

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Óptica



**CARACTERIZACIÓN DE LENTES OFTÁLMICAS POR
MEDIO DE LA MATRIZ DE POTENCIA DIÓPTRICA
LOCAL**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

José Antonio Gómez Pedrero

Bajo la dirección de los doctores

Eusebio Bernabeu

José Alonso

Madrid, 2003

ISBN: 978-84-669-1580-9

©José Antonio Gómez Pedrero, 1999



TI-1998/1



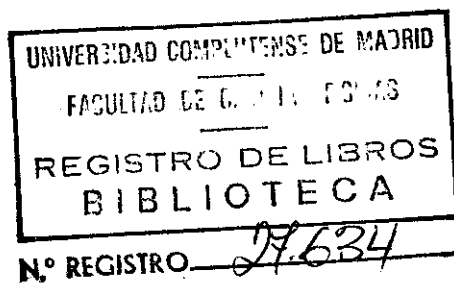
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

**CARACTERIZACIÓN DE LENTES OFTÁLMICAS
POR MEDIO DE LA MATRIZ DE POTENCIA
DIÓPTRICA LOCAL**

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en CC. Físicas por

D. José Antonio Gómez Pedrero,

Madrid, Diciembre de 1998



A mis padres

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los directores de esta Tesis Doctoral, Prof. Eusebio Bernabeu y Dr. José Alonso, por la confianza depositada en mi brindándose a dirigir este trabajo de investigación, por el esfuerzo realizado y el tiempo empleado en la dirección del mismo, así como por el continuo apoyo científico y humano que he recibido de ambos durante la ejecución del mismo. Gran parte de este trabajo de investigación es resultado de ideas y sugerencias tuyas o surgidas en el transcurso de nuestras discusiones acerca de los problemas tratados. También deseo agradecer al Prof. E. Bernabeu como Director del Departamento de Óptica de la Universidad Complutense de Madrid por haberme dado la oportunidad de integrarme en el mismo.

Me gustaría mostrar mi agradecimiento a D. Rafael Mendieta, Director Ejecutivo de Inversionista Comercial, S.A. (INCOSA-FRAMO) por su excelente acogida y trato dispensado durante la primera etapa de desarrollo de este proyecto de investigación.

No puedo dejar de agradecer a mis compañeros de la "Cueva" todo su apoyo y toda la paciencia para con mi persona de que la han hecho gala durante todo este tiempo. Especialmente a los doctores Agustín González Cano, Juan Antonio Quiroga, Mari Cruz Navarrete, Jesús Marcén y Juan Carlos Martínez así como a Héctor Canabal, Luis Miguel Sánchez, Daniel Crespo y Fernando Rodríguez por sus valiosas enseñanzas científicas y humanas. Debo expresar mi reconocimiento a los compañeros del Departamento de Óptica por el cariño y la simpatía mostrada, especialmente a Asunción Peral, Gonzalo Rueda, Oscar Esteban y Jose Miguel Ezquerro.

Este trabajo de investigación ha sido realizado gracias al apoyo económico prestado por la Comunidad Autónoma de Madrid (proyecto I+D 0119/94), Unión Europea (proyecto SMT3-CT95-2048 ABSO-DIAM) y a la Universidad Complutense (Becas de Formación de Personal Investigación, convocatoria de 1998).

Finalmente, deseo agradecer profundamente a mis padres y a mi hermana su apoyo incondicional y la infinita paciencia con la que han soportado la realización este trabajo de investigación.

Índice

Capítulo 1 INTRODUCCIÓN	3
1.1 Generalidades acerca de las lentes oftálmicas	3
1.2 Objetivos	7
1.3 Plan de trabajo de esta memoria	7
Referencias	8
Capítulo 2 CARACTERIZACIÓN MATRICIAL DE LENTES OFTÁLMICAS ESFEROTÓRICAS.	11
2.1 Resumen de la formulación matricial de la óptica geométrica paraxial	11
2.2 Estudio de lentes esferotóricas por medio de la formulación matricial de la óptica geométrica.	17
2.3 La matriz de potencia dióptrica: definición y propiedades	21
2.3.1 Definición y características principales de la matriz de potencia dióptrica	21
2.4 Aplicaciones de la matriz de potencia dióptrica en óptica oftálmica	22
2.4.1 Ley de Prentice para lentes esferotóricas: descentramientos en lentes monofocales y bifocales.	22
2.4.2 Obtención del espesor en borde para lentes esferotóricas	26
2.4.3 Utilización de la matriz de potencia dióptrica para el estudio estadístico de lentes esferotóricas	27
Referencias	28
Capítulo 3 LA MATRIZ DE POTENCIA DIÓPTRICA LOCAL DE UNALENTE OFTÁLMICA.	31
3.1 Matriz de potencia dióptrica local: Definición y propiedades	31
3.1.1 Refracción de un rayo en una superficie de forma arbitraria	32
3.1.2 Refracción en una lente oftálmica con superficies refractoras arbitrarias.	34
3.1.3 Matriz de Potencia Dióptrica Local (MPDL)	35
3.1.4 Potencia local de una lente con superficies refractoras arbitrarias	38
3.1.5 Expresión tensorial para la ley de Prentice generalizada	44
3.2 Matriz de potencia dióptrica local en lentes esféricas	45
3.3 Matriz de potencia dióptrica local en lentes asferotóricas	49
3.3.1 Descripción de una superficie asferotórica cónica	49
3.3.2 Efectos prismáticos en lentes asferotóricas cónicas	52
3.3.3 La matriz de potencia dióptrica local en lentes asferotóricas cónicas	53

Referencias	57
Capítulo 4 MEDIDA DE LA MATRIZ DE POTENCIA DIÓPTRICA LOCAL DE UNA LENTE OFTÁLMICA	59
4.1 Medida de la MPDL a partir de la topografía superficial de una lente oftálmica.	59
4.1.1 Descripción del dispositivo experimental	60
4.1.2 Tratamiento de datos. Obtención de la MPDL	64
4.2 Resultados experimentales	70
4.3 Medida de la MPDL a partir de la deflexión de los rayos sobre una lente oftálmica.	89
4.3.1 Descripción del dispositivo experimental para la medida de la MPDL a partir de la deflexión de rayos	89
4.3.2 Comparación de los dos métodos de medida de los elementos de la MPDL	91
Referencias	103
Capítulo 5 ALGUNAS APLICACIONES DEL FORMALISMO DE LA MPDL EN ÓPTICA OFTÁLMICA	105
5.1 Representación en el espacio de potencia dióptrica.	105
5.1.1 El espacio de potencia dióptrica.	105
5.1.2 Representación tridimensional de lentes esféricas y esféricas	107
5.1.3 Representación tridimensional de lentes progresivas	111
5.2 Aplicación de la MPDL al cálculo de efectos prismáticos y potencia local diferenciales.	112
5.2.1 Definición de puntos equivalentes de una pareja de lentes compensadoras.	112
5.2.2 Algoritmo de cálculo de puntos equivalentes	114
5.2.3 Cálculo de potencias prismáticas y refractoras diferenciales en una pareja de lentes progresivas	117
Referencias	123
CONCLUSIONES	125
APÉNDICES	127
Apéndice 1 Instrucciones de movimiento de los motores	128
Apéndice 2 Influencia de la punta del palpador en la medida de la superficie de la lente	129
Apéndice 3 Parametros de las lentes medidas	131

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se exponen los objetivos de este trabajo de investigación enmarcándolos dentro del contexto de los procesos de diseño, fabricación y control de lentes oftálmicas y se presenta el plan de trabajo que pensamos seguir para la consecución de dichos objetivos. Para ello presentamos en primer lugar una serie de nociones generales sobre los procesos de diseño, fabricación y control de lentes oftálmicas. A continuación, se enumeran los objetivos de este trabajo de investigación y se describe el plan de trabajo propuesto para la consecución de los mismos.

1.1 Generalidades acerca de las lentes oftálmicas

Las lentes oftálmicas son lentes diseñadas para compensar una serie de deficiencias que puede presentar el sistema visual humano. Entre las deficiencias que pueden compensarse con el uso de lentes oftálmicas se encuentran las llamadas *ametropías* (miopía e hipermetropía), el *astigmatismo ocular*, la *presbicia* y ciertos tipos de *estrabismos*. Las lentes oftálmicas están compuestas por dos superficies refractoras que son responsables en su mayor parte de las propiedades ópticas de la lente. Para que una lente oftálmica pueda cumplir su papel de elemento compensador ofreciendo el mayor grado posible de confort visual al usuario es necesario recurrir a un proceso de diseño en el cual se determina la forma óptima de las superficies refractoras. Una vez diseñada la lente debe ser fabricada en un proceso industrial y tras pasar los preceptivos controles de calidad debe ser montada en la gafa y adaptada al usuario. El diseño, fabricación y control de lentes oftálmicas es pues una rama de la Tecnología Óptica que se encarga del diseño de formatos óptimos para las lentes oftálmicas, de la fabricación de los mismos y del control de calidad tras el proceso de fabricación. Los procesos de diseño, fabricación y control de lentes oftálmicas utilizan resultados de ramas fundamentales de la Óptica como la Óptica Geométrica y la Óptica Fisiológica y de otras ramas de la ciencia como la Química Orgánica y la Ciencia de Materiales y de la Ingeniería Industrial.

Citando datos del American Council of Vision, 161 millones de ciudadanos de los EEUU utilizan algún tipo de elemento compensador de déficits visuales. De estos 161 millones de personas, el 81 % de ellos usan lentes oftálmicas mientras que un 3 % utilizan lentes de contacto y un 16 % alternan el uso de lentes oftálmicas y lentes de contacto. En 1996 el gasto anual de los ciudadanos de los EEUU en productos oftálmicos ascendió a 14.600 millones de \$ USA, en 1997 el gasto se incrementó en un 5.5

% llegando a los 15.400 millones de \$ USA. En 1998 se prevee un gasto de 16.300 millones de \$ USA. De este gasto en productos oftálmicos aproximadamente la mitad (un 49.5 %) se corresponde a lentes de contacto y lentes oftálmicas. Estos datos indican la importancia de la industria oftálmica en la sociedad actual.

Existen varios criterios para la clasificación de lentes oftálmicas siendo el más extendido la clasificación de lentes oftálmicas atendiendo a la forma de la superficie refractora. De acuerdo con este criterio se tienen las siguientes clases de lentes oftálmicas

- *Lentes esféricas*: Son aquellas lentes cuyas las dos superficies refractoras son esféricas. Se utilizan para la compensación de ametropías esféricas (miopía y hipermetropía).
- *Lentes esferotóricas*: Son aquellas que cumplen que al menos una de las dos superficies refractoras de la lente es un toro. Se utilizan para la compensación del astigmatismo ocular.
- *Lentes asféricas*: Son aquellas que cumplen que al menos una de las dos superficies de la lente es una superficie no esférica con simetría de revolución. Se utilizan para la compensación de ametropías esféricas en lugar de las lentes esféricas debido a su mejor calidad óptica y aspecto estético.
- *Lentes bifocales*: Son aquellas lentes que presentan dos zonas de distinta potencia bien definidas. Se utilizan para la compensación de la presbicia, generalmente en presbitas jóvenes o aquellos que no pueden adaptarse satisfactoriamente a lentes progresivas
- *Lentes progresivas*: Son aquellas lentes multifocales que presentan un aumento progresivo de la potencia desde la zona de lejos hasta la zona de cerca. Se utilizan para la compensación de la presbicia

Cada tipo de lente presenta un proceso de diseño y fabricación diferente, aunque con ciertos aspectos comunes. En el caso del diseño de lentes monofocales y bifocales [1], [4], [3], [7], el criterio utilizado atiende fundamentalmente a la minimación de las aberraciones que aparecen cuando el ojo rota para ver objetos situados fuera del eje visual. Así pues el diseño de lentes oftálmicas monofocales tiene que considerar el sistema óptico formado por la lente oftálmica y el ojo móvil. Dada la extrema complejidad del ojo humano, se realiza una simplificación en este esquema de modo que el sistema óptico lente-ojo se sustituye por otro más sencillo formado por la lente oftálmica y una pupila situada en la posición que ocupa el centro de rotación ocular.

En estas condiciones, se calculan las aberraciones que presenta el sistema lente-pupila en el centro de rotación ocular para un pincel de luz cuyo diámetro no supera al de la pupila del ojo humano (de 2 a 8 mm) que incide sobre el sistema con distintos ángulos de inclinación de manera que el rayo central del haz pase por el centro de la pupila situada en el centro de rotación [1], [4], [3], [7]. A este rayo se

le denomina *rayo principal*. De las aberraciones monocromáticas de tercer orden, solo contribuyen de manera significativa a una pérdida de la calidad de la imagen tres aberraciones: el astigmatismo oblicuo, la curvatura de campo (como error de potencia) y la distorsión. En principio no es posible conseguir anular todas las aberraciones para el rango habitual de ángulos de inclinación (de 0 a 30°), de modo que el diseño de la lente trata de conseguir la forma óptima de la lente que permita minimizar una determinada *función de forma*. También es importante conseguir optimizar otros factores, por ejemplo, es deseable que la curvatura de las superficies de la lente sea lo menor posible y para ello se utiliza bien un material de alto índice o bien una superficie refractora esférica.

El caso de lentes progresivas [3] , [5] , [6] es más complejo ya que el proceso de diseño debe de atender a un mayor número de factores. Una lente progresiva debe proporcionar al usuario una zona de potencia constante para visión lejana, una zona de potencia constante para visión cercana y una zona de progresión entre ambas. Debido a las características de las superficies progresivas [7] , no es posible conseguir una superficie progresiva que proporcione al usuario una visión nítida en toda la extensión de su superficie. De hecho en toda lente progresiva existen unas zonas laterales de la superficie a través de las cuales no es posible observar un objeto con nitidez. En el diseño de lentes progresivas intervienen además otros factores, de modo que en general el diseño de una superficie progresiva es más complicado que el diseño de una superficie esférica, aunque también se conserva la idea general de minimizar una cierta función de forma.

Una vez diseñada una lente, tiene lugar el proceso de fabricación de la lente [3] , [8] . El proceso de fabricación depende tanto de la naturaleza del material empleado para la lente como del tipo de lente que se desea fabricar. Partiendo de un bloque de material se produce el llamado *semiterminado*, de manera que se talla y pule una de las superficies de la lente en una de las caras del bloque de material y se deja sin terminar la otra superficie. La superficie que se talla es la denominada *curva base* o *superficie base*, de modo que el semiterminado puede utilizarse para un cierto rango de potencias. En el caso de lentes esféricas y progresivas, la superficie base es la superficie esférica o progresiva, ya que estas superficies requieren un proceso de fabricación especial. El semiterminado se almacena y posteriormente se talla y se pule la superficie inacabada de la lente que es aquella que determinará las propiedades ópticas de la misma.

El proceso de tallado de superficies esferotóricas se lleva a cabo mediante un *generador de tóricos* o una máquina de control numérico, siendo este último método el más moderno y avanzado tecnológicamente. Tras el proceso de tallado, se lleva a cabo el pulido de las superficies por medio de fricción

mecánica. La generación de superficies esféricas y progresivas es un proceso especial, existiendo varios métodos para la fabricación de las mismas. En el caso de lentes orgánicas se suele recurrir a la inyección del material en un molde generado por una máquina de control numérico. En el caso de lentes minerales existen dos métodos principales: 1) Un ciclo térmico en el cual que se talla y pule la superficie esférica más aproximada a la superficie progresiva que se quiere fabricar, se deposita la lente sobre un molde cerámico tallado con la forma de la superficie progresiva, se calienta la lente hasta una temperatura de 600 °C y se deja enfriar lentamente, de manera que la lente adquiere la forma deseada sin perder el pulido óptico, 2) Tallado y pulido de la lente por una máquina de control numérico.

Una vez que se ha fabricado la lente, tiene lugar el proceso de control de calidad para asegurar que la lente cumple las especificaciones necesarias para cumplir con eficacia su papel de elemento compensador. El proceso de control de calidad atiende tanto al control del acabado mecánico de las superficies refractoras de la lente como al control de las características ópticas de la misma. En este segundo caso hay que comprobar que los valores de una serie de magnitudes ópticas se hallen bajo tolerancia. Estas magnitudes son las potencias esférica y cilíndrica (en el caso de lentes monofocales) , la adición (en el caso de lentes multifocales) y el efecto prismático que introduzca la lente.

En el caso de lentes esféricas, se controlan una única magnitud óptica: la potencia de la lente medida desde el vértice de la segunda superficie de la misma. En el caso de lentes esferocilíndricas, se tiene una potencia para cada meridiano de la lente, sin embargo, la lente se comporta, en primera aproximación, como la superposición de dos lentes delgadas: una lente esférica y una lente cilíndrica. En estas condiciones se caracteriza la lente por las potencias de las lentes esférica (*potencia esférica*) y cilíndrica (*potencia cilíndrica*) equivalentes. En el caso de lentes bifocales, tenemos que considerar la potencia en la zona de lejos y la potencia en la zona de cerca, de modo que la lente se caracteriza por la potencia en la zona de lejos y la diferencia entre las potencias de la zona de lejos y de cerca, magnitud que se denomina *adición* . En el caso de lentes progresivas, la potencia varía a lo largo de la superficie de la lente, de modo que se tiene una distribución de potencia esférica y cilíndrica a lo largo de la superficie de la lente. Además las lentes progresivas a diferencia del resto de las lentes presentan un efecto prismático en el centro geométrico de la lente, esto es que un haz de rayos se deflecta al atravesar el centro geométrico de la lente. Este efecto se caracteriza por medio de la llamada *potencia prismática* que da cuenta del ángulo de desviación que sufre un rayo al atravesar la lente. La medida de estas magnitudes se realiza habitualmente con un frontofocómetro [9] , aunque es posible utilizar otros métodos de medida [10] , [11] , [11] (metodos Moiré, interferométricos, etc...).

Los parámetros ópticos que caracterizan una lente oftálmica esferotórica, en concreto, las potencias de la lente pueden relacionarse de un modo simple con parámetros geométricos de las lentes como la curvatura de las superficies refractoras empleando las expresiones de la Óptica Geométrica. Sin embargo, hasta el momento no se ha encontrado en la literatura una relación sencilla que permita caracterizar el comportamiento óptico de una lente que presente superficies refractoras de forma arbitraria, tal y como es el caso de una superficie progresiva.

1.2 Objetivos

El objetivo general que persigue este trabajo de investigación es la obtención de un formalismo matemático que permita caracterizar de un modo simple el comportamiento óptico de una lente oftálmica formada por superficies refractoras de forma arbitraria. Para la consecución de este objetivo general se pretende el cumplimiento de los siguientes objetivos parciales.

- Encontrar una relación sencilla que permita caracterizar el comportamiento óptico de una lente compuesta por superficies refractoras arbitrarias a partir de los parámetros geométricos de las superficies de dichas lentes.
- Particularizar la expresión anterior para los casos particulares en que las superficies refractoras de las lentes sean superficies esféricas, tóricas o asféricas.
- Comprobar experimentalmente la relación anterior mediante la deducción de los parámetros ópticos de una lente a partir de la medida directa de las superficies de varias lentes oftálmicas utilizando las relación derivada anteriormente. El método de medida debe ser preferentemente un método automático para conseguir una caracterización rápida de un conjunto de lentes. Igualmente es deseable llevar a cabo una caracterización de los errores experimentales del método de medida desarrollado.
- Comparar el método de medida expuesto en el punto anterior con un método de medida directa de los parámetros ópticos de una lente.
- Desarrollar aplicaciones prácticas del algoritmo matemático de caracterización de lentes oftálmicas en Óptica Oftálmica

1.3 Plan de trabajo de esta memoria

En el capítulo 2 se muestra la aplicación de los métodos matriciales para la caracterización de lentes esferotóricas. La aplicación de estos métodos permite la caracterización de lentes oftálmicas esferotóricas

por medio de una matriz 2×2 denominada matriz de potencia dióptrica. El resto del capítulo está dedicado a la descripción de las propiedades de la matriz de potencia dióptrica y de sus principales aplicaciones en el ámbito de la tecnología oftálmica.

En el **capítulo 3** se introduce la matriz de potencia dióptrica local como una generalización de la matriz de potencia dióptrica para el caso de lentes oftálmicas compuestas de superficies refractoras de forma arbitraria. La matriz de potencia dióptrica local se deduce a partir de la expresión generalizada de la ley de Prentice obtenida por nosotros. La matriz de potencia dióptrica local permite caracterizar ópticamente una lente oftálmica con superficies refractoras arbitrarias a partir de los parámetros geométricos de dichas superficies. Al final del capítulo presentamos las expresiones de la matriz de potencia dióptrica local para lentes esféricas y asferóticas, que incluyen como casos particulares las lentes esféricas y esferóticas.

En el **capítulo 4** se describe el dispositivo experimental empleado para la medida indirecta de la matriz de potencia dióptrica local de una lente oftálmica a partir de la medida directa de la forma de las superficies refractoras de la lente y se muestran los resultados obtenidos al medir una serie de lentes oftálmicas. Así mismo, mostramos la estimación del error cometido en la medida de la matriz de potencia dióptrica local. Finalmente comparamos los resultados obtenidos por nosotros con otros que se obtienen a partir de la medida de la matriz de potencia dióptrica local a partir de la medida de la deflexión directa de un haz láser en cada punto de la superficie de la lente.

Por último, en el **capítulo 5** se muestran dos aplicaciones del algoritmo de caracterización de lentes oftálmicas por medio de la matriz de potencia dióptrica local en Óptica Oftálmica como son la representación de lentes oftálmicas en un espacio euclideo tridimensional y el cálculo de efectos prismáticos diferenciales en lentes progresivas.

En los **Apéndices** que aparecen al final de la memoria se recogen una serie de resultados adicionales que aunque necesarios para un correcto seguimiento del trabajo realizado, harían más tediosa la lectura del texto.

Referencias

- [1] Fannin, T., Grosvenor, T., *Clinical Optics*, 1ª edición, Butterworth Heinemann, Boston, (1996).
- [2] Jalie, M., *The Principles of Ophthalmic Lenses*, 4ª edición, ABDO, Londres, (1998).
- [3] J. Salvadó, M. Fransoy, *Tecnología óptica. Lentes oftálmicas, diseño y adaptación*, Edicions UPC, Barcelona,

(1997).

- [4] Atchison, D., "Spectacle lens design: a review", *Appl. Opt.*, **31**, 3579-3585, (1992).
- [5] Young, J.M., "The progress of progressives", *The Ophthalmic Optician*, **28**, 300-306, (1984).
- [6] Maitenaz, B.F., "Four steps that led to Varilux", *Am. J. Optom. and Arch. Am. Acad. Optom.*, **43**, 441-50, (1966).
- [7] Minkwitz, G., "Über den Flächenastigmatismus bei gewissen symmetrischen Asphären", *Optica Acta*, **10**, (1963).
- [8] Horne, D.F., *Spectacle Lens Technology*, 1ª edición, Adam Hilger, Bristol, (1978).
- [9] Fowler, C.W., Sullivan C.M., "Automatic measurement of varifocal spectacle lenses", *Ophthal. Physiol. Opt.*, **10**, 86-89, (1990).
- [10] Liu, L., "Contour Mapping of Spectacle Lenses", *Optom. Vis. Sci.*, **71**, 265-272, (1994).
- [11] Wihardjo, E., "Interferometric measurement of actual oblique astigmatism of ophthalmic lenses", *Opt. Eng.*, **34**, 785-789, (1995).
- [12] J.A. Gómez-Pedrero, G. Rueda-Colinas, E. Bernabeu, "Automatic interferometric method for the study of the oblique central refraction in ophthalmic lenses", *Optik*, **104**, 171-174, (1996).

Caracterización matricial de lentes oftálmicas esferotóricas.

En este capítulo se introduce el formalismo de la matriz de potencia dióptrica para la caracterización de lentes oftálmicas. Para ello, utilizando la formulación matricial de la Óptica Geométrica, se deriva la matriz de potencia dióptrica como la caja C de la matriz ABCD que representa a una lente astigmática delgada. A partir de aquí se resumen las características principales de la matriz de potencia dióptrica y sus principales aplicaciones que se recogen en la literatura. En particular, se muestran diversas aplicaciones del formalismo de la potencia dióptrica, como son el cálculo de descentramientos en lentes oftálmicas monofocales e incluso bifocales, la obtención de una fórmula sencilla para el cálculo del espesor de borde de una lente asferotórica y por último, la utilización de la matriz de potencia dióptrica para la descripción estadística de un conjunto de estados refractivos.

2.1 Resumen de la formulación matricial de la óptica geométrica paraxial

Es bien conocida la aplicación de métodos matriciales al estudio de la óptica geométrica, en particular, para el cálculo de trayectorias de rayos en sistemas centrados teniendo en cuenta la aproximación paraxial [1], [2], [3]. Esta formulación matricial se basa en la descripción de la trayectoria del rayo que pasa por un punto P por un vector de dos¹ componentes, la altura y del rayo sobre el eje óptico en P , y el índice de refracción n del medio donde se encuentra el punto P multiplicado por la pendiente que forma la recta que describe la trayectoria del rayo con el eje óptico, que denotaremos por σ , dado que en aproximación paraxial la tangente y el ángulo se confunden. En estas condiciones, el vector \mathbf{v}_P que define el rayo en el punto P , viene dado por

$$\mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} y \\ n\sigma \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Supongamos que el rayo, definido en el punto P por medio del vector \mathbf{v}_P , se propaga por un medio homogéneo e isótropo, hasta alcanzar el punto Q , situado a la derecha del punto P , teniendo en cuenta el sentido usual de propagación de la luz de izquierda a derecha, tal y como se puede ver en la Fig. 2.7.

¹ Vamos a limitarnos de momento a considerar propagación de rayos en el plano meridiano del sistema. En el caso general de un rayo cruzado, que trataremos más adelante, utilizaremos un vector de cuatro componentes para representar al mismo.

Es inmediato comprobar que el vector que describe el rayo en el punto Q se puede escribir como:

$$\mathbf{v}_Q = \begin{pmatrix} y - \sigma l \\ n\sigma \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

en esta ecuación, l representa la distancia a lo largo del eje óptico entre los puntos P y Q . A partir de las ecuaciones (2.1) y (2.2), podemos encontrar fácilmente la siguiente relación entre \mathbf{v}_P y \mathbf{v}_Q

$$\mathbf{v}_Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{l}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_P. \quad (2.3)$$

Así pues, la propagación rectilínea de un rayo a través de un medio homogéneo viene representada, en la formulación matricial de la óptica geométrica por medio de la matriz

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{l}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

la matriz \mathfrak{S} se denomina *matriz de paso* u *operador de paso* y representa como hemos dicho la propagación rectilínea de un rayo en un medio homogéneo e isótropo, entre dos puntos cuya distancia a lo largo del eje óptico es l . La cantidad $\frac{l}{n}$ se conoce como *espesor reducido*.

A continuación, vamos a estudiar el caso en el que un rayo incide sobre una superficie esférica que separa dos medios de diferente índice de refracción. Tal y como se puede ver en la Fig. 2.2, el rayo incide en el punto P situado sobre la superficie esférica Σ , refractándose a continuación. Si el vector que describe al rayo incidente viene dado por la ecuación (2.1), el vector \mathbf{v}'_P que describe al rayo refractado vendrá dado por la ecuación:

$$\mathbf{v}'_P = \begin{pmatrix} y \\ n'\sigma' \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

donde se puede apreciar que el efecto de la refracción ha consistido en un cambio en la dirección del rayo, pasando la dirección del rayo a formar un ángulo σ' con el eje óptico. De acuerdo con la expresión clásica para la refracción en un dióptrio esférico de radio R , la relación entre σ y σ' viene dada por:

$$n'\sigma' = -\frac{(n' - n)}{R}y + n\sigma. \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6), no es más que la expresión de la fórmula de Lange [3] en aproximación paraxial. De acuerdo con esta ecuación, y teniendo en cuenta que la altura del punto P sobre el eje óptico no varia

tras la refracción, podemos escribir la siguiente ley matricial para la refracción en un dióptrio esférico en aproximación paraxial:

$$\mathbf{v}'_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n' - n)}{R} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_P. \quad (2.7)$$

Podemos pues definir la siguiente *matriz de refracción* u *operador de refracción* como:

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n' - n)}{R} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Definidos los operadores de refracción y de paso es posible trazar un rayo por cualquier sistema dióptrico centrado (la extensión a sistemas que contengan elementos reflectores es inmediata, sustituyendo en la ecuación (2.7) n' por $-n$). Supongamos, tal y como muestra la figura (Fig. 2.3), que nuestro sistema esta

formado por k superficies esféricas $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_i, \dots, \Sigma_k$, que tienen asociadas las correspondientes matrices de refracción $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_i, \dots, \mathfrak{R}_k$ y de paso entre superficies $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_i, \dots, \mathfrak{S}_{k-1}$. Sea pues un rayo que pasa por el punto objeto O , caracterizado por un vector \mathbf{v}_O , en estas condiciones, el vector \mathbf{v}_{P_1} del rayo en el punto de incidencia en la primera superficie, P_1 , vendrá dado por

$$\mathbf{v}_{P_1} = \mathfrak{S}_O \mathbf{v}_O, \quad (2.9)$$

siendo \mathfrak{S}_O la matriz de paso entre el punto objeto y el punto de incidencia en la primera superficie. Tras refractarse el rayo en la primera superficie podemos escribir el vector \mathbf{v}'_{P_1} como

$$\mathbf{v}'_{P_1} = \mathfrak{R}_{P_1} \mathfrak{S}_O \mathbf{v}_O, \quad (2.10)$$

operando iterativamente, podemos encontrar el vector del rayo tras refractarse en la i -ésima superficie, \mathbf{v}'_{P_i} , de modo que:

$$\mathbf{v}'_{P_i} = \mathfrak{R}_{P_i} \mathfrak{S}_{P_{i-1}} \dots \mathfrak{R}_{P_2} \mathfrak{S}_{P_1} \mathfrak{R}_{P_1} \mathfrak{S}_O \mathbf{v}_O. \quad (2.11)$$

A partir de esta ecuación, encontraremos la expresión final que relaciona los vectores del rayo en el punto objeto O e imagen O' , expresión que adopta la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathfrak{S}_{O'} \left(\prod_{i=k}^1 \mathfrak{R}_{P_i} \mathfrak{S}_{P_{i-1}} \right) \mathfrak{S}_O \mathbf{v}_O. \quad (2.12)$$

De acuerdo con esta ecuación, podemos caracterizar la actuación de un sistema óptico centrado sobre un

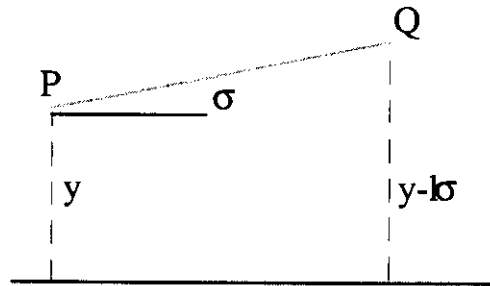


Figura 2.1. Propagación de un rayo de luz a través de un medio homogéneo e isótropo

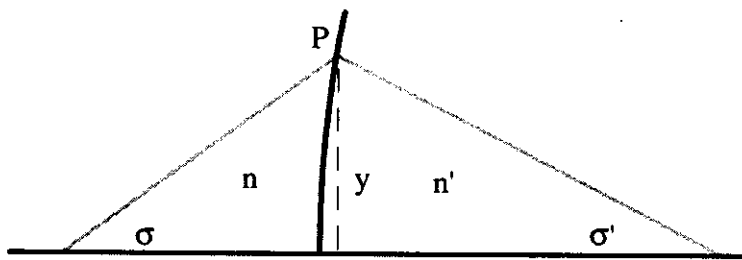


Figura 2.2. Refracción en una superficie esférica

rayo por medio de la matriz

$$N = \left(\prod_{i=k}^1 \mathcal{R}_{P_i} \mathcal{S}_{P_{i-1}} \right), \tag{2.13}$$

que suele denominarse *Matriz del sistema óptico* u *Operador del sistema óptico*. Debe hacerse notar la importancia que tiene el orden de multiplicación de las matrices de refracción y de paso del sistema, debido a la ausencia de propiedad conmutativa en el producto de matrices. Las ecuaciones (2.4), (2.8) y

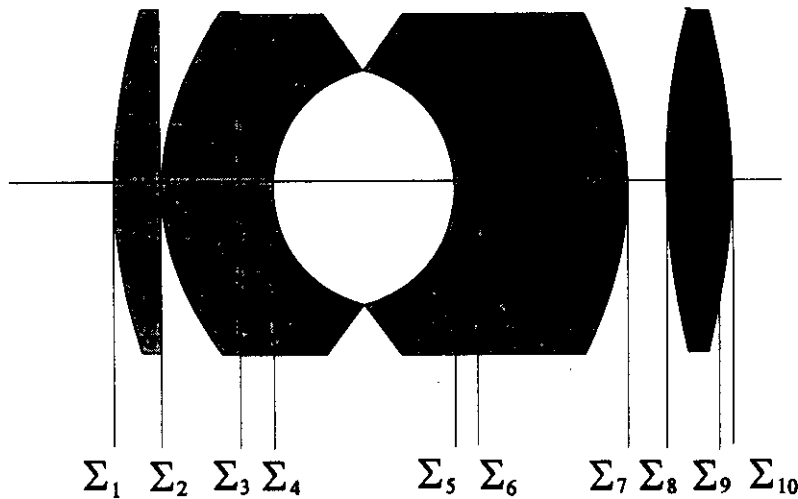


Figura 2.3. Ejemplo de sistema óptico compuesto por múltiples superficies refractoras: Objetivo fotográfico Biotar (Zeiss)

(2.13), caracterizan completamente la acción de un sistema óptico centrado sobre un rayo cualquiera que esté contenido en el plano meridiano. Con la ayuda de estas ecuaciones se puede caracterizar cualquier sistema óptico (en aproximación paraxial), encontrando los elementos característicos del mismo: puntos y planos focales, puntos y planos nodales y puntos y planos principales, tal y como viene explicado en los textos de óptica matricial [1], [3]. En particular, una lente gruesa viene representada por el siguiente operador matricial

$$L_G = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e(n-1)}{nR_1} & -\frac{e}{n} \\ -(n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{e(n-1)}{nR_1R_2} \right] & 1 - \frac{e(n-1)}{R_2n} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

haciendo $e = 0$ en la expresión anterior, encontramos que una lente delgada viene representada por la

matriz

$$L_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Que podemos escribir

$$L_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

siendo S la potencia de la lente delgada, definida a través de la ecuación del constructor de lentes [3] como

$$S = (n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] \quad (2.17)$$

de este modo se puede estudiar cualquier sistema óptico como combinación de lentes delgadas.

Hasta el momento, hemos limitado nuestra atención a aquellos rayos que están contenidos en el plano que define el eje óptico y una sección del sistema. sin embargo, la formulación matricial de la óptica geométrica también es capaz de estudiar la propagación de rayos oblicuos. Para ello, se debe redefinir

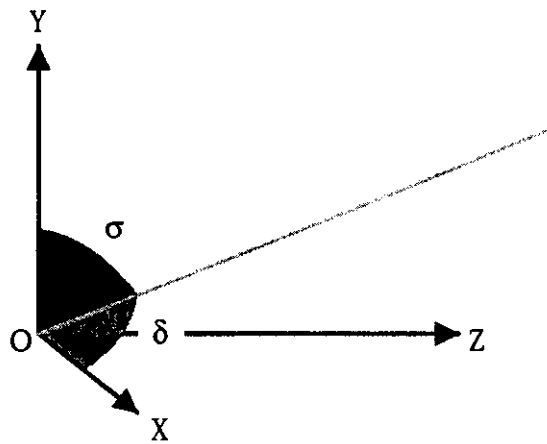


Figura 2.4. Cosenos directores de un rayo que se propaga oblicuamente respecto al sistema de referencia OX, OY, OZ

el vector de rayo de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ n\delta \\ n\sigma \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde (x, y) son las coordenadas del punto del plano perpendicular al eje óptico por donde pasa el rayo, y (δ, σ) son los cosenos directores² de la dirección del rayo, respecto a los ejes OX y OY , (Fig. 2.10). De acuerdo con la definición de vector de rayo oblicuo dada en la ecuación (2.18), se puede comprobar que el operador de paso adopta la siguiente expresión

$$\mathfrak{S}^{ob} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{l}{n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{l}{n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

y que el operador de refracción puede escribirse como:

$$\mathfrak{R}^{ob} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(n' - n)}{R} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{(n' - n)}{R} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Con la ayuda de los operadores definidos en (2.19) y en (2.20), se puede establecer la trayectoria en aproximación paraxial de cualquier rayo oblicuo que atraviese un sistema óptico centrado compuesto por superficies esféricas. En particular el operador que representa a una lente esférica, viene dado por

$$L_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -S & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

2.2 Estudio de lentes esferotóricas por medio de la formulación matricial de la óptica geométrica.

Una vez estudiados en el apartado precedente un resumen de la formulación matricial de la óptica geométrica, en aproximación paraxial, vamos a aplicar estos métodos matriciales al estudio de sistemas astigmáticos. En particular, vamos a centrar nuestro estudio en lentes cilíndricas y lentes tóricas delgadas, como las empleadas en la práctica optométrica para la compensación del astigmatismo ocular.

En la figura (Fig. 2.5), podemos ver la refracción de un haz de rayos a través de una lente plano-cilíndrica

² En aproximación paraxial, que es el marco en el que nos estamos moviendo, dichos cosenos directores se confunden con los ángulos que forma la dirección del rayo en el punto P con los ejes de coordenadas OX y OY , respectivamente.

en los dos meridianos principales de la lente, esto es, aquel definido por el eje del cilindro y su perpendicular, que denotaremos (Fig. 2.10) por los ejes de coordenadas OY y OX , respectivamente. Nuestro objetivo es encontrar el operador matricial que representa a esta lente cilíndrica. De acuerdo con lo visto en la sección anterior, podríamos escribir dicho operador como:

$$L'_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Donde a, b, c y d son constantes a determinar empleando las propiedades de las lentes cilíndricas. Sabemos que, para una lente cilíndrica, los rayos contenidos en el plano que definen el eje óptico OZ y el meridiano OY -que coincide con el eje del cilindro-, no se desvian, y por tanto se cumple que³

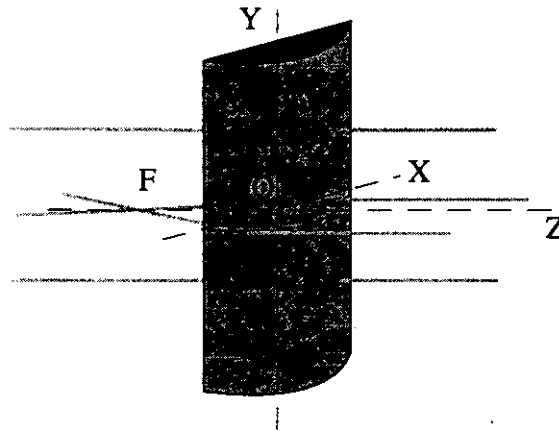


Figura 2.5. Refracción de un haz de rayos a través de una lente plano cilíndrica. Nótese que la sección de haz contenida en el plano definido por OZ y OY no se desvía.

$$\sigma' = \sigma, \tag{2.23}$$

si aplicamos el operador L'_C , definido en (2.22), encontramos que

$$\sigma' = cx + dy + \sigma, \tag{2.24}$$

³ En esta discusión, vamos a trabajar con lentes delgadas en aire, de modo que vamos a considerar que $n\sigma = \sigma$, en todos los vectores de rayo que empleemos.

obviamente (2.23) y (2.24) coinciden únicamente si $c = d = 0$. Por otro lado, todo rayo contenido en el plano formado por una sección perpendicular al eje del cilindro, es refractado por la lente cilíndrica, tal y como lo haría una lente con la superficie anterior esférica y la posterior plana, coincidiendo el radio de curvatura de su primera superficie, con el radio del cilindro. Dicho de otro modo,

$$\delta' = -\frac{(n-1)}{R_C}x + \delta. \quad (2.25)$$

La aplicación del operador L_C , nos da la siguiente expresión:

$$\delta' = ax + by + \delta, \quad (2.26)$$

igualando (2.25) y (2.26), encontramos que $a = -\frac{(n-1)}{R_C} = -C$ donde C es la potencia cilíndrica de la lente, y que $b = 0$. De este modo, el operador que representa a una lente cilíndrica, cuyos meridianos principales coincidan con los ejes OX , y OY de nuestro sistema de referencia, está dado por:

$$L'_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -C & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

En la práctica optométrica habitual, es común encontrarse con lentes cilíndricas para las cuales, los meridianos principales no coinciden con los ejes OX y OY , sino que se encuentran girados un ángulo α con respecto de dichos ejes. En este caso, debemos escribir el operador L_C , que representa una lente cilíndrica como

$$L_C = R^{-1}L'_C R, \quad (2.28)$$

en esta expresión, L'_C es operador lente cilíndrica en el sistema de coordenadas definido por los meridianos principales(2.27), mientras que R es un operador que representa la rotación de los ejes de coordenadas. Puede demostrarse [5], [6] que dicho operador viene dado por una matriz de la forma

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

siendo su inversa R^{-1} igual a su transpuesta, dado que R es un operador ortogonal. Sustituyendo R , R^{-1}

y L'_C en la ecuación (2.28), se obtiene la siguiente expresión para el operador lente cilíndrica,

$$L_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -C \cos^2 \alpha & -C \sin \alpha \cos \alpha & 1 & 0 \\ -C \sin \alpha \cos \alpha & -C \sin^2 \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Consideremos el caso más general de una lente esferótica, de mayor importancia en la práctica optométrica que las lentes cilíndricas. Es bien conocido [4], que dichas lentes pueden considerarse como la superposición de una lente puramente esférica y una lente cilíndrica. De este modo podemos hallar el operador que representa a una lente esferótica L_{ET} , sin más que multiplicar el operador de lente cilíndrica L_C , dado por la ecuación (2.30) y el operador de una lente esférica L_E , de acuerdo con (2.13). Obteniendo que L_{ET} viene dado por la expresión

$$L_{ET} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(S + C \cos^2 \alpha) & -C \sin \alpha \cos \alpha & 1 & 0 \\ -C \sin \alpha \cos \alpha & -(S + C \sin^2 \alpha) & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Utilizando está expresión, podemos hallar el cambio que sufren los cosenos directores de un rayo oblicuo tras atravesar una lente esferótica. De tal manera que

$$\delta' = -(S + C \cos^2 \alpha) x - (C \sin \alpha \cos \alpha) y + \delta, \quad (2.32)$$

$$\sigma' = -(C \sin \alpha \cos \alpha) x - (S + C \sin^2 \alpha) y + \sigma. \quad (2.33)$$

De acuerdo con [16], las componentes del efecto prismático vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta' - \delta \\ \sigma' - \sigma \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

de modo que podemos escribir la siguiente expresión para encontrar el efecto prismático producido por una lente esferótica, en cualquier punto de la superficie de la misma

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} S + C \cos^2 \alpha & C \sin \alpha \cos \alpha \\ C \sin \alpha \cos \alpha & S + C \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

esta es la formulación matemática de la ley de Prentice aplicada a lentes esferóticas, para las cuales el eje del cilindro se halla orientado de un modo arbitrario respecto del sistema de coordenadas utilizado.

2.3 La matriz de potencia dióptrica: definición y propiedades

2.3.1 Definición y características principales de la matriz de potencia dióptrica

La expresión (2.35) nos permite caracterizar a una lente oftálmica esférica, por medio de un operador matricial

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} S + C \cos^2 \alpha & C \sin \alpha \cos \alpha \\ C \sin \alpha \cos \alpha & S + C \sin^2 \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

que denominaremos *Matriz de Potencia Dióptrica*. Este operador fue introducido por primera vez para el estudio de lentes oftálmicas esféricas por Long [8], para resolver problemas de descentramiento de cilindros cruzados. Sin embargo, la derivación formal de la matriz de potencia dióptrica a partir del formalismo matricial de la óptica geométrica se debe a Keating [9], [10], mientras que un extenso estudio de las propiedades de la matriz de potencia dióptrica es debido a Harris ([15] a [19]). Vamos a continuación a ver las propiedades fundamentales de dicha matriz de potencia.

En primer lugar, vamos a estudiar la relación entre las componentes f_{ij} de la matriz de potencia dióptrica y la potencia esférica, cilíndrica y el eje del cilindro de la lente, $[S \ C \ \alpha]$. De acuerdo con (2.36), tenemos las relaciones de Long

$$f_{xx} = S + C \cos^2 \alpha, \quad (2.37)$$

$$f_{xy} = C \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.38)$$

$$f_{yy} = S + C \sin^2 \alpha. \quad (2.39)$$

Por otro lado, conociendo la matriz de potencia dióptrica \mathbf{F} que caracteriza a una lente oftálmica, podemos hallar la potencia esférica, cilíndrica y el eje del cilindro de dicha matriz, de acuerdo con las siguientes relaciones [11]:

$$S = (\text{tr } \mathbf{F} - C) / 2, \quad (2.40)$$

$$C = \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr } \mathbf{F}}{2} - 4 \det \mathbf{F} \right)}, \quad (2.41)$$

$$\tan \alpha = \frac{(S - f_{xx})}{f_{xy}}. \quad (2.42)$$

La importancia de estas expresiones en óptica oftálmica es que permiten resolver fácilmente el estudio del problema de cruce de lentes esferocilíndricas, método utilizado en optometría para la determinación

del estado refractivo de pacientes astigmáticos. Puede demostrarse que, según las leyes de la formulación matricial de la óptica geométrica [8], la matriz \mathbf{F} , que caracteriza a un sistema compuesto por dos lentes esferotóricas cruzadas, dadas por las matrices \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (2.43)$$

De este modo, la resolución del problema del cruce de lentes esferotóricas se simplifica considerablemente con la ayuda de las relaciones (2.40), (2.41), (2.42) y (2.43).

Por último, debemos constatar otras dos características de la matriz de potencia dióptrica: La matriz de potencia dióptrica es *simétrica* para una lente delgada, o para un sistema de lentes delgadas pegadas y la matriz de potencia dióptrica es invariante respecto al signo del cilindro.

2.4 Aplicaciones de la matriz de potencia dióptrica en óptica oftálmica

Vamos a ver a continuación las principales aplicaciones de la matriz de potencia dióptrica que se recogen en la literatura. La utilización del formalismo de la matriz de potencia dióptrica permite resolver cierto número de problemas habituales en óptica oftálmica de un modo más rápido, sencillo y elegante. La mayoría de estas aplicaciones ha sido desarrollada por Harris, especialmente aquellas referentes a la utilización del formalismo de la matriz de potencia dióptrica para establecer una estadística completa de estados refractivos.

2.4.1 Ley de Prentice para lentes esferotóricas: descentramientos en lentes monofocales y bifocales.

La ecuación (2.35) constituye la expresión de la ley de Prentice para una lente esferotórica, aunque un modo más general de escribir dicha ley es

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x^o \\ P_y^o \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S + C \cos^2 \alpha & C \sin \alpha \cos \alpha \\ C \sin \alpha \cos \alpha & S + C \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

donde se ha tenido en cuenta la posibilidad de que el centro geométrico de la lente montada no coincida con el centro óptico de la misma, procedimiento utilizado en optometría para la compensación de forias. En este caso, las coordenadas del centro óptico de la lente, referente al sistema de coordenadas centrado

en el centro geométrico de la lente, viene dado por la ecuación

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = -\frac{1}{(S^2 + SC)} \begin{pmatrix} -(S + C \sin^2 \alpha) & C \sin \alpha \cos \alpha \\ C \sin \alpha \cos \alpha & -(S + C \cos^2 \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x^o \\ P_y^o \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

De este modo podemos encontrar el descentramiento de la lente tórica. Este formalismo puede extenderse para el estudio de lentes menos simples como las lentes bifocales [15].

En efecto, supongamos una lente bifocal, tal y como se muestra en la figura Fig. 2.6. Podemos ver que la lente presenta una zona para visión lejana, que consideraremos como una lente tórica con centro óptico en O (Fig. 2.6) y caracterizada por una matriz de potencia dióptrica F . Por otro lado, tenemos la lentilla que se añade para permitir la utilización de la lente en visión de cerca. Considerada dicha lentilla como una lente independiente, esta presenta un centro óptico en O_C y una matriz de potencia dióptrica "adición" A . Cuando se unen la lente para visión de lejos y la lentilla de visión próxima forman la lente bifocal. La zona de visión de cerca puede considerarse como una lente esférica obtenida por la

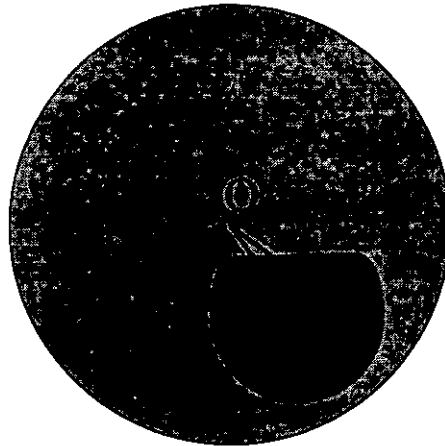


Figura 2.6. Representación esquemática de un bifocal y localización de los centros ópticos de la lente y de la lentilla de visión de cerca

superposición de dos lentes delgadas, caracterizadas por matrices de potencia F y A , con centros ópticos situados en O y en O_C , respectivamente. Por consiguiente, tal y como hemos visto, la zona de visión de cerca del bifocal se comportará como una lente esférica caracterizada por una matriz de potencia dióptrica $F_N = F + A$, y cuyo centro óptico estará situado en el punto O_N . Nuestro objetivo es hallar la posición de dicho centro óptico de la zona de visión próxima, O_N .

Para ello, procederemos del siguiente modo. Dado un punto P , situado en la zona de visión cercana (Fig.

2.6), podemos calcular el efecto prismático en dicho punto según la expresión siguiente [15]

$$\mathbf{P}_P = -\mathbf{F}\mathbf{r} - \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C), \quad (2.46)$$

que indica simplemente, que el efecto prismático total resulta de la superposición de los efectos prismáticos causados por la lente de lejos y la lentilla, referidos a distintos centros ópticos, como era de esperar. La ecuación (2.46), puede escribirse como

$$\mathbf{P}_P = -\mathbf{F}_N \mathbf{r} + \mathbf{A} \mathbf{r}_C. \quad (2.47)$$

La condición matemática que debe cumplirse para encontrar el centro óptico de la porción cercana del bifocal es

$$\mathbf{P}_N = 0, \quad (2.48)$$

donde el subíndice N , indica que nos hallamos en la posición del centro óptico. Sustituyendo en la ecuación (2.47), encontramos que

$$\mathbf{F}_N \mathbf{r}_N = \mathbf{A} \mathbf{r}_C, \quad (2.49)$$

el problema se reduce, por tanto a resolver esta ecuación. Llegados a este punto, podemos encontrar dos casos: en el caso más común, el rango de la matriz de potencia \mathbf{F}_N es dos, y por tanto, es invertible, de modo que [15]

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{F}_N^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{r}_C), \quad (2.50)$$

siendo \mathbf{F}_N^{-1} la inversa de la matriz \mathbf{F}_N , de acuerdo con la definición clásica de inversa de matriz, esto es

$$\mathbf{F}_N^{-1} \mathbf{F}_N = \mathbf{I}, \quad (2.51)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad 2×2 . La otra posibilidad es que la matriz \mathbf{F}_N tenga un rango inferior a dos, en este caso, no existe una matriz inversa que cumpla la ecuación (2.51). Aun así, es posible resolver [15] la ecuación (2.47), haciendo uso de la *inversa generalizada de Moore-Penrose de una matriz* [16]. Dada una matriz \mathbf{W} , se define su matriz inversa generalizada, \mathbf{W}^- , como aquella que satisface las siguientes igualdades [16]

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^- \mathbf{W} = \mathbf{W}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = (\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1})', \quad (2.54)$$

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} = (\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W})', \quad (2.55)$$

donde el símbolo ' indica la operación de transposición. En el caso particular en que la matriz \mathbf{W} es cuadrada, de dimensión $n \times n$, no singular y el rango de \mathbf{W} coincide con n , entonces la matriz pseudoinversa \mathbf{W}^{-1} coincide con la inversa ordinaria \mathbf{W}^{-1} , definida a través de la ecuación (2.51). Puede demostrarse [15], que existe solución para la ecuación (2.49) si y solo si, se cumple que

$$\mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^{-1} \mathbf{A} \mathbf{r}_C = \mathbf{A} \mathbf{r}_C, \quad (2.56)$$

ecuación que puede reescribirse como

$$(\mathbf{I} - \mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^{-1}) \mathbf{A} \mathbf{r}_C = \mathbf{0}, \quad (2.57)$$

siendo $\mathbf{0}$ la matriz nula. Si estas condiciones de existencia se satisfacen, la solución general de la ecuación (2.49) viene dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{F}_N^{-1} \mathbf{A} \mathbf{r}_C + (\mathbf{I} - \mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^{-1}) \mathbf{g}. \quad (2.58)$$

Siendo \mathbf{g} un vector cualquiera. En el caso particular en que $(\mathbf{I} - \mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^{-1}) = \mathbf{0}$, se tiene que el centro óptico en la zona de cerca es *único*, y que la matriz inversa generalizada \mathbf{F}_N^{-1} coincide con la inversa ordinaria \mathbf{F}_N^{-1} , siendo la solución buscada

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{F}_N^{-1} \mathbf{A} \mathbf{r}_C. \quad (2.59)$$

En caso contrario, la ecuación (2.58) representa las infinitas soluciones que aparecen (una por cada valor de \mathbf{g}) para la ecuación (2.49).

En resumidas cuentas, al tratar de encontrar el centro óptico en la zona de visión cercana de una lente bifocal, nos podemos encontrar con tres casos: 1) la existencia de un único centro óptico en la zona de visión próxima, ecuaciones (2.51), (2.59), 2) la aparición de infinitos centros ópticos locales que pueden hallarse por medio de la ecuación (2.58) y 3) la no existencia de prisma local, cuando las condiciones (2.56) o (2.57) no se satisfacen.

2.4.2 Obtención del espesor en borde para lentes esferotóricas

Otra aplicación interesante de la matriz de potencia dióptrica esta relacionada con la obtención del espesor en borde de una lente esferotórica. Esta aplicación está basada en la forma aproximada de la sagita de una superficie tórica. Es bien conocida [12] la forma exacta de la sagita de una superficie toroidal, que viene dada por una expresión del tipo

$$z = R_1 - \sqrt{\left(R_1 - R_2 + \sqrt{R_2^2 - y^2 - x^2}\right)}, \quad (2.60)$$

donde R_1 , R_2 son los radios de curvatura de la superficie en los meridianos principales (que coinciden con las direcciones de los ejes de coordenadas OX y OY , respectivamente). Si suponemos que los radios de curvatura de ambos meridianos del toro son mayores que el diámetro del círculo que define el borde de la lente, podemos aplicar la llamada aproximación de Rayleigh [12], obteniéndose la siguiente expresión para la sagita

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}. \quad (2.61)$$

Utilizando las curvaturas en lugar de los radios, podemos escribir la ecuación anterior como

$$z = \frac{1}{2} (C_1 x^2 + C_2 y^2), \quad (2.62)$$

sabemos que $C_1 < C_2$, ya que $R_1 > R_2$, de modo que podemos escribir $C_2 = C_S + C_C$ y $C_1 = C_S$, de modo que la ecuación (2.62), queda de la siguiente forma

$$z = \frac{1}{2} (C_S x^2 + (C_S + C_C) y^2). \quad (2.63)$$

Hasta ahora, hemos considerado que nuestros ejes de coordenadas OX , OY son paralelos a las direcciones de los meridianos principales en la superficie, sin embargo, en general esto no es cierto, existiendo una relación entre las coordenadas (x, y) de un punto P de la superficie en la base definida por los meridianos principales y las coordenadas (x', y') del punto P en una base arbitraria. Dicha relación viene dada a través de la matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Sustituyendo las coordenadas (x, y) dadas por la ecuación (2.64) en (2.63), obtenemos la siguiente ex-

presión para la sagita de la superficie

$$z = \frac{1}{2} [(C_S + C_C \cos^2 \alpha) (x')^2 + 2C_C \cos \alpha \sin \alpha x'y' + (C_S + C_C \sin^2 \alpha) (y')^2], \quad (2.65)$$

que permite escribir la siguiente forma cuadrática para la sagita de una superficie tóroidal, expresión debida a Harris [12]

$$z = \frac{1}{2(n' - n)} (x' \ y') \begin{pmatrix} S + C \cos^2 \alpha & C \cos \alpha \sin \alpha \\ C \cos \alpha \sin \alpha & S + C \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

de modo que la sagita de la superficie queda como función de los poderes refractores S y C de la superficie, o más específicamente, de la *matriz de potencia dióptrica* de la misma. Haciendo uso de la ecuación (2.66) y sabiendo que el espesor t en cualquier punto de una lente viene dado por [4]

$$t = t_c - z_1 + z_2, \quad (2.67)$$

podemos escribir el espesor de una lente esferotórica (situada en aire) como

$$t = t_c - \frac{1}{2(n-1)} \mathbf{r}' \mathbf{F} \mathbf{r}, \quad (2.68)$$

siendo t_c el espesor central de la lente, \mathbf{r} el vector de posición (coordenadas (x', y')) en la superficie de la lente y \mathbf{F} la matriz de potencia dióptrica de la lente. Esta importante relación, que permite calcular el espesor en cualquier punto de una lente esferotórica con gran generalidad, admite la siguiente generalización [13] para poder considerar el caso particular de lentes que tengan un prisma \mathbf{P}_c en su centro geométrico

$$t = t_c + \frac{1}{(n-1)} \mathbf{r}' \mathbf{P}_c - \frac{1}{2(n-1)} \mathbf{r}' \mathbf{F} \mathbf{r}. \quad (2.69)$$

Queremos señalar, por último, que la ecuación anterior permite, entre otras cosas, calcular el espesor máximo y el mínimo a lo largo de cualquier meridiano de una lente esferotórica utilizando una técnica de multiplicadores de Lagrange [14].

2.4.3 Utilización de la matriz de potencia dióptrica para el estudio estadístico de lentes esferotóricas

En óptica oftálmica resulta de considerable interés el establecimiento de una estadística completa de estados refractivos. La utilización del formalismo de la matriz de potencia dióptrica ha permitido establecer

de un modo simple una estadística completa de estados refractivos. El trabajo de desarrollo de dicha estadística es debido a Harris [17], [18] y [19] con contribuciones de otros autores [9], [10], [21] y [22]

En general, dado un estado refractivo, este puede ser caracterizado por un trio de números reales. En notación tradicional $[S C \times \alpha]$ se usa el valor de la potencia esférica, la potencia cilíndrica y el ángulo formado por el eje del cilindro de la lente oftálmica utilizada para compensar dicho estado refractivo. De modo alternativo, si se utiliza el formalismo de la matriz de potencia dióptrica, un estado refractivo viene dado por los tres valores (f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}) de las componentes de la matriz de potencia dióptrica de la lente oftálmica utilizada para compensar dicho estado refractivo. La ventaja de esta última representación es la posibilidad de establecer una correspondencia entre el conjunto de posibles estados refractivos y el espacio vectorial \mathbf{R}^3 [18]. Siguiendo a Harris [17] y [19], es posible representar un estado refractivo por un vector $\mathbf{f} = (f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})$ cuyas componentes son los elementos de la matriz de potencia dióptrica correspondiente a dicho estado refractivo.

En estas condiciones, dada una serie de estados refractivos $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \dots \mathbf{f}_n$ resulta factible definir las magnitudes estadísticas más habituales [20], como la media aritmética

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i, \quad (2.70)$$

la varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_i) \cdot (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_i)}{n}, \quad (2.71)$$

o la desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_i) \cdot (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_i)}{n}}. \quad (2.72)$$

La utilización de las ecuaciones anteriores permite la caracterización estadística de estados refractivos utilizando los elementos de la matriz de potencia dióptrica como variables estadísticas independientes, en lugar de la notación tradicional de esfera, cilindro y eje.

Referencias

- [1] E. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics*, (1ª edición), Dover Publications Inc., New York, (1992).
- [2] E. Hecht, A. Zajac, *Optica*, (xx edición), Addison-Wesley, Wilmington, (1974).
- [3] A. Gerrard, J.M. Buch, *Matrix Methods in Optics*, (1ª edición), Dover Publications Inc, New York, (1994).
- [4] J. Casas, *Óptica*, (6ª edición), Editorial General Librera, Zaragoza, (1992).
- [5] L.I. Golovina, *Álgebra lineal y alguna de sus aplicaciones*, (2ª edición), Editorial MIR, Moscu, (1980).
- [6] J. García, M. López, *Álgebra lineal y geometría: Ejercicios*, (2ª edición), Editorial Marfil, Alcoy, (1983).
- [7] M. Jalie, *The Principles of Ophthalmic Lenses*, (2ª edición), Editado por la BADO, Londres, (1988).
- [8] W.F Long, "Formalism for decentration problems", *Am. J. Optom. Physiol. Opt.*, **53**, 27-33, (1976).
- [9] M.P. Keating, "A System Matrix for Astigmatic Optical Systems: I. Introduction and Dioptric Power Relations", *Am. J. Optom. Physiol. Opt.*, **58**, 810-819, (1980).
- [10] M.P. Keating, "A System Matrix for Astigmatic Optical Systems: II. Corrected Systems Including an Astigmatic Eye", *Am. J. Optom. Physiol. Opt.*, **58**, 919-929, (1981).
- [11] M.P. Keating, "An Easier Method to Obtain the Sphere, Cylinder, and Axis from an Off-Axis Dioptric Power Matrix", *Am. J. Optom. Physiol. Opt.*, **57**, 734-737, (1980).
- [12] W.F. Harris, "The sagitta and lens thickness: the exact solution and a matrix approximation for lenses with toric, spherical and cylindrical surfaces", *Optom. Vision Sci.*, **66**, 170-174, (1989).
- [13] W.F. Harris, H. Abelman, "Approximate matrix expression for the thickness of any lens generalized to allow for prism", *Ophthal. Physiol. Opt.*, **11**, 118-120, (1991).
- [14] W.F. Harris, "Thickness extrema at the edge of shaped lenses: the general problem and the solution for a straight edge obtained by means of Lagrange multipliers", *Ophthal. Physiol. Opt.*, **11**, 121-129, (1991).
- [15] W.F. Harris, "Prismatic effect in bifocal lenses and the location of the near optical centre", *Ophthal. Physiol. Opt.*, **14**, 203-209, (1994).
- [16] W.F. Harris, "Calculation and least-squares estimation of surface curvature and dioptric power from

- meridional measurements", *Ophthalm. Physiol. Opt.*, **12**, 58-64, (1991).
- [17] W.F. Harris, "Algebra of spherocylinders and refractive errors, and their means, variance and standard deviation", *Am. J. Optom. Physiol. Opt.*, **65**, 794-802, (1988).
- [18] W.F. Harris, "Statistical inference on mean dioptric power: hypothesis testing and confidence regions", *Ophthalm. Physiol. Opt.*, **10**, 363-372, (1990).
- [19] W.F. Harris, "Simplified rational representation of dioptric power", *Ophthalm. Physiol. Opt.*, **9**, 455 (1989).
- [20] V. Quesada, A. Isidoro, L.A. López, *Curso y ejercicios de estadística*, (1ª Edición) Editorial Alhambra Longman, Madrid, (1995).
- [21] H. Saunders, "Transformation of spherocylinders. I. Ranking procedure", *Ophthalm. Physiol. Opt.*, **5**, 313-325, (1985)
- [22] H. Saunders, "Transformation of spherocylinders. II. Mean, variance and standard deviation", *Ophthalm. Physiol. Opt.*, **5**, 327-332, (1985).

La matriz de potencia dióptrica local de una lente oftálmica.

En este capítulo se introduce el concepto de Matriz de Potencia Dióptrica Local (MPDL) en lentes oftálmicas que presenten superficies refractoras de forma arbitraria, tal y como ocurre en el caso de las lentes de adición progresiva. Para introducir el concepto de MPDL se ha derivado en primer lugar una generalización de la ley de Prentice, esta generalización permite caracterizar el efecto prismático que presenta una lente oftálmica compuesta de superficies refractoras arbitrarias. A partir de la expresión generalizada de la ley de Prentice, se ha encontrado una relación matricial entre el efecto prismático y el punto de la superficie de la lente en el cual se quiere calcular dicho efecto prismático. Esta relación matricial viene dada por la MPDL, que permite caracterizar ópticamente lentes oftálmicas con superficies refractoras arbitrarias. Para finalizar se muestran las expresiones analíticas de la MPDL en lentes oftálmicas con superficies refractoras esféricas y asféricas.

3.1 Matriz de potencia dióptrica local: Definición y propiedades

Como se ha visto en el capítulo 2, la aplicación de técnicas matriciales permite la caracterización de los efectos prismáticos presentados por lentes oftálmicas esferocilíndricas por medio de la ley de Prentice. A continuación, vamos a estudiar una generalización de la ley de Prentice con el objeto de encontrar los efectos prismáticos en lentes oftálmicas compuestas de superficies refractoras arbitrarias. En particular, nuestro objetivo es la obtención de una ley sencilla que permita caracterizar las desviaciones prismáticas en lentes progresivas. Para ello es necesario tener en cuenta las siguientes hipótesis:

1/ Aceptaremos como válida la aproximación paraxial. Esta hipótesis es cierta en primera aproximación para lentes oftálmicas debido al efecto de la rotación ocular, que permite variar la dirección de mirada del ojo para observar objetos situados lateralmente respecto a la cabeza.

2/ Vamos a considerar que las superficies son suficientemente "planas". Este concepto será explicado con detalle más adelante.

3/ Por último, vamos a suponer correcta la aproximación de lente delgada ya que los espesores de las lentes oftálmicas más comúnmente utilizadas en la práctica optométrica, tienen valores numéricos cercanos a 5 mm, inferiores a las dimensiones de los radios de curvatura y diámetros de las lentes. Puede demostrarse [1], que el efecto del espesor en los parámetros de diseño de una lente oftálmica es general-

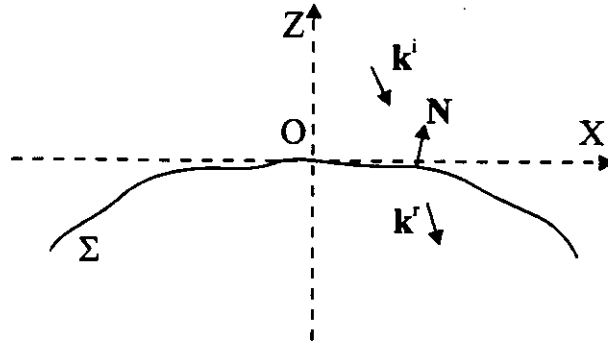


Figura 3.1. Geometría de la refracción de un rayo a través de una superficie de forma arbitraria.

mente pequeño.

Con la ayuda de estas hipótesis vamos a establecer una expresión para la desviación que sufre un rayo tras refractarse en una superficie arbitraria, tras lo cual estaremos en condiciones de considerar la desviación de un rayo que se refracta dos veces, en dos superficies refractoras arbitrarias. El análisis de los resultados que obtendremos nos llevará a caracterizar las lentes oftálmicas (y entre ellas las lentes progresivas) con superficies refractoras arbitrarias, por medio de una matriz de potencia dióptrica cuyos elementos son función de la posición en la superficie de la lente. Dicha matriz será denominada *Matriz de Potencia Dióptrica Local (MPDL)*.

3.1.1 Refracción de un rayo en una superficie de forma arbitraria

Consideremos una superficie Σ_1 de forma arbitraria, definida por medio de una carta de Monge $(x, y, z(x, y))$, que limita dos medios de índice de refracción n y n' respectivamente. El sistema de coordenadas se ha escogido de modo que el punto $(0, 0, 0)$, sea el vértice de la superficie (Fig. 3.1), y por tanto, la dirección del eje óptico de la superficie viene dada por el vector OZ . De los textos de Geometría Diferencial [8], [9] se puede obtener fácilmente la siguiente expresión para su vector normal

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2}} (\partial_x z, \partial_y z, -1). \quad (3.1)$$

La aproximación de considerar nuestra superficie como suficientemente "plana", a la que hemos hecho referencia en el apartado anterior, consiste en suponer que la dirección del vector normal no va a diferir excesivamente de la dirección del eje OZ . Matemáticamente, esto equivale considerar que la

función $z(x, y)$, tiene una variación suave a lo largo de la superficie, lo cual puede expresarse como

$$(\partial_x z)^2 \ll 1, \quad (3.2)$$

$$(\partial_y z)^2 \ll 1, \quad (3.3)$$

quedando el vector normal como

$$\mathbf{N} = (\partial_x z, \partial_y z, -1). \quad (3.4)$$

En estas condiciones, supongamos que un rayo incide sobre la superficie, de modo tal que su dirección viene dada por el vector $\mathbf{k}^i = (k_x^i, k_y^i, k_z^i)$. Teniendo en cuenta que consideramos por hipótesis que la aproximación paraxial es válida, y por tanto, la dirección del rayo incidente no está muy alejada de la dirección del eje óptico, (que en este caso coincide con el eje OZ) podemos escribir el vector \mathbf{k}^i de la siguiente forma

$$\mathbf{k}^i \simeq (k_x^i, k_y^i, 1), \quad (3.5)$$

con las siguientes condiciones de normalización, análogas a (3.2) y (3.3):

$$(k_x^i)^2 \ll 1, \quad (3.6)$$

$$(k_y^i)^2 \ll 1. \quad (3.7)$$

Si consideramos cierta la aproximación paraxial, podemos admitir que el vector director del rayo refractado tendrá una forma similar a la del rayo incidente, de modo que

$$\mathbf{k}^r \simeq (k_x^r, k_y^r, 1). \quad (3.8)$$

En estas condiciones, podemos pasar a relacionar los vectores \mathbf{k}^r y \mathbf{k}^i por medio de la formulación vectorial de la ley de Snell [2]

$$n(\mathbf{k}^i \times \mathbf{N}) = n'(\mathbf{k}^r \times \mathbf{N}), \quad (3.9)$$

lo cual conduce automáticamente a las siguientes relaciones

$$n'k_x^r = nk_x^i + (n - n')\partial_x z, \quad (3.10)$$

$$n'k_y^r = nk_y^i + (n - n')\partial_y z, \quad (3.11)$$

$$n' k_x^r \partial_y z - n' k_y^r \partial_x z = n k_x^i \partial_y z - n k_y^i \partial_x z. \quad (3.12)$$

Vamos a aplicar las ecuaciones (3.10) y (3.11) al caso particular de una superficie esférica. En este caso podemos encontrar la siguiente expresión aproximada [4] para la sagita de la superficie

$$z(x, y) = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R}, \quad (3.13)$$

de modo que, para este caso particular, podemos escribir

$$n' k_x^r = n k_x^i + (n - n') \frac{x}{R}, \quad (3.14)$$

$$n' k_y^r = n k_y^i + (n - n') \frac{y}{R}. \quad (3.15)$$

Que constituye la conocida expresión de las ecuaciones de Lange para una superficie esférica, tal y como fue definido en la ecuación ???. Utilizando las expresiones (3.10), (3.11), (3.14) y (3.15), se puede encontrar la desviación que sufre un rayo al atravesar una lente oftálmica cuya primera superficie tiene forma arbitraria (con las restricciones enumeradas al inicio de esta sección), como vamos a ver a continuación.

3.1.2 Refracción en una lente oftálmica con superficies refractoras arbitrarias.

De acuerdo con los resultados expuestos en el apartado anterior, podemos considerar la refracción de un rayo a través de una lente oftálmica delgada, cuya primera superficie presente una forma arbitraria, pero cuya segunda superficie es una esfera. La aplicación directa de las ecuaciones (3.10) y (3.11), nos permite escribir la siguiente expresión para la refracción en la primera superficie, teniendo en cuenta que, al estar la lente en aire, $n = 1$, $n' = n$, siendo n el índice de refracción de la lente. Así pues tenemos que

$$n k_x^{r1} = k_x^{i1} + (1 - n) \partial_x z_1, \quad (3.16)$$

$$n k_y^{r1} = k_y^{i1} + (1 - n) \partial_y z_1, \quad (3.17)$$

análogamente, tenemos para la segunda superficie que

$$k_x^{r2} = n k_x^{i2} + (n - 1) \partial_x z_2, \quad (3.18)$$

$$k_y^{r2} = n k_y^{i2} + (n - 1) \partial_y z_2. \quad (3.19)$$

Siendo $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$ las sagitas de la primera y segunda superficie. En aproximación de lente

delgada, tenemos que $k_x^{r1} = k_x^{i2}$ y que $k_y^{r1} = k_y^{i2}$, de modo que tras sustituir (3.16) y (3.17) en (3.18) y (3.19), llegamos a que

$$k_x^{r2} = k_x^{i1} - (n - 1)\partial_x(z_1 - z_2), \quad (3.20)$$

$$k_y^{r2} = k_y^{i1} - (n - 1)\partial_y(z_1 - z_2), \quad (3.21)$$

si definimos las componentes del efecto prismático P_x y P_y como:

$$P_x = k_x^{r2} - k_x^{i1}, \quad (3.22)$$

$$P_y = k_y^{r2} - k_y^{i1}, \quad (3.23)$$

encontramos la siguiente expresión para la ley de Prentice [11], aplicada a una lente cuyas superficies refractoras presenten una forma arbitraria

$$P_x = -(n - 1)\partial_x(z_1 - z_2), \quad (3.24)$$

$$P_y = -(n - 1)\partial_y(z_1 - z_2). \quad (3.25)$$

Podemos apreciar que, en este caso, la dependencia del efecto prismático con las coordenadas de posición del punto P de la superficie de la lente, coordenadas (x, y) , es no lineal, y la no linealidad viene dada por las derivadas parciales de la sagita de las dos superficies z_1, z_2 , evaluadas en el punto P .

3.1.3 Matriz de Potencia Dióptrica Local (MPDL)

De acuerdo con las expresiones (3.24) y (3.25), el efecto prismático resultante de la refracción de un rayo en una lente oftálmica compuesta por una superficie de forma arbitraria tiene una dependencia no lineal con las coordenadas de posición del punto en el que estemos calculando dicho efecto prismático. Sin embargo, a nosotros nos interesaría encontrar una expresión matricial similar a la que tenemos en el caso de una lente esferotórica, ecuaciones ?? o ??. Para ello, consideremos un punto P , de la primera superficie de la lente oftálmica, cuyas coordenadas son (x^o, y^o, z^o) . Obviamente, en las proximidades de dicho punto podemos encontrar la siguiente expresión aproximada para la sagita $z(x, y)$ de la superficie

$$z(x, y) \simeq z^o + \partial_x z^o (x - x^o) + \partial_y z^o (y - y^o) + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 z^o (x - x^o)^2 + \partial_{yx}^2 z^o (x - x^o)(y - y^o) + \frac{1}{2} \partial_{yy}^2 z^o (y - y^o)^2. \quad (3.26)$$

Esta ecuación nos dice que, en las proximidades del punto P , podemos considerar que la superficie viene descrita por un paraboloide (ya que la superficie es cóncava en P , y por tanto $\partial_{xx}^2 z^o \partial_{yy}^2 z^o -$

$\partial_{xy}^2 z^\circ \partial_{xy}^2 z^\circ \geq 0$, de acuerdo con la Geometría Diferencial [?] , [9]). Esta propiedad común a todas las superficies, nos va a permitir caracterizar la superficie por medio de una matriz de potencia dióptrica local [10] .

De acuerdo con (3.24), (3.25) y (3.26), el efecto prismático que experimenta un rayo tras refractarse en un Q situado en las proximidades de P , viene dado por

$$P_x = -(n-1) (\partial_x(z_1^\circ - z_2^\circ) + \partial_{xx}^2(z_1^\circ - z_2^\circ)(x - x^\circ) + \partial_{yx}^2(z_1^\circ - z_2^\circ)(y - y^\circ)), \quad (3.27)$$

$$P_y = -(n-1) (\partial_y(z_1^\circ - z_2^\circ) + \partial_{yx}^2(z_1^\circ - z_2^\circ)(x - x^\circ) + \partial_{yy}^2(z_1^\circ - z_2^\circ)(y - y^\circ)). \quad (3.28)$$

De acuerdo con estas ecuaciones, podemos encontrar un punto en las proximidades de P , para el cual el rayo no sufre desviación. Las coordenadas (x^1, y^1) de dicho punto, que denominaremos *centro óptico local* [10] , satisfacen las ecuaciones

$$\partial_x \delta z^\circ + \partial_{xx}^2 \delta z^\circ (x^1 - x^\circ) + \partial_{yx}^2 \delta z^\circ (y^1 - y^\circ) = 0, \quad (3.29)$$

$$\partial_y \delta z^\circ + \partial_{yx}^2 \delta z^\circ (x^1 - x^\circ) + \partial_{yy}^2 \delta z^\circ (y^1 - y^\circ) = 0, \quad (3.30)$$

donde $\delta z^\circ = z_1^\circ - z_2^\circ$ que podemos escribir como

$$\partial_x \delta z^\circ = -\partial_{xx}^2 \delta z^\circ (x^1 - x^\circ) - \partial_{yx}^2 \delta z^\circ (y^1 - y^\circ), \quad (3.31)$$

$$\partial_y \delta z^\circ = -\partial_{xy}^2 \delta z^\circ (x^1 - x^\circ) - \partial_{yy}^2 \delta z^\circ (y^1 - y^\circ). \quad (3.32)$$

Sustituyendo (3.31) y (3.32) en las ecuaciones (3.24) y (3.25), encontraremos la siguiente expresión de la ley de Prentice

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = -(n-1) \begin{bmatrix} \partial_{xx}^2 \delta z^\circ & \partial_{yx}^2 \delta z^\circ \\ \partial_{yx}^2 \delta z^\circ & \partial_{yy}^2 \delta z^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x^1 - x^\circ) \\ (y^1 - y^\circ) \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Esta ecuación, nos indica que podemos caracterizar el comportamiento de una lente oftálmica, que presente superficies refractoras arbitrarias, por medio de una *matriz de potencia dióptrica local* [10] , definida como función de la posición en la superficie de la lente, según la siguiente expresión:

$$F(x, y) = (n-1) \begin{bmatrix} \partial_{xx}^2 \delta z & \partial_{yx}^2 \delta z \\ \partial_{yx}^2 \delta z & \partial_{yy}^2 \delta z \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

que corresponde a la matriz de potencia dióptrica de una lente oftálmica cuya primera superficie viene dada por el paraboloide osculador que define la segunda forma fundamental de la superficie alrededor del

punto P , y cuya segunda superficie esta dada por el paraboloido osculador correspondiente de la segunda superficie. En estas condiciones, el efecto prismático en P puede hallarse de acuerdo con la expresión matricial (3.33), expresión formalmente análoga a ??, aunque con dos diferencias fundamentales. En primer lugar, la matriz de potencia dióptrica local es función de la posición en la superficie de la lente, y por otra parte, en la ecuación (3.33), aparecen las coordenadas del centro óptico local (x_1, y_1) , mientras que en la ecuación ??, se ha escogido el sistema de coordenadas de modo que el centro óptico de la lente coincida con el origen de coordenadas. Además, de acuerdo con las ecuaciones (3.29), (3.30), se tiene que las coordenadas del centro óptico local son función de la posición en la superficie de la lente, mientras que en una lente esferotórica normal, dichas coordenadas son fijas.

Resulta interesante definir la siguiente magnitud vectorial

$$\begin{bmatrix} P_{xL} \\ P_{yL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x(z_1^o - z_2^o) - \partial_{xx}^2(z_1^o - z_2^o)x^o - \partial_{yx}^2(z_1^o - z_2^o)y^o \\ \partial_y(z_1^o - z_2^o) - \partial_{xy}^2(z_1^o - z_2^o)x^o - \partial_{yy}^2(z_1^o - z_2^o)y^o \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

que denominaremos *prisma local*, y que permite escribir la ecuación (3.33), de una forma análoga a ??, esto es

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xL} \\ P_{yL} \end{bmatrix} - (n-1) \begin{bmatrix} \partial_{xx}^2(z_1^o - z_2^o) & \partial_{yx}^2(z_1^o - z_2^o) \\ \partial_{xy}^2(z_1^o - z_2^o) & \partial_{yy}^2(z_1^o - z_2^o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o \\ y^o \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

estando relacionado el prisma local y las coordenadas del centro óptico local, por medio de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \partial_{xx}^2(z_1^o - z_2^o) & \partial_{yx}^2(z_1^o - z_2^o) \\ \partial_{xy}^2(z_1^o - z_2^o) & \partial_{yy}^2(z_1^o - z_2^o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xL} \\ P_{yL} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Otra propiedad interesante de la matriz de potencia dióptrica local es que sus elementos pueden obtenerse de la derivando las componentes del efecto prismático. En efecto, de acuerdo con las ecuaciones (3.24) y (3.25), puede comprobarse que

$$f_{xx} = -\partial_x P_x, \quad (3.38)$$

$$f_{xy} = -\partial_x P_y = -\partial_y P_x, \quad (3.39)$$

$$f_{yy} = -\partial_y P_y. \quad (3.40)$$

En resumen, dada una lente oftálmica, cuyas superficies refractoras presenten forma arbitraria, es posible una caracterización matricial de dicha lente por medio de la *matriz de potencia dióptrica local*. La matriz de potencia local puede definirse para cada punto P de la superficie de la lente, como la matriz de potencia que presenta la lente esferotórica equivalente formada por los paraboloides osculatrices de la

primera y segunda superficie de la lente en el punto P , definidos a través de la segunda forma fundamental de dichas superficies. De este modo el efecto prismático que aparece en el punto P , puede ser calculado mediante la aplicación de la ley de Prentice usando la matriz de potencia dióptrica local (3.33), teniendo en cuenta el centro óptico de la lente esferotórica equivalente, que hemos denominado *centro óptico local*. De un modo equivalente, podemos hallar el efecto prismático en P como la suma del efecto prismático resultante de la aplicación directa de la ley de Prentice usando la matriz de potencia dióptrica local más un *prisma local*, ecuación (3.36). Dicho prisma local está relacionado con la orientación de los paraboloides osculadores respecto a la dirección del eje de coordenadas OZ . La aplicación de estas ecuaciones a una lente progresiva es inmediata habida cuenta de que dicha lente está formada por una superficie refractora arbitraria (superficie progresiva) y por una superficie esferotórica corriente.

3.1.4 Potencia local de una lente con superficies refractoras arbitrarias

El conocimiento del efecto prismático producido en un punto cualquiera de la superficie de una lente oftálmica compuesta por superficies arbitrarias permite estudiar la refracción de un haz de rayos procedentes de un punto objeto sobre la superficie de la lente. Es bien conocido [4] que, en visión foveal, el ojo humano no utiliza simultáneamente toda la superficie de una lente oftálmica para observar un objeto determinado, debido al efecto de rotación ocular que permite cambiar continuamente la dirección de mirada. Este hecho ha sido ampliamente utilizado en el diseño de lentes oftálmicas y constituye el principio en el que descansa el funcionamiento de las lentes multifocales.

Para caracterizar el efecto de la rotación ocular se utiliza el esquema ya comentado en el capítulo anterior, de modo que se sitúa tras la lente oftálmica una pupila situada en la posición ocupada por el centro de rotación del ojo (aproximadamente de 25 a 27 mm por detrás del vértice de la segunda cara de la lente). En el diseño de lentes oftálmicas [7] este esquema es utilizado para estudiar la refracción de un haz de rayos que parte del punto objeto y pasa a través de dicha pupila, que actúa como diafragma de apertura del sistema, lo cual permite el cálculo de aberraciones y el consiguiente proceso de optimización del factor de forma de la lente oftálmica.

Como hemos visto, las ecuaciones (3.24) y (3.25) permiten el cálculo de la trayectoria de un rayo tras refractarse en una lente oftálmica formada por superficies refractoras arbitrarias, dentro del grado de aproximación adoptado. Existe por tanto la posibilidad de estudiar la refracción de un haz de rayos estrecho procedente de un mismo punto objeto en diversas zonas de la superficie de una lente oftálmica. Para ello consideremos la situación de la Fig. 3.2, en la cual tenemos un punto objeto O del cual parte un haz de rayos. Uno de estos rayos se refracta en un punto P sobre la primera superficie de la lente. En

general, vamos a considerar que este rayo tras refractarse va a atravesar la púpila situada en el centro de rotación del ojo. Por consiguiente, el rayo que pasa por P le denominaremos *rayo principal*. También consideraremos que la extensión espacial del haz va a ser limitada por dicha púpila y por tanto el haz incidente sobre el sistema va a estar limitado espacialmente, lo cual nos permite hablar de potencia local. La situación es completamente análoga a la que se tiene al estudiar aberraciones en lentes oftálmicas para distintos ángulos de visión.

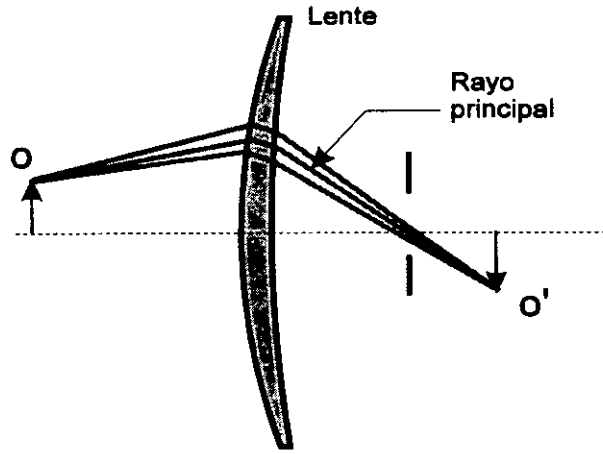


Figura 3.2. Trazado gráfico de un conjunto de rayos que, partiendo de un punto objeto O , llegan a un punto imagen O' tras atravesar el sistema óptico compuesto por una lente oftálmica y una pupila situada en la posición del centro de rotación del ojo.

Si las coordenadas de O son (u, w, z_0) y las de P (x_0, y_0, z_1^0) , tenemos que el vector de dirección del rayo principal incidente sobre la lente viene dado por la expresión

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \frac{(x_0 - u, y_0 - w, z_1^0 - z_0)}{\sqrt{(x_0 - u)^2 + (y_0 - w)^2 + (z_1^0 - z_0)^2}}, \quad (3.41)$$

donde el signo $\hat{\mathbf{k}}_i$ indica el vector director del rayo principal incidente. Para ser consistentes con las hipótesis realizadas en el desarrollo de la ley de Prentice generalizada, vamos a suponer un punto objeto O situado a una distancia de la lente tal que $z_0 \geq z_1^0$ y que $z_0^2 \geq (x_0 - u)^2 + (y_0 - w)^2$ de modo que podemos escribir el vector del rayo principal incidente como

$$\hat{\mathbf{k}}_i \simeq \left(\frac{x_0 - u}{z_0}, \frac{y_0 - w}{z_0}, 1 \right). \quad (3.42)$$

Supongamos a continuación un punto P^* situado en la superficie de la primera cara de la lente no

muy alejado del punto P . Si las coordenadas de P^* son (x, y, z_1) las coordenadas del vector director del rayo que partiendo de O incide en la lente en el punto P^* vienen dadas por la expresión

$$\mathbf{k}_i \simeq \left(\frac{x - u}{z_0}, \frac{y - w}{z_0}, 1 \right), \quad (3.43)$$

de modo que podemos escribir (3.43) de la siguiente forma

$$\mathbf{k}_i = \widehat{\mathbf{k}}_i + \left(\frac{x - x_0}{z_0}, \frac{y - y_0}{z_0}, 0 \right). \quad (3.44)$$

Por otra parte, de acuerdo con la ley de Prentice generalizada, tenemos que

$$k_{rx} = \widehat{k}_{ix} + \frac{x - x_0}{z_0} + (1 - n) \partial_x \delta z, \quad (3.45a)$$

$$k_{ry} = \widehat{k}_{iy} + \frac{y - y_0}{z_0} + (1 - n) \partial_y \delta z, \quad (3.45b)$$

siendo $\delta z = z_1 - z_2$.

De acuerdo con [?] , si $W(x, y, x_0, y_0)$ es la función que describe al frente de onda refractado a la salida de la lente (teniendo en cuenta las aproximaciones efectuadas para derivar la ley de Prentice generalizada), puede comprobarse que

$$k_{rx} = -\partial_x W, \quad (3.46)$$

$$k_{ry} = -\partial_y W, \quad (3.47)$$

(donde se ha tenido en cuenta que consideramos el índice de refracción del medio a la salida de la lente como 1) de modo que, integrando las ecuaciones (3.45a) y (3.45b), obtenemos la siguiente expresión para el frente de onda refractado

$$W(x, y, x_0, y_0) = W_0 - \widehat{k}_{ix}x - \widehat{k}_{iy}y - \frac{(x - x_0)^2}{2z_0} - \frac{(y - y_0)^2}{z_0} + (n - 1) \delta z, \quad (3.48)$$

siendo W_0 una constante de integración.

En el marco de aproximación en que nos encontramos la ecuación (3.48) va a representar el frente de onda asociado con un pincel de rayos astigmático, con las correspondientes focales de Sturm. La distancia entre el punto de incidencia del rayo principal, P , y ambas focales de Sturm va a venir dada por la inversa de las curvaturas principales κ_1 y κ_2 de $W(x, y, x_0, y_0)$ en el punto P . De este modo, cuando consideremos un punto objeto situado en el infinito, podemos caracterizar cada punto de la superficie

de la lente por las curvaturas principales del frente de onda refractado $W(x, y, x_0, y_0)|_{z_0 \rightarrow \infty}$ en dicho punto, o lo que es equivalente, podemos caracterizar cada punto de la lente por una *potencia esférica local* $S(x, y)$ y una *potencia cilíndrica local* $C(x, y)$ dadas por las expresiones

$$S(x, y) = \kappa_2|_{z_0 \rightarrow \infty}, \quad (3.49a)$$

$$C(x, y) = \kappa_1 - \kappa_2|_{z_0 \rightarrow \infty}, \quad (3.49b)$$

donde supondremos que $\kappa_1 \geq \kappa_2$, esto es tomaremos el convenio de dar al cilindro el signo positivo.

De acuerdo con la Geometría Diferencial [?] , [9] , la expresión de los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie definida por la función $W(x, y, x_0, y_0)$ viene dada por

$$E = 1 + p^2, \quad (3.50a)$$

$$F = pq, \quad (3.50b)$$

$$G = 1 + q^2, \quad (3.50c)$$

donde $p = \partial_x W$ y $q = \partial_y W$. Análogamente, puede demostrarse que los coeficientes de la segunda forma fundamental vienen dados por el conjunto de ecuaciones

$$L = \frac{r}{1 + p^2 + q^2}, \quad (3.51a)$$

$$M = \frac{s}{1 + p^2 + q^2}, \quad (3.51b)$$

$$N = \frac{t}{1 + p^2 + q^2}, \quad (3.51c)$$

donde $r = \partial_{xx}^2 W$, $s = \partial_{xy}^2 W$ y $t = \partial_{yy}^2 W$. Sustituyendo los valores de W en las ecuaciones anteriores, obtenemos las siguientes expresiones para los coeficientes de la primera

$$E = 1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x - x_0)}{z_0} \right)^2, \quad (3.52a)$$

$$F = \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x - x_0)}{z_0} \right) \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y - y_0)}{z_0} \right), \quad (3.52b)$$

$$G = 1 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y - y_0)}{z_0} \right)^2, \quad (3.52c)$$

y de la segunda forma fundamental

$$L = \frac{f_{xx} - \frac{1}{z_0}}{\sqrt{\left(1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0}\right)^2 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0}\right)^2\right)}}, \quad (3.53a)$$

$$M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{\left(1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0}\right)^2 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0}\right)^2\right)}}, \quad (3.53b)$$

$$N = \frac{f_{yy} - \frac{1}{z_0}}{\sqrt{\left(1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0}\right)^2 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0}\right)^2\right)}}. \quad (3.53c)$$

Por otro lado, las curvaturas gaussiana y media pueden encontrarse a partir de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamentales de acuerdo con las siguientes ecuaciones [?], [9]

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (3.54a)$$

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}, \quad (3.54b)$$

de modo que tenemos que, en nuestro caso

$$K = \frac{\left(f_{xx} - \frac{1}{z_0}\right)\left(f_{yy} - \frac{1}{z_0}\right) - f_{xy}^2}{\left(1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0}\right)^2 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0}\right)^2\right)}, \quad (3.55a)$$

$$H = \frac{\left(1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0}\right)^2\right)\left(f_{yy} - \frac{1}{z_0}\right)}{2\left(1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0}\right)^2 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{\left(1 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0}\right)^2\right)\left(f_{xx} - \frac{1}{z_0}\right)}{2\left(1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0}\right)^2 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{2f_{xy} \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0} \right) \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0} \right)}{2 \left(1 + \left(\hat{k}_{ix} + P_x + \frac{(x-x_0)}{z_0} \right)^2 + \left(\hat{k}_{iy} + P_y + \frac{(y-y_0)}{z_0} \right)^2 \right)^{3/2}}, \quad (3.55b)$$

una vez conocidas las expresiones para H y K es posible encontrar las curvaturas principales a partir de las ecuaciones

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \quad (3.56a)$$

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad (3.56b)$$

de manera que

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad (3.57a)$$

$$\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad (3.57b)$$

con lo cual encontramos que

$$S(x, y) = H - \sqrt{H^2 - K} \Big|_{z_0 \rightarrow \infty}, \quad (3.58a)$$

$$C(x, y) = 2\sqrt{H^2 - K} \Big|_{z_0 \rightarrow \infty}. \quad (3.58b)$$

Sustituyendo (3.55a) y (3.55b) en las ecuaciones anteriores, encontramos las siguientes expresiones para la potencia esférica y cilíndrica local

$$S = \frac{f_{xx} \left(1 + (\hat{k}_{ry})^2 \right) + f_{yy} \left(1 + (\hat{k}_{rx})^2 \right) - 2f_{xy} \hat{k}_{ry} \hat{k}_{rx}}{2 \left(1 + \hat{k}_{rx}^2 + \hat{k}_{ry}^2 \right)^{3/2}} - C, \quad (3.59a)$$

$$C = \sqrt{\frac{[f_{xx} (1 + (\hat{k}_{ry})^2) + f_{yy} (1 + (\hat{k}_{rx})^2) - 2f_{xy} \hat{k}_{ry} \hat{k}_{rx}]^2}{(1 + \hat{k}_{rx}^2 + \hat{k}_{ry}^2)^3}} - \frac{4(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)}{(1 + \hat{k}_{rx}^2 + \hat{k}_{ry}^2)}, \quad (3.59b)$$

donde $\hat{k}_{rx} = \hat{k}_{ix} + P_x$ y $\hat{k}_{ry} = \hat{k}_{iy} + P_y$ son las coordenadas del vector director del rayo principal refractado, de acuerdo con la ley de Prentice generalizada. Sin embargo, de acuerdo con las aproximaciones efectuadas al principio del capítulo, tenemos que $(\hat{k}_{rx})^2 \ll 1$ y que $(\hat{k}_{ry})^2 \ll 1$ de modo que podemos escribir las ecuaciones anteriores de la siguiente forma aproximada

$$S = \frac{\text{tr} F - C}{2}, \quad (3.60a)$$

$$C = \sqrt{\text{tr } F^2 - 4 \det F}, \quad (3.60b)$$

donde $\text{tr } F = f_{xx} + f_{yy}$ y $\det F = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

Las ecuaciones anteriores son formalmente análogas a las ecuaciones de transformación de Long presentadas en el capítulo anterior, con la diferencia de que, en este caso, f_{xx} , f_{yy} y f_{xy} son función de la posición sobre la superficie de la lente oftálmica. Con lo cual podemos decir que en nuestro grado de aproximación los elementos de la matriz de potencia dióptrica están relacionados con la potencia local a lo largo de la superficie de una lente oftálmica compuesta por superficies refractoras arbitrarias.

3.1.5 Expresión tensorial para la ley de Prentice generalizada

Las expresiones (3.24) y (3.25) permiten el cálculo de los efectos prismáticos de una lente oftálmica con superficies refractoras arbitrarias dadas por las correspondientes sagitas $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$. Por otro lado, dada una función real $f(x_1, x_2)$ de dos variables reales x_1 y x_2 , podemos expandir dicha función en serie de Taylor [5] alrededor de un punto (x_1^0, x_2^0) , de modo que

$$f = \chi^0 + \sum_{i=1}^2 \chi_i^1 t_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \chi_{ij}^2 t_i t_j + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \chi_{ijk}^3 t_i t_j t_k + \dots \quad (3.61)$$

Donde $\chi^0 = f(x_1^0, x_2^0)$, $t_i = x_i - x_i^0$, y $\chi_{i_1 i_2 \dots i_n}^n$ con $n > 1$, vienen dados por

$$\chi_{i_1 i_2 \dots i_n}^n = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_n} f(x_1^0, x_2^0), \quad (3.62)$$

representan las coordenadas de un tensor covariante [6] de orden n . Aplicando el desarrollo de Taylor (3.61) alrededor del punto $(0, 0)$ a las sagitas z_1 , z_2 , y sustituyendo dichas expresiones en las ecuaciones (3.24) y (3.25), es inmediato obtener la siguiente expresión tensorial para la ley de Prentice generalizada

$$P_i = \left(\Delta_i^1 + \sum_{j=1}^2 \Delta_{ij}^2 x_j + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \Delta_{ijk}^3 x_j x_k + \frac{1}{3!} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 \Delta_{ijkm}^4 x_j x_k x_m + \dots \right), \quad (3.63)$$

donde los términos $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^n$ están relacionados con las funciones z_1 y z_2 de acuerdo con la expresión:

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}^n = (1 - n) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_n} (z_1 - z_2) |_{(0,0)}. \quad (3.64)$$

Un análisis de la ecuación (3.63), nos muestra que dicha ecuación puede dividirse en dos partes. Una parte *lineal*, que formarían los dos primeros términos de la ecuación (3.63), y a continuación una parte *no-lineal*, formada por el resto de los términos de la ecuación. Podríamos considerar por tanto, que el efecto prismático que nos encontramos en un punto de la superficie de una lente oftálmica formada por superficies refractoras arbitrarias como el que produciría una lente esferotórica cuyas superficies refractoras son los paraboloides osculadores de las ságitas z_1, z_2 en el punto $(0,0)$ de acuerdo con la expresión:

$$P_i^L = (1 - n)(\partial_i(z_1 - z_2)|_{(0,0)}) + \sum_{j=1}^2 \partial_i \partial_j(z_1 - z_2)|_{(0,0)} x_j, \quad (3.65)$$

más una serie de términos correctores no lineales, cuya importancia aumenta conforme nos acercamos al extremo de la lente.

3.2 Matriz de potencia dióptrica local en lentes asféricas

Como un primer ejemplo práctico, vamos a aplicar los conceptos estudiados en las secciones anteriores a lentes oftálmicas con superficies refractoras asféricas. La utilización de tales lentes en la practica oftálmica se ha incrementado considerablemente en los últimos tiempos, debido a la mejora en las técnicas de fabricación de las mismas. El uso de una lente asférica, presenta dos ventajas respecto a la utilización de una lente convencional, en primer lugar permite la compensación de las aberraciones más importantes de las lentes oftálmicas, el astigmatismo oblicuo y el error de potencia para un rango de potencias superior al que permiten las lentes esféricas. En segundo lugar, para una potencia determinada, es posible encontrar una lente asférica que compense el astigmatismo con superficies más planas que la lente esférica correspondiente, lo cual se traduce en una ganancia estética así como en una reducción de peso, que en algunos casos [7], puede llegar al 25%. Aunque en general, se denomina lente asférica a toda lente monofocal con una superficie refractora asférica, en la práctica, las superficies utilizadas son conicoides, esto es superficies generadas por rotación de una curva cónica. En este epigrafe, vamos a limitar nuestro estudio a lentes asféricas con superficies cónicas.

En general [4], podemos describir una superficie asférica por medio de una carta de Monge, $(x, y, z(x, y))$, de modo que la sagita de la superficie viene dada por la expresión

Tabla 3.1 Tipos de superficies esféricas según el valor del coeficiente de asfericidad.

Valor de p	Tipo de superficie
$-\infty < p < 0$	Hipérboloide
$p = 0$	Paraboloide
$0 < p < 1$	Elipsoide oblato
$p = 1$	Esfera
$1 < p < +\infty$	Elipsoide prolato

$$z(x, y) = \frac{R - \sqrt{R^2 - p(x^2 + y^2)}}{p}, \quad (3.66)$$

en esta expresión, R representa el radio de la superficie, mientras que p es el denominado *coeficiente de asfericidad del conicoide* y nos indica el tipo de curva cónica que estamos utilizando según indica la Tabla 3.1. Cuanto más se aleje el valor de p de 1, tanto más esférica es la curva de la superficie, de modo que las curvas más planas son aquellas con menor valor de p y las más curvas son aquellas que tienen valores de p más elevados. Una interesante propiedad de las lentes esféricas puede derivarse del desarrollo en serie de Taylor de la ecuación (3.66)

$$z(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R} + \frac{1}{8} \frac{p(x^2 + y^2)^2}{R^3} + O((x^2 + y^2)^2). \quad (3.67)$$

Donde se puede ver que, en primera aproximación todas las superficies cónicas pueden aproximarse a un paraboloide, con independencia del valor del coeficiente de asfericidad. Más adelante haremos uso de esta conocida propiedad de las superficies cónicas.

A continuación, vamos a utilizar la expresión (3.66) para derivar la expresión generalizada de la ley de Prentice para lentes esféricas, haciendo uso de las ecuaciones (3.24) y (3.25). Vamos a considerar lentes biasféricas, esto es, lentes cuyas dos superficies son esféricas con dos coeficientes de asfericidad distintos para cada cara de la lente, aunque más tarde al analizar casos concretos nos limitemos a considerar lentes con una única superficie esférica, de acuerdo con lo que ocurre en la práctica. En estas condiciones, la sustitución de la función (3.66) en las ecuaciones (3.24) y (3.25) conduce a las siguientes expresiones:

$$P_x = (1 - n) \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 - p_1(x^2 + y^2)}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 - p_2(x^2 + y^2)}} \right) x, \quad (3.68)$$

$$P_y = (1 - n) \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 - p_1(x^2 + y^2)}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 - p_2(x^2 + y^2)}} \right) x. \tag{3.69}$$

A partir de las cuales puede calcularse el módulo del efecto prismático, obteniéndose que

$$P = (1 - n) \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 - p_1(x^2 + y^2)}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 - p_2(x^2 + y^2)}} \right) \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{3.70}$$

puede deducirse de esta expresión que el módulo del efecto prismático en lentes esféricas presenta simetría rotacional en la superficie de la misma. Para estudiar como se comporta esta función, hemos representado (Fig. 3.3) el modulo del efecto prismático en función de la distancia al centro de la lente $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ para varios valores del coeficiente de asféricidad en lentes de potencia +7 D, +5 D, -5 D, y -7 D, respectivamente. En todos los casos, la superficie esférica de la lente es la superficie más curvada correspondiente a la primera cara en la lente positiva y a la segunda en la negativa), mientras

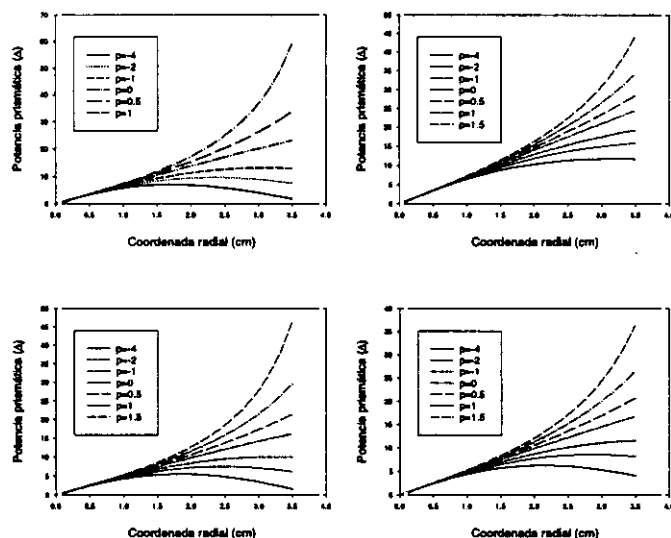


Figura 3.3. Modulo del efecto prismático presentado por diversas lentes oftálmicas esféricas de potencia +7 D, +5 D, -5 D y -7 D para distintos valores del coeficiente de asfericidad.

que la otra superficie se ha mantenido esférica ($p = 1$). En ambas figuras, podemos ver como existen discrepancias entre la ley de Prentice (que predice una relación lineal entre el valor del efecto prismático y la distancia al centro de la lente) y los resultados obtenidos por medio de (3.70). Como puede apreciarse en estas gráficas Fig. 3.3, la ley de Prentice solo se cumple en el caso de que el coeficiente de asfericidad sea igual a cero, lo cual se correspondería con una parábola. Esto es así debido a que la otra superficie de la lente aunque es esférica, tiene un radio de curvatura suficientemente grande como para que la sagita de la superficie se corresponda con el primer término del desarrollo en serie que aparece en la parte derecha de la ecuación (3.67), comportandose a efectos prácticos como una superficie parabólica.

Ya hemos visto que los elementos de la matriz de potencia dióptrica local se corresponden con las derivadas parciales de las componentes del efecto prismático. De este modo, podemos calcular las componentes de la matriz de potencia dióptrica de una lente esférica derivando las ecuaciones (3.68) y (3.69), de manera que

$$f_{xx} = (n - 1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + (n - 1) \left(\frac{p_1}{\rho_2^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right) x^2, \quad (3.71)$$

$$f_{xy} = (n - 1) \left(\frac{p_1}{\rho_2^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right) xy, \quad (3.72)$$

$$f_{yy} = (n - 1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + (n - 1) \left(\frac{p_1}{\rho_2^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right) y^2, \quad (3.73)$$

siendo

$$\rho_i = \sqrt{R_i^2 - p_i (x^2 + y^2)}, \quad i=1,2 \quad (3.74)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, podemos encontrar la distribución de la potencia esférica $S(x, y)$, cilíndrica $C(x, y)$ y el eje del cilindro $\alpha(x, y)$, utilizando las ecuaciones de Long (citar ecuaciones capítulo 1), de manera que llegamos a las siguientes expresiones

$$S(x, y) = (n - 1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right), \quad (3.75)$$

$$C(x, y) = (n - 1) \left(\frac{p_1}{\rho_2^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right) r^2, \quad (3.76)$$

$$\alpha(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \quad (3.77)$$

las cuales nos indican, que para una lente oftálmica esférica, la distribución de potencias esférica y cilíndrica presenta simetría de revolución, orientándose el eje del cilindro en la dirección radial. Para ilustrar este hecho, hemos representado la distribución de potencias esférica y cilíndrica para una lente oftálmica esférica de potencia +5 D con diferentes coeficientes de asfericidad para la superficie más curva de la lente.

3.3 Matriz de potencia dióptrica local en lentes asferóticas

En óptica oftálmica, la corrección del astigmatismo ocular, se lleva a cabo utilizando lentes con superficies tóricas, de modo que la potencia de la lente sea diferente en cada una de las direcciones radiales que unen el centro de la lente con la periferia de la misma, compensando de este modo el astigmatismo ocular. Debido a las mejoras en las técnicas de fabricación de superficies ópticas empleadas por la industria de lentes oftálmicas, actualmente es posible encontrar lentes correctoras del astigmatismo con superficies asferóticas.

Al igual que en el apartado anterior, nosotros vamos a centrar el estudio de lentes asferóticas por medio de la matriz de potencia dióptrica local a aquellas lentes cuyas secciones principales son curvas cónicas.

3.3.1 Descripción de una superficie asferótica cónica

Para obtener la ecuación de una superficie asferótica cónica, partimos de la ecuación de una curva esférica cónica

$$z(x) = \frac{R - \sqrt{R^2 - px^2}}{p}, \quad (3.78)$$

que puede escribirse como

$$z(x) = \frac{R}{p} - \sqrt{\left(\frac{R}{p}\right)^2 - \frac{x^2}{p}}, \quad (3.79)$$

de modo que podemos realizar el cambio de variable $a = R/p$ y $u = x/\sqrt{p}$ obteniéndose que

$$z(x) = a - \sqrt{a^2 - u^2}, \quad (3.80)$$

que se corresponde con la ecuación de una circunferencia.

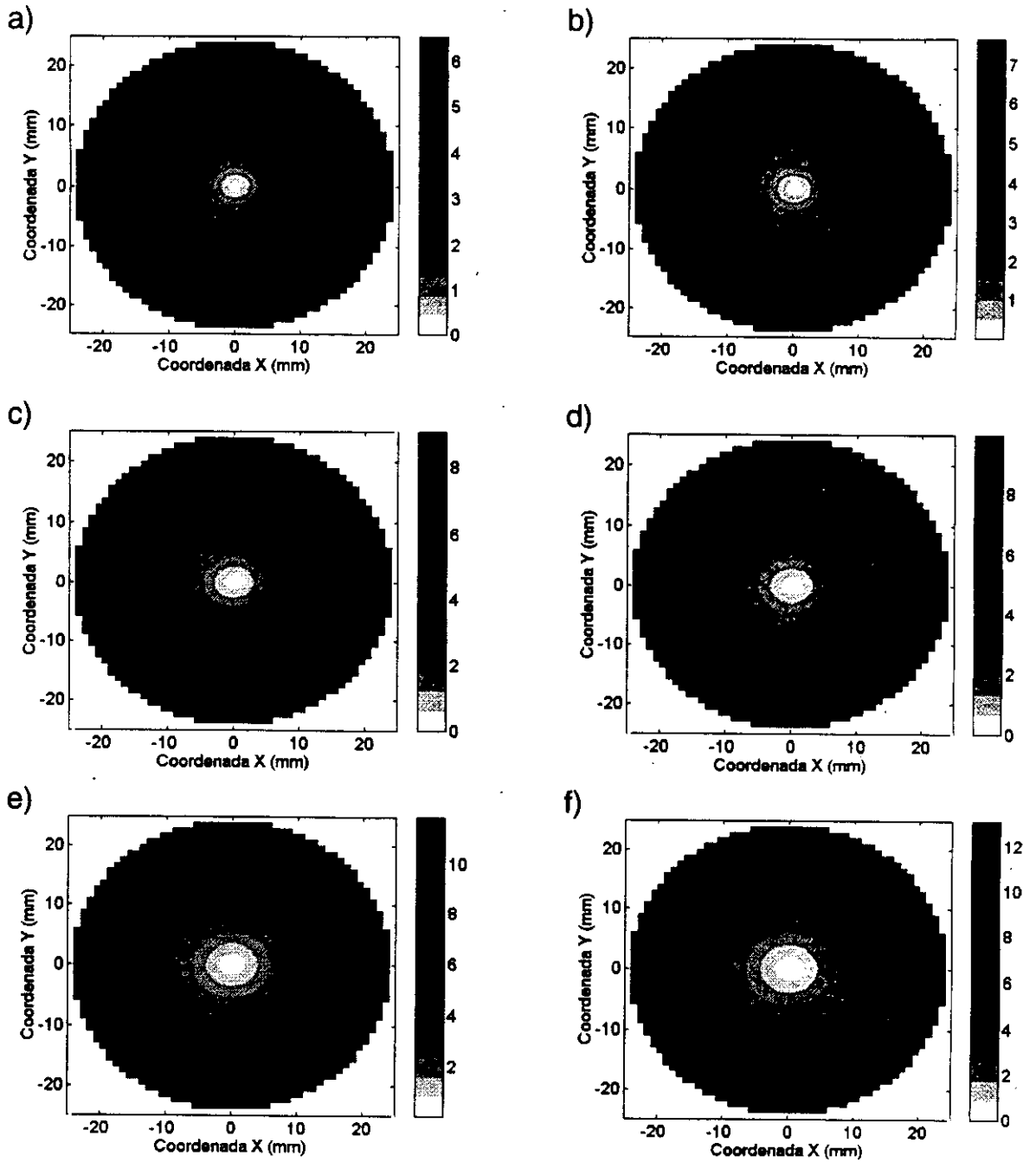


Figura 3.4. Representación de la distribución de la potencia esférica, a), c) y d) y cilíndrica b), d) y f) en una lente esférica de +5 D de potencia para distintos valores del coeficiente de asfericidad (-2, 0.5 y 1).

Por otro lado, la ecuación del toro en coordenadas cartesianas viene dada por la siguiente ecuación

$$z(u, v) = a_1 - \sqrt{\left(a_1 - a_2 + \sqrt{a_2^2 - u^2}\right)^2 - v^2}, \quad (3.81)$$

deshaciendo el cambio de variables $a_1 = R_1 / p_1$, $a_2 = R_2 / p_2$, $u = y / \sqrt{p_2}$ y $v = x / \sqrt{p_1}$, se obtiene la siguiente expresión

$$z(x, y) = \frac{R_1}{p_1} - \sqrt{\left(\frac{R_1}{p_1} - \frac{R_2}{p_2} + \sqrt{\left(\frac{R_2}{p_2}\right)^2 - \frac{y^2}{p_2}}\right)^2 - \frac{x^2}{p_1}}, \quad (3.82)$$

ecuación que puede escribirse de un modo más simple como

$$z(x, y) = \frac{R_1 - \sqrt{\left(R_1 - p_1 \left(\frac{R_2 - \sqrt{R_2^2 - p_2 y^2}}{p_2}\right)\right)^2 - p_1 x^2}}{p_1}. \quad (3.83)$$

Esta es la ecuación propuesta para una superficie atórica. Puede comprobarse que, si $x = 0$, (3.83), queda como

$$z(0, y) = \frac{R_2 - \sqrt{R_2^2 - p_2 y^2}}{p_2}, \quad (3.84)$$

mientras que si $y = 0$, entonces tenemos que

$$z(x, 0) = \frac{R_1 - \sqrt{R_1^2 - p_1 x^2}}{p_1}, \quad (3.85)$$

siendo por tanto las secciones principales de la curva ((3.83)), sendas curvas asféricas con radios y coeficientes de asfericidad distintos.

A continuación vamos a estudiar algunos casos particulares de la ecuación ((3.83)). En primer lugar, puede comprobarse trivialmente que si $p_1 = p_2 = 1$, tenemos que

$$z(x, y) = R_1 - \sqrt{\left(R_1 - R_2 + \sqrt{R_2^2 - y^2}\right)^2 - x^2}, \quad (3.86)$$

que se corresponde con la ecuación normal de una superficie tórica.

Por otro lado, podemos realizar el siguiente desarrollo en serie en el segundo termino de la ecuación

(3.83)

$$z(x, y) \simeq \frac{R_1 - \sqrt{\left(R_1 - p_1 \left(\frac{y^2}{2R_2} - \frac{p_2^2 y^4}{8R_2^3}\right)\right)^2 - p_1 x^2}}{p_1}, \quad (3.87)$$

de modo que si $p_2 = 0$, tenemos que

$$z(x, y) = \frac{R_1 - \sqrt{\left(R_1 - p_1 \left(\frac{y^2}{2R_2}\right)\right)^2 - p_1 x^2}}{p_1}, \quad (3.88)$$

que puede escribirse como

$$z(x, y) = \frac{R_1 - \left(R_1 - p_1 \left(\frac{y^2}{2R_2}\right)\right) \sqrt{1 - \frac{p_1 x^2}{\left(R_1 - p_1 \left(\frac{y^2}{2R_2}\right)\right)^2}}}{p_1}, \quad (3.89)$$

ecuación que también admite un desarrollo en serie de potencias, de modo que

$$z(x, y) \simeq \frac{y^2}{2R_2} + \frac{x^2}{2 \left(R_1 - p_1 \left(\frac{y^2}{2R_2}\right)\right)} + \frac{p_1 x^4}{8 \left(R_1 - p_1 \left(\frac{y^2}{2R_2}\right)\right)^3}, \quad (3.90)$$

con lo cual, si $p_1 = 0$, se tiene finalmente que

$$z(x, y) \simeq \frac{y^2}{2R_2} + \frac{x^2}{2R_1}, \quad (3.91)$$

que se corresponde con un paraboloide tórico.

3.3.2 Efectos prismáticos en lentes asferóticas cónicas

Partiendo de la expresión generalizada de la ley de Prentice es posible calcular los efectos prismáticos para una lente asferótica cónica. Como un caso particular, vamos a suponer una lente positiva, compuesta por una primera superficie atórica de radios de curvatura R_{1a} , R_{1b} y con coeficientes de asfericidad p_a y p_b , y cuya segunda superficie es una superficie esférica con radio de curvatura R_2 y coeficiente de

asfericidad p_2 . En este caso,

$$\delta z = \frac{R_{1a} - \sqrt{\left(R_{1a} - p_a \left(\frac{R_{1b} - \sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2}}{p_b} \right) \right)^2 - p_a x^2}}{p_a} - \frac{R_2 - \sqrt{R_2^2 - p_2 (x^2 + y^2)}}{p_2}, \quad (3.92)$$

de modo que, aplicando la expresión generalizada de la ley de Prentice, se encuentran la siguientes expresiones para la componente horizontal y vertical del efecto prismático

$$P_x = (1-n) \left\{ \frac{x}{\sqrt{\left(R_{1a} - \frac{p_a}{p_b} \left(R_{1b} - \sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2} \right) \right)^2 - p_a x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_2^2 - p_2 (x^2 + y^2)}} \right\}, \quad (3.93)$$

$$P_y = (1-n) \left\{ \frac{-y \left(\frac{p_b R_{1a}}{p_a} - R_{1b} + \sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2} \right)}{\sqrt{(R_{1b}^2 - p_b y^2) \left[\left(R_{1a} - \frac{p_a}{p_b} \left(R_{1b} - \sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2} \right) \right)^2 - p_a x^2 \right]}} - \frac{y}{\sqrt{R_2^2 - p_2 (x^2 + y^2)}} \right\}. \quad (3.94)$$

Para ilustrar el comportamiento de los efectos prismáticos en una lente asferotórica cónica, hemos representado el módulo del efecto prismático para una lente asferotórica con curvaturas principales $C_{1a} = 8.5 D$, $C_{1b} = 9 D$ y $C_2 = -4.5 D$, esto es, una lente con potencia esférica $S = 4 D$ y cilíndrica $C = 0.5 D$, estando el eje del cilindro orientado a 0° . Como puede apreciarse claramente en la figura (Fig. 3.5), la simetría rotacional que presentaban las lentes asféricas normales desaparece, y la distribución del módulo de la potencia prismática sobre la superficie de la lente se orienta según los meridianos principales, que en este caso coinciden con los ejes de coordenadas al ser una lente orientada a 0° .

3.3.3 La matriz de potencia dióptrica local en lentes asferotóricas cónicas

Una vez conocidos las funciones $P_x(x, y)$ y $P_y(x, y)$ que nos dan las componentes horizontal y vertical

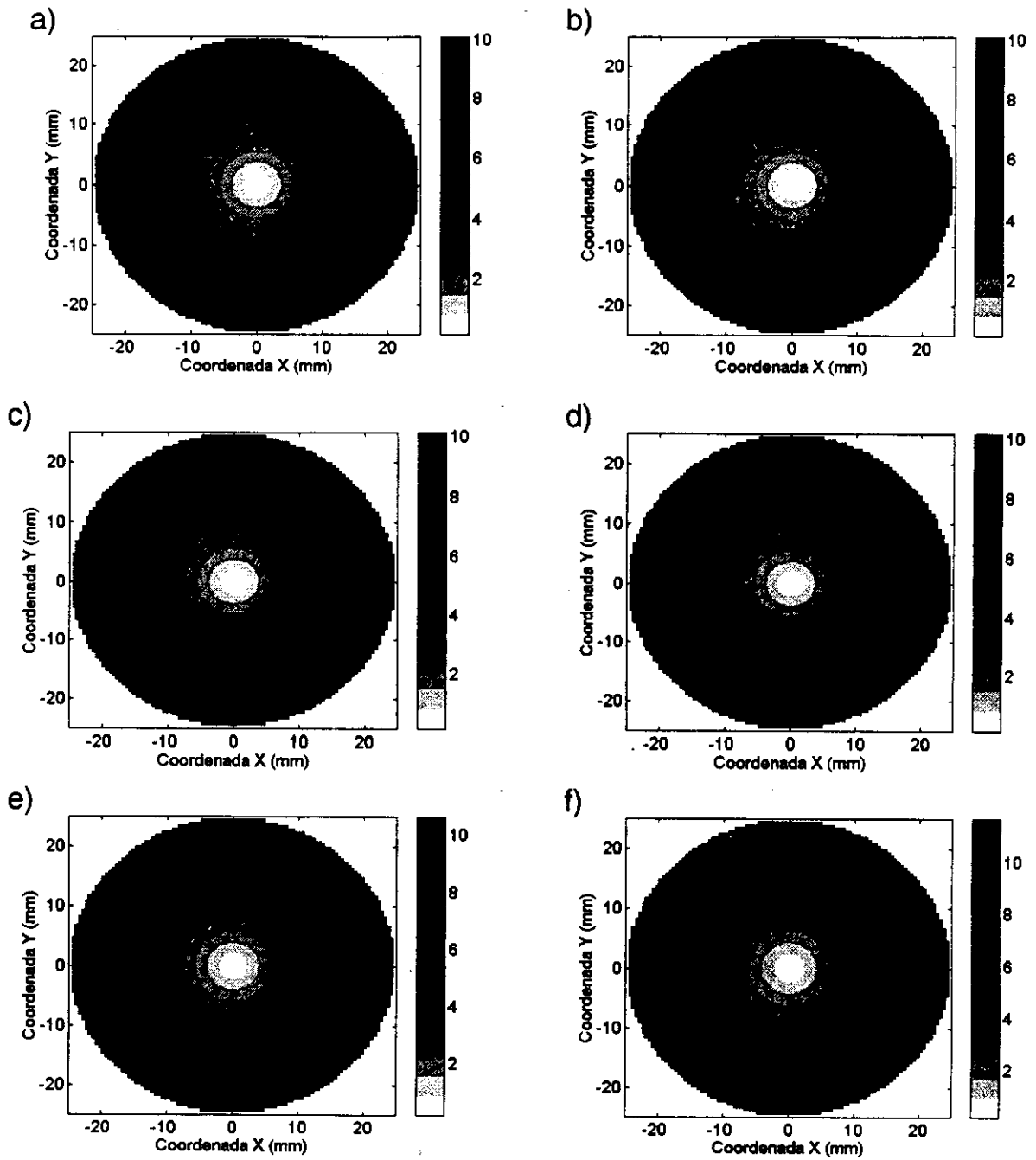


Figura 3.5. Modulo de la potencia prismática (en Δ) para una lente asférica $[4.0.5 \times 0^\circ]$ para distintos valores del coeficiente de asfericidad $p_{1a} = p_{1b}$. a) -3 , b) -2 , c) -1 , d) -0.5 , e) 0.5 y f) 1 .

de la potencia prismática a lo largo de la superficie de la lente, es posible encontrar los elementos de la matriz de potencia dióptrica local haciendo uso de las expresiones (3.38), (3.39) y (3.40). Así pues, volviendo al ejemplo utilizado en el apartado anterior, si derivamos las ecuaciones (3.93) y (3.94) se llega a las siguientes expresiones para los elementos de la matriz de potencia dióptrica local

$$f_{xx} = (n-1) \left(\frac{1}{\rho_{1a}} - \frac{1}{\rho_2} \right) + (n-1) \left(\frac{p_a}{\rho_{1a}^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right) x^2, \quad (3.95a)$$

$$f_{xy} = (n-1) \left(\frac{p_a \sqrt{\rho_{1a}^2 + p_a x^2}}{\sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2} \rho_{1a}^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right) xy, \quad (3.95b)$$

$$f_{yy} = (n-1) \left(\frac{\rho_{1b}}{\rho_{1a} \sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2}} - \frac{p_b y^2}{\rho_{1a} (R_b^2 - p_b y^2)} + \frac{\rho_{1b} y^2 (p_b \rho_{1a}^2 + p_a \sqrt{(R_b^2 - p_b y^2) (\rho_{1a}^2 + p_a x^2)})}{(\rho_{1a} \sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2})^3} - \frac{1}{\rho_2} - \frac{p_2 y^2}{\rho_2^3} \right) \quad (3.95c)$$

siendo

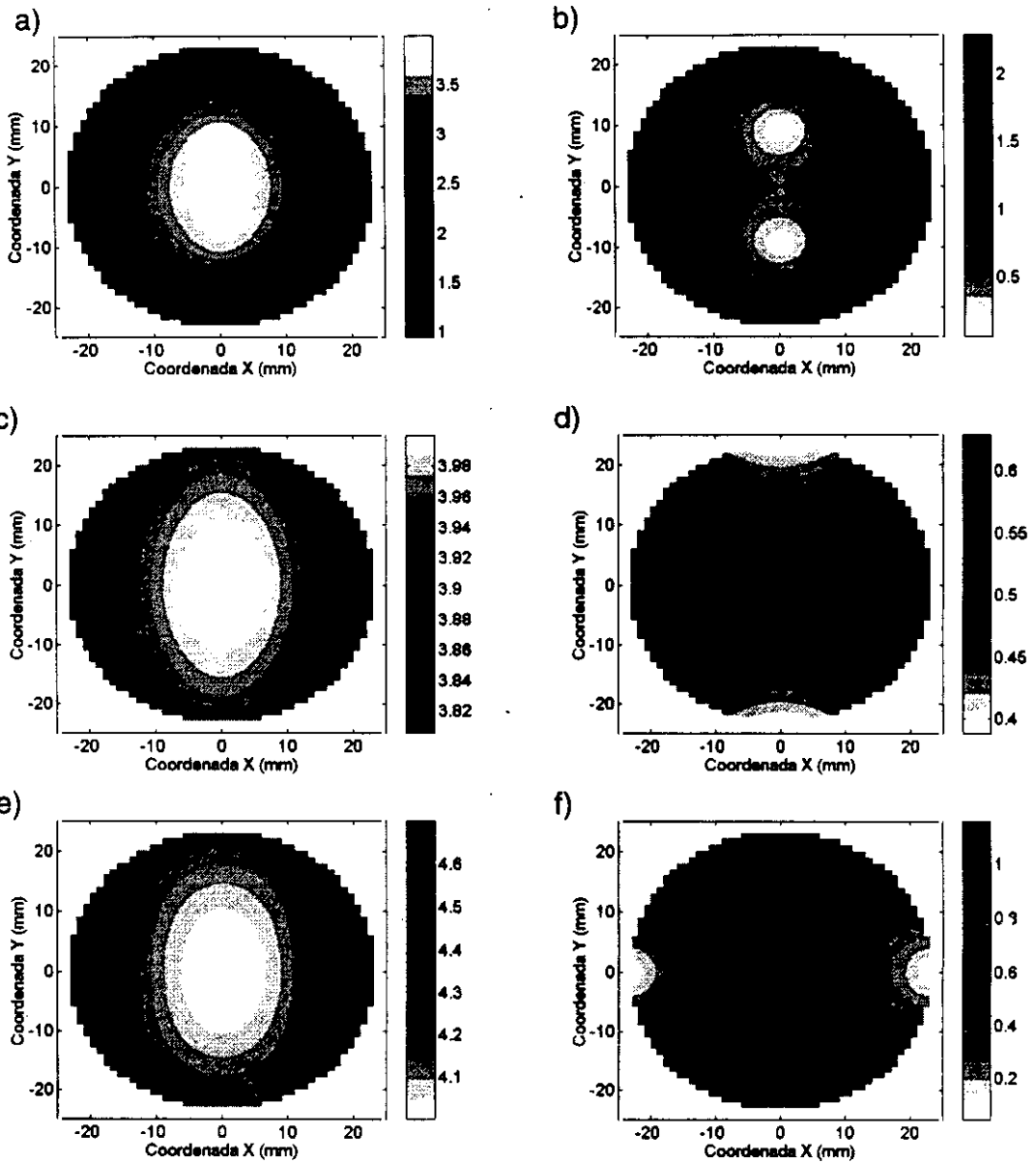
$$\rho_{1a} = \sqrt{\left(\left(R_{1a} - \frac{p_a}{p_b} \left(R_{1b} - \sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2} \right) \right)^2 - p_a x^2 \right)}, \quad (3.96)$$

$$\rho_{1b} = \frac{p_b}{p_a} R_{1a} - R_{1b} + \sqrt{R_{1b}^2 - p_b y^2} \quad (3.97)$$

y

$$\rho_2 = \sqrt{R_2^2 - p_2 x^2 - p_2 y^2}. \quad (3.98)$$

De nuevo vamos a ilustrar con un ejemplo los resultados obtenidos. En este caso, vamos a representar la distribución de los valores de la esfera y el cilindro (que pueden obtenerse inmediatamente a partir de los elementos de la matriz de potencia dioptrica local) para la lente asferotórica descrita en el apartado anterior. Se han escogido los coeficientes de asfericidad de modo que $p_a = p_b$ y que $p_2 = 1$, siendo, por tanto, la segunda superficie de la lente esférica. Los resultados obtenidos se recogen en la figura (ver ??).



Distribución de la potencia esférica y prismática a lo largo de una lente asferotórica $[4.0.5 \times 0^\circ]$ para distintos valores del coeficiente de asfericidad de la primera superficie $p_{1a} = p_{1b}$, a) y b) -2 , c) y d) -0.5 , e) y f) 0.5 .

Referencias

- [1] J. Marcen, J.A. Gómez-Pedrero, E. Bernabeu, "Thickness effect on the oblique astigmatism in ophthalmic lenses", *Optik* **101**, 157-160, (1996).
- [2] E. Hecht, A. Zajac, *Optica*, (2ª edición), Addison-Wesley, Wilmington, USA, (1974).
- [3] J. Casas, *Óptica*, (6ª edición), Editorial General Librería, Zaragoza, (1992).
- [4] M. Jalie, *The Principles of Ophthalmic Lenses*, (4ª edición), Editado por la BADO, Londres, (1988).
- [5] T.M. Apostol, *Análisis Matemático*, (2ª edición), Editorial Reverté, Barcelona, (1989).
- [6] D.C. Kay, *Cálculo Tensorial*, (1ª edición), Editorial Mc.Graw Hill, Madrid, (1990).
- [7] D.A. Atchison, "Spectacle lens design: a review", *Appl. Opt.*, **31**, 3579-3585, (1992).
- [8] M. Lipschutz, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, (1ª edición), Editorial Mc. Graw Hill, Madrid, (1990).
- [9] M. DoCarmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, (1ª edición), Alianza Editorial, Madrid, (1990).
- [10] J. Alonso, J.A. Gómez-Pedrero, E. Bernabeu, "Local dioptric power matrix in progressive addition lenses", *Ophthal. Physiol. Opt.*, **17**, 522-529, (1997).
- [11] J.A. Gómez-Pedrero, J. Alonso, E. Bernabeu, "A generalization of the Prentice's law for ophthalmic lenses with arbitrary refracting surfaces", *Ophthal. Physiol. Opt.*, **18**, 514-520, (1998).
- [12] J.A. Gómez-Pedrero, J. Alonso, E. Bernabeu, "Local dioptric power matrix and prismatic effects of spherical, aspherical and spherotical ophthalmic lenses", *SPIE proc.*, **3573**, 405-409, (1998).

Medida de la matriz de potencia dióptrica local de una lente oftálmica

En este capítulo se estudia un procedimiento de medida indirecta de la matriz de potencia dióptrica local utilizando las propiedades de la misma descritas en el capítulo anterior. El procedimiento adoptado en nuestro caso ha sido derivar los valores experimentales de la matriz de potencia dióptrica local a partir de la medida directa de la forma de las dos superficies refractoras de la lente. La forma de la lente se ha medido mediante un sistema automático de medida de la topografía superficial basado en un palpador mecánico y un sistema motorizado de desplazamiento de la lente. De este modo se ha obtenido la distribución superficial de potencia prismática y de los elementos de la matriz de potencia dióptrica local de varias lentes oftálmicas. También se lleva a cabo la comparación de este método de medida de la matriz de potencia dióptrica local con otro método distinto basado en la obtención de los efectos prismáticos locales a partir de la medida directa de la deflexión de un haz láser en cada punto de la superficie de la lente.

4.1 Medida de la MPDL a partir de la topografía superficial de una lente oftálmica.

De acuerdo con los resultados obtenidos en el capítulo anterior, es posible describir el comportamiento óptico de una lente oftálmica compuesta por superficies refractoras arbitrarias a partir de la expresión generalizada de la ley de Prentice por medio de la matriz de potencia dióptrica local. En efecto, dada una lente oftálmica de superficies refractoras definidas por sendas cartas de Monge $[x, y, z_i(x, y)]_{i=1,2}$ y de índice de refracción n , es posible obtener la siguiente relación entre las ságitas z_1 y z_2 de las superficies de la lente y los elementos de la matriz de potencia dióptrica local de acuerdo a las expresiones

$$f_{xx}(x, y) = (n - 1) \partial_{xx}(z_1 - z_2), \quad (4.1a)$$

$$f_{yy}(x, y) = (n - 1) \partial_{yy}(z_1 - z_2), \quad (4.1b)$$

$$f_{xy}(x, y) = (n - 1) \partial_{xy}(z_1 - z_2). \quad (4.1c)$$

Así pues podríamos plantear como método de medida indirecta de los elementos de la matriz de potencia dióptrica local de una lente oftálmica de índice de refracción conocido n , el medir la forma de las ságitas $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$ de las dos superficies refractoras de la lente y utilizar las expresiones

anteriores para obtener la matriz de potencia dióptrica local. Este ha sido el método de medida de la matriz de potencia dióptrica local adoptado en este trabajo de investigación. A continuación vamos a describir en profundidad el dispositivo experimental de medida de la matriz de potencia dióptrica local a partir de la topografía de las superficies refractoras, así como el proceso de medida.

4.1.1 Descripción del dispositivo experimental

Para la medida de la forma de una superficie existen numerosos métodos descritos en la literatura [1], [2], [3], [4] y [5]. Tales métodos pueden clasificarse atendiendo a criterios tales como naturaleza del método de medida (métodos ópticos, mecánicos, electromagnéticos, etc...), su carácter global (medida de la superficie en su conjunto) o local (medida de la superficie "punto a punto"), etc.... En nuestro caso, hemos optado por un método mecánico y local consistente en la utilización de un palpador para medir directamente en cada punto de la superficie la ságit $z(x, y)$, desplazando la superficie de la lente de un punto de medida a otro por medio de unos desplazadores lineales motorizados, dotados con motores eléctricos de paso fijo. Tanto el palpador como los desplazadores lineales se controlan por medio de un

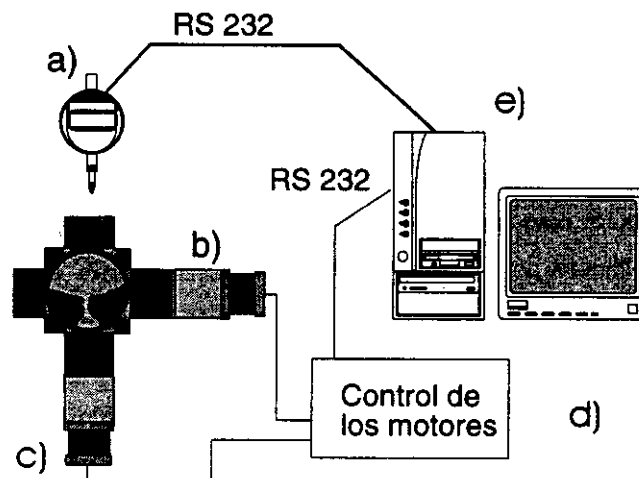


Figura 4.1. Esquema del dispositivo experimental empleado para la medida de superficies de lentes oftálmicas. Elementos: a) Palpador mecánico, b) y c) motores paso a paso, d) unidad de control y alimentación de los motores y e) computadora.

ordenador utilizando un programa escrito en MATLAB, de modo que el proceso de medida y adquisición de datos es automático.

En la Fig. 4.1 podemos ver un esquema del dispositivo experimental y en la Fig. 4.2 se puede apreciar

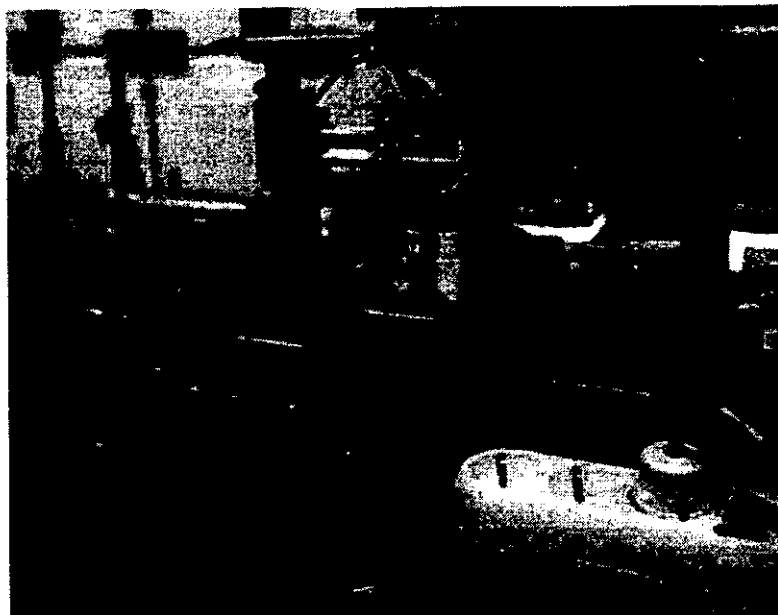


Figura 4.2. Fotografía del dispositivo mecánico de medida de superficies de lentes oftálmicas

una imagen del mismo. El sistema consta de los siguientes elementos:

- Dos desplazadores lineales motorizados de paso fijo de la firma Parker, modelo 102004BN. Estos desplazadores tienen un recorrido de 100 mm con una repetibilidad en el posicionamiento de $\pm 2 \mu\text{m}$ a lo largo de todo el recorrido. Cada paso de motor corresponde a un desplazamiento de $0.25 \mu\text{m}$.
- Un palpador mecánico digital de la firma Mitutoyo, modelo IDC 543-142, con capacidad para medir longitudes inferiores a 12.99 mm con una precisión en la medida de $\pm 1 \mu\text{m}$. El palpador digital puede controlarse por medio de un ordenador a través del puerto de comunicaciones RS-232.
- Un soporte de lentes, con capacidad para lentes oftálmicas de 60, 65 y 70 mm de diámetro.
- Un ordenador personal para el control del sistema.

Como puede verse en la Fig. 4.1 tanto el palpador mecánico como la unidad de control están conectados a dos puertos RS-232 del ordenador, de modo que el control de ambos aparatos se realiza enviando una serie de caracteres al puerto RS-232 correspondiente. Por ejemplo, para indicar al motor 1 que deberá moverse una longitud de 200 pasos en la dirección negativa, hay que enviar la siguiente cadena de caracteres al puerto RS-232: "ID-200\r IG\r", donde el símbolo "\r" representa un retorno de carro. En el apéndice A1 se recogen las instrucciones utilizadas para el control de los motores y del palpador

mecánico. Las instrucciones de movimiento de los motores han sido programadas en MATLAB como funciones independientes, de modo que es posible controlar los motores de modo manual en la ventana de comandos del entorno MATLAB o implementar estas funciones en una aplicación más general.

El funcionamiento del sistema de medida es sencillo. Por medio de los desplazadores motorizados se mueve la lente de manera que la punta del palpador mecánico recorra la superficie de la misma. La posición de la punta del palpador es siempre perpendicular al plano definido por el soporte de la lente Fig. 4.2. Al llegar al punto donde se quiere realizar la medida, los motores del desplazador se detienen y el ordenador toma en ese momento la lectura del palpador (que indica el valor de la ságitas del punto de la lente) y así sucesivamente hasta medir un número de puntos significativos en la superficie de la lente.

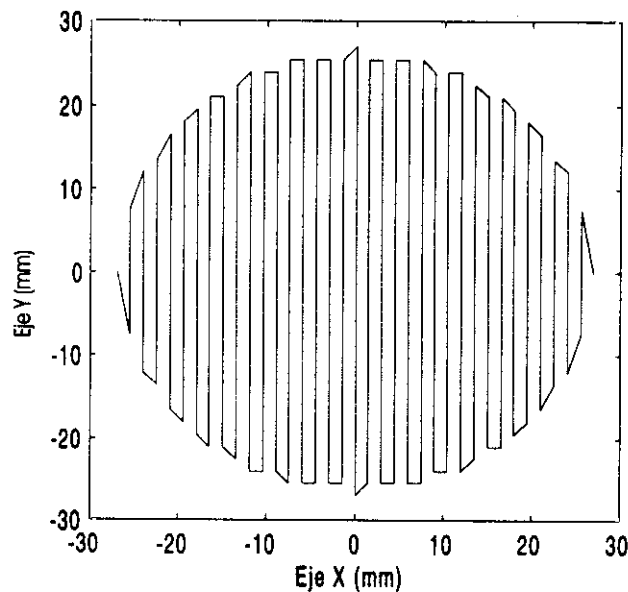


Figura 4.3. Trayectoria de la punta del palpador mecánico sobre la superficie de la lente oftálmica a medir

La figura (Fig. 4.4) representa el camino que recorre la punta del perfilómetro sobre la superficie de la lente. Este camino se ha escogido porque permite recorrer toda la superficie de la lente sin pasar dos veces por el mismo punto de medida, salvo el centro geométrico de la lente que es el punto inicial y final del recorrido. En estas condiciones, el proceso de medida que lleva a cabo el perfilómetro consta de los siguientes pasos:

- Se situa la lente a medir en el soporte
- Se llevan los motores a la posición inicial que se define como aquella en la que ambos motores se encuentran situados justamente a la mitad de su recorrido.
- Se situa la punta del comparador en el centro geométrico de la lente y se fija la altura cero como la altura del centro geométrico de la lente.
- Se mueve la lente con los motores, de modo que la punta del comparador siga el camino representado en la Fig. 4.3 sobre la superficie de la lente.
- Se guardan los datos en un fichero.
- Se repite el proceso para la cara posterior de la lente.

De esta forma, al acabar la medida, se tiene un conjunto discreto de puntos (x_i, y_i, z_i) que describen la superficie de la lente. Es evidente que cuanto más grande sea el número de puntos, mejor descrita estará la superficie y cuanto menor sea el número de puntos menor será el tiempo de medida. Es por tanto, necesario encontrar un compromiso entre el número de puntos y el tiempo de media. Por ello, hemos elegido el conjunto de puntos de modo que la distancia entre dos puntos a lo largo de los ejes OX y OY (según el sistema de referencia de la Fig. 4.3) sea de 1.5 mm. De este modo, se miden un total de 1009 puntos a lo largo de la superficie de la lente, con un tiempo de medida de unos 30 minutos.

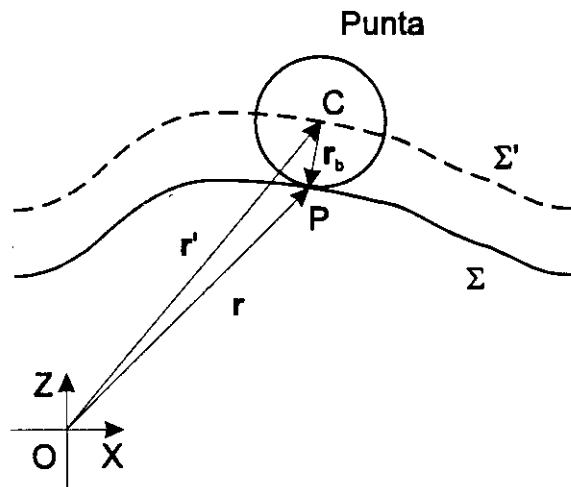


Figura 4.4. Recorrido de la punta del palpador sobre la superficie de la lente.

Como el palpador mecánico acaba en una punta esférica, los puntos que nosotros medimos correspon-

den realmente con las sucesivas posiciones del centro de curvatura de la punta esférica. Como puede verse en la figura (Fig. 4.4), el punto de contacto de la punta esférica del palpador y la superficie de la lente es aquel en el que coincide la dirección del vector normal de la superficie a medir, \mathbf{N}_1 y el vector que une el centro de curvatura de la punta con el punto de contacto \mathbf{r}_b . Si consideramos además la superficie Σ' descrita por las distintas posiciones del centro de curvatura de la bola, puede demostrarse en primera aproximación (apéndice A2) que, de acuerdo con la hipótesis realizada en el capítulo 3 acerca de la naturaleza de las superficies de las lentes oftálmicas, la dirección del vector normal a dicha superficie en el punto considerado, \mathbf{N}_2 también coincide con la dirección de los vectores anteriores. En estas condiciones, tenemos que se puede establecer la siguiente relación entre el vector de posición \mathbf{r} de la superficie Σ y el vector de posición \mathbf{r}' de la superficie Σ'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \alpha \mathbf{N}_2, \quad (4.2)$$

como además tenemos que

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b, \quad (4.3)$$

podemos concluir, por tanto, que $\mathbf{r}_b = \alpha \mathbf{N}_2$. Pero además debemos de tener en cuenta que $|\mathbf{r}_b| = a$, donde a es el radio de la punta del palpador, de manera que $\alpha = -a$ y por tanto

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + a \mathbf{N}_2. \quad (4.4)$$

Esta es la relación que se ha empleado para encontrar los valores de los puntos (x_i, y_i, z_i) sobre la superficie de la lente a partir de los puntos medidos (x'_i, y'_i, z'_i) que nos dan las posiciones sucesivas del centro de la punta esférica del palpador, ya que el vector \mathbf{N}_2 puede obtenerse por cálculo numérico a partir del conjunto de puntos (x'_i, y'_i, z'_i) . Esta operación se ha implementado en los programas de tratamiento de datos experimentales de modo que antes de procesar los datos se parte ya de los puntos corregidos (x_i, y_i, z_i) .

4.1.2 Tratamiento de datos. Obtención de la MPDL

A continuación vamos a describir el proceso de tratamiento de datos que se sigue para obtener la MPDL. De acuerdo con las expresiones (4.1a), (4.1b) y (4.1c), para obtener los elementos de la MPDL es necesario calcular las derivadas de las ságitas de las superficies. En nuestro caso, nosotros tenemos un conjunto discreto de datos (x_i, y_i, z_i) de manera que debemos emplear métodos de cálculo numérico para el

calculo de las derivadas parciales $\partial_x^2 z$, $\partial_{xy}^2 z$ y $\partial_y^2 z$. De acuerdo con Press *et al.* [7], una buena estimación de la primera derivada parcial en la dirección OX de la sagita viene dada por

$$\Delta_x z_i = \frac{z_k - z_j}{(x_k - x_j)}, \quad (4.5)$$

donde (x_j, y_j, z_j) y (x_k, y_k, z_k) son los dos puntos más próximos al punto (x_i, y_i, z_i) en la dirección del eje OX , esto es $y_i = y_j = y_k$. El problema que presenta esta estimación discreta de la derivada es su comportamiento poco robusto frente a los errores. Si denominamos δz al error cometido en la determinación de z_j y z_k (suponiendo que dicho error no depende del punto de la lente en el que estemos midiendo) y δx es el error cometido en la determinación de x_j y x_k , podemos escribir la ecuación (4.5) como

$$(\Delta_x z_i)' = \frac{(z_k - z_j) + 2\delta z}{(x_k - x_j) + 2\delta x}, \quad (4.6)$$

desarrollando en serie el denominador (teniendo en cuenta que estamos trabajando con errores), tenemos que

$$(\Delta_x z_i)' \simeq \frac{(z_k - z_j) + 2\delta z}{(x_k - x_j)} + \frac{2(z_k - z_j)\delta x}{(x_k - x_j)^2}, \quad (4.7)$$

donde se han eliminado los términos que van con las potencias cuadráticas de los errores δz y δx y superiores. Comparando las expresiones (4.6) y (4.7), podemos ver que una estimación del error cometido en la determinación de la primera derivada parcial en la dirección OX de la ságitas esta dada por

$$\delta(\Delta_x z_i) \simeq \frac{2\delta z}{(x_k - x_j)} + \frac{2(z_k - z_j)\delta x}{(x_k - x_j)^2}, \quad (4.8)$$

y el error relativo viene dado por

$$\frac{\delta(\Delta_x z_i)}{(z_k - z_j)} \simeq \frac{2\delta z}{(z_k - z_j)(x_k - x_j)} + \frac{2\delta x}{(x_k - x_j)^2}, \quad (4.9)$$

las expresiones anteriores pueden ser utilizadas para calcular el error cometido en la segunda derivada, definida a partir de la expresión

$$\Delta_x^2 z_i = \frac{\Delta_x z_k - \Delta_x z_j}{(x_k - x_j)}, \quad (4.10)$$

de modo que el error cometido puede estimarse como

$$\delta(\Delta_x^2 z_i) \simeq \frac{2\delta(\Delta_x z)}{(x_k - x_j)^2} + \frac{2(\Delta_x z_k - \Delta_x z_j)\delta x}{(x_k - x_j)^3}. \quad (4.11)$$

Como ejemplo, consideraremos una superficie parabólica de $R = 200$ mm de radio y vamos a estudiar el error cometido en la segunda derivada de un punto situado a $x_i = 10$ mm del centro, suponiendo que $x_k - x_j = 1.5$ mm y que $\delta z = \pm 1 \mu\text{m}$ y $\delta x = \pm 10 \mu\text{m}$ (esto es, los datos correspondientes a la precisión de nuestro aparato de medida). Tenemos pues que

$$\delta(\Delta_x z_i) \simeq \frac{2\delta z}{(x_k - x_j)} + \frac{(x_k + x_j)\delta x}{R(x_k - x_j)}, \quad (4.12)$$

operando,

$$\delta(\Delta_x z_i) \simeq \pm 8 \cdot 10^{-4},$$

de manera que, para la segunda derivada

$$\delta(\Delta_x^2 z_i) \simeq \frac{2\delta(\Delta_x z)}{(x_k - x_j)^2} + \frac{2\delta x}{R(x_k - x_j)^2}, \quad (4.13)$$

sustituyendo los datos numéricos encontramos que

$$\delta(\Delta_x^2 z_i) \simeq \pm 2 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1},$$

si expresamos el error en dioptrías tenemos que $\delta(\Delta_x^2 z_i) \simeq \pm 0.2$ D, teniendo en cuenta que, en este caso la segunda derivada numérica viene dada por

$$\Delta_x^2 z_i = \frac{\Delta_x z_k - \Delta_x z_j}{(x_k - x_j)} = \frac{1}{R} = 5 \text{ D},$$

tenemos que en valor relativo el error cometido es en este caso de un 4 %. Sin embargo, el error relativo en la medida de la posición x es de un 0.1 % y el de la medida de z es de un 0.4 %. Esto implica que el error relativo se multiplica en un factor 10 teniendo en cuenta únicamente los errores de precisión del aparato.

Para evitar este factor de error debido al cálculo discreto de las derivadas parciales, se ha optado por ajustar las funciones $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$ a un desarrollo en serie de polinomios. Como estamos trabajando con superficies definidas en un dominio circular, hemos elegido el conjunto de polinomios de Zernike, al ser este conjunto una base natural para toda superficie definida en un dominio circular

debido a sus propiedades de ortogonalidad sobre el círculo de radio unidad, así como ciertas propiedades de invariancia [8], de modo que podemos escribir

$$z_1(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j^1 V_j(x, y), \quad (4.14)$$

$$z_2(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j^2 V_j(x, y), \quad (4.15)$$

siendo $V_j(x, y)$ el j -ésimo polinomio de Zernike. Como estamos trabajando sobre un dominio discreto de puntos, siguiendo a [9] escogeremos los coeficientes de los polinomios de Zernike que minimizen la diferencia cuadrática

$$dc = \sum_{i=1}^M \left(z_i - \sum_{j=1}^N a_j V_{ij} \right)^2, \quad (4.16)$$

donde z_i es valor de la ságitas en el i -ésimo punto de la superficie, M es el número de puntos medidos sobre la superficie, V_{ij} es el valor del j -ésimo polinomio de Zernike en el punto i -ésimo y N es el número de polinomios de Zernike empleados. Si consideramos que los polinomios de Zernike son ortonormales en el conjunto discreto de datos considerado, esto es si

$$\sum_{i=1}^M V_{ik} V_{ij} = \delta_{kj}, \quad (4.17)$$

la minimización de (4.16) nos lleva a la siguiente expresión para los coeficientes de los polinomios

$$a_j = \sum_{i=1}^M z_i V_{ij}. \quad (4.18)$$

Si denominamos δa_j al error cometido en la determinación del coeficiente del j -ésimo polinomio de Zernike, tenemos que nuestra estimación de la ságitas, se halla afectada de un error

$$\delta z_i = \sum_{j=1}^N \delta a_j V_{ij}, \quad (4.19)$$

considerando además que el error relativo en la determinación de los coeficientes de los polinomios de

Zernike es el mismo, esto es si $\delta a_j = \varepsilon a_j$, tenemos que

$$\delta z_i = \varepsilon \sum_{j=1}^N a_j V_{ij}, \quad (4.20)$$

es decir, que el error relativo que cometemos en la estimación de la ságitas es del mismo orden que el error relativo en los coeficientes del desarrollo en serie de polinomios. Por otro lado, la derivada de la ságitas puede expresarse como

$$\partial_x z_i = \sum_{j=1}^N a_j \partial_x V_{ij}, \quad (4.21)$$

siendo el error de la derivada

$$\delta(\partial_x z_i) = \sum_{j=1}^N \delta a_j \partial_x V_{ij}. \quad (4.22)$$

Como puede apreciarse, el error en la derivada de la sagita es función del error en los coeficientes, y de acuerdo a la expresión (4.20), el error relativo que se comete es del orden del error relativo cometido en la determinación de los coeficientes de los polinomios de Zernike. Esto quiere decir que el proceso de derivación no aumenta en este caso el error. Es por ello por lo que hemos decidido expresar las ságitas de las superficies refractoras a partir del desarrollo en serie de polinomios de Zernike.

A continuación vamos a describir el proceso de obtención de la MPDL a partir de las medidas de la ságitas. Nuestro objetivo es encontrar los coeficientes de los polinomios de Zernike a partir del conjunto discreto de puntos (x_i, y_i, z_i) de la superficie que hemos medido. Los coeficientes de los polinomios se hallan minimizando la distancia cuadrática dada por la ecuación (4.16). Como en nuestro caso tenemos un conjunto discreto de datos, hemos empleado el algoritmo descrito por Fischer *et al.* [10] que utiliza un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para encontrar un conjunto de polinomios ortogonales en el dominio discreto de puntos (x_i, y_i) que estamos manejando a partir de los valores de los polinomios de Zernike. De este modo somos capaces de encontrar la expansión de la superficie medida en serie de polinomios de Zernike. El ajuste ha sido realizado empleando los 45 primeros polinomios de Zernike ya que con un número superior de polinomios no mejora significativamente el ajuste entre los polinomios y los datos experimentales.

El paso final es calcular los valores de las primeras y segundas derivadas parciales de los polinomios de Zernike en los puntos (x_i, y_i) . Si los valores de los diferentes polinomios de Zernike en cada uno de los puntos de medida vienen dados por una matriz V cuyos elementos son $V_{ji} = V_j(x_i, y_i)$, esto es el

valor del j -ésimo polinomio de Zernike en el punto (x_i, y_i) ; sus derivadas sucesivas vendrán dadas por las matrices $\partial_x V_{ji}$, $\partial_y V_{ji}$, $\partial_{xx}^2 V_{ji}$, $\partial_{xy}^2 V_{ji}$ y $\partial_{yy}^2 V_{ji}$. Por otro lado, tenemos dos conjuntos de coeficientes de ajuste de las dos ságitas a nuestro conjunto de polinomios de Zernike, de manera que podemos obtener los valores de las componentes de la potencia prismática $P_x(x_i, y_i)$, $P_y(x_i, y_i)$ y de la matriz de potencia dióptrica $f_{xx}(x_i, y_i)$, $f_{xy}(x_i, y_i)$ y $f_{yy}(x_i, y_i)$ a partir de las expresiones siguientes

$$P_x(x_i, y_i) = (1 - n) \sum_{j=1}^N (a_j^1 - a_j^2) \partial_x V_{ji}, \quad N=45 \quad (4.23a)$$

$$P_y(x_i, y_i) = (1 - n) \sum_{j=1}^N (a_j^1 - a_j^2) \partial_y V_{ji}, \quad N=45 \quad (4.23b)$$

y

$$f_{xx}(x_i, y_i) = (n - 1) \sum_{j=1}^N (a_j^1 - a_j^2) \partial_{xx}^2 V_{ji}, \quad N=45 \quad (4.24a)$$

$$f_{xy}(x_i, y_i) = (n - 1) \sum_{j=1}^N (a_j^1 - a_j^2) \partial_{xy}^2 V_{ji}, \quad N=45 \quad (4.24b)$$

$$f_{yy}(x_i, y_i) = (n - 1) \sum_{j=1}^N (a_j^1 - a_j^2) \partial_{yy}^2 V_{ji}, \quad N=45 \quad (4.24c)$$

siendo $\{a_j^1\}$ los coeficientes de ajuste de la ságitas de la primera superficie y $\{a_j^2\}$ los coeficientes de ajuste de la ságitas de la segunda superficie.

Si la forma de la superficie es conocida, tal y como ocurre en el caso de lentes esféricas, es posible utilizar otro procedimiento para la obtención de las potencias prismáticas y los elementos de la MPDL. Este procedimiento sería ajustar directamente los puntos experimentales a una superficie esférica. Para ello, dado un conjunto de puntos (x_i, y_i, z_i) correspondientes a una superficie de la cual sabemos *a priori* que es esférica, definimos la siguiente magnitud

$$DC = \sum_{i=1}^N \left(z_i - R + \sqrt{R^2 - x_i^2 - y_i^2} - ax_i - by_i \right)^2, \quad (4.25)$$

y calculamos los valores del radio R y de los coeficientes de inclinación a y b que minimizan esta expresión. La minimización de (4.25) puede realizarse utilizando técnicas de cálculo numérico como el algoritmo llamado "simplex" [7]. El algoritmo de minimización "simplex" figura como una de las funciones de MatLab, siendo esta función la que hemos empleado para minimizar la distancia cuadrática

(4.25). Una vez que se determina el valor del radio R que proporciona el mejor ajuste a los datos experimentales, el cálculo de los elementos de la MPDL y de la distribución de potencias esférica y cilíndrica se lleva a cabo utilizando las expresiones del capítulo 3.

4.2 Resultados experimentales

Vamos a presentar a continuación los resultados obtenidos al medir la MPDL de varias lentes oftálmicas comerciales con el método de medida descrito anteriormente. Las características de las lentes medidas se muestran en la tabla I.

En el caso de lentes esféricas, se realiza el ajuste de los puntos medidos a una superficie esférica obteniendo el valor del radio R y de los coeficientes de inclinación a y b . Para estimar el error cometido, hemos medido 8 veces cada superficie de la lente y hemos determinado el valor medio y la desviación media de los coeficientes $\{a, b, R\}$. Una vez determinado el valor de R hemos hallado los elementos de la MPDL y las potencias esférica y cilíndrica siguiendo el método expuesto en el apartado anterior. Los valores obtenidos de la MPDL y de la esfera y cilindro se muestran en las figuras: Fig. 4.7, Fig. 4.8, Fig. 4.9 y Fig. 4.10 mientras que el valor medio del radio R y su desviación media ΔR se muestran en el apéndice A3. En el caso de las lentes positivas, se puede observar cierta discrepancia entre la potencia medida en el centro de la lente y la potencia nominal de la lente. Creemos que dichas discrepancias son debidas al efecto del espesor central.

El proceso de medida de las lentes esféricas y progresivas consiste en la medida de la superficie anterior y posterior de la lente, el ajuste de las mismas a polinomios de Zernike y la obtención a partir de las derivadas numéricas de los polinomios de los valores de las componentes de la matriz de potencia dióptrica local y de la distribución de potencias esféricas y cilíndricas a lo largo de la superficie de las lentes estudiadas. Para poder realizar una estadística de errores, se han llevado a cabo un número estadísticamente significativo de medidas de cada superficie de la lente que queremos medir, en nuestro caso se llevan a cabo 10 medidas de cada superficie de la lente. De este modo obtenemos 10 conjuntos diferentes de elementos de la MPDL y por consiguiente, es posible encontrar la MPDL media y el error cometido en la medida de la MPDL en cada punto de la superficie de la lente. En la Fig. 4.5 se muestra una imagen tridimensional de las dos superficies de la lente progresiva P1 tal y como han sido medidas por nuestro sistema de perfilometría automática, mientras que en la Fig. 4.6 es posible ver los residuos que resultan de ajustar las superficies anteriores a un conjunto de polinomios de Zernike. En el apéndice A3 se muestran los valores de los coeficientes de Zernike obtenidos para cada una de las medidas efectuadas sobre

Tabla 4.1 Propiedades de las lentes medidas con el perfilómetro automático. P_L es la potencia de lejos de la lente, A es la adición, n es el índice de refracción y t_c es el espesor central

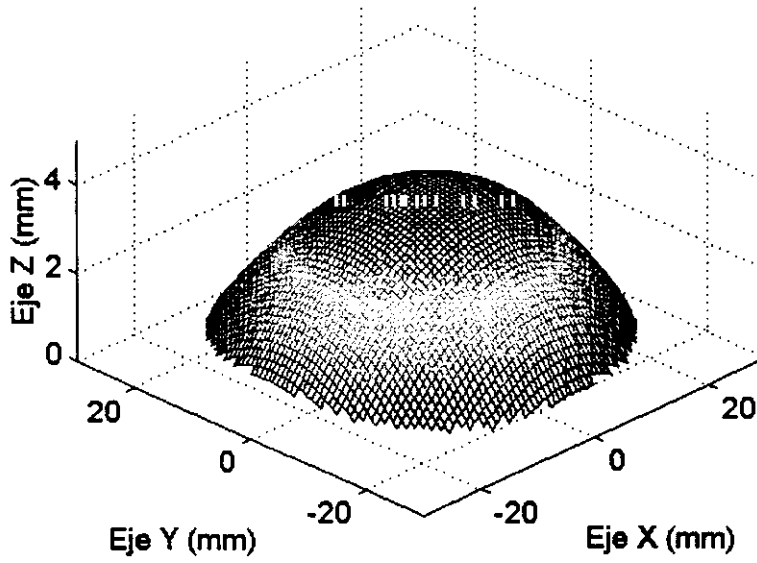
Lente	Tipo	P_L (D)	A (D)	n	t_c (mm)
E1	Esférica	-4.00	NA	1.500	2.00
E2	Esférica	-2.00	NA	1.500	0.90
E3	Esférica	+2.00	NA	1.500	3.80
E4	Esférica	+4.00	NA	1.500	5.30
A1	Asférica	+2.00	NA	1.604	2.50
A2	Asférica	+2.50	NA	1.604	2.90
P1	Progresiva	0.00	+2.00	1.604	1.85
P2	Progresiva	0.00	+2.00	1.604	1.90
P3	Progresiva	0.00	+2.00	1.604	2.40

las lentes asféricas y progresivas de la Tabla 4.1.

En las figuras: Fig. 4.11, Fig. 4.13, Fig. 4.15, Fig. 4.17 y Fig. 4.19 se muestran los valores de: elementos de la MPDL f_{xx} , f_{xy} y f_{yy} y distribución de potencias esférica E y cilíndrica C , tal y como vienen dadas por las ecuaciones de Long de las lentes A1, A2, P1, P2 y P3. En las figuras Fig. 4.12, Fig. 4.14, Fig. 4.16, Fig. 4.18 y Fig. 4.20 tenemos los valores de los errores cometidos en la determinación de las magnitudes anteriores. Como puede apreciarse en estas figuras, cada grupo de lentes estudiado presenta una distribución superficial característica de los elementos de la MPDL y de las potencias esférica y cilíndrica. Esta distribución superficial viene dada por la naturaleza de las superficies refractoras de las lentes estudiadas.

En el caso de lentes con la primera superficie asférica, lentes A1 y A2 (Fig. 4.11 y Fig. 4.13), las distribuciones de los elementos de la MPDL y de las potencias esférica y cilíndrica de dichas lentes presentan un aspecto "ruidoso" (más acusado en la lente de +2.00 D que en la lente de +2.50 D). Sin embargo, al menos en teoría, al estar estas lentes compuestas por dos superficies de revolución, las distribuciones de potencia esférica y cilíndrica deberían presentar una distribución con simetría rotacional. La causa de que no aparezca dicha simetría se encuentra en el hecho de que la primera superficie (superficie asférica) de la lente no presenta simetría de revolución debido, en nuestra opinión, a un proceso de fabricación defectuoso. Conviene tener en cuenta que las lentes medidas son lentes orgánicas de CR39 y se fabrican por inyección del material sobre un molde [17], de modo que al enfriarse la lente, pueden aparecer pequeñas deformaciones que, si bien no tienen un efecto muy grande sobre la calidad óptica de la lente, y por tanto, son indetectadas por un frontofocómetro, si pueden dar lugar a cambios en la estructura de la superficie. Nuevamente, los valores de potencia encontrados se corresponden con los valores esperados, al menos en la zona paraxial de ambas lentes.

a)



b)

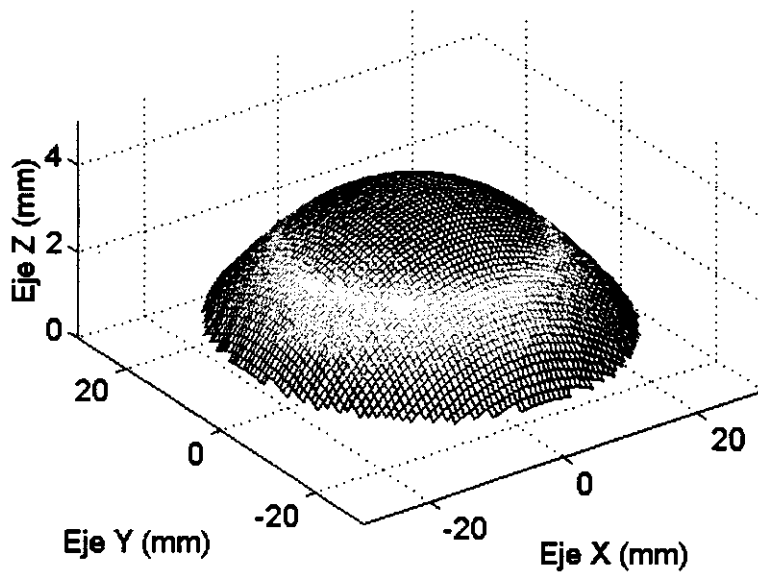


Figura 4.5. Representación tridimensional de las superficies a) anterior y b) posterior de la lente P1 medidas con el perfilómetro automático. Nótese la ligera asimetría de la superficie anterior que indica su carácter de superficie progresiva.

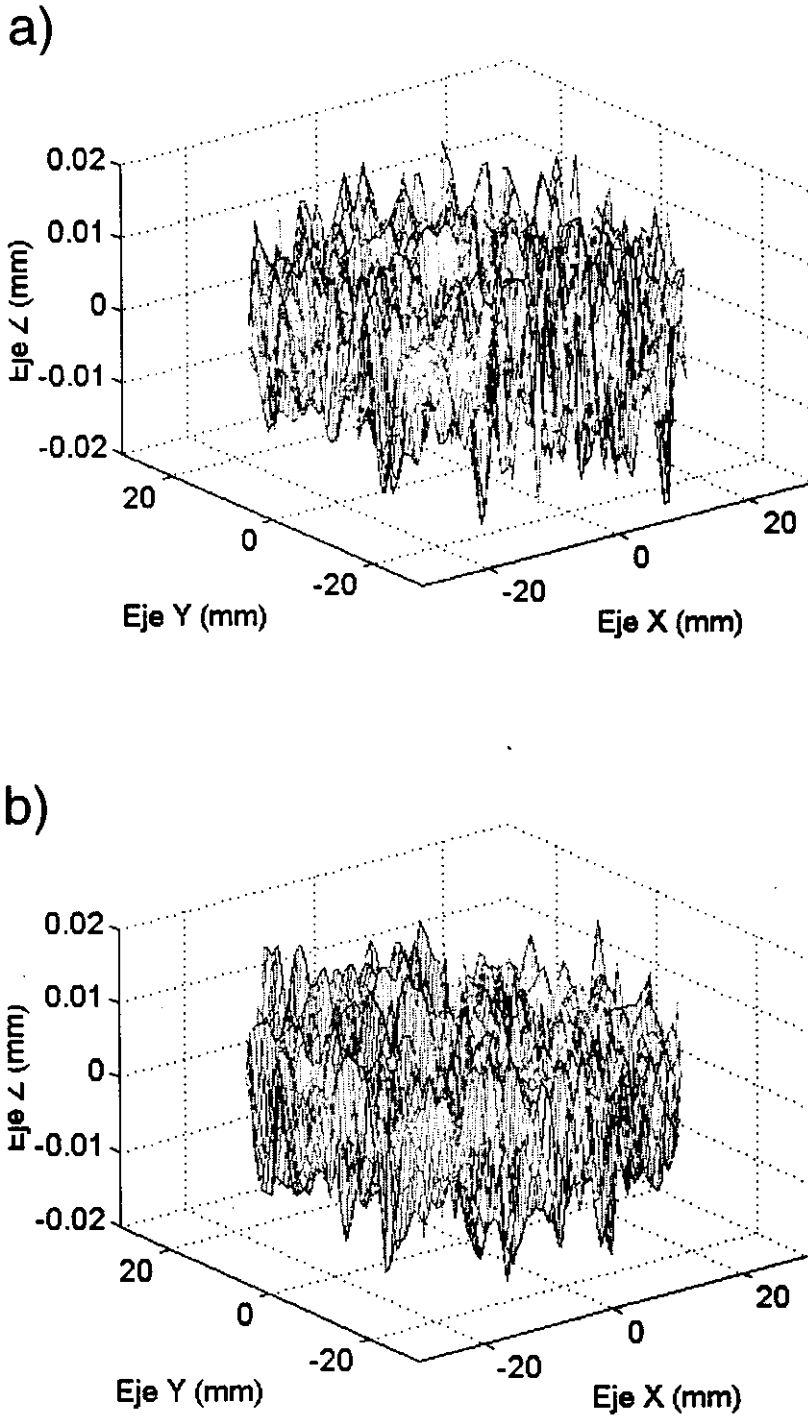


Figura 4.6. Residuos resultantes de ajustar las superficies a) anterior y b) posterior de la lente P1 a un conjunto de polinomios de Zernike. Puede comprobarse que la diferencia entre la superficie medida y ajustada nunca es mayor que $10\ \mu\text{m}$.

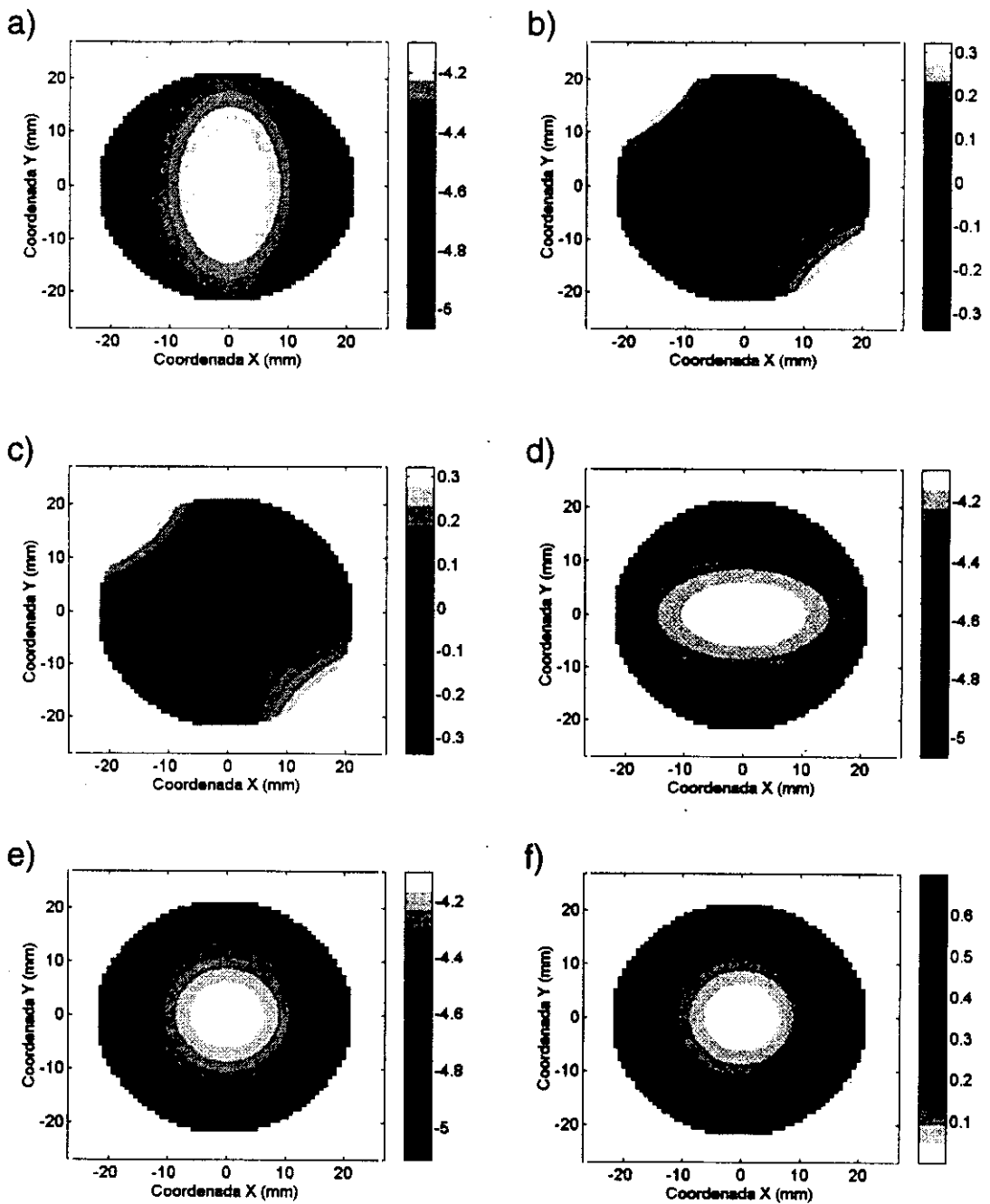


Figura 4.7. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xz} , b) f_{xy} , c) f_{yz} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente E1.

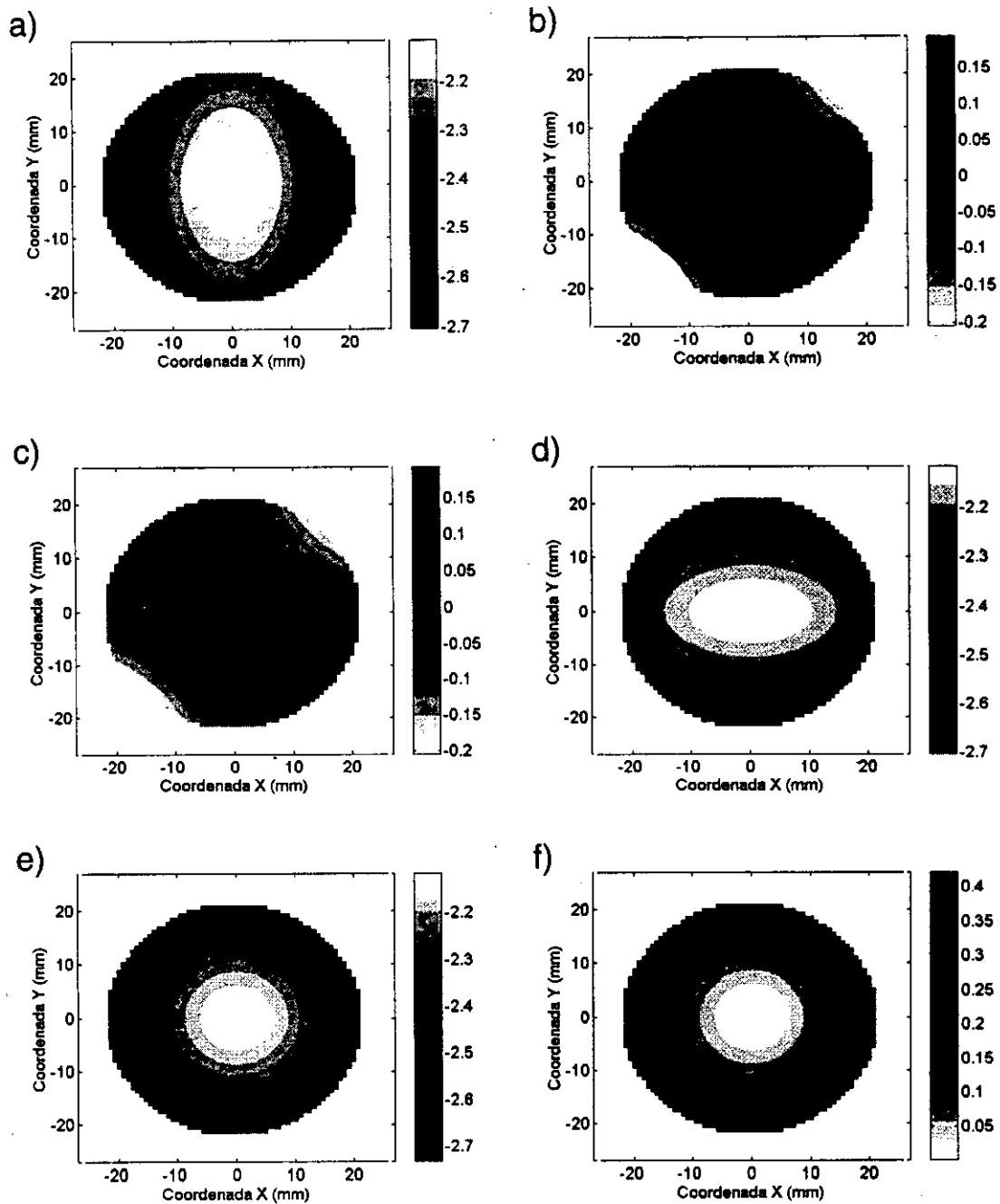


Figura 4.8. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} , c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente E2.

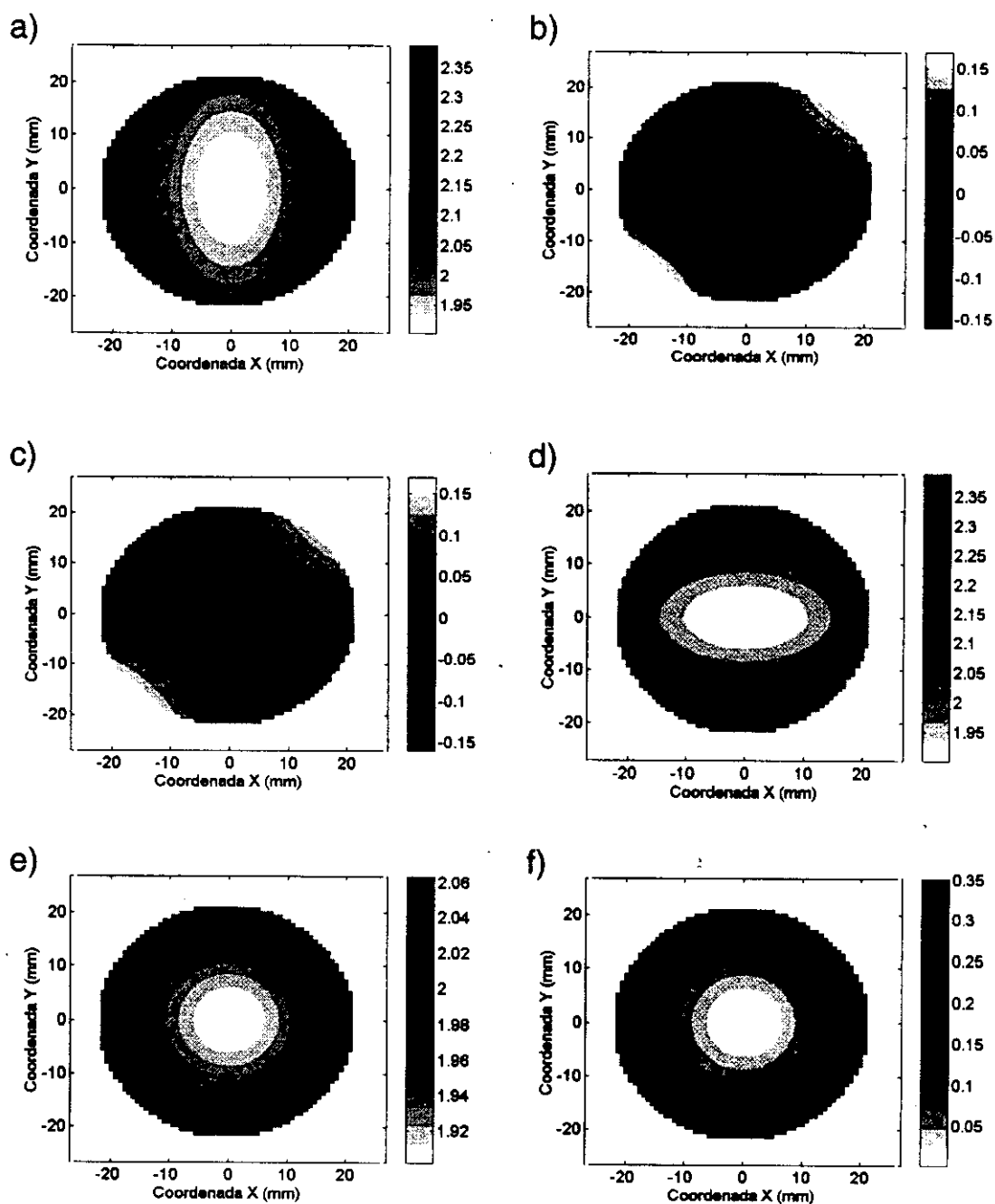


Figura 4.9. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} , c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y b) cilíndrica sobre la superficie de la lente E3.

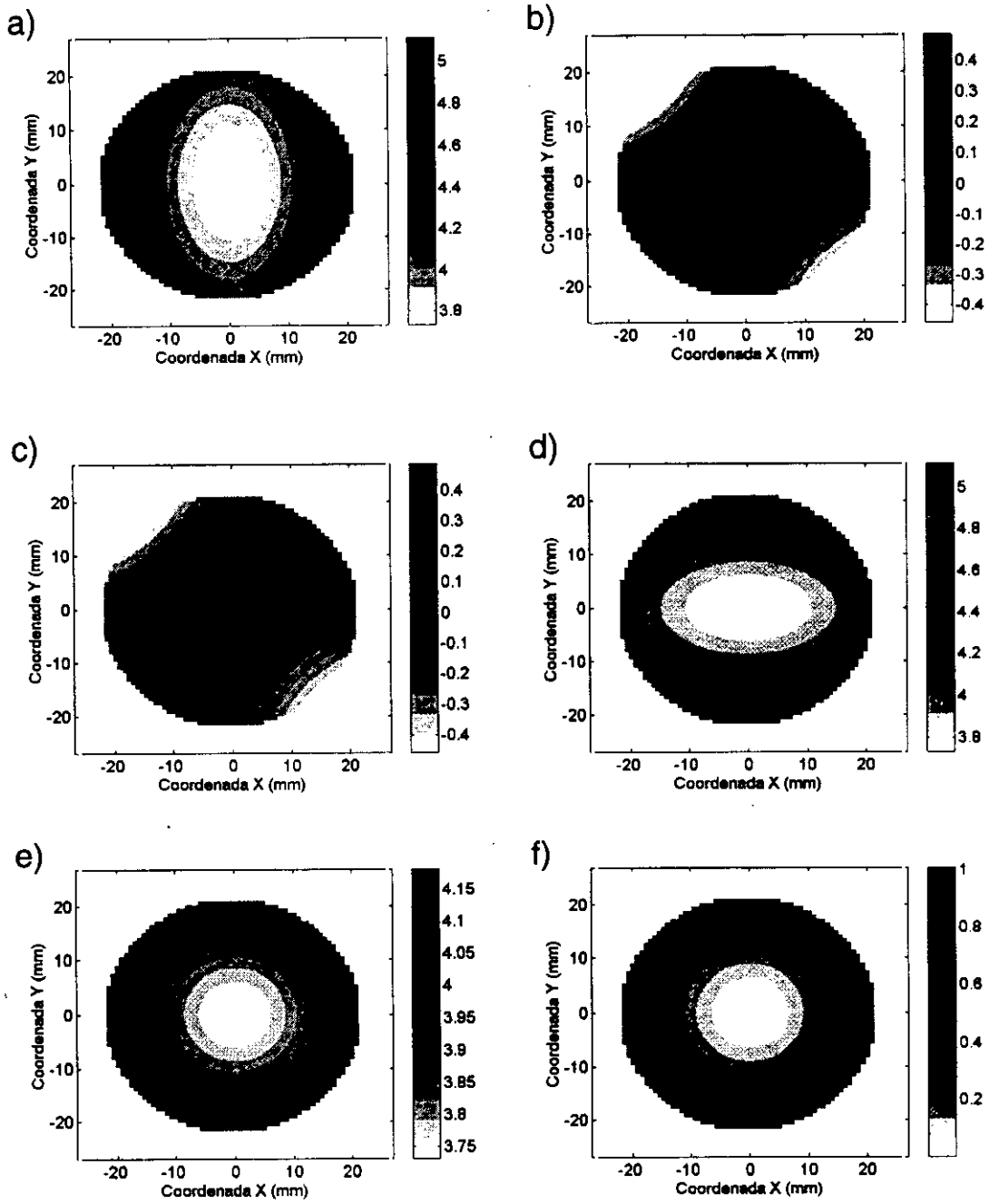


Figura 4.10. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{zz} , b) f_{zv} c) f_{vz} , d) f_{vv} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente E4.

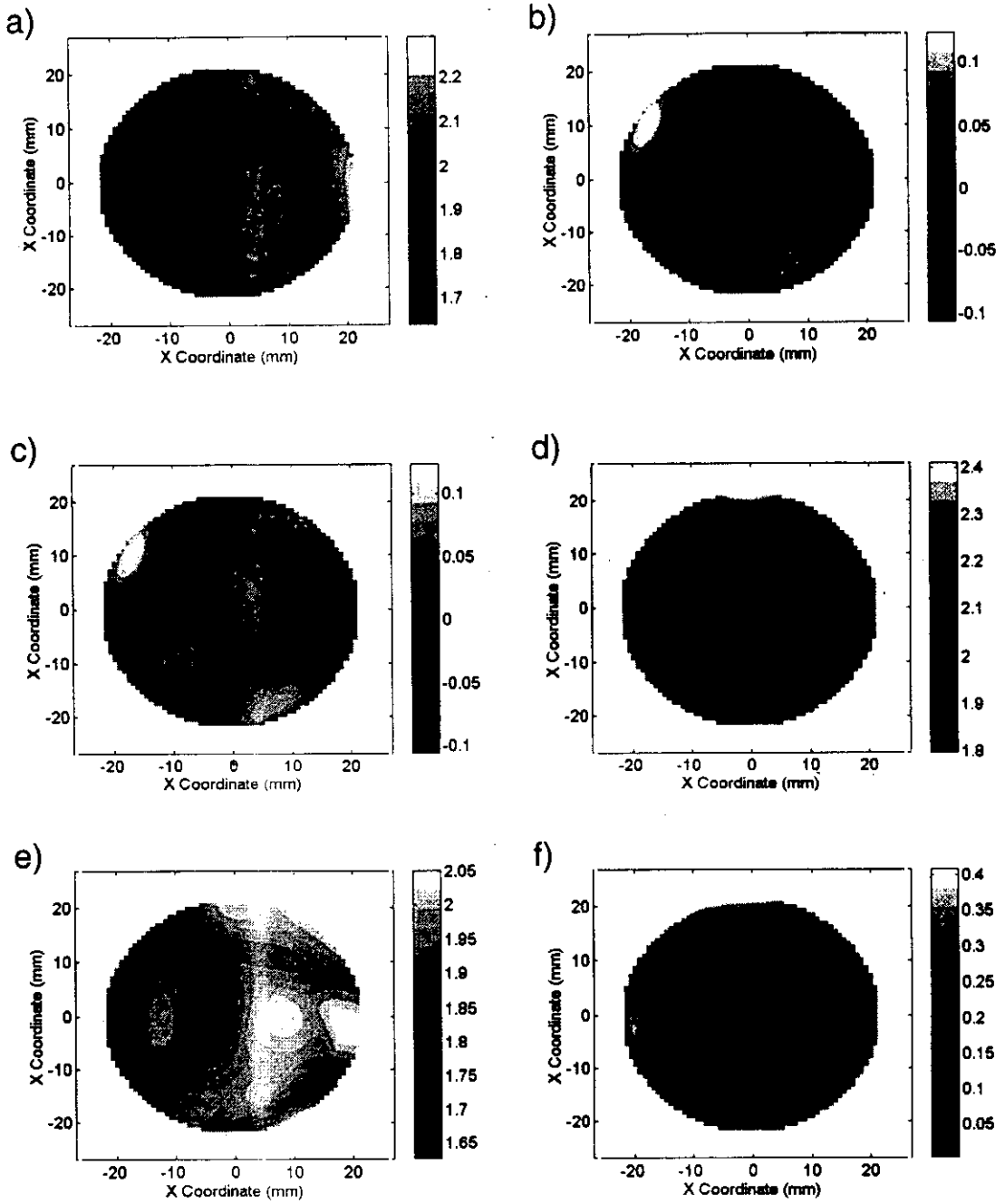


Figura 4.11. Distribución de los elementos de la MPDL. a) f_{xz} , b) f_{xy} , c) f_{yz} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente A1.

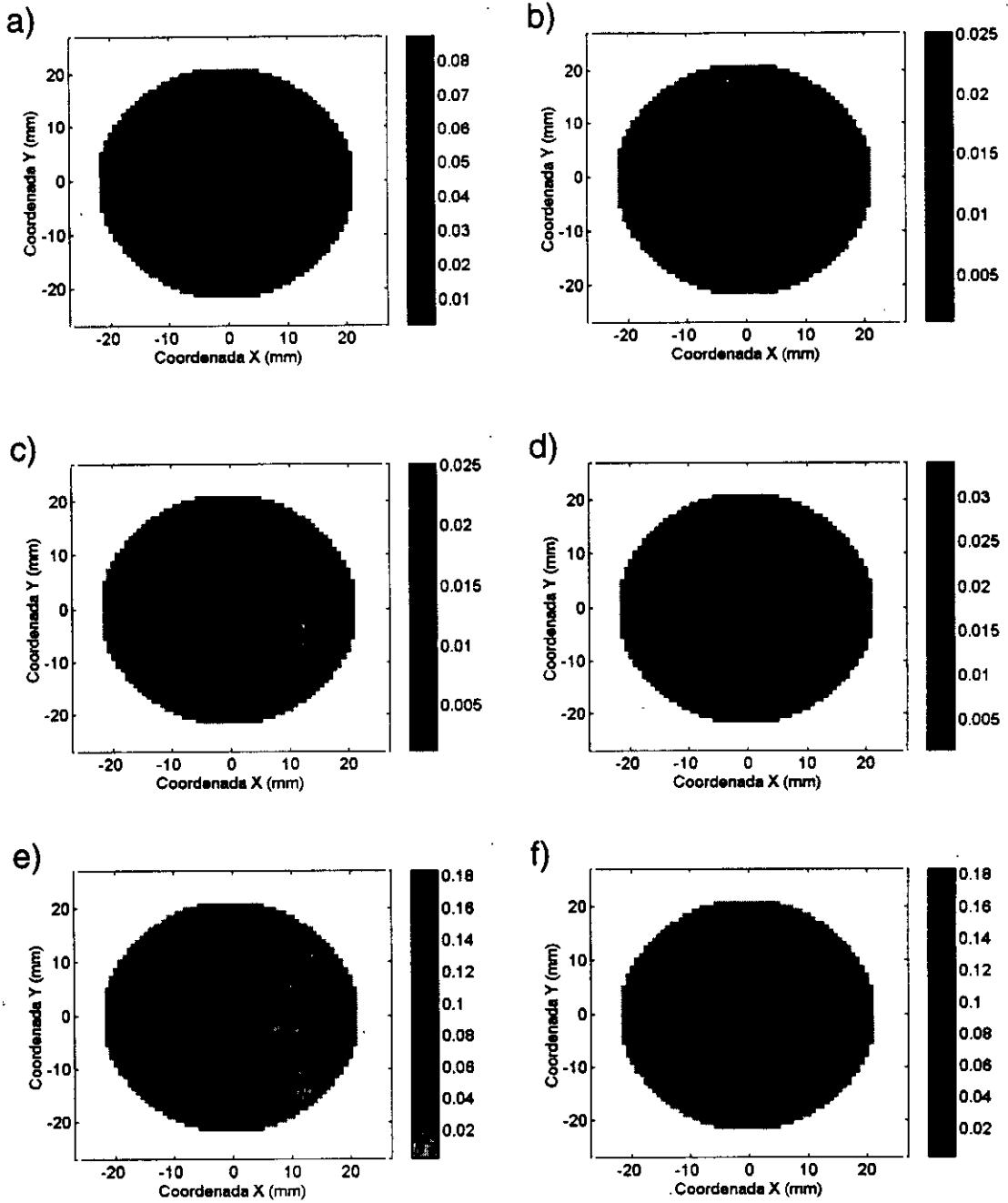


Figura 4.12. Distribución de la estimación del error cometido en la medida de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente A1.

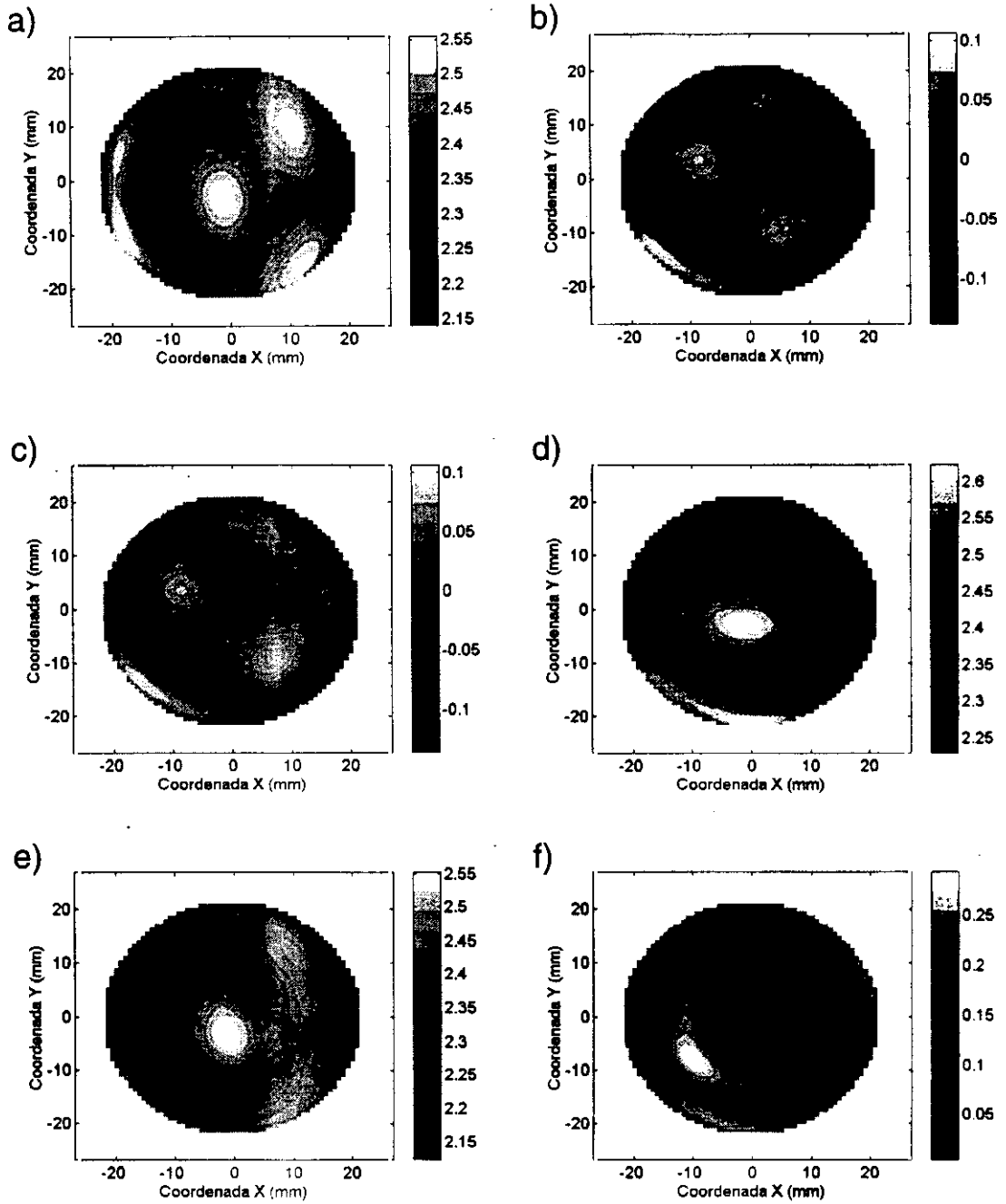


Figura 4.13. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} c) f_{yz} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente A2.

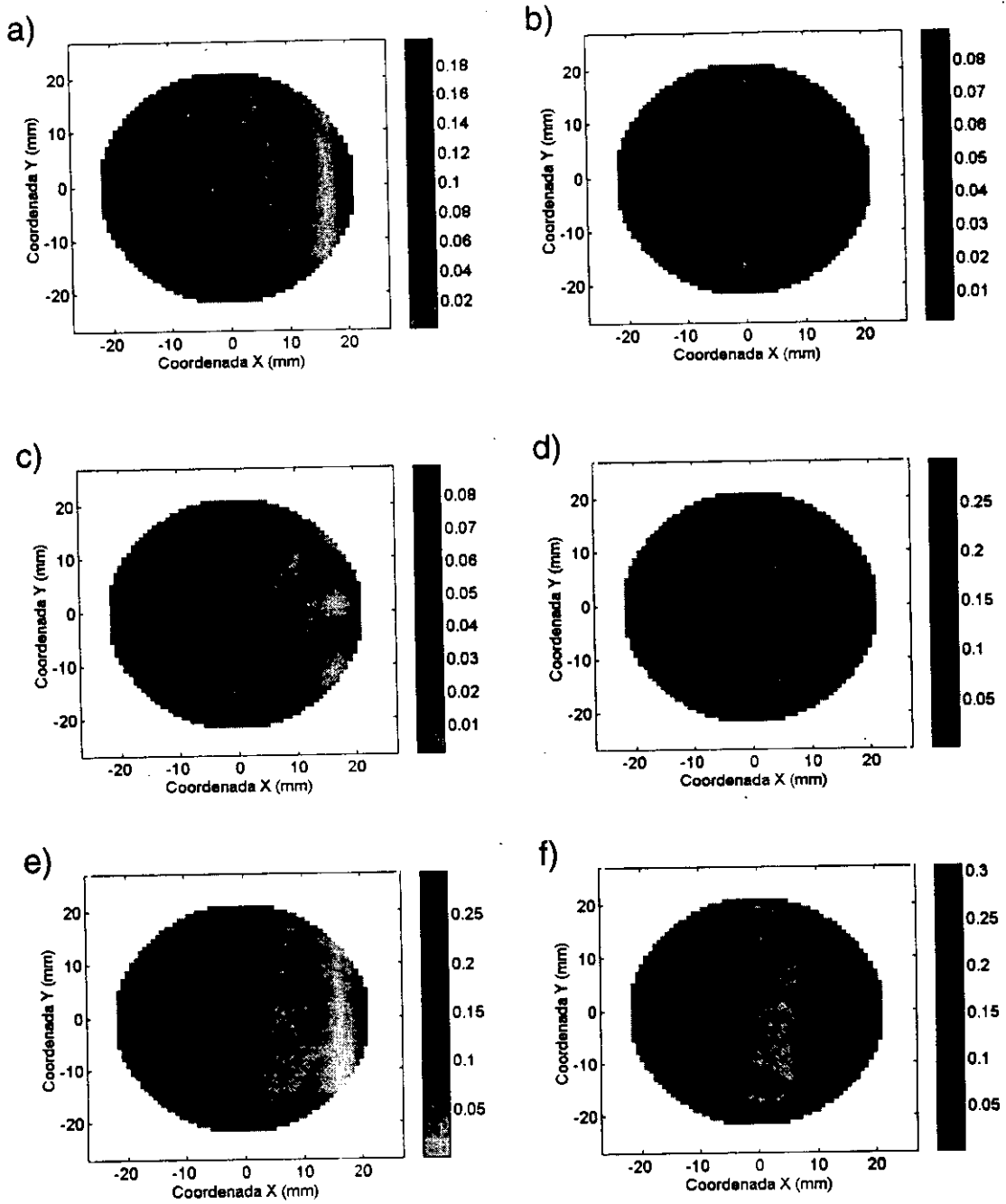


Figura 4.14. Distribución de la estimación del error cometido en la medida de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} , c) f_{yz} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente A2.

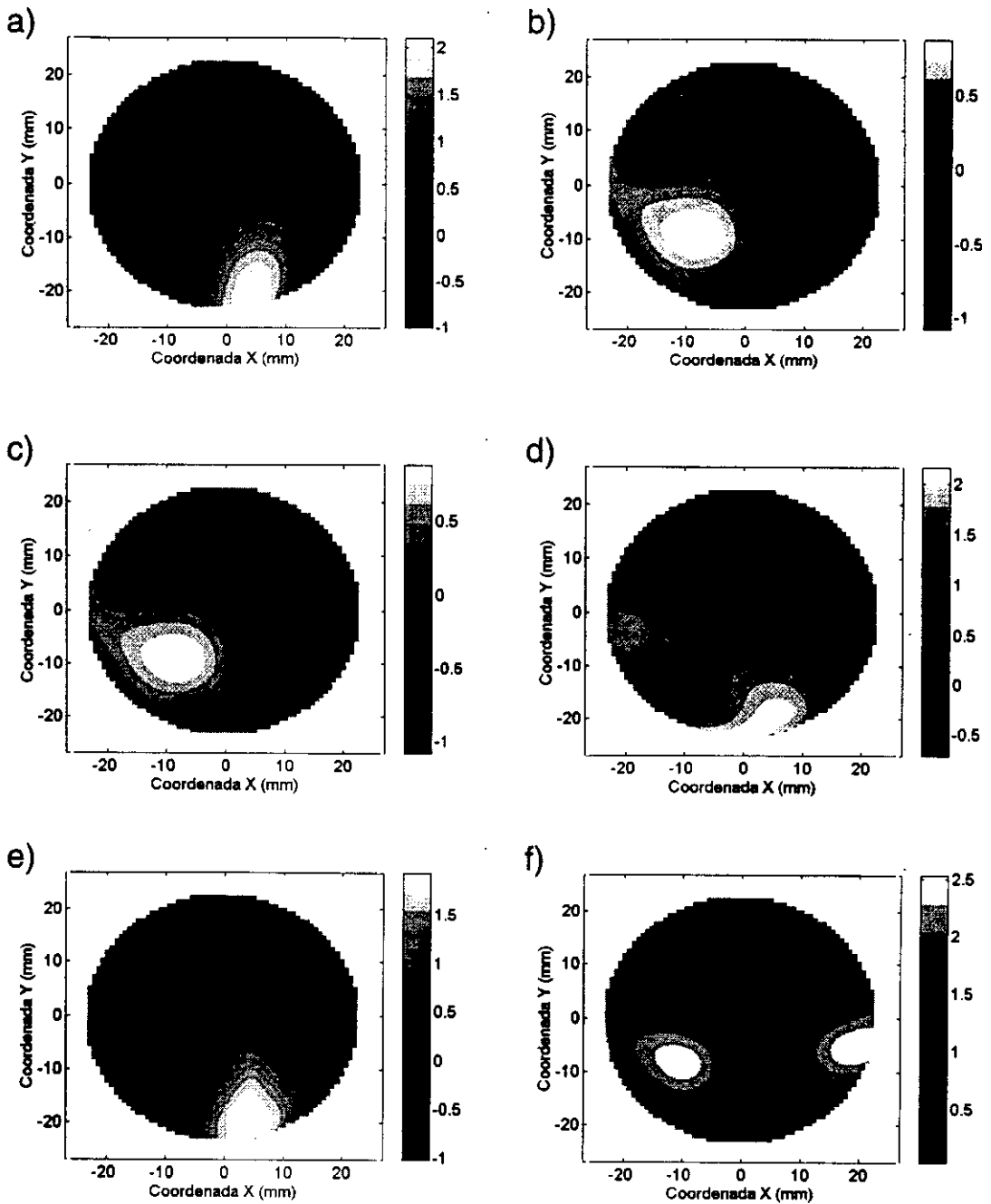


Figura 4.15. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} , c) f_{yz} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente P1.

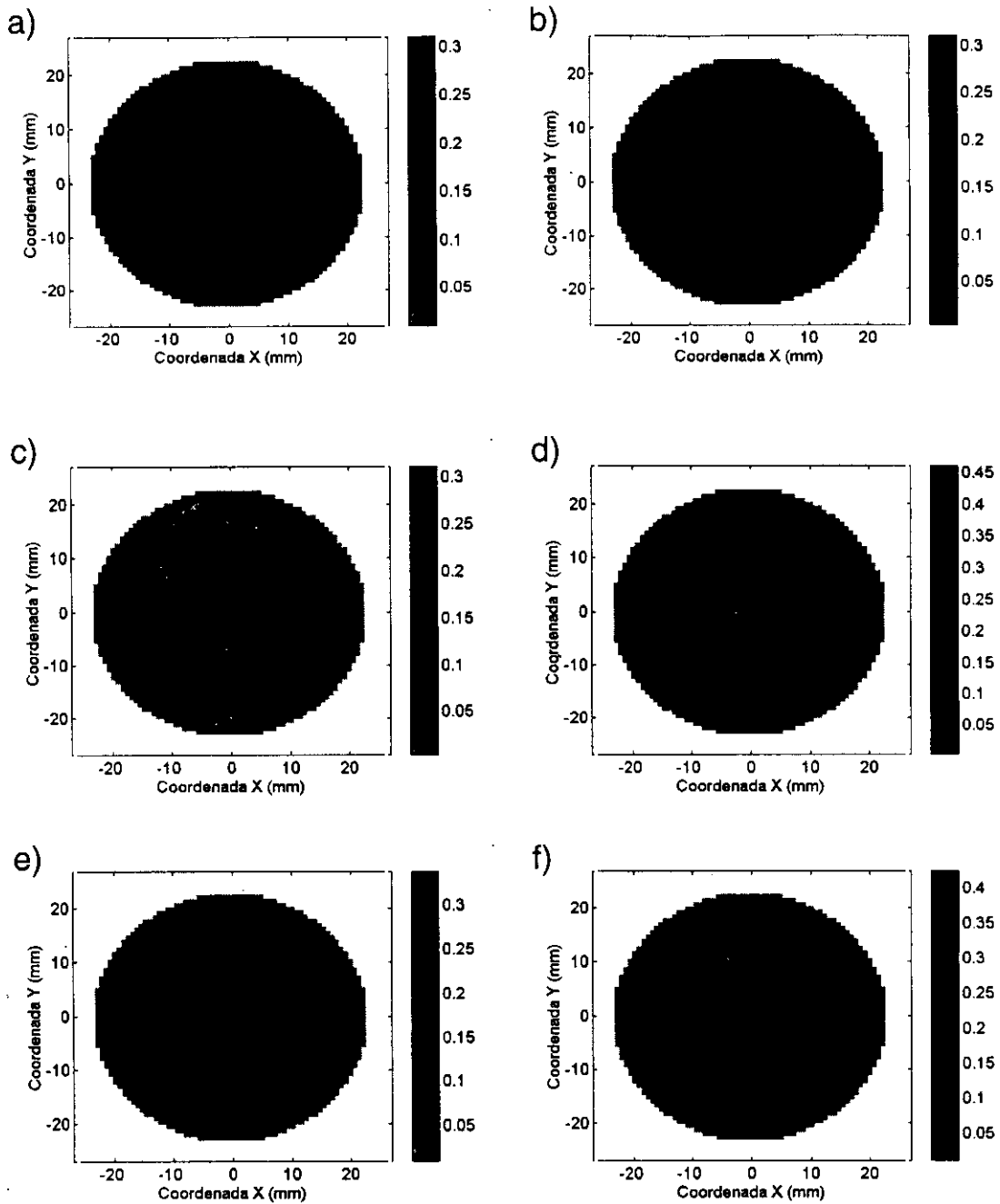


Figura 4.16. Distribución de la estimación del error cometido en la medida de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente P1.

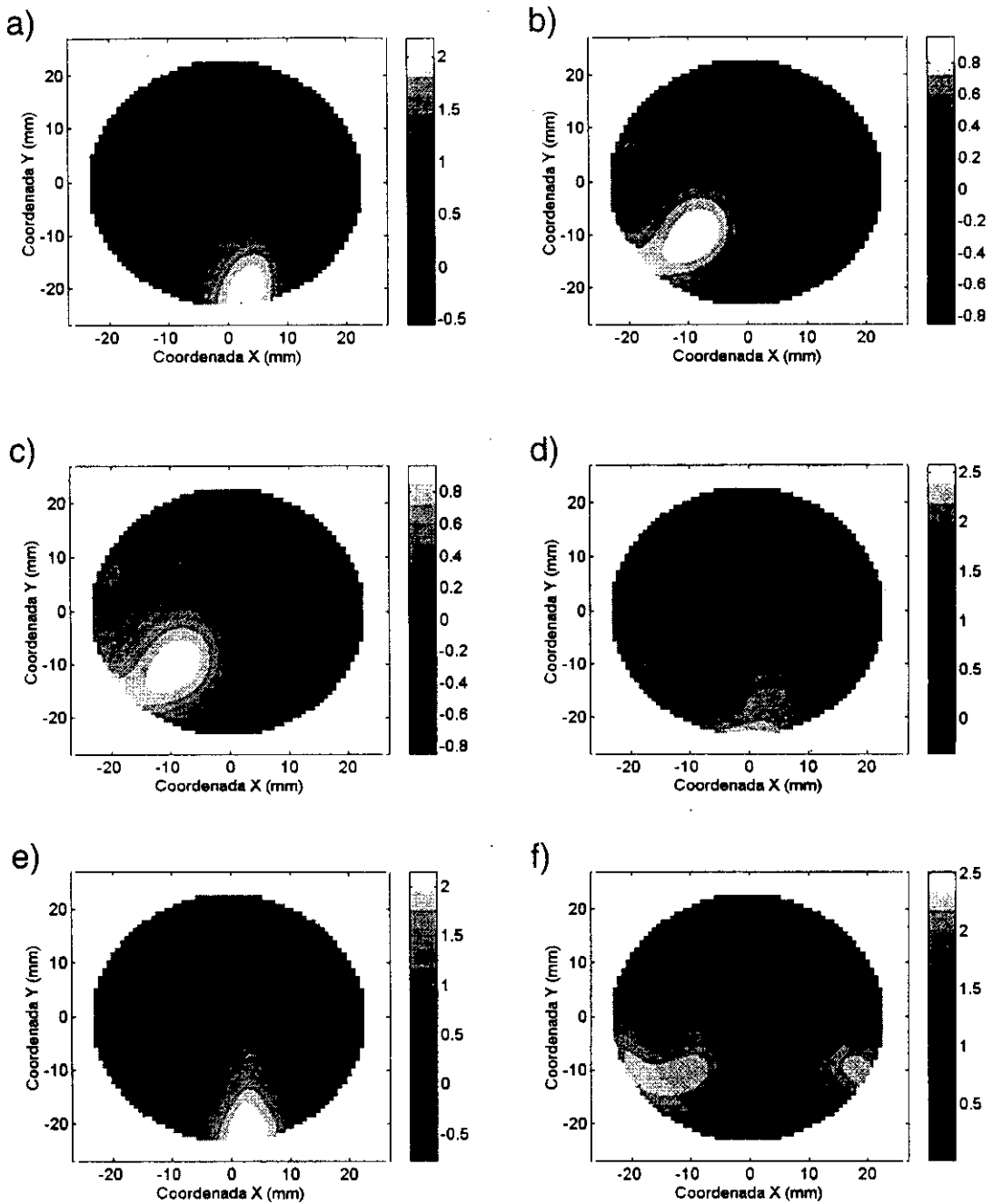


Figura 4.17. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente P2.

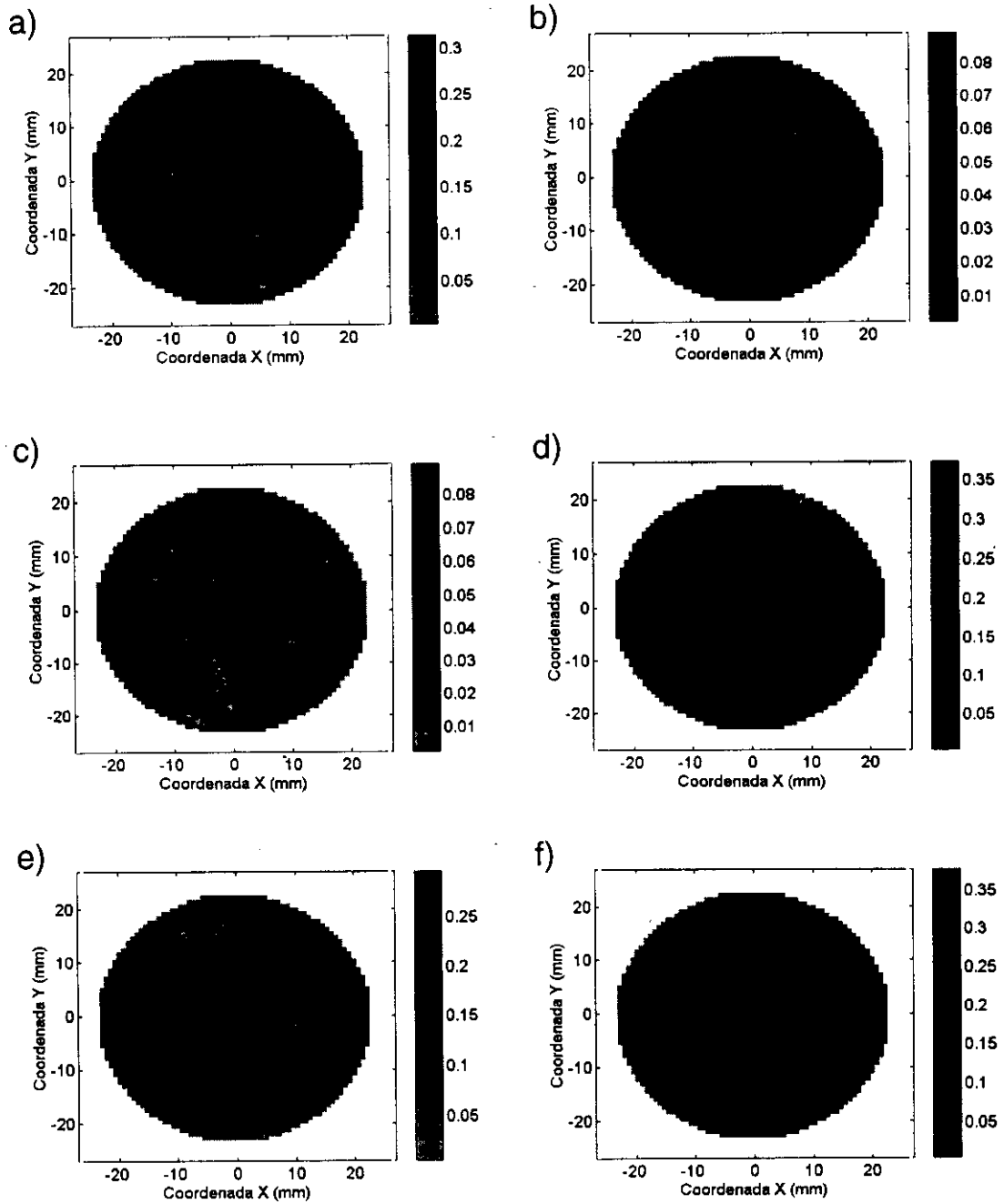


Figura 4.18. Distribución de la estimación del error cometido en la medida de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} , c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente P2.

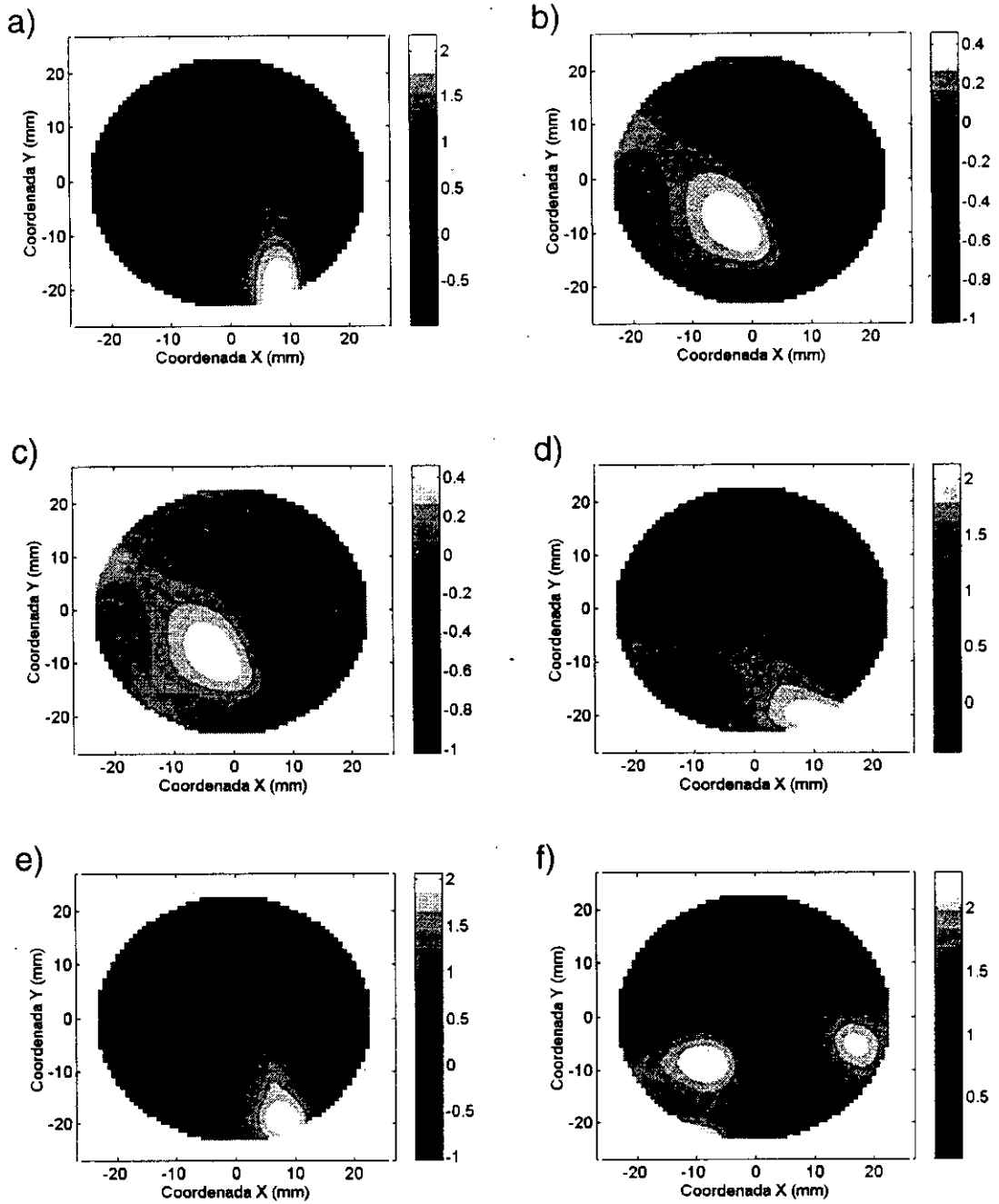


Figura 4.19. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{zy} c) f_{yy} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente P3.

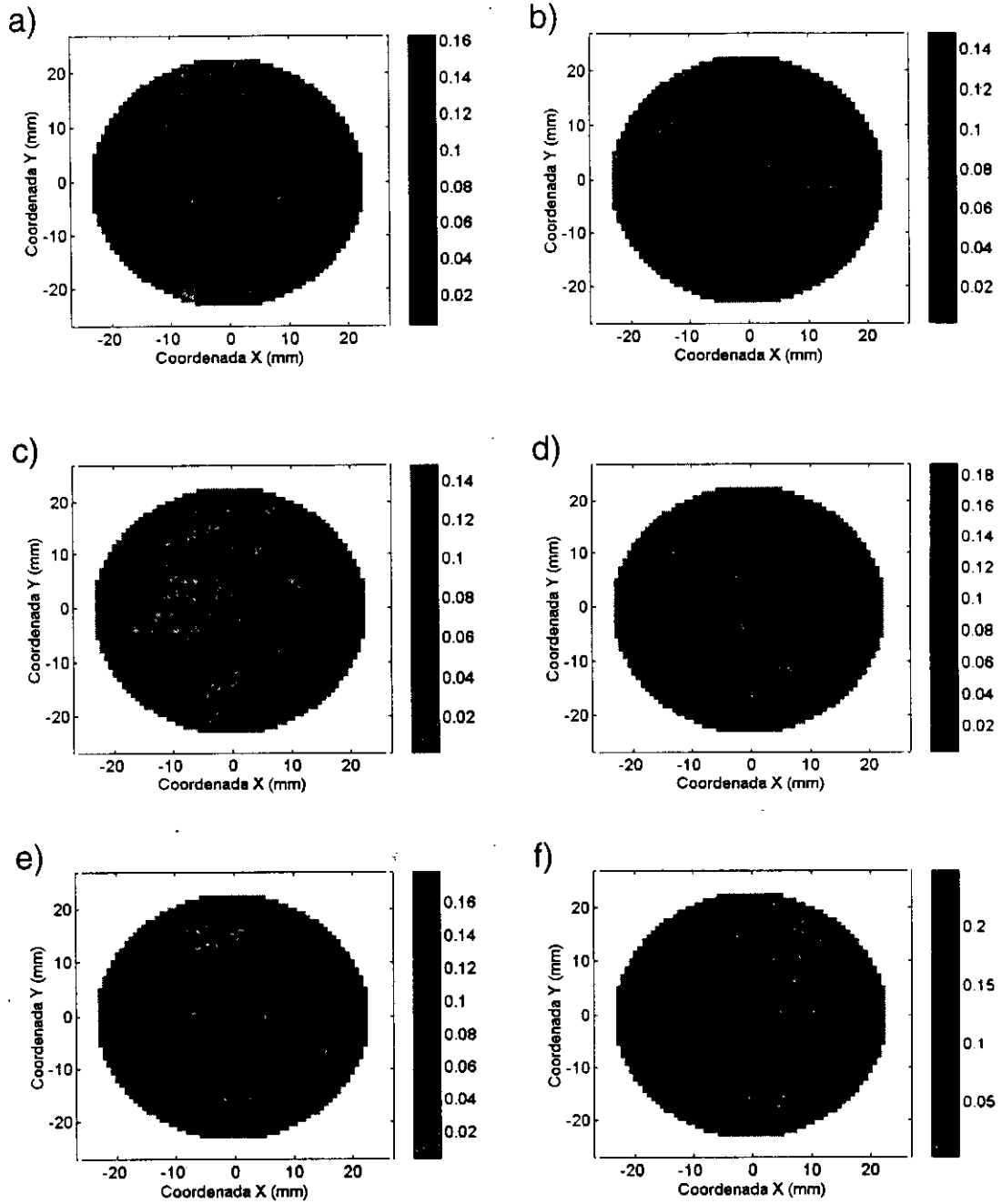


Figura 4.20. Distribución de la estimación del error cometido en la medida de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} , c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente E1.

La estimación del error cometido en la determinación de la MPDL y las potencias esférica y cilíndrica de las lentes A1 y A2 se muestran en las Fig. 4.12 y Fig. 4.14. Tal y como puede verse en dichas gráficas, los errores de los elementos de la MPDL y de las correspondientes potencias esférica y cilíndrica son pequeños, ya que en el caso de la lente A1 no superan las 0.08 D y en el caso de la lente A2 no superan las 0.25 D (aunque los errores medios de la lente A2 son bastante inferiores a esta cota de error). Tal y como ocurre con la distribución de los elementos de la MPDL y de las potencias esféricas y cilíndricas, la lente A1 presenta una distribución de errores “aleatoria” o cuanto menos una apariencia “rugosa”, mientras que la lente A2 presenta una cierta estructura en la distribución de los errores sobre su superficie.

Las lentes P1, P2 y P3, mostradas en las Fig. 4.15, Fig. 4.17 y Fig. 4.19, son lentes progresivas y dicho comportamiento queda correctamente reflejado en las correspondientes distribuciones de potencia esférica y cilíndrica. Así puede verse una zona de visión de lejos que ocupa aproximadamente la mitad superior de las tres lentes, donde la variación de potencia es pequeña (y como son lentes neutras de lejos sus valores son cercanos a cero), mientras que en la parte inferior de estas lentes, la potencia aumenta de modo progresiva hasta encontrarnos una zona de potencia constante en la parte inferior derecha o nasal de las lentes (ya que son lentes construidas para un ojo derecho) siendo el valor de la potencia en esa zona el correspondiente a la suma del valor de la potencia de lejos más la adición, lo cual en nuestro caso nos da unas lentes de +2.00 D, ya que las lentes son neutras de lejos y su adición es justamente +2.00 D. La distribución de potencia cilíndrica sobre la superficie de la lente también presenta un comportamiento de acuerdo con lo descrito en la literatura [18], [19] y [20]. De modo que, podemos encontrar una zona de visión de lejos y otra zona (más pequeña) de visión de cerca, libres de cilindro unidas por medio de un estrecho pasillo (el *pasillo progresivo*), encontrándose una distribución de potencia cilíndrica en ambos laterales del pasillo progresivo de manera que la potencia cilíndrica crece conforme nos alejamos del pasillo progresivo. Las figuras muestran asimismo una ligera diferencia en el diseño de las lentes, diferencia esperable si consideramos que P1, P2 y P3 son lentes pertenecientes a tres marcas comerciales diferentes. Así mismo, es de hacer constar que la lente P3 presenta una ligera rotación del pasillo progresivo hacia la zona nasal, en comparación con las lentes P1 y P2. Esta rotación puede deberse a una ligera imprecisión cometida en el posicionamiento de dicha lente respecto a los ejes del perfilómetro.

La estimación del error cometido en la medida de la MPDL y de las correspondientes potencias esféricas y cilíndricas se muestra en la Fig. 4.16, Fig. 4.18 y Fig. 4.20. En la lente P1 se observa que los mayores errores en la MPDL se concentran en la parte inferior de la lente a ambos lados del pasillo progresivo (para la componente f_{xx}) o en las zonas laterales (componentes f_{xy} y f_{yy}). El valor máx-

imo del error cometido no supera en todo caso el cuarto de dioptría y en general el valor medio del error cometido es del orden de 0.1 D, valor en consonancia con la precisión de otros métodos experimentales como la media de potencias por medio de un frontofocómetro automático. El comportamiento de los errores cometidos en la determinación de la esfera y el cilindro es muy similar.

En el caso de la lente P2, las zonas con altos valores (del orden de 0.25 D) de error tanto en los elementos de la MPDL como en las potencias esférica y cilíndrica son más reducidas, aunque su localización sobre la superficie de la lente es muy parecida a la que presentaba la lente P1, esto es, en las zonas inferiores y laterales de la lente. En este caso también encontramos valores máximos cercanos al cuarto de dioptría (excepto en la componente f_{xy} de la MPDL, donde no se sobrepasan las 0.08 D) y un valor medio del orden de 0.1 D.

Sin embargo, para la lente P3, el mayor valor del error cometido en la determinación de los elementos de la MPDL no sobrepasa las 0.16 D, siendo el valor medio del orden de 0.08 D. De modo que, en este caso la precisión del método es mayor que la proporcionada por el empleo de un frontofocómetro automático. En este caso puede comprobarse la existencia de cierta estructura en la distribución de los errores, sobre todo en las componentes f_{xx} y f_{yy} de la MPDL. Como ocurre con las lentes P1 y P2, el comportamiento de los errores cometidos en la determinación de la esfera y el cilindro es similar al que presentan los errores en los elementos de la MPDL.

4.3 Medida de la MPDL a partir de la deflexión de los rayos sobre una lente oftálmica.

4.3.1 Descripción del dispositivo experimental para la medida de la MPDL a partir de la deflexión de rayos

En esta sección, vamos a comparar los resultados de dos métodos para la medida de la MPDL. Por un lado, la medida de la MPDL a partir de las derivadas segundas de las ságitas y por otro la medida de la MPDL a partir de las derivadas del efecto prismático. De acuerdo con los resultados del capítulo 3, tenemos la siguiente expresión que relaciona los elementos f_{xx} , f_{xy} y f_{yy} de la MPDL y las componentes P_x y P_y de la potencia prismática

$$f_{xx} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}, \quad (4.26)$$

$$f_{yx} = -\frac{\partial P_y}{\partial x} = -\frac{\partial P_x}{\partial y}, \quad (4.27)$$

$$f_{yy} = -\frac{\partial P_y}{\partial y}. \quad (4.28)$$

De modo que, si conocemos la distribución de las componentes P_x y P_y del efecto prismático a lo largo de la superficie de la lente, es posible obtener los valores de los elementos de la MPDL a partir de las derivadas parciales de las anteriores cambiadas de signo.

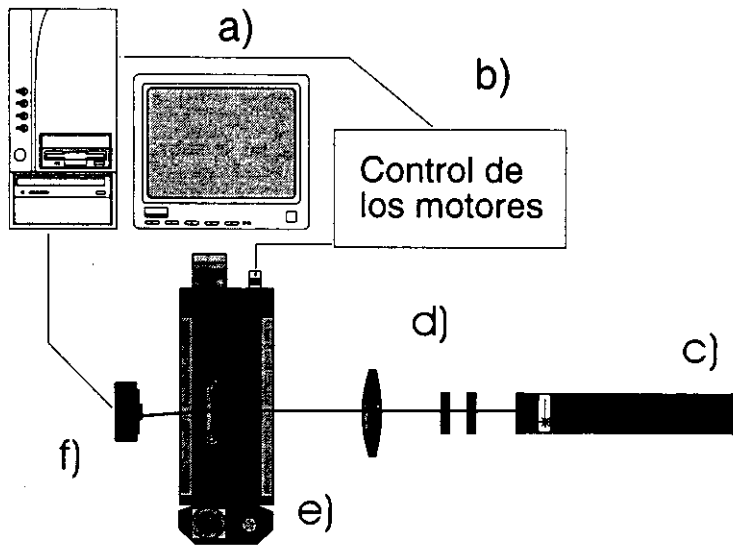


Figura 4.21. Esquema del dispositivo experimental empleado para la medida directa de la deflexión de rayos en lentes oftálmicas. Elementos: a) Ordenador b) unidad de control de los motores, c) láser; d) filtro espacial, polarizador y lente colimadora, e) motores paso a paso y f) cámara CCD desnuda.

La medida de la deflexión (o efecto prismático) que experimenta un rayo al refractarse en cada punto de una superficie puede realizarse de varias maneras. Se puede encontrar una abundante literatura sobre métodos basados en deflectometría Moiré con mayor o menor grado de automatismo [11], [12], [13], [14] y [15]. Aunque también es posible encontrar otros métodos, como la medida directa de la deflexión de un rayo [9] y [16]. En el Departamento de Óptica, UCM [21] se ha desarrollado un dispositivo para la medida directa de la deflexión de un haz láser en la superficie de una lente oftálmica. Tal y como puede apreciarse en la Fig. 4.21 este dispositivo de medida consta de un haz láser, que tras ser atenuado por un filtro neutro y un polarizador lineal incide sobre una lente colimadora de alta focal, de modo que el haz láser es colimado, pero el diámetro de la mancha que produce en una pantalla suficientemente alejada de la lente colimadora es pequeña. Tras ser colimado, el haz láser incide sobre una cámara CCD

desnuda. La lente que se quiere estudiar se coloca a poca distancia de la cámara CCD sobre un soporte que puede moverse en el plano perpendicular al haz (Fig. 4.21) por medio de unos desplazadores lineales motorizados. En estas condiciones, la medida de los efectos prismáticos que se producen en un punto de la superficie de la lente se realiza del siguiente modo: se mueve la lente hasta que el haz láser incida sobre la misma en el punto donde se desean medir los efectos prismáticos y se calcula la posición del centro de masas de la imagen del haz laser que recoge la CCD. La posición del centro de masas del haz viene dada por las ecuaciones

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{pixel}} x_i I_i}{\sum_{i=1}^{N_{pixel}} I_i}, \quad (4.29)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{pixel}} y_i I_i}{\sum_{i=1}^{N_{pixel}} I_i}. \quad (4.30)$$

Donde (x_i, y_i) son las coordenadas de posición del i -ésimo pixel de la CCD (suponiendo que el centro de coordenadas se halla en el centro geométrico del "chip" CCD) y donde I_i es la intensidad recogida por la CCD para este pixel y N_{pixel} es el número de pixels de la CCD. En primera aproximación puede considerarse que la posición del centro del haz viene dada por la posición del centro de masas de la imagen del haz recogida por la CCD. En estas condiciones si conocemos la distancia z entre el soporte de la lente y la cámara CCD, las componentes del efecto prismático vendrán dadas por

$$P_x = \frac{\bar{x}}{z}, \quad (4.31)$$

$$P_y = \frac{\bar{y}}{z}, \quad (4.32)$$

suponiendo que

$$z^2 \gg \bar{x}^2 + \bar{y}^2, \quad (4.33)$$

lo cual es cierto para lentes de baja potencia (< 2 D). En estas condiciones, es posible calcular los elementos de la MPDL a partir de las expresiones (4.26), (4.27) y (4.28).

4.3.2 Comparación de los dos métodos de medida de los elementos de la MPDL

En esta subsección vamos a mostrar en primer lugar los resultados experimentales obtenidos al medir las

lentes A2, P1 y P2. En la Fig. 4.22, Fig. 4.23 y Fig. 4.24 se muestran los resultados experimentales obtenidos por el método de medida de la deflexión directa de los rayos.

Cualitativamente, se encuentra un buen acuerdo¹ entre los resultados de las medidas de la MPDL a partir de la medida de la superficie de la lente (Fig. 4.13, Fig. 4.15 y Fig. 4.17) y los resultados proporcionados por el método de la deflexión directa de rayos. Para poder realizar una comparación cualitativa, vamos a representar una serie de perfiles longitudinales de potencia esférica y cilíndrica obtenidas por ambos métodos de medida. Así pues hemos tomado los perfiles de potencia esférica y cilíndrica a lo largo de las líneas horizontales dadas por las ecuaciones ($y = -15$ mm, $y = -10$ mm, $y = -5$ mm, $y = 0$ mm, $y = 5$ mm e $y = 10$ mm), tal y como puede verse en la Fig. 4.25, Fig. 4.26, Fig. 4.27, Fig. 4.28, Fig. 4.29 y Fig. 4.30. Para poder cuantificar la diferencia entre ambos métodos de medida hemos calculado la media de los valores absolutos de la diferencia entre los perfiles de potencia correspondientes a la medida de la MPDL a partir de las medidas superficiales con aquellos resultantes de medir la MPDL a partir de la deflexión de los rayos en la lente. Matemáticamente, se define dicha magnitud como

$$d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i^S - X_i^D|, \quad (4.34)$$

siendo X_i^S el valor de la potencia calculado a partir de las medidas superficiales en el punto i -ésimo del perfil de potencia, X_i^D el valor de la potencia medido a partir de la deflexión directa del rayo en el mismo punto del perfil de potencia y N el número de puntos a lo largo de dicho perfil. Las Tablas 4.II y 4.III nos muestran los valores de d para las potencias esféricas y cilíndricas de lentes comparadas en cada uno de los meridianos (numéados del 1 al 6 según el orden decreciente de valores de y).

En el caso de la lente esférica A2, encontramos que, aunque cuantitativamente, las diferencias entre los perfiles de potencia esférica y cilíndrica no son muy grandes (del orden de la décima de dióptría, esto es del orden del error cometido en la determinación de las potencias), la forma de los perfiles de potencia es diferente según el método de medida. Esta diferencia en la forma de los perfiles de potencia está de acuerdo con las diferencias que se aparecen en las distribuciones de los elementos de la MPDL y de la potencia esférica y cilíndrica. En efecto, de acuerdo con la Fig. 4.22 la distribución de los elementos de la MPDL y potencias esférica y cilíndrica dados por la deflexión de rayos presenta un aspecto "ruidoso", mientras que la distribución de elementos de la MPDL y potencias esférica y cilíndrica dados por la medida de las superficies refractoras presenta una cierta estructura. En el primer caso, creemos que el

¹ Excepto en el caso de la lente esférica A2 que será comentando más adelante.

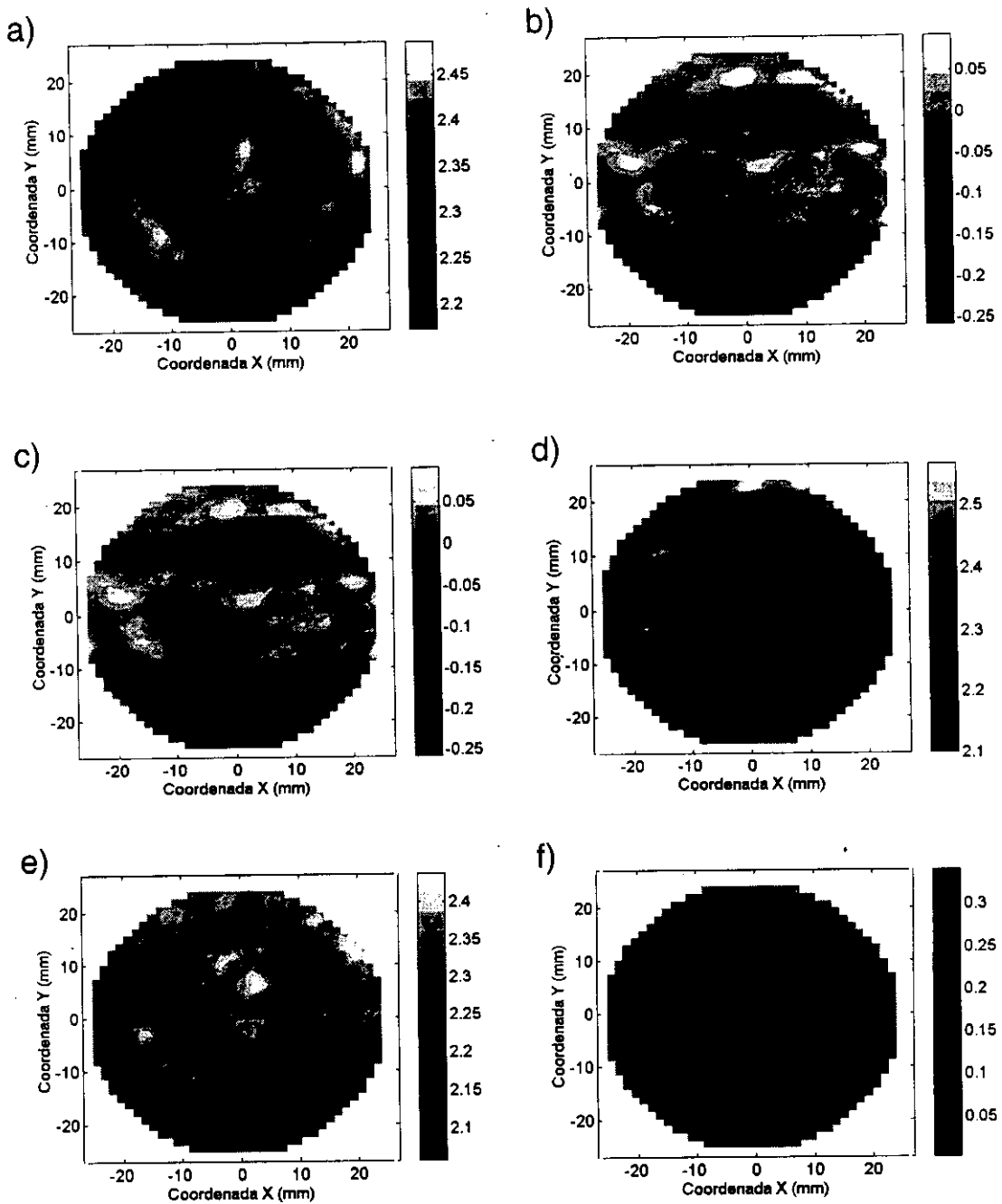


Figura 4.22. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} , c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente A2, obtenidas a través de la medida de la deflexión de un haz de luz sobre la superficie de la lente.

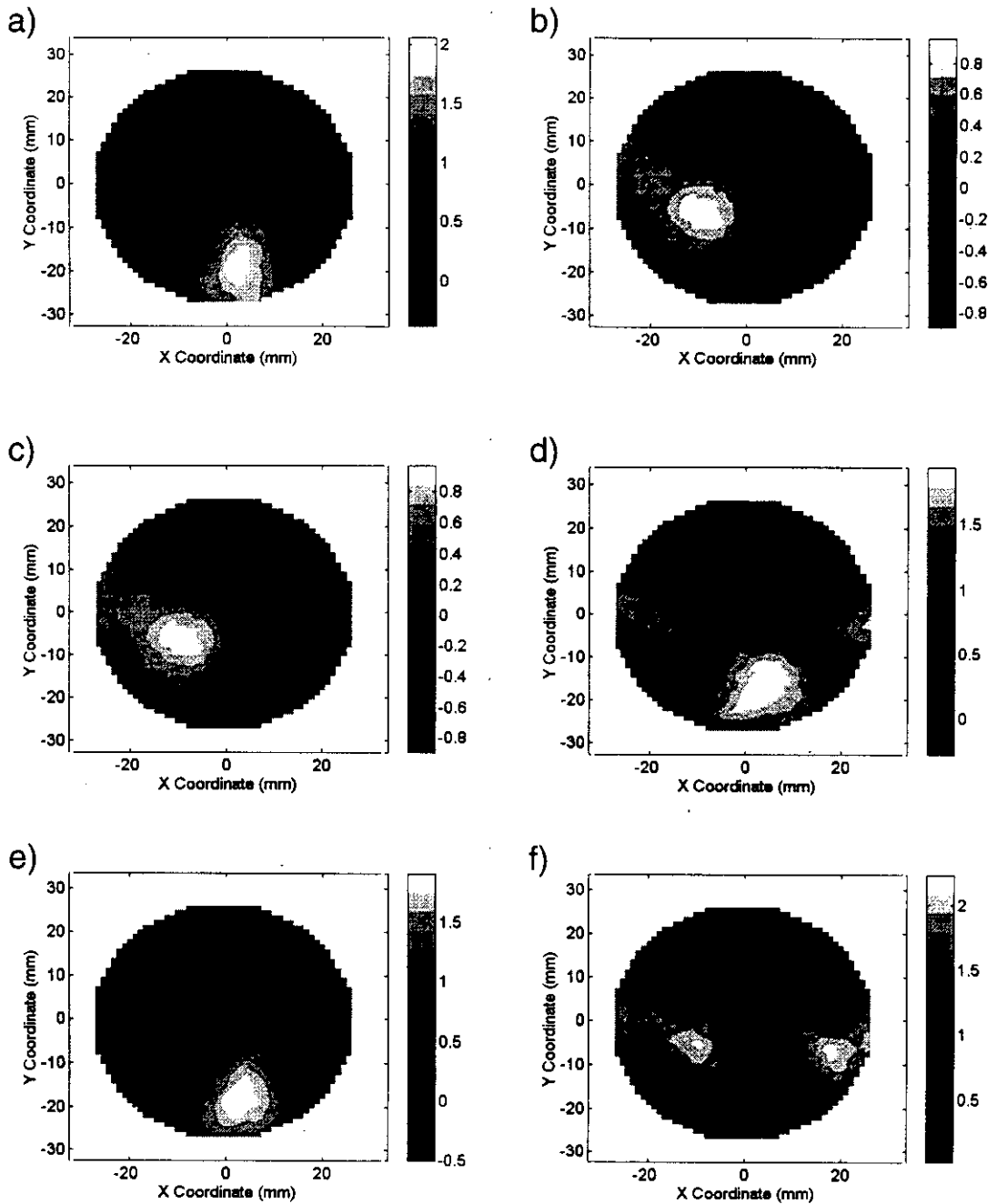


Figura 4.23. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xx} , b) f_{xy} , c) f_{yz} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente P1, obtenidas a través de la medida de la deflexión de un haz de luz sobre la superficie de la lente.

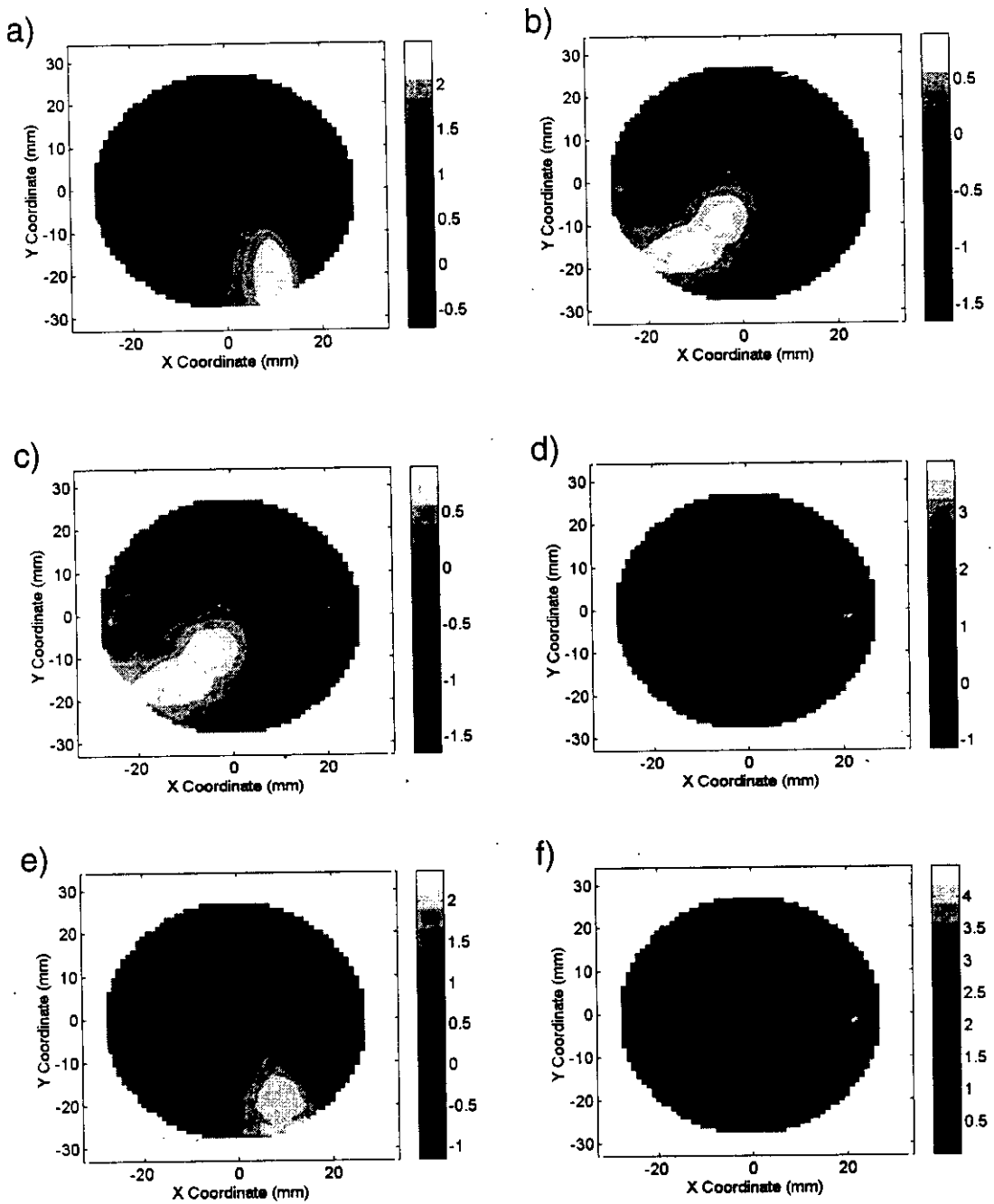


Figura 4.24. Distribución de los elementos de la MPDL, a) f_{xz} , b) f_{xy} , c) f_{yx} , d) f_{yy} y de las potencias e) esférica y f) cilíndrica sobre la superficie de la lente P2, obtenidas a través de la medida de la deflexión de un haz de luz sobre la superficie de la lente.

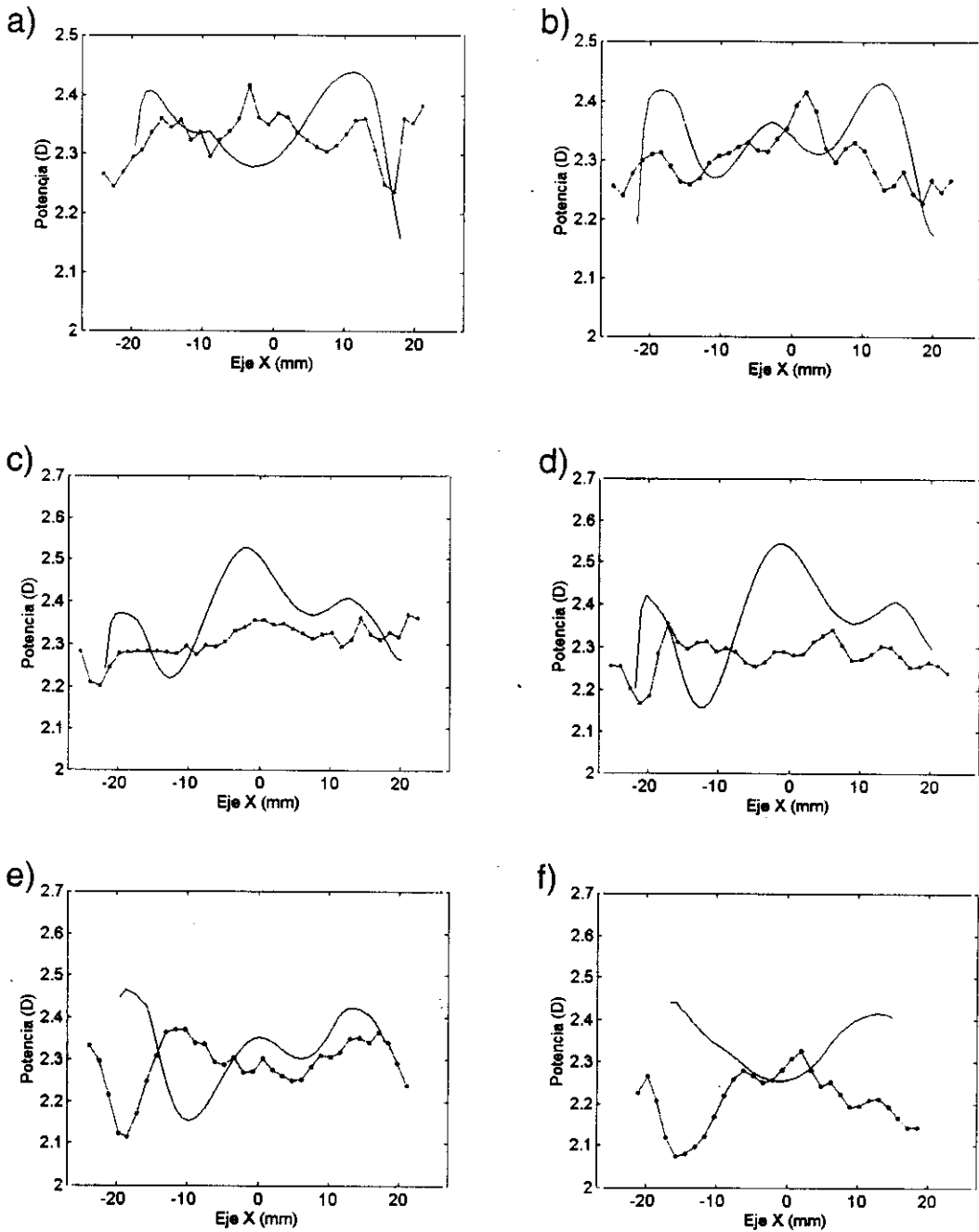


Figura 4.25. Perfiles longitudinales de potencia esférica a lo largo de los meridianos dados por las ecuaciones a) $y = 10$ mm, b) $y = 5$ mm, c) $y = 0$ mm, d) $y = -5$ mm, e) $y = -10$ mm y f) $y = -15$ mm de la lente A2. La línea continua se corresponde con el método perimétrico, mientras que la línea continua con puntos gruesos corresponde al método deflectométrico.

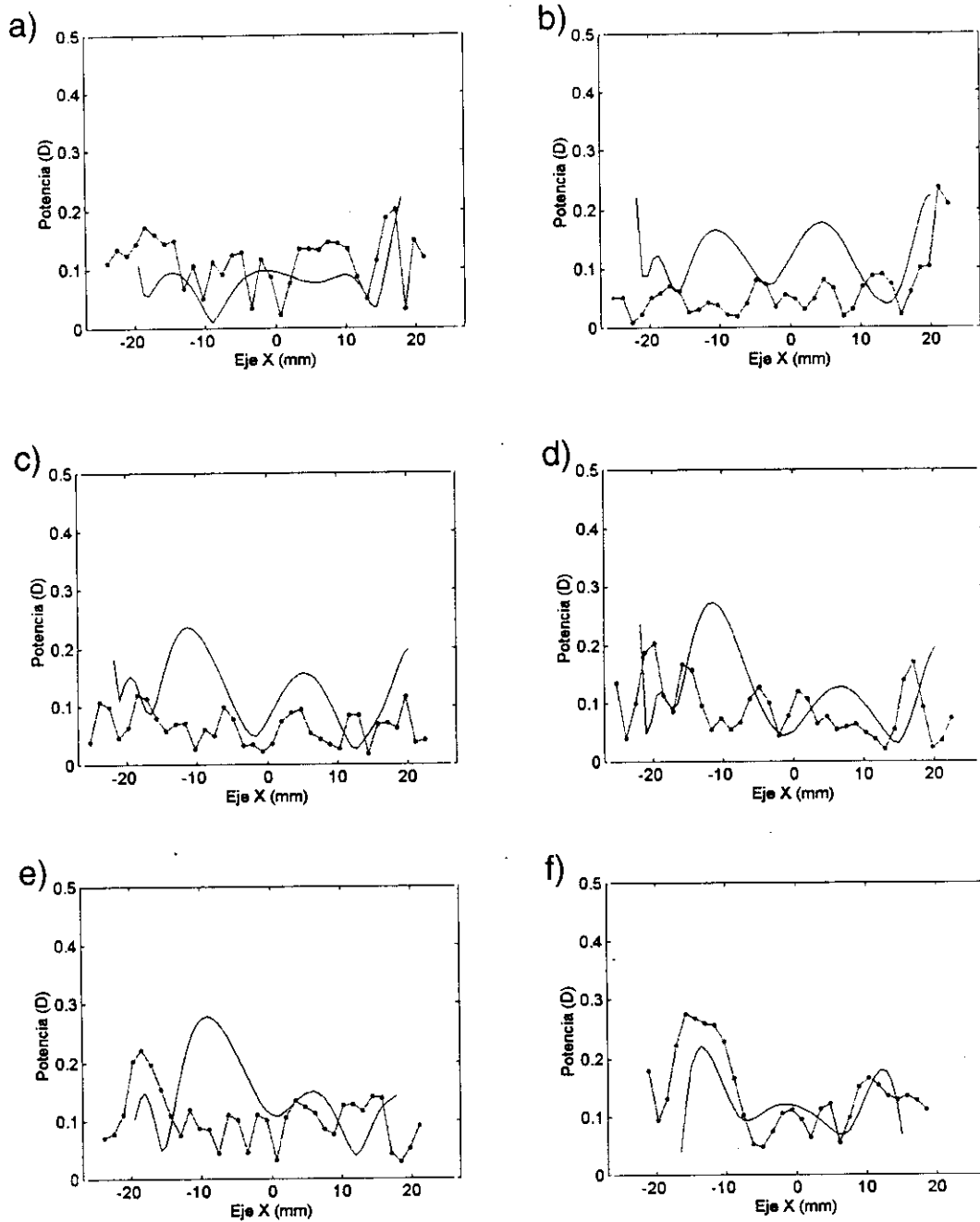


Figura 4.26. Perfiles longitudinales de potencia cilíndrica a lo largo de los meridianos dados por las ecuaciones a) $y = 10$ mm, b) $y = 5$ mm, c) $y = 0$ mm, d) $y = -5$ mm, e) $y = -10$ mm y f) $y = -15$ mm de la lente A2. La línea continua se corresponde con el método perifilmétrico, mientras que la línea continua con puntos gruesos corresponde al método deflectométrico.

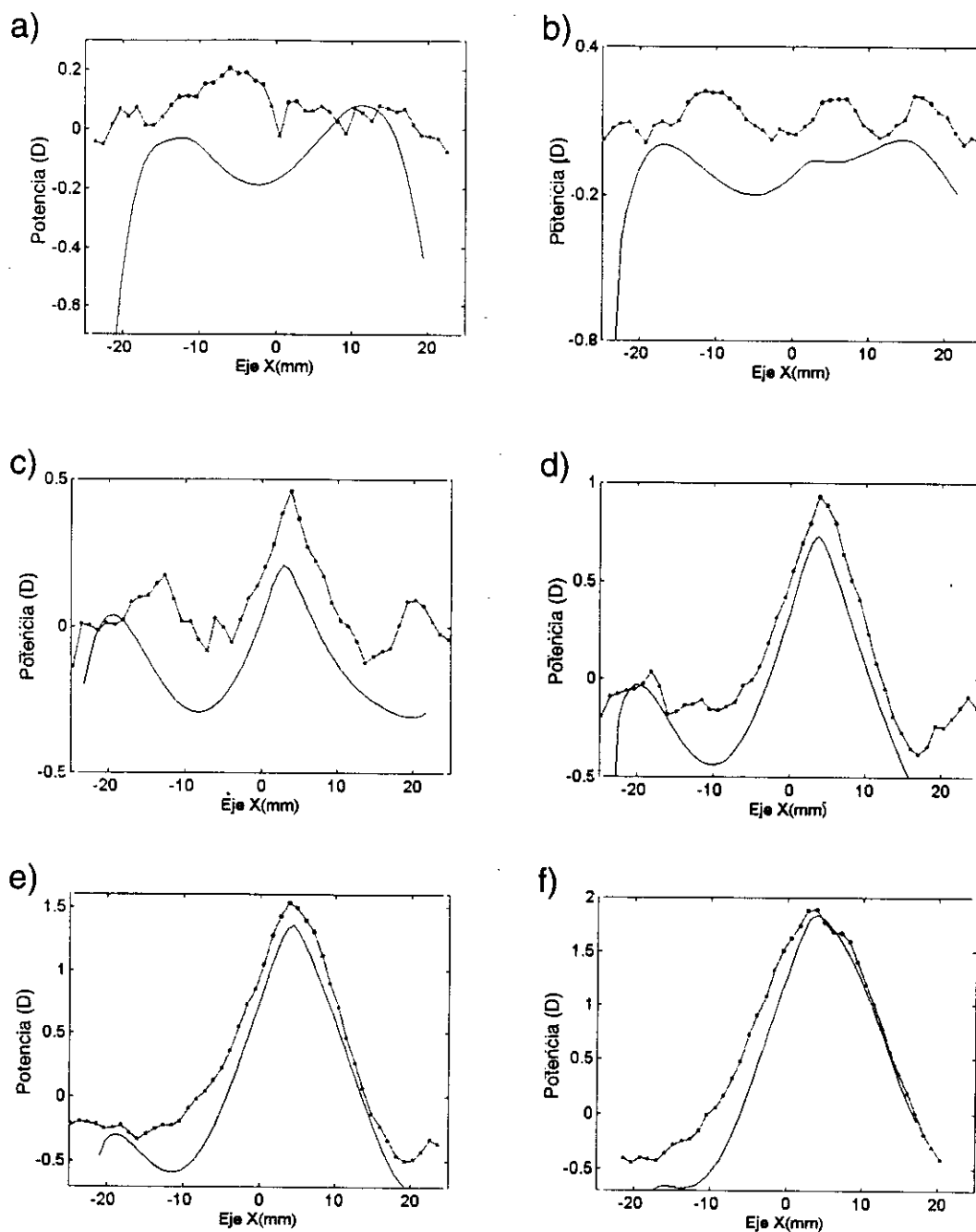


Figura 4.27. Perfiles longitudinales de potencia esférica a lo largo de los meridianos dados por las ecuaciones a) $y = 10$ mm, b) $y = 5$ mm, c) $y = 0$ mm, d) $y = -5$ mm, e) $y = -10$ mm y f) $y = -15$ mm de la lente P1. La línea continua se corresponde con el método perifilmétrico, mientras que la línea continua con puntos gruesos corresponde al método deflectométrico.

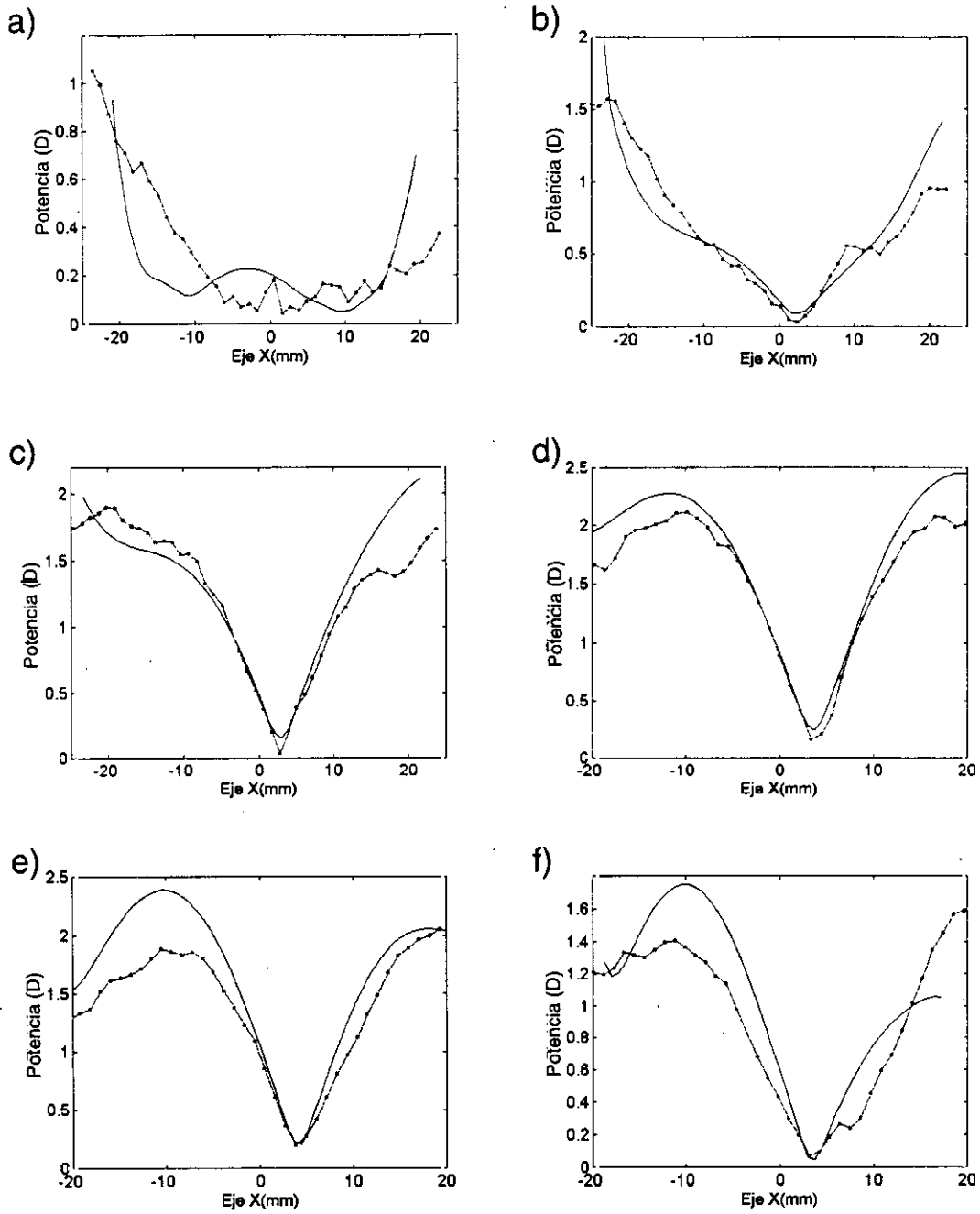


Figura 4.28. Perfiles longitudinales de potencia esférica a lo largo de los meridianos dados por las ecuaciones a) $y = 10$ mm, b) $y = 5$ mm, c) $y = 0$ mm, d) $y = -5$ mm, e) $y = -10$ mm y f) $y = -15$ mm de la lente P1. La línea continua se corresponde con el método perimétrico, mientras que la línea continua con puntos gruesos corresponde al método deflectométrico.

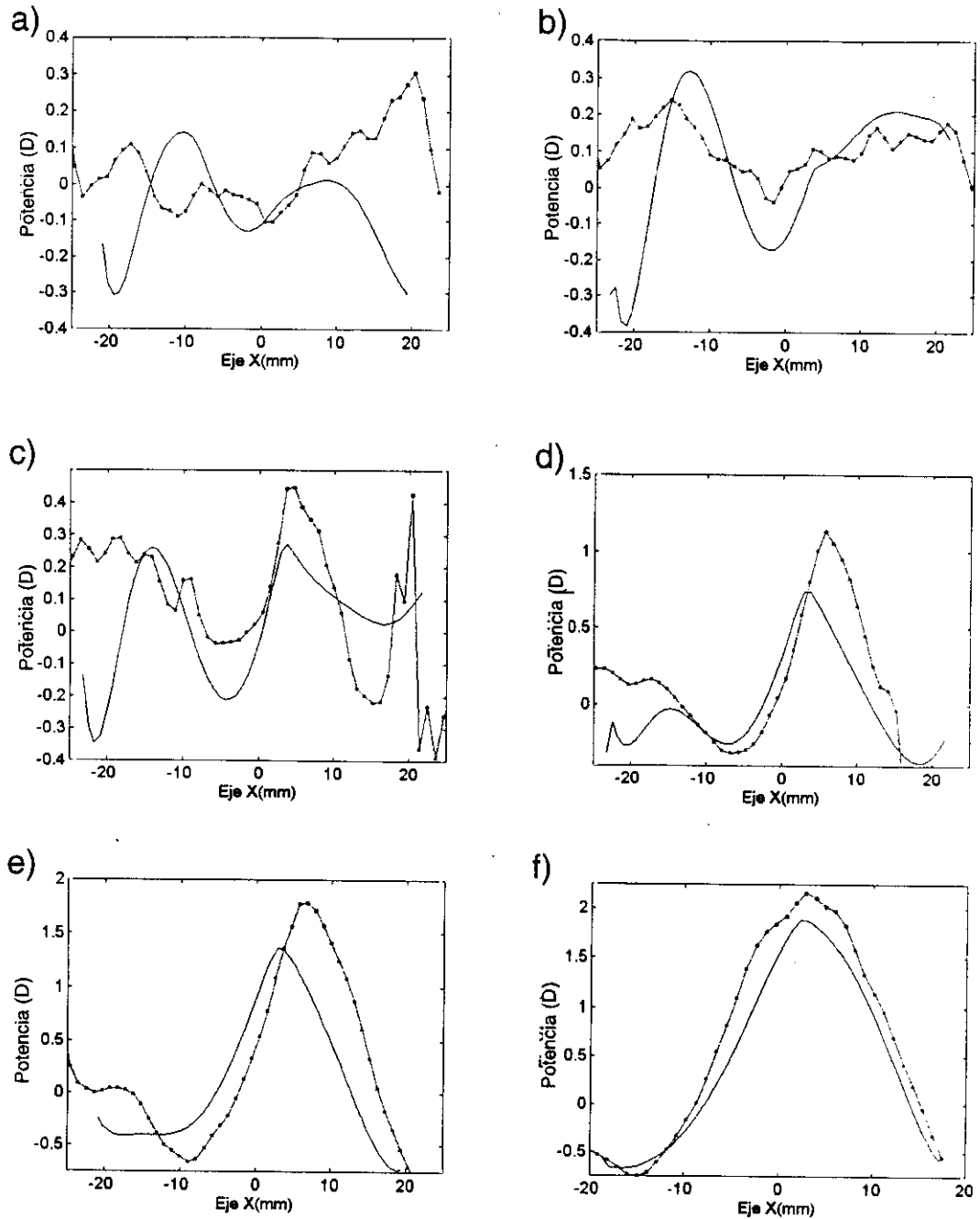


Figura 4.29. Perfiles longitudinales de potencia esférica a lo largo de los meridianos dados por las ecuaciones a) $y = 10$ mm. b) $y = 5$ mm. c) $y = 0$ mm. d) $y = -5$ mm. e) $y = -10$ mm y f) $y = -15$ mm de la lente P2. La línea continua se corresponde con el método perfilométrico, mientras que la línea continua con puntos gruesos corresponde al método deflectométrico.

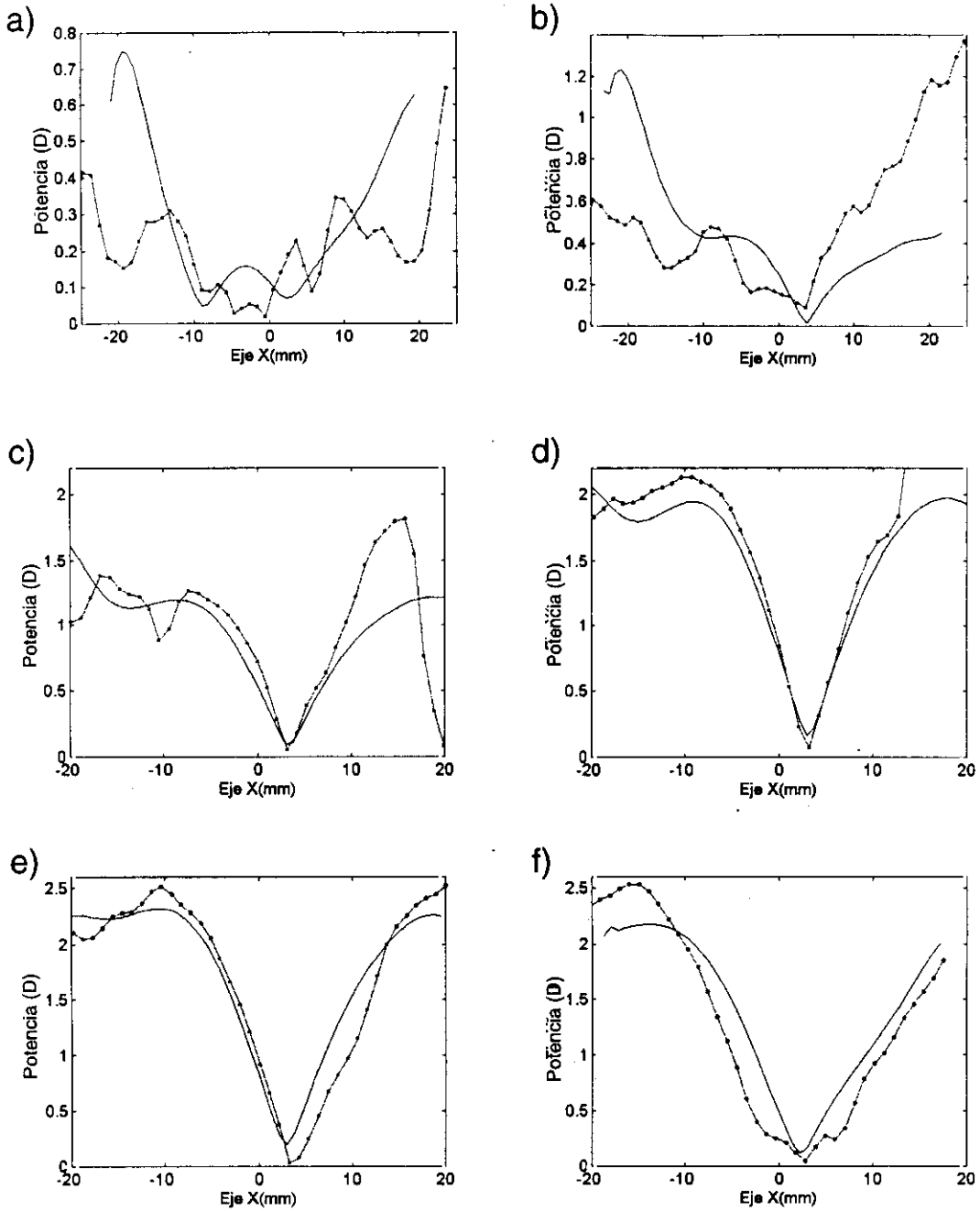


Figura 4.30. Perfiles longitudinales de potencia cilíndrica a lo largo de los meridianos dados por las ecuaciones a) $y = 10$ mm, b) $y = 5$ mm, c) $y = 0$ mm, d) $y = -5$ mm, e) $y = -10$ mm y f) $y = -15$ mm de la lente P2. La línea continua se corresponde con el método perimétrico, mientras que la línea continua con puntos gruesos corresponde al método deflectométrico.

Tabla 4.III Valor de la distancia media entre los valores de la potencia esférica obtenidos por perfilometría frente aquellos obtenidos por deflexión directa

Perfil	Lente A2	Lente P1	Lente P2
1	0.05 D	0.14 D	0.17 D
2	0.07 D	0.14 D	0.31 D
3	0.07 D	0.15 D	0.30 D
4	0.07 D	0.20 D	0.22 D
5	0.08 D	0.25 D	0.20 D
6	0.04 D	0.26 D	0.26 D

aspecto ruidoso de las distribuciones de los elementos de la MPDL y de las potencias esférica y cilíndrica son debidos a que las pequeñas variaciones que aparecen en el efecto prismático (debidas a su vez a que la mayor variación de potencia observada es de 0.5 D en el borde de la lente) a lo largo de la superficie son amplificadas por el proceso de derivación discreta. En el caso del método de medida de la MPDL a partir de medidas superficiales, la estructura que aparece es debida a que la superficie de la lente conserva en gran medida su simetría de revolución.

En el caso de las lentes progresivas P1 y P2, podemos observar ciertas diferencias entre los perfiles correspondientes al método de medida de la MPDL por perfilometría y aquellos correspondientes al método deflectométrico con valores del orden de las dos décimas de dioptría (esto es dos veces el error estimado que se comete en la medida de los elementos de la MPDL por perfilometría). Estas diferencias se deben a nuestro parecer a dos causas: 1) en primer lugar, al no disponer de la posibilidad de realizar un ajuste exacto de la posición de la lente frente al sistema de medida, tenemos una pequeña rotación entre las dos imágenes, de modo que aparece un error debido al centrado y posicionamiento de la lente; 2) en segundo lugar tenemos las diferencias intrínsecas de ambos métodos. Aunque hemos tratado de corregir de modo manual el efecto de la rotación a la hora de obtener los perfiles de potencia, existen todavía diferencias entre los perfiles de potencia debido a la rotación relativa existente de los sistemas de referencia. Este efecto es más acusado en la lente P2, que presenta mayor grado de rotación (Fig. 4.17 y Fig. 4.24). De todos modos, tal y como puede verse en las figuras el acuerdo entre ambos métodos es cualitativamente aceptable. Cuantitativamente (Tablas 4.II y 4.III) se encuentran diferencias en potencia del orden de las dos décimas de dioptría como término medio, lo cual prueba un buen acuerdo entre ambos métodos en el caso de medida de lentes progresivas, dado que estos valores son del mismo orden que los valores numéricos del error cometido en la determinación de la MPDL.

También puede apreciarse que, en general el método de medida de potencias por deflectometría presenta en las zonas de visión lejanas perfiles de potencia ruidosos. Esto es debido a que en las zonas

Tabla 4.III Valor de la distancia media entre los valores de la potencia cilíndrica obtenidos por perfilometría frente aquellos obtenidos por deflexión directa

Perfil	Lente A2	Lente P1	Lente P2
1	0.06 D	0.20 D	0.16 D
2	0.06 D	0.22 D	0.13 D
3	0.08 D	0.20 D	0.17 D
4	0.12 D	0.21 D	0.25 D
5	0.10 D	0.22 D	0.23 D
6	0.14 D	0.25 D	0.24 D

de visión lejana al ser ambas lentes P1 y P2 neutras, los efectos prismáticos son aproximadamente constantes, porque el efecto prismático debido a potencia no se manifiesta y solo se manifiesta en esa zona una deflexión constante resultante del llamado *prisma de adelgazamiento*, que no es más que un descentramiento entre las dos superficies refractoras introducido por el fabricante de la lente para obtener valores más reducidos de los espesores en la periferia de la lente. Al ser el efecto prismático casi constante con una pequeña variación debido a la amplificación del ruido introducida por el proceso de derivación discreta, dicha variación se amplifica resultando unos perfiles de potencia ruidosos en la zona de lejos. Por otro lado, en el caso de medida de potencias por perfilometría automática nos encontramos, en ocasiones, con comportamientos erráticos en los bordes de la lente debidos fundamentalmente a las características de los polinomios de Zernike, que suelen presentar dicho comportamiento en la frontera del círculo unidad donde están definidos [8].

Referencias

- [1] Gasvik, K.J., *Optical metrology*, Wiley & Sons, New York, 1987
- [2] Toyooka, S., Iwaasa Y., "Automatic profilometry of 3-D diffuse objects by spatial phase detection", *Appl. Opt.*, **25**, 1630-1633, (1986).
- [3] Binning, G., Quate, C. F., Gerber, Ch, "Atomic force microscope", *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 930-933, (1986).
- [4] Binning, G., Rohrer, H., "Scanning tunneling microscopy", *Helv Phys. Acta*, **55**, 726-735, (1982).
- [5] Wyant, J.C., Prettyjohns, K.N., "Three-dimensional surface metrology using a computer controlled non-contact instrument", *Proc. SPIE*, **661**, 292-295, (1986).

- [6] Whitehouse, D.J., "Surface metrology", *Meas. Sci. Technol.*, **8**, 955-972, (1997).
- [7] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling W.T. y Flannery, B. P. *Numerical Recipes*, 2ª edición, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- [8] Born, M., Wolf, E. *Principles of Optics*, 6ª edición, Pergamon Press, New York, (1966).
- [9] Malacara, D. (Editor) *Optical Shop Testing*, John Wiley & Sons, New York, (1992).
- [10] Fischer D., O'Bryan J., Lopez R., Stahl P., "Vector formulation for intergerogram surface fitting", *Appl. Opt.*, **32**, 4738-4743, (1993).
- [11] Kafri O., Glatt Y, *The Physics of Moire Metrology*, John Wiley & Sons, New York, (1990).
- [12] Kafri O., "Noncoherent method for mapping phase objects", *Opt. Lett.*, **5**, 555-558, (1980).
- [13] T. Yönte, J.A. Gómez-Pedrero, H. Canabal, E. Bernabeu, "Automatic measurements of paraxial focal distances in ophthalmic lenses by Moiré deflectometry", *Simulations and Experiments in Laser Metrology*, Springer Verlag, Berlin, (1996).
- [14] H. Canabal, J.A. Quiroga, E. Bernabeu, "Automatic processing in Moiré deflectometry by local fringe direction calculation", *Appl. Opt.*, en prensa, (1998).
- [15] H. Canabal, J.A. Quiroga, E. Bernabeu, "Improved phase-shifting method for automatic processing of moiré deflectograms", *Appl. Opt.*, en prensa, (1998).
- [16] Williams D.C. (editor), *Optical Methods in Engineering Metrology*, Chapman & Hall, Londres, (1993).
- [17] Fannin T., Grosvenor T., *Clinical Optics*, 2ª edición, Butterworth Heinemann, (1996).
- [18] Fowler C.W., Sullivan C.M., "Automatic measurement of varifocal spectacle lenses", *Ophthal. Physiol. Opt.*, **10**, 86-89, (1990).
- [19] Atchison D.A., "Optical performance of of progressive power lenses", *Clin. Exp. Optom.*, **64**, 149-155, (1987).
- [20] J.M. Vázquez, J.A. Gómez-Pedrero, T. Yönte, J. Marcén, E. Bernabeu, "Utilización del frontofocómetro en el estudio de las lentes progresivas", *Ver y Oír*, **105**, 345-351, (1996).

- [21] H. Canabal, *Automatización de medidas deflectométricas y su aplicación en la caracterización de lentes oftálmicas*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, (1998).

Algunas aplicaciones del formalismo de la MPDL en Óptica Oftálmica

En este capítulo se muestran dos aplicaciones del formalismo de la MPDL desarrollado en capítulos anteriores a la Óptica Oftálmica. La primera aplicación está relacionada con la representación de la MPDL como una función vectorial del espacio de las matrices reales simétricas de dimensión 2×2 . La representación vectorial de la MPDL permite la representación gráfica de una lente oftálmica como una nube de puntos en un espacio euclideo tridimensional. De esta manera se han representado las lentes medidas en el capítulo anterior y se ha analizado la forma que presenta la nube de puntos que representa la MPDL en el espacio euclideo tridimensional para los casos particulares de lentes esféricas, esféricas y progresivas. La segunda aplicación del formalismo de la MPDL consiste en el cálculo de las diferencias existentes en potencia prismática y potencia refractora entre dos puntos correspondientes cualesquiera de una pareja de lentes progresivas montadas en la misma montura. De este modo se han determinado las zonas de una lente progresiva que resultan menos aptas para la visión binocular

5.1 Representación en el espacio de potencia dióptrica.

5.1.1 El espacio de potencia dióptrica.

Tal y como vimos en el capítulo 2, de la aplicación de los métodos de la Óptica matricial al estudio de lentes oftálmicas resulta la caracterización de una lente oftálmica esferotórica por medio de una matriz simétrica de dimensiones 2×2 cuyos elementos son números reales. Puede demostrarse que tales matrices forman un espacio de Hilbert [1] que denominaremos Ms_2 . Una base ortonormal de este espacio, que resulta conveniente para el estudio de estados refractivos [2] y [3] esta formada por las matrices

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1a)$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.1b)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1c)$$

De manera que cualquier matriz simétrica perteneciente a Ms_2 puede escribirse como una combinación

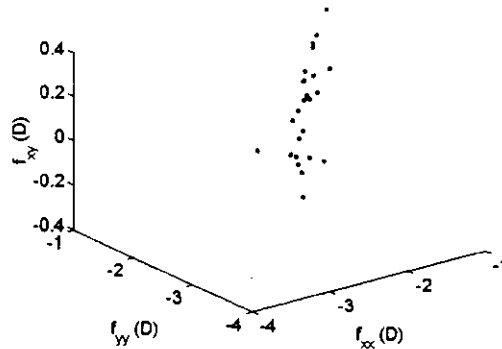


Figura 5.1. Representación en el espacio de potencias de 25 medidas del estado refractivo de un sujeto obtenidas a partir de un refractómetro automático.

lineal de las matrices e_1 , e_2 y e_3 de modo que

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = f_{xx}e_1 + f_{yy}e_2 + \sqrt{2}f_{xy}e_3, \quad (5.2)$$

con lo cual, un estado refractivo cualquiera puede representarse como un vector $(f_{xx}, f_{yy}, \sqrt{2}f_{xy})$ del espacio de Hilbert Ms_2 . De este modo es posible representar un estado refractivo cualquiera como un punto en un espacio euclideo tridimensional, esta representación es útil en óptica oftálmica para representar, por ejemplo, la dispersión que presentan medidas sucesivas del estado refractivo de un observador utilizando un refractómetro automático [4], [5] y [6]. En la Fig. 5.1 puede verse el aspecto de la nube de puntos que representan los estados refractivos del mencionado observador [6].

La representación de la matriz de potencia dióptrica como un vector del espacio Ms_2 permite la realización de una estadística completa de estados refractivos, así como la visualización de los mismos en un espacio euclideo tridimensional [2], [3].

En el capítulo 3, hemos caracterizado el comportamiento de una lente oftálmica compuesta por superficies refractoras arbitrarias por medio de una matriz de potencia dióptrica local. Aunque la matriz de potencia dióptrica local es una función de la posición sobre la superficie de la lente, en la práctica, para lentes cuyas superficies refractoras no puedan ser descritas mediante una función analítica, tenemos un

conjunto discreto de matrices \tilde{M} para un conjunto discreto de puntos sobre la superficie de la lente, tal y como ocurre en el caso de una lente progresiva (ver capítulo 4). Podríamos, por tanto, utilizar la representación tridimensional de la matriz de potencia dióptrica para representar la MPDL de una lente como un conjunto de puntos (o vectores) del espacio vectorial Ms_2 . En las siguientes secciones mostramos la representación de la MPDL de las lentes medidas en el capítulo anterior como un conjunto de vectores del espacio Ms_2 .

5.1.2 Representación tridimensional de lentes esféricas y asféricas

En el caso de una lente asférica tenemos las siguientes expresiones analíticas (capítulo 3) para los elementos de la MPDL

$$f_{xx} = (n - 1) \left[\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} + x^2 \left(\frac{p_1}{\rho_1^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right) \right], \quad (5.3a)$$

$$f_{yy} = (n - 1) \left[\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} + y^2 \left(\frac{p_1}{\rho_1^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right) \right], \quad (5.3b)$$

$$f_{xy} = (n - 1) xy \left(\frac{p_1}{\rho_1^3} - \frac{p_2}{\rho_2^3} \right), \quad (5.3c)$$

donde $\rho_1 = \sqrt{R_1^2 - p_1 r^2}$ y $\rho_2 = \sqrt{R_2^2 - p_2 r^2}$. Si los radios de curvatura R_1 y R_2 son suficientemente grandes, es posible encontrar desarrollar en serie las funciones ρ_1^{-1} y ρ_2^{-1} de manera que tenemos que

$$\frac{1}{\rho_1} \simeq \frac{1}{R_1} + \frac{p_1 r^2}{2R_1^3}, \quad (5.4a)$$

$$\frac{1}{\rho_2} \simeq \frac{1}{R_2} + \frac{p_2 r^2}{2R_2^3}, \quad (5.4b)$$

de modo que podemos escribir los elementos de la LPDM como

$$f_{xx} = (n - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{R_1^3} - \frac{p_2}{R_2^3} \right) (3x^2 + y^2) \right], \quad (5.5a)$$

$$f_{yy} = (n - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{R_1^3} - \frac{p_2}{R_2^3} \right) (x^2 + 3y^2) \right], \quad (5.5b)$$

$$f_{xy} = (n - 1) \left(\frac{p_1}{R_1^3} - \frac{p_2}{R_2^3} \right) xy. \quad (5.5c)$$

Si denominamos P_o a la potencia paraxial de la lente, dada por el primer término de las ecuaciones (5.5a) y (5.5c), y denominamos A a la expresión

$$A = (n - 1) \left(\frac{p_1}{2R_1^3} - \frac{p_2}{2R_2^3} \right), \quad (5.6)$$

tenemos que las ecuaciones (5.5a), (5.5b) y (5.5c) pueden escribirse como

$$f_{xx} = P_o + A(3x^2 + y^2), \quad (5.7)$$

$$f_{yy} = P_o + A(x^2 + 3y^2), \quad (5.8)$$

$$f_{xy} = 2Axy, \quad (5.9)$$

operando se tiene que

$$f_{xy} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{(3f_{xx} - f_{yy} - 2P_o)(3f_{yy} - f_{xx} - 2P_o)}, \quad (5.10)$$

de manera que en el caso de una lente esférica, los elementos de la MPDL forman una superficie dada por la ecuación (5.10) en el espacio euclideo Ms_2 .

En la Fig. 5.2 podemos ver la representación tridimensional de los elementos de la MPDL para una lente de +2.00 D cuya primera superficie es esférica y la segunda superficie esférica, para distintos valores del coeficiente de asfericidad. Como puede comprobarse en dicha gráfica, la dispersión de los puntos alrededor del punto correspondiente a la potencia paraxial, punto $(P_o, P_o, 0)$, es mayor cuanto mas grande es el valor absoluto del coeficiente de asfericidad. También puede comprobarse que la orientación de la nube de puntos cambia al cambiar el signo del coeficiente de asfericidad de la primera superficie. La forma cónica de la nube viene dada por la ecuación (5.10).

La representación en el espacio de potencias Ms_2 de las MPDL de las lentes esféricas A1 y A2 de potencia +2.00 D y +2.50 D, respectivamente, medidas en el capítulo anterior (ver capítulo 4) puede verse en la Fig. 5.3. Tal y como se aprecia en dicha figura, existen importantes diferencias entre la distribución de los elementos de la MPDL obtenidos experimentalmente, y aquellos que vienen dados por la expresión (5.10). En concreto, los puntos del espacio Ms_2 correspondientes a los elementos de la MPDL obtenida experimentalmente no forman una superficie del espacio Ms_2 sino que forman una nube de puntos más o menos irregular (aunque la nube de puntos correspondiente a la lente A2 presenta una orientación espacial predominante parecida a la que presenta una lente hiperbólica). A nuestro juicio estas diferencias entre los puntos teóricos y experimentales se deben a dos causas principales: 1) Es bien conocido [7] que la superficie esférica que presenta una lente comercial, viene descrita por una ecuación del tipo

$$z(x, y) = \frac{\sqrt{R^2 - p(x^2 + y^2)}}{p} + \sum_{n=2}^k A_{2n} (x^2 + y^2)^n. \quad (5.11)$$

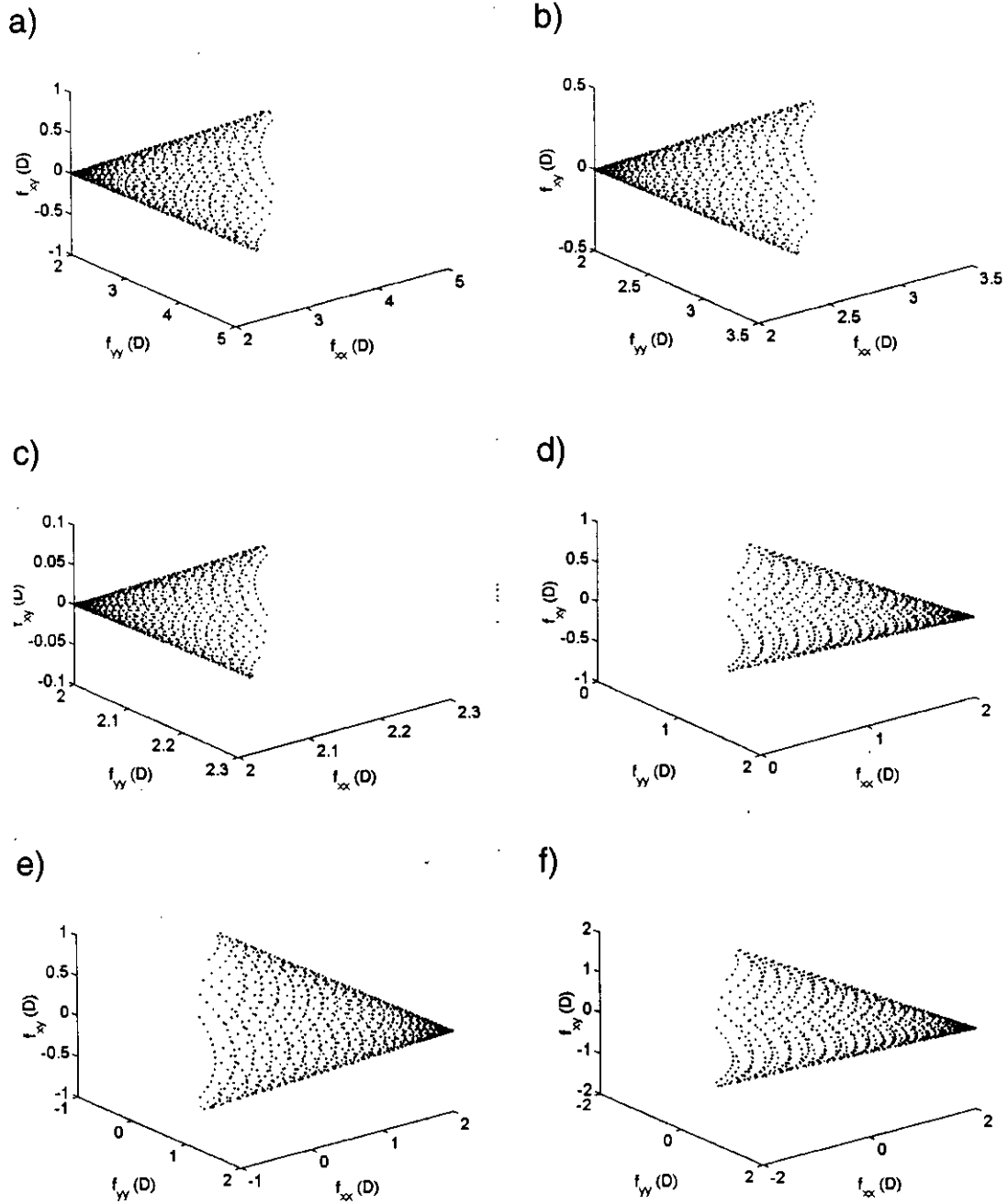
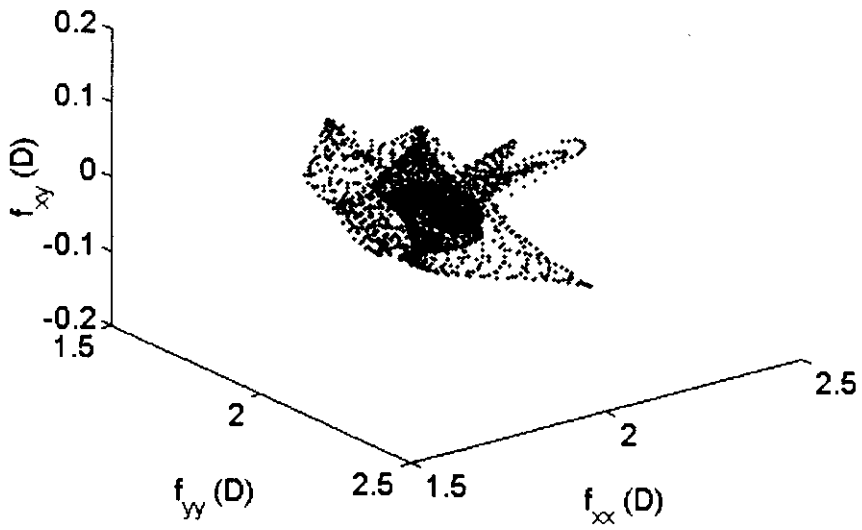


Figura 5.2. Representación en el espacio euclideo M_{3_2} de una lente esférica de potencia +2.00 D con la segunda superficie esférica y la primera superficie esférica, siendo los valores del coeficiente de asfericidad a) $p_1 = 1.5$, b) $p_1 = 1$, c) $p_1 = 0.5$, d) $p_1 = -0.5$, e) $p_1 = -1$ y f) $p_1 = -1.5$

a)



b)

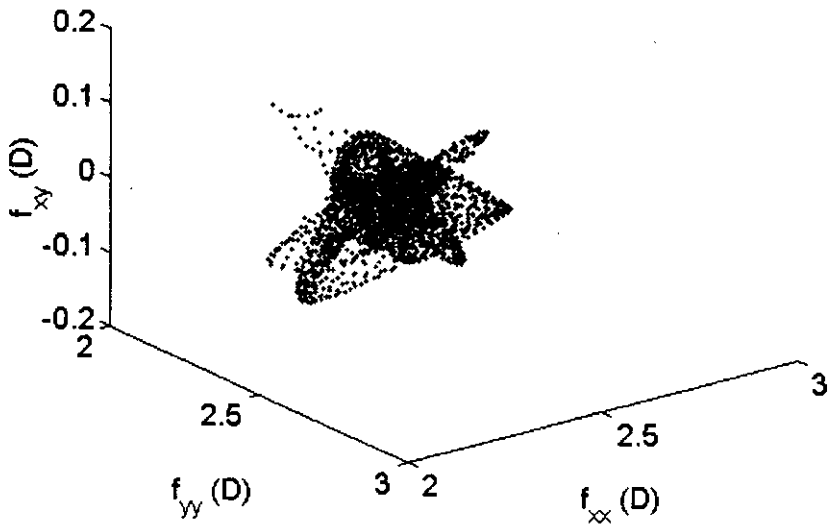


Figura 5.3. Representación tridimensional de los elementos de la MPDL correspondientes a las lentes esféricas A1 y A2 medidas en el capítulo anterior

Donde el primer término de la ecuación describe un conicoide y el segundo término es una suma de polinomios pares. Este segundo término es introducido en el proceso de diseño de la lente para la compensación de aberraciones fuera de eje, como el astigmatismo oblicuo y la curvatura de campo. 2) Tal y como se pudo comprobar en el capítulo anterior, los elementos de la MPDL de las lentes esféricas medidas se hallan afectados de ruido. El cambio en la MPDL introducido por el cambio en la forma de la superficie debido a la introducción de los términos polinómicos de la ecuación (5.11), unido al efecto del ruido en la medida de la MPDL, provocan, a nuestro juicio las diferencias que se observan en la distribución de puntos en el espacio Ms_2 entre los resultados teóricos y experimentales.

5.1.3 Representación tridimensional de lentes progresivas

En una lente progresiva, una de las superficies de la lente, llamada superficie de progresión, es una superficie altamente esférica diseñada para conseguir la variación de potencia deseada. Esta superficie no viene descrita por una expresión matemática explícita, de manera que no resulta posible obtener una expresión matemática explícita del elemento torsional de la MPDL, f_{xy} , como función de los elementos de la diagonal principal f_{xx} y f_{yy} . De modo que, en este caso, nos limitaremos a representar en el espacio euclideo tridimensional Ms_2 los elementos de la MPDL de las lentes progresivas P1 y P2 obtenidos experimentalmente (capítulo 4).

La representación tridimensional de la lente P1 puede verse en la Fig. 5.4. Podemos encontrar notables diferencias entre la lente progresiva y las lentes esféricas y esféricas representadas en la Fig. 5.3 y Fig. 5.2. En la grafica que representa una lente progresiva, pueden distinguirse varias zonas de interes. En primer lugar, puede observarse una acumulación de puntos alrededor del punto $(2, 2, 0)$ que corresponderia con el centro de la zona de visión cercana del progresivo (recordando que estamos trabajando con una lente progresiva neutra de lejos y con adición de +2.00 D), por tanto, esa acumulación de puntos alrededor del punto $(2, 2, 0)$ representaria la distribución de potencias en la zona de visión cercana. De manera análoga se observa una acumulación de puntos alrededor de la potencia $(0, 0, 0)$ que representa el valor de la potencia en la zona de visión lejana. Podemos ver como ambas zonas estan unidas por una linea en el plano $f_{xy} = 0$, esta linea representa los puntos del meridiano umbilical. Además de las acumulaciones de puntos en las zonas de visión próxima y lejana y de la linea que representa el meridiano umbilical, puede observarse en la Fig. 5.4 dos lóbulos situados a ambos lados del plano $f_{xy} = 0$. Estos lóbulos representan las zonas laterales en las cuales se tienen valores apreciables del cilindro y corresponden a las zonas laterales en la grafica bidimensional correspondiente a la torsión. La diferencia de orientación de estos lóbulos da cuenta del cambio en la orientación del eje del cilindro y la diferencia de tamaño entre

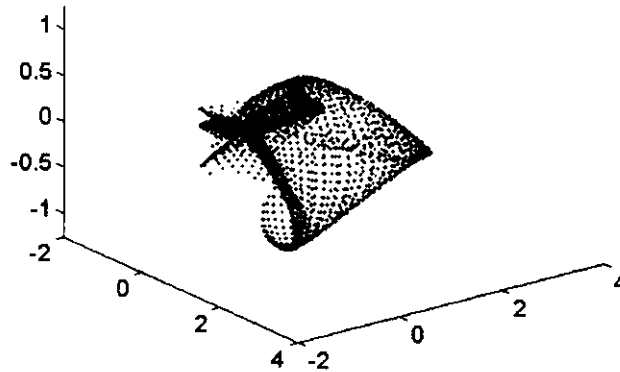


Figura 5.4. Representación tridimensional de la lente progresiva P1 medida en el capítulo 4.

ambos indica el diseño asimétrico del progresivo.

En la Fig. 5.5 podemos ver la representación tridimensional de la lente P2. Como puede verse, la forma de la nube de puntos obtenida es muy similar a la nube obtenida para la lente P1. Las principales características de la nube de puntos (concentración de puntos alrededor de las potencias cercana y lejana, línea de puntos correspondiente al meridiano umbilical y lóbulos laterales correspondientes a las zonas de torsión de la lente) permanecen inalteradas, existiendo pequeñas diferencias en la forma de la nube que se corresponden con el diseño diferente que presentan las lentes P1 y P2.

5.2 Aplicación de la MPDL al cálculo de efectos prismáticos y potencia local diferenciales.

5.2.1 Definición de puntos equivalentes de una pareja de lentes compensadoras.

En Óptica Fisiológica se definen los puntos correspondientes como aquella pareja de puntos, uno situado en la retina del ojo derecho y otro situado en la retina del ojo izquierdo que producen una única sensación

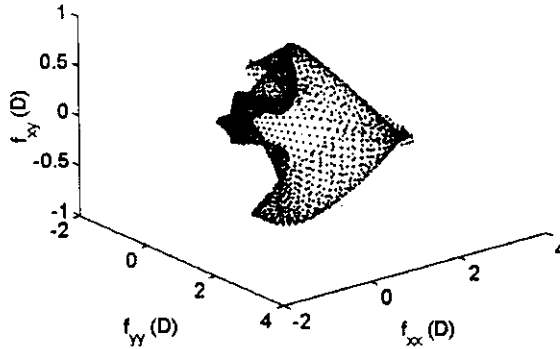


Figura 5.5. Representación tridimensional de la lente P2 en el espacio de potencia Ms_2 .

visual al ser excitados simultáneamente por una fuente exterior [8] , [9] , [10] , [11] . Matemáticamente, es posible localizar los puntos correspondientes como aquellos que resultan de la intersección con ambas retinas de las rectas que unen un punto objeto y los centros de rotación del ojo derecho e izquierdo, respectivamente ([12] y [13]). Esta localización matemática de los puntos correspondientes carece de validez si el sujeto está dotado de lentes compensadoras de ametropías. En este caso, los rayos que partiendo del punto objeto O , pasan por los centros de rotación, no llegan al ojo siguiendo la trayectoria marcada por la recta que une el objeto con el centro de rotación del ojo, debido a la desviación (efecto prismático) introducida por las lentes compensadoras. De acuerdo con la Fig. 5.6, para obtener una única sensación visual al observar el punto objeto O los ojos derecho e izquierdo deben orientarse según las rectas marcadas por los vectores DL_D e IL_I (Fig. 5.6). De este modo tenemos dos puntos, L_D y L_I hacia los que deben orientarse el ojo derecho e izquierdo, respectivamente, para que la imagen del punto objeto O caiga sobre una pareja puntos correspondientes. Por analogía, diremos que los puntos L_D y L_I son puntos equivalentes.

Como los puntos equivalentes están situados en dos lentes oftálmicas diferentes, es muy probable que, en la mayoría de los casos, la potencia local y el efecto prismático que presentan las lentes en esos puntos sean distintos. Estas diferencias entre potencia local y efecto prismático pueden provocar

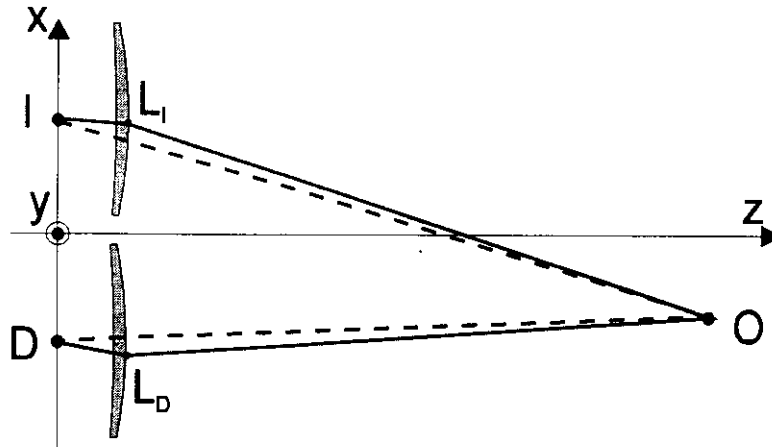


Figura 5.6. Definición de puntos equivalentes. O es el punto objeto, D es el centro de rotación del ojo derecho, I es el del ojo izquierdo y L_I , L_D son los puntos equivalentes.

alteraciones en la visión binocular [14], especialmente en lentes progresivas [15], de modo que el cálculo de las mismas es de interés en Óptica Oftálmica. Como el formalismo de la MPDL permite obtener los valores locales de efecto prismático y de potencia en cualquier punto de una lente progresiva, una posible aplicación del formalismo de la MPDL sería el cálculo de las diferencias locales de efecto prismático y potencia que tienen lugar al observar un objeto a través de un par de lentes progresivas. Para ello habría que desarrollar en primer lugar un algoritmo de cálculo de puntos equivalentes para, a continuación, calcular las diferencias de efecto prismático y potencia local en esos puntos. A continuación se dará cuenta del procedimiento de cálculo de diferencias de efecto prismático y potencia local en un par de lentes progresivas.

5.2.2 Algoritmo de cálculo de puntos equivalentes

Sea el sistema de referencia expuesto en la Fig. 5.6. De acuerdo con dicho sistema de referencia, la posición del objeto O va a venir dada por las coordenadas (x, y, z) , la posición de D por las coordenadas $(DNP, 0, 0)$, siendo DNP la distancia naso-pupilar, la posición de I vendrá dada por las coordenadas $(-DNP, 0, 0)$ y la posición de los puntos L_D y L_I vendrá dada por $(DNP + \xi_D, \eta_D, DCR)$ y $(-DNP + \xi_I, \eta_I, DCR)$, respectivamente, siendo DCR la distancia al centro de rotación. En estas condiciones, los vectores unitarios que definen al rayo incidente y refractado en la lente derecha vendrán

dados por las ecuaciones siguientes

$$\mathbf{k}_D^i = \left(\frac{DNP + \xi_D - x}{z - DCR}, \frac{\eta_D - y}{z - DCR}, -1 \right), \quad (5.12)$$

$$\mathbf{k}_D^r = \left(\frac{-\xi_D}{DCR}, \frac{-\eta_D}{DCR}, -1 \right), \quad (5.13)$$

análogamente tenemos para la lente izquierda que

$$\mathbf{k}_I^i = \left(\frac{-DNP + \xi_I - x}{z - DCR}, \frac{\eta_I - y}{z - DCR}, -1 \right), \quad (5.14)$$

$$\mathbf{k}_I^r = \left(\frac{-\xi_I}{DCR}, \frac{-\eta_I}{DCR}, -1 \right). \quad (5.15)$$

De acuerdo con la definición de potencia prismática dada en el capítulo 3, se tienen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$P_x^D(\xi_D, \eta_D) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \xi_D - \frac{x - DNP}{z - DCR} = 0, \quad (5.16)$$

$$P_y^D(\xi_D, \eta_D) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \eta_D - \frac{y}{z - DCR} = 0, \quad (5.17)$$

y

$$P_x^I(\xi_I, \eta_I) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \xi_I - \frac{x + DNP}{z - DCR} = 0, \quad (5.18)$$

$$P_y^I(\xi_I, \eta_I) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \eta_I - \frac{y}{z - DCR} = 0. \quad (5.19)$$

De este modo, tenemos dos sistemas de ecuaciones no lineales descritos por las expresiones anteriores. De acuerdo con Press *et al.* [16], la forma genérica de un sistema de ecuaciones no lineal de varias variables, viene dada por la expresión

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.20)$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es una función vectorial de variable vectorial. En nuestro caso tenemos que

$$\mathbf{F}^D(\xi_D, \eta_D) = \left[\begin{array}{l} P_x^D(\xi_D, \eta_D) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \xi_D - \frac{x - DNP}{z - DCR} \\ P_y^D(\xi_D, \eta_D) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \eta_D - \frac{y}{z - DCR} \end{array} \right], \quad (5.21a)$$

$$\mathbf{F}^I(\xi_I, \eta_I) = \begin{bmatrix} P_x^I(\xi_I, \eta_I) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \xi_I - \frac{x + DNP}{z - DCR} \\ P_y^I(\xi_I, \eta_I) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \eta_I - \frac{y}{z - DCR} \end{bmatrix}. \quad (5.21b)$$

Para resolver numéricamente un sistema de ecuaciones no lineales dado por la ecuación (5.20), es necesario [16] partir de una solución semilla \mathbf{x}_o y calcular el incremento $\delta\mathbf{x}$ que debe añadirse a la solución semilla para aproximarse al mínimo de la ecuación (5.20). Tal incremento se obtiene al resolver la ecuación lineal

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_o) \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_o), \quad (5.22)$$

siendo \mathbf{J} la matriz jacobiana de \mathbf{F} , cuyos elementos vienen dados por

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_o}. \quad (5.23)$$

Una vez modificada la solución semilla, se vuelve a calcular un nuevo incremento, aplicando las ecuaciones (5.22) y (5.23), sustituyendo en este caso \mathbf{x}_o por la primera aproximación de la solución, $\mathbf{x}_o + \delta\mathbf{x}$. El proceso se repite el número necesario de veces hasta conseguir que los valores de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sean inferiores a un vector de tolerancias \mathbf{t} .

En el caso que nos ocupa, las matrices jacobianas asociadas a los sistemas de ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.18), (5.19) pueden escribirse como

$$\mathbf{J}^D = \begin{bmatrix} -f_{xx}^D(\xi_D, \eta_D) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) & -f_{xy}^D(\xi_D, \eta_D) \\ -f_{xy}^D(\xi_D, \eta_D) & -f_{xx}^D(\xi_D, \eta_D) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{J}^I = \begin{bmatrix} -f_{xx}^I(\xi_I, \eta_I) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) & -f_{xy}^I(\xi_I, \eta_I) \\ -f_{xy}^I(\xi_I, \eta_I) & -f_{xx}^I(\xi_I, \eta_I) + \left(\frac{1}{z - DCR} + \frac{1}{DCR} \right) \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

de esta manera es posible encontrar tras sucesivas iteraciones las coordenadas de los puntos equivalentes (ξ_D, η_D) y (ξ_I, η_I) . El cálculo de puntos equivalentes ha sido programado en MatLab, siguiendo el siguiente procedimiento:

- 1.- Cálculo de los puntos semilla (ξ_D^o, η_D^o) y (ξ_I^o, η_I^o) que se obtienen haciendo $p_x^D(\xi_D, \eta_D) = 0$, $p_y^D(\xi_D, \eta_D) = 0$ y $p_x^I(\xi_I, \eta_I) = 0$, $p_y^I(\xi_I, \eta_I) = 0$, en las ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.18),

(5.19).

- 2.- Cálculo de los valores de potencia prismática y MPDL en los puntos (ξ_D, η_D) y (ξ_I, η_I) .
- 3.- Cálculo de las matrices jacobianas $\mathbf{J}^D, \mathbf{J}^I$ y de los valores de $\mathbf{F}^D(\xi_D, \eta_D)$ y $\mathbf{F}^I(\xi_I, \eta_I)$ (ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.18), (5.19)).
- 4.- Obtención de los incrementos $(\delta\xi_D, \delta\eta_D)$ y $(\delta\xi_I, \delta\eta_I)$, resolviendo la ecuación lineal (5.22).
- 5.- Repetición del paso 2 si los valores de $\mathbf{F}^D(\xi_D, \eta_D)$ y $\mathbf{F}^I(\xi_I, \eta_I)$ no se encuentran bajo tolerancia.

De este modo se calculan las coordenadas de las dos parejas de puntos equivalentes $(\xi_D + DNP, \eta_D, DCR)$ y $(\xi_I - DNP, \eta_I, DCR)$ que resultan para una determinada posición (x, y, z) del punto objeto O . De este modo es posible calcular los efectos prismáticos diferenciales, así como la diferencia de potencias esférica y cilíndrica en una pareja cualesquiera de lentes oftálmicas.

5.2.3 Cálculo de potencias prismáticas y refractoras diferenciales en una pareja de lentes progresivas

Para ilustrar con un ejemplo el algoritmo de cálculo de puntos equivalentes, vamos a utilizar dicho algoritmo para calcular las potencias prismáticas y refractoras diferenciales para una pareja de lentes progresivas comerciales. Para tal fin, hemos seleccionado una pareja de lentes progresivas del mismo modelo, siendo ambas neutras de lejos y presentando una adición de +2.00 D. Una de estas lentes está diseñada para la compensación del ojo derecho y la otra para la compensación del ojo izquierdo. Ambas lentes han sido medidas por medio del procedimiento expuesto en el capítulo 4. De este modo se obtuvieron las distribuciones de potencia prismática y los elementos de la MPDL para cada una de las lentes.

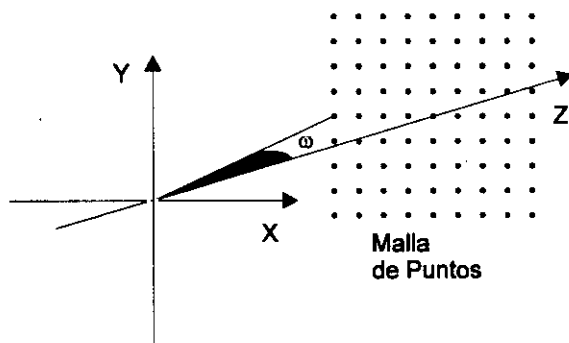


Figura 5.7. Malla de puntos objeto empleada para el cálculo de diferencias prismáticas.

Una vez medidas las lentes, se definieron tres mallas de puntos objeto equidistantes sobre tres planos perpendiculares al eje OZ y situados a 30 cm, 50 cm y 200 cm respecto del origen del sistema de referencia (Fig. 5.7). De este modo, una de las mallas correspondería con objetos situados en el campo de visión cercano, otra con objetos situados en el campo de visión intermedia y otra con objetos situados en el campo de visión lejano. La posición de los puntos objetos se ha elegido de acuerdo con la distancia entre el plano objeto y el origen de coordenadas. Así, los puntos situados en el campo de visión cercano se han seleccionado de modo que el ángulo ω_x esté comprendido entre -20° y 20° y el ángulo ω_y esté comprendido entre -31.3° y -18.16° . Estos ángulos se han seleccionado para que la malla de puntos seleccionada esté situada realmente en el campo de visión cercano del usuario, respentandose de esta manera los parámetros ergonómicos y visuales que intervienen en el diseño de la lente progresiva. Para el caso de los puntos del campo de visión intermedia, los valores de ω_x oscilan entre -30° y 30° y los de ω_y entre -14.53° y -10.3° , mientras que los puntos correspondientes al campo de visión lejana tienen valores de ω_x comprendidos entre -30° y 30° y de ω_y comprendidos entre 0° y 30° . En conclusión, la disposición de la malla de puntos objetos se ha elegido de tal manera que sean observados a través de la zona de visión de la lente progresiva que se corresponda con su distancia al origen de coordenadas. Así, los puntos situados a 30 cm de la lente son observados a través de la zona de visión cercana mientras que los puntos situados a 50 cm y 200 cm de la lente son observados a través de las zonas de visión intermedia y lejana, respectivamente. Una vez definidas las mallas de puntos objeto, se ha empleado el algoritmo desarrollado en el apartado anterior para el cálculo de los puntos equivalentes correspondientes a cada punto objeto de la malla. De ello resultan a su vez dos mallas de puntos equivalentes, una sobre la superficie de la lente derecha y otra sobre la superficie de la lente izquierda tal y como se muestra en la Fig. 5.8 para el caso de los puntos situados en el campo visual cercano.

Una vez calculados las mallas de puntos equivalentes a lo largo de la superficies de las lentes progresivas, es posible obtener el valor de las potencias prismáticas horizontal y vertical y de las potencias esférica y cilíndrica en dichos puntos. De este modo podemos calcular las diferencias de potencia a lo largo de la superficie de cada una de las lentes que componen la pareja. Los resultados obtenidos pueden observarse en las figuras (#FIGURAS#) donde se representan las diferencias de a) potencia prismática horizontal, b) potencia prismática vertical, c) potencia esférica y d) potencia cilíndrica en función de los ángulos de visión ω_x y ω_y para las mallas de puntos descritas anteriormente.

En la Fig. 5.9 puede verse la diferencia de potencias para puntos objeto situados en la zona de visión cercana. Las distribuciones que aparecen son simétricas con respecto al ángulo ω_x de modo que las

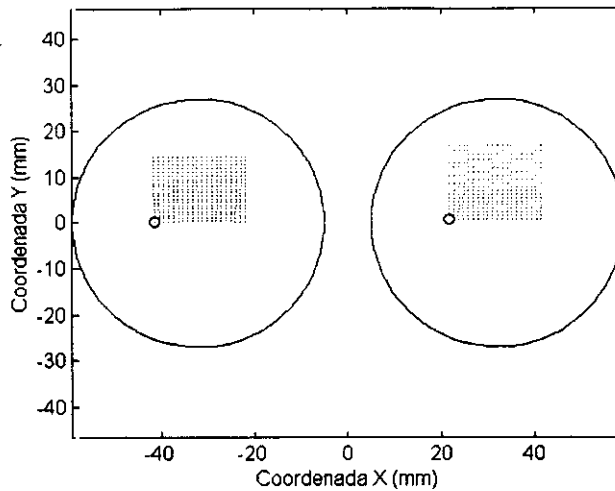


Figura 5.8. Mallas de puntos equivalentes en la pareja de lente progresivas. Los puntos equivalentes se agrupan como los dos puntos marcados con un círculo. Las circunferencias indican los límites de las lentes sin biselar

diferencias de potencia prismática y de potencia esférica y cilíndrica son nulas (excepto en el caso de la diferencia de potencia prismática horizontal) para un ángulo de $\omega_x = 0^\circ$ y aumentan en valor absoluto con el giro lateral de los ojos. Los valores numéricos encontrados son pequeños, especialmente en el caso de la diferencia de potencia prismática vertical (0.1Δ de diferencia máxima), lo cual garantiza que el umbral de agudeza estereoscópica no aumenta bruscamente [15] y que la visión binocular del usuario de las lentes no se ve significativamente afectada por ello. Las diferencias de potencia esférica y cilíndrica también son pequeñas en valor absoluto (0.6 D en el caso de potencia esférica y 1 D en el caso de potencia cilíndrica) y pueden ser compensadas fácilmente por el sistema visual humano. La tendencia que muestran las distribuciones de diferencia de potencia de la Fig. 5.9 nos indican que a mayor giro horizontal de los ojos mayores diferencias de potencia. De este modo podría explicarse la tendencia de los usuarios de lentes progresivas a girar la cabeza para mirar objetos laterales cuando para un individuo que no presentara compensación con lentes progresivas un giro lateral del ojo le permitiría visualizar dichos objetos.

En el caso de las diferencias de potencia encontradas para el campo de visión lejano Fig. 5.10, las figuras muestran un comportamiento similar al presentado en el caso de la malla de puntos objetos situadas en la zona de visión cercana aunque con algunas diferencias como son: 1) Los valores numéricos de la

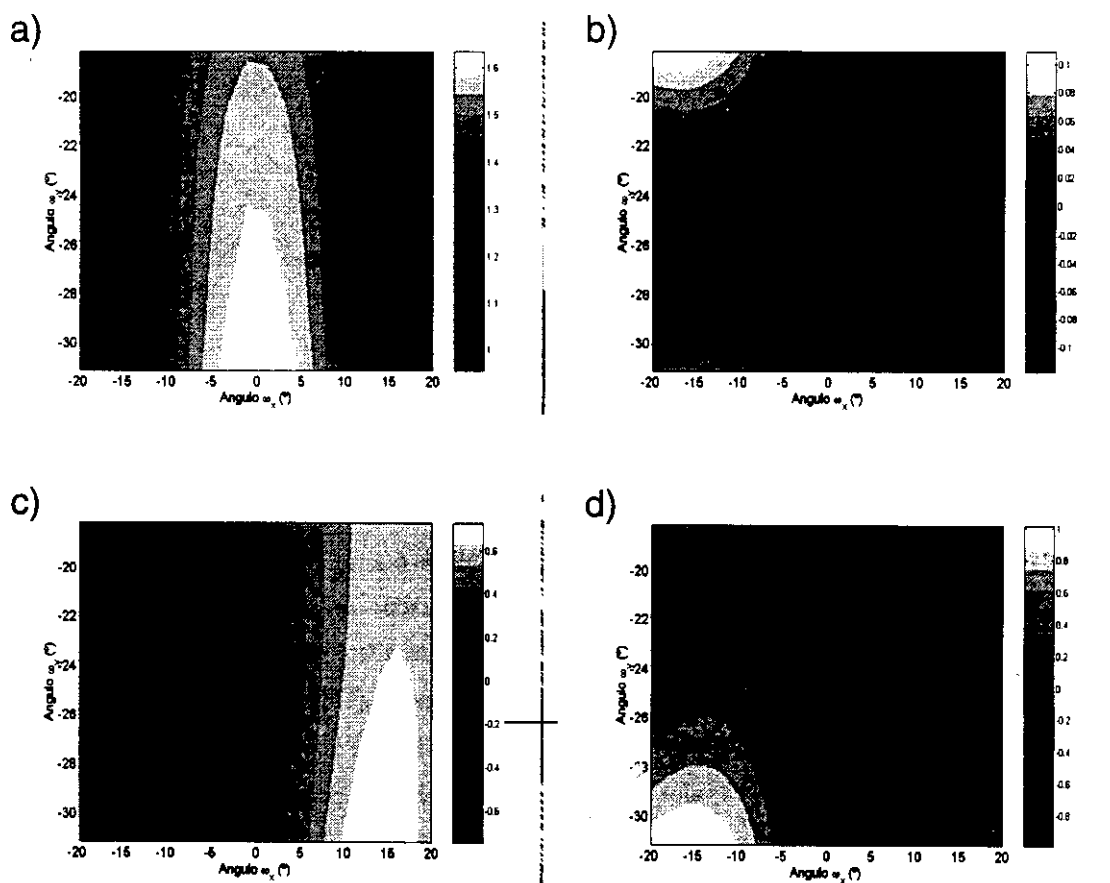


Figura 5.9. Diferencias de a) potencia prismática horizontal, b) potencia prismática vertical, c) potencia esférica y d) potencia cilíndrica encontrados para los puntos equivalentes correspondientes a la malla de puntos situada en el campo de visión cercana.

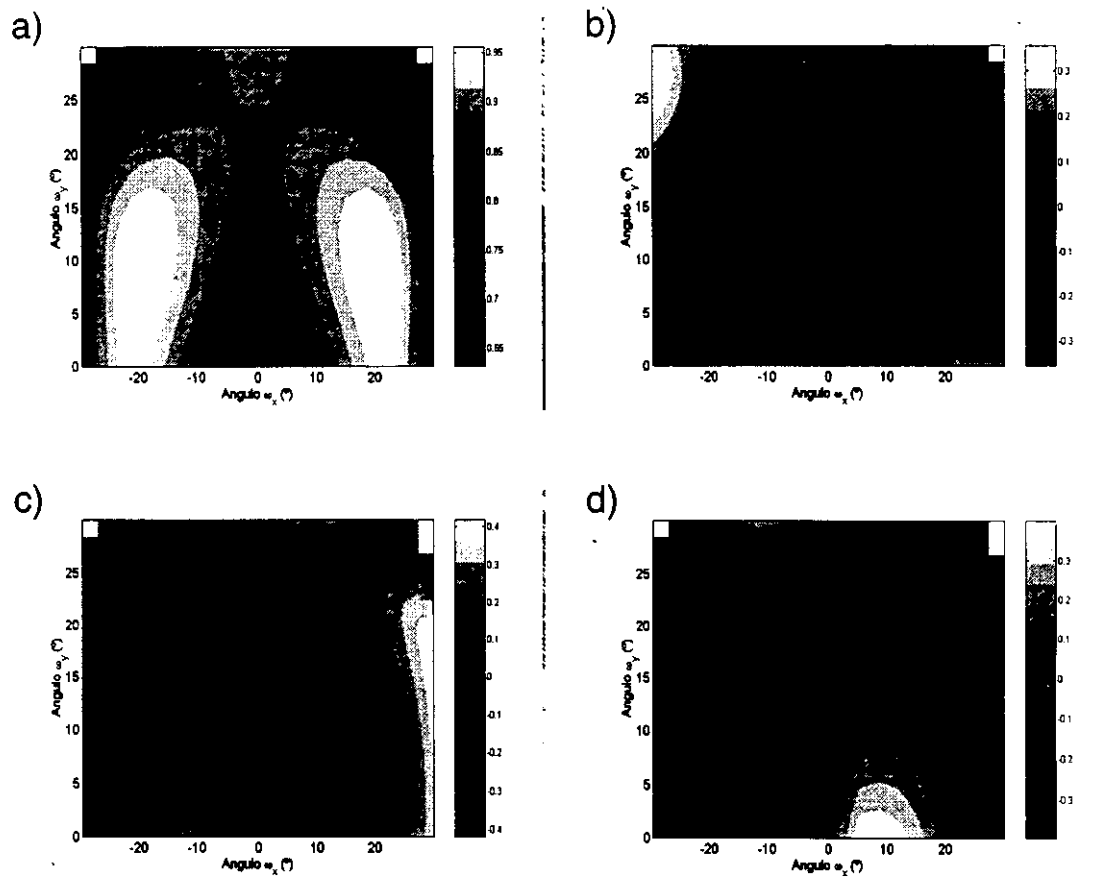


Figura 5.10. Diferencias de a) potencia prismática horizontal, b) potencia prismática vertical, c) potencia esférica y d) potencia cilíndrica encontrados para los puntos equivalentes correspondientes a la malla de puntos situada en el campo de visión lejana.

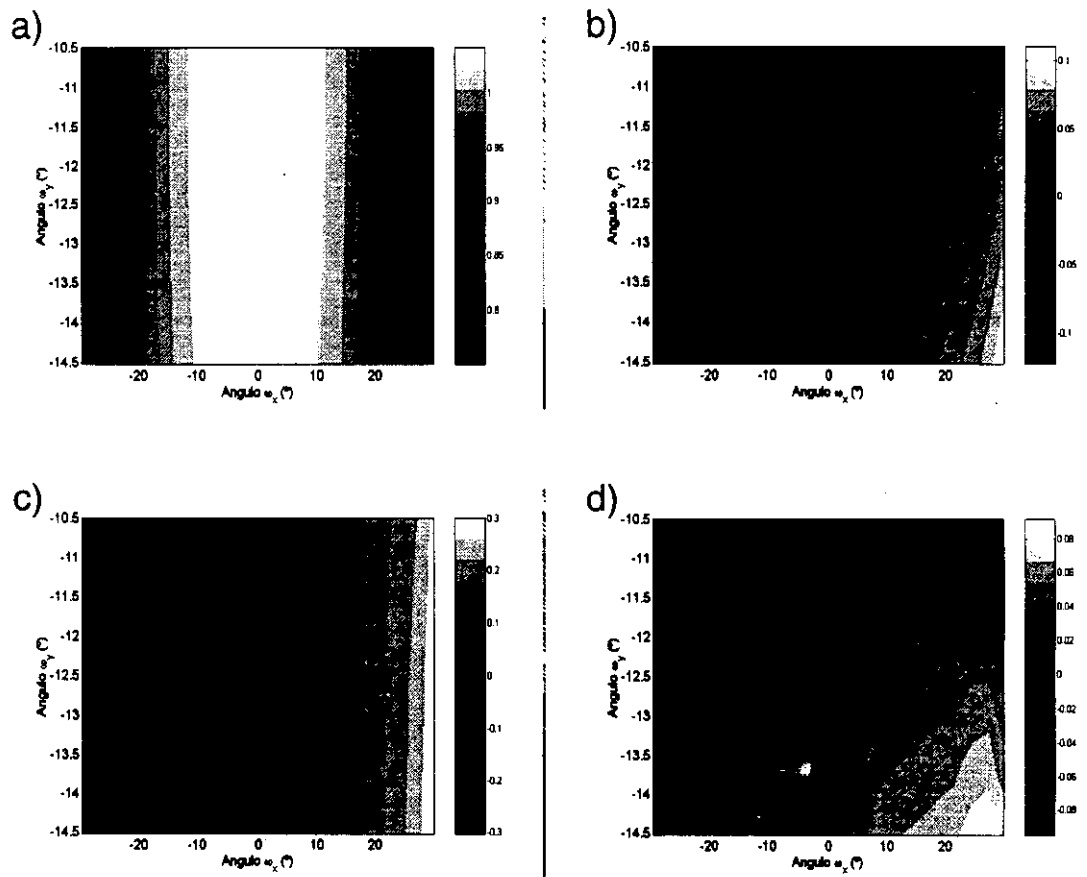


Figura 5.11. Diferencias de a) potencia prismática horizontal, b) potencia prismática vertical, c) potencia esférica y d) potencia cilíndrica encontrados para los puntos equivalentes correspondientes a la malla de puntos situada en el campo de visión intermedia.

diferencia de potencias esférica y cilíndrica son menores (0.4 D de diferencia máxima de potencia esférica y 0.3 D de diferencia de potencia cilíndrica), lo cual puede deberse a la menor variación de potencia en la zona de visión de lejos de una lente progresiva. 2) Los valores numéricos de la diferencia de potencia prismática vertical son mayores, llegando a alcanzar las 0.3 Δ de diferencia máxima en valor absoluto. Este aumento del valor máximo de la diferencia de potencia prismática vertical puede ser debido a que, en visión lejana, el campo visual es mayor.

La distribución de las diferencias de potencia mostradas en las figuras Fig. 5.9, Fig. 5.10 y Fig. 5.11 muestran que, en general, el diseño asimétrico que presentan las lentes progresivas modernas mantiene en valores numéricos bajos las diferencias de potencia en puntos equivalentes. El comportamiento de las diferencias prismáticas es similar con independencia de la posición de la malla de puntos objetos, esto es, valores reducidos cuando el objeto está situado en posición central respecto del observador y un aumento de la diferencia de potencia entre ambos ojos conforme aumenta el giro lateral de los ojos. Los valores numéricos encontrados de diferencia de potencia prismática vertical son pequeños, de manera que, el usuario no encuentra una disminución significativa en su capacidad de observar el relieve de los objetos.

Referencias

- [1] L. Abellanas, A. Galindo, *Espacios de Hilbert*, EUDEMA, Madrid, (1988).
- [2] W.F. Harris, "Dioptric power: Its nature and its representation in three- and four-dimensional space", *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 349-366, (1997).
- [3] W.F. Harris, "Representation of dioptric power in Euclidean 3-space", *Ophthal. Physiol. Opt.*, **11**, 130-136, (1991).
- [4] S. Cronje, W.F. Harris, "Short-term keratometric variation in the human eye", *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 420-424, (1997).
- [5] M. Elliot, T. Simpson, D. Richter, D. Fonn, "Repeatability and accuracy of automated refraction: a comparison of the Nikon NRK-8000, the Nidek AR-1000, and subjective refraction", *Optom. Vis. Sci.*, **74**, 434-438, (1997).
- [6] A. Rubin, W.F. Harris, "Variability of the refractive state: meridional profiles and uniform variation",

- Optom. Vis. Sci.*, **74**, 414-419, (1997).
- [7] D.A. Atchison, "Spectacle lens design: a review", *Appl. Opt.*, **31**, 3579-3585, (1992).
- [8] Y. LeGrand, *Óptica Fisiológica*, Tomo III, 3ª Edición, Sociedad Española de Optometría, Madrid, (1995).
- [9] J.M. Artigas, P. Capilla, A. Felipe y J. Pujol, *Óptica Fisiológica. Psicofísica de la visión*. McGraw-Hill Interamericana, Madrid, (1995).
- [10] R.W. Reading, *Binocular vision: Foundations and applications*, Butterworth Publishers, Boston, (1983).
- [11] J. Romero, J.A. García y A. García, *Curso Introductorio a la Óptica Fisiológica*, Editorial Comares, Granada, (1996).
- [12] R.K. Luneburg, *Mathematical Analysis of Binocular Vision*, Princeton University Press, Princeton, (1947).
- [13] R.K. Luneburg, "The Metric of binocular visual space", *JOSA*, **40**, 627-642, (1950).
- [14] K.N. Ogle, "Stereopsis and vertical disparity", *Arch. Ophthalmol.*, **53**, 495-504, (1955).
- [15] B. Rassow, W. Wesemann, "Fusion and stereopsis under artificially impaired conditions of the binocular system", *Optometrie*, **2**, 21-28, (1989).
- [16] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W. Vetterling y B.P. Flannery, *Numerical recipes in C*, (2ª edición), Cambridge University Press, Cambridge, (1992).

Conclusiones

A continuación se exponen las conclusiones del trabajo presentado en esta Memoria de Tesis Doctoral que trata sobre la *Caracterización de Lentes Oftálmicas por medio de la Matriz de Potencia Dioptrica Local*:

1. Se ha llevado a cabo una extensión del formalismo de la Óptica Geométrica Matricial para lentes oftálmicas compuestas por dos superficies refractoras de forma arbitraria. De acuerdo con esta extensión de la teoría matricial, es posible caracterizar una lente oftálmica por una matriz cuyos elementos dependen de la posición sobre la superficie de la lente. Esta función matricial ha sido denominada *Matriz de Potencia Dioptrica Local (MPDL)*.
2. Se han obtenido las expresiones analíticas de la MPDL para lentes oftálmicas compuestas por superficies asféricas cónicas toroidales. Como caso particular, se han derivado las expresiones de la MPDL para lentes oftálmicas esféricas (las más utilizadas para la compensación visual) y tóricas.
3. Se ha desarrollado un método indirecto de medida de los elementos de la MPDL de una lente oftálmica a partir de la medida de la geometría de sus superficies refractoras. Para tal fin, se ha implementado un dispositivo perfilométrico automático para la medida de superficies refractoras de lentes oftálmicas, llevándose a cabo el montaje del mismo, así como la elaboración del *software* de control y medida. Posteriormente se han medido los elementos de la MPDL de una serie de lentes oftálmicas comerciales utilizando este dispositivo perfilométrico.
4. Con el objeto de testar los resultados obtenidos, se han comparado estos con los ofrecidos por un método óptico equivalente de medida de potencia local en lentes oftálmicas, encontrándose un buen acuerdo cualitativo y cuantitativo entre ambos métodos de medida.
5. Finalmente, se han desarrollado dos aplicaciones del formalismo de la MPDL en Óptica Oftálmica, la primera aplicación hace uso de las propiedades de la MPDL para representar una lente oftálmica como un conjunto de puntos en un espacio euclideo tridimensional. Se han representado de este modo lentes oftálmicas esféricas, asféricas y progresivas. Se ha demostrado que las lentes asféricas y esféricas se representan como superficies en dicho espacio tridimensional, derivándose las expresiones analíticas de dichas superficies. La segunda aplicación del formalismo de la MPDL consiste en el cálculo de las diferencias de potencia prismática y esferocilíndrica que aparecen entre los dos ojos de un usuario de lentes oftálmicas progresivas al mirar hacia un objeto a través de dichas lentes. Para tal fin, se ha desarrollado

un algoritmo de cálculo de puntos equivalentes en la superficie de una lente oftálmica y se ha empleado dicho algoritmo para calcular las diferencias de potencia que presenta una pareja de lentes progresivas comerciales para una malla de puntos objeto en función de la distancia al observador.

Apéndices

A1 Instrucciones de movimiento de los motores

En la siguiente tabla se recogen las instrucciones de movimiento de los motores paso a paso empleados para la obtención de la MPDL a partir de la medida de las superficies refractoras de la lente .

Tabla A1.1 Instrucciones de movimiento de los motores paso a paso

Sintaxis	Unidades	Rango	Orden
<a>An	$\text{ciclos} \cdot \text{s}^{-2}$	$n = 0.001 - 999$	fija la aceleración del motor <a>
<a>Dn	steps	$n = \pm 400000$	fija el recorrido del motor <a>
<a>G	N/A	N/A	ordena moverse al motor <a>
<a>GH	N/A	N/A	ordena al motor <a> moverse hacia el origen
<a>PR	N/A	N/A	devuelve la posición absoluta del motor <a>
<a>R	N/A	N/A	devuelve el estado del motor <a>
<a>S	N/A	N/A	ordena detenerse al motor <a>
<a>Vn	$\text{ciclos} \cdot \text{s}^{-1}$	$n = 0.01 - 54$	fija la aceleración del motor <a>

En este conjunto de instrucciones que se deben enviar a la tarjeta de control de los motores a través del puerto de comunicaciones RS232, <a> indica el número del motor que queremos mover, si esta instrucción se omite, la tarjeta aplica la orden a todos los motores que controla, así por ejemplo la instrucción 1G indicaría a la tarjeta que mueva el motor 1, mientras que la instrucción G indicaría a la tarjeta que mueva todos los motores. Para la ejecución de cualquier instrucción, todas las ordenes deben ir seguidas de un retorno de carro "\r".

A2 Influencia de la punta del palpador en la medida de la superficie de la lente

De acuerdo con la Fig. 4.4, cuando el palpador mecánico recorre la superficie de la lente, obtenemos realmente las coordenadas de la posición del centro de curvatura de la punta (r' en la Fig. 4.4) en lugar del vector de posición r del punto P donde están en contacto la superficie de la lente y la punta del comparador. Sean pues (x', y', z') las coordenadas de C y (x, y, z) las coordenadas de P respecto al sistema de referencia de la Fig. 4.4. Como C es el centro de la punta esférica y P es un punto de la superficie de dicha punta esférica, se tiene que

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = a^2, \quad (\text{A2.1})$$

siendo a el radio de la punta del palpador. Derivando la ecuación, respecto de x' y de y' se tiene que

$$x - x' = -(z - z')\partial_{x'} z', \quad (\text{A2.2a})$$

$$y - y' = -(z - z')\partial_{y'} z'. \quad (\text{A2.2b})$$

Por otra parte, tenemos que

$$(z - z') = \sqrt{a^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2}, \quad (\text{A2.3})$$

si el radio de la punta del palpador es pequeño, podemos suponer que

$$(x - x')^2 \ll a^2, \quad (\text{A2.4a})$$

$$(y - y')^2 \ll a^2, \quad (\text{A2.4b})$$

con lo cual podemos escribir las ecuaciones y como

$$x - x' = -a\partial_{x'} z', \quad (\text{A2.5a})$$

$$y - y' = -a\partial_{y'} z', \quad (\text{A2.5b})$$

cumpléndose además que $z = z' + a$. Por otra parte, de acuerdo con las hipótesis realizadas en el capítulo 4 para deducir el formalismo de la MPDL, tenemos que para la superficie Σ' (ver Fig. 4.4.) se cumple

que

$$\mathbf{N}_2 = (-\partial_{x'} z', -\partial_{y'} z', 1), \quad (\text{A2.6})$$

siendo N_2 la normal de la superficie Σ' , de manera que tenemos finalmente que

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \alpha \mathbf{N}_2, \quad (\text{A2.7})$$

ecuacion que nos relaciona las coordenadas de los puntos C y P y nos permite encontrar las coordenadas del punto de contacto entre la punta del palpador y la superficie de la lente a partir de las coordenadas del centro de curvatura de la punta del palpador.

A3 Parámetros de las lentes medidas

A continuación (Tabla A3.I) mostramos los valores del radio medio R y de su error ΔR resultantes de ajustar las superficies refractoras de las lentes E1, E2, E3 y E4 medidas por medio de un perfilómetro automático a una superficie esférica. Las superficies refractoras de las lentes esféricas (A1 y A2) y progre-

Tabla A3.I Parámetros de las lentes esféricas E1, E2, E3 y E4

	Lente E1	Lente E2	Lente E3	Lente E4
R_1 (mm)	177.45	117.70	83.73	65.761
ΔR_1 (mm)	0.02	0.01	0.02	0.002
R_2 (mm)	74.123	79.54	120.3	122.35
ΔR_2 (mm)	0.004	0.05	0.1	0.02

sivas (P1, P2 y P3) fueron ajustadas a una combinación lineal de los 45 primeros polinomios de Zernike. Una lista de dichos polinomios puede encontrarse en la referencia [8] del capítulo 4. Las tablas A3.II y A3.III muestran los valores numéricos medios (en mm) de dichos coeficientes de ajuste para las superficies anterior y posterior de las lentes A1, A2, P1, P2 y P3.

Tabla A3.II Coeficientes del ajuste a polinomios de Zernike de la superficie anterior de las lentes A1, A2, P1, P2 y P3

Coeficiente	Lente A1	Lente A2	Lente P1	Lente P2	Lente P3
1	1.5259	1.5153	1.6882	1.6654	1.6915
2	0.1595	0.1902	0.0722	0.1147	0.2124
3	0.1857	0.2662	0.1423	0.5559	0.5990
4	-0.0020	-0.0021	-0.1277	-0.1041	-0.1524
5	1.5205	1.5164	1.7010	1.6965	1.6996
6	-0.0261	-0.0225	0.0425	0.0220	-0.0504
7	0.0084	0.0011	0.0448	0.0412	0.0499
8	0.0058	0.0055	0.0083	0.0052	0.0368
9	0.0000	0.0004	-0.1297	-0.1272	-0.1201
10	-0.0043	0.0031	-0.0715	-0.0447	-0.0218
11	-0.0008	-0.0015	-0.0658	-0.0619	-0.0205
12	0.0014	-0.0008	-0.0128	-0.0150	-0.0050
13	0.0038	-0.0018	0.0105	0.0161	0.0093
14	0.0009	0.0006	-0.0200	-0.0117	-0.0203
15	0.0003	-0.0013	-0.0176	-0.0145	-0.0534
16	-0.0008	-0.0022	-0.0098	-0.0080	-0.0245
17	-0.0006	-0.0006	-0.0150	-0.0138	-0.0230
18	0.0006	0.0002	0.0029	-0.0020	-0.0055
19	0.0008	0.0025	0.0181	0.0143	0.0195
20	-0.0017	-0.0012	0.0138	0.0137	0.0081
21	0.0022	-0.0005	0.0024	0.0274	0.0048
22	0.0006	-0.0005	-0.0061	-0.0056	-0.025
23	-0.0011	-0.0019	0.0034	0.0017	0.0011
24	0.0006	-0.0004	0.0038	0.0046	0.0059
25	0.0009	-0.0006	0.0172	0.0134	0.0056
26	0.0004	-0.0002	0.0057	0.0085	0.0177
27	0.0001	-0.0008	-0.0119	-0.0028	-0.0008
28	-0.0016	-0.0003	0.0010	0.0025	0.0012
29	-0.0008	0.0022	-0.0013	0.0001	0.0003
30	-0.0008	0.0001	-0.0044	-0.0016	-0.0055
31	-0.0014	0.0011	0.0079	0.0042	0.0048
32	0.0000	0.0006	-0.0028	-0.0036	0.0021
33	-0.0004	0.0014	0.0030	0.0026	0.0050
34	0.0012	0.0004	-0.0020	-0.0057	0.0010
35	0.0007	0.0017	-0.0027	-0.0014	-0.0009
36	-0.0004	-0.0001	-0.0013	0.0063	0.0027
37	-0.0004	-0.0013	0.0007	0.0025	-0.0001
38	0.0004	0.0019	-0.0011	0.0023	0.009
39	0.0001	-0.0003	-0.0023	-0.0006	-0.0015
40	-0.0017	-0.0007	-0.0048	-0.0024	-0.0001
41	0.0000	-0.0003	-0.0042	-0.0026	-0.0052
42	0.0002	-0.0019	0.0041	0.0017	0.0006
43	0.0001	-0.0006	0.0004	-0.0006	0.0003
44	-0.0004	0.0017	-0.0004	0.0018	0.0009
45	-0.0001	-0.0002	0.0022	0.0007	-0.0038

Tabla A3.II Coeficientes del ajuste a polinomios de Zernike de la superficie posterior de las lentes A1, A2, P1, P2 y P3

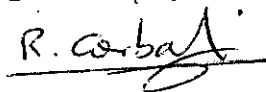
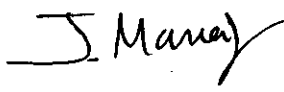
Coeficiente	Lente A1	Lente A2	Lente P1	Lente P2	Lente P3
1	0.9322	0.7849	1.5419	1.5293	1.5793
2	0.0858	0.0829	0.1134	0.1231	0.2922
3	0.1305	0.1350	-0.1184	0.2124	0.1561
4	0.0109	0.0053	0.0399	0.0171	0.0371
5	0.9273	0.7908	1.5412	1.5278	1.5750
6	-0.0201	-0.0161	-0.0248	-0.0315	-0.0278
7	-0.0027	0.0003	0.0038	-0.0014	-0.0022
8	-0.0006	-0.0003	0.0002	-0.0014	-0.0010
9	0.0000	0.0005	-0.0077	0.0011	0.0024
10	-0.0009	0.0014	0.0029	0.0007	-0.0069
11	-0.0005	0.0002	0.0006	0.0000	-0.0010
12	-0.0011	0.0001	-0.0039	-0.0010	-0.0037
13	0.0016	0.0024	0.0089	0.0078	0.0082
14	0.0011	-0.0005	0.0005	0.0010	-0.0002
15	-0.0006	0.0000	-0.0024	-0.0021	-0.0028
16	0.0006	-0.0007	0.0010	-0.0013	0.0005
17	-0.0002	0.0016	0.0020	-0.0017	-0.0001
18	0.0001	-0.0010	0.0017	-0.0014	0.0008
19	0.0003	-0.0004	0.0019	0.0012	-0.0013
20	0.0002	-0.0001	-0.0017	-0.0018	0.0021
21	-0.0001	0.0003	0.0015	0.0009	-0.0007
22	0.0002	-0.0010	-0.0010	0.0008	0.0002
23	0.0003	0.0001	-0.0014	0.0018	0.0011
24	0.0009	-0.0009	-0.0008	0.0004	-0.0003
25	-0.0012	0.0007	0.0016	-0.0010	0.0012
26	0.0007	-0.0005	0.0003	0.0005	0.0012
27	0.0008	-0.0008	0.0017	-0.0003	0.0013
28	-0.0004	0.0004	0.0006	-0.0012	-0.0001
29	0.0001	-0.0002	-0.0009	0.0000	0.0003
30	-0.0002	0.0004	-0.0005	0.0000	-0.0013
31	0.0001	0.0009	0.0000	-0.0003	-0.0004
32	0.0004	0.0000	0.0002	-0.0018	0.0007
33	0.0003	-0.0002	0.0017	-0.0014	-0.0024
34	-0.0011	-0.0002	-0.0008	0.0024	0.0011
35	-0.0007	-0.0001	0.0003	0.0009	0.0023
36	-0.0002	0.0002	0.0001	0.0005	0.0003
37	-0.0010	0.0012	-0.0012	-0.0008	-0.0008
38	-0.0008	-0.0003	0.0012	0.0012	0.0023
39	0.0018	-0.0010	-0.0009	0.0005	-0.0008
40	-0.0002	0.0003	-0.0020	0.0000	0.0017
41	0.0000	-0.0007	-0.0015	0.0010	-0.0029
42	-0.0002	0.0006	0.0016	-0.0004	0.0016
43	-0.0013	0.0003	-0.0001	0.0009	0.0006
44	-0.0001	-0.0001	0.0007	-0.0006	-0.0007
45	0.0014	-0.0017	-0.0007	0.0007	-0.0001

Reunido el Tribunal que suscribe
en el día de la fecha acordó cali-
ficar la presente Tesis Doctoral
con la censura de - SOBRESALIENTE CUM LAUDE

.....
Madrid, 27 DE ABRIL DE 1999





FIRMAN TODOS LOS MIEMBROS DEL
TRIBUNAL.