciertas carencias en la literatura.

Con la intención de paliar estas limitaciones, J.A. Guevara et al. [79] definieron una medida de polarización basada en conjuntos borrosos, factible tanto para la consideración de datos numéricos como ordinales. El razonamiento central de su trabajo trata de huir de la dualidad Sí/No, blanco/negro en el modelado de la realidad. Esta dualidad es una característica intrínseca a las medidas de polarización clásicas, en las que cada individuo es asignado a una posición específica a lo largo del eje de polarización [55, 189]. Se pueden encontrar numerosas situaciones cotidianas que no se ajustan a esta forma dual de representación. Por ejemplo, no es raro dar con gente que se siente identificada con un partido político concreto, pero que también concuerda con las propuestas de otros grupos ideológicos. Modelar este tipo de situaciones mediante herramientas clásicas provoca la pérdida conceptual de ciertos matices y detalles importantes. Considerando el enfoque basado en conjuntos borrosos introducido por L.A. Zadeh [202], J.A. Guevara et al. abordan esta dualidad Sí/No definiendo una nueva medida de polarización.

Un punto importante en la caracterización de esta medida es la forma de agregar. Los autores proponen el uso de funciones de agregación de agrupamiento (*grouping functions*) y de superposición (*overlap functions*).

**Definición 9.1.1 (Función de agrupamiento (Grouping function) [24]).** Se dice de  $G: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  que es una función de agrupamiento si se cumplen los siguientes requisitos:

- (G1)  $G$  es conmutativa;
- (G2)  $G(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y = 0$ ;

(G3)  $G(x, y) = 1$  si y sólo si  $x = 1$  or  $y = 1$ ;

(G4)  $G$  es creciente en cada argumento;

(G5)  $G$  es continua.

Considerando que  $x = \eta_A(c)$  e  $y = \eta_B(c)$  denotan el grado de pertenencia o membresía del objeto  $c$  a las clases  $A$  y  $B$  respectivamente, una función de agrupamiento representa el grado de combinación  $z_1$  que existe entre ambas clases, concerniendo al objeto  $c$ .

Por otra parte, las funciones de superposición se utilizan para obtener el grado  $z_2$  de intersección entre las clases mencionadas.

**Definición 9.1.2 (Función de superposición (*Overlap function*) [23]).** Se dice de  $O : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  que es una función de superposición si se cumplen los siguientes requisitos:

(O1)  $O$  es conmutativa;

(O2)  $O(x, y) = 0$  si y sólo si  $xy = 0$ ;

(O3)  $O(x, y) = 1$  si y sólo si  $xy = 1$ ;

(O4)  $O$  es creciente en cada argumento;

(O5)  $O$  es continua.

Con base en estos conceptos, a continuación se presenta caracterización de la medida de polarización  $JDJ_{pol}$ .

**Definición 9.1.3 (Medida de polarización  $JDJ_{pol}$  [79]).** Dado un conjunto finito  $S$ , se considera una variable uni-dimensional (ordinal o numérica), acerca de la cual se asume la existencia de dos valores o polos extremos y opuestos,  $T_A$  y  $T_B$ . Se consideran las funciones de pertenencia  $\eta_{T_A}, \eta_{T_B} : S \rightarrow [0, 1]$ , que representan, para cada elemento de  $S$  y atendiendo a su valor en  $T$ , su grado de pertenencia o cercanía a los polos  $T_A$  y  $T_B$  respectivamente. La medida de polarización  $JDJ_{pol}$  se define para el conjunto  $S$  como:

$$JDJ_{pol}(S, \eta_{T_A}, \eta_{T_B}, \varphi, \phi) = \sum_{\substack{i, j \in S \\ i \leq j}} \varphi(\phi(\eta_{T_A}(i), \eta_{T_B}(j)), (\phi(\eta_{T_B}(i), \eta_{T_A}(j)))) \quad (9.1)$$

donde  $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  denota una función de superposición y  $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  denota una función de agrupamiento.

Por la consideración de una variable uni-dimensional, y ante la asunción de la existencia de dos polos extremos, la situación considerada en la definición anterior es un caso de bi-polarización (ver Figura 9.1). En este tipo de escenarios, se considera una situación de máxima polarización cuando aproximadamente la mitad del conjunto considerado se posiciona en el polo  $T_A$ , y la otra mitad se posiciona en el polo  $T_B$ . Así, considerando la medida  $JDJ_{pol}$ , los valores más altos de polarización se alcanzan cuando el 50 % de los elementos de  $S$  se posicionan en uno de los polos, y el 50 % restante en el otro polo. Por el contrario, los valores más bajos de polarización se obtienen cuando la mayoría de los elementos se ubican en el mismo polo.

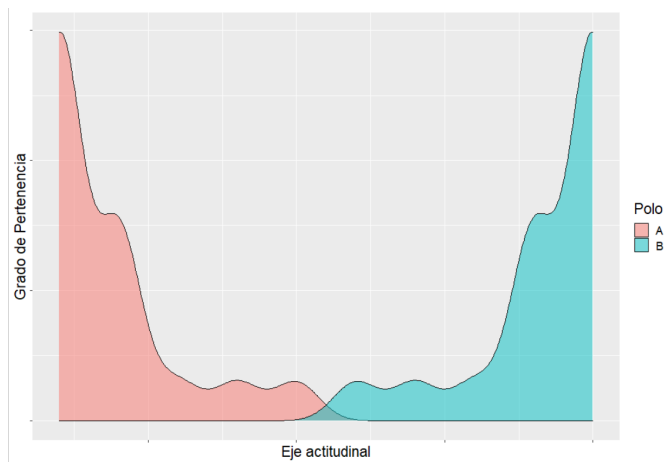


Figura 9.1: Ejemplo de bi-polarización.

## 9.2. Diseño del experimento

### 9.2.1. Metodología

Los nodos, conexiones y relaciones analizados en este experimento se han obtenido a partir de una descarga de datos de la red social Twitter. Concretamente, se han considerado algunas publicaciones registradas durante los meses que duró el estado de alarma impuesto por el gobierno central en España, desde el 16 de marzo de 2020 hasta el 29 de junio de ese mismo año.

Los datos descargados guardan relación con la situación política en este país, particularmente con la gestión de la situación sanitaria llevada a cabo por el gobierno español durante la pandemia COVID-19. Cada uno de los elementos del conjunto en estudio representa un perfil de usuario de Twitter, considerando únicamente cuentas influyentes y verificadas.

Twitter es una de las redes sociales on line más candente en la actualidad,

en la que millones de usuarios debaten continuamente sobre asuntos sociales y políticos, entre otros muchos. Para este caso de estudio se ha utilizado la red de retweets (RT). Un RT es una publicación (*post*) derivada de la acción de un cierto usuario cuando replica un tweet o mensaje determinado de otro usuario con la intención de difundir dicho contenido entre sus seguidores. Generalmente la red RT se utiliza como red dirigida [161], de manera que si un usuario  $i$  escribe el tweet original, y después el usuario  $j$  hace RT, se establece una conexión dirigida cuya orientación representa la acción acometida por cada usuario. No obstante, en este análisis se ha entendido este conjunto de datos como una red no dirigida en el sentido de que la acción de cada usuario (quién escribe la publicación original y quién hace RT) es irrelevante; la clave reside en el contenido compartido, asunción ante la cual se pierde la direccionalidad de las conexiones. Así, una vez que un usuario concreto  $j$  RT un tweet de  $i$ , lo importante es la intención de  $j$  de transmitir y difundir ese contenido. En términos generales, esto puede llevar a la asunción de que  $j$  está de acuerdo con el contenido publicado por  $i$ , motivo por el cual trata de hacer que el tweet sea visible e influyente sobre más personas.

El objetivo de este análisis es conocer la postura política de los usuarios respecto al gobierno español, para lo cual se intenta medir su actitud a través de los tweets registrados. Para obtener la base de datos en cuestión, se ha utilizado la API de R-Studio desarrollada para la manipulación de Twitter, en combinación con el paquete *rtweet* [105], procediendo a la descarga de contenido en cinco rondas. Desde la imposición del estado de alarma, hasta que acabó, se descargaron tweets durante una semana por cada mes, con la intención de disponer de tweets repartidos a lo largo de todo el proceso. La falta de recursos motivó esta decisión.

- 1ª ronda: 16-03-2020 - 23-03-2020.
- 2ª ronda: 06-04-2020 - 21-04-2020.
- 3ª ronda: 07-05-2020 - 22-05-2020.
- 4ª ronda: 03-06-2020 - 15-06-2020.
- 5ª ronda: 14-06-2020 - 29-06-2020.

Note que cuando se utiliza la API, se descargan hasta siete días antes de las fechas establecidas, lo que hace que el espectro temporal abarcado por los tweets descargados sea mayor al indicado realmente.

Para descargar los tweets se procede a la búsqueda de palabras claves, considerando a los principales partidos políticos de España y sus líderes:

*psoe OR pp OR vox OR ciudadanos OR gobierno OR podemos OR españa OR sanchezcastejon OR vox\_es OR pabloiglesias OR pablocasado\_ OR santi\_abascal OR inesarrimadas OR CiudadanosCs OR populares OR podemos OR estadodealarma*

Tras la fase de descarga, en la que se obtienen 4895747 tweets, se ha procedido a una codificación manual de una muestra de los mismos, mediante la cual se pretende:

- (1) Detectar y filtrar los tweets incluidos en la base de datos que no estén relacionados con los objetivos buscados (Característica: **TEMA**).
- (2) Codificar cada tweet como (a) detractor, (b) neutral o (c) partidario del gobierno español (Característica: **POSICIÓN**).

En cada una de las cinco rondas se aplica esta codificación manual para una muestra aleatoria de 1500 tweets. Es importante proceder a la codificación por rondas debido al carácter dinámico de los debates en las redes sociales on line, en los que las palabras o los hechos pueden cambiar en el tiempo, pese a tratar el mismo tema específico. Una vez codificados los datos, se aplica la clasificación de texto con algoritmos de aprendizaje automático para abordar el contenido completo de la base de datos.

Los métodos de máquina de vector soporte (SVM según sus siglas en inglés, Support Vector Machine) están considerados como los mejores algoritmos de aprendizaje automático para la clasificación de texto. Así, tras la fase de clasificación o *tokenización* y la eliminación de ‘palabras vacías’ (*stopwords*), el texto se convierte a matriz de frecuencias *tf-idf*. En su versión más simple en el análisis de tweets, en una matriz *dfm* aparece un 1 si una cierta palabra está contenida en un tweet concreto, y un 0 en caso contrario. Sin embargo, los valores en una matriz *tf-idf* son resultado del producto de la frecuencia de un término y la frecuencia inversa del corpus completo para cada palabra de un tweet. Así, este problema se puede entender como un caso de clasificación con las clases ‘detractor’ (polo  $T_A$ ) y ‘partidario’ (polo  $T_B$ ), de modo que el clasificador se entrena y aplica para la característica ‘TEMA’, y después para la ‘POSICIÓN’. Los resultados obtenidos con ese proceso de clasificación de texto se muestran en la Tabla [9.1](#).

Note que las puntuaciones finales registradas para ‘POSICIÓN’ son la probabilidad de que un tweet sea considerado ‘detractor’ o ‘partidario’ del gobierno español. Asumiendo que los valores cercanos a 0.5 se corresponden con la categoría ‘neutral’, este nivel ha sido omitido con la intención de obtener una variable con dos polos. Estas distancias a la máquina de vector soporte para cada clase del SMV se utilizan como valores de pertenencia para cada usuario a la hora de calcular la medida de polarización  $JDJ_{pol}$ .

En el análisis de clasificación realizado se han considerado los índices *PRECISIÓN*, *RECALL*, *KAPPA*, *F-SCORE* y *AUC* [99, 103].

Tabla 9.1: Resultados proporcionados por un SVM lineal para las funciones ‘TEMA’ y ‘POSICIÓN’.

Ronda	Característica	Precisión	Recall	Kappa	F-Score	AUC
1	TEMA	0.8017	0.9322	0.3670	0.8620	0.6583
2	TEMA	0.8167	0.5476	0.5077	0.6556	0.7344
3	TEMA	0.8267	0.7027	0.6187	0.7596	0.8010
4	TEMA	0.7867	0.7090	0.564	0.7457	0.7791
5	TEMA	0.7659	0.8758	0.5216	0.8171	0.7567
1	POSICIÓN	0.8492	0.9854	0.4816	0.9122	0.6950
2	POSICIÓN	0.8960	0.9619	0.7761	0.9277	0.8780
3	POSICIÓN	0.8392	0.8488	0.6675	0.8439	0.8366
4	POSICIÓN	0.9133	0.9048	0.8225	0.9090	0.9121
5	POSICIÓN	0.8318	0.8600	0.6638	0.8456	0.8335

La base de datos obtenida tras la aplicación del clasificador SMV contiene 1208631 tweets y 469616 perfiles de usuario, de entre los cuales se pretende detectar las cuentas verificadas que sean más influyentes. Para ello, se ha procedido a una fase de filtrado atendiendo a los siguientes criterios.

- (a) Tweets con alta repercusión en Twitter. Para ello se toman las cuentas con tweets cuyo recuento de RT se sitúa por encima del percentil 50 ( $n \geq 317$ ).
- (b) Cuentas verificadas.
- (c) Cuentas con muchos seguidores. Para ello se toman las cuentas cuya cantidad de seguidores se sitúa por encima del percentil 50 ( $n \geq 21779$ ).

Este proceso de filtrado termina con 406 cuentas a considerar, la mayoría de las cuales se corresponden principalmente con políticos, cuentas de partidos políticos y periodistas. Para obtener una red cerrada de usuarios, se emparejan la cuentas que escriben o RT algún tweet de entre estos 406 usuarios. Tras este emparejamiento, se cuenta con 295 usuarios, de cuyas publicaciones se derivan 657 interacciones. Note que estas interacciones pueden afectar a usuarios que no se encuentran entre los 295 considerados, pero que han retweetteado algunas de sus publicaciones; lo que proporciona una base de datos con una cantidad de 454 usuarios diferentes y 657 interacciones.

A partir de esta base de datos se define una red  $G = (V, E)$ , en la que cada una de las 454 cuentas se representa mediante un nodo de  $V$ , y cada una de las 657 aristas se representa mediante una arista de  $E$ . En la caracterización de este grafo se han tenido en cuenta los casos en que un par de usuarios

interactúan varias veces (mediante RT de diferentes tweets), es decir, el grafo en cuestión es valorado. Así, el peso  $w_{ij}$  relativo a la arista  $\{i, j\}$  representa la cantidad de relaciones existentes entre los usuarios  $i$  y  $j$ .

Por otra parte, puesto que los objetos sobre los que se ha aplicado la fase de clasificación en detractor/partidario son tweets y no cuentas, para poder categorizar de alguna manera a los usuarios, se calcula el porcentaje promedio de su distancia a los polos ‘detractor’ o ‘partidario’, atendiendo a la clasificación de sus tweets (tanto de los que escribe originalmente como de los que retweetean). Esto proporciona, para cada usuario, su distancia al polo ‘detractor’ y su distancia al polo ‘partidario’, representadas por las funciones de pertenencia  $\eta_{T_A}$  (‘detractor’) y  $\eta_{T_B}$  (‘partidario’), que serán utilizadas para calcular la medida de polarización  $JDJ_{pol}$ , a partir de la cual se obtendrá una medida borrosa.

La visualización y análisis de redes complejas comprende un proceso complejo [151]; una buena representación y organización de la red es fundamental para poder entender y explotar el conocimiento modelado. Para una mejor comprensión de los resultados que se presentarán posteriormente, se ha utilizado el paquete de R *visNetwork* [3].

### 9.2.2. Definición de la medida borrosa de polarización $\mu_P$

En esta sección se adapta el problema de detección de comunidades basado en medidas borrosas de afinidad al contexto de polarización. Tomando como punto de partida un grafo nítido  $G = (V, E)$  de adyacencia  $A$ , se asume cierto conocimiento acerca de la actitud de los elementos de  $V$  con respecto a algún asunto, en forma de funciones de pertenencia  $\eta_{T_A}$  y  $\eta_{T_B}$ .

A partir de estas funciones de pertenencia, y con base en la medida de polarización  $JDJ_{pol}$ , se define la  $n$ -matriz  $P$ . Para ello, se consideran las funciones de agregación  $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  (intersección) y  $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  (agrupamiento), y la función de negación  $N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , de manera que  $P_{ii} = 0$ , y, para cada par  $i, j \in V$  con  $i \neq j$ ,

$$P_{ij} = \frac{N(JDJ_{pol}(\{i, j\}))}{\sum_{r, s \in V} N(JDJ_{pol}(\{r, s\}))} \quad (9.2)$$

Abusando de notación,  $JDJ_{pol}(\{i, j\}) := JDJ_{pol}(\{i, j\}, \eta_{T_A}, \eta_{T_B}, \varphi, \phi)$ , donde, atendiendo a la ecuación (9.1),

$$JDJ_{pol}(\{i, j\}, \eta_{T_A}, \eta_{T_B}, \varphi, \phi) = \varphi(\phi(\eta_{T_A}(i), \eta_{T_B}(j)), \phi(\eta_{T_A}(j), \eta_{T_B}(i)))$$

En este caso se ha seleccionado  $N(JDJ_{pol}) = 1 - JDJ_{pol}$  como operador de negación de  $JDJ_{pol}$ . No obstante, hay muchas otras funciones que podrían haberse aplicado en su lugar [26]. Note que la medida  $JDJ_{pol}$  cuantifica la distancia, discrepancia o riesgo de polarización entre los elementos de un conjunto. Por tanto, el valor opuesto ( $1 - JDJ_{pol}$ ) puede interpretarse como la cercanía u homogeneidad entre cada par de elementos, según su posición en cualquier eje actitudinal. De esta manera,  $P$  puede entenderse como una representación de la afinidad existente entre pares de nodos, de su capacidad de diálogo sin riesgo de polarización.

Una vez los grados de pertenencia a los distintos polos se han convertido a formato matricial, el siguiente paso para abordar el problema propuesto es la definición de la medida borrosa que emana de la medida de polarización  $JDJ_{pol}$  relativa a la información actitudinal de los individuos. La definición de esta medida borrosa, que en lo siguiente se denotará como  $\mu_P$  no es más que un caso concreto de la medida  $\mu_R$  introducida en la Definición 4.3.10.

**Definición 9.2.1.** Sea  $P$  una matriz caracterizada como en la ecuación (9.2). Se define la medida borrosa  $\mu_P : 2^V \rightarrow [0, 1]$ , donde para cada  $K \subseteq V$ :

$$\mu_P(K) = \sum_{i,j \in K} P_{ij} \quad (9.3)$$

Con el fin de extrapolar todas las propiedades enunciadas para este tipo de medida borrosa de afinidad a  $\mu_P$ , basta demostrar que la matriz  $P$  cumple los requisitos establecidos en la Definición 4.3.10.

- Para cada  $i \in V$ ,  $P_{ii} = 0$  por definición.
- $P_{ij} \geq 0$ : por definición, para cada par de nodos  $i, j \in V$ ,  $JDJ_{pol}(\{i, j\}) \in [0, 1]$ , con lo que  $P_{ij} = \frac{N(JDJ_{pol}(\{i, j\}))}{\sum_{r,s \in V} N(JDJ_{pol}(\{r, s\}))} \in [0, 1]$ .
- $P_{ij} = P_{ji}$ . La medida  $JDJ_{pol}$  es simétrica, con lo que trivialmente se cumple  $P_{ij} = P_{ji}$ .
- $P$  está 1-normalizada:  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{N(JDJ_{pol}(\{i, j\}))}{\sum_{r,s \in V} N(JDJ_{pol}(\{r, s\}))} = \frac{\sum_{i,j \in V} N(JDJ_{pol}(\{i, j\}))}{\sum_{r,s \in V} N(JDJ_{pol}(\{r, s\}))} = 1$ .

Análogamente a como se procede en la Sección 4.3.2, trivialmente se tendrá la caracterización de la medida borrosa  $\mu_P$  a través de su AWG correspondiente, cuya matriz de adyacencia es  $P$ . Esta propiedad simplifica

notablemente la resolución del problema de detección de comunidades en el EFG  $\tilde{G} = (V, E, \mu_P)$ ; bastará con aplicar el algoritmo *Duo Louvain* tomando como parámetros de entrada  $A$  y alguna agregación  $M = \theta(A, P)$ , método que podría ser referido como *Polarization Louvain*.

### 9.3. Caso de estudio

A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar la metodología de detección de comunidades desarrollada en esta memoria al conjunto de datos obtenidos de Twitter tal y como se explica en la Sección 9.2. Para ello, se define un grafo valorado con 454 nodos y 657 aristas a partir de dicho conjunto de datos. Todos los datos y resultados relativos a este proceso se pueden consultar en el repositorio de Github<sup>1</sup>, donde se incluye tanto una asignación de ID numérico a cada usuario para simplificar la manipulación de la base de datos, la definición de la componente conexa, la lista de aristas original, los grados de pertenencia de los nodos de la red analizada, y las particiones obtenidas al aplicar el algoritmo *DuoLouvain*.

Para proceder con la búsqueda de grupos, se considera la componente conexa más grande (*weak component*) del grafo obtenido. En adelante, este subgrafo será la red base,  $G = (V, E)$ , siendo  $|V| = 261$  y  $|E| = 484$ , y  $A$  su matriz valorada de adyacencia. La representación de  $G$  se presenta en la Figura 9.2, donde, teniendo en cuenta el peso de cada arista, se pretende que el tamaño de cada nodo sea reflejo de su grado, de manera que los nodos más grandes se correspondan con los usuarios con más interacciones, mientras que los nodos más pequeños son relativos a usuarios menos activos.

Tomando los grados de pertenencia de cada uno de los nodos a los polos  $T_A$  (ser detractor del gobierno español) y  $T_B$  (ser partidario del gobierno español), modelados mediante las funciones de pertenencia  $\eta_{T_A}$  y  $\eta_{T_B}$ , se calcula la medida de polarización  $JDJ_{pol}$  (Definición 9.1.3), a partir de la cual se obtiene la matriz  $P$  atendiendo a la ecuación (9.2).

El cómputo de la medida  $JDJ_{pol}$  depende de la selección de dos tipos de operador: un operador de intersección  $\phi$  y un operador de agrupamiento  $\varphi$ . Para este análisis se han utilizado algunos de los operadores más importantes, considerando dos escenarios diferentes para la agregación de los grados de pertenencia: (a)  $\phi = \text{mín}$  y  $\varphi = \text{máx}$ ; (b)  $\phi = \text{product}$  y  $\varphi = \text{máx}$ .

Debido a la caracterización de  $P$  y siendo  $\mu_P$  la medida borrosa definida en la ecuación (9.3), es trivial tomar  $P$  como la matriz de adyacencia de  $G_{\mu_P}$ , con lo que es posible referirse a ambas herramientas indistintamente.

En este punto, se aplica la metodología de detección de comunidades ba-

<sup>1</sup><https://github.com/inmagpp/Community-Detection-Problem-Based-on-Polarization-Measures.-An-application-to-Twitter-the-COVID-19>

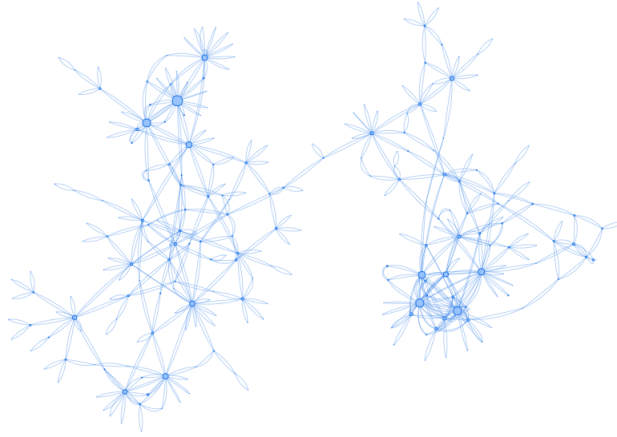


Figura 9.2: Grafo  $G = (V, E)$ .

sada en medidas borrosas que se ha presentado en esta memoria. Para ello, se trabaja sobre el grafo borroso extendido  $\tilde{G} = (V, E, \mu_P)$ . Las comunidades obtenidas mediante los distintos procesos de agrupamiento serán cohesivas con todo el conocimiento subyacente a  $\tilde{G}$ , tanto la parte estructural como la información adicional modelada por  $\mu_P$ . Como se ha mencionado en varias ocasiones, la respuesta a *¿qué es una comunidad?* está estrechamente conectada con los operadores de agregación considerados.

En este caso, para construir la matriz  $M$ , se trabaja con combinaciones lineales de las matrices  $A$  y  $P$ , asignando a cada una de ellas un peso por medio de un parámetro de importancia  $\gamma \in [0, 1]$ , i.e., se considera la matriz  $M = \theta(A, P) = \gamma A + (1 - \gamma)P$ .

Dependiendo del valor de  $\gamma$ , la influencia de cada una de las componentes de  $\tilde{G}$  en el proceso de agrupamiento varía. Para valores de  $\gamma$  cercanos a 1, la componente estructural gana importancia, de manera que los grupos obtenidos están compuestos por nodos estrechamente conectados en  $A$ ; mientras que para valores de  $\gamma$  cercanos a 0, la información adicional proporcionada por  $\mu_P$  es decisiva en la definición de las comunidades, de manera que, siempre que sea posible atendiendo a la estructura de  $A$ , los grupos estarán formados por nodos cuyo grado de pertenencia a los distintos nodos sea similar, esto es, nodos entre los cuales los niveles de polarización son bajos. En este caso, aquellos usuarios sobre los que se puede presuponer un punto de vista político similar, estarán en el mismo grupo.

Se aplica el algoritmo *Duo Louvain* para los dos escenarios de agrupa-

miento/intersección previos, considerando la matriz  $M = \gamma A + (1 - \gamma)P$ , para distintos valores de  $\gamma = 1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0$ . Cuando  $\gamma = 1$  la aplicación de este método no es más que la aplicación del algoritmo de Louvain, solución que servirá como caso base para el análisis comparativo posterior.

Se muestra cómo la organización de los grupos cambia atendiendo a la importancia asignada a cada una de las componentes de  $\tilde{G}$  en el proceso de agrupamiento. Particularmente interesantes son los casos extremos,  $\gamma = 1$  (Louvain sin información adicional) y  $\gamma = 0$  (todo el peso de importancia se asigna a la información adicional).

Note cómo, cuando solo se considera el punto de vista político de los usuarios, el grafo se divide en dos comunidades principales, pudiéndose diferenciar fácilmente entre los detractores y los partidarios del gobierno español.

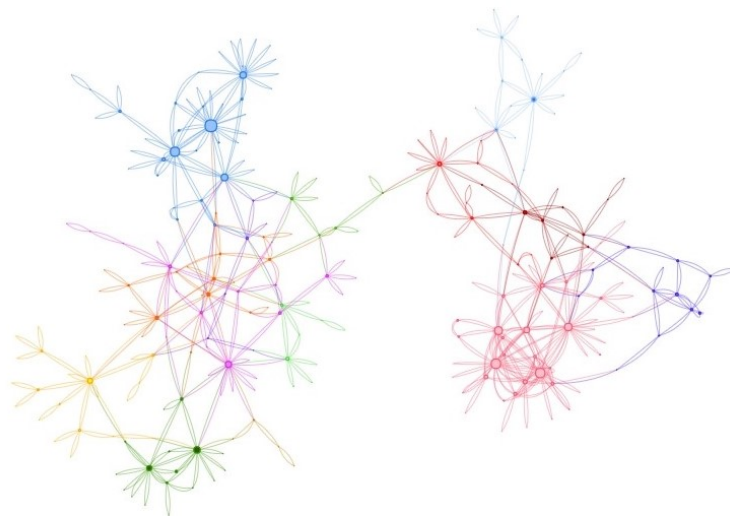


Figura 9.3: Partición obtenida con el algoritmo de Louvain en  $G = (V, E)$ .

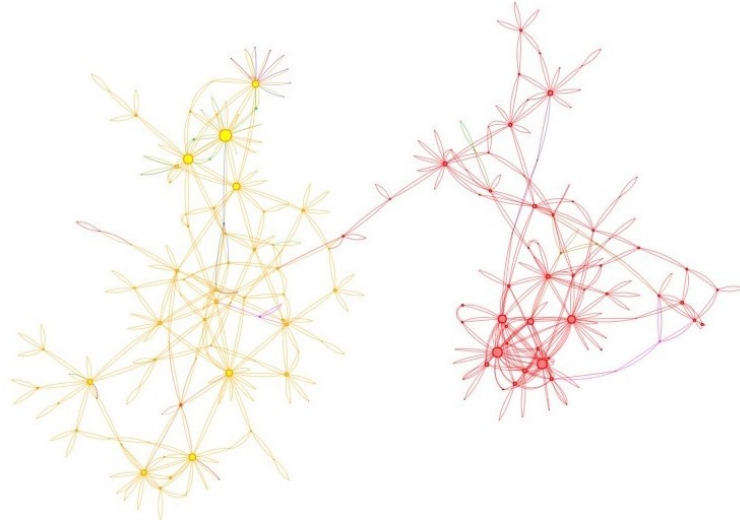


Figura 9.4: Partición obtenida con el algoritmo *Duo Louvain* en el EFG  $\tilde{G} = (V, E, \mu_P)$ , cuando  $\varphi = \text{máx}$ ,  $\phi = \text{mín}$  y  $\gamma = 0$ .

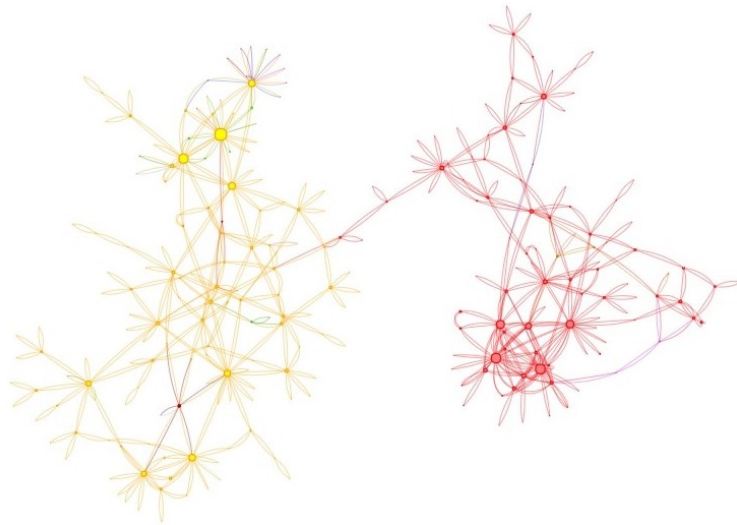


Figura 9.5: Partición obtenida con el algoritmo *Duo Louvain* en el EFG  $\tilde{G} = (V, E, \mu_P)$ , cuando  $\varphi = \text{máx}$ ,  $\phi = \text{prod}$  y  $\gamma = 0$ .

Para medir la bondad de las particiones obtenidas, se utiliza la medida  $JDJ_{pol}$ . Parece lógico aceptar que un grupo cohesivo debe estar compuesto por usuarios muy conectados entre sí que compartan de alguna manera su postura política. En este sentido, se puede afirmar que un grupo  $C_i$  es tan cohesivo como bajo sea su valor correspondiente  $JDJ_{pol}(C_i)$ .

Hay un hándicap importante en la comparación de las particiones obte-

nidas para los distintos valores de  $\gamma$ , ya que no todas ellas tienen el mismo número de comunidades. Para poder proceder con esta comparativa, se calcula para cada una de las particiones la media ponderada de los correspondientes valores  $JDJ_{pol}(C_i)$ . Se propone calcular el valor de polarización de una comunidad  $P = \{C_1, \dots, C_s\}$  como:

$$pol(P) = \left[ \frac{\sum_{i=1}^s JDJ_{pol}(C_i) * |C_i|}{\sum_{i=1}^s |C_i|} \right]_{|C_i| > 1} \quad (9.4)$$

Es importante llamar la atención sobre el hecho de que solo se considerarán las comunidades no aisladas para calcular  $pol(P)$ , es decir, grupos con más de un elemento  $|C_i| > 1$ ; no tiene ningún sentido considerar cuán polarizado está un elemento con respecto a sí mismo.

En las Tablas 9.2 y 9.3 se presenta el valor  $JDJ_{pol}$  calculado para cada una de las comunidades de las particiones obtenidas (sólo para comunidades no aisladas), además del correspondiente valor  $pol(P)$ . Para cada partición se muestra el vector  $(JDJ_{pol}(C_1), \dots, JDJ_{pol}(C_s))$ , cuya componente  $i$ -ésima se corresponde con  $JDJ_{pol}(C_i)$ .

Tabla 9.2: Comparación de las particiones obtenidas.  $\varphi = \text{máx}$  y  $\phi = \text{mín}$ .

$\varphi = \text{máx}$ $\phi = \text{mín}$	# Comunidades $ C_i  > 1$	$(JDJ_{pol}(C_1), \dots, JDJ_{pol}(C_s))$	$pol(P)$
<i>Louvain</i>	14	(0.256, 0.514, 0.253, 0.301, 0.458, 0.377, 0.302, 0.4403, 0.459, 0.349, 0.190, 0.475, 0.108, 0.415)	0.359
$\gamma = 0.5$	11	(0.239, 0.259, 0.513, 0.297, 0.377, 0.440, 0.514, 0.257, 0.459, 0.415, 0.455)	0.341
$\gamma = 0.4$	8	(0.254, 0.332, 0.259, 0.513, 0.450, 0.514, 0.459, 0.455)	0.348
$\gamma = 0.3$	7	(0.304, 0.300, 0.253, 0.513, 0.512, 0.526, 0.246)	0.343
$\gamma = 0.2$	8	(0.334, 0.267, 0.444, 0.512, 0.462, 0.440, 0.528, 0.246)	0.330
$\gamma = 0.1$	7	(0.323, 0.273, 0.418, 0.482, 0.440, 0.462, 0.246)	0.319
$\gamma = 0$	8	(0.302, 0.263, 0.439, 0.463, 0.277, 0.440, 0.462, 0.246)	0.292

Tabla 9.3: Comparación de las particiones obtenidas.  $\varphi = \text{máx}$  y  $\phi = \text{prod}$ .

$\varphi = \text{máx}$ $\phi = \text{prod}$	# Comunidades $ C_i  > 1$	$(JDJ_{pol}(C_1), \dots, JDJ_{pol}(C_s))$	$pol(P)$
<i>Louvain</i>	14	(0.218, 0.454, 0.228, 0.261, 0.378, 0.296, 0.261 <sub>p</sub> , 0.359, 0.389, 0.306, 0.168, 0.392, 0.102, 0.258)	0.306
$\gamma = 0.5$	11	(0.220, 0.453, 0.190, 0.260, 0.261, 0.296, 0.359, 0.326, 0.382, 0.389, 0.258)	0.299
$\gamma = 0.4$	9	(0.214, 0.281, 0.220, 0.453, 0.363, 0.389, 0.369, 0.258, 0.343)	0.292
$\gamma = 0.3$	7	(0.257, 0.251, 0.220, 0.453, 0.369, 0.417, 0.343)	0.292
$\gamma = 0.2$	7	(0.259, 0.228, 0.453, 0.369, 0.417, 0.249, 0.186)	0.289
$\gamma = 0.1$	7	(0.274, 0.228, 0.393, 0.417, 0.369, 0.249, 0.186)	0.277
$\gamma = 0$	8	(0.256, 0.224, 0.316, 0.376, 0.199, 0.243, 0.249, 0.186)	0.244

Como se puede observar en las tablas previas y en la Figura 9.6, el valor  $pol(P)$  relativo a las particiones obtenidas mediante el algoritmo *Duo Louvain* es más bajo que el correspondiente a la partición obtenida mediante el algoritmo de Louvain. Estos resultados permiten aseverar la idea de que la metodología aplicada proporciona particiones con un alto nivel de cohesión, más representativas de la realidad modelada que las soluciones clásicas.

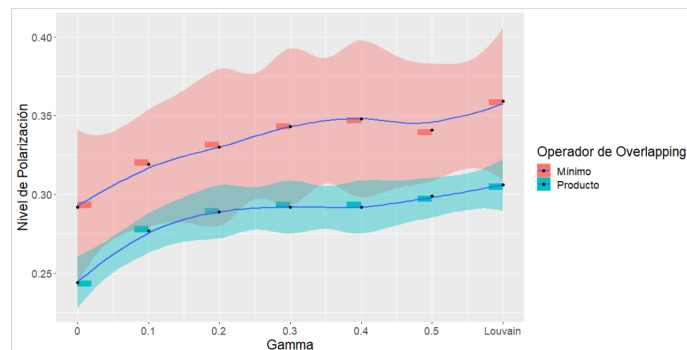


Figura 9.6: Valores de polarización de la comunidad  $P$  dependiendo del operador utilizado.

Para ilustrar el proceso desarrollado, en las siguientes figuras se muestra un ejemplo de cómo dos pares de nodos que deberían pertenecer a las mismas comunidades, son asignados a cuatro grupos diferentes por el algoritmo de Louvain. Por una parte, *iunida* (Izquierda Unida) y *PODEMOS* (Podemos), son partidos políticos de ideología de izquierda que se unieron en marzo de 2019, están separados en la partición clásica. Por otro lado, *populares* (Partido Popular), es un partido político de derecha, y *bea\_fanjul*, miembro de este grupo político también están separados. Mediante la aplicación del nuevo algoritmo propuesto, dichos pares de elementos se agrupan en las mismas comunidades, como se muestra en las Figuras 9.7 y 9.8.

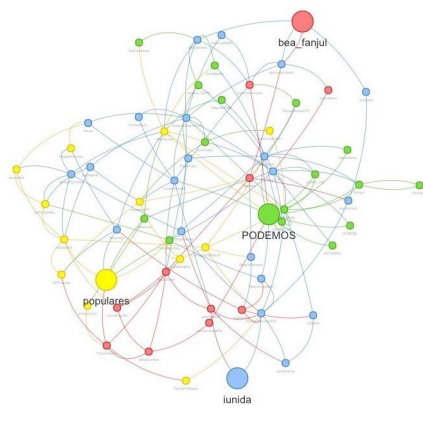


Figura 9.7: Comunidades de los nodos *iunidas*, *PODEMOS*, *populares* y *bea\_fanjul* según el algoritmo de Louvain.

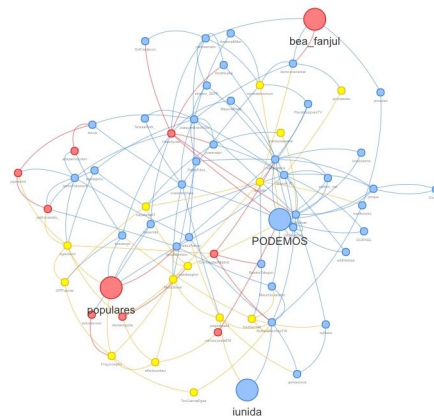


Figura 9.8: Comunidades de los nodos *iunidas*, *PODEMOS*, *populares* y *bea\_fanjul* según el algoritmo *Duo Louvain*.

---

Como último apunte, mencionar que se hizo un análisis previo al mostrado en el que se consideraba una matriz de adyacencia no valorada cuyos elementos simplemente mostraban la existencia o no de una interacción entre los distintos pares de nodos. Las conclusiones correspondientes a este escenario no se muestran en estas páginas pues, aún siguiendo la misma dirección que los resultados obtenidos con la red valorada, se pierde representatividad al no considerar una función de pesos.



## Capítulo 10

# Conclusiones y Trabajo futuro

*Sinfonía N.º 7 (8) Si menor, D. 759  
(Sinfonía Inacabada)*

F. Schubert

**RESUMEN:** En esta última parte de la memoria se ha pretendido hacer una reflexión sobre el trabajo que en ella se quiere reflejar, la acometida de los objetivos planteados y cómo se han alcanzado, además de la futura investigación que se podría derivar de esta investigación. Este capítulo se ha estructurado en tres partes. En la Sección [10.1](#) se presentan las conclusiones relativas al desarrollo de este trabajo, aportando una perspectiva filosófica de las mismas. A continuación, en la Sección [10.2](#) se relacionan los objetivos planteados en las primeras páginas de esta memoria con los resultados mostrados y las contribuciones que han derivado. Finalmente, en la Sección [10.3](#) se presentan las futuras líneas de investigación que podrían derivar del trabajo realizado.

### 10.1. Conclusiones

Fruto de una reflexión sobre la fase de elaboración de esta memoria y todo el trabajo de investigación inherente a la misma, sirva esta sección para exponer las enseñanzas más reseñables derivadas de este proceso. Podría afirmarse que el verdadero aprendizaje ha dimanado de innumerables momentos de observación de la realidad más cercana, y la posterior cavilación sobre una posible formulación matemática de la misma. Ciertos actores y conexiones de nuestra realidad son fácilmente transferibles a un plano matemático, cuando se quiere modelar una situación para después aplicar alguna solución matemática. Cuando se trata de hacer recuento de *cosas*, nuestra mente es capaz de hacer uso inmediato de los principios más básicos de teoría de conjuntos, haciendo un llamamiento a la existencia de un conjunto formado por entes

que representan los elementos considerados. Preguntas que puedan ser fácilmente respondidas con Sí/No se traducen mediante el uso de operadores *booleanos* o de valores numéricos. Un pequeño avance conceptual del conocimiento matemático permitiría establecer enlaces entre elementos a partir de la información disponible, nuevamente podría ser derivada de una pregunta con respuesta Sí/No del tipo *¿están conectados estos individuos?* De esta representación de conexiones surge la noción de grafo, como herramienta para modelar la existencia de un conjunto de entes conectados entre sí.

Sin menospreciar la valía de esta herramienta que ha servido como concepto base para un sinnúmero de problemas de diseño matemático, establecimiento de costos, las modernas técnicas más modernas de *machine learning* o de análisis relacional de redes sociales, cabe plantearse la posibilidad de contar con modelos que permitan una representación más flexible y ajustada a la realidad.

Los grafos clásicos han sido y seguirán siendo herramientas de modelado verdaderamente útiles para establecer y representar conexiones entre elementos. En ciertas evoluciones sobre la noción preliminar, se contempla incluso la posibilidad de incorporar algunas propiedades con las que representar pesos, importancia o direccionalidad en las relaciones. Ahora bien, ¿esto es todo? ¿Acaso no existen infinitas sinergias, evidencias o enlaces entre individuos, acerca de los cuales no se tiene un conocimiento explícito que pueda formularse mediante la información disponible?

En cierto periódico se encontró la frase *“El poder de la incertidumbre: la vida es una permanente exposición a lo inesperado”*. Y si la vida es incertidumbre, ¿acaso no hay indecisión y vacilación en cualquier aspecto de la misma, en las relaciones entre actores conectados, vaguedad en las evidencias acerca de individuos, en los distintos tipos de enlaces que puedan existir entre los mismos elementos? Ante este panorama, se hizo evidente una carencia presentada por los grafos en sus concepciones más clásicas: la falta de capacidad para manipular la incertidumbre.

En palabras de Marie Curie, *“Uno nunca se da cuenta de lo que se ha hecho, sólo puede ver lo que queda por hacer”*; contexto en que surgió el planteamiento de proponer una nueva herramienta de modelado. Fruto de una combinación de la teoría de grafos con medidas borrosas, cuya capacidad para representar y manipular la incertidumbre y plausibilidad es de sobra conocida y aceptada, nace una nueva herramienta de modelado: el grafo borroso extendido. Los EFG conforman la piedra angular de esta memoria, proponiéndose distintas especificaciones del mismo que facilitan la consideración de diversas situaciones concretas, así como posibles generalizaciones al plano multi-dimensional que permiten la consideración de una cantidad variable de fuentes de conocimiento.

Con infinidad de aplicaciones en asuntos de temática SNA, finalmente se optó por el tratamiento de problemas de detección de comunidades. ¿Por qué limitarse a la información representada por un grafo para establecer grupos cohesivos de elementos, cuando se dispone de mucho más conocimiento, que, con un correcto proceso de tratamiento, podría ser incorporado a la fase de búsqueda de grupos? En este contexto, se plantea el problema de detección de comunidades basada en medidas borrosas.

La profundización en problemas de este tipo ha venido acompañada de una interesante reflexión acerca de la noción de *grupo*. Surgen planteamientos del tipo “¿qué es más importante, mantener juntos elementos afines, o tratar de separar individuos enfrentados?”; “¿qué he de tener en cuenta, las conexiones, relaciones, enlaces o evidencias?”; “¿qué aporta cada fuente de conocimiento en el proceso de agrupamiento?”. Al tratar de dar respuesta a estas y otras cuestiones, se hizo latente la necesidad de adaptar la definición de *grupo* al problema abordado, de modo que la idea clásica de mantener juntos entes fuertemente conectados pierde valía ante la consideración, modelado e inclusión de la incertidumbre inherente al conocimiento de diversas fuentes de información adicional.

Para abordar este cambio conceptual en la noción de grupo, se ha hecho necesario aprender sobre índices de importancia e interacción, lo que ha favorecido un acercamiento al estudio del valor de Shapley y el índice de interacción. Este proceso ha implicado un importante aprendizaje en concepto de técnicas de muestreo, ante el desarrollo de sendos métodos de aproximación. La necesidad de contar con técnicas que permitan la consideración de los índices mencionados, ha forzado el conocimiento de esta rama de la estadística, con el enriquecimiento educativo que conlleva.

Por otra parte, y para finalizar esta sección, se quiere señalar la importancia de la capacidad de visualización y análisis que ha de tener un modelo. De poco sirve disponer de una potente herramienta de modelado si no facilita el proceso de manipulación de la información representada. Es por ello que se ha prestado atención a posibles vías de representación del conocimiento intrínseco a una medida borrosa, ofreciendo alternativas para su consideración con las que paliar en cierta manera la complejidad exponencial derivada del manejo de este tipo de funciones.

Se presenta un resumen de las principales ideas mencionadas, todas ellas tal vez se puedan sintetizar en la convicción de que hemos de ser capaces de encontrar modelos de representación sofisticados con los que atender y dar soluciones a problemas de la manera más realista posible.

**Idea 1:** es importante disponer de herramientas que se adecuen al tratamien-

to y modelado de situaciones reales. Por ello, hay que tener en perspectiva que siempre se puede contar con más conocimiento del representado por modelos conocidos, planteando un proceso de búsqueda de la vía de representación necesaria para su consideración.

**Idea 2:** la combinación de distintas ramas de la Ciencia es tal vez una de las mejores opciones para aportar avances en el conocimiento. En este caso, la combinación de la Teoría de grafos con la Teoría de medidas borrosas ha derivado en el desarrollo de una potente herramienta de modelado con la que abordar con gran precisión situaciones reales.

**Idea 3:** es de vital importancia adaptar el modelado, análisis y resolución de un problema a la realidad representada. De poco sirve estancarse en la noción de un tema en su concepción más clásica si esta no se ajusta al escenario considerado. Para ello, se hace necesario el uso adecuado de un modelo apto, así como un cambio en la formulación de la solución buscada.

## 10.2. Relación entre propuestas, objetivos y contribuciones

En este punto, se hace necesario el desarrollo de un resumen que esclarezca las conexiones entre las propuestas incluidas en esta memoria y los objetivos planteados al inicio de la misma, con la intención de cumplimentar la evaluación de los mismos. No es posible llevar a cabo esta tarea sin establecer una vinculación de los planteamientos y objetivos con las contribuciones que definen el grueso de esta memoria, y que soportan en cierta manera el trabajo de investigación presentado, de cara a la comunidad investigadora. Para ello, se seguirá la estructura de objetivos planteada en la Sección [1.1](#), tratando de relacionar las distintas aportaciones con los objetivos abordados.

**Objetivo 1.** *Proponer una metodología de aproximación del índice de interacción relativo a la medición del grado de interacción entre elementos [\[74\]](#), [\[133\]](#). Se han encontrado escasas aportaciones en la literatura acerca de este índice, al menos desde una perspectiva práctica. Es por ello que se ha perseguido la obtención de nuevos métodos con los que, evitando la complejidad relativa al cálculo de su valor real, obtener buenas aproximaciones.*

Este objetivo surgió como necesidad durante la resolución de algunos de los problemas aquí planteados. Por ello, aunque no fuera concebido originalmente como uno de los primeros pasos del proceso, se ha considerado seguir el orden natural en la exposición de los objetivos buscados. Es por ello que se expone en primer lugar el desarrollo de esta herramienta.

Las ideas planteadas sobre distintas formas de representación de una medida borrosa eran claras desde un punto de vista teórico. No obstante, se hacía necesario contar con herramientas que facilitasen la obtención del valor del índice de interacción (queda fuera de este punto todo lo relativo al valor de Shapley, acerca del cual ya existen métodos de estimación). El desarrollo del objetivo que aquí se expone ha sido fuertemente influenciado por la idea desarrollada en la tesis doctoral de J. Castro acerca de posibles tratamientos del valor de Shapley. Todo el planteamiento y desarrollo de los puntos que a continuación se exponen, se presenta en el Capítulo 3.

1. *Proponer una caracterización alternativa del índice de interacción entre pares de elementos basada en órdenes (permutaciones).*

La caracterización original del índice de interacción propuesta por T. Murofushi y S. Soneda [133] evidencia la complejidad relativa al cálculo del mismo. Para paliar esta dificultad, se propone una nueva forma de representación de este índice. La nueva caracterización, basada en órdenes o permutaciones de los elementos del conjunto considerado, propiciará el desarrollo de métodos con los que estimar el valor real del índice. Uno de los puntos más importantes de este objetivo es la demostración matemática que avala que la nueva representación es, en efecto, análoga a la original.

2. *Desarrollar dos algoritmos de estimación para aproximar el valor real del índice de interacción entres pares de elementos  $I_{ij}$ .*

Una vez obtenida una caracterización alternativa del índice de interacción, el verdadero cometido de esta parte de la investigación era obtener técnicas con las cuales aproximar el valor real del índice. Para ello, se ha trabajado en dos procesos de estimación basados en técnicas de muestreo. El primero se asienta sobre herramientas de muestreo aleatorio simple, proponiéndose también una versión adaptada a técnicas de muestreo estratificado, para abordar situaciones que así lo permitan, en las que estas formas de aproximación resultan más eficientes.

3. *Evaluar la calidad de las estimaciones obtenidas mediante la comparativa con el valor real del índice de interacción concerniente a ciertas medidas borrosas.*

En cualquier temática, la proposición de un nuevo método ha de venir acompañada de una evaluación de su desempeño. En este caso, y puesto que no se conocen otros procesos con los que estimar el valor del índice de interacción, el testado de los algoritmos propuestos se ha acometido mediante un proceso comparativo del valor estimado obtenido con respecto al valor real relativo a ciertas medidas borrosas para las cuales este cálculo puede llevarse a cabo con complejidad polinomial.

4. *Generalizar la caracterización alternativa del índice de interacción basada en órdenes (permutaciones) para facilitar la consideración de conjuntos de cualquier cardinal.*

Pese a que T. Murofushi y S. Soneda fueron los precursores en la caracterización del índice de interacción, acotaron su definición a la consideración de relaciones entre pares de elementos. Esta limitación sería superada por M. Grabisch, quien propondría una generalización del índice de interacción que permitiera la consideración de relaciones entre los individuos de un conjunto de cualquier cardinal [74]. Haciendo una analogía con los procesos seguidos para pares de elementos, se trabaja en una caracterización alternativa del índice de representación; incluyendo la demostración que avala la equivalencia de esta definición con respecto a la original.

5. *Proponer un algoritmo de estimación para obtener el índice de interacción entre los elementos de un conjunto de cualquier cardinal  $I_T$ .*

Como generalización del proceso de aproximación basado en técnicas de muestreo aleatorio simple desarrollado para pares de elementos, se trabaja en el desarrollo de un método de estimación del índice de representación para conjuntos. En este contexto, y por la naturaleza de las técnicas de muestreo estratificado, no es posible plantearse la generalización del algoritmo estratificado previamente presentado.

Las contribuciones relativas a este objetivo son:

**Contribución 6:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information*. In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

Los resultados se muestran en la Sección 4.3.2, donde se establece una relación entre el valor de Shapley y el índice de interacción para algunos escenarios concretos.

**Contribución 9.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Polynomial Calculation Based on Sampling of the Interaction Index*. Enviado a: Mathematics (JCR).

Los resultados se presentan en el Capítulo 3, donde se exponen las distintas caracterizaciones alternativas, los métodos propuestos y las evaluaciones pertinentes.

**Objetivo 2.** *Proponer una herramienta de modelado y visualización de las relaciones entre individuos definidas por una medida borrosa.*

En distintos puntos de esta memoria se incide en la necesidad de encontrar soluciones para afrontar la representación, manipulación e interpretación de la información intrínseca a una medida borrosa. Estos han sido los pasos dados para tratar esta situación.

1. *Definir el grafo valorado asociado a una medida borrosa, AWG. Proponer dos vías de cálculo necesarias para la construcción del AWG: índice de interacción y valor de Shapley.*

Para abordar la problemática relativa a procesos de manipulación y análisis de medidas borrosas, se introduce una herramienta con la que representar y visualizar las relaciones definidas por una de estas funciones. Se trata del grafo valorado asociado a la misma, cuya caracterización se lleva a cabo a través de su matriz de adyacencia, para cuyo cálculo se proponen dos posibles vías de cálculo: el índice de interacción y el valor de Shapley. Un grafo así definido representa, para cada par de nodos, cómo le afecta a cada ente del par estar o no en coalición con el otro, atendiendo a la información aportada por la medida borrosa en cuestión. El proceso seguido para la obtención de este modelo de representación se detalla en la Sección [4.2](#).

2. *Detallar el proceso de cálculo y obtención de ciertas medidas borrosas particulares:  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de un vector, medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de una matriz, y medidas borrosas bipolares. Detallar el proceso de construcción del AWG correspondiente.*

Con el fin de ilustrar lo más detalladamente posible la caracterización y visualización de un AWG, se detalla su cálculo en ciertos escenarios concretos. Para ello, en la Sección [4.3](#) se trabaja con algunas medidas borrosas específicas. El primer tipo de medida borrosa considerada recibe el nombre de  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno, y su caracterización se asienta en las premisas enunciadas por M. Sugeno acerca de la naturaleza de las  $\lambda$ -medidas borrosas [\[177\]](#), tomando como elemento de partida un vector que define cierta evidencia acerca de los elementos de un conjunto. Se enuncian ciertas peculiaridades y propiedades de esta medida, para terminar con el cálculo del AWG correspondiente. Otro de los tipos de medidas borrosas considerado son las medidas borrosas de afinidad obtenidas a partir de una matriz. Estas medidas, que en esencia representan relaciones de afinidad entre pares de elementos, presentan ciertas propiedades que facilitan su tratamiento, manipulación y visualización, particularmente, el cálculo del AWG correspondiente. Finalmente se trabaja con medidas borrosas bipolares en las que se cuenta con una doble componente dual, representando por una parte evidencias positivas (*pros*), y por otra, evidencias negativas

(*contras*). Se muestra cómo, para este caso particular, el grafo asociado tiene dos componentes independientes, cada una de ellas relativa a una de las partes de la medida borrosa bipolar considerada.

Para todas las medidas enunciadas, además de detallar el proceso de definición de su grafo valorado asociado, se proponen diversos ejemplos ilustrativos del procedimiento.

3. *Proponer una generalización al plano multi-dimensional del AWG: el multi-grafo valorado asociado a una familia de medidas borrosas (MAWG). Detallar el proceso de construcción de un MAWG para ciertas medidas.*

Dando un salto al plano multi-dimensional, la Sección 4.4 se dedica a la generalización de los resultados y modelos previamente enunciados, con el fin de abordar situaciones en que existen múltiples medidas borrosas. De esta generalización nace el concepto multi-grafo valorado asociado a una familia de medidas borrosas, MAWG, introducido en la Definición 4.4.1. Esta herramienta es una generalización de los AWG, y, haciendo una analogía con el proceso detallado previamente, se toman en consideración las medidas borrosas concretas mencionadas, y para las que se ilustra el cálculo del multi-grafo asociado.

Las contribuciones relativas a este objetivo son:

**Contribución 1.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection algorithm based on fuzzy measures*. In Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making Proceedings of INFUS Congress 2019 **1029**:133–140. (Scopus).

En este trabajo se planteó un acercamiento preliminar a la definición del grafo asociado a una medida borrosa, cuya caracterización se puede encontrar en la Sección 4.2. Originalmente, se optó por el uso del valor de Shapley (Definición 4.2.1), en concreto para la obtención del AWG relativo a medidas borrosas de afinidad (Sección 4.3.2).

**Contribución 2.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures*. In Studies in Computational Intelligence Proceedings of ESCIM Congress 2019. (Scopus).

En este trabajo se abordó el contexto bipolar establecido por medidas borrosas del tipo  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+)$ , particularmente a la definición del AWG correspondiente, tal y como se expone en la Sección 4.3.3.

**Contribución 4.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures and theirs applications to community detection problems*. In Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020, Glaswog, UK 2020, 1–6. (Scopus).

En este artículo se trabajó en la caracterización de las  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de un vector, cuya definición y propiedades se exponen en la Sección [4.3.1](#). También se trabajó en la caracterización del grafo asociado correspondiente, prestando especial atención a ciertos escenarios concretos en que la medida borrosa correspondiente es aditiva, denotada como  $\mu_x^a$ .

**Contribución 6.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information*. In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

**Contribución 8:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Multiple Bipolar Fuzzy Measures: an application to community detection problems for networks with additional information*. In International Journal of Computational Intelligence Systems **13**(1):1636–1649. (JCR).

En estos dos artículos, publicados en revistas de impacto, se trabajó en la generalización a un plano multi-dimensional del AWG, tal y como se detalla en la Sección [4.4](#). En el primero de ellos se contemplan principalmente familias de medidas borrosas de afinidad, mientras que el segundo se ambientó en un marco de bipolaridad.

**Objetivo 3.** *Proponer un nuevo modelo de representación del conocimiento, fruto de la existencia de un grafo nítido y de una medida borrosa relativa a las relaciones entre los vértices del mismo: el grafo borroso extendido (EFG).*

Uno de los puntos claves del trabajo de investigación desarrollado ha sido la propuesta de un nuevo modelo de representación del conocimiento, que permite un modelado de la realidad mucho más rico y detallado del obtenido a través de herramientas clásicas.

1. *Hacer una revisión de los modelos de representación existentes, así como una exposición de sus carencias.*

Esta memoria tiene dos pilares fundamentales sobre los que se asienta: el marco concerniente a la Teoría de grafos, y la Teoría relativa a medidas borrosas. A lo largo de los años se ha trabajado en un sinfín

de propuestas en ambos campos, cuyo análisis y aplicación han facilitado el desarrollo de la Ciencia. La aparición de los grafos impulsó el estudio de las conexiones entre elementos en que se asienta el análisis de redes sociales y/o redes complejas. Por otra parte, la consideración de medidas borrosas permitiría una nueva forma de modelar la realidad atendiendo a muchos de sus matices. Sin menospreciar la valía de ambas herramientas en ámbitos de diversa índole, se pueden señalar algunas carencias o limitaciones para las que aún no se ha propuesto ninguna solución. Uno de los problemas más evidentes que presentan los grafos es relativo a su capacidad de modelado. Pese a que su eficacia para el modelado de enlaces entre elementos es indiscutible, su capacidad de representación no va más allá del establecimiento de conexiones entre individuos. En cuanto a las medidas borrosas, se ha encontrado una gran cantidad de trabajos teóricos sobre las mismas, pero es evidente que aún quedan muchos aspectos prácticos que abordar. En el Capítulo 2 se incluye una detallada explicación sobre las nociones y conceptos básicos de las áreas señaladas. También en la Sección 5.1 del Capítulo 5 se mencionan algunas de las características y carencias de los grafos borrosos en su concepción clásica.

2. *Proponer un nuevo mecanismo de representación del conocimiento a partir de la información representada por un grafo nítido en un conjunto con una medida borrosa externa que establece relaciones entre los vértices: grafo borroso extendido (EFG). Ilustrar el proceso de caracterización del EFG relativo a ciertas medidas borrosas concretas.*

Esta nuevo modelo de representación es una buena alternativa con la que suplir las carencias inherentes a métodos clásicos. Combina la capacidad de representación de un grafo, con la información modelada por una medida borrosa, enriqueciendo así el proceso de tratamiento del conocimiento. Con esta herramienta se hace posible la representación, no sólo de un conjunto de elementos y las conexiones que existen entre ellos, sino también la consideración de una cierta información adicional acerca de posibles relaciones de diversa índole que pudieran existir entre ellos independientemente de los enlaces que los unen. Esta herramienta recibe el nombre de grafo borroso extendido, EFG, y se introduce en la Sección 5.2.

3. *Generalizar el EFG a un plano multi-dimensional, de manera que sea posible abordar situaciones modeladas por un grafo en las que existen múltiples medidas borrosas independientes al mismo: grafo borroso extendido multi-dimensional (MEFG). Ilustrar el proceso de caracterización del MEFG relativo a familias de medidas borrosas concretas.*

Si bien la propuesta del EFG supone un aumento notable en la calidad y riqueza en la representación, esta herramienta limita su ámbito a la

existencia de una única fuente de información adicional (una medida borrosa) ajena al grafo. Ante la evidente complejidad y gran cantidad de detalles y conocimiento inherentes a cualquier tipo de problema real, pareció evidente la necesidad de desarrollar una generalización de esta herramienta, dotándola de cierto carácter multi-dimensional. Esta necesidad motiva la definición del grafo borroso extendido multi-dimensional, MEFG, herramienta que permite representar las conexiones directas entre individuos, además de cualquier cantidad de conocimiento externo a las mismas, mediante el uso de una familia de medidas borrosas. En la Sección [5.3](#) se trabaja en este concepto.

Las contribuciones relativas a este objetivo son:

**Contribución 1.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection algorithm based on fuzzy measures*. In Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making Proceedings of INFUS Congress 2019 **1029**:133–140. (Scopus).

La primera vez que se habló del concepto de grafo borroso extendido (Definición [5.2.1](#)), fue en este artículo preparado para su presentación en el congreso INFUS 2019. Una versión muy preliminar de esta herramienta constituiría la base sobre la que se introdujo el nuevo tipo de problema que, con trabajos posteriores, conformaría el grueso de esta memoria: detección de comunidades basada en medidas borrosas.

**Contribución 2.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures*. In Studies in Computational Intelligence Proceedings of ESCIM Congress 2019. (Scopus).

Presuponiendo la gran cantidad de opciones que abría la definición del EFG, en este artículo se desarrolló en un contexto bipolar, estudiando la existencia de fuentes de información duales o de carácter bipolar.

**Contribución 4.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures and their applications to community detection problems*. In Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020, Glaswog, UK 2020, 1–6. (Scopus).

En este trabajo se incluyó un tipo concreto de EFG relativo al manejo de  $\lambda$ -medidas borrosas de Sugeno obtenidas a partir de un vector. Así, se trabaja en la construcción de relaciones entre elementos, a partir de

una cierta información individualizada sobre los mismos que se combina con el modelado de sus conexiones proporcionado por un grafo.

**Contribución 6.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information*. In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

**Contribución 8:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Multiple Bipolar Fuzzy Measures: an application to community detection problems for networks with additional information*. In International Journal of Computational Intelligence Systems **13**(1):1636–1649. (JCR).

En estos dos artículos se presta especial atención al caso multi-dimensional, introduciéndose el MEFG (Definición [5.3.1](#)). En concreto, en la Contribución 6 se hace hincapié en medidas borrosas de afinidad que dan lugar al MEFG de matriz (Definición [5.3.2](#)), mientras que en la Contribución 8 se desarrolla en un contexto bipolar en el que aparece el MEFG bipolar multi-dimensional (Definición [5.3.3](#)).

**Objetivo 4.** *En el contexto de SNA, plantear una aplicación específica del EFG: detección de comunidades en grafos basada en medidas borrosas.*

Los primeros objetivos que se presentan giran en torno a la idea de representación del conocimiento y modelado de la realidad. Una vez alcanzados estos objetivos con la propuesta de nuevos modelos de representación del conocimiento, cabe preguntarse el *para qué* de su existencia, buscando una aplicación lógica y práctica de los mismos. En este caso, se ha optado por la resolución de problemas de detección de comunidades en grafos en situaciones en que se dispone de una cierta fuente de información adicional ajena al grafo y modelada por una medida borrosa; esto es, por la búsqueda de grupos en un grafo borroso extendido.

1. *Trabajar en la detección de grupos de los nodos de una red considerando fuentes de información adicional independiente a la estructura gráfica en que se basan las técnicas de agrupación clásicas. Propuesta de un algoritmo a través del cual poder analizar la información de una matriz ajena a la adyacencia de un grafo.*

La creciente popularidad de las redes complejas ha atraído el interés de muchos científicos, que se ha traducido en la propuesta de múltiples procedimientos de estudio y análisis de las mismas, entre los que se pueden destacar los métodos de detección de comunidades en grafos. En la Sección [2.2.1](#) se citan algunos de los métodos más importantes,

mencionando algunas de sus propiedades más notables. En su inmensa mayoría, todos estos métodos tienen un punto común: basan la búsqueda de grupos en las propiedades estructurales o topológicas del grafo. El correcto tratamiento de esta asunción proporciona diversos tipos de resultados (particiones del grafo), muchos de ellos de notable calidad. No obstante, es importante señalar que la única información considerada para la definición de grupos es el conocimiento representado por el grafo, sin tomar en consideración ningún dato externo. Con el propósito de dar un paso más, se plantea asumir la existencia de cierta información adicional ajena al grafo y modelada en forma de matriz, que pudiera aumentar la cohesión de los grupos detectados con respecto a la realidad abordada. Así mismo, se propone un nuevo método, fruto de ciertas modificaciones del algoritmo de Louvain [18], con el que obtener particiones coherentes a partir de un grafo y una matriz de información adicional. Este método se presenta en la Sección 6.2 y recibe el nombre de *Additional Louvain*.

2. *Trabajar en la detección de comunidades ante la existencia de medidas borrosas de distinta naturaleza.*

Una vez motivada la necesidad de disponer de información adicional al grafo para obtener una partición *buena*, y tomando la propuesta definida en el método *Additional Louvain* como punto de partida, se trabaja en la asunción de que la información adicional disponible sea modelada por una medida borrosa. En la Sección 6.3 se define un método de detección de comunidades en un EFG, llamado *Extended Louvain*.

3. *Proponer diversas especificaciones de la versión preliminar del algoritmo de detección de comunidades atendiendo a distintos escenarios.*

En las últimas secciones del Capítulo 6 se trabaja en el problema de detección de comunidades en un EFG previamente presentado, considerando ciertos casos concretos, a saber, comunidades basadas en un EFG de vector (Sección 6.3.1) y basadas en un EFG de matriz (Sección 6.3.2), presentándose sendos algoritmos de *clustering*, así como una detallada explicación del proceso acompañada de ejemplos ilustrativos.

Las contribuciones relativas a este objetivo son:

**Contribución 1.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection algorithm based on fuzzy measures*. In Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making Proceedings of INFUS Congress 2019 **1029**:133–140. (Scopus).

En este artículo se abordó preliminarmente el problema de detección de comunidades basada en medidas borrosas, particularmente, contando con la existencia de una medida borrosa de *afinidad* describiendo cierta atracción entre los distintos pares de nodos de un grafo.

**Contribución 4.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures and theirs applications to community detection problems*. In Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020, Glaswog, UK 2020, 1–6. (Scopus).

En este trabajo se introdujo la detección de comunidades basada en un EFG de vector, de modo que, analizando la obtención de particiones condicionada a la existencia de una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno.

**Objetivo 5.** *En el contexto de SNA, plantear una aplicación específica del MEFG: detección de comunidades en grafos basada en múltiples medidas borrosas.*

Las reflexiones relativas a este objetivo son totalmente paralelas a las presentadas en el Objetivo 4, pero atendiendo a un contexto multi-dimensional que propicia la existencia de un MEFG. Todos los resultados que a continuación se enunciarán para justificar los distintos objetivos específicos mencionados, pueden encontrarse en el Capítulo [7](#).

1. *Trabajar en la detección de grupos en grafos ante la existencia de una medida borrosa bipolar, haciendo hincapié en cómo la noción de grupo se ve afectada por la naturaleza bipolar de la medida en cuestión. Plantear una modificación del algoritmo de Louvain mediante la cual incorporar la información definida por una medida borrosa bipolar a la detección de grupos.*

La introducción de medidas de talante bipolar al problema de detección de comunidades fuerza un cambio en el concepto de comunidad, que va más allá de la consideración de información adicional. En este punto, es importante trabajar en la dualidad del conocimiento representado, prestando especial atención a la interpretación de cada una de las fuentes de información disponible. En la Sección [7.1](#) se presentan todas las reflexiones y análisis fruto del estudio de la búsqueda de grafos en un EFG bipolar, así como un algoritmo para la resolución de problemas de este tipo.

2. *Trabajar la detección de comunidades en grafos cuando la existencia de múltiples medidas borrosas ajenas a la estructura gráfica afecta a la noción de grupo. Proponer distintas especificaciones del método preliminar para incorporar la información adicional definida por una familia de medidas borrosas a la detección de comunidades en un grafo.*

En la Sección 7.2 se aborda el problema de detección de comunidades en un grafo cuando se dispone de múltiples fuentes de información independientes al grafo, esto es, la búsqueda de grupos en un MEFG. Considerando las medidas borrosas concretas mencionadas en objetivos previos, se definen ciertas modificaciones del método troncal para la búsqueda de grupos atendiendo a información adicional, propiciando la aparición de diversos algoritmos de *clustering*. En este punto, cabe resaltar en este punto la importancia de un proceso de agregación.

3. *Evaluar la calidad del algoritmo propuesto considerando distintos modelos de referencia en combinación con el cálculo del NMI (Normalized Mutual Information).*

En cualquier contexto, la definición de un nuevo método debe ir secundada por una evaluación del mismo para comprobar su eficacia y compararlo con otros métodos de la literatura. En el trabajo de investigación presentado en esta memoria se propone una nueva metodología, cuya idea principal es detectar comunidades en un grafo atendiendo a información adicional modelada por una medida borrosa. Definida la metodología, se plantean diversas modificaciones o algoritmos, con el objetivo de afrontar una amplia variedad de distintas situaciones. Así, en el Capítulo 8 se presenta la evaluación de los algoritmos generales relativos a cada una de las tres ramas de medidas borrosas consideradas:  $\lambda$ -medidas borrosas de vector, medidas borrosas de afinidad, y medidas borrosas bipolares. En cada caso se trabaja en la generación de distintos grafos sintéticos, que, en combinación con el cálculo del NMI, permiten afirmar que la nueva metodología de agrupación propuesta así como las diversas modificaciones y algoritmos planteados, proporcionan resultados de gran calidad, consistentes y coherentes a la existencia de un EFG en sus distintas versiones.

Las contribuciones relativas a este objetivo son:

**Contribución 2.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures*. In Studies in Computational Intelligence Proceedings of ESCIM Congress 2019. (Scopus).

En este artículo se trabajó en una versión preliminar del problema de detección de comunidades basada en medidas borrosas bipolares, incluyendo una breve reflexión sobre cómo dualidad de la información adicional afecta a la noción de *grupo*.

**Contribución 6.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection*

*problems for networks with additional information.* In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

**Contribución 8:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Multiple Bipolar Fuzzy Measures: an application to community detection problems for networks with additional information.* In International Journal of Computational Intelligence Systems **13**(1):1636–1649. (JCR).

Ambos artículos se desarrollan en un contexto multi-dimensional; se trabaja en la idea de detectar grupos cohesivos a la existencia de una familia de medidas borrosas prestando especial atención a los procesos de agregación necesarios para la manipulación de varias fuentes de información adicional. Particularmente, la Contribución 6 se centra en el análisis de medidas borrosas de afinidad, mientras que la Contribución 8 se asienta en un contexto bipolar. En sendos casos se pueden encontrar los resultados experimentales relativos a la evaluación de los métodos propuestos.

**Objetivo 6:** *Aplicar la metodología de detección de comunidades propuesta a un caso real.*

Los puntos previos son de marcado carácter teórico. No obstante, una idea tan puntera en uno de los contextos más en boga de la actualidad debe ser contrastada con su aplicación en un caso real. Se ha escogido Twitter, una importante red social on line que actúa como altavoz de las opiniones de millones de personas sobre temas de cualquier índole, y las discusiones y comentarios que suscitan. Para la explotación de esta red social, es muy importante definir el marco de interés considerado; de cualquier otra manera es inviable acceder a toda la información. En este caso, la temática escogida ha sido la COVID-19, prestando interés a la posición política con respecto al gobierno español mostrada por ciertos usuarios. Para evaluar el posicionamiento de los individuos considerados se ha adoptado el uso de medidas de polarización, particularmente de la medida  $JDJ$ , que ha sido adaptada al contexto de medidas borrosas. A partir de la base de datos obtenida se define un EFG, sobre el que se aplica la metodología de detección de comunidades desarrollada en esta memoria. Los resultados obtenidos no hacen sino reafirmar la adecuada manera de proceder de la idea aquí propuesta.

1. *Generación, depuración y análisis de una base de datos obtenida a partir de la red social Twitter.*

El primer paso para un estudio de caso es la obtención de la base de datos a considerar. En este caso se procedió a una descarga de posts de la red social Twitter. La base original hubo de ser sometida

a un importante proceso de depuración con el objetivo de obtener una base de datos coherente y adecuada al objetivo de investigación. Así, partiendo de la red de retweets (RT), se ha generado un grafo conexo, valorado y no dirigido, que es una de las componentes del EFG sobre el que posteriormente se aplica la detección de comunidades. Para ello ha sido necesaria la aplicación de diversas técnicas de manipulación de bases de datos, codificación, clasificación, aprendizaje automático (SMV) y análisis estadístico.

2. *Definición de una medida borrosa a partir de ciertas funciones de pertenencia o membresía.*

Los procesos de clasificación y aprendizaje automático, permiten caracterizar ciertas funciones de pertenencia que definen la posición política con respecto al gobierno español de cada individuo considerado. Estas funciones de pertenencia son utilizadas para calcular la medida de polarización  $JDJ$ , a partir de la cual se define la medida borrosa  $\mu_P$ . Esta medida borrosa se construye a partir de una matriz  $P$ , procediendo de manera similar al proceso detallado con respecto a la matriz de afinidades  $R$  y la correspondiente medida borrosa  $\mu_R$  en la Sección 4.3.2. Por ello, es fácil extrapolar todas las propiedades de  $\mu_R$  a la nueva medida  $\mu_P$ . De modo que, tomando la posición de un grupo de individuos en un eje actitudinal (en este caso, postura política), se ha definido una medida borrosa  $\mu_P$  que representa sinergias entre elementos.

3. *Aplicación de algoritmos de detección de comunidades basadas en medidas borrosas en la red obtenida, considerando una medida de polarización como elemento base de la información adicional.*

Tomando el grafo basado en la red RT, y la medida borrosa basada en medidas de polarización  $\mu_P$ , se define un EFG que, por las particularidades de  $\mu_P$ , resulta ser de afinidad. En este contexto, se aplica la metodología de detección de comunidades basada en medidas borrosas, particularmente el método *Duo Affinity Louvain*, tomando la adyacencia del grafo y la matriz  $P$  como parámetros de entrada, y considerando diversas agregaciones por medio de un parámetro de importancia  $\gamma$ . Los resultados obtenidos reflejan cómo la nueva metodología propuesta permite obtener grupos cohesivos con la realidad modelada. En este caso, es fácil encontrar a ciertos políticos que, ante la consideración de la información adicional, son agrupados con perfiles de igual ideología, mientras que las técnicas clásicas de *clustering* los dejan fuera de contexto. La evaluación de los resultados obtenidos se ha llevado a cabo, no sólo de forma visual e intuitiva analizando perfiles concretos, sino que también se ha medido cómo de polarizada está cada una de las particiones obtenidas como indicador de la calidad.

Las contribuciones relativas a este objetivo son:

**Contribución 10:** Gutiérrez, I., Guevara, J.A., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Community Detection Problem Based on Polarization Measures: an application to the COVID-19 case in Spain*. Preprints Mathematics, (JCR) 2021010080, (doi: 10.20944/preprints202101.0080.v1).

En este artículo se presenta todo el trabajo empírico detallado en el Capítulo 9. Desde la obtención de la base de datos, su depuración y análisis, hasta la obtención de la medida borrosa a partir de la medida de polarización  $JDJ$  y la aplicación del método de detección de comunidades basada en medidas borrosas.

### 10.3. Futuras líneas de investigación

Gran parte del trabajo presentado en esta memoria es fruto de labores de investigación desarrolladas para su publicación en revistas de impacto y otros medios durante el programa de Doctorado en Análisis de Datos (*Data Science*). Pese a que muchos de los resultados expuestos quedan totalmente concluidos en estas páginas, son varias las líneas de investigación que se han dejado abiertas. La introducción de una nueva metodología de búsqueda de grupos establece las bases de una nueva forma de abordar la detección de comunidades en un grafo, a partir de la cual se pueden plantear infinidad de asunciones, contemplando distintas situaciones y escenarios. Cabe mencionar la importancia de aplicar esta metodología en más casos reales atendiendo a diversas casuísticas, ya que, la idea principal al desarrollar métodos de este tipo es trascender a los resultados teóricos, resultando útiles en su aplicación práctica.

En las siguientes líneas se presentan algunas de las vías de investigación pendientes de trabajo futuro. Se pretende que la ordenación de las mismas sea coherente con la estructura de la memoria. Cabe resaltar que algunos puntos que se mencionarán a continuación se encuentran en una fase de estudio relativamente avanzada en el momento de escritura de esta memoria.

- Análisis de la componente multiplicativa de la  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno  $\mu_x$  introducida en la Definición 4.3.3 para el caso en que  $p > 1$ , esto es, cuando tiene cierto carácter negativo.
- Estudio y obtención del grafo valorado asociado a una  $\lambda$ -medida borrosa de Sugeno cuando no es aditiva, esto es, el grafo asociado a  $\mu_x^m$ .
- Estudio del AWG cuando la obtención del valor de Shapley no es inmediata; aplicación de las técnicas de estimación definidas en [30, 31].

- Análisis de distintas aplicaciones del método *Duo Louvain*. Podría resultar especialmente importante la consideración del algoritmo *Multiple Bipolar Duo Louvain*, considerando distintos operadores  $\Phi^-$ ,  $\Phi^+$  y  $\psi$ .
- Estudio de caso en más redes reales. El margen de tiempo disponible ha impedido un estudio más profundo en casos reales. Sería interesante tomar otras bases de datos, considerar distintos tipos de medidas borrosas, simultanear varias de ellas a la vez, y cualquier otro tipo de consideración que pudiera derivarse de un problema real.
- En cuanto al índice de interacción, más allá de la propuesta de dos métodos de estimación del mismo, únicamente se ha propuesto su aplicación en la obtención del AWG desde una perspectiva teórica. Por ello, sería interesante enfatizar en la aplicación de los métodos propuestos en distintos contextos.
- Pese a que el algoritmo de Louvain es muy potente, cuando se estudian amplios volúmenes de datos pueden surgir ciertas dificultades. Este método (y todos aquellos basados en la optimización de la modularidad), tiene un límite de resolución que no permite la detección de comunidades de tamaño *reducido* dentro de redes grandes, lo que se conoce como *modularity resolution limit*. El algoritmo de Louvain es la piedra angular de la nueva metodología propuesta, que hereda este defecto. Por ello, sería interesante el estudio de diversas opciones con las que paliar este problema.
- Cambiar el carácter del problema abordado (detección de comunidades en un grafo basada en medidas borrosas), posicionándolo en un contexto multi-criterio. Pese a que se ha trabajado en un plano multi-dimensional, contando con la existencia de familias de medidas borrosas, en todos los casos considerados se incluye un proceso de agregación que resume todas las fuentes de conocimiento disponibles en una sola. Fruto del trabajo realizado con el Profesor José Rui Figueira, se están obteniendo resultados (aún en proceso) que pretenden aventurarse a afirmar la riqueza que supone tratar los procesos aquí presentados desde una perspectiva multi-criterio [42, 60, 181]. Se pretende resolver una secuencia de problemas basados en  $\epsilon$ -restricciones, para así obtener el conjunto de todas las soluciones no dominadas [57].
- Abordar problemas de toma de decisiones multi-criterio que tratan con medidas borrosas, considerando la información que podría obtenerse con la aplicación de un método de detección de comunidades a los distintos criterios existentes, por ejemplo para tomar los más reseñables.



# Conclusions and Future Work

*Symphony No.7 (8) B minor, D.759  
(Unfinished Symphony)*

F. Schubert

**RESUMEN:** The intention of the last chapter is to reflect on the work presented, the planned tasks that have been undertaken, and the way they have been reached, in addition to pose the future research work which could stem from this dissertation. This chapter is structured into three parts. Firstly, the conclusions derived from this research work, presented from a philosophical point of view. Then, it is showed the relation between the tasks enunciated in the Introduction with the obtained results and the contributions related to them. Finally, future research lines that could be derived from this thesis are enunciated.

## Conclusions

After a deep reflection on it, in this section it is put out the learning emanating from the process of writing this thesis as well as from the research work inbuilt in it. It is fair to accept that the true learning comes from a long time of observation of the close reality, and a subsequent meditation on a possible mathematical modeling of it. Certain agents and connections of reality are easily transferred to a mathematical environment when a situation has to be modeled for further application of a mathematical solution. When it comes to count *things*, the human mind can immediately recall the most basic principles of set theory, thinking of a set composed by some entities which represent the elements considered. Yes/No questions are promptly translated to mathematics by means of boolean operators or numerical values. A small conceptual foretaste of the mathematical knowledge allows us to establish links between the elements from the available information. This information could be derived from the answer of a Yes/No question such as *are these individuals connected?* The notion of graph arises from the representation

of this type of connections. It is a useful tool for modeling sets of elements connected to each other.

Graphs have been the basis for a wide range of mathematical design problems, costing models or the most trendy techniques of machine learning or relational analysis of social networks. Nevertheless, it is reasonable to look for models which allow a more flexible representation to better fix reality.

Classical graphs haven been and still are really useful modeling tools for establishing and representing connections between elements. With the development of certain progressions over the preliminary notion, it is possible to consider weighted relations and quantify their importance or directionality. But, is it all? Are there not infinity of synergies, evidences or links between individuals, about which you do not have an explicit knowledge that can be formulated through the available information?

This sentence was read in a newspaper: En cierto periódico se encontró la frase “*The power of uncertainty: Life is a permanent exposure to the unexpected*”. If life is uncertainty, is there not indecision and hesitation in any aspect of it, in the relationships between connected actors, vagueness in the evidence about individuals, in the different types of links that may exist between the elements? Faced with this panorama, it becomes clear a lack of representation skill inherent to the most classical conceptions of graphs: their poor ability to handle vagueness.

Marie Curie said “*one never notices what has been done; one can only see what remains to be done*”. On these words, it arises the development of a new modeling tool. From a combination of Graph Theory with the analysis of fuzzy measures, whose ability to handle and represent vagueness and plausibility is well known, it comes the new modeling tool: the extended fuzzy graph. EFGs are the cornerstone of this dissertation. Several specifications of them are shown by considering certain concrete situations, as well as feasible generalizations to a multidimensional context that allow to consider a variable amount of knowledge sources.

EFGs have multitud of applications on SNA issues; finally it was chosen the study of community detection problem. Why limit itself to the information represented by a graph to establish cohesive groups of elements, when much more knowledge is available, which, with proper processing, could be incorporated into the group search phase? In this context, it arises the problem of community detection in graphs based on fuzzy measures.

The in-depth analysis of this type of problems leads to an interesting reflection on the variation of the notion of *group* with respect to classical understandings. It arises some issues like “what is it more important, to maintain together related elements, or try to separate faced individuals?”; “what

should be considered, connections, relationships, links or evidences?"; "how does each knowledge source contribute to the grouping process?". Trying to answer these and other questions, it comes the need to adapt the definition of *group* to the problem addressed. Then, the classical idea of maintaining together tightly-knit elements loses importance by the consideration, modeling and incorporation of the vagueness related to the knowledge of several additional information sources.

To face this conceptual change in the notion of group, it has been crucial a deep learning about importance and interaction indexes. So the study of the Shapley value and the interaction index has been carried out. This process includes important learning about sampling techniques, essential to develop some estimation methods. The study of these techniques has come with the learning of this statistical branch, enriching the knowledge.

On the other hand, to finish this section, it is worth to point out the importance of a model's ability to visualize and analyze the information. It is worthless having a powerful modeling tool if it does not facilitate the handling of the represented information. For this reason, several ways of knowledge representation concerning fuzzy measures have been studied, so that several alternatives for its consideration with which alleviate the exponential complexity related are proposed.

Then it is showed a review of the main ideas. All of them could be summarized into the belief that we should be able to find sophisticated representation models with which solve problems realistically.

**Idea 1:** it is important to have adequate tools for properly handling and modeling real situations. The key is to keep in mind that always there is more knowledge apart from the one modeled with classical models, so that it is necessary to find the better way of representation.

**Idea 2:** the combination of several branch of the Science is one of the best chances to go on in the knowledge. In this case, the conjunction of the Graph Theory with the Fuzzy Measures Theorys, has resulted in the development of a powerful modeling tool with which accurately address real problems.

**Idea 3:** it is essential to adapt the modeling, analysis and resolution of a problem to the related reality. It is worthless to stay in the classical notion of a particular issue if it does not fit properly the scenario considered. Then, it is necessary a proper use of an adequate model, as well as a change in the formulation of the solution sought.

## Relation between proposed tasks and contributions

At this point, a summary is needed to clarify the connections between the proposals included in this dissertation and the tasks detailed at the beginning, in order to fulfill their evaluation. It can not be done without pointing out the relations between the tasks and the contributions which are the bulk of this thesis. These contributions hold the research work presented in the face of the research community. To carry on with it, the tasks structure presented in the Introduction will be followed, in order to connect the contributions with the addressed tasks.

**Task 1.** *To propose a methodology to approach the interaction index [74, 133]. This index concerns the measurement of the interaction degree between elements. Nevertheless, few contributions have been found in the literature related to this index, at least from an applied point of view. For this reason, new methods have been developed to approach this index, avoiding the exponential complexity related to the calculation of its real value.*

This task arose as a necessity during the resolution of some of the problems raised here. So, although it was not originally intended as one of the preliminary steps of the process, it has been decided to follow the natural order to display the results, so the presentation of this tool comes first.

Existing ideas about different ways of representing a fuzzy measure are clear from a theoretical perspective. Nevertheless, it is necessary to have a tool that facilitates the calculation of the interaction index (at this point, the Shapley value is omitted, as a lot of work has been done about it). The development of this task has been influenced by the idea presented by J. Castro in his doctoral dissertation about alternative approaches to the Shapley value. The whole study of the following points is shown in the Chapter 3.

1. *To propose an alternative characterization of the interaction index between pairs of elements, which is based on orders (permutations).*

The original characterization of the interaction index introduced by T. Murofushi y S. Soneda [133] reveals the complexity related to its calculation. To alleviate this difficulty, it is proposed a new representation of this index, based on orders or permutation of the elements considered. This characterization arouses the definition of some methods to estimate the real value of this index. One of the main points concerning this task is about the mathematical proof which asserts that the new characterization is equivalent to the original one.

2. *To develop two estimation algorithms to approach the real value of the interaction index  $I_{ij}$ .*

Once the alternative characterization of the interaction index is fixed, the main aim of this task is to obtain some methods to estimate the real value of the interaction index. To carry it out, two estimation processes have been developed, both based on sampling techniques. The first is based on simple random sampling techniques, and the other is about stratified random sampling. The stratified method allows to address several situations in which these sophisticated techniques perform efficiently.

3. *To evaluate the quality of the estimations by comparing them with the real value of the interaction index related to certain fuzzy measures.*

In any field, when a new algorithm is proposed, its performance has to be evaluated. In this case, since no process is known about the estimation of the interaction index, the evaluation of the new algorithm is carried out by comparing the results obtained with respect to the real value of this index concerning certain fuzzy measures for which this calculation can be done with polynomial complexity.

4. *To generalize the alternative characterization of the interaction index based on orders (permutations) to facilitate the consideration of sets of any cardinal.*

T. Murofushi y S. Soneda were the pioneers in the characterization of the interaction index, the original definition was limited to pairs of elements. This limitation was passed by M. Grabisch, who proposed a generalization of the interaction index to consider the relations between the elements of a set of any cardinal [74]. Analogously as the process developed on pairs of elements, an alternative characterization of the representation index is proposed, including the proof which asserts the equivalence of this definition with respect to the original one.

5. *To propose an estimation algorithm to approach the interaction index related to the elements of a set with any cardinal  $I_T$ .*

It is developed a process to estimate the representation index, based on simple random sampling. It is a generalization of the method proposed to deal with pairs of elements, which allows the consideration of sets of elements with any cardinal. In this context, because of the nature of the stratified sampling techniques, a generalization of the stratified algorithm defined for pairs of elements is not feasible concerning sets of any cardinal.

The contributions related to this task are:

**Contribution 6:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection*

*problems for networks with additional information.* In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

The results are shown in Section [4.3.2](#), in which it is established a relation between the Shapley value and the interaction index for certain specific scenarios.

**Contribution 9.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Polynomial Calculation Based on Sampling of the Interaction Index.* Sent to: Mathematics (JCR).

The results are shown in the Chapter [3](#), in which the alternative characterizations are detailed, as well as the proposed methods and their evaluation.

**Task 2.** *To propose a tool to model and visualize the relations between elements defined by a fuzzy measure.*

The importance of having solutions to deal with the representation, handling and interpretation of the knowledge inherent to a fuzzy measure, is highlighted in several parts of this dissertation. The steps taken are detailed then.

1. *To define the weighted graph associated with a fuzzy measure, AWG. To propose two different ways for its calculations: the interaction index and the Shapley value.*

To deal with the process of handling and analyze fuzzy measures, it is introduced a new tool which facilitates the representation and visualization of the relations defined by one of those functions. It is the weighted graph associated with a fuzzy measure, whose characterization is carried out by means of its adjacency matrix. Two methods are proposed to calculate this matrix: the interaction index and the Shapley value. A graph defined that way represents, for every pair of nodes, how each one of its individuals is affected by the absence of the other in a coalition, according to the information provided by the fuzzy measure. The process proposed to obtain this representation model is detailed in Section [4.2](#).

2. *To detail the characterization of certain particular fuzzy measures: fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures obtained from a vector; affinity fuzzy measures obtained from a matrix, and bipolar fuzzy measures. To detail the characterization of the corresponding AWG.*

To properly illustrate the characterization and visualization of an AWG, its calculation is shown in certain specific scenarios. Then, in Section

[4.3](#) several fuzzy measures are considered. The first type is called fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measure, and its characterization is based on the assumptions enunciated by M. Sugeno about the nature of fuzzy  $\lambda$  measures [\[177\]](#). The starting point to characterize this fuzzy measure is a vector which defines any evidence about the individuals. Several peculiarities and properties of this fuzzy measure are pointed out. Finally, the calculation of the related AWG is shown. Affinity fuzzy measures obtained from a matrix are other types considered. These measures, which represent affinity relations between pairs of elements, have several properties which facilitate their handling, visualization and, specifically, the calculation of the related AWG. Finally, bipolar fuzzy measures are considered. These measures have a dual component, so positive evidences *pos*, and negative evidences *cons* are represented. In this particular case, the corresponding associated graph has two independent components, each of them related to one part of the bipolar fuzzy measure considered.

For all the measures mentioned, in addition to detailing the definition of the corresponding AWG, several examples are shown.

3. *To propose a generalization of the AWG to a multidimensional context: the weighted multi-graph associated with multiple fuzzy measures (MAWG). To detail the characterization of the MAWG related to certain particular fuzzy measures.*

Moving to a multidimensional context, Section [4.4](#) is devoted to the generalization of the aforementioned results and model, with the aim of addressing situations in which multiple fuzzy measures are involved. From this generalization arises the concept of weighted multi graph associated with multiple fuzzy measures (or a family of fuzzy measures), MAWG, introduced in the Definition [4.4.1](#). This tool is a generalization of the AWG, and its characterization is illustrated for the fuzzy measures previously detailed.

The contributions related to this task are:

**Contribution 1.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection algorithm based on fuzzy measures*. In Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making Proceedings of INFUS Congress 2019 **1029**:133–140. (Scopus).

A preliminary approach to the definition of the graph associated with a fuzzy measure was included in this work. The characterization of this tool can be found in Section [4.2](#). Originally, the Shapley value was

suggested to be used for the calculation of the AWG (Definition [4.2.1](#)), particularly when concerning affinity fuzzy measures (Section [4.3.2](#)).

**Contribution 2.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures*. In Studies in Computational Intelligence Proceedings of ESCIM Congress 2019. (Scopus).

In this paper it was included a first approach to a bipolar context related to fuzzy measures such as  $\mu^b = (\mu^-, \mu^+)$ , particularly with the definition of the corresponding AWG, as it can be seen in Section [4.3.3](#).

**Contribution 4.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures and theirs applications to community detection problems*. In Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020, Glaswog, UK 2020, 1–6. (Scopus).

The characterization of the fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures obtained from a vector, whose definition and properties are explained in Section [4.3.1](#), was firstly introduced in this paper. It was also included the definition of the corresponding AWG, with focus on several scenarios in which the fuzzy measure is additive ( $\mu_x^a$ ).

**Contribution 6.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information*. In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

**Contribution 8:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Multiple Bipolar Fuzzy Measures: an application to community detection problems for networks with additional information*. In International Journal of Computational Intelligence Systems **13**(1):1636–1649. (JCR).

These articles, both published in JCR journals, include the generalization to a multidimensional context of the AWG, as it is detailed in Section [4.4](#). The first one deals with affinity fuzzy measures, and the other is based on a bipolar context.

**Task 3.** *To propose a new knowledge representation model, obtained as a result of the existence of a crisp graph and a fuzzy measure related to the relations between the individuals: the extended fuzzy graph (EFG).*

A key point of this research work is the development of a new knowledge representation model, which allows a rich and detailed modeling of reality.

1. *To assess and provide a description of the preexisting models of representation, in order to identify their weak points.*

This dissertation is based on two essential pillars: Graph Theory and Fuzzy Measures Theory. A wide range of proposals have arisen in last years, whose analysis and application have facilitated the development of the Science. With the emergence of the graphs, the study of connections between elements on which the analysis of social networks and/or social networks is based was boosted. On the other hand, the consideration of fuzzy measures allows a new way of modeling the reality including many of its nuances. Without underestimating the value of both tools, several shortcomings or limitations can be pointed out for which no solution has been proposed yet. One of the most obvious problems of the graphs is related to its modeling ability. Although its effectiveness for modeling links between elements is indisputable, its capacity for representation does not go beyond the establishment of connections between individuals. Regarding fuzzy measures, there are many theoretical works about them, but a lot of practical issues have not been addressed yet. A detailed explanation about notions and basic concepts of the indicated areas is included in the Chapter 2. Furthermore, in the Chapter 5, Section 5.1, several characteristics and shortcomings of fuzzy graphs in the original conception are enunciated.

2. *To propose a new knowledge representation model derived from the information displayed on a crisp graph and an external fuzzy measure which depicts relations between the vertex: the extended fuzzy graph (EFG). To illustrate the characterization of the EFG related to certain particular fuzzy measures.*

This new representation model is a sound alternative with which fill the shortcomings related to classical methods. It combines the representation ability of the graphs with the information modeled by a fuzzy measure, enriching the handling of the knowledge. With this tool it is possible to represent, not only a set of elements and their connections, but also to consider some additional information concerning different relations between the individuals, regardless of the links. This tool, called extended fuzzy graph, EFG, is introduced in Section 5.2.

3. *To generalize the EFG to a multidimensional context, so that it is feasible to address situations modeled by a graph in which there are multiple fuzzy measures independent to it: the extended multiple fuzzy graph. To illustrate the characterization of the MEFG related to certain particular fuzzy measures in a multidimensional context.*

The proposal of the EFG implies a notable increase in the quality of the representation. Nevertheless, this tool is limited to the existence of a single additional information source (a fuzzy measure) independent

of the graph. Due to the complexity and large amount of details and knowledge inherent to any type of real problem, the need to develop a generalization of this tool seemed evident, giving it a certain multidimensional character. This necessity motivates the definition of the multidimensional extended fuzzy graph, MEFG, a tool which allows the representation of direct connections between the elements, as well as any variable amount of knowledge sources independent to them, in terms of multiple fuzzy measures. This concept is analyzed in Section [5.3](#).

The contributions related to this task are:

**Contribution 1.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection algorithm based on fuzzy measures*. In Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making Proceedings of INFUS Congress 2019 **1029**:133–140. (Scopus).

The EFG was firstly introduced in this paper, presented in the conference INFUS 2019. A preliminary approach of this tool was the base on which is was proposed a new problem which, with later works, defines the bulk of this dissertation: community detection problem based on fuzzy measures.

**Contribution 2.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures*. In Studies in Computational Intelligence Proceedings of ESCIM Congress 2019. (Scopus).

Knowing the large amount of options that the definition of the EFG opened, in this article was developed in a bipolar context, studying the existence of dual or bipolar sources of information.

**Contribution 4.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures and their applications to community detection problems*. In Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020, Glasgow, UK 2020, 1–6. (Scopus).

A particular type of EFG was included in this paper, related to the use of fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures obtained from a vector. A great deal is done on the definition of relations between elements from some additional individualized information about them which is combined with the graph.

**Contribution 6.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information*. In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

**Contribution 8:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Multiple Bipolar Fuzzy Measures: an application to community detection problems for networks with additional information*. In International Journal of Computational Intelligence Systems **13**(1):1636–1649. (JCR).

These articles focus on a multidimensional context, so the MEFG is introduced (Definition [5.3.1](#)). Particularly, the Contribution 6 is based on affinity fuzzy measures from which it is obtained the matrix MEFG (Definition [5.3.2](#)); whereas the Contribution 8 is based on a bipolar context in which it is developed the bipolar MEFG (Definition [5.3.3](#)).

**Task 4.** *Within the SNA field, propose a specific application of the EFG: community detection in graphs based on fuzzy measures.*

Previous goals address the issue of knowledge representation and reality modeling, achieved with the proposal of new tools. At this point, it stands to reason wondering *what for*, trying to find a logical and practical application of these tools. It has been chosen the resolution of community detection problems in graphs, considering situations in which there is some additional information independent of the graph modeled by a fuzzy measure, i.e., the search of groups in an extended fuzzy graph.

1. *For a given network, to study the detection of groups of the nodes considering information sources independent of the structure of the graph on which classical methods are based. To propose an algorithm with which analyze a matrix independent of the adjacency of the graph.*

The increasingly popularity of complex network has attracted the interest of many researchers, so that a large number of methods to study and analyze them have been proposed, among which it is worth to highlight the community detection algorithms. Some of the most important methods are cited in Section [2.2.1](#), standing out the most notable properties. Almost all have a point in common: the search of groups is based on the structural or topological characteristics of the graph. Proper processing of this assumption provides different types of results (partitions of the graph), many of them of high quality. However, note that the only information considered for the definition of groups is the knowledge represented by the graph, without considering

any additional data. To go one step further, it is proposed the assumption of having some additional information independent of the graph represented by a matrix, which may aid to improve the cohesion of the groups with respect to the reality. A new method based on the Louvain algorithm [18] is proposed. Having a graph and a matrix as input parameters, this method provides high-quality partitions. It is detailed in Section and named *Additional Louvain*.

2. *To study the community detection considering different fuzzy measures.*

At this point, it is analyzed the case in which the additional information is modeled by a fuzzy measure. With the *Additional Louvain* algorithm as initial step, in Section 6.3 it is defined a method to find partitions in an EFG, called *Extended Louvain*.

3. *To propose several specifications of the preliminary version of the community detection problem, adapted to different scenarios.*

The last part of the Chapter 6 is devoted to the community detection problem in an EFG, by considering several cases: a vector EFG (Section 6.3.1), and a matrix EFG (Section 6.3.2). Some clustering algorithms are introduced, as well as a detailed explanation with illustrative examples.

The contributions related to this task are:

**Contribution 1.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection algorithm based on fuzzy measures*. In Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making Proceedings of INFUS Congress 2019 **1029**:133–140. (Scopus).

The community detection problem based on fuzzy measures was firstly addressed in this paper, with focus on affinity fuzzy measures.

**Contribution 4.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures and their applications to community detection problems*. In Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020, Glaswog, UK 2020, 1–6. (Scopus).

The community detection problem based on a vector EFG was introduced in this paper. It was analyzed the case in which the partitions are affected by a fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measure.

**Task 5.** *In the field of SNA, to propose a specific application of the MEFG: community detection in graphs based on multiple fuzzy measures.*

The comments below are analogous to those mentioned with respect to Task 4, but considering a multidimensional context in which a MEFG exists. The following results, which hold the specific goals, can be found in Chapter 7.

1. *To study the detection of groups in graphs considering a bipolar fuzzy measure, highlighting that the notion of group is affected by the bipolar nature of this measure. To suggest a modification of the Louvain algorithm with which incorporate the information defined by a bipolar fuzzy measure to the process of detecting of groups.*

The inclusion of bipolar fuzzy measures in the community detection problem forces a change in the notion of community, beyond the consideration of additional information. At this point, it is important to work on the duality of the knowledge, paying attention to the interpretation of each information source. All the thoughts and analysis related to the search of groups in a bipolar EFG are shown in Section 7.1, as well as an algorithm to solve this problem.

2. *To study the detection of communities in graphs when the existence of fuzzy measures independent to it affects the notion of group. To propose several specifications of the preliminary method to include the additional information provided by a family of fuzzy measures.*

The community detection problem in a graph when multiple information sources are available (groups searching in a MEFG) is addressed in Section 7.2. Considering the fuzzy measures previously mentioned, several modifications of the core method are proposed, in order to detect communities by considering several additional knowledge resources. Note that an aggregation process is needed in this context.

3. *To evaluate the quality of the proposed algorithm considering several benchmarks models in combination with the calculation of the NMI (Normalized Mutual Information).*

In any field, when a new algorithm is proposed, an evaluation of it has to be provided, in order to guarantee its effectiveness and to compare it with other methods in the literature. In this dissertation is proposed a new methodology whose main idea is the detection of communities when there is some additional information provided by a fuzzy measure. Then several modification of this methodology are introduced, with the aim of addressing different situations. So, in the Chapter 8 it is presented the evaluation of the main algorithms related to each one of the three branches of fuzzy measures considered: fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measures from a vector, affinity fuzzy measures and bipolar fuzzy measures. For every scenario, several benchmark graphs are generated,

which, in combination with the calculation of the NMI, assert the goodness of the new clustering methodology. It is shown that the different specifications and algorithms provide coherent results with an EFG in its diverse versions.

The contributions related to this task are:

**Contribution 2.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures*. In Studies in Computational Intelligence Proceedings of ESCIM Congress 2019. (Scopus).

The community detection problem based on bipolar fuzzy measures was firstly addressed in this paper, including a brief reflection about how the notion of *group* is affected by the duality of the knowledge.

**Contribution 6.** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Fuzzy Measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information*. In Journal of Intelligent & Fuzzy Systems **39**(5):6217–6230. (JCR).

**Contribution 8:** Gutiérrez, I., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Multiple Bipolar Fuzzy Measures: an application to community detection problems for networks with additional information*. In International Journal of Computational Intelligence Systems **13**(1):1636–1649. (JCR).

These articles are based on a multidimensional context. The idea of finding groups when there are multiple fuzzy measures is developed, paying attention to the aggregation process necessary in this situation. Specifically, Contribution 6 focuses on affinity fuzzy measures, whereas Contribution 8 focuses on a bipolar scenario. In both cases, the corresponding computational results are shown.

**Task 6:** *To apply the proposed methodology in a real case.*

Previous tasks have a strong theoretical character. Nevertheless, such a leading edge idea developed in one of the most popular contexts today should be applied in a real case. It has been chosen Twitter, an important online social network that acts as a loudspeaker of opinions of millions of people, covering topics of all kinds, as well as the discussions and comments raised.

When working with this social network, it is very important to define the framework of interest, otherwise it is impossible to access to all the information. In this case, the chosen topic is COVID-19, particularly the

political position against the Spanish government of several users to evaluate the position of the individuals, a polarization measure has been considered. It is the *JDJ* measure, which has been adapted to the fuzzy measures field. An EFG is defined from the obtained database. So, this EFG is the basis of application of the community detection methodology developed in this dissertation. The obtained results assert the goodness of these methods.

1. *To generate, debug and analyze a database obtained from the social network Twitter.*

The first step is to obtain the database. In this case, a massive download of tweets was carried out from Twitter. The original database was debugged, with the aim of having a coherent and adequate one to fix properly the goals of the research. Then, from the retweets network (RT), a weighted, undirected and connected graph was generated. This graph is one of the components of the EFG which is later considered. Several techniques of manipulation, codification, classification, machine learning (SVM) and statistical analysis have been applied at this point.

2. *To define a fuzzy measure from several membership functions.*

The process of classification and machine learning allow the characterization of several membership functions which define the political position against the Spanish government of each individual. These membership functions are then used to calculate the polarization measure *JDJ*, from which the fuzzy measure  $\mu_P$  is characterized. This fuzzy measure is calculated from a matrix  $P$ , according to a process similar to that detailed in Section 4.3.2 with respect to the affinity matrix  $R$  and the related fuzzy measure  $\mu_R$ . Then, it is easy to cross all the properties of  $\mu_R$  up to the new measure  $\mu_P$ . So considering the position in an attitudinal axis of a set of individuals, the defined fuzzy measure  $\mu_P$  represents the synergies between them.

3. *To apply the community detection algorithms based on fuzzy measures in the obtained network, considering a polarization measure as cornerstone of the additional information.*

An EFG is defined from a graph based on the RT network and the fuzzy measure  $\mu_P$  based on polarization measures. Due to the peculiarities of  $\mu_P$ , it is an affinity EFG. At this point, the methodology of community detection in graphs based on fuzzy measures is applied, specifically the method *Duo Affinity Louvain*, by considering the adjacency of the graph and the matrix  $P$  as input parameters, as well as several aggregations obtained with an importance parameter  $\gamma$ . The results assert this methodology provides cohesive groups, which are close to reality. It is easy to find certain politicians who, with the consideration of additional information, are grouped with users of similar

ideology, whereas with classical grouping techniques they are out of context. The evaluation of the results is performed not only in an intuitive visual way, but also by quantifying how polarized is each partition, considering the polarization measure as a quality measure.

The contributions related to this task are:

**Contribution 10:** Gutiérrez, I., Guevara, J.A., Gómez, D., Castro, J., Espínola, R. (2020): *Community Detection Problem Based on Polarization Measures: an application to the COVID-19 case in Spain*. Preprints Mathematics, (JCR) 2021010080, (doi: 10.20944/preprints202101.0080.v1).

The empirical work presented in Chapter 9 is developed in this article. From the generation of the database, to the debugging and analysis processes, as well as the definition of the fuzzy measure related to the polarization measure  $JDJ$ , in addition to the application of the community detection algorithm based on fuzzy measures.

## Future research lines

Most of the work presented in this dissertation is the result of the research carried out for publication in several JCR journals and other resources during the time spent in the Data Science PhD Program. Many of the results are definitely closed in these pages, but there are still some open research lines. The introduction of a novel methodology to find groups, establishes the basis of a new way of tackling the detection of communities in a graph, from which a lot of assumptions could be done, with the proposal of different situations and scenarios. It is worth highlighting the importance of applying this methodology in more real cases, as the main point of the development of these methods is to go beyond the theoretical results, being useful in their practical application.

Some research lines pending of future work are mentioned below. The intention is to order them according to the structure of the dissertation. Note that some of the points mentioned are in a relatively advanced phase of study at the time of writing this thesis.

- Analysis of the multiplicative component of the fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measure  $\mu_x$  introduced in Definition 4.3.3; particularly for the case in which  $(1 - p) < 0$ , that is, when it has a kind of negative nature.
- Study and procurement of the weighted graph associated with a non additive fuzzy Sugeno  $\lambda$ -measure (AWG related to  $\mu_x^m$ ).

- Analysis of the AWG when the calculation of the Shapley value is not immediate; application of the estimation techniques defined in [30, 31].
- Analysis of various applications of the method *Duo Louvain*, particularly, the algorithm *Multiple Bipolar Duo Louvain*, by considering different aggregation operators  $\Phi^-$ ,  $\Phi^+$  and  $\psi$ .
- Case study in more number of real networks. The lack of time has deterred a deeper analysis of real cases. It should be interesting the consideration of other databases, the definition of different fuzzy measures, as well as the combination of some of them simultaneously, just to mention some of the issues which may derive from a real problem.
- Concerning the interaction index, besides the estimation methods, its application for the definition of the AWG is suggested just from a theoretical perspective. Hence, it would be interesting to pay attention to their application to obtain the AWG in different contexts.
- Even though the Louvain algorithm is very powerful, several difficulties may arise when considering large volumes of data. This method, and all those that are based on modularity optimization, suffers of modularity resolution limit, which hinders the detection of *small* communities within large networks. The Louvain algorithm is the cornerstone of the proposed methodology, which inherits this fault. Hence, the study of different options to alleviate this problem would be interesting.
- Modify the nature of the problem addressed, moving it to a multi-criteria context. A great deal has been done in a multidimensional scale, by considering multiple fuzzy measures. However, in all the cases, there is an aggregation process which summarizes all the information sources into a single one. As a result of the work done with the Professor José Rui Figueira, some results are being obtained (still in progress), which intend to affirm the richness of treating the processes presented here from a multi-criteria perspective [42, 60, 181]. We try to solve a sequence of  $\epsilon$ -constraint problems to compute all the non-dominated solutions [57].
- To deal with the multi-criteria decision-making on fuzzy measures problem, by applying a community detection method to existing criteria, to keep the most notable ones, for example.



## Apéndice A

### El índice de interacción

Este apéndice se incluye como complemento al trabajo desarrollado en el Capítulo 3. Si bien el foco se ha puesto en el índice de interacción entre dos elementos, es posible generalizar la idea de estimación propuesta para aproximar otros índices. Particularmente, dado un conjunto genérico  $T = \{t_1, \dots, t_{|T|}\} \in S$ , esta filosofía de estimación puede adaptarse para la aproximación del índice de representación de la interacción entre los elementos del conjunto  $T$ ,  $I_T$ . El método propuesto para ello se resume en formato pseudocódigo en el Algoritmo 24. El resultado obtenido es  $\hat{I}_T$ , una estimación del índice de representación concerniente al conjunto  $T$ .

---

**Algoritmo 24 Stratified ApproInteraction  $T$** 

---

- 1: **Input:**  $(S, m_T, \mu, T \in S)$ ;
  - 2: **Output:**  $\hat{I}_T$ ;
  - 3:  $\bar{I}_{T\ell} \leftarrow 0; \forall \ell = 1, \dots, n - |T| + 1$ ;
  - 4: **for**  $\ell \in \{1, \dots, n - |T| + 1\}$  **do**
  - 5:    $Cont1 \leftarrow 0$
  - 6:    $m_{T\ell} \leftarrow \frac{m_T}{n - |T| + 1}$ ;
  - 7:   **while**  $(Cont1 < m_{T\ell})$  **do**
  - 8:      $Cont1 \leftarrow Cont1 + 1$ ;
  - 9:     Tomar  $o = (o_{(1)}, \dots, o_{(n - |T| + 1)}) \in \pi(S \setminus \{t_2, \dots, t_{|T|}\})$  tal que  $o_{(\ell)} = t_1$  con probabilidad  $\frac{1}{(n - |T|)!}$ ;
  - 10:      $\chi(o)_T \leftarrow \sum_{L \subset T} (-1)^{|T| - |L|} \mu(Pred_{t_1}(o) \cup L)$ ;
  - 11:      $\bar{I}_{T\ell} \leftarrow \bar{I}_{T\ell} + \chi(o)_T$ ;
  - 12:   **end while**
  - 13:    $\bar{I}_{T\ell} \leftarrow \frac{\bar{I}_{T\ell}}{m_{T\ell}}$ ;
  - 14: **end for**
  - 15:  $\hat{I}_T \leftarrow \frac{\sum_{\ell=1}^{n - |T| + 1} \bar{I}_{T\ell}}{n - |T| + 1}$ ;
  - 16: **return**  $(\hat{I}_T)$ ;
-



# Bibliografía

*El que lee mucho y anda mucho, ve  
mucho y sabe mucho.*

Miguel de Cervantes Saavedra

- [1] Dolphins network dataset, 2017. <http://konect.uni-koblenz.de/networks/dolphins>.
- [2] A. Adam, J.-C. Delvenne, and I. Thomas. Detecting communities with the multi-scale louvain method: robustness test on the metropolitan area of brussels. *Journal of Geographical Systems*, 20(101):363–386, 2018.
- [3] B. Almende, B. Thieurmel, and T. Robert. *visNetwork: Network Visualization using 'vis.js' Library*, 2019. R package version 2.0.9.
- [4] B. Apouey. Measuring health polarization with self-assessed health data. *Health Economics*, 16(9):875–894, 2007.
- [5] A. Arenas, J. Duch, A. Fernández, and S. Gómez. Size reduction of complex networks preserving modularity. *New Journal of Physics*, 9(176), 2007.
- [6] K. T. Atanassov. *Intuitionistic fuzzy sets: theory and applications*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, Germany, 1999.
- [7] A. Awang, N. Aizam, A. T. Ab Ghani, M. Othman, and L. Abdullah. A normalized weighted Bonferroni mean aggregation operator considering shapley fuzzy measure under interval-valued neutrosophic environment for decision-making. *International Journal of Fuzzy Systems*, 22(1):321–336, 2020.
- [8] D. Bader, A. Kappes, H. Meyerhenke, P. Sanders, C. Schulz, and D. Wagner. *Benchmarking for Graph Clustering and Partitioning*, pages 1–11. Encyclopedia of Social Network Analysis and Mining. Springer, New York, United States, 2017.

- 
- [9] A.-L. Barabási and Z. N. Oltvai. Network biology: understanding the cell's functional organization. *Nature Reviews Genetics*, 5(2):101–113, 2004.
- [10] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [11] M. J. Barber and J. W. Clark. Detecting network communities by propagating labels under constraints. *Physical Review E*, 80, 2009.
- [12] M. Barroso, I. Gutiérrez, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. Group definition based on flow in community detection. In M.-J. Lesot, S. Vieira, M. Z. Reformat, J. P. Carvalho, A. Wilbik, B. Bouchon-Meunier, and R. R. Yager, editors, *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 524–538, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [13] S. Beal, S. Ferrieris, E. Remila, and P. Solal. The proportional Shapley value and applications. *Games and Economic Behaviour*, 108:93–112, 2018.
- [14] R. K. Behera, D. Naik, S. K. Rath, and R. Dharavath. Genetic algorithm-based community detection in large-scale social networks. *Neural Computing & Applications*, 32(13):9649–9665, 2020.
- [15] G. Beliakov. On random generation of supermodular capacities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, PP(99):1–1, 2020.
- [16] L. Bennett, A. Kittas, G. Muirhead, L. Papageorgiou, and S. Tsoka. Detection of composite communities in multiplex biological networks. *Scientific Reports*, 5:10345, 2015.
- [17] N. Biggs, E. Keith Lloyd, and R. Wilson. *Graph Theory 1736-1976*. Clarendon Press, 1978.
- [18] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte, and E. Lefevre. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal Of Statistical Mechanics-Theory And Experiment*, 10(P10008), 2008.
- [19] S. Boccaletti, J. Buldu, R. Criado, J. Flores, V. Latora, J. Pello, and M. Romance. Multiscale vulnerability of complex networks. *CHAOS*, 17(4):043110, 2007.
- [20] H. Bock. *Automatische Klassifikation*, volume 39 of *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems*. Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen, Zürich, 1974.

- 
- [21] A. Bouyer and H. Roghani. LSMD: A fast and robust local community detection starting from low degree nodes in social network. *Future Generation Computer Systems-The International Journal of Escience*, 113:41–57, 2020.
- [22] U. Brandes, D. Delling, M. Gaertler, R. Goerke, M. Hoefer, Z. Nikoloski, and D. Wagner. Maximizing modularity is hard, 2006. arXiv:physics/0608255 [physics.data-an].
- [23] H. Bustince, J. Fernández, R. Mesiar, J. Montero, and R. Orduna. Overlap functions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(3-4):1488–1499, 2010.
- [24] H. Bustince, M. Pagola, R. Mesiar, E. Hullermeier, and F. Herrera. Grouping, overlap, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(3):405–415, 2011.
- [25] B. Caio, Y. P. Wang, L. N. Zeng, Y. M. Hu, and H. J. Li. Edge classification based on convolutional neural networks for community detection in complex network. *Physica A-Statistical Mechanics and its Applications*, 556(124826), 2020.
- [26] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar. *Aggregation Operators. New Trends and Applications*. Physica-Verlag, Heidelberg, Germany, 2002.
- [27] R. A. Carrasco, F. Muñoz Leiva, and M. J. Hornos. A multidimensional data model using the fuzzy model based on the semantic translation. *Information Systems Frontiers*, 15(3):351–370, 2013.
- [28] R. A. Carrasco and P. Villar. A new model for linguistic summarization of heterogeneous data: an application to tourism web data sources. *Soft Computing*, 16(1):135–151, 2012.
- [29] J. Castro. *Reparto de holguras y costes en una red Pert*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2007.
- [30] J. Castro, D. Gómez, E. Molina, and J. Tejada. Improving polynomial estimation of the Shapley value by stratified random sampling with optimum allocation. *Computers & Operations Research*, 82:180–188, 2017.
- [31] J. Castro, D. Gómez, and J. Tejada. Polynomial calculation of the shapley value based on sampling. *Computers & Operations Research*, 36(5):1726–1730, 2009.
- [32] R. Chaker, Z. Al Aghbari, and I. N. Junejo. Social network model for crowd anomaly detection and localization. *Pattern Recognition*, 61:266–281, 2017.

- [33] A. Chateauneuf and J.-Y. Jaffray. Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion. *Mathematical Social Sciences*, 17(3):263–283, 1989.
- [34] C. Chen, S. Jiao, S. Zhang, W. Liu, L. Feng, and Y. Wang. Tripimpur: Real-time imputing taxi trip purpose leveraging multi-sourced urban data. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 19(10):3292–3304, 2018.
- [35] T. Cheng, Q. Li, J. Yang, G. Cong, and G. Li. Modeling of the public opinion polarization process with the considerations of individual heterogeneity and dynamic conformity. *Mathematics*, 7(10):917, 2019.
- [36] G. Choquet. Theory of capacities. *Annales de L' Institut Fourier*, 5(1954):131–295, 1953.
- [37] N. Chouchani and M. Abed. Online social network analysis: detection of communities of interest. *Journal of Intelligent Information Systems*, 54(1):5–21, 2020.
- [38] A. Clauset, M. Newman, and C. Moore. Finding community structure in very large networks. *Physical Review E*, 70(6 Pt 2):066111, 2004.
- [39] W. G. Cochran. *Sampling Techniques*. Wiley, 1953.
- [40] R. Cohen, K. Erez, D. Ben-Avraham, and S. Havlin. Resilience of the internet to random breakdowns. *Physical Review Letters*, 85(21):4626–4628, 2000.
- [41] R. Criado, J. Flores, A. Garcá del Amo, J. Gómez-Gardenes, and M. Romance. A mathematical model for networks with structures in the mesoscale. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(3):291–309, 2012.
- [42] D. Datta and J. R. Figueira. Graph partitioning by multi-objective real-valued metaheuristics: A comparative study. *Applied Soft Computing*, 11(5):3976–3987, 2011.
- [43] P. De Meo, A. Nocera, G. Terracina, and D. Ursino. Recommendation of similar users, resources and social networks in a social internet working scenario. *Information Sciences*, 181(7):1285–1305, 2011.
- [44] V. M. a. A. de Souza, D. M. dos Reis, A. G. Maletzke, and G. E. d. A. P. A. Batista. Challenges in benchmarking stream learning algorithms with real-world data. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 34(6):1805–1858, 2020.

- 
- [45] A. Del Amo, J. Montero, G. Biging, and V. Cutello. Fuzzy classification systems. *European Journal of Operational Research*, 156(2):495–507, 2004.
- [46] A. Del Amo, J. Montero, and V. Cutello. On the principles of fuzzy classification. In *18th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society NAFIPS*. NAFIPS.
- [47] M. del Pozo, C. Manuel, E. González-Arangüena, and G. Owen. Centrality in directed social networks. a game theoretic approach. *Social Networks*, 33(3):191–200, 2011.
- [48] X. Deng and C. H. Papadimitriou. On the complexity of cooperative solution concepts. *Mathematics of Operations Research*, 19(2):257–266, 1994.
- [49] M. Devarajan, N. Fatima, S. Vairavasundaram, and L. Ravi. Swarm intelligence clustering ensemble based point of interest recommendation for social cyber-physical systems. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(5):4349–4360, 2019.
- [50] J. G. Dijkman, H. van Haeringen, and S. J. de Lange. Fuzzy numbers. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 92(2):301–341, 1983.
- [51] D. Dubois. Possibility theory and statistical reasoning. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(1):47–69, 2006.
- [52] D. Dubois and H. Prade. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Sciences*, 9:613–626, 1978.
- [53] D. Dubois and H. Prade. The principle of minimum specificity as a basis for evidential reasoning. *Uncertainty in Knowledge-based Systems*, 286:75–84, 1987.
- [54] D. Dubois and H. Prade. An introduction to bipolar representations of information and preference. *International Journal of Intelligence Systems*, 23(8):866–877, 2008.
- [55] J. M. Esteban and D. Ray. On the measurement of polarization. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 62(4):819–851, 1994.
- [56] E. Estrada. *The structure of complex networks. Theory and applications*. Oxford University Press, New York, United States, 2011.
- [57] A. Eusebio and J. R. Figueira. Finding non-dominated solutions in bi-objective integer network flow problems. *Computers & Operations Research*, 36(9):2554–2564, 2009.

- [58] U. Faigle and W. Kern. The Shapley value for cooperative games under precedence constraints. *International Journal of Game Theory*, 21(3):249–266, 1992.
- [59] T.-F. Fan, C.-J. Liao, and T.-Y. Lin. Positional analysis in fuzzy social networks. In *2007 IEEE International Conference on Granular Computing (GRC 2007)*, pages 423–423. IEEE, 2007.
- [60] J. Figueira, S. Greco, and M. Ehrgott. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer Science + Media Business Inc., Boston, USA, 2 edition, 2005.
- [61] R. Flores, M. Koster, I. Lindner, and E. Molina. Networks and collective action. *Social Networks*, 34(4):570–584, 2012.
- [62] R. Flores, E. Molina, and J. Tejada. Assessment of groups in a network organization based on the shapley group value. *Decision Support Systems*, 83:97–105, 2016.
- [63] S. Fortunato. Community detection in graphs. *Physics Reports-Review Section of Physics Letters*, 486(3-5):75–174, 2010.
- [64] S. Fortunato and M. Barthélemy. Resolution limit in community detection. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(1):36–41, 2007.
- [65] J. E. Foster and M. C. Wolfson. Polarization and the decline of the middle class: Canada and the us mimeo. *Vanderbilt University*, 31, 1992.
- [66] C. Franco, J. Montero, and J. T. Rodríguez. Relational structures for measures of ignorance. *Advances in Intelligent Systems Research*, pages 613–619. EUSFLAT-2011 and LFA-2011.
- [67] C. Franco, J. Montero, and J. T. Rodríguez. A fuzzy and bipolar approach to preference modeling with application to need and desire. *Fuzzy Sets and Systems*, 214:20–34, 2013.
- [68] C. Franco, J. T. Rodríguez, and J. Montero. Bipolarity in social sciences and mathematics. *Decision Making and Soft Computing*, 9:336–339, 2014.
- [69] N. Friedkin. Horizons of observability and limits of informal control in organization. *Social Forces*, 62(1):55–77, 1983.
- [70] M. Girvan and M. Newman. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(2):7821–7826, 2002.

- 
- [71] D. Gómez, E. González-Arangüena, C. Manuel, G. Owen, M. del Pozo, and J. Tejada. Centrality and power in social networks: a game theoretic approach. *Mathematical Social Sciences*, 46(1):27–54, 2003.
- [72] D. Gómez, E. González-Arangüena, C. Manuel, G. Owen, and M. Saboyá. The cohesiveness of subgroups in social networks: A view from game theory. *Annals of Operations Research*, 158(1):33–46, 2008.
- [73] M. Grabisch. The representation of importance and interaction of features by fuzzy measures. *Patter Recognition Letters*, 17(6):567–575, 1996.
- [74] M. Grabisch.  $k$ -order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy Sets Systems*, 92(2):167–189, 1997.
- [75] M. Grabisch and C. Labreuche. Bi-capacities- part I: definition, Möbius transform and interaction. *Fuzzy Sets and Systems*, 2(151):211–236, 2005.
- [76] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap. Aggregation functions: Construction methods, conjunctive, disjunctive and mixed classes. *Information Science*, 181(1):23–43, 2011.
- [77] M. Grabisch, H. T. Nguyen, and E. A. Walker. *Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1995.
- [78] M. Grabisch and M. Roubens. *Probabilistic Interactions among Players of a Cooperative Game*, volume 40 of *Beliefs, Interactions and Preferences in Decision Making. Theory and Decision Library (Series B: Mathematical and Statistical Methods)*. Springer, Boston, MA, 1999.
- [79] J. A. Guevara, D. Gómez, J. M. Robles, and J. Montero. Measuring polarization: A fuzzy set theoretical approach. *Communications in Computer and Information Science*, 1238:27–64, 2020.
- [80] R. Guidotti, A. Monreale, S. Rinzivillo, D. Pedreschi, and F. Giannotti. Unveiling mobility complexity through complex network analysis. *Social Network Analysis and Mining*, 6(1):59–, 2016.
- [81] R. Guimera, L. Danon, A. Diaz-Guilera, F. Giralt, and A. Arenas. Self-similar community structure in a network of human interactions. *Physical Review E*, 68(6):065103, 2003.
- [82] C. Gupta, A. Jain, T. D. Kumar, and O. Castillo. ClusFUDE: forecasting low dimensional numerical data using an improved method based on automatic clustering, fuzzy relationships and differential evolution. *Engineering Applications Of Artificial Intelligence*, 71:175–189, 2017.

- [83] E. Gutiérrez, N. Llorca, J. Sánchez-Soriano, and M. Mosquera. Sustainable allocation of greenhouse gas emission permits for firms with leontief technologies. *European Journal of Operational Research*, 269(1):5 – 15, 2018.
- [84] I. Gutiérrez, M. Barroso, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. Pattern-based clustering problem based on fuzzy measures. *Developments of Artificial Intelligence Technologies in Computation and Robotics*, 12:412–420, 2020.
- [85] I. Gutiérrez, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. Fuzzy measures: A solution to deal with community detection problems for networks with additional information. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 39(5):6217–6230, 2020.
- [86] I. Gutiérrez, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. Fuzzy sugeno  $\lambda$ -measures and theirs applications to community detection problems. pages 1–6, Glasgow, UK, 2020. IEEE International Conference on Fuzzy Systems.
- [87] I. Gutiérrez, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. Multiple bipolar fuzzy measures: an application to community detection problems for networks with additional information. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 13(1):1636–1649, 2020.
- [88] I. Gutiérrez, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. A new community detection algorithm based on fuzzy measures. In *Advances in Intelligent Systems and Computing series*, volume 1029, pages 133–140. Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making. INFUS 2019, Springer, Cham, 2020.
- [89] I. Gutiérrez, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. A new community detection problem based on bipolar fuzzy measures. *Studies in Computational Intelligence*, 2020. Due to COVID-19 pandemic, this publication has suffered a delay.
- [90] I. Gutiérrez, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. Polynomial calculation based on sampling of the interaction index, 2020. Sent to: Mathematics.
- [91] I. Gutiérrez, J. A. Guevara, D. Gómez, J. Castro, and R. Espínola. Community detection problem based on polarization measures. an application to Twitter: the COVID-19 case in Spain, 2020. Preprints Mathematics, 2021010080 (doi=10.20944/preprints202101.0080.v1).
- [92] P. Haase, E. Slooten, and S. M. Dawson. The bottlenose dolphin community of doubtful sound features a large proportion of long-lasting association. *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 54:396–405, 2003.

- 
- [93] P. R. Halmos. *Measure Theory*. Springer, Berlin, 1950.
- [94] P. L. Hammer and R. Holzman. On approximations of pseudo-boolean functions. *ZOR-Methods Models Operations Research*, 36:3–21, 1992.
- [95] R. Harakawa, T. Ogawa, and M. Haseyama. Accurate and efficient extraction of hierarchical structure of web communities for web video retrieval. *ITE Transactions on Media Technology and Applications*, 2(3):287–297, 2014.
- [96] I. Hewapathirana. Change detection in dynamic attributed networks. *Wiley Interdisciplinary Reviews-Data Mining and Knowledge Discovery*, 9(3):e1286, 2019.
- [97] M. Higashi and G. J. Klir. Measures of uncertainty and information based on possibility distributions. *International Journal of General Systems*, 9:3–58, 1983.
- [98] D. Hrabcak, M. Matis, L. Dobos, and J. Papaj. Tools for evaluation of social relations in mobility models. *Telecommunication systems*, 68(3):409–424, 2018.
- [99] J. Huang and C. X. Ling. Using AUC and accuracy in evaluating learning algorithms. *IEEE Transactions on knowledge and Data Engineering*, 17(3):299–310, 2005.
- [100] R. Jain. Decision-making in the presence of fuzzy variables. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 6:698–703, 1976.
- [101] R. Jain. A procedure for multi-aspect decision making using fuzzy sets. *The International Journal of Systems Sciences*, 6:1–7, 1978.
- [102] M. A. Javed, M. S. Younis, S. Latif, J. Qadir, and A. Baig. Community detection in networks: A multidisciplinary review. *Journal of Network and Computer Applications*, 108:87–111, 2018.
- [103] T. Joachims. Text categorization with support vector machines: Learning with many relevant features. In C. Nédellec and C. Rouveirol, editors, *Machine Learning: ECML-98*, pages 137–142, Berlin, Heidelberg, 1998. Springer Berlin Heidelberg.
- [104] M. José and L. Magdalena. Special issue on interpretable fuzzy systems. *Information Sciences*, 181(20):4331–4339, 2011.
- [105] M. W. Kearney. rtweet: Collecting and analyzing twitter data. *Journal of Open Source Software*, 4(42):1829, 2019. R package version 0.7.0.
- [106] G. J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

- [107] I. Kojadinovic. An axiomatic approach to the measurement of the amount of interaction among criteria or players. *Fuzzy Sets and Systems*, 152(3):417–435, 2005.
- [108] I. Kojadinovic. A weight-based approach to the measurement of the interaction among criteria in the framework of aggregation by the bipolar choquet integral. *European Journal of Operational Research*, 179(2):498–517, 2007.
- [109] T. O. Kvalseth. On normalized mutual information: measure derivations and properties. *Entropy*, 19(12):631, 2017.
- [110] A. Lancichinetti and S. Fortunato. Community detection algorithms: A comparative analysis. *Physical Review E*, 80(5 Pt 2):056117, 2009.
- [111] A. Lancichinetti, S. Fortunato, and F. Radicchi. Benchmark graphs for testing community detection algorithms. *Physical Review E*, 78(4 Pt 2):046110, 2008.
- [112] V. Latora, V. Nicosia, and G. Russo. *Complex Networks: Principles, Methods and Applications*. Cambridge University Press, 2017.
- [113] P. S. Levy and S. Lemeshow. *Sampling of Populations: Methods and Applications*. Wiley, New York, 1999.
- [114] C. Li, M. Cerrada, D. Cabrera, R. V. Sánchez, F. K. Pacheco, and J. V. Ulutagay, G. de Oliveira. A comparison of fuzzy clustering algorithms for bearing fault diagnosis. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 34(6):3565–3580, 2018.
- [115] H.-J. Li. Detecting fuzzy network communities based on semi-supervised label propagation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 31(6):2887–2893, 2016.
- [116] H.-J. Li, L. Wang, Y. Zhang, and M. Perc. Optimization of identifiability for efficient community detection. *New Journal of Physics*, 22(6), 2020.
- [117] J. Ling, Q. Zhang, and F. Meng. A novel algorithm for group decision making based on continuous optimal aggregation operator and shapley value. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Systems*, 27(6):969–1002, 2020.
- [118] J. Liu, H. A. Abbass, and K. C. Tan. *Evolutionary Computation and Complex Networks*. Springer, 2018.
- [119] J. Liu, X. Zhou, B. Huang, H. Li, and H. Ju. Combining similarity and divergence measures for intuitionistic fuzzy information clustering. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(4):3195–3209, 2019.

- 
- [120] H. Lohr. *Sampling: Design and Analysis*. Pacific Grove CA: Duxbury Press, 1999.
- [121] P. López-Ramírez, A. Molina-Villegas, and O. S. Siordia. Geographical aggregation of microblog posts for LDA topic modeling. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(5):4901–4908, 2019.
- [122] J. Lukasiewicz. *Elements of Mathematical Logic*. Macmillan; Oliver & Boyd edición, 1963.
- [123] W. J. Luo, Z. L. Yan, C. Y. Bu, and D. F. Zhang. Community detection by fuzzy relations. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing*, 8(2):478–492, 2020.
- [124] X. Ma, D. Li, S. Tan, and Z. Huang. Detecting evolving communities in dynamic networks using graph regularized evolutionary nonnegative matrix factorization. *Physica A-Statistical Mechanics and its Application*, 530:121279, 2019.
- [125] L. Magdalena, D. Gómez, J. Montero, and S. Cubillo. Generalized pre-aggregations. *Fuzzy Techniques: Theory and Applications*, 1000:362–370, 2019.
- [126] S. K. Majhi, S. Bhattacharya, R. Pradhan, and S. Biswal. Fuzzy clustering using salp swarm algorithm for automobile insurance fraud detection. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(3):2333–2344, 2019.
- [127] S. Martín, M. G. Romana, and M. Santos. Fuzzy model of vehicle delay to determine the level of service of two-lane roads. *Expert Systems with Applications*, 54:48–60, 2016.
- [128] N. Martínez, D. Gómez, P. Olaso, K. Rojas, and J. Montero. A novel ordered weighted averaging weight determination based on ordinal dispersion. *International Journal of Intelligent Systems*, 34(9):2291–2315, 2019.
- [129] J. Mei, S. He, G. Shi, Z. Wang, and W. Li. Revealing network communities through modularity maximization by a contraction-dilation method. *New Journal of Physics*, 11(4):043025, 2009.
- [130] J. G. Montalvo and M. Reynal-Querol. The effect of ethnic and religious conflict on growth. *Master California*, 2002.
- [131] J. Montero, R. González del Campo, L. Garmendia, D. Gómez, and J. T. Rodríguez. Computable aggregations. *Information Sciences*, 460:439–449, 2018.

- [132] J. N. Mordeson and P. S. Nair. Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 46:19–81, 2000.
- [133] T. Murofushi and S. Soneda. Techniques for reading fuzzy measures (III): interaction index. In *Proc. of 9<sup>th</sup> Fuzzy System Symposium*, pages 693–696, Sapporo, Japan, 1993. 9<sup>th</sup> Fuzzy System Symposium.
- [134] P. S. Nair and S. T. Sarasamma. Data mining through fuzzy social network analysis. *NAFIPS 2007 - 2007 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*, pages 251–255, 2007.
- [135] R. Naranjo and M. Santos. A fuzzy decision system for money investment in stock markets based on fuzzy candlesticks pattern recognition. *Expert Systems with Applications*, 133:34–48, 2019.
- [136] R. Naranjo, M. Santos, and L. Garmendia. A convolution-based distance measure for fuzzy singletons and its application in a pattern recognition problem. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 28(1):51–63, 2021.
- [137] M. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45:167–256, 2003.
- [138] M. Newman. Fast algorithm for detecting community structure in network. *Physical Review E*, 69(066133), 2004.
- [139] M. Newman. Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices. *Physical Review E*, 74(3 Pt 2):036104, 2006.
- [140] M. Newman. Modularity and community structure in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(23):8577–8582, 2006.
- [141] M. Newman. *Networks An introduction*. Oxford University Press, New York, United States, 2010.
- [142] M. Newman and M. Girvan. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E*, 69(026113), 2004.
- [143] H. T. Nguyen, V. Kreinovich, J. Lorkowski, and S. Abu. Why Sugeno  $\lambda$ -measures. In *2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–7, 2015.
- [144] H. T. Nguyen and E. A. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman and Hall CRC, Boca Raton, Florida, 2006.
- [145] J. O’Doherty, M. Kringelback, E. Rolls, J. Hornak, and A. C. Abstract reward and punishment representations in the human orbitofrontal cortex. *Nature Neuroscience*, 4(1):95–102, 2001.

- [146] Y. Ogata, K. Mannen, Y. Kotani, N. Sakurai, D. Shibata, and H. Suzuki. Confeitogui: A toolkit for size-sensitive community detection from a correlation network. *PLoS One*, 10(e0206075):13, 2018.
- [147] M. Olsen. A general view on computing communities. *Mathematical Social Sciences*, 66(3):331–336, 2013.
- [148] C. E. Osgood, G. J. Suci, and P. H. Tannenbaum. *The measurement of meaning*. Illinois: University of Illinois Press, Chicago, Illinois, 1957.
- [149] G. Owen. Multilinear extensions of games. *Management Science Series B-Application*, 18(5):64–79, 1972.
- [150] G. Palla, I. Derenyi, I. Farkas, and T. Vicsek. Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society. *Nature*, 435(7043):814–818, 2005.
- [151] J. Park, S. Yoon, C. Lee, and J. Kim. A simple method for network visualization. *Mathematics*, 8(6):1020, 2020.
- [152] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani. Epidemic spreading in scale-free networks. *Physical Review Letters*, 86(14):3200–3203, 2001.
- [153] I. Permanyer and C. D’Ambrosio. Measuring social polarization with ordinal and categorical data. *Journal of Public Economic Theory*, 17(3):311–327, 2015.
- [154] S. Plimpton. Fast parallel algorithms for short-range molecular-dynamics. *Journal of Computational Physics*, 117(1):1–19, 1995.
- [155] P. Pons and M. Latapy. Computing communities in large networks using random walks. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 10(2):191–218, 2006.
- [156] T. Pontoizeau. *Community detection : computational complexity and approximation*. PhD thesis, PSL Research University, 2018.
- [157] F. Radicchi, C. Castellano, F. Cecconi, V. Loreto, and D. Parisi. Defining and identifying communities in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(9):2658–2663, 2004.
- [158] M. S. Rahman and A. Ngom. A fast agglomerative community detection method for protein complex discovery in protein interaction networks. *IAPR International Conference on Pattern Recognition in Bioinformatics*, pages 1–12, 2013.
- [159] M. Reynal-Querol. *Ethnic and religious conflicts, political systems and growth*. PhD thesis, London School of Economics and Political Science (University of London), 2001.

- [160] M. Ridaoui, M. Grabisch, and C. Labreuche. Interaction indices for multichoice games. *Fuzzy Sets and Systems*, 383:1–26, 2020.
- [161] J. M. Robles, J. Atienza, D. Gómez, and J. A. Guevara. La polarización de ‘La Manada’ el debate público en España y los riesgos de la comunicación política digital. *Tempo Social*, 31(3):193–216, 2019.
- [162] K. Rojas, D. Gómez, J. T. Rodríguez, and J. Montero. Some properties of consistency in the families of aggregation operators. volume 107, pages 169–1769, Berlin, Heidelberg, Germany, 2001. Eurofuse 2011: Workshop on Fuzzy Methods for Knowledge-Based Systems.
- [163] A. Rosenfeld. Fuzzy graphs. *Fuzzy Sets and their Applications*, pages 77–95, 1975.
- [164] R. Rotta and A. Noack. Multilevel local search algorithms for modularity clustering. *Journal of Experimental Algorithmics*, 16(2), 2011.
- [165] M. Rubinov and O. Sporns. Complex network measures of brain connectivity: uses and interpretations. *Neuroimage*, 52(3):1059–1069, 2010.
- [166] H. Saad and A. Nosratinia. Community detection with side information: Exact recovery under the stochastic block model. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 12(5):944–958, 2018.
- [167] F. Saracco, M. J. Straka, R. Di Clemente, and A. Gabrielli. Inferring monopartite projections of bipartite networks: an entropy-based approach. *New Journal of Physics*, 19(5):053022, 2017.
- [168] P. Schuetz and A. Cafilisch. Efficient modularity optimization by multistep greedy algorithm and vertex mover refinement. *Physical Review E*, 77(046112), 2008.
- [169] L. S. Shapley. A value for  $n$ -person games. *Contributions to Theory Games*, 2(28):307–317, 1953.
- [170] L. S. Shapley. Core of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1:11–26, 1971.
- [171] C. Sharma and P. Bedi. Ccfrs - community based collaborative filtering recommender system. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 32(4):2987–2995, 2017.
- [172] C. Simón de Blas, J. Simón Martín, and D. Gomez. Combined social networks and data envelopment analysis for ranking. *European Journal of Operational Research*, 266(3):990–999, 2018.

- [173] M. Sitara, M. Akram, and M. Y. Bahtti. Fuzzy graphs structures with application. *Mathematics*, 7(1):63–, 2019.
- [174] X. Song, W. Jiang, X. Liu, H. Lu, Z. Tian, and X. Du. A survey of game theory as applied to social networks. *Tsinghua Science and Technology*, 25(6):734–742, 2020.
- [175] V. Springel, R. Pakmor, A. Pillepich, R. Weinberger, D. Nelson, L. Hernquist, M. Vogelsberger, S. Genel, P. Torrey, F. Marinacci, and J. Naiman. First results from the illustrisTNG simulations: matter and galaxy clustering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475(1):676–698, 2018.
- [176] M. Sugeno. Fuzzy measures and fuzzy integrals: A survey. *Fuzzy Automata and Decision Processes*, 78:89–102, 1977.
- [177] M. Sugeno. *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, (1974).
- [178] T. Suo, J. Lio, and X. Chen. Combining chemical profiling and network analysis to investigate the pharmacology of complex prescriptions in traditional chinese medicine. *Scientific Reports*, 7:40529, 2017.
- [179] J. Sylvester. Chemistry and algebra. *Nature* 17, 3(284):103–104, 1878.
- [180] K. Tamura, Y. Kobayashi, and Y. Ihara. Evolution of individual versus social learning on social networks. *Journal of the Royal Society Interface*, 12(104):20141285, 2015.
- [181] F. Tavares-Pereira, J. R. Figueira, and V. Mousseau. Multiple criteria districting problems. *Annals of Operations Research*, 154(1):69–92, 2007.
- [182] N. Thao, M. Ali, and F. Smarandache. An intuitionistic fuzzy clustering algorithm based on a new correlation coefficient with application in medical diagnosis. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 36(1):189–198, 2019.
- [183] V. Torra, A. Dahlbom, and Y. Naruwaka. *Fuzzy Sets, Rough Sets, Multisets and Clustering Preface*, volume 671 of *Studies in Computational Intelligence*. Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 2017.
- [184] J. Valente de Oliveira and W. Pedrycz. *Advances in Fuzzy Clustering and Its Applications*. Springer International Publishing AG, 2007.
- [185] M. Voskoglou. *Application of Fuzzy Numbers to Assessment Processes*. Encyclopedia of Information Science and Technology. IGI Global, 2018.

- [186] L. Waltman and N. J. Van Eck. A smart local moving algorithm for large-scale modularity-based community detection. *European Physical Journal B*, 86(11):473, 2013.
- [187] Y.-J. Wang. Ranking triangle and trapezoidal fuzzy numbers based on the relative preference relation. *Applied Mathematical Modelling*, 39(2):586–599, 2015.
- [188] Z. Wang, Z. Dai, and G. Gong. Understanding structural-functional relationships in the human brain: a large-scale network perspective. *Neuroscientist*, 21(3):290–305, 2015.
- [189] M. C. Wolfson. When inequalities diverge. *The American Economic Review*, 84(2):353–358, 1994.
- [190] F. Wu and B. A. Huberman. Finding communities in linear time: a physics approach. *The European Physical Journal B*, 38, 2004.
- [191] J. Wu and F. Chiclana. A social network analysis trust-consensus based approach to group-decision making problems with interval-valued fuzzy reciprocal preference relations. *Knowledge-Based Systems*, 59:97–107, 2014.
- [192] X. L. Xie and G. Beni. A validity measure for fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(8):841–847, 1991.
- [193] Z.-S. Xu. Intuitionistic fuzzy aggregation operators. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 15(6):1179–1187, 2007.
- [194] J. Yacubian, J. Gläscher, K. Schroeder, T. Sommer, D. Braus, and C. Büchel. Dissociable systems for gain- and loss-related value predictions and errors of prediction in the human brain. *Journal of Neuroscience*, 26(37):9530–9537, 2006.
- [195] R. R. Yager. Measuring tranquillity and anxiety in decision making: An application of fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, 8:139–146, 1982.
- [196] R. R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.
- [197] R. R. Yager. On using the shapley value to approximate the choquet integral in cases of uncertain arguments. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(3):1303–1310, 2018.

- 
- [198] R. R. Yager and J. Kacprzyk, editors. *The Ordered Weighted Averaging Operators. Theory and Applications*. Springer Science & Business Media, Boston, MA, USA, 1997.
- [199] Z. Yang, R. Algesheimer, and C. J. Tessone. A comparative analysis of community detection algorithms on artificial networks. *Scientific Reports*, 3(30750), 2016.
- [200] Z.-Q. Ye, S.-N. Hu, and J. Yu. Adaptive clustering algorithm for community detection in complex networks. *Physical Review E*, 78(4 Pt 2):046110, 2008.
- [201] Y.-Y. Yu, C. Y. Xu, and K. F. Cao. An effective community detection method based on one-dimensional ‘attraction’ in network science. *International Journal of Modern Physics C*, 31(5):2050071, 2020.
- [202] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.
- [203] L. A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3(2):177–200, 1971.
- [204] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic and application to approximate reasoning I. *Information Sciences*, 8(3):199–249, 1975.
- [205] L. A. Zadeh. Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning II. *Information Sciences*, 8(4):301–357, 1975.
- [206] L. A. Zadeh. Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning III. *Information Sciences*, 9(1):43–80, 1975.
- [207] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:3–28, 1978.
- [208] Z.-Y. Zhao, S.-Q. Zheng, C. Li, J.-Q. Sun, and L. Chang. A comparative study on community detection methods in complex networks. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 35(1):1077–1086, 2018.
- [209] Y.-F. Zhong, A.-L. Ma, Y.-S. Ong, Z.-X. Zhu, and L.-P. Zhang. Computational intelligence in optical remote sensing image processing. *Applied Soft Computing*, 64:75–93, 2018.