UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

TESIS DOCTORAL

Soluciones periódicas positivas para sistemas de reacción-difusión periódicos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Inmaculada Antón López

Director

Julián López Gómez

Madrid, 2015

Inmaculada Antón López

Soluciones Periódicas Positivas para Sistemas RD Periódicos.

A mi madre

Índice general

Agradecimientos

Singular agradecimiento

Al profesor Julian López-Gómez quien fue uno de mis primeros maestros en despertar en mí interés por profundizar en la Ciencia Matemática.

Por haber enriquecido progresivamente mis conocimientos en el campo de las Ecuaciones Diferenciales, dedicando esfuerzo y tiempo con generosidad.

Por haber sabido transmitirme ciencia e ilusión para seguir investigando.

Por su valiosa labor de dirección y corrección de este trabajo del que ha sido guía imprescindible.

Pero sobre todo, por creer en mí y brindarme apoyo matemático y humano.

Mi reconocimiento

A todos mis profesores que en los distintos cursos de mi carrera han contribuido a fomentar mi formación matemática.

A todos los profesores del Departamento de Matemática Aplicada, con especial mención al profesor Sixto Jesús Álvarez Contreras que fue Director del Departamento, al profesor Aníbal Rodríguez Bernal, Director actual, al profesor Antonio Brú, al profesor Gerardo Oleaga.... , quienes ocasionalmente me han brindado apoyo y comprensión.

Al profesor José María Rey Cabezas por haber resuelto con simpatía mis tropiezos tecnológicos.

A mis compañeras de la Sección Departamental de Matemática Aplicada, las profesoras Gloria Cabrera Gómez, Luz M. Fernandéz-Cabrera Marín, M. Ángeles Hernández López, M. Jesús Pons Bordería y M. Cruz Rodríguez Palánquex, que siempre me han apoyado.

A mis maestros en la vida, mis padres Charo y Alfonso, y mis hermanos Alfonso, Ignacio, Jesús y María.

Introducción General

Esta memoria está distribuida en tres capítulos. En los dos primeros se estudia el siguiente modelo de reacción difusión espacialmente heterogéneo originado por la teoría de reactores nucleares, introducido en W. E. Kastenberg and P. L. Chambré [23],

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u - b(x)uv & \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = c(x)u - d(x)uv - e(x)v & x \in \Omega,\ t > 0, \\ (u,v) = (0,0) & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0 > 0,\ v(x,0) = v_0 \geq 0 & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

cuyos estados estacionarios son las soluciones no negativas del problema elíptico semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - b(x)uv & \\ -\Delta v = c(x)u - d(x)uv - e(x)v & \text{en} \quad \Omega, \\ (u,v) = (0,0) & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

En ambos problemas se supone que Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, con frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^{2+\nu}$ para algún $\nu \in (0,1)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera como un parámetro de bifurcación. Por lo tanto, las soluciones de (0.2) serán interpretadas como ternas (λ, u, v). Además, las funciones b, c, d, $e \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ se supone que cumplen

$$b(x) > 0, \quad c(x) > 0, \quad d(x) > 0, \quad e(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \bar{\Omega} \tag{0.3}$$

a lo largo de toda la memoria. En caso contrario, los resultados podrían variar substancialmente.

El problema (0.2) admite dos tipos de soluciones no negativas:

- $(0,0)$, denominado *estado trivial* y
- las de la forma (u,v) con $u \gg 0$ y $v \gg 0$, conocidos como *estados de coexistencia*.

En esta memoria, dada $w \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, diremos que $w \gg 0$ cuando $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ y $\partial w/\partial n_x(x) < 0$ para todo $x \in w^{-1}(0) \cap \partial\Omega$, siendo n_x la normal exterior unitaria a Ω en x.

Uno de los objetivos de la presente memoria es demostrar que la dinámica del problema parabólico está determinada en muchas ocasiones por sus estados estacionarios y, en particular, por los estados de coexistencia, cuando existen. Por ello, para estudiarla en profundidad es necesario estudiar la existencia y unicidad de los estados de coexistencia del problema elíptico. Algunos resultados previos fueron obtenidos por G. Arioli [4].

El resultado principal de existencia del Capítulo 1 establece la existencia de una componente $\mathfrak{C}_+$ de estados de coexistencia de (0.2) que emana desde $(\lambda, u, v) = (\lambda, 0, 0)$ en su único punto de bifurcación a estados de coexistencia, $(\sigma_1, 0, 0)$, donde σ_1 es el autovalor principal de $-\Delta$ bajo condiciones nulas en la frontera. Además, se demuestra que $\mathfrak{C}_+$ está no acotada, debiendo perder las cotas en el valor

$$\lambda_\infty := \sigma_1[-\Delta + bc/d].$$

Este resultado general proporciona el conocido para el caso especial en que b, c, d y e son constantes positivas, obtenido por J. López-Gómez [30], que establece que el problema posee un estado de coexistencia si y sólo si

$$\sigma_1 < \lambda < \sigma_1 + bc/d.$$

Nuestro resultado principal de existencia también demuestra que la condición

$$\sigma_1 < \lambda < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b] \tag{0.4}$$

es necesaria para la existencia de un estado de coexistencia. Además, designando por $\mathcal{P}_\lambda$ al operador proyección sobre el parámetro λ de la terna (λ, u, v), se debe cumplir que, o bien

$$\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda_\infty), \qquad \text{o} \qquad \mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda^*]$$

para algún

$$\lambda_\infty \leq \lambda^* < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b].$$

Aunque la última situación no puede presentarse si todos los coeficientes son constantes, no puede descartarse en el caso general de coeficientes variables. La principal técnica utilizada para la obtención del resultado global de existencia es bifurcación local combinada con bifurcación unilateral global, como en el Capítulo 6 de J. López-Gómez [31].

Como nuestro sistema, es, en general, no cooperativo, como los de tipo presa y depredador con difusión analizados a principios de los noventa por J. López-Gómez y R. M. Pardo [35], [36], el estudio de la unicidad de sus estados de coexistencia es muy arduo desde el punto de vista matemático, salvo que en algunas circunstancias especiales, como las estudiadas en el Capítulo 2, se pueda efectuar un cambio de variable que permita reducir el estudio del sistema al de uno de tipo cooperativo, donde las técnicas de comparación basadas en el principio del máximo, como el teorema de caracterización de J. López-Gómez y M. Molina-Meyer [32], pueden aplicarse al estudio de la unicidad de estados de coexistencia.

Entre los principales resultados de unicidad multidimensionales, en el Capítulo 1 se demuestra la unicidad del estado de coexistencia para valores de λ próximos a σ_1, o a $bc/d - e$ cuando, además, todos los coeficientes son constantes. Una vez estudiados tales resultados, un análisis detallado de (0.2) cuando $e \uparrow \infty$ revelará que el sistema subyacente límite posee un único estado de coexistencia. Por ello, es natural conjeturar que nuestro modelo va a exhibir un único estado de coexistencia cuando $e(x)$ sea suficientemente grande. Tal circunstancia está corroborada por el principal resultado unidimensional de unicidad de estados de coexistencia obtenido en el Capítulo 1, que establece que, cuando $N = 1$, $L > 0$, $\Omega = (0, L)$ y $c/d \in \mathcal{C}^2[0, L]$, bajo la siguiente condición

$$-\left(\frac{c}{d}\right)''(x) + e(x)\frac{c}{d}(x) > 0 \qquad \text{para todo } \ x \in (0, L),$$

la componente $\mathfrak{C}_+$ es una curva analítica parametrizada por λ, que conecta $(\lambda, u, v) = (\sigma_1, 0, 0)$ con $(\lambda, u, v) = (\lambda_\infty, \infty, c/d)$. Aunque este resultado proporcione la unicidad del estado de coexistencia en el caso de coeficientes constantes, en el caso general en que los coeficientes sean variables el problema de la unicidad todavía permanece abierto. Evidentemente, la condición se cumple si $e(x)$ es suficientemente grande. Para concluir la unicidad global demostramos que es suficiente asegurarse que todo estado de coexistencia cumple $v(x) < c(x)/d(x)$ para cada $x \in [0, L]$, hecho que no se puede garantizar en el caso general en que los coeficientes sean variables. La herramienta básica utilizada para obtener este teorema reposa en las ideas y técnicas de J. López-Gómez y R. Pardo [35], [36], y consisten en combinar la no degeneración del estado de coexistencia con un argumento de continuación global.

El Capítulo 2 esencialmente analiza el comportamiento dinámico del problema parabólico. En primer lugar, se demuestra la existencia global de una única solución del problema para todo $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ con $u_0 > 0$, $v_0 \geq 0$. Posteriormente, se generalizan algunos resultados ya conocidos para el problema con coeficientes constantes.

Para $\lambda < \sigma_1$, cuando $(0, 0)$ es asintóticamente estable, demostramos que es un atractor global en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. El mismo resultado es cierto incluso cuando $\lambda = \sigma_1$ siempre que c y e sean constantes positivas. En general, en $\lambda = \sigma_1$, $(0, 0)$ es un atractor global en $L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$.

Además, como $(0, 0)$ es estable para $\lambda < \sigma_1$ e inestable para $\lambda > \sigma_1$, el principio de intercambio de estabilidad de M. G. Crandall y P. H. Rabinowitz [11] establece la estabilidad lineal asintótica del único estado de coexistencia para $\lambda > \sigma_1$ suficientemente próximo a σ_1. Por ser no cooperativo el sistema, ni tan siquiera bajo tales circunstancias se puede asegurar la atractividad global del estado de coexistencia. No podemos excluir que el modelo de evolución admita alguna solución, por ejemplo, periódica, para tal rango de valores del parámetero λ.

En el Capítulo 2, también demostramos la conjetura efectuada en el Capítulo 1 relativa a la unicidad para $e(x)$ suficientemente grande en el caso especial en que $b(x)$ y $d(x)$ son múltiplos, cuantificando el tamaño que debe tener $e(x)$ por intermedio de la estimación

$$\lambda + e - bc/d > 0 \qquad \text{en } \ \Omega. \tag{0.5}$$

De hecho, bajo la condición $\lambda + e - bc/d \gg 0$, el estado de coexistencia es un atractor global para el problema parabólico (0.1). Posteriormente se demuestra que, incluso aunque no se verifique la desigualdad $\lambda + e - bc/d > 0$, si $b(x)/d(x)$ y c se mantienen constantes, también se tiene la unicidad del estado de coexistencia para $\lambda < \lambda_\infty$ suficientemente próximo a λ_∞.

Finalmente, en el último capítulo se obtienen diversas caracterizaciones del principio del máximo para sistemas cooperativos periódico-parabólicos del tipo

$$\begin{cases} \mathcal{P}_k u_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} u_j(x,t) + f_k & \text{en} \quad Q_T \equiv \Omega \times [0,T], \\ u_k(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u_k(x,0) = u(x,T), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.6}$$

obteniéndose a partir de ellas la existencia y unicidad del autovalor principal asociado. En (0.6), hemos denotado

$$\mathcal{P}_k := \frac{\partial}{\partial t} + A_k(x,t;D), \qquad k = 1, ..., n, \tag{0.7}$$

donde

$$\mathcal{A}_k(x,t;D) := -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}^k(x,t) D_i D_j + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^k(x,t) D_i, \qquad k = 1, ..., n, \tag{0.8}$$

son operadores de segundo orden uniformemente elípticos en Ω para cada $t > 0$, cuyos coeficientes

$$\alpha_{ij}^k, \quad \alpha_i^k, \qquad i,j \in \{1,...,N\}, \;\; k \in \{1,...,n\},$$

son funciones Hölder continuas que se encuentran en el espacio de Banach

$$F := \{\omega \in \mathcal{C}^{\nu,\nu/2}(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \;\; \omega(x, t+T) = \omega(x,t) \;\text{ para todo }\; (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}\},$$

para algunos $T > 0$ y $0 < \nu < 1$.

La matriz de coeficientes

$$\mathcal{C}(x,t) = (c_{ij}(x,t))_{i,j=1,\dots,n}$$

con $c_{ij} \in F$ para todo $i,j \in \{1,...,n\}$, se supone que es de tipo cooperativo,

$$c_{ij}(x,t) > 0 \quad \text{para todo } \; i,j = 1,...,n, \;\; i \neq j, \quad (x,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T].$$

El principal resultado del Capítulo 3 extiende a sistemas periódico-parabólicos el teorema principal de López-Gómez y Molina-Meyer [32], obtenido para problemas elípticos. Esencialmente, establece que las siguientes afirmaciones son equivalentes

- Existe $\Psi \in \operatorname{int} P_U$ tal que $\mathcal{P}\Psi > \mathcal{C}\Psi$.

- El operador $(\mathcal{P} - \mathcal{C})^{-1}$ está bien definido, es compacto y fuertemente positivo.
- El problema (0.6) cumple el principio del máximo fuerte.
- El problema (0.6) cumple el principio del máximo.
- El problema periódico de autovalores

$$\mathcal{P}u = \mathcal{C}u + \lambda u \tag{0.9}$$

  admite un autovalor positivo, $\sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C})$, asociado a una autofunción Φ fuertemente positiva, única salvo constantes multiplicativas.

Si se cumple alguna de estas condiciones, el autovalor $\sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C})$ es simple y no existe ningún otro autovalor de (0.9) con una autofunción positiva.

Cada uno de los tres capítulos está encabezado por una introducción donde se pormenoriza su contenido. El lector debería ir a tales secciones para conocer con todo detalle los resultados y logros alcanzados en esta Tesis Doctoral.

RESUMEN EN ESPAÑOL

Esta memoria está distribuida en tres capítulos. En los dos primeros se analiza un modelo parabólico de Ingeniería Nuclear y en el último se establece un teorema de positividad para un modelo lineal periódico-parabólico de tipo cooperativo. El modelo de Ingeniería Nuclear es una versión espacialmente heterogénea del propuesto por Chambré y Kastemberg para describir el comportamiento de un Reactor Nuclear. El objetivo de la Tesis es analizar la dinámica de este problema parabólico.

En el Capítulo 2 se prueba que para cada par de valores iniciales, (u_0, v_0), funciones positivas y acotadas, el modelo parabólico tiene una única solución bien definida para todo tiempo, t, positivo. Una de las finalidades de esta memoria es demostrar que la dinámica del problema parabólico está determinada en muchas ocasiones por sus estados estacionarios, que son las soluciones no negativas del problema elíptico asociado. Tales soluciones pueden ser de dos tipos: la solución trivial, (0,0), y los denominados estados de coexistencia, que son las soluciones (u,v) con u y v positivas. El objetivo del Capítulo 1 es obtener resultados de existencia y unicidad de estados de coexistencia. En él se establece la existencia de una componente no acotada de estados de coexistencia que emana desde la solución trivial en el único punto de bifurcación posible a soluciones positivas, determinado por el autovalor principal del operador de Laplace bajo condiciones nulas en la frontera. Además, se demuestra que esta componente pierde las cotas a priori en un único punto, único valor de bifurcación desde el infinito. La principal técnica utilizada para la obtención de este resultado global de existencia es una combinación de teoría de bifurcación local con teoría de bifurcación unilateral global.

Como el sistema es, en general, no cooperativo, de tipo presa y depredador, el estudio de la unicidad de sus estados de coexistencia resulta muy ardua desde el punto de vista matemático, salvo en algunas circunstancias especiales, en las que se puede efectuar un cambio de variable que permite reducir el estudio del sistema elíptico inicial a otro de tipo cooperativo, donde las técnicas de comparación basadas en el principio del máximo se pueden aplicar proporcionando la unicidad y atractividad global del estado de coexistencia, que constituye el principal resultado del Capítulo 2.

Entre los principales resultados de unicidad multidimensionales, se demuestra la unicidad del estado de coexistencia cerca de los puntos de bifurcación desde (0,0) y desde infinito, así como para un determinado rango de valores intermedios de los parámetros. Finalmente se extienden todos los resultados de unicidad unidimensional existentes.

El Capítulo 2 analiza esencialmente el comportamiento dinámico del problema parabólico. En particular, se demuestra que por debajo del valor crítico de bifurcación a estados de coexistencia, la solución (0,0) es un atractor global, cuya estabilidad se pierde cuando el parámetro de bifurcación supera dicho umbral crítico. El principio de intercambio de estabilidad de Crandall y Rabinowitz establece entonces la estabilidad lineal asintótica del único estado de coexistencia. Pero, por no ser cooperativo el sistema, no se puede asegurar su atractividad global. En efecto, no podemos excluir la posibilidad de que el modelo de evolución admita alguna solución, por ejemplo periódica, para tal rango de valores del parámetro de bifurcación.

Finalmente en el último capítulo se obtienen diversas caracterizaciones del principio del máximo para sistemas lineales cooperativos de tipo periódico-parabólico.

English Summary

This Thesis is distributed in three chapters. In the first two we study the following spatially heterogeneous reaction diffusion model originated by the theory of nuclear reactors

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u - b(x)uv & \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = c(x)u - d(x)uv - e(x)v & x \in \Omega,\ t > 0, \\ (u,v) = (0,0) & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0 > 0,\ v(x,0) = v_0 \geq 0 & x \in \Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

whose steady states are the non negative solutions of the semilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - b(x)uv & \\ -\Delta v = c(x)u - d(x)uv - e(x)v & \text{en} \quad \Omega, \\ (u,v) = (0,0) & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

In both problems we suppose that Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, with boundary $\partial\Omega$ of class $\mathcal{C}^{2+\nu}$ for some $\nu \in (0,1)$ and $\lambda \in \mathbb{R}^+$ is regarded as a bifurcation parameter. The functions b, c, d, $e \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ satisfy

$$b(x) > 0, \quad c(x) > 0, \quad d(x) > 0, \quad e(x) > 0 \quad \text{for all} \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{0.3}$$

The problem (0.2) admits two types of non negatives solutions :

- $(0,0)$, referred to as the trivial state and
- those of the form (u,v) with $u \gg 0$ and $v \gg 0$, known as *coexistence states.* It is said that $w \gg 0$, if $w \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ with $w(x) > 0$ for every $x \in \Omega$ and $\partial w/\partial n_x(x) < 0$ for all $x \in w^{-1}(0) \cap \partial\Omega$, where n_x stands for the outward unit normal to Ω in x.

Throughout this dissertation, the solutions will be regarded as terns (λ, u, v).

In many circumstances, the dynamics of the parabolic problem is going to be regulated by the non-negative steady states. To carry out a deep analysis of the dynamics, it is imperative to study the existence and uniqueness of the coexistence states of the elliptic problem.

Chapter 1 establishes the existence of a component $\mathfrak{C}_+$ of the set of coexistence states of (0.2) emanating from $(\lambda, u, v) = (\lambda, 0, 0)$ at the unique bifurcation value, $\lambda = \sigma_1$.

It is already known, that the elliptic problem (0.2) possess a coexistence state if and only if

$$\sigma_1 < \lambda < \sigma_1 + bc/d,$$

provided b, c, d y e are positive constants. Chapter 1 deals with the general case when all these coefficients are spatially heterogeneous. In this general case, we prove that if the problem (0.2) admits a coexiste state, then

$$\sigma_1 < \lambda < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]. \tag{0.4}$$

Moreover, denoting by $\mathcal{P}_\lambda$ the λ-projection of (λ, u, v), we also deduce that

$$\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda_\infty) \qquad \text{or} \qquad \mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda^*]$$

for some $\lambda_\infty \leq \lambda^* < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]$. The second situation cannot occur when the coefficients are constant.

The mathematical relevance of our analysis relies on the fact that the previous systems are of non cooperative type and, consequently, the comparison techniques available for cooperative systems are not valid in our context to study the uniqueness of the solution.

When $N \geq 1$ we prove the existence and uniqueness of the coexistence state for values of λ sufficiently closed to $\lambda = \sigma_1$ in the general case. Moreover, we establish, in the case of constant coefficients, the existence and uniqueness of the coexistence state for the values of λ sufficiently close to $bc/d-e$ in the case of constant coefficients, improving all the results results. The analysis of the behavior of the elliptic problem provides us with some additional uniqueness results for sufficiently large e.

In the one-dimensional model, considering the additional condition

$$-\left(\frac{c}{d}\right)''(x) + e(x)\frac{c}{d}(x) > 0 \qquad \text{for all } x \in (0, L),$$

we also prove that the component of coexistence states $\mathfrak{C}_+$ is a real analytic curve, parameterized by λ, linking $(\lambda, u, v) = (\sigma_1, 0, 0)$ with $(\lambda, u, v) = (\lambda_\infty, \infty, c/d)$. Obviously, the condition holds for sufficiently large $e(x)$. Unfortunately, except when $\frac{c}{d} > 0$ is constant, we cannot guarantee global uniqueness. Although every coexistence states of the component $\mathfrak{C}_+$ keep $v(x) < c(x)/d(x)$ for all $x \in [0, L]$, if this last inequality fails the existence of some coexistence states outside the component cannot be excluded.

Chapter 2 analyzes the dynamics of the associated parabolic problem. First of all, we establish the global existence of a unique solution for the parabolic problem for all $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ with $u_0 > 0$, $v_0 \geq 0$, generalizing some previous results found for the with constant coefficients.

In the case $\lambda < \sigma_1$, the trivial solution $(0, 0)$ is linearly asymptotically stable and actually it is a global attractor in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, until $\lambda = \sigma_1$. For general c and e, in $\lambda = \sigma_1$, $(0, 0)$ is a global attractor in $L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$.

Moreover, we use the exchange stability principle of M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz [11] to show that $(0, 0)$ is linearly asymptotically stable as a steady state of the problem (0.1) if and only $\lambda < \sigma_1$, while it is unstable if and only if $\lambda > \sigma_1$.

Consequently, for $\lambda > \sigma_1$ close to σ_1, the unique coexistence state of the elliptic problem is linearly asymptotically stable and, therefore, it is asymptotically stable as a steady state of the parabolic problem.

In Chapter 2 we also obtain some new uniqueness results. If the elliptic problem (0.2) admits a coexistence state, $b(x)/d(x)$ is a constant and $e(x)$ is sufficiently large so that

$$\lambda + e(x) - c(x)b/d > 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{0.5}$$

then the coexistence state is unique and linearly asymptotically stable as a steady state of (0.1). If, in addition, $\lambda + e - bc/d \gg 0$, then the coexistence state is a global attractor for the parabolic problem (0.1). Even if $\lambda + e - bc/d > 0$ does not hold, if one further assumes that $b(x)/d(x)$ and c are constant, then, uniqueness for $\lambda > \sigma_1$ sufficiently close to σ_1 and $\lambda < \lambda_\infty$ sufficiently close to λ_∞ also holds.

Finally, in the last chapter we give a number of characterizations of the maximum principle for a class of cooperative periodic-parabolic systems. Based on them, we also get some results concerning the existence and uniqueness of the principal eigenvalue of the problem

$$\begin{cases} \mathcal{P}_k u_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{kj} u_j(x,t) + f_k & \text{in } \quad Q_T \equiv \Omega \times [0,T], \\ u_k(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u_k(x,0) = u(x,T), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{0.6}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, with a regular boundary $\partial\Omega$ and

$$\mathcal{P}_k := \frac{\partial}{\partial t} + A_k(x,t;D), \qquad k = 1, ..., n, \tag{0.7}$$

where

$$\mathcal{A}_k(x,t;D) := -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^k(x,t) D_i D_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k(x,t) D_i, \qquad k = 1, ..., n, \tag{0.8}$$

are second order uniformly elliptic operators in Ω for all $t > 0$, whose coefficients

$$\alpha_{ij}^k, \quad \alpha_i^k, \qquad i,j,k \in \{1, ..., n\},$$

are assumed to be Hölder continues functions laying in the Banach space

$$F := \{\omega \in \mathcal{C}^{\nu,\nu/2}(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \ \omega(x, t+T) = \omega(x,t) \ \text{ for all } \ (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}\},$$

for some $T > 0$ and $0 < \nu < 1$.

Lastly, we suppose that the coefficient matrix

$$\mathcal{C}(x,t) = \left(c_{ij}(x,t)\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

with $c_{ij} \in F$ for all $i, j \in \{1, ..., n\}$, is of cooperative type,

$$c_{ij}(x,t) > 0 \quad \text{para todo} \;\; i, j = 1, ..., n, \;\; i \neq j, \quad (x,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T].$$

The principal result of Chapter 3 is an extension to periodic-parabolic systems of the main theorem of López-Gómez y Molina-Meyer [32], obtained for the elliptic counterpart. Essentially, it establishes that the following conditions are equivalent

. There exists $\Psi \in \operatorname{int} P_U$ such that $\mathcal{P}\Psi > \mathcal{C}\Psi$.

. The operator $(\mathcal{P} - \mathcal{C})^{-1}$ is well defined, compact and strongly positive.

. The problem (0.6) satisfies the strong maximum principle.

. The problem (0.6) satisfies the maximum principle.

. The periodic eigenvalue problem

$$\mathcal{P}u = \mathcal{C}u + \lambda u \tag{0.9}$$

admits a positive eigenvalue, $\sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C})$, associated to a strongly positive eigenfunction Φ, unique up to a multiplicative constant.

If one of these conditions holds, then the eigenvalue $\sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C})$ is algebraically simple and no other eigenvalue of (0.9) admits a positive eigenfunction.

Each of the chapters is headed by a complete self-summary of their contents, where the reader will find a complete account of their respective main findings.

Capítulo 1

Estados estacionarios

1.1. Introducción

En este capítulo estudiamos las soluciones no negativas del problema elíptico no lineal

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - b(x)uv & \\ -\Delta v = c(x)u - d(x)uv - e(x)v & \text{en } \Omega, \\ (u,v) = (0,0) & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, con frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^{2,\nu}$ para algún $\nu \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, es interpretado como un parámetro de bifurcación, y las funciones b, c, d, $e \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ cumplen

$$b(x) > 0, \quad c(x) > 0, \quad d(x) > 0, \quad e(x) > 0, \qquad \text{para todo} \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{1.2}$$

El problema (1.1) es una versión espacialmente heterogénea del modelo homogéneo estudiado por W. Zhou [48], R. Peng, D. Wei y G. Yang [43], y J. López-Gómez [30], donde se analizó el caso muy especial en que b, c, d y e son constantes positivas.

Las soluciones no negativas de (1.1) proporcionan los estados estacionarios de un problema parabólico propuesto por W. E. Kastenberg y P. L. Chambré [23] en el contexto de la Ingeniería Nuclear, donde u mide la densidad de los neutrones rápidos y v es la temperatura del reactor. Algunos estudios pioneros sobre la dinámica de estos modelos fueron llevados a cabo por P. de Mottoni y A. Tesei [41], F. Rothe [45] y, más recientemente, por G. Arioli [4].

El problema (1.1) admite dos tipos de soluciones no negativas: $(0,0)$, al que se denomina estado trivial, por conocido, y las de la forma (u,v) con $u \gg 0$ y $v \gg 0$, frecuentemente conocidos como *estados de coexistencia* (ver el Teorema 1.1). A lo largo de esta memoria, para cualquier $w \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, diremos que $w \gg 0$ si $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ y $\partial w/\partial n_x(x) < 0$ para todo $x \in w^{-1}(0) \cap \partial\Omega$, donde n_x representa la normal unitaria exterior a Ω en x.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, con el fin de analizar matemticamente la dinámica del reactor, es necesario estudiar la existencia y multiplicidad de los estados de coexistencia de (1.1). Como (1.1) es de tipo no cooperativo, este problema supone un desafío desde el punto de vista matematemático, por las escasas técnicas de comparación disponibles para sistemas no cooperativos (ver, por ejemplo, J. López-Gómez y M. Molina-Meyer [32]).

Con objeto de presentar los principales resultados de este capítulo y de la memoria, se necesita introducir alguna notación. Dado un subdominio $D \subset \Omega$ y una función medible V en D, denotaremos por

$$\sigma[-\Delta + V, D] = \sigma[-\Delta + V]$$

al autovalor principal de $-\Delta + V$ en D bajo condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas en ∂D. Para abreviar la notación, denotaremos

$$\sigma_1 := \sigma[-\Delta, \Omega].$$

Si no existe ambigüedad, la dependencia de σ sobre el dominio no se enfatizará. Las principales propiedades de los autovalores principales utilizadas en está memoria están recogidas, por ejemplo, en J. López-Gómez [28] y S. Cano-Casanova y J. López-Gómez [9], donde se envía al lector para su consulta, si fuese necesario.

De acuerdo con los resultados de J. López-Gómez [30], W. Zhou [48], y R. Peng, D. Wei y G. Yang [43], se sabe que (1.1) posee un estado de coexistencia si y sólo si

$$\sigma_1 < \lambda < \sigma_1 + bc/d$$

siempre que b, c, d y e sean constantes positivas. Además, el estado de coexistencia bifurca desde $(u,v) = (0,0)$ cuando $\lambda \downarrow \sigma_1$, y desde $(\infty, c/d)$ cuando $\lambda \uparrow \sigma_1 + bc/d$, y además, es único si $N = 1$ (ver el Teorema 5.1 de J. López-Gómez [30]), o bien $N \geq 2$ y

$$\sigma_1 < \lambda \leq bc/d - e, \qquad \lambda^2 - (bc/d - e)\lambda + 2e^2 \geq 0 \tag{1.3}$$

(ver el Teorema 1.4 de R. Peng, D. Wei de G. Yang [43]). Debe señalarse que obtener unicidad en el contexto de sistemas no cooperativos es una tarea muy ardua (J. López-Gómez y R. Pardo [35], [36], A. Casal et al. [8], E. N. Dancer, J. López-Gómez y R. Ortega [14], J. López-Gómez [29]).

En este capítulo extenderemos considerablemente los resultados ya conocidos y estudiados en las anteriores referencias obteniendo algunos resultados que son novedosos incluso en el caso de coeficientes constantes. A lo largo de toda la memoria, las soluciones de (1.1) son interpretadas como ternas (λ, u, v).

En lo que se refiere a la existencia de estados de coexistencia, se establece la existencia de una componente $\mathfrak{C}_+$ del conjunto de estados de coexistencia de (1.1) que bifurca desde $(u, v) = (0, 0)$ en $\lambda = \sigma_1$ y desde $(\infty, c/d)$ en

$$\lambda = \lambda_\infty := \sigma[-\Delta + bc/d]. \tag{1.4}$$

Aun más, λ_∞ es el único valor de λ desde donde $\mathfrak{C}_+$ bifurca desde el infinito y, denotando por $\mathcal{P}_\lambda$ al operador proyección sobre el parámetro λ de la terna (λ, u, v), se cumple que o bien $\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda_\infty)$, o $\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda^*]$ para algún $\lambda_\infty \leq \lambda^* < \infty$. La segunda situación no puede ocurrir cuando los coeficientes son constantes.

En lo que se refiere a la unicidad, en este capítulo se establecen los siguientes resultados:

1. Existe $\epsilon > 0$ tal que (1.1) posee un único estado de coexistencia para cada $\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1 + \epsilon]$.

2. Supongamos que b, c, d y e son constantes y denotemos

$$\lambda_0 := bc/d - e. \tag{1.5}$$

   Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que el problema (1.1) tiene un único estado de coexistencia para cada $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$.

El primer resultado de unicidad es nuevo. El segundo completa el Teorema 1.4 de R. Peng, D. Wei y G. Yang [43]. Además, también se demostrará que, para cada $\lambda \in (\sigma_1, \lambda_\infty)$, cualquier familia de estados de coexistencia $(\lambda, u(e), v(e))$, $e > 0$, de (1.1) cumple la siguiente propiedad

$$\lim_{e \uparrow \infty} \frac{u(e)}{e} = d^{-1} U_0, \qquad \lim_{e \uparrow \infty} v(e) = \frac{c}{d} \frac{U_0}{U_0 + 1}, \tag{1.6}$$

donde U_0 es la única solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda U - \frac{bc}{d} \frac{U^2}{U+1} & \text{en } \Omega, \\ U = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

Como (1.7) tiene una única solución positiva, es bastante natural conjeturar la unicidad del estado de coexistencia para e suficientemente grande. Matemáticamente hablando, la prueba rigurosa de este hecho es un reto ya que conlleva el análisis de un problema de perturbación singular para un sistema de tipo no cooperativo. Por ello, este problema permanece abierto en general.

Aunque en el prototipo del modelo unidimensional ($N = 1$) se pobará que la componente $\mathfrak{C}_+$ consiste en una curva analítica globalmente parametrizada por λ si $e(x)$ es suficientemente grande, esto no implica necesariamente la unicidad del estado de coexistencia de (1.1), porque el modelo podría poseer algún otro estado de coexistencia fuera de $\mathfrak{C}_+$.

La distribución de este capítulo es la siguiente. La Sección 2 contiene los resultados de existencia, la Sección 3 incluye los resultados de unicidad, la Sección 4 analiza (1.1) cuando $e \uparrow \infty$ y, finalmente, la Sección 5 estudia el prototipo unidimensional.

A través de toda esta memoria, utilizaremos los espacios de Banach

$$E := \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}), \qquad F := \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar{\Omega}).$$

1.2. Existencia de estados de coexistencia

El principal resultado de esta sección es el siguiente teorema. Se entenderá por una *componente* un subconjunto cerrado y conexo que es maximal para la inclusión.

Teorema 1.1 *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) Supongamos que (1.1) *posee una solución* $(u, v) \geq (0, 0)$ *con* $(u, v) \neq (0, 0)$. *Entonces,* (u, v) *es un estado de coexistencia, i.e.,* $u \gg 0$ *y* $v \gg 0$. *Además,*

$$\lambda = \sigma[-\Delta + bv], \qquad \|v\|_\infty < \|c/d\|_\infty. \tag{1.8}$$

Consecuentemente,

$$\sigma_1 < \lambda < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b] \tag{1.9}$$

si (1.1) *admite un estado de coexistencia.*

ii) Existe una componente no acotada $\mathfrak{C}_+ \subset \mathbb{R} \times E$ *del conjunto de estados de coexistencia de* (1.1) *tal que*

$$(\lambda, u, v) = (\sigma_1, 0, 0) \in \bar{\mathfrak{C}}_+.$$

En otras palabras, $\mathfrak{C}_+$ *emana desde* $(u, v) = (0, 0)$ *en* $\lambda = \sigma_1$. *Además,* $\lambda = \sigma_1$ *es el único valor de bifurcación a estados de coexistencia desde* $(u, v) = (0, 0)$.

iii) Sea $\mathcal{P}_\lambda$ *el operador proyección sobre la componente* λ *de* (λ, u, v). *Entonces, o bien*

$$\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda_\infty), \qquad \lambda_\infty := \sigma[-\Delta + bc/d],$$

o

$$\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda^*]$$

para algún

$$\lambda_\infty \leq \lambda^* < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b].$$

Además, λ_∞ *es el único valor de* λ *para el cual* $\mathfrak{C}_+$ *bifurca desde el infinito.*

iv) Para todo $\lambda \in \mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+$*, sea* $(\lambda, u_\lambda, v_\lambda)$ *un estado de coexistencia de* (1.1) *tal que*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_\infty} \|u_\lambda\|_\infty = \infty.$$

Entonces,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_\infty} u_\lambda = \infty \quad \textit{uniformemente en subconjuntos compactos de } \ \Omega$$

y

$$\lim_{\lambda \to \lambda_\infty} v_\lambda = c/d \quad \textit{débilmente en } \ L^p(\Omega)$$

para todo $p > 1$*.*

Demostración: Probaremos cada apartado por separado.

Demostración de la Parte i): Sea $(u, v) \geq (0, 0)$, $(u, v) \neq (0, 0)$, una solución positiva de (1.1). Supongamos que $u = 0$. Entonces, se deduce de la ecuación de v que

$$(-\Delta + e)v = 0 \qquad \text{en } \ \Omega, \qquad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Por tanto, $v = 0$, ya que

$$\sigma[-\Delta + e] > \sigma_1 > 0.$$

Análogamente, si $v = 0$, entonces, a partir de la ecuación satisfecha por la v, se desprende que $cu = 0$ y, consecuentemente, $u = 0$, por (1.2). Luego, cualquier solución no trivial no negativa de (1.1) debe satisfacer

$$u > 0 \qquad \text{y} \qquad v > 0.$$

Por otra parte, como la ecuación satisfecha por u puede expresarse como

$$(-\Delta + bv)u = \lambda u,$$

gracias, además, a la unicidad del autovalor principal y a la positividad fuerte de su autofunción asociada, se desprende que necesariamente $u \gg 0$. Además, se debe cumplir la primera identidad de (1.8).

Cosideremos ahora un $x_0 \in \Omega$ tal que

$$v(x_0) = \|v\|_\infty > 0.$$

Entonces, $-\Delta v(x_0) \geq 0$ y se deduce de la ecuación satisfecha por v que (1.1)

$$0 < e(x_0)v(x_0) \leq [c(x_0) - d(x_0)v(x_0)]u(x_0)$$

y, consecuentemente,

$$v(x_0) = \|v\|_\infty < c(x_0)/d(x_0) \leq \|c/d\|_\infty,$$

lo que concluye la prueba de (1.8). Por (1.8) y la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, también se obtiene que

$$\sigma_1 = \sigma[-\Delta] < \sigma[-\Delta + bv] = \lambda < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]$$

siempre que (1.1) admita un estado de coexistencia. Por tanto, (1.9) es una condición necesaria para la existencia.

Para concluir la demostración de la Parte i), nos queda por comprobar que $v \gg 0$. Supongamos $v(x_1) = 0$ para algún $x_1 \in \Omega$. Entonces, como $v > 0$, x_1 debe ser un mínimo local de v y, por tanto,

$$\nabla v(x_1) = 0, \qquad \Delta v(x_1) \geq 0.$$

Como, a partir de la ecuación satisfecha por v, se deduce que

$$-\Delta v(x_1) = c(x_1)u(x_1) > 0,$$

lo que es imposible. Luego,

$$v(x) > 0 \qquad \text{para todo } \; x \in \Omega.$$

Finalmente, gracias a (1.2), existe $\epsilon > 0$ tal que $c - dv > 0$ en

$$D := \{\, x \in \Omega \;:\; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \epsilon \,\}$$

porque $v = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $c(x) > 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Por consiguiente, teniendo en cuenta que

$$(-\Delta + e)\, v = (c - dv)u > 0 \qquad \text{en } \; D$$

y que $v|_{\partial D} \geq 0$ y

$$\sigma[-\Delta + e, D] > 0,$$

se desprende del principio del máximo fuerte que $v \gg 0$ en D. Consecuentemente, $v \gg 0$ en Ω. Esto concluye la demostración de la Parte i).

Demostración de la Parte ii): Esencialmente, hemos de comprobar que $\lambda = \sigma_1$ es un valor de bifurcación desde la *solución trivial* $(u, v) = (0, 0)$ a una componente de estados de coexistencia de (1.1). Para ello, en primer lugar, se introduce el operator $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times E \to E$ definido por

$$\mathfrak{F}(\lambda, u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - (-\Delta)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda u - buv \\ cu - duv - ev \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

para todo $(\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times E$. Como $\mathfrak{F}$ es de tipo polinomial, es analítico real. Además,

$$\mathfrak{F}(\lambda, 0, 0) = 0 \qquad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

y, por regularidad elíptica,

$$\mathfrak{F}(\lambda, u, v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (u, v) \in F \;\text{ resuelve }\; (1.1).$$

A continuación, para cada $(u,v)\in E$, denotaremos

$$\mathfrak{L}(\lambda)(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - (-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ c & -e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

y

$$\mathfrak{R}(u,v) := (-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} buv \\ duv \end{pmatrix}.$$

Entonces, para cada $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\mathfrak{L}(\lambda) = D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\lambda,0,0)$$

y

$$\mathfrak{F}(\lambda,u,v) = \mathfrak{L}(\lambda)(u,v) + \mathfrak{R}(u,v), \qquad (u,v)\in E.$$

Además, gracias a las estimaciones de Schauder y al teorema de Ascoli-Arzelá, el operador lineal

$$\mathfrak{K}(\lambda)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := (-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ c & -e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad (u,v)\in E,$$

es compacto y se cumple que

$$\mathfrak{L}(\lambda) = I_E - \mathfrak{K}(\lambda) \qquad \text{para todo } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Consecuentemente, $\mathfrak{L}(\lambda)$ es un operador de Fredholm de índice cero (ver, si es necesario, Brézis [6, Th. VI.6]).

A continuación, denominaremos

$$\mathfrak{L}_0 := \mathfrak{L}(\sigma_1), \qquad \mathfrak{L}_1 := \frac{d\mathfrak{L}}{d\lambda}(\sigma_1) = -(-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por cálculo directo,

$$N[\mathfrak{L}_0] = \operatorname{span}\left[\left(\varphi, (-\Delta+e)^{-1}(c\varphi)\right)\right],$$

donde $\varphi \gg 0$ es la autofunción principal asociada con σ_1, normalizada para que $\|\varphi\|_\infty = 1$. Además,

$$\mathfrak{L}_1\begin{pmatrix} \varphi \\ (-\Delta+e)^{-1}(c\varphi) \end{pmatrix} = -(-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \notin R[\mathfrak{L}_0]. \tag{1.11}$$

Para asegurarnos de (1.11), procederemos por contradicción. Supongamos, por el contrario, que

$$(-\Delta)^{-1}\begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \in R[\mathfrak{L}_0].$$

Entonces, existe $u\in\mathcal{C}^1_0(\bar\Omega)$ tal que

$$u - (-\Delta)^{-1}(\sigma_1 u) = (-\Delta)^{-1}\varphi.$$

Por regularidad elíptica, $u \in \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar{\Omega})$ y

$$-\Delta u = \sigma_1 u + \varphi.$$

Multiplicando esta ecuación por φ e integrando por partes en Ω, se desprende que $\int_\Omega \varphi^2 = 0$, lo que es imposible y demuestra (1.11). De hecho, como $\mathfrak{L}_0$ es Fredholm de índice cero, se obtiene que

$$\mathfrak{L}_1 (N[\mathfrak{L}_0]) \oplus R[\mathfrak{L}_0] = E, \tag{1.12}$$

que es la condición de transversalidad de M. G. Crandall y P. H. Rabinowitz [10]. Como se tiene

$$\varphi \gg 0 \quad \text{y} \quad (-\Delta + e)^{-1}(c\varphi) \gg 0,$$

debido al principal teorema de M. G. Crandall y P. H. Rabinowitz [10] (para más detalles ir a [27, Chapter 2]), $\lambda = \sigma_1$ es un valor de bifurcación a una única curva de estados de coexistencia de (1.1).

Se probará ahora que σ_1 es el único valor de λ para el cual los estados de coexistencia pueden bifurcar desde $(u, v) = (0, 0)$. En efecto, supongamos que existe una sucesión (λ_n, u_n, v_n), $n \geq 1$, de estados de coexistencia de (1.1) tal que

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n, u_n, v_n) = (\lambda, 0, 0) \in \mathbb{R} \times E$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, a partir de la ecuación satisfecha por las u_n, podemos deducir que, para cada $n \geq 1$,

$$-\Delta \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} = \lambda_n \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} - b v_n \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty},$$

o, equivalentemente,

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} = (-\Delta)^{-1} \left(\lambda \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} - b v_n \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} \right) + (\lambda_n - \lambda)(-\Delta)^{-1} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} \right).$$

Por la compacidad de $(-\Delta)^{-1} : E \to E$, se deduce que a lo largo de alguna subsucesión, etiquetada de nuevo por n, se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} = \psi > 0,$$

para alguna función $\psi \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ con $\|\psi\|_\infty = 1$. Luego, haciendo $n \to \infty$ en la anterior identidad, obtenemos que

$$\psi = \lambda(-\Delta)^{-1}\psi.$$

Equivalentemente, por regularidad elíptica, $-\Delta\psi = \lambda\psi$. Por lo tanto, gracias a la unicidad del autovalor principal, $\lambda = \sigma_1$, lo que demuestra la anterior afirmación.

La condición (1.12) establece que el concepto de multiplicidad algebraica $\chi[\mathfrak{L};\cdot]$ introducida por J. Esquinas y J. López-Gómez [17] y posteriormente refinada en [27] y en J. López-Gómez y C. Mora-Corral [34], satisface

$$\chi[\mathfrak{L}(\lambda);\sigma_1] = 1.$$

Consecuentemente, debido a los Teoremas 6.0.1, 8.1.1 y la Proposición 12.3.1 de [34], el índice local topológico $\mathrm{Ind}(\mathfrak{L}(\lambda), 0)$ cambia cuando λ cruza σ_1. Por tanto, por los Teoremas 6.2.1 y 6.3.1 de [27], existe una componente $\mathfrak{C}_{\sigma_1}$ del conjunto de soluciones no triviales de (1.1) con $(\sigma_1, 0, 0) \in \bar{\mathfrak{C}}_{\sigma_1}$ que satisface la alternativa global de P. H. Rabinowitz [44]. Además, de acuerdo con el teorema local de M. G. Crandall y P. H. Rabinowitz [10], $\mathfrak{C}_{\sigma_1}$ debe ser una curva real analítica en un entorno de $(\sigma_1, 0, 0)$.

En la discusión anterior, el cambio de índice local topológico de $\mathfrak{L}(\lambda)$ no puede inferirse directamente de [10] sin utilizar la teoría abstracta espectral de [17], [27], y [34].

De acuerdo con la teoría unilateral de P. H. Rabinowitz [44], en un entorno de $(\sigma_1, 0, 0)$, la componente $\mathfrak{C}_{\sigma_1}$ consta de dos subcomponentes. La subcomponente, $\mathfrak{C}^+_{\sigma_1}$, formada por estados de coexistencia, y la subcomponente $\mathfrak{C}^-_{\sigma_1}$, formada por pares de soluciones negativas. Desafortunadamente, por las razones ya explicadas en [27, Cap. 6], en E. N. Dancer [13], y en J. López-Gómez y M. Molina-Meyer [33], tal circunstancia no implica que necesariamente la subcomponente $\mathfrak{C}^+_{\sigma_1}$ cumpla la *alternativa global* of P. H. Rabinowitz [44], tal y como lo hace la componente $\mathfrak{C}_{\sigma_1}$. Es decir, la subcomponente no tiene, en principio, por qué cumplir la alternativa global.

La existencia de una subcomponente no acotada $\mathfrak{C}_+$ de estados de coexistencia con $(\sigma_1, 0, 0) \in \bar{\mathfrak{C}}_+$; es decir, la no acotación de $\mathfrak{C}_+$, se obtiene adaptando la prueba de [33, Teorema 1.1], tal y como se hizo en la demostración de [30, Teorema 1.1]. Esto finaliza la prueba del Apartado ii).

Demostración de la Parte iii): Por (1.9), $\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+$ está acotada. Luego, como $\mathfrak{C}_+$ es no acotada en $\mathbb{R} \times E$, utilizando (1.8), se desprende la existencia de una sucesión $(\lambda_n, u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times E$, $n \geq 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_\infty = \infty.$$

Debido a (1.9), se puede extraer una subsucesión, etiquetada de nuevo por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_\omega \in [\sigma_1, \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]]. \tag{1.13}$$

Definiendo las funciones

$$\tilde{u}_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty}, \qquad \tilde{v}_n := \frac{v_n}{\|u_n\|_\infty}, \qquad n \geq 1, \tag{1.14}$$

y dividiendo por $\|u_n\|_\infty$ las ecuaciones diferenciales del sistema, obtenemos

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_n = \lambda_n \tilde{u}_n - b(x) v_n \tilde{u}_n, \\ -\Delta \tilde{v}_n = c(x)\tilde{u}_n - d(x) v_n \tilde{u}_n - e(x)\tilde{v}_n. \end{cases} \tag{1.15}$$

Gracias a (1.8), (1.13) y (1.14), el segundo miembro de la primera ecuación de (1.15) está acotado en $L^\infty(\Omega)$. Por ello, gracias a las estimaciones L^p de S. Agmon, A. Douglis y L. Nirenberg [1], la sucesión $\tilde{u}_n$, $n \geq 1$, está acotada en $W_0^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > 1$. Consecuentemente, por el teorema de F. Rellich y V. I. Kondrachov, existe $\tilde{u} \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ tal que, a lo largo de alguna subsucesión, etiquetada de nuevo por n, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n = \tilde{u} \qquad \text{en } \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}). \tag{1.16}$$

Como, debido a (1.8), v_n, $n \geq 1$, está acotado en $L^\infty(\Omega)$, para cada $p > 1$, se puede extraer una subsucesión, etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \text{débilmente en } L^p(\Omega) \tag{1.17}$$

para algún $v \in L^p(\Omega)$ (ver Teorema III.16 de H. Brézis [6]).

Sea $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ una función test. Entonces, multiplicando la primera ecuación de (1.15) por ϕ, integrando en Ω y aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene que, para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle \nabla\phi, \nabla\tilde{u}_n\rangle &= \lambda_n \int_\Omega \phi\tilde{u}_n - \int_\Omega b v_n \tilde{u}_n \phi \\ &= \lambda_n \int_\Omega \phi\tilde{u}_n - \int_\Omega b v_n \tilde{u}\phi - \int_\Omega b v_n(\tilde{u}_n - \tilde{u})\phi.\end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ en esta identidad, se deduce, a partir de (1.16) y (1.17), que

$$\int_\Omega \langle \nabla\phi, \nabla\tilde{u}\rangle = \lambda_\omega \int_\Omega \phi\tilde{u} - \int_\Omega b v\tilde{u}\phi.$$

Luego, $\tilde{u}$ es una solución débil de

$$-\Delta\tilde{u} = \lambda_\omega \tilde{u} - bv\tilde{u}. \tag{1.18}$$

Además, $\|\tilde{u}\|_\infty = 1$ y $\tilde{u} > 0$. Por regularidad elíptica, $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ resuelve (1.18) en sentido clásico y v es independiente de $p > 1$. Por tanto, $\tilde{u} \in \bigcap_{p>1} W^{2,p}(\Omega)$ es una solución fuerte de (1.18) con $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$. Consecuentemente, por la unicidad del autovalor principal,

$$\lambda_\omega = \sigma[-\Delta + bv] \quad \text{y} \quad \tilde{u} \gg 0. \tag{1.19}$$

Análogamente, a partir de la segunda ecuación de (1.15) se deduce que

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \tilde{v}_n \Delta\phi &= \int_\Omega c\phi\tilde{u}_n - \int_\Omega d\phi v_n \tilde{u}_n - \int_\Omega e\phi\tilde{v}_n \\ &= \int_\Omega c\phi\tilde{u}_n - \int_\Omega d\phi v_n\tilde{u} - \int_\Omega d\phi v_n(\tilde{u}_n - \tilde{u}) - \int_\Omega e\phi\tilde{v}_n\end{aligned}$$

y, tomado límites cuando $n \to \infty$, nos conduce a

$$\int_\Omega \tilde{u}(x)\phi(x)[c(x) - d(x)v(x)]\,dx = 0$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, ya que $\lim_{n\to\infty} \tilde{v}_n = 0$ uniformemente en Ω. Por lo tanto,

$$v = c/d \qquad \text{en casi todo punto de } \Omega. \tag{1.20}$$

Naturalmente, gracias a (1.20), se obtiene de (1.19) que

$$\lambda_\omega = \sigma[-\Delta + b(x)c(x)/d(x)] = \lambda_\infty.$$

Consecuentemente, λ_∞ es el único valor de λ donde las soluciones pierden las cotas.

Como $\mathcal{P}_\lambda$ es continua y $\mathfrak{C}_+$ es conexo, $\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+$ es conexo y, por ello, debe ser un intervalo. Aun más, $\mathfrak{C}_+$ bifurca desde $(0,0)$ en $\lambda = \sigma_1$, y desde el infinito en $\lambda = \lambda_\infty$, y, debido a (1.9), (1.1) no admite un estado de coexistencia si $\lambda \le \sigma_1$ o $\lambda \ge \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]$. Consecuentemente, existe

$$\lambda^* \in [\lambda_\infty, \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]]$$

tal que

$$\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ \in \{(\sigma_1, \lambda^*), (\sigma_1, \lambda^*]\}\,.$$

Para completar la prueba de la Parte iii) se comprobará que $\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda^*]$ si $\lambda^* > \lambda_\infty$; en cualquier caso $\lambda^* < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]$. Se argumentará por contradicción. Supongamos que $\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda^*)$ con $\lambda^* > \lambda_\infty$, y sea $(\lambda_n, u_n, v_n) \in \mathfrak{C}_+$, $n \ge 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda^* > \lambda_\infty.$$

Por (1.8), v_n, $n \ge 1$, está acotada. Además, λ_∞ es el único valor de bifurcación desde el infinito. Luego, la sucesión u_n, $n \ge 1$, está también acotada. Consecuentemente, como

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = (-\Delta)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_n u_n - b u_n v_n \\ c u_n - d u_n v_n - e v_n \end{pmatrix} \qquad n \ge 1, \tag{1.21}$$

y $(-\Delta)^{-1}$ es un operador compacto, se puede extraer una subsucesión de (λ_n, u_n, v_n), etiquetada igual, tal que

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = (u^*, v^*) \in E$$

en el espacio de Banach E. Multiplicando las ecuaciones diferenciales subyacentes por una función test $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, integrando por partes en Ω y haciendo $n \to \infty$, se observa fácilmente que (λ^*, u^*, v^*) debe ser una solución débil de (1.1). Por regularidad elíptica, debe ser una solución fuerte. Por la Parte i), o bien $(u^*, v^*) = (0,0)$, o es un estado de coexistencia. En el primer caso, $(\lambda^*, 0, 0)$ debería ser un punto de bifurcación a estados de coexistencia desde $(\lambda, 0, 0)$, de donde se deduciría que $\lambda^* = \sigma_1$, lo que es imposible. Por lo tanto debe ser un estado de coexistencia. Como $\mathfrak{C}_+$ es cerrado, necesariamente $(\lambda^*, u^*, v^*) \in \mathfrak{C}_+$ y, de aquí se desprende que $\lambda^* \in \mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda^*)$, lo que es una contradicción. Se observa que en ese caso $\lambda^* < \sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]$ por (1.9). Esto completa la prueba de la Parte iii).

Demostración de la Parte iv): Sea $(\lambda_n, u_n, v_n) \in \mathfrak{C}_+$, $n \geq 1$, una sucesión de estados de coexistencia tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_\infty = \infty.$$

Entonces, considerando (1.14) y repitiendo el mismo argumento de compacidad de la Parte iii), puede encontrarse una subsucesión, etiquetada igual, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} = \tilde{u} \gg 0 \qquad \text{en } \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}),$$

donde $\tilde{u}$ es la autofunción asociada a λ_∞, normalizada por $\|\tilde{u}\|_\infty = 1$, y

$$\lim_{n\to\infty} v_n = c/d \qquad \text{débilmente en } L^p(\Omega)$$

para todo $p > 1$. Como se cumple lo mismo a lo largo de cualquier sucesión, bajo las hipótesis de la Parte iv), se obtiene que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_\infty} \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_\infty} = \tilde{u} \qquad \text{en } \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}) \tag{1.22}$$

y que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_\infty} v_\lambda = c/d \qquad \text{débilmente en } L^p(\Omega)$$

para todo $p > 1$. Sea K un subconjunto compacto de Ω. Como $\tilde{u} \gg 0$ en Ω, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\tilde{u} \geq \min_K \tilde{u} > \min_K \tilde{u} - \epsilon > 0$$

en K. Luego, de acuerdo con (1.22),

$$u_\lambda \geq (\min_K \tilde{u} - \epsilon)\|u_\lambda\|_\infty \qquad \text{en } K$$

para λ suficientemente próximo a λ_∞. Esto concluye la demostración. □

Como consecuencia inmediata del Teorema 1.1, se cumple el siguiente resultado, que mejora el Teorema 1.1 de J. López-Gómez [30].

Corolario 1.2 *Supongamos que $b(x)$, $c(x)$ y $d(x)$ son constantes positivas. Entonces,* (1.1) *admite un estado de coexistencia si y sólo si*

$$\sigma_1 < \lambda < \lambda_\infty = \sigma_1 + bc/d. \tag{1.23}$$

Además,

$$\|v\|_\infty < c/d, \qquad \mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+ = (\sigma_1, \lambda_\infty). \tag{1.24}$$

Demostración: De acuerdo con el Teorema 1.1 (i), (1.23) es necesaria para la existencia de estados de coexistencia. Por el Teorema 1.1 (iii), $(\sigma_1, \lambda_\infty) \subset \mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C}_+$ y, por ello, (1.1) admite un estado de coexistencia para cada $\lambda \in (\sigma_1, \lambda_\infty)$. Por tanto, (1.23) no es sólo necesaria sino también suficiente para la existencia. El hecho de que $\|v\|_\infty < c/d$ es una consecuencia inmediata del Teorema 1.1 (i). $\square$

En el contexto de [30], la componente $\mathfrak{C}_+$ tiene la forma que muestra la Figura 1 de [30]. Pero, para el problema general espacialmente heterogéneo (1.1) la componente $\mathfrak{C}_+$ puede tener alguna de las formas mostradas en la Figura 1.1. El primer dibujo de la Figura 1.1 muestra una componente admisible con $\lambda_\infty = \lambda^*$ y $\mathcal{P}_\lambda(\mathfrak{C}_+) = (\sigma_1, \lambda^*]$. El segundo ilustra un caso en que $\lambda^* > \lambda_\infty$. Tales situaciones no pueden suceder con coeficientes constantes, pero, de acuerdo con el Teorema 1.1, ambas son admisibles. Queda abierto el problema de decidir si realmente cada una de estas situaciones puede ocurrir.

1.3. Resultados de unicidad multidimensionales

Esta sección da una serie de resultados generales de unicidad de estados de coexistencia cuando $N \geq 1$. En primer lugar se demostrará que (1.1) tiene un

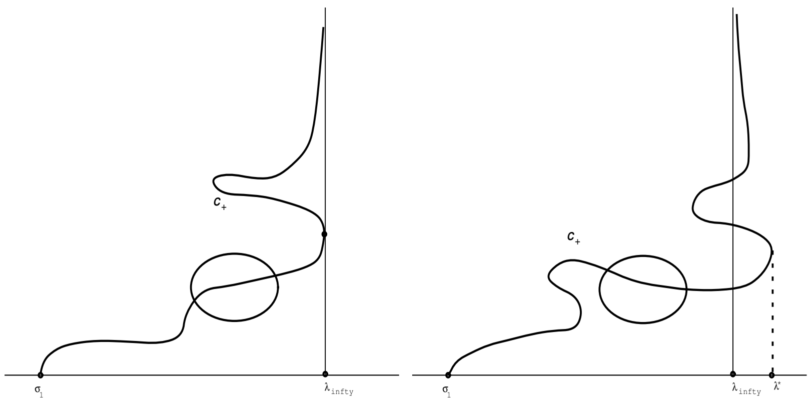

Figura 1.1: Dos posibles diagramas de bifurcación.

único estado de coexistencia si $\lambda > \sigma_1$ está suficientemente próximo a σ_1. Más tarde se probará que, cuando los coeficientes son constantes, (1.1) tiene un único estado de coexistencia si λ es suficientemente próximo a $bc/d - e$. Este resultado mejora el Teorema 1.4 de R. Peng, D. Wei y G. Yang [43], donde se estudia el caso $\lambda \leq bc/d - e$.

1.3.1. Unicidad para $\lambda \sim \sigma_1$ en el caso general

El siguiente teorema es el principal resultado de esta sección.

Teorema 1.3 *Existe* $\epsilon > 0$ *tal que* (1.1) *posee un único estado de coexistencia para cada* $\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1 + \epsilon]$.

Demostración: La unidad local en un entorno de $(\sigma_1, 0, 0)$ es una consecuencia del teorema de bifurcación de M. G. Crandall y P. H. Rabinowitz [10] ya aplicado en la prueba del Teorema 1.1 (ii). Por tanto, se utilizará la misma notación introducida en él. Sea Y cualquier subespacio cerrado de E tal que

$$N[\mathfrak{L}_0] \oplus Y = E.$$

Por (1.12), de acuerdo con el teorema principal de [10], existen $\epsilon > 0$ y dos funciones analíticas reales

$$\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}, \qquad y = (y_1, y_2) : (-\epsilon, \epsilon) \to Y,$$

tales que:

i) $\lambda(0) = \sigma_1$ e $y(0) = (0, 0)$;

ii) $\mathfrak{F}(\lambda(s), u(s), v(s)) = 0$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, donde

$$(u(s), v(s)) = s\left((\varphi, (-\Delta + e)^{-1}(c\varphi)) + (y_1(s), y_2(s)\right), \quad |s| < \epsilon. \tag{1.25}$$

iii) Existe $\rho_0 > 0$ tal que, para cada $\rho < \rho_0$,

$$\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap B_\rho(\sigma_1, 0, 0) = \{\, (\lambda, 0, 0),\ \lambda \sim \sigma_1 \,\} \cup \{\, (\lambda(s), u(s), v(s)),\ |s| < \eta \,\}$$

para todo $\eta = \eta(\rho) \in (0, \epsilon)$, donde $B_\rho(\sigma_1, 0, 0)$ designa la bola de radio ρ centrada en $(\sigma_1, 0, 0)$ y contenida en $\mathbb{R} \times E$. Además, $\eta(\rho) \to 0$ si $\rho \to 0$.

Como los ceros de $\mathfrak{F}$ en $\mathbb{R} \times E$ proporcionan soluciones clásicas de (1.1), sustituyendo (1.25) en la primera ecuación de (1.1) y dividiendo por s, se obtiene

$$\begin{aligned} -\Delta(\varphi + y_1(s)) = \big[&\sigma_1 + \lambda'(0)s + O(s^2) \\ &-b(x)s\left((-\Delta + e)^{-1}(c\varphi) + y_2(s)\right)\big] (\varphi + y_1(s)) \end{aligned}$$

para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Luego, teniendo en cuenta que $-\Delta\varphi = \sigma_1\varphi$ e identificando los términos de primer orden, encontramos que

$$-\Delta y_1'(0) = \sigma_1 y_1'(0) + \left[\lambda'(0) - b(-\Delta + e)^{-1}(c\varphi)\right]\varphi.$$

Consecuentemente, multiplicando por φ e integrando por partes en Ω,

$$\lambda'(0) = \int_\Omega b\varphi^2(-\Delta + e)^{-1}(c\varphi) / \int_\Omega \varphi^2 > 0. \tag{1.26}$$

Además, la bifurcación es *trans-crítica*. Como consecuencia, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda'(s) > 0$ para todo $s \in (-\delta, \delta)$. Eligiendo $\rho < \rho_0$ tal que $\eta(\rho) < \delta$, (1.25) implica que $\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap B_\rho(\sigma_1, 0, 0)$ consta de las soluciones triviales $(\lambda, 0, 0)$, $\sigma_1^- < \lambda < \sigma_1^+$, con $\sigma_1^- < \sigma_1 < \sigma_1^+$, más un arco creciente de soluciones, $(\lambda(s), u(s), v(s))$, $|s| < \eta(\rho) < \delta$. Consecuentemente, existe $\epsilon > 0$, con $\sigma_1 < \sigma_1 + \epsilon < \sigma_1^+$, tal que (1.1) tiene un único estado de coexistencia en $B_\rho(\sigma_1, 0, 0)$ para todo $\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1 + \epsilon]$. Esto concluye la prueba de la unicidad local de los estados de coexistencia.

La prueba de unicidad global procede por contradicción. Supongamos que existe una sucesión de estados de coexistencia (λ_n, u_n, v_n), $n \geq 1$, tal que

$$(\lambda_n, u_n, v_n) \notin B_\rho(\sigma_1, 0, 0) \subset \mathbb{R} \times E, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \sigma_1. \tag{1.27}$$

Entonces, gracias al Teorema 1.1, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\max_{n\geq 1}\{\|u_n\|_\infty, \|v_n\|_\infty\} \leq C.$$

Como (λ_n, u_n, v_n), $n \geq 1$, satisface (1.21), y $(-\Delta)^{-1}$ es compacto, se puede extraer una subsucesión de (λ_n, u_n, v_n), etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = (u^*, v^*) \in E$$

en E. Naturalmente, (σ_1, u^*, v^*) proporciona una solución no negativa de (1.1). Además, por (1.27),

$$\|(\sigma_1, u^*, v^*) - (\sigma_1, 0, 0)\|_{\mathbb{R}\times E} \geq \rho.$$

Consecuentemente, $(u^*, v^*) \neq (0, 0)$. Por lo tanto, gracias al Teorema 1.1 (i), (σ_1, u^*, v^*) debe ser un estado de coexistencia de (1.1). Pero eso es imposible, ya que (1.1) no admite estados de coexistencia para $\lambda = \sigma_1$ por el Teorema1.1 (i). Esto finaliza la prueba. □

1.3.2. Unicidad para $\lambda \sim bc/d - e$ con coeficientes constantes

El siguiente teorema recoge el principal resultado de esta sección.

Teorema 1.4 *Supongamos que*

$$\lambda_0 := \frac{bc}{d} - e > \sigma_1.$$

Entonces, existe $\eta > 0$ *tal que* (1.1) *tiene un único estado de coexistencia para cada*

$$\lambda \in I_\eta := (\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta).$$

Demostración: Introduciendo la variable auxiliar

$$w = u - \frac{b}{d}v,$$

el problema (1.1) puede escribirse bajo la forma equivalente

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - du^2 + dwu, & \\ (-\Delta + e)w = (\lambda + e - bc/d)u, & \text{en} \quad \Omega, \\ (u, w) = (0, 0) & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.28}$$

Para $\lambda = \lambda_0$, la segunda ecuación de (1.28) se reduce a

$$(-\Delta + e)w = 0$$

de donde se desprende que $w = 0$. Luego, sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene

$$-\Delta u = \lambda u - du^2 \tag{1.29}$$

y, consecuentemente, u es la única solución de la ecuación logística (1.29) bajo condiciones de frontera tipo Dirichlet. Denominemos por θ_λ a esta solución. Entonces, para $\lambda = \lambda_0$, el par

$$(u, v) = (1, d/b)\theta_\lambda$$

proporciona el único estado de coexistencia de (1.1). El teorema establece que, también para λ suficientemente próximo a λ_0, (1.1) exhibe unicidad. Este resultado se obtendrá como consecuencia del teorema de la función implícita.

En efecto, consideremos el operador integral $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times E \to E$ introducido en (1.10), cuyos ceros son las soluciones de (1.1). Se cumple que

$$\mathfrak{F}\,(\lambda_0, \theta_{\lambda_0}, d\theta_{\lambda_0}/b) = 0$$

y, denotanto

$$\mathfrak{L}_0 := D_{(u,v)}\mathfrak{F}\,(\lambda_0, \theta_{\lambda_0}, d\theta_{\lambda_0}/b) \in \mathcal{L}(E, E),$$

se tiene que

$$\mathfrak{L}_0(u, v) = \begin{pmatrix} u - (-\Delta)^{-1}(\lambda_0 u - b\theta_{\lambda_0} v - d\theta_{\lambda_0} u) \\ v - (-\Delta)^{-1}(cu - d\theta_{\lambda_0} v - \frac{d^2}{b}\theta_{\lambda_0} u - ev) \end{pmatrix}$$

para todo $(u,v) \in E$. Como $\mathfrak{L}_0$ es una perturbación compacta de la identidad, es Fredholm de índice cero y, por lo tanto, $\mathfrak{L}_0 \in \mathrm{Iso}(E)$ si es inyectivo. Supongamos $\mathfrak{L}_0(u,v) = 0$ para algún $(u,v) \in E$. Entonces, por regularidad elíptica $u, v \in \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar{\Omega})$ y

$$\begin{cases} -\Delta u = (\lambda_0 - d\theta_{\lambda_0})u - b\theta_{\lambda_0} v, \\ -\Delta v = \left(c - \frac{d^2}{b}\theta_{\lambda_0}\right) u - (e + d\theta_{\lambda_0})\, v. \end{cases} \tag{1.30}$$

Veamos que $(u,v) = (0,0)$ es la única solución de (1.30). Mediante algunos cálculos directos, se comprueba que cualquier solución de (1.30) satisface

$$\begin{aligned} (-\Delta + e)\left(u - \frac{b}{d}v\right) &= (\lambda_0 - d\theta_{\lambda_0})u - b\theta_{\lambda_0}v + eu - bev/d \\ &\quad - \frac{b}{d}\left[\left(c - \frac{d^2}{b}\theta_{\lambda_0}\right) u - (e + d\theta_{\lambda_0})\, v\right] \\ &= \left(\lambda_0 - d\theta_{\lambda_0} + e - \frac{bc}{d} + d\theta_{\lambda_0}\right) u = 0 \end{aligned}$$

y, por ello,

$$u = \frac{b}{d}v.$$

Sustituyendo esta identidad en la primera ecuación de (1.30), se sigue que

$$(-\Delta + 2d\theta_{\lambda_0} - \lambda_0)u = 0. \tag{1.31}$$

Por otra parte, por la monotonía del autovalor principal respecto del potencial, se obtiene que

$$\sigma[-\Delta + 2d\theta_{\lambda_0} - \lambda_0] > \sigma[-\Delta + d\theta_{\lambda_0} - \lambda_0] = 0,$$

pues

$$(-\Delta + d\theta_{\lambda_0} - \lambda_0)\theta_{\lambda_0} = 0.$$

Luego, (1.31) implica $u = 0$ y, consecuentemente, $v = du/b = 0$, lo que implica que $\mathfrak{L}_0 \in \mathrm{Iso}(E)$.

Por el teorema de la función implícita, existe $\epsilon > 0$ y un curva real y analítica

$$(u,v) : (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) \to E$$

tal que

$$(u(\lambda_0), v(\lambda_0)) = (\theta_{\lambda_0}, d\theta_{\lambda_0}/b)\,,$$

$$\mathfrak{F}(\lambda, u(\lambda), v(\lambda)) = 0 \qquad \text{para todo} \quad \lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon),$$

y existe un entorno B de $(\lambda_0, u(\lambda_0), v(\lambda_0))$ en $\mathbb{R} \times E$ tal que

$$p \in \mathfrak{F}^{-1}(0) \cap B \implies p = (\lambda, u(\lambda), v(\lambda)) \;\text{ para algún }\; \lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon).$$

En particular, (1.1) admite un único estado de coexistencia en B para cada $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$.

Para completar la prueba del teorema, razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una sucesión (λ_n, u_n, v_n), $n \geq 1$, de estados de coexistencia de (1.1) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0 \quad \text{y} \quad (\lambda_n, u_n, v_n) \notin B \quad \forall\, n \geq 1. \tag{1.32}$$

Por (1.8), $\|v_n\|_\infty < c/d$ para todo $n \geq 1$. Veamos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u_n\|_\infty \leq C \qquad \forall \;\; n \geq 1. \tag{1.33}$$

Supongamos por el contrario, que existe alguna subsucesión, etiquetada de nuevo por n, que cumple

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_\infty = \infty.$$

Entonces, razonando como en la prueba del Teorema 1.1 iii), utilizando (1.14), y dividiendo por $\|u_n\|_\infty$ con $n \geq 1$, de las dos ecuaciones de (1.1) se deduce

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_n = \lambda_n \tilde{u}_n - b\tilde{u}_n v_n & \\ -\Delta \tilde{v}_n = c\tilde{u}_n - d\tilde{u}_n v_n - e\tilde{v}_n & \text{en} \quad \Omega, \\ (\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) = (0,0) & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.34}$$

Como $\|\tilde{u}_n\|_\infty = 1$, $\|v_n\|_\infty < c/d$ para todo $n \geq 1$, y $\lambda_n \to \lambda_0$, cuando $n \to \infty$, se desprende de la primera ecuación de (1.34) que existe $\tilde{u} \in \mathcal{C}^1_0(\bar{\Omega})$ y una subsucesión de (λ_n, u_n, v_n), etiquetada igual, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{\mathcal{C}^1_0(\bar{\Omega})} = 0. \tag{1.35}$$

Sea $p > 1$. Como $v_n < c/d$ para todo $n \geq 1$, se puede suponer que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \in L^p(\Omega) \qquad \text{débilmente en} \quad L^p(\Omega).$$

Elíjase $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$. Entonces, multiplicando la primera ecuación de (1.34) por ϕ e integrando por partes en Ω se obtiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \nabla\phi, \nabla\tilde{u}_n\rangle &= \lambda_n \int_\Omega \phi\tilde{u}_n - b\int_\Omega \phi\tilde{u}_n v_n \\ &= \lambda_n \int_\Omega \phi\tilde{u}_n - b\int_\Omega \phi\tilde{u} v_n - b\int_\Omega \phi(\tilde{u}_n - \tilde{u})v_n \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$ y, haciendo $n \to \infty$, se deduce

$$\int_\Omega \langle \nabla\phi, \nabla\tilde{u}\rangle = \lambda_0 \int_\Omega \phi\tilde{u} - b\int_\Omega \phi\tilde{u} v$$

para cualquier $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$. Luego, $\tilde{u}$ es una solución débil de

$$-\Delta\tilde{u} = \lambda_0\tilde{u} - b\tilde{u}v \tag{1.36}$$

tal que

$$\|\tilde{u}\|_\infty = 1, \qquad \tilde{u} > 0.$$

Por regularidad elíptica, $\tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega)$ debe resolver (1.36) en sentido clásico y, por tanto, v es independiente de $p > 1$. Luego, $\tilde{u} \in \bigcap_{p>1} W^{2,p}(\Omega)$ es una solución fuerte de (1.36) con $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$.

Análogamente, multiplicando la segunda ecuación de (1.34) por ϕ e integrando por partes en Ω, se llega a la identidad

$$-\int_\Omega \tilde{v}_n \Delta\phi = c\int_\Omega \phi\tilde{u}_n - d\int_\Omega \phi\tilde{u}_n v_n - e\int_\Omega \phi\tilde{v}_n$$

para todo $n \geq 1$ y, consecuentemente, pasando al límite $n \to \infty$, se obtiene

$$\int_\Omega (c - dv)\tilde{u}\phi = 0$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, $v = c/d$ en casi todo punto de Ω. Por ello, (1.36) implica que

$$\lambda_0 = \sigma[-\Delta + bv] = \sigma_1 + bc/d = \lambda_\infty,$$

lo que es imposible, pues

$$\lambda_0 = \frac{bc}{d} - e < \frac{bc}{d} + \sigma_1 = \lambda_\infty.$$

Esta contradicción concluye la prueba de (1.33).

Volviendo al sistema original, se cumple que

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n - b u_n v_n & \text{en} \quad \Omega, \\ -\Delta v_n = c u_n - d u_n v_n - e v_n & \\ (u_n, v_n) = (0,0) & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.37}$$

para todo $n \geq 1$. Gracias a (1.8), (1.32) y (1.33), el segundo miembro de ambas ecuaciones están acotados en L^∞ y, por ello, se puede extraer una subsucesión de (λ_n, u_n, v_n), etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})} = 0, \tag{1.38}$$

para ciertas $u, v \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$. Multiplicando por $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ las dos ecuaciones de (1.37), integrando por partes en Ω, y haciendo $n \to \infty$, se deduce de (1.38) que $u, v \in \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar{\Omega})$ y satisfacen

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_0 u - buv & \text{en} \quad \Omega, \\ -\Delta v = cu - duv - ev & \\ (u, v) = (0,0) & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.39}$$

Observemos que $u \geq 0$, $v \geq 0$. Como, debido a (1.32), $(\lambda_0, u, v) \notin \operatorname{int} B$, en particular

$$(u, v) \neq (\theta_{\lambda_0}, d\theta_{\lambda_0}/b)\,.$$

Luego, por ser $(\theta_{\lambda_0}, d\theta_{\lambda_0}/b)$ el único estado de coexistencia de (1.39), se deduce del Teorema 1.1 i) que $u = v = 0$. Consecuentemente, de acuerdo con (1.38),

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})} = 0.$$

Utilizando (1.14) y volviendo a la primera ecuación de (1.34), debe existir una subsucesión de $(\lambda_n, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n)$, $n \geq 1$, etiquetada igual, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})} = 0 \tag{1.40}$$

para algún $\tilde{u} \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ con

$$\|\tilde{u}\|_\infty = 1, \qquad \tilde{u} > 0.$$

Multiplicando la primera ecuación de (1.34) por una función test $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, integrando por partes en Ω, haciendo $n \to \infty$, y utilizando la regularidad elíptica se obtiene fácilmente que $\tilde{u} > 0$ debe ser solución clásica de

$$-\Delta \tilde{u} = \lambda_0 \tilde{u}.$$

Por tanto, $\lambda_0 = \sigma_1$, lo que es imposible, por hipótesis. Lo que concluye la demostración. □

1.4. Comportamiento de los estados de coexistencia para $e \uparrow \infty$. Unicidad para el problema límite asociado

En esta sección se analiza el comportamiento de (1.1) con $e \uparrow \infty$ en el caso particular en que todos los coeficientes de (1.1) son constantes. En tal caso, tras algunas manipulaciones simples, se observa con facilidad que el cambio de variable

$$u := \frac{e}{d} U, \qquad v := \frac{V}{b}, \qquad \epsilon := e^{-1}, \tag{1.41}$$

transforma (1.1) en

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda U - UV & \\ -\epsilon \Delta V = \frac{bc}{d} U - UV - V & \text{en } \Omega, \\ (U, V) = (0, 0) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.42}$$

lo que revela que los parámetros más significativos son ϵ, λ y bc/d, en lugar de b, c, d y e.

Como para $e \uparrow \infty$, se tiene que $\epsilon \downarrow 0$, el problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda U - UV & \\ 0 = \frac{bc}{d} U - UV - V & \text{en } \Omega, \\ (U, V) = (0, 0) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.43}$$

es el problema límite de (1.42) cuando $e \uparrow \infty$. Las soluciones (1.43) satisfacen

$$V = \frac{bc}{d}\frac{U}{U+1}, \tag{1.44}$$

donde U resuelve

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda U - \frac{bc}{d}\frac{U^2}{U+1} & \text{en } \Omega, \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.45}$$

El principal resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 1.5 *El problema* (1.45) *posee una solución si y solo si* $\lambda \in (\sigma_1, \lambda_\infty)$, *y es única si existe.*

Supongamos $\lambda \in (\sigma_1, \lambda_\infty)$ *y sea* $(\lambda, u(e), v(e))$, $e > 0$, *una familia arbitraria de estados de coexistencia de* (1.1). *Entonces,*

$$\lim_{e\uparrow\infty} \frac{u(e)}{e} = d^{-1}U_0, \qquad \lim_{e\uparrow\infty} v(e) = \frac{c}{d}\frac{U_0}{U_0+1}, \tag{1.46}$$

donde U_0 *es la única solución de* (1.45).

Demostración: En primer lugar, se probará que (1.45) admite una solución positiva si y sólo si $\lambda \in (\sigma_1, \lambda_\infty)$ y que es única si existe. Supongamos que (1.45) tiene una solución U. Entonces,

$$\left(-\Delta + \frac{bc}{d}\frac{U}{U+1}\right)U = \lambda U$$

y, por la unicidad del autovalor principal,

$$\lambda = \sigma[-\Delta + \frac{bc}{d}\frac{U}{U+1}]. \tag{1.47}$$

Luego, por la monotonía respecto del potencial, la condición

$$\sigma_1 < \lambda = \sigma[-\Delta + \frac{bc}{d}\frac{U}{U+1}] < \sigma_1 + bc/d = \lambda_\infty \tag{1.48}$$

es necesaria para la existencia de una solución positiva de (1.45). Para probar la suficiencia de (1.48), supongamos que $\sigma_1 < \lambda < \lambda_\infty$. Entonces, es fácil comprobar que $\overline{U} := M > 0$, donde M es una constante suficientemente grande, proporciona una supersolución de (1.45). Además, $\underline{U} := \delta\varphi$, donde $\varphi \gg 0$ es cualquier autofunción asociada a σ_1, proporciona una subsolución positiva de (1.45) para $\delta > 0$ suficientemente pequeño. También, aumentando M, si es necesario, se tiene que $\underline{U} \leq \overline{U}$. Consecuentemente, de acuerdo con el teorema principal de H. Amann [2], (1.45) admite una solución positiva U tal que $\underline{U} \leq U \leq \overline{U}$. Luego, (1.45) tiene una solución positiva si y sólo si $\sigma_1 < \lambda < \lambda_\infty$.

Para probar la unicidad, se supondrá que $U_1 \neq U_2$ son dos soluciones de (1.45). Entonces, substrayendo y reagrupando términos, se obtiene

$$\left(-\Delta + \frac{bc}{d}\frac{U_1 + U_2 + U_1U_2}{(U_1+1)(U_2+1)}\right)(U_1 - U_2) = \lambda(U_1 - U_2) \qquad \text{en } \Omega$$

con $(U_1 - U_2)|_{\partial\Omega} = 0$. Por tanto, por la dominancia del autovalor principal y (1.47), se deduce de la ecuación previa que

$$\lambda \geq \sigma[-\Delta + \frac{bc}{d}\frac{U_1 + U_2 + U_1U_2}{(U_1+1)(U_2+1)}] > \sigma[-\Delta + \frac{bc}{d}\frac{U_1}{U_1+1)}] = \lambda,$$

lo que es imposible. Esta contradicción completa la prueba de la unicidad. Denominaremos por U_0 a la única solución positiva de (1.45). Observemos que

$$(U, V) = (U_0, V_0)\,, \qquad V_0 := \frac{bc}{d}\frac{U_0}{U_0+1}, \tag{1.49}$$

es la única solución de (1.42) con $\epsilon = 0$.

Por el Corolario 1.2, para cada $\epsilon > 0$, (1.42) posee, al menos, un estado de coexistencia. Sea $(\epsilon, U(\epsilon), V(\epsilon))$, $\epsilon > 0$, una familia arbitraria de estados de coexistencia de (1.42). Para completar la prueba del Teorema, es suficiente demostrar que

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}(U(\epsilon), V(\epsilon)) = (U_0, V_0). \tag{1.50}$$

Sea ϵ_n, $n \geq 1$, una sucesión arbitraria tal que $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$ y fijemos

$$U_n := U(\epsilon_n), \qquad V_n := V(\epsilon_n), \qquad n \geq 1.$$

Como consecuencia de (1.8) y (1.41), se tiene

$$\|V_n\|_\infty \leq bc/d, \qquad n \geq 1. \tag{1.51}$$

Se afirma que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|U_n\|_\infty \leq C, \qquad n \geq 1. \tag{1.52}$$

Para demostrarlo, razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que a lo largo de alguna sucesión, etiquetada por n, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n\|_\infty = \infty. \tag{1.53}$$

Entonces, llamando

$$\tilde{U}_n := U_n/\|U_n\|_\infty, \qquad \tilde{V}_n := V_n/\|U_n\|_\infty, \qquad n \geq 1,$$

se llega a

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{U}_n = \lambda\tilde{U}_n - \tilde{U}_nV_n & \\ -\epsilon_n\Delta\tilde{V}_n = \frac{bc}{d}\tilde{U}_n - \tilde{U}_nV_n - \tilde{V}_n & \text{en } \Omega, \\ (\tilde{U}_n, \tilde{V}_n) = (0, 0) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.54}$$

Como $\|\tilde{U}_n\|_\infty = 1$ para todo $n \geq 1$, se obtiene de (1.51) y la primera ecuación de (1.54) que existe $\tilde{U} \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ y una subsucesión (ϵ_n, U_n, V_n), etiquetada igual, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{U}_n - \tilde{U}\|_{\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})} = 0. \tag{1.55}$$

Sea $p > 1$. Por (1.51), podemos suponer que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = V_\omega \in L^p(\Omega) \qquad \text{débilente en} \quad L^p(\Omega). \tag{1.56}$$

Elijamos $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Entonces, multiplicando la primera ecuación de (1.54) por ϕ e integrando por partes en Ω se prueba que

$$\int_\Omega \langle \nabla\phi, \nabla\tilde{U}_n \rangle = \lambda \int_\Omega \phi\tilde{U}_n - \int_\Omega \phi\tilde{U}_n V_n$$

para todo $n \geq 1$ y, haciendo $n \to \infty$, se deduce

$$\int_\Omega \langle \nabla\phi, \nabla\tilde{U} \rangle = \lambda \int_\Omega \phi\tilde{U} - \int_\Omega \phi\tilde{U} V_\omega$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Luego, $\tilde{U}$ es una solución débil de

$$-\Delta\tilde{U} = \lambda\tilde{U} - \tilde{U}V_\omega. \tag{1.57}$$

Observemos que

$$\|\tilde{U}\|_\infty = 1, \qquad \tilde{U} > 0.$$

Por regularidad elípica, $\tilde{U} \in W^{2,p}(\Omega)$ debe resolver (1.57) y, de aquí, V_ω es independiente de $p > 1$. Por tanto, $\tilde{U} \in \bigcap_{p>1} W^{2,p}(\Omega)$ es una solución de (1.57) con $\tilde{U}|_{\partial\Omega} = 0$.

Multiplicando ahora la segunda ecuación de (1.54) por ϕ e integrando por partes en Ω, se obtiene

$$-\epsilon_n \int_\Omega \tilde{V}_n \Delta\phi = \frac{bc}{d} \int_\Omega \phi\tilde{U}_n - \int_\Omega \phi\tilde{U}_n V_n - \int_\Omega \phi\tilde{V}_n$$

para todo $n \geq 1$ y, consecuentemente, haciendo $n \to \infty$, se desprende

$$\int_\Omega (bc/d - V_\omega)\tilde{U}\phi = 0$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Luego, $V_\omega = bc/d$ y (1.57) implica

$$\lambda = \sigma[-\Delta + V_\omega] = \sigma_1 + bc/d = \lambda_\infty,$$

lo que es imposible, ya que hemos supuesto $\sigma_1 < \lambda < \lambda_\infty$. Esta contradicción concluye la prueba de (1.52).

Por tanto, teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} -\Delta U_n = \lambda U_n - U_n V_n & \\ -\epsilon_n \Delta V_n = \frac{bc}{d} U_n - U_n V_n - V_n & \text{en} \quad \Omega, \\ (U_n, V_n) = (0,0) & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.58}$$

para todo $n \geq 1$. Como, debido a (1.51) y (1.52), el segundo miembro de la primera ecuación de (1.58) está acotado en L^∞, se puede extraer una sucesión de (ϵ_n, U_n, V_n), etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n - U_\omega\|_{\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})} = 0$$

para algún $U_\omega \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$. Además, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que se cumple (1.56). Argumentando como se hizo anteriormente, es fácil observar que V_ω es independiente de $p > 1$ y que $U_\omega \geq 0$ es una solución de

$$\begin{cases} -\Delta U_\omega = \lambda U_\omega - U_\omega V_\omega & \text{en } \Omega, \\ U_\omega = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.59}$$

Se afirma que $U_\omega > 0$. Razonando por reducción al absurdo, se supondrá $U_\omega = 0$. Entonces, multiplicando la segunda ecuación de (1.58) por $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e integrando por partes en Ω, se deduce que

$$-\epsilon_n \int_\Omega V_n \Delta\phi = \frac{bc}{d} \int_\Omega U_n \phi - \int_\Omega U_n V_n \phi - \int_\Omega V_n \phi$$

para todo $n \geq 1$, y, consecuentemente, haciendo $n \to \infty$, se tiene que $\int_\Omega \phi V_\omega = 0$ para cualquier función test ϕ. Luego, $V_\omega = 0$. Por otra parte, llamando

$$\tilde{U}_n := U_n / \|U_n\|_\infty, \qquad n \geq 1,$$

y dividiendo la primera ecuación de (1.58) por $\|U_n\|_\infty$ se obtiene

$$-\Delta \tilde{U}_n = \lambda \tilde{U}_n - \tilde{U}_n V_n, \qquad n \geq 1. \tag{1.60}$$

Como el segundo miembro de (1.60) está acotado en L^∞, se puede extraer una subsucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{U}_n - \tilde{U}\|_{\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})} = 0$$

para algún $\tilde{U} \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$. Necesariamente,

$$\|\tilde{U}\|_\infty = 1, \qquad \tilde{U} > 0.$$

Multiplicando ahora (1.60) por una función test ϕ e integrando por partes en Ω se tiene

$$\int_\Omega \langle \nabla \tilde{U}_n, \nabla \phi \rangle = \lambda \int_\Omega \tilde{U}_n \phi - \int_\Omega V_n \tilde{U}_n \phi, \qquad n \geq 1.$$

Luego, tomado límites, es fácil observar que $\tilde{U} > 0$ debe verificar

$$-\Delta\tilde{U} = \lambda\tilde{U}$$

en Ω y $\tilde{U}|_{\partial\Omega} = 0$, pues $V_\omega = 0$. Consecuentemente, $\lambda = \sigma_1$, lo que nos lleva a contradicción. Por consiguiente, $U_\omega > 0$.

Sea $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ arbitraria. Multiplicando las segunda ecuación de (1.58) por ϕ e integrando por partes en Ω, se deduce

$$-\epsilon_n \int_\Omega V_n \Delta\phi = \frac{bc}{d}\int_\Omega U_n\phi - \int_\Omega U_n V_n \phi - \int_\Omega V_n\phi \tag{1.61}$$

para todo $n \geq 1$. Luego, haciendo $n \to \infty$ en (1.61), se obtiene

$$\int_\Omega \left(\frac{bc}{d}U_\omega - U_\omega V_\omega - V_\omega\right)\phi = 0$$

para toda función test ϕ. Por tanto,

$$\frac{bc}{d}U_\omega - U_\omega V_\omega - V_\omega = 0$$

y, de ahí podemos deducir que

$$V_\omega = \frac{bc}{d}\frac{U_\omega}{U_\omega + 1}.$$

Finalmente, sustituyendo V_ω en (1.59) se concluye por unicidad que $U_\omega = U_0$. Naturalmente, esto implica $V_\omega = V_0$ y finaliza la prueba. □

El Teorema 1.5, nos conduce de forma natural a conjeturar que, para todo $\lambda \in (\sigma_1, \lambda_\infty)$, el Problema (1.1) tiene un único estado de coexistencia para e suficientemente grande. La siguiente discusión evidencia que resolver esta conjetura no parece una tarea fácil.

A continuación, consideraremos el operador

$$\mathfrak{G} : \mathbb{R} \times Z \to Z, \qquad Z := \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{\nu}(\bar{\Omega}),$$

definido por

$$\mathfrak{G}(\epsilon, U, V) := \begin{pmatrix} U - (-\Delta)^{-1}(\lambda U - UV) \\ \epsilon V - (-\Delta)^{-1}\left(\frac{bc}{d}U - UV - V\right) \end{pmatrix}$$

para todo $(\epsilon, U, V) \in \mathbb{R} \times Z$. Por regularidad elíptica, los ceros de $\mathfrak{G}$ proporcionan las soluciones de (1.42). $\mathfrak{G}$ es un polinomio y, por tanto, es real y analítico en (ϵ, U, V). Además,

$$\mathfrak{G}(0, U_0, V_0) = 0$$

y el operador linealizado

$$\mathfrak{M}_0 := D_{(U,V)}\mathfrak{G}(0, U_0, V_0) \in \mathcal{L}(Z)$$

viene dado por

$$\mathfrak{M}_0(U,V) = \begin{pmatrix} U-(-\Delta)^{-1}(\lambda U - U_0 V - V_0 U) \\ -(-\Delta)^{-1}\left(\frac{bc}{d}U - U_0 V - V_0 U - V\right) \end{pmatrix}$$

para todo $(U,V)\in Z$. Evidentemente, aunque el rango de $\mathfrak{G}$ es Z si $\epsilon \neq 0$, en el caso límite en que $\epsilon = 0$ el rango de $\mathfrak{G}$ es el espacio de Banach $F = \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar{\Omega})$, que es un subespacio propio de Z. De hecho, como

$$\mathfrak{M}_0 \in \mathrm{Iso}(Z;F), \tag{1.62}$$

el operador $\mathfrak{M}_0$ no puede ser un isomorfismo de Z. Por ello, no se puede aplicar el teorema de la función implícita para construir una curva solución parametrizada por $\epsilon > 0$ en un entorno de $(\epsilon,U,V) = (0,U_0,V_0)$. De hecho, las consecuencias del teorema de la función implícita no son ciertas en este contexto, como comprobaremos a continuación. Y esta es la razón por la que nuestra conjetura anterior permanece abierta.

Para comprobar (1.62), sea $(f,g)\in F$. Afirmamos que existe un único $(U,V)\in X$ tal que

$$\mathfrak{M}_0(U,V) = (f,g),$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} U-(-\Delta)^{-1}(\lambda U - U_0V - V_0U) = f, \\ -(-\Delta)^{-1}\left(\frac{bc}{d}U - U_0V - V_0U - V\right) = g, \end{cases}$$

que puede expresarse bajo la forma

$$\begin{cases} (-\Delta + V_0 - \lambda)\,U + U_0V = -\Delta f, \\ (U_0+1)V - \left(\frac{bc}{d} - V_0\right)U = -\Delta g. \end{cases} \tag{1.63}$$

De la segunda ecuación de (1.63), se infiere

$$V = \frac{bc/d - V_0}{U_0+1}U - \frac{\Delta g}{U_0+1}. \tag{1.64}$$

Luego, sustituyendo (1.64) en la primera ecuación de (1.17), nos conduce a resolver

$$\left(-\Delta + V_0 + (bc/d - V_0)\frac{U_0}{U_0+1} - \lambda\right)U = -\Delta f + \frac{U_0}{U_0+1}\Delta g. \tag{1.65}$$

Como U_0 es la única solución de (1.45), se obtiene

$$\lambda = \sigma[-\Delta + \frac{bc}{d}\frac{U_0}{U_0+1}].$$

Por tanto, fijando

$$\Sigma := \sigma[-\Delta + V_0 + (bc/d - V_0)\frac{U_0}{U_0+1} - \lambda],$$

Se observa que

$$\begin{aligned}\Sigma &> \sigma[-\Delta + V_0 \frac{U_0}{U_0+1} + (bc/d - V_0)\frac{U_0}{U_0+1} - \lambda] \\ &= \sigma[-\Delta + \frac{bc}{d}\frac{U_0}{U_0+1}] - \lambda = 0.\end{aligned}$$

De donde se desprende

$$U = \left(-\Delta + V_0 + (bc/d - V_0)\frac{U_0}{U_0+1} - \lambda\right)^{-1}\left(-\Delta f + \frac{U_0}{U_0+1}\Delta g\right)$$

nos proporciona la única solución de (1.65). Consecuentemente, por el teorema de la función abierta se concluye que $\mathfrak{M}_0 \in \mathrm{Iso}(Z; F)$.

Como F es un subespacio cerrado de Z, no se puede aplicar el teorema de la función implicíta a $\mathfrak{G}$ en $(0, U_0, V_0)$ para deducir la existencia de una curva regular $(\epsilon, U(\epsilon), V(\epsilon))$, $\epsilon \sim 0$, de estados de coexistencia de (1.42) perturbando desde $(0, U_0, V_0)$. De hecho, tal curva no existe. En efecto, supongamos que tal curva existe y que posee el siguiente desarrollo en $\epsilon = 0$

$$U(\epsilon) = U_0 + \epsilon U_1 + O(\epsilon^2), \qquad V(\epsilon) = V_0 + \epsilon V_1 + O(\epsilon^2), \qquad \epsilon \to 0.$$

Entonces, sustituyendo estos desarrollos en (1.42) e identificando términos con el mismo orden en ϵ, obtenemos que

$$V_1 = \frac{bc/d - V_0}{U_0+1}U_1 + \frac{\Delta V_0}{U_0+1}$$

con $U_1 \in \mathcal{C}_0^{2,\nu}(\bar\Omega)$ y, consecuentemente, $V_1 \neq 0$ en $\partial\Omega$, lo que es una contradicción. Por tanto, con este sencillo ejemplo, se observa que no se puede aplicar el teorema de la función implícita para obtener la unicidad de estados de coexistencia de (1.42) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Este hecho contrasta con los resultados obtenidos por L. Li y A. G. Ramm [26], que deberían revisarse y actualizarse.

1.5. Estructura global de $\mathfrak{C}_+$ en el modelo unidimensional

El principal resultado de esta sección queda recogido en el siguiente teorema.

Teorema 1.6 *Supongamos que* $N = 1$, $L > 0$, $\Omega = (0, L)$, $c/d \in \mathcal{C}^2[0, L]$, *y*

$$-\left(\frac{c}{d}\right)''(x) + e(x)\frac{c}{d}(x) > 0 \qquad \text{para todo } x \in (0, L). \tag{1.66}$$

Entonces, la componente de estados de coexistencia $\mathfrak{C}_+$ *construida en el Teorema 1.1 es una curva analítica real, parametrizada por* λ*, que conecta* $(\lambda, u, v) = (\sigma_1, 0, 0)$ *con* $(\lambda, u, v) = (\lambda_\infty, \infty, c/d)$*.*

Además, $v(x) < c(x)/d(x)$ *para todo* $x \in [0, L]$ *si* $(\lambda, u, v) \in \mathfrak{C}_+$*, mientras que si* $v - c/d$ *cambia de signo,* (λ, u, v) *es un estado de coexistencia tal que* $(\lambda, u, v) \notin \mathfrak{C}_+$*.*

La condición (1.66) se verifica para $e(x)$ suficientemente grande. Como consecuencia del Teorema 1.6, el Problema (1.1) admite un único estado de coexistencia si y sólo si, $v(x) < c(x)/d(x)$ para todo $x \in [0, L]$ y cualquier estado de coexistencia (λ, u, v) de (1.1). Desafortunadamente, excepto en el caso en que c/d es constante, se desconoce si esa estimación se cumple o no. En el caso de coeficientes constantes siempre se cumple que $v < c/d$ y se verifica (1.66). Consecuentemente, en tal caso, el estado de coexistencia es único si existe. Desde esta perspectiva, el Teorema 1.6 es una mejora substancial de [30, Th. 5.1].

El resto de esta sección se dedica a la prueba del Teorema 1.6. Consta de dos resultados de invertibilidad, de gran interés intrínseco, que se estudiarán en las dos primeras subsecciones. Finalmente, la tercera sección concluye la prueba de Teorema.

1.5.1. Un resultado de invertibilidad

Teorema 1.7 *Supongamos que* $N = 1$*,* $L > 0$*,* $\Omega = (0, L)$*, y* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}[0, L]$ *cumplen*

$$\alpha(x) > 0 \quad y \quad \beta(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in (0, L). \tag{1.67}$$

Sea (u_0, v_0) *un estado de coexistencia de* (1.1)*. Entonces,* $(u, v) = (0, 0)$ *es la única solución de*

$$\begin{cases} -u'' + (bv_0 - \lambda)u = -\alpha v & \text{en } (0, L), \\ -v'' + (du_0 + e)v = \beta u & \\ u(0) = u(L) = v(0) = v(L) = 0. \end{cases} \tag{1.68}$$

Demostración: Se razonará por reducción al absurdo. Supongamos que (1.68) admite una solución $(u, v) \neq (0, 0)$. Entonces, necesariamente, $u \neq 0$ y $v \neq 0$, por (1.67). Además, multiplicando la primera ecuación de (1.68) por u_0 e integrando en $(0, L)$, se obtiene

$$-\int_0^L \alpha v u_0 = \int_0^L u_0 \left(-\frac{d^2}{dx^2} + bv_0 - \lambda \right) u = \int_0^L u \left(-\frac{d^2}{dx^2} + bv_0 - \lambda \right) u_0 = 0$$

y, consecuentemente, v debe cambiar de signo en $(0, L)$. Análogamente, u cambia de signo en $(0, L)$. En realidad, si $u > 0$ (resp. $u < 0$) en $(0, L)$, entonces

$$-v'' + (du_0 + e)v = \beta u > 0 \ \text{(resp. } < 0) \qquad \text{en } (0, L),$$

y, de aquí se desprende, por el principio del máximo fuerte, $v \gg 0$ (resp. $v \ll 0$) en $(0, L)$, lo que es imposible.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u > 0$ en $(0, x)$ para algún $x > 0$, porque (1.68) es lineal. Se afirma que existe $p \in \mathbb{N}$ y p puntos

$$x_j \in (0, L), \qquad 1 \leq j \leq p, \qquad x_j < x_{j+1},$$

tales que, para todo $1 \leq j \leq p+1$,

$$(-1)^{j-1} u > 0 \qquad \text{en } (x_{j-1}, x_j), \tag{1.69}$$

donde hemos llamado

$$x_0 := 0, \qquad x_{p+1} := L.$$

Para demostrarlo, razonaremos por reducción al absurdo, suponiendo que alguna familia infinita de subintervalos disjuntos de $[0, L]$, donde u cambia de signo alternativamente, se acumula hacia algún punto $y_0 \in [0, L]$. Entonces,

$$u(y_0) = u'(y_0) = 0 \tag{1.70}$$

y, como las soluciones de (1.68) están en correspondencia uno a uno con las soluciones del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u \\ \hat{u} \\ v \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ bv_0 - \lambda & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta & 0 & du_0 + e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \hat{u} \\ v \\ \hat{v} \end{pmatrix} \\ (u(y_0), \hat{u}(y_0), v(y_0), \hat{v}(y_0)) = (u_0, \hat{u}_0, v_0, \hat{v}_0), \end{cases} \tag{1.71}$$

por la unicidad de la solución de (1.71), (1.70) implica

$$(v(y_0), v'(y_0)) \neq (0, 0).$$

Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $v(x)$ tiene signo constante en $(y_0 - \epsilon, y_0) \cap [0, L]$ y en $(y_0, y_0 + \epsilon) \cap [0, L]$. Sea z_n, $n \geq 1$, una sucesión creciente con $\lim_{n \to \infty} z_n = y_0$ y, para cada $n \geq 1$, $u(z_n) = 0$ y $(-1)^{n-1} u > 0$ en (z_n, z_{n+1}). Eligiendo un n suficientemente grande para que $z_n > y_0 - \epsilon$ y considerando el intervalo $\mathcal{I}_n := (z_n, y_0)$, como v tiene signo constante en $\mathcal{I}_n$ y $u(z_n) = u(y_0) = 0$, se deduce a partir de

$$-u'' + (bv_0 - \lambda) u = -\beta v \qquad \text{in } \mathcal{I}_n$$

que, o bien $u \geq 0$ o $u \leq 0$ in $\mathcal{I}_n$, lo que es imposible. En efecto, se trata de una consecuencia directa del principio del máximo fuerte pues

$$0 = \sigma\left[-d/dx^2 + bv_0 - \lambda, (0, L)\right] < \sigma\left[-d/dx^2 + bv_0 - \lambda, \mathcal{I}_n\right]. \tag{1.72}$$

Observemos que la igualdad en (1.72) viene de

$$(-d/dx^2 + bv_0 - \lambda) u_0 = 0.$$

Análogamente, se puede afirmar que no existe una sucesión z_n, $n \geq 1$, tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = y_0$, y, para cada $n \geq 1$, $u(z_n) = 0$ y $(-1)^{n-1}u > 0$ en (z_{n+1}, z_n). Por tanto, los puntos donde u cambia de signo no pueden acumularse en $[0, L]$. Consecuentemente, existe $p \in \mathbb{N}$ y p puntos $x_j \in (0, L)$, $1 \leq j \leq p$, $x_j < x_{j+1}$, que cumplen (1.69) para todo $1 \leq j \leq p + 1$.

Para completar la prueba del teorema, es suficiente comprobar que

$$(-1)^{j-1}v(x_j) < 0 \qquad \text{para todo} \quad 1 \leq j \leq p + 1, \tag{1.73}$$

ya que esto implicaría $v(x_{p+1}) = v(L) \neq 0$, lo que contradice $v(L) = 0$ y concluye la prueba del teorema.

Supongamos $v(x_1) \geq 0$. Entonces, aplicando el principio del máximo a la segunda ecuación de (1.68) se comprueba fácilmente que en ese caso $v \geq 0$ en $(0, x_1)$. Luego, $-\alpha v \leq 0$ en $(0, x_1)$, y aplicando el principio del máximo a la primera ecuación se llega a que $u \leq 0$ en $(0, x_1)$, lo que es imposible, por (1.69). Por tanto,

$$v(x_1) < 0.$$

Debería observarse que

$$0 = \sigma\left[-d/dx^2 + bv_0 - \lambda, (0, L)\right] < \sigma\left[-d/dx^2 + bv_0 - \lambda, (0, x_1)\right],$$

porque $(0, x_1)$ es un subintervalo propio $(0, L)$.

Supongamos que $v(x_2) \leq 0$. Entonces, ya que $v(x_1) < 0$ y $u < 0$ en (x_1, x_2), se tiene $\beta u < 0$ en (x_1, x_2). Luego, por el principio del máximo, $v < 0$ en (x_1, x_2). Por ello, a partir de la primera ecuación, se desprende que $u \geq 0$ en (x_1, x_2), llegando a una contradicción. Consecuentemente, $v(x_2) > 0$. Un elemental argumento inductivo muestra (1.73). Esto finaliza la prueba. □

1.5.2. Un resultado auxiliar

Proposición 1.8 *Sea (λ_0, u_0, v_0) un estado de coexistencia de $\mathfrak{C}_+$ tal que*

$$v_0(x) < c(x)/d(x) \qquad \textit{para todo} \quad x \in [0, L]. \tag{1.74}$$

Entonces, en un entorno de (λ_0, u_0, v_0), $\mathfrak{C}_+$ consiste en un arco de curva analítica parametrizado por λ.

Demostración: Deberíamos recordar que los estados de coexistencia de (1.1) son los ceros del operador no lineal $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times E \to E$ definido en (1.10). Como $(\lambda_0, u_0, v_0) \in \mathfrak{C}_+$, se tiene que

$$\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0, v_0) = 0.$$

Además, $\mathfrak{F}$ es real analítica y la linealización

$$\mathfrak{L}_0 := D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0, v_0) \in \mathcal{L}(E),$$

viene dada a través de

$$\mathfrak{L}_0(u,v) = \begin{pmatrix} u - (-\Delta)^{-1}(\lambda_0 u - bu_0 v - bv_0 u) \\ v - (-\Delta)^{-1}(cu - du_0 v - dv_0 u - ev) \end{pmatrix}$$

para todo $(u,v) \in E$. Por ser una perturbación compacta de la identidad, es Fredholm de índice cero. Luego, para probar que es un isomorfismo, es suficiente comprobar que es inyectivo. En efecto, supongamos que

$$\mathfrak{L}_0(u,v) = 0$$

para algún $(u,v) \in E$. Entonces, por regularidad elíptica, $(u,v) \in F$ y resuelve

$$\begin{cases} -u'' + (bv_0 - \lambda_0)u = -bu_0 v & \\ -v'' + (du_0 + e)v = (c - dv_0)u & \text{en } (0,L), \\ u(0) = u(L) = v(0) = v(L) = 0. \end{cases}$$

Por (1.2) y el Teorema 1.1 i), se obtiene $b(x)u_0(x) > 0$ para todo $x \in (0,L)$. Además, gracias a (1.74), se conoce que $c(x) - d(x)v_0(x) > 0$ para todo $x \in [0,L]$. Por tanto, el Theorem 1.7 nos conduce a que $(u,v) = (0,0)$ y, consecuentemente $\mathfrak{L}_0 \in \mathrm{Iso}(E)$. Finalmente, una aplicación estándar del teorema de la función implícita concluye la prueba. □

1.5.3. Demostración del Teorema 1.6

La prueba esta basada en el hecho de que bajo la condición (1.66), cualquier estado de coexistencia $(\lambda, u, v) \in \mathfrak{C}_+$ satisface

$$v(x) < c(x)/d(x) \qquad \text{para todo} \quad x \in [0,L]. \tag{1.75}$$

Observemos que (1.75) se mantiene en un entorno de 0 y L, por (1.2), ya que $v(0) = v(L) = 0$. Es obvio que (1.75) se cumple cuando λ es suficientemente próximo a σ_1, pues en ese caso, de acuerdo con el Teorema 1.3, la solución de $\mathfrak{C}_+$ proporciona la única solución de (1.1) y $\mathfrak{C}_+$ bifurca desde $(\lambda, u, v) = (\sigma_1, 0, 0)$. Consecuentemente, $v \sim 0$ y, por tanto, se verifica (1.75).

De acuerdo con la Proposición 1.8, siempre que (1.75) se cumpla, $\mathfrak{C}_+$ debe ser un arco de curva analítica parametrizado por λ. O bien (1.75) se verifica para todos los valores de λ en el intervalo $(\sigma_1, \lambda_\infty)$, o existe un primer valor de λ, denominado λ_1, donde la condición (1.75) falla a lo largo de la curva analítica construida. Se denominará por $(\lambda, u_\lambda, v_\lambda)$, $\sigma_1 < \lambda \leq \lambda_1$, a la parametrización de $\mathfrak{C}_+$. Entonces,

$$v_\lambda(x) < c(x)/d(x) \qquad \text{para todo} \quad x \in [0,L] \quad \text{y} \quad \lambda \in (\sigma_1, \lambda_1),$$

mientras que existe $x_1 \in (0,L)$ tal que

$$v_{\lambda_1}(x_1) = c(x_1)/d(x_1) \quad \text{y} \quad v_{\lambda_1} \leq c/d.$$

A partir de la segunda ecuación de (1.1), se obtiene

$$(-\Delta + e(x_1))v_{\lambda_1}(x_1) = (c(x_1) - d(x_1)v_{\lambda_1}(x_1))\, u_{\lambda_1}(x_1) = 0.$$

Además, por (1.66),

$$(-\Delta + e(x_1))\left(\frac{c}{d}(x_1) - v_{\lambda_1}(x_1)\right) > 0.$$

Luego, por continuidad, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$(-\Delta + e(x))\left(\frac{c}{d}(x) - v_{\lambda_1}(x)\right) > 0 \qquad \text{if} \quad |x - x_1| \le \epsilon$$

y, consecuentemente, por el principio del máximo fuerte, se concluye

$$\frac{c}{d} - v_{\lambda_1} \gg 0$$

en un entorno de x_1, lo que es imposible. Esta contradicción finaliza la prueba de la primera parte del teorema.

Sabemos que (1.75) se verifica si $(\lambda, u, v) \in \mathfrak{C}_+$. Además, adaptando el argumento utilizado en la prueba, $v - c/d$ cambia de signo si (1.75) deja de cumplirse. Para completar la prueba del teorema, todavía es necesario demostrar que $v - c/d$ cambia de signo si (λ, u, v) es un estado de coexistencia de (1.1) tal que $(\lambda, u, v) \notin \mathfrak{C}_+$. Razonando de nuevo por reducción al absurdo, supongamos que existe $(\lambda_0, u_0, v_0) \notin \mathfrak{C}_+$ tal que

$$v_0(x) < c(x)/d(x) \qquad \text{para todo} \quad x \in [0, L].$$

Entonces, combinando el argumento local de la Proposición 1.8 junto con un argumento de continuidad global en el parámetro λ, se puede construir un arco de curva analítica maximal de estados de coexistencia de (1.1) pasando por (λ_0, u_0, v_0), denominado por $(\lambda, u(\lambda), v(\lambda))$, donde

$$(u(\lambda_0), v(\lambda_0)) = (u_0, v_0).$$

Este arco maximal nos proporciona otra componente de estados de coexistencia, $\tilde{\mathfrak{C}}_+ \neq \mathfrak{C}_+$. De acuerdo con el Teorema 1.1, $\tilde{\mathfrak{C}}_+$ estalla en $\lambda = \lambda_\infty$ y está definido para todo $\lambda \in [\sigma_1, \lambda_\infty)$. Como no puede bifurcarse desde $(\sigma_1, 0, 0)$, ya que en tal caso se llegaría a una contradicción con la unicidad dada por el Teorema de M. G. Crandall y P. H. Rabinowitz [10], necesariamente $(\sigma_1, u(\sigma_1), v(\sigma_1))$ debe ser un estado de coexistencia, lo que es imposible, pues sabemos que $\lambda > \sigma_1$ es condición necesaria para la existencia de estados de coexistencia. Esto finaliza la prueba del Teorema 1.6.

Capítulo 2

Problema parabólico

2.1. Introducción

El objetivo de este segundo capítulo es el estudio de la dinámica del problema parabólico

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u - b(x)uv & \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = c(x)u - d(x)uv - e(x)v & x \in \Omega,\ t > 0, \\ (u, v) = (0, 0) & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0 > 0,\ v(x, 0) = v_0 \geq 0 & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, con frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^{2,\nu}$ para algún $\nu \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, es considerado como un parámetro de bifurcación y las funciones b, c, d, $e \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ satisfacen

$$b(x) > 0, \quad c(x) > 0, \quad d(x) > 0, \quad e(x) > 0, \qquad \text{para todo} \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{2.2}$$

En muchos casos, la dinámica de (2.1) está regulada por sus estados estacionarios no negativos, que son las soluciones no negativas del problema elíptico.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - b(x)uv & \\ -\Delta v = c(x)u - d(x)uv - e(x)v & \text{en} \quad \Omega, \\ (u, v) = (0, 0) & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

El problema (2.3) admite dos tipos de soluciones no negativas: $(0,0)$, denominado *estado trivial*, y aquellas de la forma (u,v), con $u \gg 0$ y $v \gg 0$, frecuentemente conocidas como *estados de coexistencia* y que ya han sido estudiados en el Capítulo 1.

El problema general espacialmente heterogéneo (2.1) es una contrapartida del estudiado por W. Zhou [48], R. Peng, D. Wei y G. Yang [43], J. Zhou y J. Shi [47] y J. López-Gómez [30], donde b, c, d y e eran constantes positivas. El modelo estudiado en este capítulo es un refinamiento del propuesto por W. E. Kastenberg y P. L. Chambré [23] en Ingeniería Nuclear, donde u mide la densidad de los neutrones rápidos y v es la temperatura del reactor. Algunos estudios pioneros acerca de la dinámica de estos modelos fueron realizados por P. Mottoni y A. Tesei [41], F. Rothe [45] y, recientemente, por G. Arioli [4].

En el Capítulo 1 hemos demostrado que, en el caso general en que b, c, d y e son funciones positivas y continuas, el problema (2.3) posee una componente de soluciones positivas, $\mathfrak{C}_+$, tal que $(\sigma_1, 0, 0)$, $(\lambda_\infty, \infty, c/d) \in \bar{\mathfrak{C}}_+$, donde

$$\lambda_\infty := \sigma[-\Delta + bc/d], \tag{2.4}$$

y que existe $\epsilon > 0$ tal que (2.3) tiene un único estado de coexistencia si $\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1 + \epsilon]$.

En muchos rangos de valores de los parámetros que aparecen en la formulación del problema (2.1), el sistema asociado es no cooperativo, y obtener unicidad puede ser una tarea muy difícil (ver, por ejemplo, J. López-Gómez y R. Pardo [35, 36], A. Casal et al. [8], E. N. Dancer, J. López-Gómez y R. Ortega [14], J. López-Gómez [29]).

Los únicos resultados conocidos sobre la dinámica de (2.1) son los de G. Arioli [4], donde se estudia el problema en el caso especial en que b, c, d, y e son constantes positivas. Arioli demostró que $(0,0)$ es un atractor global de (2.1) en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ si $\lambda \leq \sigma_1$, mientras que (2.1) posee un atractor compacto si $\sigma_1 < \lambda < \sigma_1 + bc/d$, y la solución de (2.1) crece a infinito en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ si $\lambda \geq \sigma_1 + bc/d$ cuando $t \uparrow \infty$.

El objetivo fundamental de este capítulo es el análisis del comportamiento dinámico fino de (2.1) en el caso general en que b, c, d y e son funciones positivas. Los principales resultados obtenidos se pueden resumir de la siguiente forma:

(a) Si $\lambda < \sigma_1$, entonces $(0,0)$ es linealmente asintóticamente estable y, de hecho, es un atractor global de (2.1) en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

(b) Si $\lambda = \sigma_1$, entonces $(0,0)$ es linealmente neutralmente estable, pero sigue siendo un atractor global de (2.1) en $L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$. Si, además, c y e son constantes positivas, entonces $(0,0)$ es un atractor global en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

(c) $(0,0)$ es linealmente inestable si $\lambda > \sigma_1$. Además, existe $\epsilon > 0$ tal que el único estado estacionario de (2.1) para cada $\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1 + \epsilon]$, es linealmente asintóticamente estable.

(d) Si $b(x)/d(x)$ es constante y $\lambda+e-bc/d>0$ en Ω, entonces (2.3) admite, a lo sumo, un único estado de coexistencia. Además, es un atractor global de (2.1) siempre que exista.

(e) Si b/d es constante y $\sigma_1+e-bc/d>0$ en Ω, entonces (2.3) admite un estado de coexistencia si y sólo si $\sigma_1<\lambda<\lambda_\infty$.

(f) Si b/d y c son constantes positivas, entonces (2.3) posee un estado de coexistencia si y sólo si $\sigma_1<\lambda<\lambda_\infty$. Además, existen $\epsilon>0$ y $\eta>0$ tales que (2.3) admite un único estado de coexistencia para cada

$$\lambda\in(\sigma_1,\sigma_1+\epsilon]\cup[\lambda_\infty-\eta,\lambda_\infty).$$

Más aun, el estado de coexistencia es un atractor global si $\lambda\in[\lambda_\infty-\eta,\lambda_\infty)$.

(g) Supongamos que b/d y c son constantes y $\lambda\geq\lambda_\infty$. Entonces,

$$\lim_{t\to\infty}u=\infty$$

en $L^2(\Omega)$, mientras que v permanece acotado en $L^\infty(\Omega)$.

Como, en general, cuando

$$\lambda+e(x)-b(x)c(x)/d(x)$$

cambia de signo en Ω, no se puede excluir la existencia de soluciones periódicas no triviales de (2.1), estos resultados son bastantes satisfactorios cuando $b(x)$ y $d(x)$ son múltiplos. La atractividad global del único estado de coexistencia cuando $\lambda+e-bc/d>0$ es un resultado absolutamente novedoso, incluso en el caso particular de coeficientes constantes.

La distribución del capítulo es la siguiente. La Sección 2 establece la unicidad y existencia global de las soluciones de (2.1). La Sección 3 demuestra la extinción de (u,v) cuando $\lambda\leq\sigma_1$. Estas dos secciones extienden y completan substancialmente los resultados obtenidos por G. Arioli [4] para coeficientes constantes. En general, probar que $(0,0)$ es un atractor global de (2.1) en $L^2(\Omega)\times L^1(\Omega)$ si $\lambda=\sigma_1$ es complicado y el argumento que vamos a proporcionar es original. La Sección 4 analiza la estabilidad linealizada de $(0,0)$ recurriendo al principio de intercambio de estabilidad de M. G. Crandall y P. H. Rabinowitz [11] con objeto de demostrar el resultado del apartado (c).

La Sección 5 demuestra la unicidad del estado de coexistencia de (2.3) cuando b/d es constante y $\lambda+e-bc/d>0$ en Ω. Este resultado generaliza el Teorema 1.2 de J. Zhou y J. Shi [47]. Nuestra demostración es mucho más directa que la utilizada en [47] para coeficientes constantes, pues, en lugar de utilizar el argumento de continuación global de [47], nuestro resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 2.1 de J. López-Gómez y M. Molina-Meyer [32]. La Sección 6 completa la demostración de los apartados (d)-(f).

La prueba del carácter atractivo global del único estado de coexistencia de (2.3) bajo la condición $\lambda + e - bc/d > 0$ en Ω es una consecuencia directa de la teoría abstracta desarrollada por M. Molina-Meyer en [38, 39, 40] para sistemas cooperativos irreducibles. La Sección 7 demuestra el apartado (g).

El resultado del apartado (e) establece que (2.3) admite un único estado de coexistencia cuando e es suficientemente grande, en el caso especial en que b/d es constante. Por tanto, resuelve parcialmente la conjetura del Capítulo 1, que permanece abierta en el caso general en que b y d son arbitrarias.

A lo largo de este capítulo, para cualquier $a \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, se denotará

$$a_L := \min_{\bar{\Omega}} a, \qquad a_M := \max_{\bar{\Omega}} a.$$

Observemos que $a_M = \|a\|_\infty = \|a\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})}$ si $a > 0$.

2.2. Existencia global

El principal resultado de esta sección establece la existencia global de una única solución de (2.1) para todo $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ con $u_0 > 0$ y $v_0 \geq 0$.

Teorema 2.1 *Para todo $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ existe $\delta > 0$ tal que* (2.1) *tiene una única solución (local) en $[0, \delta]$. Además, para cualquier $T > 0$ si el problema admite una solución en $[0, T]$, la solución debe ser única en $[0, T]$. Aun más, si $u_0 > 0$, $v_0 \geq 0$, y $(u(x,t), v(x,t))$ es la solución de* (2.1) *en $[0, T]$, entonces*

$$u(\cdot, t) \gg 0, \qquad 0 \ll v(\cdot, t) \leq M = \max\left\{\|v_0\|_\infty, \|c/d\|_\infty\right\}, \tag{2.5}$$

para todo $t \in [0, T]$. Por tanto, la solución de (2.1) *esta globalmente definida en $t > 0$.*

A lo largo de todo el capítulo, la única solución global de (2.1) se denotará por

$$(u, v) := (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = (u(x,t), v(x,t)) = (u(x,t;u_0,v_0), v(x,t;u_0,v_0)).$$

Demostración: La existencia y unicidad de una única solución clásica se deduce de resultados bien conocidos de la teoría de ecuaciones parabólicas y sistemas (ver, por ejemplo, Daners y Koch [15], Henry [20] y Lunardi [37]).

Dado $T > 0$ es conocido que, si (2.1) tiene una solución en $[0, T]$, esta debe ser necesariamente única, pues la cinética del sistema es localmente Lipschitz en $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$. Dicha solución se denotará por (u, v). Probaremos en primer lugar que $u \geq 0$. Sea $u^- := \min\{0, u\}$. Multiplicando la primera ecuación de (2.1) por u^- se obtiene

$$\int_\Omega u^- \frac{\partial u}{\partial t} - \int_\Omega u^- \Delta u = \lambda \int_\Omega u^- u - \int_\Omega b u^- u v. \tag{2.6}$$

Además,

$$\int_\Omega u^-\frac{\partial u}{\partial t}=\int_{[u^-=0]}u^-\frac{\partial u}{\partial t}+\int_{[u^-<0]}u^-\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$=\int_{[u^-<0]}u^-\frac{\partial u}{\partial t}=\int_{[u<0]}u^-\frac{\partial u^-}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(u^-\right)^2.$$

Por ser $u^-=0$ sobre $\partial\Omega$ para todo $t\in[0,T]$ conocemos también,

$$-\int_\Omega u^-\Delta u=\int_\Omega\langle\nabla u^-,\nabla u\rangle=\int_{[u^-=0]}\langle\nabla u^-,\nabla u\rangle+\int_{[u^-<0]}\langle\nabla u^-,\nabla u\rangle$$
$$=\int_{[u^-<0]}\langle\nabla u^-,\nabla u\rangle=\int_\Omega|\nabla u^-|^2.$$

Luego, al sustituir estas identidades en (2.6), obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(u^-\right)^2\leq\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(u^-\right)^2+\int_\Omega|\nabla u^-|^2=\lambda\int_\Omega u^-u-\int_\Omega bu^-uv$$
$$=\int_\Omega(\lambda-bv)\left(u^-\right)^2\leq K\int_\Omega\left(u^-\right)^2,$$

siendo

$$K:=\lambda+\|b\|_\infty\|v\|_{\infty,\bar\Omega\times[0,T]}.$$

Consecuentemente, definiendo

$$x(t):=\int_\Omega\left(u^-\right)^2,$$

teniendo en cuenta que $u_0>0$ y que por tanto $u_0^-=0$, se desprende que

$$x(0)=\int_\Omega\left(u_0^-\right)^2=0,\qquad x'(t)\leq 2Kx(t)\quad\forall\ t\in[0,T].\tag{2.7}$$

Como el cambio de variable $x(t)=e^{2Kt}y(t)$ transforma (2.7) en

$$y(0)=0,\qquad y'(t)\leq 0,\qquad y(t)\geq 0,$$

se tiene que $y=0$, y, por tanto, $x=0$. En consecuencia, $u^-=0$ y de ahi, $u\geq 0$. Por ser $u_0>0$, el principio del máximo parabólico de Nirenberg [42], nos asegura que $u(\cdot,t)\gg 0$ para todo $0<t\leq T$. Así concluye la primera afirmación de (2.5).

Probaremos ahora que $v(x,t)\geq 0$. De (2.2), se deduce

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v=c(x)u-d(x)uv-e(x)v>(-d(x)u(x,t)-e(x))v,$$

pues $u\gg 0$. Gracias al principio del máximo parabólico,

$$v(x,t)\gg z(x,t),$$

siendo z la única solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = (-du - e)z & x \in \Omega,\ t > 0, \\ z = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ z(x,0) = v_0 & x \in \Omega. \end{cases}$$

Como $z \geq 0$, es $v \gg 0$ en Ω para todo $t \in (0,T]$.

A continuación, se probará la estimación superior de v en (2.5). Sea

$$\tilde{v} := \text{máx}\{0, v - M\}.$$

Entonces, multiplicando la segunda ecuación de (2.1) por $\tilde{v}$ se obtiene

$$\int_\Omega \tilde{v}\frac{\partial v}{\partial t} - \int_\Omega \tilde{v}\Delta v = \int_\Omega (c - dv)u\tilde{v} - \int_\Omega e\tilde{v}v. \tag{2.8}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \tilde{v}\frac{\partial v}{\partial t} &= \int_\Omega \tilde{v}\frac{\partial(v-M)}{\partial t} = \int_{[v>M]} \tilde{v}\frac{\partial(v-M)}{\partial t} + \int_{[v\leq M]} \tilde{v}\frac{\partial(v-M)}{\partial t} \\ &= \int_{[v>M]} \tilde{v}\frac{\partial(v-M)}{\partial t} = \int_{[v>M]} \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \int_\Omega \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \tilde{v}^2, \end{aligned}$$

y que, además,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \tilde{v}\Delta v &= \int_\Omega \langle \nabla\tilde{v}, \nabla v\rangle = \int_{[v\leq M]} \langle \nabla\tilde{v}, \nabla v\rangle + \int_{[v>M]} \langle \nabla\tilde{v}, \nabla v\rangle \\ &= \int_{[v>M]} \langle \nabla\tilde{v}, \nabla v\rangle = \int_{[v>M]} \langle \nabla\tilde{v}, \nabla(v-M)\rangle \\ &= \int_{[v>M]} |\nabla\tilde{v}|^2 = \int_\Omega |\nabla\tilde{v}|^2, \end{aligned}$$

por ser $\tilde{v} = 0$ cuando $v \leq M$. Análogamente,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (c-dv)u\tilde{v} &= \int_{[v\leq M]} (c-dv)u\tilde{v} + \int_{[v>M]} (c-dv)u\tilde{v} \\ &= \int_{[v>M]} (c-dv)u\tilde{v} = \int_{[v>M]} (c-dv)u(v-M) \leq 0 \end{aligned}$$

ya que $c - dv < 0$, pues $v > M \geq \|c/d\|_\infty$.

Consecuentemente, sustituyendo todas estas estimaciones en (2.8) se deduce

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \tilde{v}^2 \leq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \tilde{v}^2 + \int_\Omega |\nabla\tilde{v}|^2 = \int_\Omega (c-dv)u\tilde{v} - \int_\Omega ev\tilde{v} \leq 0$$

y por tanto, para todo $t \in (0,T]$, se obtiene

$$0 \leq \int_\Omega \tilde{v}^2(x,t)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \tilde{v}^2(x,0)\,\mathrm{d}x.$$

Por otra parte, gracias a (2.5), sabemos que

$$\tilde{v}(x,0) = \text{máx}\{0, v_0 - M\} = 0,$$

por ser $M \geq v_0$. En consecuencia, $\tilde{v} = 0$ y, por definición de M, $v \leq M$. Queda así finalizada la prueba de (2.5).

Falta por último, demostrar la existencia global en tiempo. Para ello, razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $[0, T_{\max})$, con $T_{\max} \leq \infty$, es el intervalo maximal de existencia de la solución de (2.1). Como se ha comprobado ya que $v \leq M$ en $[0, T_{\max})$, necesariamente

$$\limsup_{t \uparrow T_{\max}} \|u(\cdot,t)\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} = \infty \qquad \text{si} \quad T_{\max} < \infty.$$

Además, por ser $u(\cdot,t) \gg 0$ y $v(\cdot,t) \gg 0$ para todo $0 < t < T_{\max}$, se deduce de (2.1) y (2.2) que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda u - buv < \Delta u + \lambda u \qquad \text{en} \quad \Omega \times (0, T_{\max}).$$

Luego, de acuerdo con el principio del máximo parabólico, se cumple que $u \leq \tilde{u}$ en $\Omega \times (0, T_{\max})$, donde $\tilde{u}$ es la única solución del problema lineal parabólico

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \Delta \tilde{u} + \lambda \tilde{u}, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \tilde{u}(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ \tilde{u}(x,0) = u_0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

que viene dada por $\tilde{u}(\cdot,t) = \mathrm{e}^{t(\Delta+\lambda)} u_0$. Consecuentemente,

$$u(\cdot,t) \leq \mathrm{e}^{t(\Delta+\lambda)} u_0 \qquad \text{en} \quad \Omega \quad \text{para todo} \quad 0 < t < T_{\max}.$$

Pero, en ese caso, existiría una constante $C > 0$ tal que $\|u(\cdot,t)\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} \leq C$ para todo $t < T_{\max}$ llegando a una contradicción. Por tanto, $T_{\max} = \infty$. $\square$

2.3. Extinción en Ω para $\lambda \leq \sigma_1$

El principal resultado de esta sección establece que

$$\lim_{t \to \infty} (u,v) = (0,0) \qquad \text{si} \ \ \lambda \leq \sigma_1.$$

en el sentido precisado por el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) Supongamos que $\lambda < \sigma_1$ y sea (u,v) la única solución de (2.1). *Entonces,*

$$\lim_{t \to \infty} \int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad y \qquad \lim_{t \to \infty} \int_\Omega v^2(x,t)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.10}$$

(ii) Supongamos $\lambda = \sigma_1$ y sea (u,v) la única solución de (2.1). *Entonces,*

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad y \qquad \lim_{t\to\infty} \int_\Omega v(x,t)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.11}$$

(iii) Supongamos que $\lambda = \sigma_1$ y que, además, $c(x)$ y $e(x)$ sean constantes positivas. Entonces, también se cumple (2.10).

Toda la sección se dedica a la demostración de este teorema. En la primera subsección se establecen algunos resultados técnicos auxiliares. En el resto de las subsecciones se probará cada uno de los apartados del teorema. Las pruebas constituyen una adaptación de las de G. Arioli [4], que originalmente fueron dadas para el caso particular de coeficientes constantes.

2.3.1. Algunos resultados auxiliares de naturaleza técnica

Esta sección nos proporciona dos resultados de naturaleza técnica que son necesarios en la demostración del Teorema 2.2.

Lema 2.3 *Supongamos que ω es una constante positiva, $f \in L^1[0,\infty)$, $f \geq 0$, $x_0 > 0$ y $x \in \mathcal{C}^1[0,\infty)$ satisfacen*

$$\begin{cases} x'(t) + \omega x(t) \leq f(t) \quad \text{para todo} \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Entonces,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Demostración: El cambio de variable $x(t) = \mathrm{e}^{-\omega t} y(t)$, $t \geq 0$, transforma (2.12) en

$$y'(t) \leq \mathrm{e}^{\omega t} f(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = x(0) = x_0,$$

y nos conduce a la desigualdad

$$x(t) \leq \mathrm{e}^{-\omega t} x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

Luego, para demostrar el lema es suficiente comprobar que se cumple

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{2.13}$$

Para probar (2.13) se argumentará de la siguiente forma. Dado un $\epsilon > 0$, como $f \geq 0$ y $f \in L^1[0,\infty)$, existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que $\int_T^\infty f \leq \epsilon$ y, por tanto, para todo $t > T$, se deduce

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^T \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_T^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s \\ &\leq \mathrm{e}^{\omega(T-t)} \int_0^T f + \int_T^t f \leq \mathrm{e}^{\omega(T-t)} \int_0^T f + \epsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s \leq \epsilon$$

para cualquier $\epsilon > 0$, lo que concluye la prueba. $\square$

Lema 2.4 *Supongamos que ω es una constante positiva, $f \in L^1[0,\infty)$, $f \geq 0$, $x_0 > 0$ y $x \in \mathcal{C}^1[0,\infty)$ satisface*

$$\begin{cases} x'(t) + \omega x(t) = h(t) + f(t) \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.14}$$

para alguna función monótona $h \in \mathcal{C}^1[0,\infty)$ tal que

$$h_\infty := \lim_{t\to\infty} h(t) \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{h_\infty}{\omega}.$$

Además, si, en lugar de (2.14)*, se cumple la siguiente desigualdad*

$$\begin{cases} x'(t) + \omega x(t) \leq h(t) + f(t) \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.15}$$

entonces

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) \leq \frac{h_\infty}{\omega}.$$

Análogamente,

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) \geq \frac{h_\infty}{\omega}$$

si

$$\begin{cases} x'(t) + \omega x(t) \geq h(t) + f(t) \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Demostración: Supongamos que x satisface (2.14) para todo $t > 0$. Entonces,

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\omega t} x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\omega(s-t)} h(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{\omega(s-t)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

para todo $t \geq 0$. Además, por ser $\omega > 0$, se cumple

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\omega t} x_0 = 0,$$

y por ser $f \in L^1[0,\infty)$ con $f \geq 0$ se satisface (2.13). Luego, es suficiente probar que

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{\omega(s-t)} h(s)\,\mathrm{d}s = \frac{h_\infty}{\omega}.$$

En efecto, integrando por partes en $[0,t]$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{e}^{\omega(s-t)} h(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t h(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{e}^{\omega(s-t)}}{\omega}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[h(s)\frac{\mathrm{e}^{\omega(s-t)}}{\omega}\right]\mathrm{d}s - \int_0^t h'(s)\frac{\mathrm{e}^{\omega(s-t)}}{\omega}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{h(t)}{\omega} - h(0)\frac{\mathrm{e}^{-\omega t}}{\omega} - \int_0^t h'(s)\frac{\mathrm{e}^{\omega(s-t)}}{\omega}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{h(t)}{\omega} - h(0)\frac{e^{-\omega t}}{\omega}\right) = \frac{h_\infty}{\omega},$$

para terminar la demostración es suficiente comprobar que

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h'(s)\frac{\mathrm{e}^{\omega(s-t)}}{\omega}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Como

$$\int_0^t h' = h(t) - h(0) \to h_\infty - h(0) \qquad \text{cuando } \; t\uparrow\infty$$

y h' tiene signo constante, esta identidad se deduce aplicando (2.13) a la función $f := |h'|/\omega$.

Supongamos ahora que $x(t)$ satisface (2.15) en lugar de (2.14). Entonces,

$$x(t) \le \mathrm{e}^{-\omega t}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\omega(s-t)}h(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{\omega(s-t)}f(s)\,\mathrm{d}s$$

para todo $t \ge 0$ y, por lo tanto, tomando $t \to \infty$ en esta desigualdad, se deduce

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) \le \frac{h_\infty}{\omega}.$$

Finalmente, cuando se cumple (2.16),

$$x(t) \ge \mathrm{e}^{-\omega t}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\omega(s-t)}h(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{\omega(s-t)}f(s)\,\mathrm{d}s$$

y, consecuentemente,

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) \ge \frac{h_\infty}{\omega},$$

lo que concluye la demostración del lema. $\square$

2.3.2. Demostración del Teorema 2.2(i)

Supongamos que $\lambda < \sigma_1$. Entonces, multiplicando la primera ecuación de (2.1) por u, se obtiene

$$\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial t} - \int_\Omega u\Delta u = \lambda\int_\Omega u^2 - \int_\Omega bu^2 v.$$

Como $u \gg 0$, $v \gg 0$ y $b \gg 0$, se deduce

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 < \lambda \int_\Omega u^2 \qquad \text{para todo} \quad t > 0. \tag{2.17}$$

Además, considerando que

$$\sigma_1 = \inf_{\xi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla \xi|^2}{\int_\Omega \xi^2},$$

se desprende de (2.17) que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2 + \sigma_1 \int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 < \lambda \int_\Omega u^2$$

y de ahí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2 + 2(\sigma_1 - \lambda)\int_\Omega u^2 < 0 \qquad \text{para todo} \;\; t \geq 0.$$

Luego, como $\lambda < \sigma_1$, se deduce del Lema 2.3 que

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por integración directa, es sencillo comprobar que

$$\int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{2(\lambda-\sigma_1)t}\int_\Omega u_0^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

Análogamente, multiplicando la segunda ecuación de (2.1) por v se obtiene

$$\int_\Omega v\frac{\partial v}{\partial t} - \int_\Omega v\Delta v = \int_\Omega (c - dv)uv - \int_\Omega ev^2.$$

Integrando ahora por partes y reorganizando términos, se deduce

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega ev^2 = \int (c - dv)uv.$$

Luego, como

$$\sigma[-\Delta + e] = \inf_{\xi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla \xi|^2 + \int_\Omega e\xi^2}{\int_\Omega \xi^2},$$

se desprende de la desigualdad anterior que

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^2 + \sigma[-\Delta + e]\int_\Omega v^2 \leq \int_\Omega (c - dv)uv \leq \int_\Omega cuv \leq c_M \int_\Omega uv.$$

Por tanto, definiendo

$$\alpha := \frac{c_M^2}{\sigma[-\Delta + e]}, \qquad \beta := \frac{\sigma[-\Delta + e]}{c_M},$$

se deduce

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^2+\sigma[-\Delta+e]\int_\Omega v^2 &\le c_M\int_\Omega uv=\alpha\int_\Omega u(\beta v)=\frac{\alpha}{2}\int_\Omega 2u(\beta v)\\ &\le \frac{\alpha}{2}\left(\int_\Omega u^2+\beta^2\int_\Omega v^2\right)=\frac{\alpha}{2}\int_\Omega u^2+\frac{\sigma[-\Delta+e]}{2}\int_\Omega v^2.\end{aligned}$$

Consecuentemente, multiplicando por 2 y reorganizando términos, a partir de (2.18) se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^2+\sigma[-\Delta+e]\int_\Omega v^2\le\alpha\int_\Omega u^2\le\alpha e^{2(\lambda-\sigma_1)t}\int_\Omega u_0^2.$$

Como $\sigma[-\Delta+e]>\sigma_1>0$ y el último término de la desigualdad es no negativo y además pertenece a $L^1[0,\infty)$ por ser $\lambda<\sigma_1$, el Lema 2.4 garantiza que

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega v^2(x,t)\,\mathrm{d}x=0.$$

Queda así concluida la demostración del Teorema 2.2(i).

2.3.3. Demostración del Teorema 2.2(ii)

Supongamos que $\lambda=\sigma_1$. Entonces, multiplicando el primer término de (2.1) por u se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2+\int_\Omega|\nabla u|^2\le\sigma_1\int_\Omega u^2-\int_\Omega bu^2v.$$

Luego, reorganizando términos y considerando que $\sigma_1\int_\Omega u^2\le\int_\Omega|\nabla u|^2$, se deduce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2\le-2\int_\Omega bu^2v,$$

lo que implica

$$\int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega u_0^2(x)\,\mathrm{d}x\le-2\int_0^t\int_\Omega bu^2v\qquad\text{para todo } t\ge 0.$$

Por lo tanto,

$$2\int_0^\infty\int_\Omega bu^2v\le\int_\Omega u_0^2,$$

y consecuentemente,

$$\int_\Omega bu^2v\in L^1[0,\infty)\quad\text{y}\quad\lim_{t\to\infty}\int_\Omega b(x)u^2(x,t)v(x,y)\,\mathrm{d}x=0. \tag{2.19}$$

Denotemos ahora por $\varphi_1\gg 0$ a la única autofunción principal asociada a σ_1 tal que $\int_\Omega\varphi_1^2=1$ y consideremos las proyecciones en L^2

$$u_1=\int_\Omega u(x,\cdot)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x,\qquad u_\perp:=u-u_1\varphi_1.$$

Como

$$\int_\Omega u_\perp \varphi_1 = \int_\Omega u\varphi_1 - u_1 = 0,$$

la función $u_\perp$ es ortogonal a φ_1 en $L^2(\Omega)$. Diferenciando respecto de t y considerando la primera ecuación de (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\Delta u + \sigma_1 u - buv)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \varphi_1 \Delta u + \sigma_1 \int_\Omega u\varphi_1 - \int_\Omega buv\varphi_1 = \int_\Omega u\Delta\varphi_1 + \sigma_1 \int_\Omega u\varphi_1 - \int_\Omega buv\varphi_1 \end{aligned}$$

y de ahí,

$$u_1'(t) = -\int_\Omega buv\varphi_1 < 0 \qquad \text{para todo } \; t \geq 0. \tag{2.20}$$

Luego, $u_1(t)$ es decreciente y, como $u_1(t) > 0$ para todo $t > 0$, se deduce que

$$u_{1,\infty} := \lim_{t\to\infty} u_1(t) \geq 0 \tag{2.21}$$

está bien definida.

Además, integrar (2.20) sobre $[0,t]$ nos conduce a la desigualdad

$$-u_1(0) < u_1(t) - u_1(0) \leq -\int_0^t \int_\Omega buv\varphi_1.$$

Por lo tanto, tomando límites $t \to \infty$, se obtiene

$$\int_0^\infty \int_\Omega buv\varphi_1 \leq u_1(0) = \int_\Omega u_0\varphi_1$$

y, consecuentemente,

$$\int_\Omega buv\varphi_1 \in L^1[0,\infty). \tag{2.22}$$

Multiplicando la primera ecuación de (2.1) por $u_\perp$ se obtiene

$$\int_\Omega u_\perp \frac{\partial u}{\partial t} - \int_\Omega u_\perp \Delta u - \sigma_1 \int_\Omega u_\perp u = -\int_\Omega buvu_\perp.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_\perp \left(u_1'(t)\varphi_1 + \frac{\partial u_\perp}{\partial t} \right) &- \int_\Omega u_\perp (u_1(t)\Delta\varphi_1 + \Delta u_\perp) \\ &- \sigma_1 \int_\Omega u_\perp (u_1\varphi_1 + u_\perp) = -\int_\Omega buv(u - u_1\varphi_1) \end{aligned}$$

y de ahí

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_\perp^2 + \int_\Omega |\nabla u_\perp|^2 - \sigma_1 \int_\Omega u_\perp^2 = -\int_\Omega bu^2 v + u_1(t)\int_\Omega buv\varphi_1, \tag{2.23}$$

pues $\int_\Omega u_\perp \varphi_1 = 0$ y $-\Delta\varphi_1 = \sigma_1\varphi_1$. Por otra parte, como

$$\int_\Omega bu^2 v > 0, \qquad \sigma_2 = \inf_{\substack{\xi\in H_0^1(\Omega)\\ \int_\Omega \xi\varphi_1=0}} \frac{\int_\Omega |\nabla\xi|^2}{\int_\Omega \xi^2}, \qquad u_1(t) < u_1(0) \quad \forall\, t>0,$$

donde $\sigma_2 > \sigma_1$ denota al segundo autovalor de $-\Delta$ en Ω bajo condiciones de frontera tipo Dirichlet, se desprende de (2.23) que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_\perp^2 + 2(\sigma_2-\sigma_1)\int_\Omega u_\perp^2 < 2u_1(0)\int_\Omega buv\varphi_1. \tag{2.24}$$

Como, debido a (2.22), el segundo miembro de (2.24) está en $L^1[0,\infty)$ y además $\sigma_2 > \sigma_1$, se deduce del Lema 2.3 que

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega u_\perp^2 = 0. \tag{2.25}$$

Consecuentemente, como

$$\int_\Omega u^2 = u_1^2(t)\int_\Omega \varphi_1^2 + \int_\Omega u_\perp^2 + 2u_1(t)\int_\Omega u_\perp\varphi_1 = u_1^2(t) + \int_\Omega u_\perp^2,$$

haciendo tender $t\to\infty$ en esta igualdad, de (2.21) y (2.25) se infiere

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega u^2 = u_{1,\infty}^2. \tag{2.26}$$

Consideremos ahora las proyecciones de $v(x,t)$, definidas por

$$v_1 := \int_\Omega v(x,\cdot)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x, \qquad v_\perp := v - v_1\varphi_1.$$

donde $\int_\Omega v_\perp\varphi_1 = 0$.

Multiplicando la segunda ecuación de (2.1) por $\varphi_1(x)$ e integrando por partes en Ω se obtiene

$$v_1'(t) + \sigma_1 v_1(t) = \int_\Omega cu\varphi_1 - \int_\Omega duv\varphi_1 - \int_\Omega ev\varphi_1. \tag{2.27}$$

Supongamos que c y e son constantes positivas. Entonces, (2.27) se transforma en

$$v_1'(t) + (\sigma_1+e)v_1(t) = cu_1(t) - \int_\Omega duv\varphi_1. \tag{2.28}$$

Por (2.2) y (2.22) es evidente que

$$\int_\Omega duv\varphi_1 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \int_\Omega duv\varphi_1 \in L^1[0,\infty). \tag{2.29}$$

Además, por (2.21), $\lim_{t\to\infty}[cu_1(t)] = cu_{1,\infty}$. Por tanto, del Lema 2.4, se deduce

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t) = \frac{cu_{1,\infty}}{\sigma_1 + e}.$$

Observamos que, en el caso general cuando $c(x)$ y $e(x)$ son funciones positivas que satisfacen (2.2), se desprende de (2.27) que

$$c_L u_1 - \int_\Omega duv\varphi_1 \leq v_1' + (\sigma_1 + e_M)v_1, \qquad v_1' + (\sigma_1 + e_L)v_1 \leq c_M u_1 - \int_\Omega duv\varphi_1,$$

en $[0,\infty)$ y, por tanto, el Lema 2.4 nos conduce a las desigualdades

$$\frac{c_L u_{1,\infty}}{\sigma_1 + e_M} \leq \liminf_{t\to\infty} v_1(t) \leq \limsup_{t\to\infty} v_1(t) \leq \frac{c_M u_{1,\infty}}{\sigma_1 + e_L}. \tag{2.30}$$

Combinando ahora (2.5) con (2.30), es fácil observar que existe una constante $N \geq M > 0$ tal que $0 \leq v_\perp \leq N$ para todo $t > 0$. Además,

$$\begin{aligned}\int_\Omega uv\varphi_1 &= \int_\Omega (u_1\varphi_1 + u_\perp)(v_1\varphi_1 + v_\perp)\varphi_1 \\ &= u_1(t)v_1(t)\int_\Omega \varphi_1^3 + u_1(t)\int_\Omega v_\perp\varphi_1^2 + v_1(t)\int_\Omega u_\perp\varphi_1^2 + \int_\Omega u_\perp v_\perp\varphi_1.\end{aligned}$$

Por verificarse (2.25) y (2.30), de la desigualdad de Hölder se deduce

$$\lim_{t\to\infty}\left[v_1(t)\int_\Omega u_\perp\varphi_1^2 + \int_\Omega u_\perp v_\perp\varphi_1\right] = 0,$$

pues $v_\perp \leq N$. Luego, como $\int_\Omega uv\varphi_1 \in L^1[0,\infty)$, tomando límites $t\to\infty$ en la igualdad anterior se obtiene de (2.21) que

$$u_{1,\infty}\lim_{t\to\infty}\left(\int_\Omega v_\perp\varphi_1^2 + v_1(t)\int_\Omega \varphi_1^3\right) = 0. \tag{2.31}$$

Demostraremos ahora razonando por reducción al absurdo que, $u_{1,\infty} = 0$ y como consecuencia, debido a (2.26), que $u(\cdot,t)\to 0$ en $L^2(\Omega)$ cuando $t\to\infty$. Supongamos que $u_{1,\infty} > 0$. Entonces, (2.31) implica

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int_\Omega v_\perp\varphi_1^2 + v_1(t)\int_\Omega \varphi_1^3\right) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega v\varphi_1^2 = 0. \tag{2.32}$$

Como $\varphi_1(x) > 0$ para todo $x\in\Omega$, se deduce de (2.32) que $v\to 0$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ cuando $t\to\infty$. Además definiendo

$$\Omega_\epsilon := \{\, x\in\Omega \;:\; \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \epsilon \,\}, \qquad \epsilon > 0, \quad \epsilon \sim 0,$$

se obtiene para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y para un t suficientemente grande que

$$\int_\Omega v\varphi_1 \leq \|\varphi_1\|_\infty \int_{\Omega_\epsilon} v + M\|\varphi_1\|_\infty |\Omega \setminus \Omega_\epsilon|,$$

donde M es la constante definida en (2.5). Luego,

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} \int_\Omega v\varphi_1 \leq M\|\varphi_1\|_\infty |\Omega \setminus \Omega_\epsilon|,$$

y, por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t) = \lim_{t\to\infty} \int_\Omega v\varphi_1 = 0. \tag{2.33}$$

Debido a (2.30), esto implica que $u_{1,\infty} = 0$ llegando así a una contradicción. Por tanto, $u_{1,\infty} = 0$. Queda demostrado así, por (2.26), que $u \to 0$ en $L^2(\Omega)$ cuando $t \to \infty$. Además, por (2.30), se cumple (2.32) y, por ello, $v \to 0$ en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ siempre que $t \to \infty$. De hecho, $v \to 0$ en $L^1(\Omega)$ cuando $t \to \infty$, pues v está acotada por M en Ω para t suficientemente grande lo que concluye la prueba del Apartado (ii).

2.3.4. Demostración Teorema 2.2(iii)

En términos de las proyecciones de u y v sobre φ_1, la segunda ecuación diferencial de (2.1) puede expresarse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_1(t)\varphi_1 + v_\perp) - \Delta(v_1(t)\varphi_1 + v_\perp) = c(u_1(t)\varphi_1 + u_\perp) - e(v_1(t)\varphi_1 + v_\perp) - duv$$

o, equivalentemente en,

$$v_1'(t)\varphi_1 + \frac{\partial v_\perp}{\partial t} + \sigma_1 v_1(t)\varphi_1 - \Delta v_\perp = u_1(t)c\varphi_1 - v_1(t)e\varphi_1 + cu_\perp - ev_\perp - duv. \tag{2.34}$$

Luego, por ser $\int_\Omega v_\perp\varphi_1 = 0$, multiplicando (2.34) por $v_\perp$ e integrando en Ω se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v_\perp^2 + \int_\Omega |\nabla v_\perp|^2 + \int_\Omega ev_\perp^2 =& u_1(t)\int_\Omega c\varphi_1 v_\perp - v_1(t)\int_\Omega e\varphi_1 v_\perp \\ &+ \int_\Omega cu_\perp v_\perp - \int_\Omega duvv_\perp.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Supongamos que $\lambda = \sigma_1$ y que c y e son constantes positivas. Entonces, como

$$\int_\Omega c\varphi_1 v_\perp = c\int_\Omega \varphi_1 v_\perp = 0, \qquad \int_\Omega e\varphi_1 v_\perp = e\int_\Omega \varphi_1 v_\perp = 0,$$

la igualdad (2.35) se transforma en

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v_\perp^2 + (\sigma_2 + e)\int_\Omega v_\perp^2 = c\int_\Omega u_\perp v_\perp - \int_\Omega duvv_\perp. \tag{2.36}$$

Por verificarse

$$\int_\Omega duvv_\perp = \int_\Omega duv(v - v_1(t)\varphi_1) = \int_\Omega duv^2 - v_1(t)\int_\Omega duv\varphi_1 \geq -v_1(t)\int_\Omega duv\varphi_1,$$

de (2.36) se infiere

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v_\perp^2 + (\sigma_2 + e)\int_\Omega v_\perp^2 \leq c\int_\Omega u_\perp v_\perp + v_1(t)\int_\Omega duv\varphi_1. \tag{2.37}$$

Por otra parte, el Teorema 2.1, asegura la existencia de una constante $N \geq M$ tal que $v \leq N$ para todo $t \geq 0$ y de ahí, por la desigualdad de Hölder se obtiene

$$v_1(t) = \int_\Omega v(x,t)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega v^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \varphi_1^2\right)^{1/2} \leq N\sqrt{|\Omega|}$$

para todo $t \geq 0$, pues $\int_\Omega \varphi_1^2 = 1$. Luego, por (2.22) sabemos que

$$f \in L^1[0,\infty), \quad \text{con} \quad f(t) := 2v_1(t)\int_\Omega d(x)u(x,t)v(x,t)\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.38}$$

por ser

$$\int_\Omega duv\varphi_1 \leq (d/b)_M \int_\Omega buv\varphi_1.$$

Además, definiendo

$$A := \frac{c^2}{\sigma_2 + e}, \qquad B := \frac{\sigma_2 + e}{c},$$

se observa que

$$c\int_\Omega u_\perp v_\perp = AB\int_\Omega u_\perp v_\perp \leq \frac{A}{2}\left(\int_\Omega u_\perp^2 + B^2\int_\Omega v_\perp^2\right) = \frac{A}{2}\int_\Omega u_\perp^2 + \frac{\sigma_2 + e}{2}\int_\Omega v_\perp^2.$$

Consecuentemente, (2.37) y (2.38) nos conducen a la desigualdad

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v_\perp^2 + (\sigma_2 + e)\int_\Omega v_\perp^2 \leq A\int_\Omega u_\perp^2 + f(t) \tag{2.39}$$

para todo $t \geq 0$. Luego, gracias a (2.25), aplicando el Lema 2.4 a (2.39), se deduce

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega v_\perp^2 = 0. \tag{2.40}$$

Por ser

$$\int_\Omega v^2 = \int_\Omega (v_1\varphi_1 + v_\perp)^2 = v_1^2\int_\Omega \varphi_1^2 + 2v_1\int_\Omega \varphi_1 v_\perp + \int_\Omega v_\perp^2 = v_1^2 + \int_\Omega v_\perp^2,$$

de (2.33) y (2.40) se concluye que $v \to 0$ en $L^2(\Omega)$ terminando así la demostración del Teorema 2.2(iii).

2.4. Carácter local de los estados de coexistencia de pequeña amplitud

Esta sección analiza la estabilidad linealizada de $(0,0)$ como estado estacionario de (2.1) e invoca al principio de intercambio de estabilidad de Crandall y Rabinowitz [11] para obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.5 *La solución* $(0,0)$ *es linealmente asintóticamente estable como estado de coexistencia de* (2.1) *si y sólo si* $\lambda < \sigma_1$, *y linealmente inestable si y sólo si* $\lambda > \sigma_1$. *Por lo tanto, para* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeño y* $\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1+\epsilon]$, *el único estado de coexistencia de* (2.3) *es linealmente asintóticamente estable, y consecuentemente, es asíntoticamente estable como estado estacionario de* (2.1).

Demostración: De acuerdo con el Teorema 1.3, existe $\epsilon > 0$ tal que el problema (2.3) posee un único estado de coexistencia para cada $\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1+\epsilon]$. Además, por la prueba del Teorema 1.1, el conjunto de estados de coexistencia para ese rango de valores del parámetro λ es una curva real analítica que bifurca desde $(0,0)$ en $\lambda = \sigma_1$ como consecuencia del teorema de bifuración local de Crandall y Rabinowitz [10]. Luego, por el principio de intercambio de estabilidad de Crandall y Rabinowitz [11], la estabilidad linealizada de estos estados de coexistencia se obtiene a partir de la estabilidad linealizada de $(0,0)$ como estado estacionario de (2.1) (ver Capitulo 2 de [27]). La estabilidad linealizada de $(0,0)$ como estado estacionario de (2.1) está determinada por las partes reales de los autovalores del problema lineal de autovalores

$$\begin{cases} \;-\Delta u = \lambda u + \tau u & \\ \;-\Delta v = cu - ev + \tau v & \text{en } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.41}$$

De hecho, $(0,0)$ es linealmente asintóticamente estable si $\operatorname{Re}\tau > 0$ para cualquier autovalor τ de (2.41), mientras que es linealmente inestable si admite un autovalor τ con $\operatorname{Re}\tau < 0$.

Sea $\mathfrak{S}(-\Delta)$ el espectro de $-\Delta$ en Ω bajo condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet. Entonces,

$$\mathfrak{S}(-\Delta) = \{\, \sigma_n \;\;:\; n \geq 1\,\}, \;\; \sigma_1 < \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_n \leq \sigma_{n+1} \leq \cdots, \;\; \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty.$$

Supongamos que τ es un autovalor de (2.41) asociado a una autofunción (u,v) con $u \neq 0$. Entonces, $\tau = \sigma_n - \lambda$ para algún $n \geq 1$. Por tanto, $\tau > 0$ si $\lambda < \sigma_1$. Supongamos ahora que τ es un autovalor de (2.41) asociado a una autofunción (u,v) con $u = 0$. Entonces, $v \neq 0$ satisface

$$\begin{cases} (-\Delta + e)v = \tau v & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

y, por lo tanto, $\tau \geq \sigma[-\Delta + e] > \sigma_1 > 0$. Consecuentemente, $(0,0)$ es linealmente asintóticamente estable si $\lambda < \sigma_1$. El principio de estabilidad linealizada asegura que $(0,0)$ es (localmente) asintóticamente estable. De hecho, por el Teorema 2.2(i), $(0,0)$ es un atractor exponencial global de (2.1) en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Supongamos que $\lambda > \sigma_1$. Entonces, $\tau := \sigma_1 - \lambda < 0$ es un autovalor negativo de (2.41) con una autofunción asociada

$$u = \varphi_1 \gg 0, \qquad v = (-\Delta + e + \lambda - \sigma_1)^{-1}(c\varphi_1) \gg 0,$$

donde $\varphi_1 \gg 0$ es una autofunción principal de $-\Delta$ asociada a σ_1. Por lo tanto, $(0,0)$ es linealmente asintóticamente inestable si $\lambda > \sigma_1$. Como consecuencia del principio de intercambio de estabilidad de Crandall y Rabinowitz [11] (ver [27, Theorem 2.4.2]), el único estado de coexistencia de (2.3) debe ser linealmente asintóticamente estable para cada $\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1 + \epsilon]$, si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Por el principio de estabilidad linealizada, el estado de coexistencia es (localmente) asintóticamente exponencialmente estable. □

Aunque es un atractor local, el único estado de coexistencia de (2.3) para $\sigma_1 < \lambda \leq \sigma_1 + \epsilon$ podría no ser un atractor global, pues (2.1) podría poseer una solución periódica no trivial para tales valores de λ.

2.5. Unicidad del estado de coexistencia para $e(x)$ suficientemente grande cuando $b(x)$ y $d(x)$ son múltiplos

El siguiente teorema nos proporciona el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.6 *Supongamos que b/d es una constante positiva y que $e(x)$ es suficientemente grande para que*

$$\lambda + e - bc/d > 0 \qquad \text{en } \Omega. \tag{2.42}$$

Entonces, si (2.3) *admite un estado de coexistencia, este es único. Además, el estado de coexistencia es no degenerado. De hecho, es linealmente asintóticamente estable como estado estacionario de* (2.1).

El Teorema 2.6 es una extensión substancial del Teorema 1.2 de Zhou y Shi [47] que cubre el caso general de coeficientes variables. Se deduce como consecuencia directa del Teorema 2.1 de López-Gómez y Molina-Meyer [32], posteriormente refinado por Amann [3]. El hecho de que (2.3) admita un único estado de coexistencia para $e(x)$ suficientemente grande resuelve afirmativamente la conjetura planteada en el Capítulo 1.

Demostración: Introduciendo la siguiente variable auxiliar

$$w := u - \frac{b}{d}v, \tag{2.43}$$

y teniendo en cuenta que b/d es una constante positiva, es sencillo comprobar que (u, v) resuelve (2.3) si y sólo si (u, w) satisface

$$\begin{cases} \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u - du^2 + duw & \\ (-\Delta + e)w = (\lambda + e - bc/d)\, u & \text{en } \;\Omega, \\ (u, w) = (0, 0) & \text{en } \;\partial\Omega. \end{array} \end{cases} \tag{2.44}$$

El Teorema 1.1 del Capítulo 1, asegura que cualquier solución no negativa $(u, v) \neq (0, 0)$ cumple también $u \gg 0$ y $v \gg 0$, es decir, es un estado de coexistencia de (2.3). Luego, por haber supuesto (2.42), de la segunda ecuación de (2.44) se obtiene que $w \gg 0$, pues $\sigma[-\Delta + e] > \sigma_1 > 0$ (ver [31, Th. 7.10]). Consecuentemente, cualquier estado de coexistencia de (2.3) nos proporciona un estado de coexistencia de (2.44).

Para demostrar la primera afirmación del teorema se razonará por reducción al absurdo suponiendo que (2.3) admite dos estados de coexistencia $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$. Entonces, denotando por

$$w_i := u_i - \frac{b}{d}v_i, \qquad i \in \{1, 2\},$$

los pares (u_1, w_1) y (u_2, w_2) nos proporcionan dos estados de coexistencia de (2.44). Por tanto,

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_2) &= \lambda u_1 - du_1^2 + du_1w_1 - (\lambda u_2 - du_2^2 + du_2w_2) \\ &= [\lambda - d(u_1 + u_2 - w_2)](u_1 - u_2) + du_1(w_1 - w_2), \end{aligned}$$

$$(-\Delta + e)(w_1 - w_2) = (\lambda + e - bc/d)\,(u_1 - u_2),$$

o, equivalentemente,

$$\mathfrak{L}\begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

donde

$$\mathfrak{L} := \begin{pmatrix} -\Delta + d(u_1 + u_2 - w_2) - \lambda & -du_1 \\ -(\lambda + e - bc/d) & -\Delta + e \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Como $du_1 \gg 0$, gracias a (2.42), $\mathfrak{L}$ es un operador cooperativo, que ya fueron analizados por López-Gómez y Molina-Meyer en [32]. Por (2.45), 0 es un autovalor de $\mathfrak{L}$ pues $(u_1, w_1) \neq (u_2, w_2)$. Además, debido al Teorema 2.1 de [32], $\mathfrak{L}$ admite un único autovalor principal $\sigma[\mathfrak{L}]$ cuya autofunción asociada, (φ_1, ψ_1), puede ser elegida de forma que $\varphi_1 \gg 0$ y $\psi_1 \gg 0$. Como, de acuerdo con el Teorema 12 de Amann [3], $\sigma[\mathfrak{L}]$ es dominante, se obtiene de (2.45) que $\sigma[\mathfrak{L}] \leq 0$.

Por otra parte,

$$\mathfrak{L}\begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta u_2 + d(u_1+u_2-w_2)u_2 - \lambda u_2 - du_1w_2 \\ -(\lambda+e-bc/d)\,u_2 + (-\Delta+e)w_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda u_2 - du_2^2 + du_2w_2 + d(u_1+u_2-w_2)u_2 - \lambda u_2 - du_1w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} du_1(u_2-w_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bu_1v_2 \\ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consecuentemente, (u_2, w_2) es una supersolución positive estricta de $\mathfrak{L}$ en Ω bajo condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet y, por lo tanto, del Teorema 2.1 de López-Gómez y Molina-Meyer [32] se deduce que $\sigma[\mathfrak{L}] > 0$, en contradicción con lo obtenido anteriormente, $\sigma[\mathfrak{L}] \leq 0$. Así concluye la prueba de la unicidad.

Supongamos que (2.3) admite un estado de coexistencia y denotemos por (U, V) a este único estado de coexistencia. Entonces, el problema de autovalores linealizado de (2.3) en (U, V) es

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - bVu - bUv + \tau u & \\ -\Delta v = cu - dVu - dUv - ev + \tau v & \text{en } \Omega, \\ (u,v) = (0,0) & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.47}$$

y, a través de algunos cálculos directos, el cambio de variable

$$w := u - \frac{b}{d}v, \qquad W := U - \frac{b}{d}V, \tag{2.48}$$

transforma (2.47) en

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - 2dUu + dWu + dUw + \tau u & \\ (-\Delta+e)w = (\lambda+e-bc/d)\,u + \tau w & \text{en } \Omega, \\ (u,w) = (0,0) & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.49}$$

que es el problema lineal de autovalores asociado a la ecuación linealizada de (2.44). Observemos que, denotando por

$$\mathfrak{M} := \begin{pmatrix} -\Delta + d(2U-W) - \lambda & -dU \\ -(\lambda+e-bc/d) & -\Delta+e \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

los autovalores de (2.47) o (2.49), son los autovalores de $\mathfrak{M}$ en Ω bajo condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet. Como

$$\mathfrak{M}\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta U + d(2U-W)U - \lambda U - dUW \\ -(\lambda + e - bc/d)\,U + (-\Delta + e)W \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda U - dU^2 + dUW + d(2U-W)U - \lambda U - dUW \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} dU(U-W) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bUV \\ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se obtiene que $\sigma[\mathfrak{M}] > 0$ por [32, Theorem 2.1]. Obsérvese que $W > 0$ porque (U, W) satisface (2.44). Luego, de acuerdo con Amann [3, Th. 12],

$$\operatorname{Re}\tau \geq \sigma[\mathfrak{M}] > 0 \tag{2.51}$$

para cualquier autovalor de (2.47). Consecuentemente, (U, V) es asintóticamente linealmente estable como estado de coexistencia de (2.1) y, en particular, es no degenerado. $\square$

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.6, se obtiene el siguiente

Teorema 2.7 *Supongamos que b/d es una constante y que e es suficientemente grande para que*

$$\sigma_1 + e - bc/d > 0 \qquad \text{en } \Omega. \tag{2.52}$$

Entonces, (2.1) *posee un estado de coexistencia si y sólo si*

$$\sigma_1 < \lambda < \lambda_\infty := \sigma[-\Delta + bc/d], \tag{2.53}$$

que es único, si existe. Además, el conjunto de estados de coexistencia consiste en una curva real analítica $(U(\lambda), V(\lambda), \lambda)$ tal que

$$\lim_{\lambda \to \sigma_1} (U(\lambda), V(\lambda)) = (0,0) \qquad \text{uniformemente en } \bar{\Omega},$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_\infty} U(\lambda) = \infty \;\; \text{uniformemente en subconjuntos compactos de } \Omega \tag{2.54}$$

y

$$\lim_{\lambda \to \lambda_\infty} V(\lambda) = c/d \quad \text{débilmente en } L^p(\Omega) \tag{2.55}$$

para todo $p > 1$, tal como se describió en el Capítulo 1.

Demostración: Bajo la condición (2.52), los Teoremas 1.1 y 2.6 garantizan la unicidad de cualquier estado de coexistencia de (2.3) siendo además linealmente asintóticamente estable. En particular, no degenerado. Por lo tanto, debido al teorema de la función implícita, la estructura del conjunto de soluciones a través de cualquier estado de coexistencia consiste en un arco de curva real analítica formado por estados de coexistencia.

El hecho de que (2.3) no admita un estado de coexistencia si $\lambda \geq \lambda_\infty$ se deduce fácilmente teniendo en cuenta que, de acuerdo con el Teorema 1.1(iii) del Capítulo 1, λ_∞ es el único valor de λ donde los estados de coexistencia bifurcan desde el infinito. En efecto, si (2.3) tuviese un estado de coexistencia en algún $\lambda \geq \lambda_\infty$, por continuación global a la derecha, tendríamos estados de coexistencia para valores de λ por encima de $\sigma[-\Delta + \|c/d\|_\infty b]$, lo que contradice el Teorema 1.1. El resto de las afirmaciones se deducen de forma sencilla del análisis matemático realizado en el capítulo anterior. Omitimos aquí los detalles técnicos. $\square$

Estos resultados mejoran substancialmente los obtenidos por Zhou y Shi en [47], donde la no degeneración de los estados de coexistencia de (2.3) para coeficientes constantes bajo la condición (2.42), se obtuvo aplicando el siguiente lema, que es el Theorem 2.4 de Cui et al. [12]. Ese resultado es una consecuencia trivial de López-Gómez y Molina-Meyer en [32, Th. 2.1].

Lema 2.8 *Supongamos que $f, g : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ y (U,V) es un estado de coexistencia de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u,v) & \\ -\Delta v = g(u,v) & \text{en } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.56}$$

tal que

$$\begin{cases} \partial_v f(U,V) > 0, & f(U,V) \geq \partial_u f(U,V)U + \partial_v f(U,V)V, \\ \partial_u g(U,V) > 0, & g(U,V) \geq \partial_u g(U,V)U + \partial_v g(U,V)V, \end{cases} \quad \text{en } \Omega, \tag{2.57}$$

con alguna desigualdad estricta en la segunda columna. Entonces, los autovalores del problema linealizado

$$\begin{cases} -\Delta u = \partial_u f(U,V)u + \partial_v f(U,V)v + \tau u & \\ -\Delta v = \partial_u g(U,V)u + \partial_v g(U,V)v + \tau v & \text{en } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.58}$$

tienen partes reales positivas.

Demostración: Como $\partial_v f(U,V) > 0$ y $\partial_u g(U,V) > 0$, (2.58) es un sistema cooperativo irreducible, ya estudiado y discutido en [32]. Además, debido a (2.57), se cumple que

$$-\Delta U = f(U,V) \geq \partial_u f(U,V)U + \partial_v f(U,V)V,$$
$$-\Delta V = g(U,V) \geq \partial_u g(U,V)U + \partial_v g(U,V)V,$$

con alguna desigualdad estricta. Por lo tanto, (U, V) nos proporciona una supersolución estricta positive de (2.58) con $\tau = 0$. Consecuentemente, por el Teorema 2.1 de [32], el principal autovalor de (2.58) debe ser positivo. Como debido al Teorema 12 de Amann [3] el autovalor principal es dominante, queda concluida la demostración del teorema. $\square$

Cuando falla la condición (2.52), se verifica el siguiente resultado.

Teorema 2.9 *Supongamos que b/d y c son constantes positivas. Entonces,* (2.3) *posee un estado de coexistencia si y sólo si se satisface* (2.53). *Además, si no se verifica* (2.52), *entonces existe $\epsilon > 0$ y $\eta > 0$ tal que* (2.3) *admite un único estado de coexistencia para cada*

$$\lambda \in (\sigma_1, \sigma_1 + \epsilon] \cup [\lambda_\infty - \eta, \lambda_\infty).$$

Tal estado de coexistencia también cumple (2.54) *y* (2.55).

Demostración: De acuerdo con el Teorema 2.7, se satisface el resultado bajo la condición (2.52), donde siempre hay unicidad. Por tanto, suponiendo que (2.52) falla y que además b/d y c son constante positivas se deduce

$$\lambda_\infty = \sigma_1[-\Delta + bc/d] = \sigma_1 + bc/d$$

y, como

$$\lambda_\infty + e - bc/d = \sigma_1 + e > 0,$$

resulta sencillo observar que la condición (2.42) se verifica para λ suficientemente próximo a λ_∞. Por consiguiente, la unicidad en este caso es consecuencia directa del Teorema 2.6. La unicidad para $\lambda \sim \sigma_1$ ya fue establecida por el Teorema 1.3. $\square$

2.6. Atractividad global del único estado de coexistencia

El principal resultado de esta sección es el siguiente teorema

Teorema 2.10 *Supongamos que b/d es constante, que $\lambda + e - bc/d \gg 0$ y que* (2.3) *admite un estado de coexistencia. Entonces, el estado de coexistencia es único y es un atractor global para el problema parabólico* (2.1). *Concretamente, si denotamos por (U, V) a dicho estado de coexistencia, se cumple que*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot, t) - U\|_{\mathcal{C}(\bar\Omega)} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \|v(\cdot, t) - V\|_{\mathcal{C}(\bar\Omega)} = 0, \tag{2.59}$$

donde (u, v) representa a la única solución de (2.1).

Demostración: Este teorema se fundamenta en los resultados de Amann [2] y Sattinger [46] para una única ecuación, y en sus posteriores extensiones para sistemas cooperativos obtenidas por Molina-Meyer [38, 39, 40] y Amann [3], donde el cambio de variable (2.48) transforma el problema de evolución (2.1) en el siguiente

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u - du^2 + duw & \\ & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (-\Delta + e)w = (\lambda + e - bc/d)u & \\ (u, w) = (0, 0) & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0 > 0,\ w(x, 0) = w_0 := u_0 - \frac{b}{d} v_0, & x \in \Omega, \end{array}\right. \tag{2.60}$$

que es la contrapartida parabólica de (2.44). Como $U > 0$, se deduce de (2.42) y de la segunda ecuación de (2.44) que $W > 0$ y, como consecuencia, (U, W) es un estado de coexistencia de (2.44), que, además, de acuerdo con el Teorema 2.6, es único. Probaremos ahora que es un atractor global para (2.60).

Como (2.3) admite un estado de coexistencia, el Teorema 1.1 garantiza $\lambda > \sigma_1$. Por otra parte, como $duv \gg 0$, se obtiene de la primera ecuación de (2.60) que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u > \lambda u - du^2 \quad \text{en } \Omega \quad \text{para todo } t > 0,$$

y, por ello,

$$u(x, t) \geq \tilde{u}(x, t), \qquad x \in \Omega, \ \ t > 0, \tag{2.61}$$

donde $\tilde{u}$ designa a la única solución de

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta \tilde{u} = \lambda \tilde{u} - d\tilde{u}^2 & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \tilde{u} = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = u_0 > 0, & x \in \Omega. \end{array}\right.$$

Como $\lambda > \sigma_1$, es bien conocido que

$$\lim_{t \to \infty} ||\tilde{u}(\cdot, t) - \theta_\lambda||_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} = 0 \tag{2.62}$$

donde $\theta_\lambda \gg 0$ designa a la única solución positiva de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u} = \lambda \tilde{u} - d\tilde{u}^2 & \text{en } \Omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Luego, de (2.61) y (2.62), se deduce

$$\liminf_{t \to \infty} u(\cdot, t) \geq \theta_\lambda. \tag{2.63}$$

Por otra parte, aplicando la fórmula de variación de las constantes a la segunda ecuación de (2.60), se obtiene

$$w(\cdot, t) = e^{t(\Delta - e)} w_0 + \int_0^t e^{(t-s)(\Delta - e)} \left((\lambda + e - bc/d) u(\cdot, s)\right) \mathrm{d}s. \tag{2.64}$$

Como $\sigma[-\Delta+e]>0$,

$$\lim_{t\to\infty} e^{t(\Delta-e)}w_0=0 \quad \text{uniformemente en } \bar{\Omega}.$$

Por tanto, por la positividad del semigrupo del calor, (2.63) y (2.64) nos conducen a la siguiente desigualdad

$$\liminf_{t\to\infty} w(\cdot,t)\geq \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{(t-s)(\Delta-e)}\left((\lambda+e-bc/d)\theta_\lambda\right)\,\mathrm{d}s. \tag{2.65}$$

Por otra parte, como $\lambda+e-bc/d\gg 0$ y $\theta_\lambda\gg 0$, observamos que existe $\omega>0$ tal que

$$(\lambda+e-bc/d)\theta_\lambda>\omega\varphi_e \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\varphi_e\gg 0$ es una autofunción asociada a $\sigma[-\Delta+e]$. Consecuentemente, a partir de (2.65) se deduce

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} w(\cdot,t) &\geq \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{(t-s)(\Delta-e)}\left(\omega\varphi_e\right)\,\mathrm{d}s\\ &=\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{(s-t)\sigma[-\Delta+e]}(\omega\varphi_e)\,\mathrm{d}s=\frac{\omega}{\sigma[-\Delta+e]}\varphi_e.\end{aligned}$$

Luego, independientemente del signo de w_0, existe $t_0>0$ tal que $w(\cdot,t)\gg 0$ para todo $t\geq t_0$. Además, como $u_0>0$, se deduce del principio del máximo parabólico que $u(\cdot,t)\gg 0$ para todo $t>0$. Como consecuencia,

$$u(\cdot,t)\gg 0 \quad \text{y} \quad w(\cdot,t)\gg 0 \quad \text{para todo } t\geq t_0. \tag{2.66}$$

Consideremos ahora el problema de autovalores asociado a la linealización de (2.44) en $(0,0)$,

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u=\lambda u+\tau u & \\ (-\Delta+e)w=(\lambda+e-bc/d)u+\tau w & \text{en } \Omega, \\ u=w=0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.67}$$

Como, por hipótesis, estamos suponiendo que (2.3) admite un estado de coexistencia, por el Teorema 1.1 del Capítulo 1, necesariamente $\lambda>\sigma_1$. Por tanto, $\tau_1:=\sigma_1-\lambda<0$. Sea $\varphi_1\gg 0$ cualquier autofunción principal asociada a σ_1 y

$$\psi_1:=(-\Delta+e-\tau_1)^{-1}[(\lambda+e-bc/d)\varphi_1]\gg 0. \tag{2.68}$$

A continuación, demostraremos que $\epsilon(\varphi_1,\psi_1)$ es una subsolución de (2.44) para $\epsilon>0$ suficientemente pequeño. Como $\epsilon(\varphi_1,\psi_1)=(0,0)$ en $\partial\Omega$, únicamente se necesita comprobar que para $\epsilon>0$ suficientemente pequeño se satisfacen las siguientes desigualdades en Ω

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta(\epsilon\varphi_1)\leq\lambda(\epsilon\varphi_1)-\epsilon^2 d\varphi_1^2+\epsilon^2 d\varphi_1\psi_1,\\ (-\Delta+e)(\epsilon\psi_1)\leq(\lambda+e-bc/d)\,\epsilon\varphi_1,\end{array}\right.$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} \sigma_1 \le \lambda - \epsilon d\varphi_1 + \epsilon d\psi_1, \\ (-\Delta + e)\psi_1 \le (\lambda + e - bc/d)\,\varphi_1. \end{cases} \tag{2.69}$$

Como $\lambda > \sigma_1$, es evidente que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño se cumple la primera desigualdad de (2.69). Además, de (2.68) se deduce

$$(-\Delta + e)\psi_1 = (\lambda + e - bc/d)\varphi_1 + \tau_1\psi_1 < (\lambda + e - bc/d)\varphi_1,$$

y, por lo tanto, se satisface (2.69). Luego, efectivamente, $\epsilon(\varphi_1, \psi_1)$ es una subsolución de (2.44) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

De forma análoga, comprobaremos que $\kappa(U, W)$ es una supersolución de (2.44) para todo $\kappa \ge 1$. En efecto, por ser $\kappa(U, W) = (0, 0)$ sobre $\partial\Omega$, es suficiente comprobar que

$$\begin{cases} -\Delta(\kappa U) \ge \lambda(\kappa U) - \kappa^2 dU^2 + \kappa^2 dUW, \\ (-\Delta + e)(\kappa W) \ge (\lambda + e - bc/d)\,\kappa U, \end{cases}$$

en Ω, o equivalentemente, que para todo $\kappa \ge 1$

$$\begin{cases} -\Delta U \ge \lambda U - \kappa dU^2 + \kappa dUW, \\ (-\Delta + e)W \ge (\lambda + e - bc/d)\,U, \end{cases} \tag{2.70}$$

Como (U, W) resuelve (2.44), se cumple la segunda igualdad de (2.70) y la primera se transforma en

$$\lambda U - dU^2 + dUW \ge \lambda U - \kappa dU^2 + \kappa dUW \quad \Longleftrightarrow \quad U \ge W = U - \frac{b}{d}V,$$

que, evidentemente, se cumple. Consecuentemente, por ser $W \gg 0$, y ya que, gracias a (2.66), $u(\cdot, t_0) \gg 0$ y $v(\cdot, t_0) \gg 0$, existen $\epsilon > 0$ y $\kappa > 1$ tales que

$$\epsilon\varphi_1 \le u(\cdot, t_0) \le \kappa U \quad \text{y} \quad \epsilon\psi_1 \le w(\cdot, t_0) \le \kappa W.$$

Por tanto, del principio del máximo parabólico para sistemas de tipo cooperativo, se desprende

$$\begin{aligned} u(\cdot, t; t_0, \epsilon\varphi_1, \epsilon\psi_1) \le u(\cdot, t; t_0, u(\cdot, t_0), w(\cdot, t_0)) \le u(\cdot, t; t_0, \kappa U, \kappa W), \\ w(\cdot, t; t_0, \epsilon\varphi_1, \epsilon\psi_1) \le w(\cdot, t; t_0, u(\cdot, t_0), w(\cdot, t_0)) \le w(\cdot, t; t_0, \kappa U, \kappa W), \end{aligned} \tag{2.71}$$

para todo $t \ge t_0$, donde, dado $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario,

$$(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) := (u(\cdot, t; t_0, \xi, \eta), w(\cdot, t; t_0, \xi, \eta))$$

designa a la única solución de

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \partial_t u - \Delta u = \lambda u - du^2 + duw \\ \partial_t w + (-\Delta + e)w = (\lambda + e - bc/d)u \end{array}\right. & x \in \Omega,\ t > t_0, \\ (u, w) = (0, 0) & x \in \partial\Omega,\ t > t_0, \\ u(x, t_0) = \xi,\ w(x, t_0) = \eta, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.72}$$

Disminuyendo ϵ, si es necesario, se puede suponer que $\epsilon(\varphi_1, \psi_1)$ es una subsolución estricta de (2.44). En ese caso, la función

$$t \mapsto (u(\cdot, t; t_0, \epsilon\varphi_1, \epsilon\psi_1), w(\cdot, t; t_0, \epsilon\varphi_1, \epsilon\psi_1)), \qquad t > t_0,$$

es creciente. Análogamente, como $(\kappa U, \kappa W)$ es una supersolución estricta para $\kappa > 1$, la aplicación

$$t \mapsto (u(\cdot, t; t_0, \kappa U, \kappa W), w(\cdot, t; t_0, \kappa U, \kappa W)), \qquad t > t_0,$$

es decreciente. Se deduce por tanto

$$\lim_{t\to\infty} (u(\cdot, t; t_0, \epsilon\varphi_1, \epsilon\psi_1), w(\cdot, t; t_0, \epsilon\varphi_1, \epsilon\psi_1)) = (U_{\min}, W_{\min}),$$
$$\lim_{t\to\infty} (u(\cdot, t; t_0, \kappa U, \kappa W), w(\cdot, t; t_0, \kappa U, \kappa W)) = (U_{\max}, W_{\max}),$$

donde $(U_{\min}, W_{\min})$ y $(U_{\max}, W_{\max})$ designan a los estados de coexistencia minimal y maximal de(2.44) en el intervalo $[(\epsilon\varphi_1, \epsilon\psi_1), (\kappa U, \kappa W)]$, respectivamente. Como, debido al Teorema 2.5, (2.44) posee un único estado de coexistencia, necesariamente se satisface

$$(U, W) = (U_{\min}, W_{\min}) = (U_{\max}, W_{\max})$$

y tomando límites $t \to \infty$ en (2.71) queda demostrada la atractividad global de (U, W). Resulta sencillo, mediante cáculos directos, establecer la atractividad global de (U, V) como estado estacionario de (2.1). Concluye así la demostración del teorema. $\square$

2.7. Comportamiento asintótico para $\lambda > \lambda_\infty$

El siguiente resultado proporciona una extensión substancial de la última afirmación del Teorema 2.1 de Arioli [4], de acuerdo con la cual la norma L^2 de la solución $(u(\cdot, t), v(\cdot, t))$ diverge hacia infinito cuando $t \to \infty$ y b, c, d y e son constantes positivas que cumplen $\lambda \geq \sigma_1 + bc/d$.

Teorema 2.11 *Supongamos que b/d y c son constantes y*

$$\lambda \geq \lambda_\infty := \sigma_1 + bc/d.$$

Entonces

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot, t) = \infty \quad \textit{uniformemente en subconjuntos compactos de } \Omega, \tag{2.73}$$

mientras que, de acuerdo con el Teorema 2.1, se satisface

$$\limsup_{t\to\infty} v(\cdot, t) \leq M := \max\{\|v_0\|_\infty, \|c/d\|_\infty\}. \tag{2.74}$$

Demostración: De acuerdo con el Teorema 2.9, (2.3) posee un único estado de coexistencia, denotado por (U_λ, V_λ), para cada $\lambda \in [\lambda_\infty - \eta, \lambda_\infty)$. Análogamente, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, denotaremos por (u_λ, v_λ) a la única solución del problema parabólico (2.1) y por (u_λ, w_λ) a la única solución del problema parabólico (2.60). Obérvese que $w_\lambda = u_\lambda - \frac{b}{d} v_\lambda$.

Supongamos que $\lambda \geq \lambda_\infty$. Entonces, del principio del máximo parabólico para sistemas cooperativos, se deduce

$$(u_\lambda(\cdot, t), w_\lambda(\cdot, t)) \geq (u_{\lambda_\infty - \epsilon}(\cdot, t), w_{\lambda_\infty - \epsilon}(\cdot, t))$$

para todo $t > 0$ y $\epsilon > 0$. Por tanto, debido al Teorema 2.10, se obtiene

$$\liminf_{t \to \infty} u_\lambda(\cdot, t) \geq \lim_{t \to \infty} u_{\lambda_\infty - \epsilon}(\cdot, t) = U_{\lambda_\infty - \epsilon}$$

para todo $\epsilon \in (0, \eta)$. Luego, de acuerdo con el Teorema 1.1(iv), se desprende que

$$\liminf_{t \to \infty} u_\lambda(\cdot, t) \geq \lim_{\epsilon \to 0} U_{\lambda_\infty - \epsilon} = \infty,$$

terminando así la prueba de (2.73). El hecho de que v_λ permanece acotada es una consecuencia directa de (2.5). $\square$

Capítulo 3

Principio del máximo para sistemas cooperativos periódicos parabólicos

3.1. Introducción

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular, y consideremos los siguientes operadores parabólicos

$$\mathcal{P}_k := \frac{\partial}{\partial t} + A_k(x,t;D), \qquad k = 1, ..., n, \tag{3.1}$$

donde

$$\mathcal{A}_k(x,t;D) := -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}^k(x,t) D_i D_j + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^k(x,t) D_i, \qquad k = 1, ..., n, \tag{3.2}$$

son operadores de segundo orden uniformemente elípticos en Ω cada $t > 0$. En este capítulo supondremos que todos los coeficientes

$$\alpha_{ij}^k, \quad \alpha_i^k, \qquad k \in \{1, ..., n\}, \ \ i,j \in \{1, ..., N\},$$

viven en el espacio de Banach de las funciones Hölder continuas

$$F := \{\omega \in \mathcal{C}^{\nu,\nu/2}(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \ \ \omega(x, t+T) = \omega(x,t) \ \text{ para todo } \ (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}\},$$

para algunos $T > 0$ y $0 < \nu < 1$. A lo largo del capítulo también consideraremos una matriz de coeficientes

$$\mathcal{C}(x,t) = \left(c_{ij}(x,t)\right)_{i,j=1,...,n}$$

de orden n con $c_{ij} \in F$ para todo $i,j \in \{1, ..., n\}$ y de tipo cooperativo; i.e., tal que

$$c_{ij}(x,t) > 0 \quad \text{para todo } \ i,j = 1, ..., n, \ \ i \neq j, \quad (x,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]. \tag{3.3}$$

El objetivo de este capítulo es caracterizar las condiciones bajo las que el siguiente problema de contorno periódico parabólico cumple el principio del máximo fuerte

$$\begin{cases} \mathcal{P}_k u_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} u_j(x,t) + f_k & \text{en} \quad Q_T \equiv \Omega \times [0,T], \\ u_k(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u_k(x,0) = u(x,T), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

donde $f_k \in F$, $k = 1, ..., n$, son funciones dadas, datos del problema. Bajo las hipótesis anteriores, se demuestra en el libro de Hess [22] que cualquier solución $u := (u_1, ..., u_n)$ de (3.4) pertenece al espacio de Banach E^n, donde

$$E := \{u \in \mathcal{C}^{2+\nu,1+\nu/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \ : \ u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}} \equiv 0, \quad u \ \text{es } T\text{-periodica en } \ t\}.$$

Considerando los espacios de Banach $U := E^n$, $V := F^n$ y el operador

$$\mathcal{P} := (\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n) : U \to V$$

definido por

$$\mathcal{P}u = (\mathcal{P}_1 u_1, ..., \mathcal{P}_n u_n)^{\text{trans}}, \quad u \in U,$$

el problema (3.4) puede expresarse en forma compacta como

$$\mathcal{P}u = \mathcal{C}(x,t)u + f(x,t), \quad u \in U \tag{3.5}$$

donde

$$f = (f_1, ..., f_n)^{\text{trans}} \in V.$$

A continuación, denotaremos por P_E y P_F a los conos de funciones positivas de E y F, respectivamente. Los espacios de Banach E, F, U y V son considerados como espacios de Banach ordenados por los conos P_E, P_F, $P_U = P_E^n$ y $P_V = P_F^n$, respectivamente. Observemos que el interior del cono P_E, que denotaremos por $\operatorname{int} P_E$, está constituido por el conjunto de funciones $u \in E$ tales que $u(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in Q_T$ y $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) < 0$ para todo $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$, donde n es el campo normal exterior unitario a Ω a lo largo de su frontera. Obérvese que

$$\operatorname{int} P_U = (\operatorname{int} P_E)^n .$$

El siguiente concepto es fundamental.

Definición 3.1 (a) *Se dice que* (3.4) *(o* (3.5)*) satisface el principio del máximo **(PM)** cuando cualquier solución de* (3.5) *cumple* $u \in P_U$ *siempre que* $f \in P_V$.

(b) *Análogamente, se dice que* (3.5) *satisface el principio del máximo fuerte **(PMF)** cuando cualquier solución de* (3.5) *cumple* $u \in \operatorname{int} P_U$ *siempre que* $f \in P_V \setminus \{0\}$.

Debe observarse que, cuando el problema cumple el principio del máximo, $u = 0$ es la única solución de $\mathcal{P}u = \mathcal{C}u$. En efecto, dado que u y $-u$ son soluciones de esa ecuación y $u \geq 0$, $-u \geq 0$, se desprende que $u = 0$.

El resultado principal de este capítulo generaliza el teorema principal de López-Gómez y Molina-Meyer [32], obtenido para la contrapartida elíptica de (3.4), estableciendo la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

(a) El problema (3.5) admite una supersolución positiva estricta $\Psi \in \operatorname{int} P_U$, en el sentido de que
$$\mathcal{P}\Psi > \mathcal{C}\Psi \qquad \text{in } Q_T.$$
Es decir, $\mathcal{P}\Psi \geq \mathcal{C}\Psi$ en Q_T, pero $\mathcal{P}\Psi \neq \mathcal{C}\Psi$.

(b) El problema (3.5) satisface el principio del máximo fuerte.

(c) El problema (3.5) satisface el principio del máximo.

(d) Existen $\sigma > 0$ y $\Phi \in \operatorname{int} P_U$ tales que
$$\mathcal{P}\Phi = \mathcal{C}\Phi + \sigma\Phi. \tag{3.6}$$

Además, cuando se cumple alguna de estas condiciones, σ nos proporciona el único autovalor λ del problema periódico de autovalores

$$\mathcal{P}u = \mathcal{C}u + \lambda u, \qquad u \in U, \tag{3.7}$$

asociado con el cual existe alguna autofunción positiva. Además, σ es un autovalor simple. A σ le denominaremos *autovalor principal* del problema (3.7) y será denotado por
$$\sigma := \sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C}).$$
A las autofunciones positivas asociadas, $\Phi \in P_U \setminus \{0\}$, las denominaremos *autofunciones principales*. Deben estar en el interior del cono positivo.

En la Sección 2 enunciaremos el teorema principal del capítulo. En la Sección 3 demostraremos la existencia y la unicidad del autovalor principal de (3.7) así como algunas de sus propiedades más importantes. Entre ellas, la siguiente propiedad de monotonía

$$\sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1) < \sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C}_2)$$

siempre que
$$\mathcal{C}_1 = \left(c_{ij}^1\right)_{i,j} > \mathcal{C}_2 = \left(c_{ij}^2\right)_{i,j},$$

en el sentido en que

$$c_{ij}^1 \geq c_{ij}^2 \quad \text{para todo } i,j = 1, ..., n,$$

y
$$c_{ij}^1(x_0, t_0) > c_{ij}^2(x_0, t_0)$$

para algún $i, j \in \{1, ..., n\}$ y $(x_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Esta comparación es de gran utilidad pues proporciona estimaciones para el autovalor principal de (3.7) en términos de los autovalores principales de determinados problemas subyacentes cuya matriz cooperativa asociada es independiente de la variable espacial x.

Cuando todos los operadores parabólicos involucrados en la formulación de (3.4) coinciden, es decir,

$$\mathcal{P}_1 = \cdots = \mathcal{P}_n,$$

y la matriz $\mathcal{C}$ es independiente de x, es decir, únicamente depende de t, puede aplicarse la teoría abstracta de Krasnoselskij [24] para caracterizar las condiciones bajo las que (3.4) cumple el principio del máximo. En tal caso, nuestra caracterización viene dada en términos del autovalor principal del operador de monodromía del sistema cooperativo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\alpha'(t) = \mathcal{C}(t)\alpha(t). \tag{3.8}$$

Obsérvese que si se cumple

$$\mathcal{C}(t) \int_0^t \mathcal{C}(s)\, ds = \int_0^t \mathcal{C}(s)\, ds\, \mathcal{C}(t) \quad \text{para todo } \; t \in \mathbb{R},$$

entonces

$$W(t) = \exp \int_0^t \mathcal{C}, \qquad t \geq 0,$$

es el *operador traslación a lo largo de las trayectorias* de (3.8), o *aplicación de Poincaré en tiempo* t. Por tanto, bajo tales condiciones, el operador de monodromía viene determinado por la matriz

$$W(T) = \exp \int_0^T \mathcal{C}.$$

Bajo estas condiciones, demostramos que (3.5), o, equivalentemente, (3.4), cumple el principio del máximo si y sólo si los n primeros menores de la matriz

$$\lambda_1(\mathcal{P}_1)\, I - \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{C}(s)\, ds$$

tienen determinantes positivos, donde estamos denotando por $\lambda_1(\mathcal{P}_1)$ el autovalor principal de este operador parabólico. Evidentemente, tales resultados generalizan al caso periódico-parabólico los anteriores de [18] y [32].

Finalmente, cuando todos los autovalores principales de los operadores parabólicos involucrados en la formulación de (3.4) sean positivos, aplicaremos la anterior teoría general a la búsqueda de resultados de existencia de autovalores principales del problema con peso

$$\mathcal{P}\Phi = \mu\mathcal{C}(x, t)\Phi, \quad \Phi \in P_U \setminus \{0\},$$

a través del análisis de los ceros de la función

$$\mu \to \sigma\,(\mathcal{P} - \mu\mathcal{C})\,.$$

Nuestros resultados proporcionan una versión muy general para sistemas de un resultado clásico de Beltramo y Hess [2] para una única ecuación.

En líneas generales, la metodología adoptada en este capítulo sigue las pautas, ya clásicas, de Krasnoselskij [24] y López-Gómez y Molina-Meyer [32].

3.2. Caracterización del principio del máximo

El principal resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 3.2 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(C1) *Existe* $\Psi \in \operatorname{int} P_U$ *tal que* $\mathcal{P}\Psi > \mathcal{C}\Psi$*.*

(C2) *El operador* $(\mathcal{P} - \mathcal{C})^{-1} : V \to V$ *está bien definido, es compacto y fuertemente positivo.*

(C3) *El problema* (3.5) *cumple el principio del máximo fuerte.*

(C4) *El problema* (3.5) *cumple el principio del máximo.*

(C5) *El problema de autovalores* (3.6) *admite un autovalor positivo,* $\sigma(\mathcal{P}-\mathcal{C})$*, asociado a una autofunción* $\Phi \in \operatorname{int} P_U$*, única salvo constantes multiplicativas.*

Además, si se cumple alguna de estas condiciones, el autovalor $\sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C})$ *es simple y no existe ningún otro autovalor de* (3.6) *con una autofunción positiva.*

Finalmente, para cada $p \in P_U \setminus \{0\}$*, la ecuación*

$$\lambda u - (\mathcal{P} - \mathcal{C})^{-1} u = p, \tag{3.9}$$

tiene una única solución positiva $u \in \operatorname{int} P_U$ *si* $\lambda > \frac{1}{\sigma(\mathcal{P}-\mathcal{C})}$*, mientras que carece de soluciones si* $\lambda \leq \frac{1}{\sigma(\mathcal{P}-\mathcal{C})}$*.*

La demostración de este teorema se basa en la siguiente versión generalizada del célebre teorema de Krein y Rutman [25], debido a López-Gómez [31, Theorem 6.3].

Teorema 3.3 (Generalizado de Krein-Rutman) *Sea* $(E, \|\,.\,\|, P)$ *un espacio de Banach ordenado con* $\operatorname{int} P \neq \{0\}$ *y* $T \in \mathcal{K}(E)$ *un operador compacto fuertemente positivo,es decir, tal que*

$$T\,(P \setminus \{0\}) \subset \operatorname{int} P. \tag{3.10}$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $\mathrm{sprT} > 0$ *es un autovalor de* T *algebraicamente simple con*

$$\mathrm{Kernel}\,[\mathrm{sprT}\, I - T] = \mathrm{span}\,[x_0]$$

para algún $x_0 \in \mathrm{int}\, P$.

(ii) sprT *es el único autovalor real de* T *con un autovector asociado en* $P \setminus \{0\}$.

(iii) sprT *es el único autovalor de* T *en el círculo espectral*

$$|\zeta| = \mathrm{sprT}.$$

En otras palabras,

$$|\lambda| < \mathrm{sprT} \;\; \textit{para todo} \;\; \lambda \in \sigma(T) \setminus \{\mathrm{sprT}\}.$$

(iv) *Para todo número real* $\lambda > \mathrm{sprT}$, *el operador resolvente*

$$\mathcal{R}(\lambda; T) := (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

es fuertemente positivo, en el siguiente sentido

$$\mathcal{R}(\lambda; T)(P \setminus \{0\}) \subset \mathrm{int}\, P.$$

(v) *Existen* $\epsilon > 0$ *y* $x > 0$ *tales que*

$$\mathcal{R}(\lambda; T)x \ll 0 \;\; \textit{para todo} \;\; \lambda \in (\mathrm{sprT} - \epsilon, \mathrm{sprT})\,.$$

(vi) *Supongamos además, que* P *es un cono normal. Entonces:*

  (a) *Existe* $x_0' \in P^* \setminus \{0\}$ *tal que*

$$x_0'(x_0) > 0 \quad y \quad \mathrm{Kernel}\,[\mathrm{sprT}\, I - T^*] = \mathrm{span}\,[x_0']\,.$$

  (b) *Para todo* $x \in P \setminus \{0\}$, *se cumple que* $x_0'(x) > 0$ *y la ecuación*

$$\mathrm{sprT}\, u - Tu = x$$

  carece de soluciones positivas. Por lo tanto, para cada $\lambda \leq \mathrm{spr}T$ *y* $x > 0$, *la ecuación*

$$\lambda\, u - Tu = x$$

  también carece de soluciones positivas.

Demostración del Teorema 3.2: En primer lugar demostraremos que $(C1) \Rightarrow (C2)$. Sea

$$\Psi = (\psi_1, ..., \psi_n) \in \mathrm{int}\, \mathcal{P}_U$$

tal que

$$\mathcal{P}\Psi > \mathcal{C}\Psi.$$

Entonces,

$$\mathcal{P}_i\psi_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\psi_j > c_{ii}\psi_i \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Del teorema de caracterización para una única ecuación, se desprende que el autovalor principal de $\mathcal{P}_i - c_{ii}$, denotado por $\lambda_1(\mathcal{P}_i - c_{ii})$, cumple

$$\lambda_1(\mathcal{P}_i - c_{ii}) > 0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Además,

$$(\mathcal{P}_i - c_{ii})^{-1} : F \to F$$

es compacto y fuertemente positivo para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

A continuación, consideraremos la función

$$f := \mathcal{P}\Psi - \mathcal{C}\Psi.$$

Por hipótesis, tenemos que $f > 0$. Además,

$$\psi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\mathcal{P}_i - \; c_{ii})^{-1}(c_{ij}\psi_j) + (\mathcal{P}_i - \; c_{ii})^{-1} f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.11}$$

Como $f > 0$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$f_n > 0.$$

En caso contrario, podemos renombrar todas las variables con objeto de que ocurra así. Sustituyendo la última ecuación de (3.11) en las anteriores y reorganizando términos se obtiene

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{T}_{ij}^1 \psi_j + \mathcal{K}_{ii}^1 f_i + \mathcal{K}_{in}^1 f_n, \qquad 1 \leq i \leq n-1, \tag{3.12}$$

para unos ciertos operadores compactos y fuertemente positivos,

$$\mathcal{T}_{ij}^1 : F \to F, \qquad \mathcal{K}_{ij}^1 : F \to F,$$

determinados por $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$, cuya expresión explícita es irrelevante en la demostración del teorema.

Observemos que (3.12) puede reescribirse bajo la forma

$$\psi_i = \mathcal{T}_{ii}^1 \psi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} \mathcal{T}_{ij}^1 \psi_j + \mathcal{K}_{ii}^1 f_i + \mathcal{K}_{in}^1 f_n, \qquad 1 \leq i \leq n-1. \tag{3.13}$$

Como $f_i \geq 0$ y $\psi_i > 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, y $f_n > 0$, (3.13) tiene la forma

$$\psi_i = \mathcal{T}_{ii}^1 \psi_i + p_i^1$$

para algún $p_i^1 \in \operatorname{int} \mathcal{P}_E,\ i \in \{1, ..., n-1\}$. Luego, como $\psi_i \in \operatorname{int} \mathcal{P}_E$, gracias al Teorema 3.3 (vi)(b),

$$\operatorname{spr} \mathcal{T}_{ii}^1 < 1, \qquad 1 \leq i \leq n-1.$$

Por consiguiente, por el Teorema 3.3 (iv), obtenemos

$$(I_F - \mathcal{T}_{ii}^1)^{-1} : F \to F, \qquad i \in \{1, ..., n-1\}$$

son operadores compactos fuertemente positivos, donde I_F designa a la identidad de F. Por lo tanto, de (3.13) se deduce

$$\psi_i = (I_F - \mathcal{T}_{ii}^1)^{-1} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \mathcal{T}_{ij}^1 \psi_j + \mathcal{K}_{ii}^1 f_i + \mathcal{K}_{in}^1 f_n \right), \qquad 1 \leq i \leq n-1. \quad (3.14)$$

Supongamos que $n = 2$. Entonces, de la segunda ecuación de (3.11), se infiere

$$\psi_2 = (\mathcal{P}_2 - \ c_{22})^{-1}(c_{21}\psi_1) + (\mathcal{P}_2 - \ c_{22})^{-1} f_2. \quad (3.15)$$

Por lo tanto, sustituyendo en la primera ecuación de (3.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (\mathcal{P}_1 - c_{11})^{-1} (c_{12}\psi_2 + f_1) \\ &= (\mathcal{P}_1 - c_{11})^{-1} \big(c_{12}(\mathcal{P}_2 - \ c_{22})^{-1}(c_{21}\psi_1)\big) \\ &\quad + (\mathcal{P}_1 - c_{11})^{-1} \big(c_{12}(\mathcal{P}_2 - \ c_{22})^{-1} f_2\big) + (\mathcal{P}_1 - c_{11})^{-1} f_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Con las notaciones utilizadas en (3.12),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{11}^1 &= (\mathcal{P}_1 - c_{11})^{-1}(c_{12}(\mathcal{P}_2 - \ c_{22})^{-1}(c_{21} \cdot)) \\ \mathcal{K}_{11}^1 &= (\mathcal{P}_1 - c_{11})^{-1} \\ \mathcal{K}_{12}^1 &= (\mathcal{P}_1 - c_{11})^{-1} \big(c_{12}(\mathcal{P}_2 - \ c_{22})^{-1} \cdot\big) \end{aligned}$$

la primera ecuación de (3.14) queda escrita en la forma

$$\psi_1 = \left(I_F - \mathcal{T}_{11}^1\right)^{-1} \mathcal{K}_{11}^1 f_1 + \left(I_F - \mathcal{T}_{11}^1\right)^{-1} \mathcal{K}_{12}^1 f_2, \quad (3.17)$$

que nos determina unívocamente ψ_1 en términos de $f = (f_1, f_2)$. Sustituyendo (3.17) en (3.15), obtenemos ψ_2 en función de f_1 y f_2. En resumen, existen cuatro operadores $\mathcal{K}_{ij} : F \to F$ compactos y fuertemente positivos tales que

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \mathcal{K}_{11} f_1 + \mathcal{K}_{12} f_2, \\ \psi_2 &= \mathcal{K}_{21} f_1 + \mathcal{K}_{22} f_2. \end{aligned}$$

De hecho, como en dimensión $n = 2$

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathcal{K}_{11} f_1 + \mathcal{K}_{12} f_2 \\ u_2 &= \mathcal{K}_{21} f_1 + \mathcal{K}_{22} f_2 \end{aligned}$$

nos proporciona la única solución de $\mathcal{P}u = \mathcal{C}u + f$ en U para cada $f \in V$, el resultado queda demostrado en este caso.

Supongamos ahora que $n > 2$ y fijemos $r \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Demostraremos que existen n operadores compactos fuertemente positivos

$$\mathcal{K}_{rj} : F \to F, \quad j \in \{1, ..., n\},$$

tales que

$$\psi_r = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{K}_{rj} f_j. \tag{3.18}$$

Para ello, consideremos un $r_1 \in \{1, ..., n-1\} \setminus \{r\}$ arbitrario y definimos

$$I_1 := \{1, ..., n-1\} \setminus \{r_1\}.$$

Entonces, sustituyendo la r_1-ésima ecuación de (3.14) en las restantes y reorganizando términos se obtiene

$$\psi_i = \sum_{j \in I_1} \mathcal{T}^2_{ij} \psi_j + \mathcal{K}^2_{ii} f_i + \mathcal{K}^2_{ir_1} f_{r_1} + \mathcal{K}^2_{in} f_n, \qquad i \in I_1, \tag{3.19}$$

para algunos operadores compactos fuertemente positivos

$$\mathcal{T}^2_{ij},\ \mathcal{K}^2_{ij} \ : \ F \to F,$$

determinados por $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$. Todas las ecuaciones de (3.19) pueden expresarse bajo la forma

$$\psi_i = \mathcal{T}^2_{ii} \psi_i + p^2_i, \quad i \in I_1.$$

para algún $p^2_i \in \operatorname{int} \mathcal{P}_E$, $i \in I_1$. Como $\psi_i \in \operatorname{int} \mathcal{P}_E$, el Teorema 3.3 (vi)(b) nos asegura que

$$\operatorname{spr} \mathcal{T}^2_{ii} < 1, \qquad i \in I_1.$$

Por ello, gracias al Teorema 3.3 (iv), se obtiene

$$(\mathcal{I}_F - \mathcal{T}^2_{ii})^{-1} : \ F \to F, \qquad i \in I_1,$$

son operadores compactos fuertemente positivos. Por tanto, de (3.19) se deduce que, para cada $i \in I_1$,

$$\psi_i = \left(\mathcal{I}_F - \mathcal{T}^2_{ii}\right)^{-1} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, r_1}}^{n-1} \mathcal{T}^2_{ij} \psi_j + \mathcal{K}^2_{ii} f_i + \mathcal{K}^2_{ir_1} f_{r_1} + \mathcal{K}^2_{in} f_n \right). \tag{3.20}$$

Si I_1 tiene un único elemento, la prueba ha terminado. Supongamos que tiene al menos dos y elijamos $r_2 \in I_1 \setminus \{r\}$ arbitrario. Sea $I_2 := I_1 \setminus \{r_2\}$. Sustituyendo la r_2-ésima ecuación de (3.20) en las restantes y reorganizando términos se obtiene

$$\psi_i = \sum_{j \in I_2} \mathcal{T}_{ij}^3 \psi_j + \mathcal{K}_{ii}^3 f_i + \mathcal{K}_{ir_1}^3 f_{r_1} + \mathcal{K}_{ir_2}^3 f_{r_2} + \mathcal{K}_{in}^3 f_n, \qquad i \in I_2, \tag{3.21}$$

para algunos operadores compactos fuertemente positivos

$$\mathcal{T}_{ij}^3,\ \mathcal{K}_{ij}^3\ :\ F \to F,$$

determinados por $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$, cuya expresión explícita es irrelevante para la prueba. Este argumento recursivo nos conduce a (3.18) en un número finito de pasos.

Finalmente, sustituyendo (3.18), para $1 \leq r \leq n-1$, en la última ecuación de (3.11) se comprueba fácilmente que (3.18) también se cumple para $r = n$. Resumiendo, existen n^2 operadores compactos y fuertemente positivos $\mathcal{K}_{ij} : F \to F$ tales que

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{K}_{ij} f_j, \qquad i \in \{1, ..., n\}. \tag{3.22}$$

Como todos los operadores involucrados en el proceso anterior están bien definidos, el esquema anterior, simultneamente, también nos demuestra que

$$u := \mathcal{K} f, \qquad \mathcal{K} := (\mathcal{K}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n},$$

de hecho proporciona la única solución de

$$\mathcal{P} u = \mathcal{C} u + f.$$

Concluye así la demostración de la implicación (C1) $\Rightarrow$ (C2).

Obviamente, (C2) $\Rightarrow$ (C3) $\Rightarrow$ (C4). La implicación (C3) $\Rightarrow$ (C5) se obtiene fácilmente aplicando el Teorema 3.3 al operador compacto

$$(\mathcal{P} - \mathcal{C})^{-1} : V \to V,$$

que nos asegura la existencia del autovalor

$$\sigma := \sigma(\mathcal{P} - \mathcal{C}) = \frac{1}{\operatorname{spr}(\mathcal{P} - \mathcal{C})^{-1}}.$$

Comprobemos ahora que (C5) $\Rightarrow$ (C1). Sean $\sigma > 0$ y $\Phi \in \operatorname{int} \mathcal{P}_U$ tales que

$$\mathcal{P}\Phi = \mathcal{C}\Phi + \sigma\Phi.$$

Entonces, $\mathcal{P}\Phi > \mathcal{C}\Phi$ y se cumple (C1).

Para concluir la demostración del teorema probaremos que (C4) $\Rightarrow$ (C1). Por suponer que el problema (3.5) cumple el principio del máximo, $u = 0$ es la única solución de

$$\mathcal{P} u = \mathcal{C} u.$$

Por lo tanto, el teorema de Banach de la aplicación abierta nos asegura que

$$\mathcal{P} - \mathcal{C} : U \to V$$

es un isomorfismo topológico, por ser un operador de Fredholm de índice cero.

Fijemos $p \in \operatorname{int} \mathcal{P}_U$. Por cumplirse el principio del máximo para (3.5), se observa que

$$\Psi \in \mathcal{P}_U \setminus \{0\} \qquad \text{donde} \qquad \Psi := (\mathcal{P} - \mathcal{C})^{-1} p.$$

Sea $\lambda > 0$ suficientemente grande para que los operadores $\mathcal{P}_k - c_{kk} + \lambda$ cumplan el principio del máximo fuerte para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Sabemos que es suficiente considerar

$$\lambda = \text{máx}\left\{1, 1 + \max_{1 \le k \le n} \{-\sigma(\mathcal{P}_k - c_{kk})\}\right\} > -\sigma(\mathcal{P}_k - c_{kk}), \qquad 1 \le k \le n.$$

Por construcción,

$$(\mathcal{P}_k - c_{kk} + \lambda)\psi_k = \lambda\psi_k + p_k, \qquad 1 \le k \le n.$$

De donde se deduce que

$$\psi_k = (\mathcal{P}_k - c_{kk} + \lambda)^{-1}(\lambda\psi_k + p_k), \qquad 1 \le k \le n.$$

y, por tanto,

$$\psi_k \in \operatorname{int} \mathcal{P}_F, \qquad 1 \le k \le n.$$

Como, por construcción, se cumple

$$\mathcal{P}\Psi = \mathcal{C}\Psi + p > \mathcal{C}\Psi,$$

esta función Ψ nos proporciona la supersolución buscada. Queda así concluida la demostración del teorema. $\square$

La condición $c_{ij} > 0$ para cada $i \neq j$ y $(x,t) \in \mathcal{Q}_T$ no es imprescindible para que se cumpla el Teorema 3.2. Alguna de las funciones coeficiente no diagonales de la matriz de acople $\mathcal{C}$ pueden anularse y, sin embargo, mantenerse la validez del Teorema 3.2.

3.3. Propiedades fundamentales del autovalor principal

El siguiente resultado demuestra la existencia y unicidad del autovalor principal para el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} \mathcal{P}\Phi = \mathcal{C}\Phi + \lambda\Phi, \\ \Phi \in \operatorname{int} \mathcal{P}_U. \end{cases} \tag{3.23}$$

Teorema 3.4 (Autovalor y autofunción principales) *El problema de autovalores* (3.23) *admite un único autovalor real asociado a una autofunción positiva, denotado por $\lambda_1(\mathcal{P}-\mathcal{C})$ y denominado autovalor principal del problema. Es un autovalor algebraicamente simple. Además, cualquier autofunción positiva asociada a él, Φ, debe cumplir $\Phi \in \operatorname{int}\mathcal{P}_U$.*

Demostración: Sea (λ_i, ψ_i) un par spectral principal asociado al operador parabólico $\mathcal{P}_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, y consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$ suficientemente grande para que

$$(\mathcal{P}_i + \lambda)\psi_i = (\lambda_i + \lambda)\psi_i > \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\psi_j, \qquad 1 \le i \le n.$$

Sea $\Psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$. Entonces

$$\Psi \in \operatorname{int}\mathcal{P}_U \qquad \text{y} \qquad (\mathcal{P} + \lambda)\Psi > \mathcal{C}\Psi.$$

El Teorema 3.2 asegura que

$$(\mathcal{P} + \lambda - \mathcal{C})^{-1}$$

es compacto y fuertemente positivo. Finalmente, el Teorema 3.3 concluye la prueba. □

Teorema 3.5 (Monotonía respecto de $\mathcal{C}$) *Sean*

$$\mathcal{C}_1 = \left(c_{ij}^1\right)_{i,j=1,\dots,n}, \qquad \mathcal{C}_2 = \left(c_{ij}^2\right)_{i,j=1,\dots,n},$$

dos matrices cooperativas de orden n que cumplen $\mathcal{C}_1 > \mathcal{C}_2$ en el sentido que

$$c_{ij}^1 \ge c_{ij}^2 \qquad \textit{para todo } \; i,j \in \{1, ..., n\}$$

y $c_{ij}^1 \ne c_{ij}^2$ para algún $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$. Entonces

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1) < \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_2). \tag{3.24}$$

Demostración: Sea $\Phi_1 \in \operatorname{int}\mathcal{P}_U$ una autofunción principal asociada al autovalor $\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1)$. Entonces

$$(\mathcal{P} - \mathcal{C}_2 - \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1)I_n)\,\Phi_1 = (\mathcal{P} - \mathcal{C}_1 - \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1)I_n)\,\Phi_1 + (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)\,\Phi_1,$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. Por lo tanto,

$$(\mathcal{P} - \mathcal{C}_2 - \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1)I_n)\,\Phi_1 = (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)\,\Phi_1 > 0.$$

Luego, Φ_1 es una supersolución estricta positiva del operador

$$\mathcal{P} - \mathcal{C}_2 - \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1)I_n.$$

Consecuentemente, gracias al Teorema 3.2, se desprende que

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_2 - \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1)I_n) > 0.$$

Ya que

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_2 - \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1)I_n) = \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_2) - \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_1),$$

la edemostración queda completa. $\square$

A continuación, dada una función $f : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ se define

$$f_M(t) := \sup_{\bar{\Omega}} f(\cdot, t), \qquad f_L(t) := \inf_{\bar{\Omega}} f(\cdot, t).$$

Análogamente, para cualquier matriz $\mathcal{C} = (c_{ij})_{i,j}$ de coeficientes continuos, escribiremos

$$\mathcal{C}_M(t) := ((c_{ij})_M(t))_{i,j}, \qquad \mathcal{C}_L(t) := ((c_{ij})_L(t))_{i,j}.$$

El siguiente resultado se deduce de los Teoremas 3.2, 3.4 y 3.5.

Corolario 3.6 *Supongamos que*

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_M(t)) > 0. \tag{3.25}$$

Entonces el problema (3.4) *cumple el principio del máximo fuerte. Mientras que, cuando*

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_L(t)) \leq 0, \tag{3.26}$$

el problema (3.4) *no satisface el principio del máximo.*

Demostración: A partir del Teorema 3.5 se desprende que

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_M(t)) \leq \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}(x,t)) \leq \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_L(t)).$$

Por tanto, (3.25) implica

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}(x,t)) > 0$$

y, por el Teorema 3.2, se satisface el principio del máximo fuerte.

Análogamente, cuando $\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}_L(t)) \leq 0$, entonces $\lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}(x,t)) \leq 0$ y no se puede cumplir el principio del máximo. $\square$

3.4. El caso $\mathcal{P}_1(x,t;D) = \cdots = \mathcal{P}_n(x,t;D)$

A lo largo de esta sección supondremos

$$\mathcal{P}_1(x,t;D) = \cdots = \mathcal{P}_n(x,t;D).$$

El siguiente resultado caracteriza la validez del principio del máximo fuerte para el problema (3.4) en el caso especial en que la matriz de acople, $\mathcal{C}$, sea independiente de la variable espacial, x. Cuando esto no ocurra, habrá que recurrir al Corolario 3.6 para obtener algunas condiciones necesarias y/o suficientes.

Teorema 3.7 *Supongamos que $C(x,t) \equiv C(t)$. Entonces el problema* (3.4) *satisface el principio del máximo fuerte si y sólo si*

$$\lambda_1(\mathcal{P}_1) > \frac{1}{T}\log \mu_1(\mathcal{C}) \tag{3.27}$$

donde $\lambda_1(\mathcal{P}_1)$ designa al autovalor principal del operador parabólico

$$\mathcal{P}_1 = \cdots = \mathcal{P}_n,$$

T *es el periodo y $\mu_1(\mathcal{C})$ es el autovalor principal del operador de monodromía del sistema*

$$\alpha'(t) = \mathcal{C}(t)\alpha(t), \tag{3.28}$$

cuya existencia está garantizada por el Teorema 4.7 de Krasnoselskij [24].

Demostración: Sea

$$\lambda_1 := \lambda_1(\mathcal{P} - \mathcal{C}(t))$$

el autovalor principal de (3.23). Gracias al Teorema 3.2, es suficiente comprobar que se cumple la identidad

$$\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{P}_1) - \frac{1}{T}\log \mu_1(\mathcal{C}). \tag{3.29}$$

Sea $\varphi \in \operatorname{int} \mathcal{P}_E$ una autofunción principal asociada al autovalor $\lambda_1(\mathcal{P}_1)$; es única salvo constantes multiplicativas. Con el fin de demostrar (3.29), buscaremos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)), \quad \alpha_i(t) > 0, \quad \alpha_i(t+T) = \alpha_i(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., n,$$

tales que la n-upla

$$\Phi(x,t) := (\alpha_1(t)\varphi(x,t), ..., \alpha_n(t)\varphi(x,t)) \tag{3.30}$$

verifique

$$\mathcal{P}\Phi = \mathcal{C}(t)\Phi + \lambda\Phi. \tag{3.31}$$

La función $\Phi(x,t)$ resuelve (3.31) si y sólo si, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x,t)\alpha'(t) + \lambda_1(\mathcal{P}_1)\varphi(x,t)\alpha(t) = \varphi(x,t)\mathcal{C}(t)\alpha(t) + \lambda\varphi(x,t)\alpha(t),$$

que puede re-escribirse equivalentemente en la forma

$$\alpha'(t) = (\mathcal{C}(t) + \lambda - \lambda_1(\mathcal{P}_1))\,\alpha(t). \tag{3.32}$$

Sea $W(t)$ el operador que envía cada punto $x \in \mathbb{R}^N$ en el valor, al cabo de tiempo t, de la única solución, $\alpha(t;x)$, de (3.28) tal que $\alpha(0) = x$; es decir, $W(t)x = \alpha(t;x)$. En la literatura especializada (ver, por ejemplo, Krasnoselskij [24]), $W(t)$ también recibe la denominación de *operador traslación a lo largo de las trayectorias de* (3.28), o *aplicación de Poincaré* del sistema (3.28); es el *operador solución*. Evidentemente, $W(t)$ es una *matrix fundamental de soluciones* del sistema (3.28) con $W(0) = I$, y la matriz

$$V(t) := e^{(\lambda-\lambda_1(\mathcal{P}_1))t}W(t)$$

es el operador solución de (3.32). Por consiguiente,

$$V(T) := e^{(\lambda-\lambda_1(\mathcal{P}_1))T}W(T) \tag{3.33}$$

es el *operador de monodromía* de (3.32).

El sistema (3.32) admite alguna solución positiva y T-periódica si y sólo si existe algún $x > 0$ tal que $V(T)x = x$. Gracias a (3.33), $V(T)x = x$ equivale a la identidad

$$W(T)x = e^{-(\lambda-\lambda_1(\mathcal{P}_1))T}x.$$

Consecuentemente, por la unicidad del autovalor principal, x debe ser el autovector principal de $W(T)$. Es decir,

$$\mu_1(\mathcal{C}) = e^{-(\lambda-\lambda_1(\mathcal{P}_1))\mathrm{T}},$$

de donde se infiere

$$\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{P}_1) - \frac{1}{T}\log\mu_1(\mathcal{C})$$

es el autovalor principal de (3.23), lo que concluye la demostración. □

Estimar el autovalor principal del operador de monodromía de (3.28) no es, en general, una tarea fácil. Sin embargo, en el caso especial en que

$$\mathcal{C}(t)\int_0^t \mathcal{C}(s)\,ds = \int_0^t \mathcal{C}(s)\,ds\,\mathcal{C}(t) \quad \text{para todo } \ t \in \mathbb{R}, \tag{3.34}$$

es conocido que

$$W(t) = \exp\left(\int_0^t \mathcal{C}\right), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.35}$$

de donde se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 3.8 *Supongamos que se cumple* (3.34) *y que* $\mathcal{C}(x,t) \equiv \mathcal{C}(t)$. *Sea* $\lambda_1(\mathcal{P}_1)$ *el autovalor principal del operador parabólico* $\mathcal{P}_1$ *y consideremos la matriz* $\mathcal{M}$ *definida por*

$$\mathcal{M} := \lambda_1(\mathcal{P}_1)I - \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{C}. \tag{3.36}$$

Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) *El problema* (3.4) *satisface el principio del máximo fuerte.*

(ii) *Se cumple que*

$$\lambda_1(\mathcal{P}_1) > \operatorname{spr}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{C}\right)$$

donde spr$A$ *denota el radio espectral de una matriz* A.

(iii) *La matriz* $\mathcal{M}^{-1}$ *define un endomorfismo fuertemente positivo de* $\mathbb{R}^n$.

(iv) *Los menores principales de la matriz* $\mathcal{M}$ *tienen determinante positivo.*

(v) *Los* n *primeros menores de* $\mathcal{M}$ *tienen determinante positivo.*

Un menor principal es aquel obtenido eliminando filas y columnas con el mismo orden de la matriz original. Los n primeros menores de $\mathcal{M}$ son

$$\mathcal{M}_1 := \lambda_1(\mathcal{P}_1) - \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} c_{11}$$

y, para cada $2 \leq j \leq n$,

$$\mathcal{M}_j := \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathcal{P}_1) - \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} c_{11} & \cdots & -\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} c_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} c_{j1} & \cdots & \lambda_1(\mathcal{P}_1) - \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} c_{jj} \end{pmatrix}.$$

Demostración: Las matrices cuyos coeficientes no diagonales son no positivos suelen denominarse M–matrices. La matriz $\mathcal{M}$ definida en (3.36) lo es. En el texto clásico de Gantmacher [19] se encuentran recogidas algunas de las principales propiedades de las M–matrices. De ellas se deducen fácilmente la equivalencia entre (ii), (iv) y (v). Las implicaciones (iii) $\Rightarrow$ (iv) y (iv) $\Rightarrow$ (iii) fueran demostradas por D. G. Figueidiero y E. Mittidieri en [18] y por J. López-Gómez y M. Molina-Meyer en [32], respectivamente. Por tanto, es suficiente demostrar que (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Por suponer (3.34), el operador traslación a lo largo de las trayectorias de (3.28) viene dado por (3.35). Por tanto, gracias al teorema de la aplicación espectral (cf. Teorema 2.4.2 de [34]),

$$\mu_1(\mathcal{C}) = \operatorname{spr}\,(W(T)) = \exp\left(\operatorname{spr}\int_0^T \mathcal{C}\right)$$

y, por ello, (3.29) nos proporciona la identidad

$$\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{P}_1) - \frac{1}{T}\,\mathrm{spr}\int_0^T \mathcal{C}.$$

El Teorema 3.2 asegura que el problema (3.36) satisface el principio del máximo fuerte si y sólo si $\lambda_1 > 0$, quedando concluida la prueba. □

3.5. Un problema de autovalores con peso

En esta sección estudiaremos la existencia de números reales $\mu > 0$ para los que el problema de valores de frontera con matriz peso $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{P}\Phi = \mu\mathcal{C}\Phi, \quad \Phi \in \operatorname{int}\mathcal{P}_U, \tag{3.37}$$

tiene alguna solución. A tales valores de μ se los denomina auvalores principales de (3.37). A las autofunciones asociadas se las califica de principales. El único resultado conocido acerca de la existencia de autovalores principales en el contexto del problema periódico parabólico es el teorema principal de A. Beltramo y P. Hess en [5] obtenido para el caso de una única ecuación. El siguiente teorema proporciona una generalización del de A. Beltramo y P. Hess.

Teorema 3.9 *Cualquier autovalor principal* μ *del problema* (3.37) *es algebraicamente simple, en el sentido que*

$$N[(\mathcal{P} - \mu\,\mathcal{C})^2] = N[\mathcal{P} - \mu\,\mathcal{C}]$$

es unidimensional y la autofunción positiva asociada se encuentra en el interior del cono positivo $\mathcal{P}_U$*. Además, los autovalores principales son aislados.*

Si, además, se supone que

$$\mathcal{P}_1 = \cdots = \mathcal{P}_n \tag{3.38}$$

con

$$\lambda_1(\mathcal{P}_1) > 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}\int_0^T (c_{ii})_L > 0, \tag{3.39}$$

entonces el problema (3.37) *tiene al menos un autovalor principal.*

Demostración: Para cada $\mu > 0$ sea $\lambda_1(\mu)$ el autovalor principal de

$$\mathcal{P}\Phi = \mu\,\mathcal{C}\Phi + \lambda_1(\mu)\Phi, \quad \Phi \in \operatorname{int}\mathcal{P}_U,$$

cuya existencia y unicidad están garantizadas por el Teorema 3.4. Como μ es autovalor principal de (3.37) si y sólo si, $\lambda_1(\mu) = 0$ y, gracias, por ejemplo, al Lema 2.1.1 de [27], la aplicación

$$\mu \to \lambda_1(\mu)$$

es analítica, el conjunto de autovalores principales del problema (3.37) es efectivamente discreto, a menos que $\lambda_1(\mu) \equiv 0$.

Supongamos que se cumplen (3.38) y (3.39) y denotemos por φ a la autofunción principal de $\mathcal{P}_1$. Entonces, llamando,

$$\Psi = (\varphi, \dots, \varphi),$$

se cumple

$$\mathcal{P}\Psi = \lambda_1(\mathcal{P}_1)\Psi > \mu\, \mathcal{C}(x,t)\Psi,$$

para μ suficientemente pequeño. Luego, por el Teorema 3.2, $\lambda_1(\mu) > 0$ para tales valores de μ. Además, del Teorema 3.5 se infiere que, para cada $t \in [0, T]$,

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mu\, \mathcal{C}(\cdot, t)) \leq \lambda_1(\mathcal{P} - \mu\, \mathcal{C}_L(t)).$$

Por tanto, demostrando que

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mu\, \mathcal{C}_L(t)) = 0$$

para algún $\mu > 0$, un argumento de continuidad concluye la prueba del teorema, puesto que $\lambda_1(\mathcal{P}) > 0$. En efecto, gracias a (3.29), sabemos que

$$\lambda_1(\mathcal{P} - \mu\, \mathcal{C}_L) = \lambda_1(\mathcal{P}_1) - \frac{1}{T} \log \mu_1(\mu\, \mathcal{C}_L),$$

siendo $\mu_1 := \mu_1(\mu\, \mathcal{C}_L)$ el autovalor principal del operador de monodromía del sistema

$$\alpha'(t) = \mu\, \mathcal{C}_L(t)\, \alpha(t).$$

De acuerdo con M. A. Krasnoselskij [24, Theorem 4.7], los restantes autovalores μ_i, $i = 1, ..., n$, satisfacen

$$|\mu_i| < \mu_1.$$

Consecuentemente, la fórmula de Liouville nos conduce a la desigualdad

$$\det W(T) = e^{\int_0^T \operatorname{traza}(\mu \mathcal{C}_L)} = e^{\mu \int_0^T \sum_{j=1}^n (c_{ii})_L} \leq [\mu_1(\mu\, \mathcal{C}_L)]^n.$$

Por ello, gracias a (3.39) se obtiene

$$\lim_{\mu \to \infty} \mu_1(\mu\, \mathcal{C}_L) = \infty.$$

Luego

$$\lim_{\mu \to \infty} \lambda_1(\mathcal{P} - \mu\, \mathcal{C}_L) = -\infty,$$

concluyendo así la demostración del teorema. $\square$

Bibliografía

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I, Comm. Pure Appl. Maths. **12** (1959), 623–727.

[2] H. Amann, *On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., Vol. 21 (1971), 125–146.

[3] H. Amann, *Maximum principles and principal eigenvalues*, in "10 Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology"(J. Ferrera, J. López-Gómez and F. R. Ruiz del Portal, eds.), pp 1-60, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[4] G. Arioli, Long term dynamics of a reaction-diffusion system, *J. Diff. Eqns.* **235** (2007), 298–307.

[5] A. Beltramo y P. Hess, On the principal eigenvalue of a periodic-parabolic operator, *Comm. Part. Diff. Eqns.* **9** (1984), 919–941.

[6] H. Brézis, *Analyse Fontionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[7] S. Cano-Casanova and J. López-Gómez, *Properties of the principal eigenvalues of a general class of non-classical mixed boundary value problems*, J. Diff. Eqns., Vol. 178 (2002), 123–211.

[8] A. Casal, J. Eilbeck and J. López-Gómez, *Existence and uniqueness of coexistence states for a predator-prey model with diffusion*, Diff. Int. Eqns., Vol. 7 (1994), 411–439.

[9] C. Cosner and A. Lazer, Stable coexistence states in the Volterra-Lotka competition model with diffusion, *SIAM J. Appl. Math.* **44** (1984), 1112-1132.

[10] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Funct. Anal., Vol. 8 (1971), 321–340.

[11] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation from simple eigenvalues and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 52 (1973), 161–180.

[12] R. H. Cui, P. Li, J. P. Shi and Y. W. Wang, *Existence, uniqueness and stability of positive solutions for a class of semilinear elliptic systems*, Top. meth. Nonl. Anal., in press.

[13] E. N. Dancer, Bifurcation from simple eigenvalues and eigenvalues of geometric multiplicity one, *Bull. London Math. Soc.* **34** (2002), 533–538.

[14] E. N. Dancer, J. López-Gómez, R. Ortega, On the spectrum of some linear noncooperative elliptic systems with radial symmetry, *Diff. Int. Eqns.* **8** (1995), 515–523.

[15] D. Daners and P. Koch, "Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications", Pitman Research Notes in Mathematics Series, 279. Longman Scientific & Technical, Harlow; New York, 1992.

[16] K. Deimling, "Nonlinear Functional Analysis ", Springer, 1985.

[17] J. Esquinas and J. López-Gómez, Optimal multiplicity in local birfurcation theory, I: Generalized generic eigenvalues, *J. Diff. Eqns.* **71** (1988), 72–92.

[18] D. G. Figueiredo y E. Mittidieri, Maximum principles for linear elliptic systems, *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste* **22** (1992), 36–66.

[19] F. R. Gantmacher Theorie des matrices, II. Dunod, Paris 1966

[20] D. Henry, "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Lecture Notes in Mathematics 840, Springer, Berlin, 1981.

[21] P. Hess, On the eigenavlues problem for weakly coupled elliptic systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **81** (1983), 151–159.

[22] P. Hess, "Periodic-Parabolic boundary value problems and positivity, "Pitman Research Notes in Mathematics 247, Essex, 1991.

[23] W. E. Kastenberg and P. L. Chambré, On the stability of nonlinear space-dependent reactor kinectics, *Nucl. Sci. Engrg.* **31** (1968), 67–79.

[24] M. A. Krasnoselskij, *Translations Along Trajectories of Differential Equations*, Mathematical Monographs A.M.S, Providence, 1968.

[25] M. G. Krein and M. A. Rutman, Linear operators living invariant a cone in a Banach space, in Russian *Usp. Mat. Nauk.* (NS) **3** (1948), 3–95.

[26] L. Li and A. G. Ramm, A singular perturbation result and its applications to mathematical ecology, *Proc. Amer. Math. Soc.* **111** (1991), 1043–1050.

[27] J. López-Gómez, *Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics 426, Boca Raton, Florida, 2001.

[28] J. López-Gómez, The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems, *J. Diff. Eqns.* **127** (1996), 263–294.

[29] J. López-Gómez, A bridge between Operator Theory and Mathematical Biology, *Fields Inst. Comms.* **25** (2000), 383–397.

[30] J. López-Gómez, The steady-states of a non-cooperative model of nuclear reactors, *J. Diff. Eqns.* **246** (2009), 358-372.

[31] J. López-Gómez, *Linear Second Order Elliptic Operators*, World Scientific Publishers, Singapore, 2013.

[32] J. López-Gómez and M. Molina-Meyer, The maximum principle for cooperative weakly coupled elliptic systems and some applications, *Diff. Int. Eqns.* **7** (1994), 383–398.

[33] J. López-Gómez and M. Molina-Meyer, Bounded components of positive solutions of abstract fixed point equations: mushrooms, loops and isolas, *J. Diff. Eqns.* **209** (2005), 416–441.

[34] J. López-Gómez and C. Mora-Corral, *Algebraic Multiplicity of Eigenvalues of Linear Operators*, Operator Theory: Advances and Applications Vol. 177, Birkhäuser, Springer, Basel-Boston-Berlin, 2007.

[35] J. López-Gómez and R. M. Pardo, *Existence and uniqueness of coexistence states for the predator-prey model with diffusion: the scalar case*, Diff. Int. Eqns., Vol. 6 (1993), 1025–1031.

[36] J. López-Gómez and R. M. Pardo, Invertibility of linear noncooperative elliptic systems, *Nonl. Anal.* **31** (1998), 687–699.

[37] A. Lunardi, "Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems", Birkhäuser, Basel, 1995.

[38] M. Molina Meyer, *Existence and uniqueness of coexistence states for some nonlinear elliptic systems*, Nonl. Anal. T.M.A., Vol. 25 (1995), 279-296.

[39] M. Molina Meyer, *Global attractivity and singular perturbation for a class of nonlinear cooperative systems*, J. Diff. Eqns., Vol. 128 (1996), 347-378.

[40] M. Molina Meyer, *Uniqueness and existence of positive solutions for weakly coupled general systems*, Nonl. Anal. T.M.A., Vol. 30 (1997), 5375-5380.

[41] P. de Mottoni and A. Tesei, Asymptotic stability for a system of quasilinear parabolic equations, *Appl. Ann.* **9** (1979), 7–21.

[42] L. Nirenberg, *A strong maximum principle for parabolic equations*, Comm. Pure and Appl. Maths., Vol. 6 (1953), 167–177.

[43] R. Peng, D. Wei and G. Yang, Asymptotic behaviour, uniqueness and stability of coexistence states of a non-cooperative reaction diffusion model of nuclear reactors, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **140A** (2010), 189–201.

[44] P. H. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.* **7** (1971), 487–513.

[45] F. Rothe, *Global solutions of R-D systems*, Springer, 1984.

[46] D. Sattinger, "Topics in Stability and Bifurcation Theory", Lectures Notes in Mathematics 309, Springer, Berlin, 1973.

[47] J. Zhou and J. Shi, *Uniqueness of the positive solution for a non-cooperative model of nuclear reactors*, Appl. Math. Letters, in press.

[48] W. Zhou, Uniqueness and asymptotic behavior of coexistence states for a non-cooperative model of nuclear reactors, *Nonl. Anal. TMA* **72** (2010), 2816–2820.

Índice alfabético