CUADERNOS DE TRABAJO
FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Las medias estadísticas: ejercicios motivadores

Almudena Pajares García
Dpto. Estadístico. Consultoría farmacéutica

Venancio Tomeo Perucha
Dpto. Álgebra. Facultad de Estudios Estadísticos (U.C.M.)

Cuaderno de Trabajo número 05/2014

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Facultad para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Facultad www.ucm.es/BUCM/est/ y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

Biblioteca de la Facultad de Estudios Estadísticos

Universidad Complutense de Madrid

Av. Puerta de Hierro, S/N

28040 Madrid

Tlf. 913944035

buc_est@buc.ucm.es

ISSN: 2341-2550

Las medias estadísticas: ejercicios motivadores

Almudena Pajares García

Dpto. Estadístico. Consultoría farmacéutica
almudena.pajares@googlemail.com

Venancio Tomeo Perucha

Dpto. Algebra. Fac. Estudios Estadísticos *tomeo@ucm.es*

15 de septiembre de 2014

Resumen

En este trabajo vamos a estudiar la medias estadísticas desde un punto de vista elemental, de forma que los conceptos puedan ser asimilados por alumnos de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Para ello se consideran problemas sencillos de la vida ordinaria relacionados con la geometría elemental, con la física y con la economía.

Por parte de la Geometría se estudian problemas sencillos de cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, con ayuda del Cálculo integral cuando se considera necesario en el cálculo de volúmenes de revolución y volúmenes por secciones, en concreto en el volumen del tronco de cono.

Por parte de la Física se estudian problemas de móviles, además del llenado de depósitos. Se estudian también las leyes de los gases con relación a la Química y la inversión en acciones por parte de la Economía, además de otros ejemplos, todo ello para diferenciar bien el uso de la media aritmética y de la media armónica.

Se intenta dar un enfoque práctico al estudio de las medias, poniendo de relieve la gran importancia que tienen para problemas que quizá no se han pensado con suficiente atención, ofreciendo distintas motivaciones para alumnos y profesores.

Palabras clave: *Medias estadísticas, longitudes, áreas, volúmenes, elipse, circunferencia, velocidades, depósitos, inversiones.*

1. Las medias estadísticas

En Estadística se utilizan muchas medias, las cuatro más habituales, si se dispone de N datos, son las siguientes:

La media aritmética

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N} \qquad \text{o bien} \qquad \overline{X} = \frac{\sum x_i}{N}$$

y la media aritmética *ponderada* que es $\overline{X}$ en el caso en que los datos tienen diferente importancia o pesos p_i

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i p_i}{\sum p_i}$$

La media geométrica

$$G = \sqrt[N]{x_1 x_2 \cdots x_N}$$

La media cuadrática

$$C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N}}$$

La media armónica

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}}{N}$$

2. La relación entre ellas

Estas cuatro medias verifican la relación

$$H \leq G \leq \overline{X} \leq C,$$

que es muy fácil recordar con la frase que se dice cuando los mozos de un pueblo han ganado al fútbol a los mozos del pueblo de al lado: *"Hemos Ganado Por Coraje"*.

La relación anterior puede demostrarse con facilidad para el caso de dos datos positivos y distintos, a y b, tales que $a, b > 0$, $a \neq b$. Estas demostraciones consisten en buscar relaciones equivalentes a las que necesitamos, hasta llegar a una verdad evidente, de la misma manera que se hace en las demostraciones épsilon-delta de los límites. Vamos a demostrar las tres desigualdades, que numeramos del siguiente modo:

$$H \underset{(1)}{\leq} G \underset{(2)}{\leq} \overline{X} \underset{(3)}{\leq} C.$$

(1) Hay que llegar a que $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab}$, pero se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2b^2 \leq ab(a+b)^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 4ab < (a+b)^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 4ab \leq a^2+2ab+b^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq a^2-2ab+b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (a-b)^2,
\end{aligned}$$

lo que es una afirmación verdadera. Recorriendo las equivalencias hacia atrás, se tiene la demostración de (1).

(2) Hay que llegar a que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, pero se tiene que

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{ab} \leq a+b \quad \Leftrightarrow \quad 4ab \leq (a+b)^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 4ab \leq a^2+2ab+b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a^2-2ab+b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

que es la misma afirmación anterior.

(3) Hay que llegar a que $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ y se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad a^2+2ab+b^2 \leq 2(a^2+b^2) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq a^2-2ab+b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (a-b)^2,
\end{aligned}$$

obteniendo la misma desigualdad verdadera.

3. La p-media

Se define elevando los datos a la potencia p-ésima, sumando, dividiendo entre el número de datos y extrayendo la raíz p-ésima, de forma análoga a la fórmula de la media cuadrática pero con exponente e índice p. Es decir

$$M_p = \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^p}{N}} \qquad \text{o bien} \qquad M_p = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^p}{N} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Es una generalización de las medias conocidas, ya que para los valores $p = 1$, $p = 2$, $p = -1$ y $p \to 0$, resultan las anteriores. En efecto,

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \overline{X}, \qquad M_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}} = C, \qquad M_{-1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{-1}}{N} \right)^{-1} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}} = H$$

y cuando $p \to 0$ se obtiene como límite

$$M_{\to 0} = \lim_{p \to 0} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^p}{N} \right)^{\frac{1}{p}} = G,$$

aunque esto no es sencillo de demostrar.

Para $p = 3$ tenemos la media cúbica

$$M_3 = \sqrt[3]{\frac{\sum x_i^3}{N}},$$

para $p = 4$ y $p = 5$ tenemos las medias

$$M_4 = \sqrt[4]{\frac{\sum x_i^4}{N}}, \qquad M_5 = \sqrt[5]{\frac{\sum x_i^5}{N}}.$$

Para $p = \frac{3}{2}$ y $p = -2$ tenemos las medias

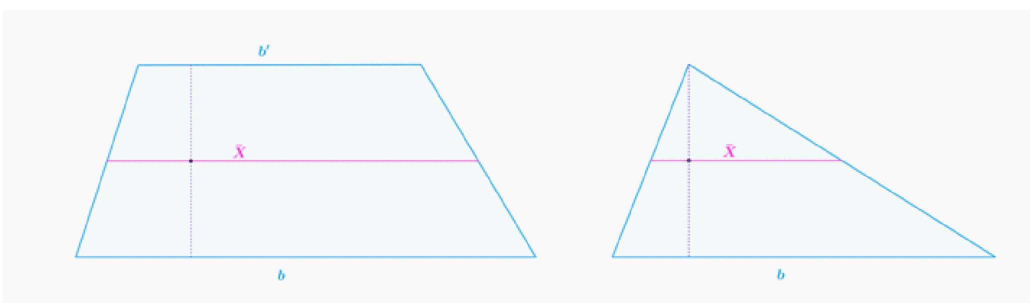
$$M_{3/2} = \left(\frac{\sum x_i^{3/2}}{N}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{\sum \sqrt{x_i^3}}{N}\right)^2}, \qquad M_{-2} = \left(\frac{\sum x_i^{-2}}{N}\right)^{\frac{1}{-2}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum \frac{1}{x_i^2}}}.$$

4. Ejemplos de la media aritmética

Ejemplo 1: En un trapecio: *La paralela media a las bases de un trapecio tiene por medida la media aritmética de las bases.* Es decir

$$\overline{X} = \frac{b + b'}{2}$$

como puede verse en la figura.



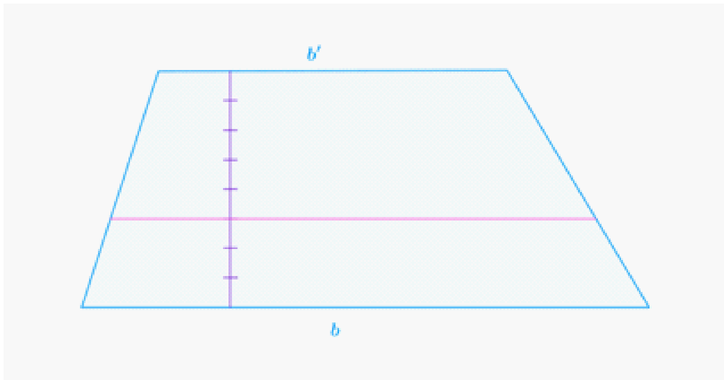
Trapecio y triángulo

Lo mismo ocurre en un triángulo, que es un trapecio con una base de valor nulo,

$$\overline{X} = \frac{b + 0}{2}.$$

La demostración de estas afirmaciones es trivial sin más que añadir otro trapecio, o triángulo, de forma que se obtenga un paralelogramo.

Ejemplo 2: Si en un trapecio se divide la altura en n partes iguales y se eligen k y $n - k$ partes, ¿Cuánto mide la paralela por ese punto y cuánto valen las áreas de los nuevos trapecios?



Trapecio

La solución está en la media aritmética ponderada, ya que

$$b_k = \frac{kb + (n-k)b'}{n}$$

y las áreas de los trapecios que resultan con esa división son sencillas de calcular porque se conocen las bases y las alturas. La demostración de este hecho es trivial a partir del teorema de Thales.

Ejemplo 3: El problema de la media con incremento de datos: *Dados tres números, si tenemos la media aritmética de los dos primeros y el valor del tercero, ¿podemos saber la media aritmética de los tres números sin conocer los dos primeros?*

Sean x_1, x_2, x_3 los datos y sea $\overline{X}_{12}$ la media de los dos primeros. Utilizando la definición de media aritmética, se tiene que

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3\right) = \frac{1}{3}(2\overline{X}_{12} + x_3)$$

es decir, la media artimética ponderada de $\overline{X}_{12}$ y x_3. Luego basta sustituir los datos por su media conocida y hacer

$$\overline{X} = \frac{\overline{X}_{12} + \overline{X}_{12} + x_3}{3}$$

Si en una clase hay 19 alumnos y su media de edades es 16,2 años y viene un alumno nuevo que tiene 18 años, no es preciso repetir todas las cuentas, la media de todos será

$$\overline{X} = \frac{19 \cdot 16,2 + 18}{20} = \frac{325,8}{20} = 16,29.$$

5. Ejemplos de la media geométrica

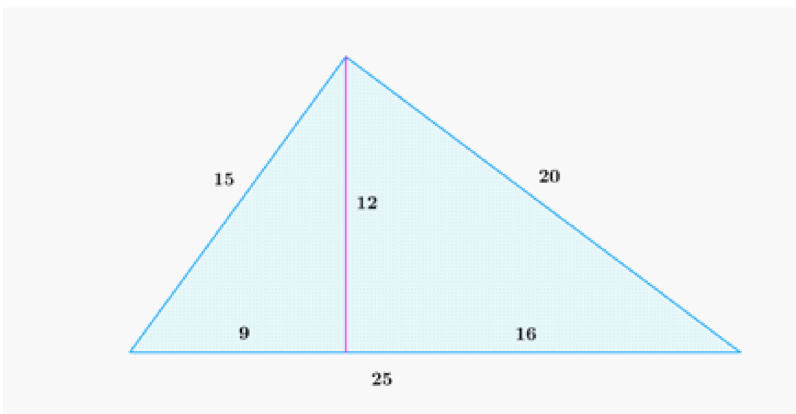
La media geométrica de N datos está definida por la fórmula que vimos en la sección 1, pero cuando solo son dos datos, a y b la fórmula es $G = \sqrt{ab}$, es decir la media geométrica verifica la igualdad

$$\frac{a}{G} = \frac{G}{b}$$

por lo que es llamada también *media proporcional.*

Ejemplo 4: En Geometría se estudian los triángulos rectángulos y el famoso teorema de la altura: *La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre ella.*

Ejemplo 5: También se estudia el teorema del cateto: *Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyeccción sobre ella.* En el triángulo de la figura



Medias geométricas

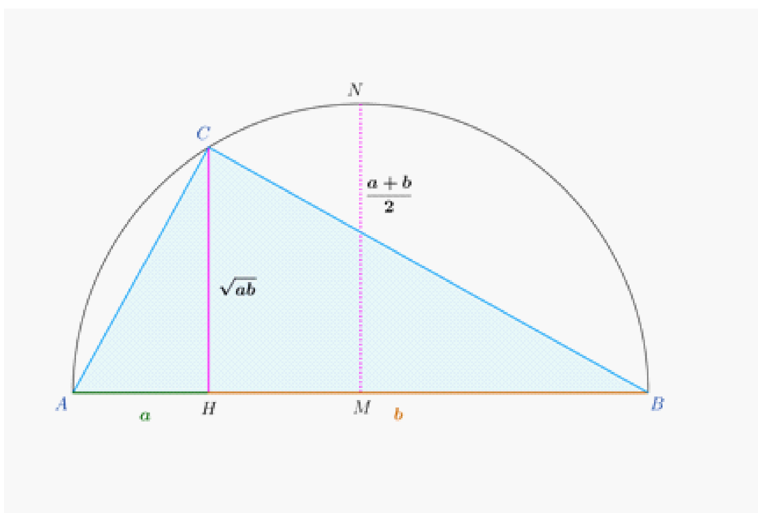
se cumplen que la media geométrica de 9 y 16 es 12, al ser altura del triángulo rectángulo. La media geométrica de 25 y 9 es 15, como cateto, y la media geométrica de 25 y 16 es 20, también como cateto.

Ejemplo 6: El teorema de la altura nos proporciona una demostración geométrica y visual de la desigualdad (2) de la sección 2 para dos números positivos a y b, es decir, que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

Dados a y b, queremos demostrar que

$$G = \sqrt{ab} \leq \overline{X} = \frac{a+b}{2}.$$

Para ello construimos media circunferencia que tenga por diámetro $a+b$, sean A y B los extremos del diámetro. Si desde el punto H que une los dos segmentos levantamos una altura que corta a la circunferencia en C y construimos el triángulo ABC, resulta que este triángulo es rectángulo en C, ya que este ángulo abarca media circunferencia, como vemos en la figura.



Media geométrica menor o igual que media aritmética

El teorema de la altura nos dice que la altura $\overline{CH}$ es media proporcional entre las proyecciones $\overline{AH}$ y $\overline{HB}$, es decir $G = \overline{CH} = \sqrt{ab}$. Por otra parte, trazando una perpendicular al diámetro $\overline{AB}$ en su punto medio M y siendo N el punto de corte con la circunferencia, resulta que $\overline{MN}$ es un radio de la circunferencia, de donde

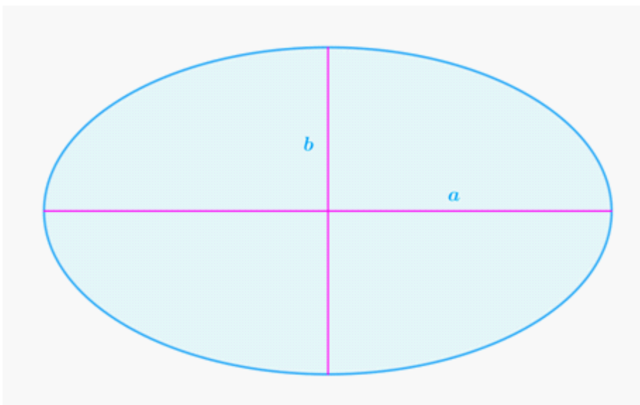
$$\overline{X} = \overline{MN} = \frac{a+b}{2}.$$

Es claro que el radio $\overline{MN}$ es mayor o igual que cualquier segmento $\overline{CH}$, luego $G \leq \overline{X}$. Además observamos que la igualdad se cumple solo si el triángulo es rectángulo isósceles, es decir si

$$a = b = \frac{a+b}{2},$$

cuando los dos números coinciden.

EJEMPLO 7: El área de la elipse de semiejes a y b está dada por la fórmula $A = \pi ab$. En el caso en que sea $a = b$, se trata de una circunferencia, y el área del círculo de radio a está dada por la fórmula $A = \pi a^2$, como caso particular del área de la elipse.



Elipse

Una demostración sencilla y rigurosa de la fórmula del área de la elipse utiliza el Cálculo integral. Sea la elipse de semiejes a y b, cuya ecuación es $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$, despejando tenemos la función $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ cuya gráfica es la parte superior de la elipse. El área es cuatro veces la del primer cuadrante, luego será

$$A = 4\int_0^a y(x)dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Integrando por partes se tiene

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

pero esta última integral es

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{(x^2-a^2+a^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

y sustituyendo queda

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx,$$

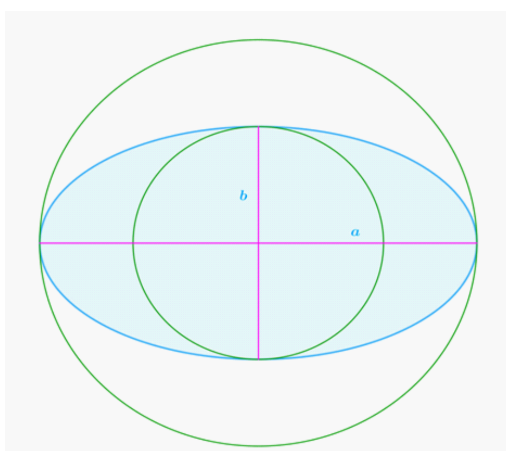
por lo que juntando en el mismo miembro las dos últimas integrales resulta que

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

y el área de la elipse dada es

$$\begin{aligned} A &= \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{4b}{a}\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right]_0^a = \\ &= \frac{2b}{a}\left(a^2 \operatorname{arcsen} 1 - 0\right) = \frac{2b}{a}a^2\frac{\pi}{2} = \pi ab, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.



Cincunferencias inscrita y circunscrita

Sin embargo, si nos fijamos que la elipse tiene una circunferencia inscrita y otra circunscrita, cuyos radios b y a son respectivamente los semiejes menor y mayor de la elipse, el área de la elipse es la media geométrica de las áreas de esos dos círculos, ya que

$$A = \sqrt{A_i A_c} = \sqrt{\pi b^2 \pi a^2} = \pi ab.$$

Ejemplo 8: El volumen del elipsoide. Se pretende hallar el volumen de un elipsoide general, no de revolución en general, con semiejes a, b, c. En el caso particular en que sean $a = b = c$, se trata de una esfera, cuyo volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$, por lo que el volumen del elipsoide será la *media geométrica* de las tres esferas de radios a, b y c, es decir el volumen de una esfera cuyo radio es la media geométrica de los tres semiejes

$$V_E = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt[3]{abc}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Pero esto no es una demostración, sino una fórmula que deducimos por *lógica.* La demostración rigurosa necesita Cálculo integral. Concretamente, dado el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

un plano a distancia $x = x_0$ le corta según la elipse

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = x_0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - x_0^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}}{\dfrac{a^2 - x_0^2}{a^2}} = 1$$

es decir

$$\frac{y^2}{\dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)} + \frac{z^2}{\dfrac{c^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)} = 1$$

con semiejes

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$$

y área de la sección

$$A(x) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)$$

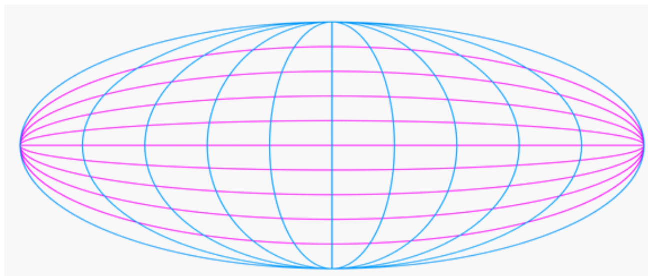
por lo que el volumen del elipsoide, calculado como volumen por secciones, es

$$V_E = 2\int_0^a \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2\pi bc}{a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

En el caso en que sea un elipsoide de revolución, por ser $b = c$, por ejemplo, el volumen resulta ser

$$V_E = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

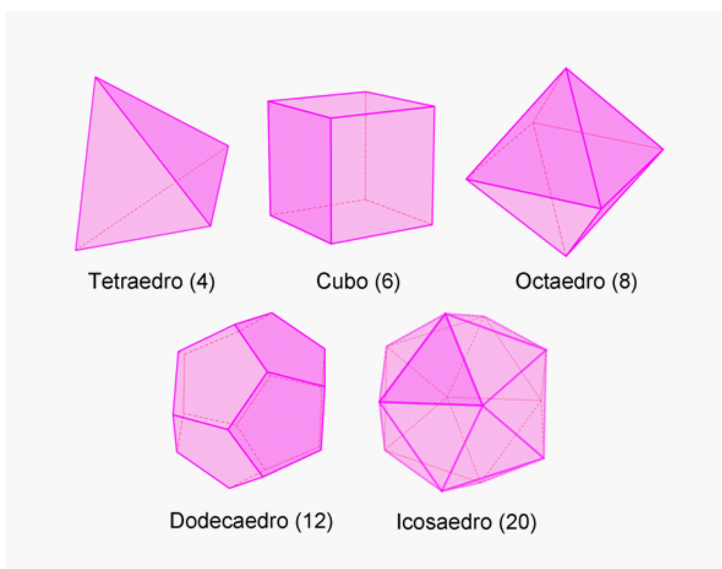
y puede calcularse también como volumen de revolución alrededor del eje OX.



Elipsoide

6. Ejemplos de la media armónica

EJEMPLO 9: ¿Cuál es la figura más armónica? Esta pregunta se la hacían los griegos con referencia a los poliedros regulares, que podemos ver en la siguiente figura



Poliedros regulares

La respuesta es que el *cubo, o hexaedro,* era considerada la figura geométrica más armónica, ya que el número de vértices es media armónica entre las caras y las aristas. Ya que tiene

$$C = 6, \qquad V = 8, \qquad A = 12.$$

Se verifica el teorema de Euler, $C+V = A+2$, como todos los poliedros regulares, pero además cumple que

$$V = \frac{2}{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12}} = \frac{2}{\dfrac{3}{12}} = \frac{24}{3} = 8.$$

Según los griegos, los demás poliedros regulares no eran tan armónicos como el cubo, ya que tienen caras, vértices y aristas dadas por la tabla siguiente:

	C	V	A
Tetraedro	4	4	6
Cubo	6	8	12
Octoedro	8	6	12
Dococaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

EJEMPLO 10: Estudiemos la velocidad media de un ciclista. Dependerá de lo bueno que sea. Pongamos que el ciclista Pérez entrena durante una hora a la velocidad de 60 km/h y a 20 km/h durante la hora siguiente. ¿Cuál es su velocidad media? Pongamos que el ciclista Gómez sube un puerto a 20 km/h y desciende por la misma ruta a 60 km/h. ¿Cuál es su velocidad media? ¿Es la misma para ambos?

El ciclista Pérez recorre 80 km en 2 horas, por lo que su velocidad media es

$$v_m = \frac{e_t}{t_t} = \frac{20+60}{2} = 40 \text{ km/h},$$

que es la media aritmética. *La velocidad media en igualdad de tiempos es la media aritmética.*

Si la longitud del puerto es e el ciclista Gómez emplea en su recorrido un tiempo total

$$t = \frac{e}{20} + \frac{e}{60}$$

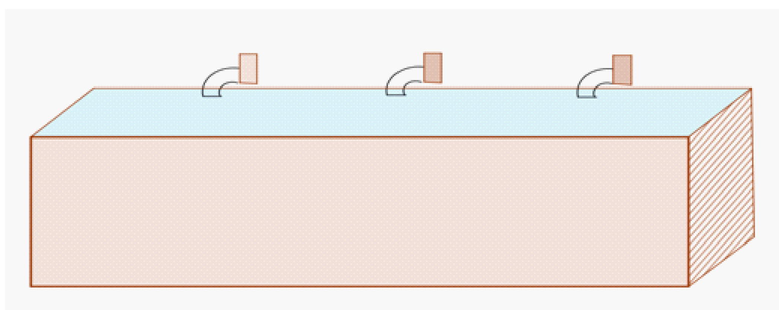
por lo que su velocidad media es

$$\frac{\text{espacio total}}{\text{tiempo total}} = \frac{2e}{\dfrac{e}{20}+\dfrac{e}{60}} = \frac{2}{\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{60}} = \frac{2}{\dfrac{4}{60}} = 30 \text{ km/h},$$

que es la media armónica. *La velocidad media en igualdad de espacios es la media armónica.*

Obsérvese que en la fórmula del movimiento uniforme $e = vt$, si el tiempo es constante, el espacio y la velocidad son directamente proporcionales, pero si el espacio es constante, la velocidad y el tiempo son inversamente proporcionales, a más velocidad se necesita menos tiempo para hacer el mismo recorrido.

Ejemplo 11: Estudiemos los depósitos. Cómo se llenan y cómo se vacían. Supongamos que un depósito dispone de tres grifos para llenarlo. El primero tarda 8 horas en llenarlo, el segundo tarda 10 horas y el tercero tarda 14 horas. Si los tres grifos vierten agua a la vez, ¿cuándo tiempo tardará en llenarse?



Llenado de depósitos

Si el depósito tiene una capacidad C, el caudal, o velocidad de llenado, de los tres grifos es

$$\frac{C}{8}, \qquad \frac{C}{10} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{14}$$

y si todos llenan el depósito por separado, es decir que llenaran tres depósitos, el tiempo empleado será

$$t = \frac{3C}{\dfrac{C}{8}+\dfrac{C}{10}+\dfrac{C}{14}} = \frac{3}{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{18}} = 12 \text{ horas},$$

luego el depósito lo llenarán en 4 horas, que es la *media armónica de los tiempos* por separado.

Ejemplo 12: En un proceso de producción distintas máquinas tienen velocidadas distintas de producción. Estudiar el tiempo necesario para producir un lote de productos es interesante para la planificación del trabajo diario en una empresa de cualquier tipo de artículos. Supongamos que cinco máquinas distintas producen a velocidades de 375, 362, 315, 408 y 350 productos por hora. Hállese la velocidad media de la cadena de producción.

Si el lote que se va a produir tiene C productos, el tiempo empleado por cada una de estas máquinas es

$$\frac{C}{375}, \quad \frac{C}{362}, \quad \frac{C}{315}, \quad \frac{C}{408}, \quad \frac{C}{350} \quad \text{horas}$$

y la velocidad media desarrollada para el total del lote sería

$$\begin{aligned} \frac{\text{Producción total}}{\text{Tiempo total}} &= \frac{5C}{\frac{C}{375}+\frac{C}{362}+\frac{C}{315}+\frac{C}{408}+\frac{C}{350}} = \\ &= \frac{5}{\frac{1}{375}+\frac{1}{362}+\frac{1}{315}+\frac{1}{408}+\frac{1}{350}} = 359,4 \end{aligned}$$

productos por hora, que es la *media armónica de las velocidades.*

Ejemplo 13: Carreras de relevos. Supongamos que cada uno de los componentes de un equipo de relevos 4×100 alcanzó en una competición la siguiente velocidad:

$$10,16 m/s, \qquad 10,35 m/s, \qquad 10,40 m/s, \qquad 10,52 m/s.$$

¿Cuál fue la velocidad media desarrollada por el testigo que se entregan los corredores?

Vamos a llamar A, B, C y D a los componentes del equipo, V_A, V_B, V_C y V_D sus velocidades y T_A, T_B, T_C y T_D los tiempos empleados en los 100 m que cada uno recorre. Tenemos que

$$100 = V_A \cdot T_A = V_B \cdot T_B = V_C \cdot T_C = V_D \cdot T_D,$$

por tanto, los tiempos son

$$T_A = \frac{100}{V_A}, \qquad T_B = \frac{100}{V_B}, \qquad T_C = \frac{100}{V_C}, \qquad T_D = \frac{100}{V_D},$$

es decir inversos a sus velocidades, lo que es lógico, a más velocidad se necesita menos tiempo.

Como la velocidad media en el trayecto es el espacio total recorrido entre el tiempo total empleado:

$$\begin{aligned} \textit{Velocidad media} &= \frac{400}{T_{total}} = \frac{400}{T_A + T_B + T_C + T_D} = \\ &= \frac{400}{\dfrac{100}{V_A} + \dfrac{100}{V_B} + \dfrac{100}{V_C} + \dfrac{100}{V_D}} = \frac{4}{\dfrac{1}{V_A} + \dfrac{1}{V_B} + \dfrac{1}{V_C} + \dfrac{1}{V_D}} = 10,356 \text{ m/s} \end{aligned}$$

que es la media *armónica de las velocidades* individuales.

EJEMPLO 14: Los inversores. Supongamos que dos inversores han comprado acciones de bolsa de una misma empresa en cinco ocaciones; los precios por acción han sido de

$$20,48; \quad 23,04; \quad 19,20; \quad 25,60 \quad \text{y} \quad 30,72.$$

Hallar el precio medio de las acciones que han comprado sabiendo que:
a) Fernández adquirió las cinco veces igual número de acciones, N.
b) Hernández empleó en todas las compras igual cantidad de dinero, D.

El precio medio es el cociente entre el dinero invertido y el número de acciones adquiridas. En el primer caso, si las acciones están más caras hay que pagar más, proporcionalidad directa. El precio medio es

$$\begin{aligned} P_F &= \frac{20,48N + 23,04N + 19,20N + 25,60N + 30,72N}{5N} = \\ &= \frac{20,48 + 23,04 + 19,20 + 25,60 + 30,72}{5} = 23,81 \end{aligned}$$

euros por acción, que es la *media aritmética.*

En el segundo caso si las acciones están más caras hay que comprar menos, proporcionalidad inversa. El dinero invertido es $5D$ y el número total de acciones compradas es

$$\frac{D}{20,48}+\frac{D}{23,04}+\frac{D}{19,20}+\frac{D}{25,60}+\frac{D}{30,72}$$

luego el precio medio es

$$\begin{aligned} P_H &= \frac{5D}{\dfrac{D}{20,48}+\dfrac{D}{23,04}+\dfrac{D}{19,20}+\dfrac{D}{25,60}+\dfrac{D}{30,72}} = \\ &= \frac{5}{\dfrac{1}{20,48}+\dfrac{1}{23,04}+\dfrac{1}{19,20}+\dfrac{1}{25,60}+\dfrac{1}{30,72}} = 23,16 \end{aligned}$$

euros por acción, que es la *media armónica.*

EJEMPLO 15: Los gases perfectos. En Química se estudia que cuando se trata con gases es necesario tener en cuenta el volumen, la presión y la temperatura, de forma que si se modifica una de estas variables manteniendo otra constante, la tercera se modifica según las leyes de Boyle-Mariotte y de Gay-Lussac.

La ley de Boyle-Mariotte dice que a temperatura constante el producto de presión por volumen permanece constante, es decir

$$PV = P'V' = k,$$

por tanto P y V varían de forma inversamente proporcional, si una de estas variables aumenta la otra disminuye. En conclusión, si queremos promediar presiones o promediar volúmenes, debemos hacerlo usando la media armónica, del mismo modo que hemos hecho con la velocidad media del ciclista Gómez en el ejemplo 10, con los depósitos del ejemplo 11 y el inversor Hernández del ejemplo 14.

Las leyes de Gay-Lussac dicen que si el volumen de un gas permanece constante, la presión y la temperatura varían de forma directamente proporcional, es decir,

$$\frac{P}{T}=\frac{P'}{T'}=k$$

y si la presión de un gas permanece constante, el volumen y la temperatura son directamente proporcionales, es decir,

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'} = k.$$

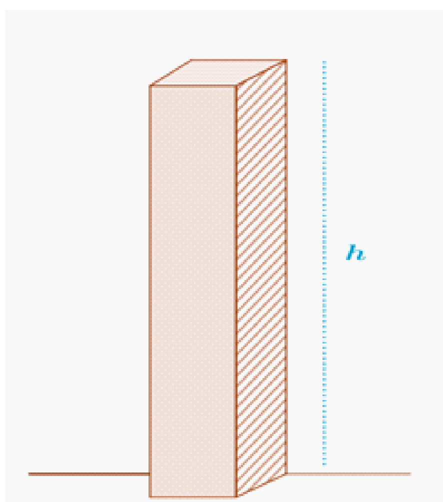
En conclusión, cuando queramos promediar presiones o temperaturas, para un volumen constante, o volúmenes o temperaturas, para una presión constante, debemeos usar la media aritmética.

7. Ejemplos de la media cuadrática

Ejemplo 16: Estudiemos la velocidad de caída de un objeto. Sabemos por la física que si desde una torre de altura h dejamos caer un objeto, la velocidad del mismo al llegar al suelo está dada por la fórmula

$$v_f = \sqrt{2gh}.$$

¿Cuál es la velocidad del objeto a mitad de la torre? ¿Y cuando lleva recorrido un cuarto? ¿Y a tres cuartos?



Velocidad de caída

El objeto parte del reposo, es decir $v_i = 0$ y va acelerando hasta alcanzar v_f en el momento del impacto. Como la velocidad aumenta según la raíz cuadrada del espacio, ya que de la fórmula anterior se deduce que

$$v^2 = 2gh,$$

lo que indica que para duplicar la velocidad es necesario multiplicar por cuatro la altura. La solución está en la media cuadrática entre v_i y v_f, es decir

$$C = \sqrt{\frac{v_i^2 + v_f^2}{2}} = \sqrt{\frac{0 + 2gh}{2}} = \sqrt{gh}.$$

Si calculamos la velocidad a mitad de la torre con la fórmula de la velocidad de caída se obtiene lo mismo, ya que

$$v_{1/2} = \sqrt{2g\frac{h}{2}} = \sqrt{gh},$$

lo que demuestra que la elección de la *media cuadrática* ha sido acertada.

Cuando el objeto lleva recorrido un cuarto de la altura de la torre, la velocidad será la media cuadrática entre la velocidad inicial y la velocidad a mitad de la torre, es decir

$$v_{1/4} = \sqrt{\frac{v_i^2 + v_{1/2}^2}{2}} = \sqrt{\frac{0 + gh}{2}} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

y la velocidad a los tres cuartos de recorrido será

$$v_{3/4} = \sqrt{\frac{v_{1/2}^2 + v_f^2}{2}} = \sqrt{\frac{gh + 2gh}{2}} = \sqrt{\frac{3gh}{2}}.$$

Estos resultados pueden comprobarse usando directamente la fórmula de la velocidad de caída.

Ejemplo 17: La desviación típica está dada por la fórmula

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (x_N - \overline{X})^2}{N}}$$

lo que indica que es la *media cuadrática* de las desviaciones de los datos respecto de la media.

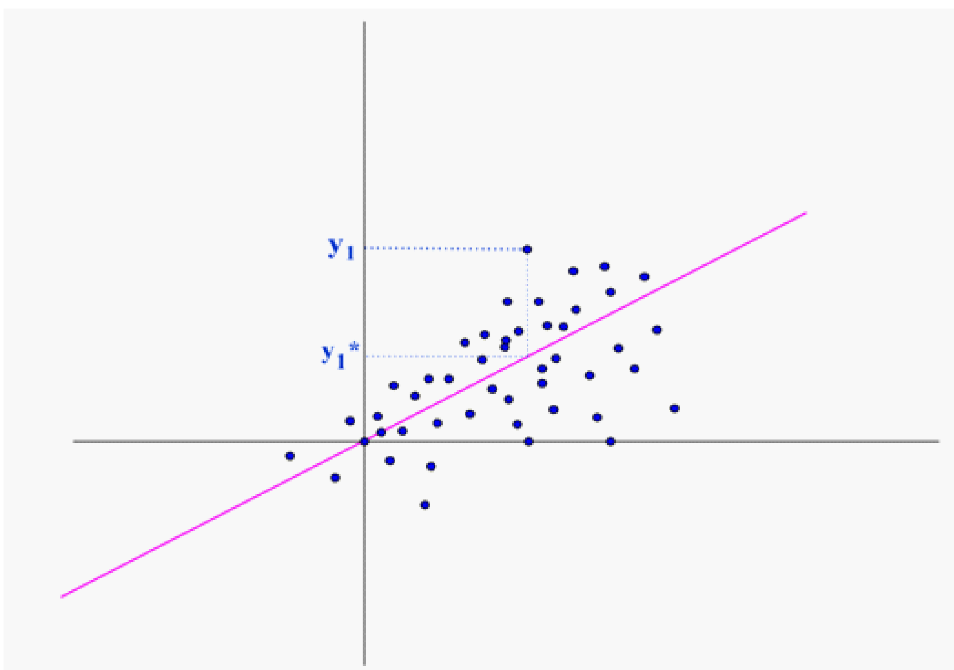
Su cuadrado es la varianza

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{X})^2}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N} - (\overline{X})^2$$

que se utiliza, al igual que la desviación típica, como medida de la dispersión de los datos porque elimina la influencia de los signos. La media de las desviaciones no sirve como medida de dispersión porque siempre es

$$\frac{\sum(x_i - \overline{X})}{N} = 0.$$

EJEMPLO 18: El ajuste por mínimos cuadrados. Cuando tenemos una nube de puntos en el plano y queremos ajustar una recta o una curva a esa nube,



Recta de regresión

se eligen los parámetros de la línea de forma que sea mínima la suma de los cuadrados de los errores, es decir

$$\sum (y_i - y_i^*)^2 = mínima.$$

Hacer mínima la suma *no es* lo mismo que hacer mínima la media cuadrática de los errores, pero el uso de los cuadrados tiene el mismo fín, evitar la influencia de los signos.

8. Cálculo de límites

EJEMPLO 19: Si tenemos una sucesión de números reales $\{a_n\} = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ y nos preguntamos por el límite de la media aritmética de los términos de la sucesión,

$$\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

tenemos una respuesta sencilla. Consideramos la sucesión de término general $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ y aplicamos el criterio de Stolz, ya que el denominador tiende a $+\infty$, resultando que

$$\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} =$$

$$= \lim_n \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_n \frac{a_n}{1} = \lim_n a_n$$

es decir, *el límite de la media aritmética es el límite del término general.* (Propiedad de Cauchy del límite de la media aritmética).

EJEMPLO 20: Si nos preguntamos por el límite de la media geométrica

$$\lim_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

tenemos el mismo resultado. El límite se obtiene del ejemplo anterior escribiendo la raíz como potencia y aplicando las propiedades de los logaritmos

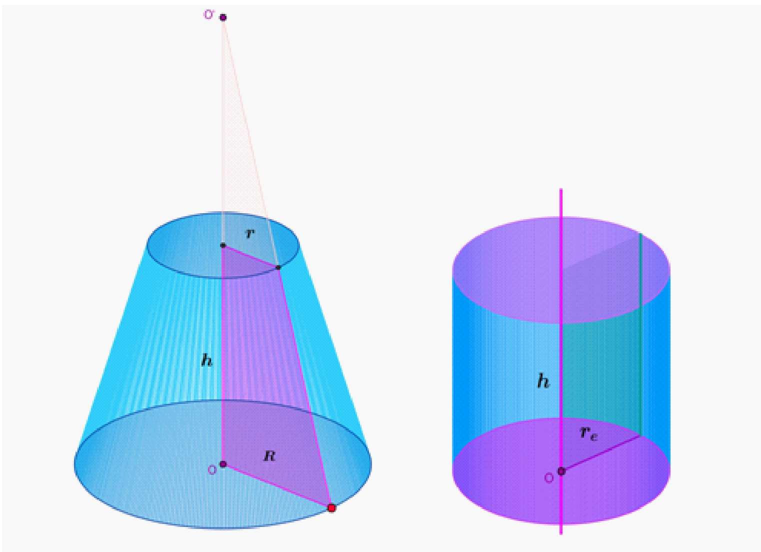
$$\lim_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_n (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = \lim_n \exp[\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}] = \\
&= \lim_n \exp\left[\frac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)\right] = \lim_n \exp\left[\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}\right] = \\
&= \exp\left[\lim_n \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}\right] = \exp[\lim_n \ln a_n] = \exp[\ln \lim_n a_n] = \lim_n a_n
\end{aligned}$$

es decir, *el límite de la media geométrica es el límite del término general.* (Propiedad de Cauchy del límite de la media geométrica).

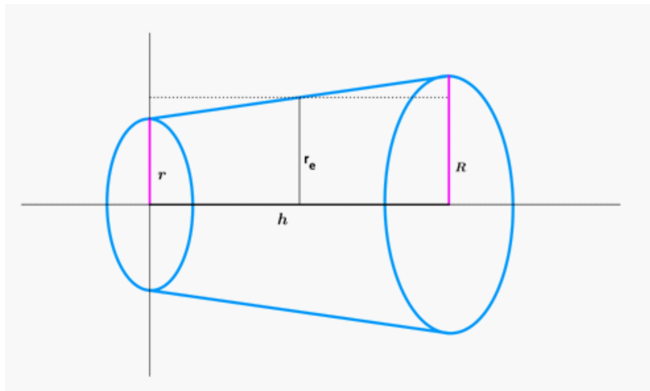
9. Ejemplo final: el tronco de cono

Deseamos estudiar el volumen del tronco de cono y hallar el radio de un cilindro de la misma altura que tenga el mismo volumen que el tronco de cono, que llamaremos *radio equivalente.*



Tronco de cono y cilindro equivalente

Parece que si giramos la figura lo vemos mejor:



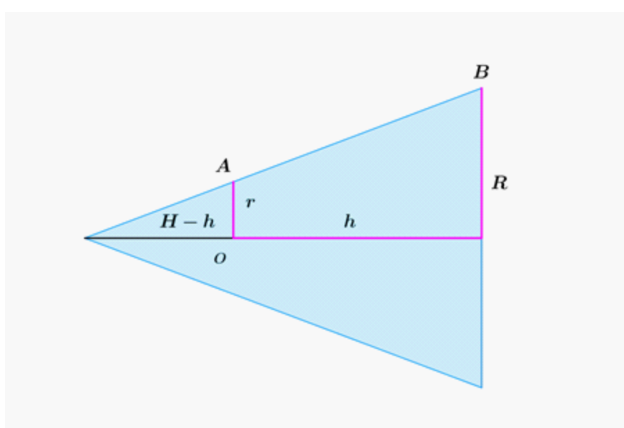
El tronco de cono

Geométricamente parece que se trata de la media aritmética de los radios

$$r_e = \frac{R + r}{2}.$$

Eso es sencillo pero completamente falso, porque la parte del tronco que gira por fuera del cilindro genera más volumen que la que gira por dentro.

Si queremos una demostración más formal, deducimos el volumen del tronco de cono, restando al cono grande el cono pequeño según la figura



Una sección del tronco de cono

Por la semejanza de los triángulos se tiene que

$$\frac{H-h}{r}=\frac{H}{R} \quad \Rightarrow \quad HR-hR=Hr \quad \Rightarrow \quad H(R-r)=hR \quad \Rightarrow \quad H=\frac{hR}{R-r}$$

lo que nos permite eliminar el valor de H, resultando

$$\begin{aligned}
V_{tronco} &= \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2H - r^2H + r^2h\right) = \\
&= \frac{\pi}{3}\left[\left(R^2-r^2\right)H + r^2h\right] = \frac{\pi}{3}\left[\frac{(R^2-r^2)hR}{R-r}+r^2h\right] = \\
&= \frac{\pi}{3}\left[(R+r)hR + r^2h\right] = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)
\end{aligned}$$

Haciendo un cálculo del volumen de revolución por integración, se llega al mismo resultado. Para ello hemos de encontrar la fórmula de la función que pasa por los puntos $A(0,r)$ y $B(h,R)$, esta función es claramente

$$y = r + \frac{R-r}{h}x$$

e integrando

$$\begin{aligned}
V_{tronco} &= \pi\int_0^h [y(x)]^2 dx = \pi\int_0^h \left(r+\frac{R-r}{h}x\right)^2 dx = \\
&= \pi\int_0^h \left(r^2 + \frac{(R-r)^2x^2}{h^2} + \frac{r(R-r)x}{h}\right) dx = \\
&= \pi\left[r^2x + \frac{(R-r)^2x^3}{3h^3} + \frac{r(R-r)x^2}{h}\right]_0^h = \\
&= \pi\left(r^2h + \frac{(R-r)^2h^3}{3h^2} + \frac{r(R-r)h^2}{h}\right) = \\
&= \frac{\pi h}{3}(3r^2 + (R-r)^2 + 3r(R-r) = \\
&= \frac{\pi h}{3}(3r^2 + R^2 - 2Rr + r^2 + 3Rr - 3r^2) = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr).
\end{aligned}$$

Es mucho más simple obtener el volumen del cono por integración y el del tronco de cono como diferencia entre dos conos.

Nos falta hallar una fórmula para el radio equivalente, es decir el radio de un cilindro de igual altura que nos proporcione el mismo volumen. Como el volumen del cilindro está dado por la fórmula $V = \pi r_e^2 h$, donde r_e es el llamado *radio equivalente.* Comparando con la fórmula final del tronco de cono resulta que

$$r_e^2 = \frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \quad \Rightarrow \quad r_e = \sqrt{\frac{R^2 + r^2 + Rr}{3}}$$

es la fórmula del radio equivalente. El radio equivalente es *la media cuadrática* del radio mayor, el radio menor y la media geométrica de ambos, $\sqrt{Rr}$.

Agradecimiento

Los autores quieren expresar su agradecimiento al profesor Cristóbal Pareja, vicedecano de investigación, por sus valiosos comentarios y sugerencias, que han contribuido notablemente a una versión mejor de este trabajo.

Bibliografía

Algunos de los ejemplos presentados se han tomado de los textos:

[1] Rodriguez L.A, Tomeo V, Uña I. *Métodos estadísticos para Ingeniería* Ed. Garceta. Madrid, 2011.

[2] Tomeo V, Uña I. *Estadística descriptiva* Ed. Garceta. Madrid, 2009.

[3] Tomeo V, Uña I, San Martín J. *Cálculo en una variable* Ed. Garceta. Madrid, 2010.

[4] Uña I, San Martín J, Tomeo V. *Cálculo de probabilidades* Ed. Garceta. Madrid, 2009.

Cuadernos de Trabajo
Facultad de Estudios Estadísticos

CT04/2014	**Jugando con la estadística (y la probabilidad)** *Gloria Cabrera Gómez*
CT03/2014	**Análisis estadístico de las consultas a la base de datos de ayudas e incentivos a empresas de la Dirección General de Industria y de la PYME.** *Adolfo Coello de Portugal Muño , Juana María Alonso Revenga*
CT02/2014	**Values of games with weighted graphs** *E. González-Arangüena, C. Manuel y M. del Pozo*
CT01/2014	**Estimación de la tasa de retorno de la carta del censo de los Estados Unidos a través del modelo de regresión lineal y técnicas de predicción inteligentes.** *José Luis Jiménez-Moro y Javier Portela García Miguel*
CT03/2013	**Provisión de siniestros de incapacidad temporal utilizando análisis de supervivencia.** *Ana Crespo Palacios y Magdalena Ferrán Aranaz*
CT02/2013	**Consumer need for touch and Multichannel Purchasing Behaviour.** *R. Manzano, M. Ferrán y D. Gavilán*
CT01/2013	**Un método gráfico de comparación de series históricas en el mercado bursátil.** *Magdalena Ferrán Aranaz*
CT03/2012	**Calculando la matriz de covarianzas con la estructura de una red Bayesiana Gaussiana** *Miguel A. Gómez-Villegas y Rosario Susi*
CT02/2012	**What's new and useful about chaos in economic science.** *Andrés Fernández Díaz, Lorenzo Escot and Pilar Grau-Carles*
CT01/2012	**A social capital index** *Enrique González-Arangüena, Anna Khmelnitskaya, Conrado Manuel, Mónica del Pozo*
CT04/2011	**La metodología del haz de rectas para la comparación de series temporales.** *Magdalena Ferrán Aranaz*
CT03/2011	**Game Theory and Centrality in Directed Social Networks** *Mónica del Pozo, Conrado Manuel, Enrique González-Arangüena y Guillermo Owen.*
CT02/2011	**Sondeo de intención de voto en las elecciones a Rector de la Universidad Complutense de Madrid 2011** *L.Escot, E. Ortega Castelló y L. Fernández Franco (coords)*
CT01/2011	**Juegos y Experimentos Didácticos de Estadística y Probabilidad** *G. Cabrera Gómez y Mª.J. Pons Bordería*
CT04/2010	**Medio siglo de estadísticas en el sector de la construcción residencial** *M. Ferrán Aranaz*
CT03/2010	**Sensitivity to hyperprior parameters in Gaussian Bayesian networks.** *M.A. Gómez-Villegas, P. Main, H. Navarro y R. Susi*

CT02/2010 **Las políticas de conciliación de la vida familiar y laboral desde la perspectiva del empleador. Problemas y ventajas para la empresa.**
R. Albert, L. Escot, J.A. Fernández Cornejo y M.T. Palomo

CT01/2010 **Propiedades exóticas de los determinantes**
Venancio Tomeo Perucha

CT05/2009 **La predisposición de las estudiantes universitarias de la Comunidad de Madrid a auto-limitarse profesionalmente en el futuro por razones de conciliación**
R. Albert, L. Escot y J.A. Fernández Cornejo

CT04/2009 **A Probabilistic Position Value**
A. Ghintran, E. González–Arangüena y C. Manuel

CT03/2009 **Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores**
A. Pajares García y V. Tomeo Perucha

CT02/2009 **La disposición entre los hombres españoles a tomarse el permiso por nacimiento. ¿Influyen en ello las estrategias de conciliación de las empresas?**
L. Escot, J.A. Fernández-Cornejo, C. Lafuente y C. Poza

CT01/2009 **Perturbing the structure in Gaussian Bayesian networks**
R. Susi, H. Navarro, P. Main y M.A. Gómez-Villegas

CT09/2008 **Un experimento de campo para analizar la discriminación contra la mujer en los procesos de selección de personal**
L. Escot, J.A. Fernández Cornejo, R. Albert y M.O. Samamed

CT08/2008 **Laboratorio de Programación. Manual de Mooshak para el alumno**
D. I. de Basilio y Vildósola, M. González Cuñado y C. Pareja Flores

CT07/2008 **Factores de protección y riesgo de infidelidad en la banca comercial**
J. Mª Santiago Merino

CT06/2008 **Multinationals and foreign direct investment: Main theoretical strands and empirical effects**
María C. Latorre

CT05/2008 **On the Asymptotic Distribution of Cook's distance in Logistic Regression Models**
Nirian Martín y and Leandro Pardo

CT04/2008 **La innovación tecnológica desde el marco del capital intelectual**
Miriam Delgado Verde, José Emilio Navas López, Gregorio Martín de Castro y Pedro López Sáez

CT03/2008 **Análisis del comportamiento de los indecisos en procesos electorales: propuesta de investigación funcional predictivo-normativa**
J. Mª Santiago Merino

CT02/2008 **Inaccurate parameters in Gaussian Bayesian networks**
Miguel A. Gómez-Villegas, Paloma Main and Rosario Susi

CT01/2008 **A Value for Directed Communication Situations.**
E. González–Arangüena, C. Manuel, D. Gómez, R. van den Brink

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE