

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT20

Teorías de campos conformes y gravedad holográfica
Conformal Field Theories and Holographic Gravity

Supervisor: Francesco Aprile

Abel Alía Bernal

Grado en Física

Curso académico 2023-2024

Convocatoria ordinaria

Calificación: 9,4

Un estudio de la entropía de entrelazamiento en teorías de campos conformes

A study of the entanglement entropy in conformal field theories

Resumen:

En este trabajo estudiamos la entropía de entrelazamiento en una Teoría Cuántica de Campos, con énfasis particular en Teorías de Campos Conformes. Tras revisar algunos conceptos generales, discutimos la entropía de entrelazamiento entre campos cuánticos que viven en dos regiones del espacio-tiempo separadas por una superficie de entrelazamiento esférica, y mostramos cómo el cálculo de la entropía de entrelazamiento está relacionado con el cálculo de funciones de partición. El uso de transformaciones conformes es clave, y presentamos resultados concretos de la literatura para dos clases de CFT's: una teoría escalar libre en tres dimensiones y teorías holográficas en diversas dimensiones espacio-temporales. Los cálculos para una teoría escalar libre pueden considerarse como cálculos en teoría cuántica de campos, pero el caso de CFT's holográficas es más avanzado y, para entenderlo, primero damos una introducción axiomática a la correspondencia AdS/CFT. Luego revisamos cómo la entropía de entrelazamiento está relacionada con la entropía de un agujero negro en AdS. En todos los casos comentamos sobre la ley de área que sigue la entropía de entrelazamiento con respecto a la superficie de entrelazamiento, así como las contribuciones independientes de los reguladores de corto alcance (*cut-off*).

Abstract:

In this work we study entanglement entropy in a Quantum Field Theory, with particular emphasis on Conformal Field Theories. After reviewing some general concepts, we discuss entanglement entropy between quantum fields living in two regions of spacetime separated by a spherical entangling surface, and we show how the computation of the entanglement entropy is related to the computation of partition functions. The use of conformal mappings is key, and we present concrete results from the literature for two classes of CFT's: a free scalar theory in three dimensions and holographic theories in diverse spacetime dimensions. The computations for a free scalar can be regarded as a quantum field theory computation, but the case of holographic CFT's is more advanced and to understand it we first give an axiomatic introduction to the AdS/CFT correspondence. Then we review how the entanglement entropy is related to the entropy of a black hole in AdS. In all cases we comment on the area law dependence of the entanglement entropy with respect to the entangling surface, and the cut-off independent contributions.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Entropía de entrelazamiento en Mecánica Cuántica	2
1.2. Entropía de entrelazamiento en Teorías Cuánticas de Campos	3
1.3. Entropía de entrelazamiento en Teorías de Campos Conformes	7
1.4. Objetivos y metodología	8
2. Cálculo para un campo escalar libre en CFT	9
2.1. La esfera y $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$	9
2.2. <i>Path integral</i>	10
2.3. Problema de autovalores	11
2.4. Degeneración	12
2.5. Energía libre regularizada	13
2.6. Entropía y discusión de los resultados	13
3. Entropía de entrelazamiento en AdS/CFT	14
3.1. Introducción a la geometría de AdS	14
3.2. Correspondencia AdS/CFT axiomática	15
3.3. Entropía de entrelazamiento a partir de un agujero negro en AdS	16
3.4. Entropía de entrelazamiento holográfica	17
4. Conclusiones	18
A. Replica Trick	20

1. Introducción

A finales del siglo XIX se desarrolló el concepto de **entropía**. Esta era una medida del número de microestados posibles para un macroestado fijo, siendo máxima en el equilibrio termodinámico cuando todos los microestados son igual de probables. Boltzmann llegó a la ecuación para la entropía

$$S = k_B \log \Omega \quad (1)$$

donde k_B es una constante universal y Ω es el número de microestados posibles accesibles para un macroestado dado.

C. Shannon introdujo el concepto de entropía en la teoría de la información, donde la entropía era una medida de la información en promedio contenida en los símbolos utilizados para transmitir un mensaje. En este paradigma, dado un texto, los símbolos siguen una distribución de probabilidad, y los más frecuentes (*i.e.*, *a*, *de*, *la*...) aportan menos información que los menos frecuentes (*i.e.*, *casa* o *gato*). Así, si todos los símbolos son equiprobables, quitar cualquier símbolo del texto afectará de igual manera a la comprensión y a la pérdida de información, y la entropía es máxima. La entropía de Shannon en la teoría de la información puede calcularse como

$$H(X) = - \sum_i p_i(x_i) \log_2 p_i(x_i) \quad (2)$$

donde H es la entropía del mensaje X que contiene símbolos x_i cada uno con probabilidad p_i .

Pese a que este desarrollo sobre la entropía se llevó a cabo en el paradigma clásico, puede apreciarse la estrecha relación de esta cantidad con la incertidumbre de un sistema, concepto fundamental en el marco teórico de la mecánica cuántica. J. von Neumann desarrolló un formalismo de la mecánica cuántica capaz de lidiar con el fenómeno del **entrelazamiento**, detectándolo y cuantificándolo mediante la **entropía de von Neumann** (o de entrelazamiento)

$$S_{VN} = -\text{tr}(\rho_V \log \rho_V), \quad (3)$$

una generalización de la entropía de Shannon (2) al paradigma cuántico. Este fenómeno resulta ser bastante útil en ámbitos como la criptografía y computación cuánticas, así como para propósitos más teóricos, como conocer la estructura del vacío, la distribución de información en sistemas cuánticos o la mejor comprensión de la gravedad cuántica cuando entra en juego la correspondencia AdS/CFT.

Este trabajo cuenta con un *background* en cursos de Mecánica Cuántica, campos cuánticos, Relatividad General y gravitación y física estadística. Empezaremos con una sección introductoria donde realizaremos un recorrido conceptual de la evolución del formalismo de la matriz densidad desde la mecánica cuántica hasta su generalización a teorías cuánticas de campos (QFT), pasando por la *path integral*. Finalmente, realizaremos cálculos concretos de la entropía de entrelazamiento en teorías de campos conformes (CFT) y teorías de campos conformes holográficas.

1.1. Entropía de entrelazamiento en Mecánica Cuántica

Recordemos brevemente los conceptos básicos de la entropía de entrelazamiento en Mecánica cuántica (**QM**, por sus siglas en inglés). Matemáticamente, la formulación más extendida del marco teórico de QM se basa en espacios de Hilbert, funciones de onda y operadores sobre dicho espacio. Sin embargo, existen otras formulaciones igualmente válidas, cada cual más o menos útil para según qué objetivos [1]. Para tratar con el entrelazamiento, la formulación idónea es la de **operadores densidad**, formulada por J. von Neumann a mediados del siglo XX.

El estado de un sistema se describe por medio de un operador densidad (o, como se le llama comúnmente, **matriz densidad**) que, en relación con la formulación de la función de onda, tiene la forma

$$\rho = \sum_j p_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j|, \quad (4)$$

donde p_j es la probabilidad de que, tras una medida, el sistema se defina en el estado $|\Psi_j\rangle$. Esta es la fórmula generalizada de la matriz densidad: si solo hay un valor de j (lo cual implica $p_j = 1$), el sistema está en un **estado puro** y ρ toma la forma de un proyector; si, por el contrario, el sistema viene descrito como una combinación estadística de estados puros, el sistema está en un **estado mezcla**. Además, el valor esperado de un operador \mathcal{O} puede escribirse en términos de la matriz densidad como

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{tr}(\rho \mathcal{O}). \quad (5)$$

La matriz densidad ρ puede entonces describir estados puros y estados mezcla, adoptando formas diferentes. Entre las propiedades que cumple (hermiticidad, traza unidad y (5), válidas para matrices densidad que representan tanto estados puros como estados mezcla), hay una que distingue ambas matrices densidad

$$\begin{cases} \rho = \rho^2 & \text{si y solo si } \rho \text{ representa un estado } \mathbf{puro}, \\ \rho \neq \rho^2 & \text{si y solo si } \rho \text{ representa un estado } \mathbf{mezcla}. \end{cases} \quad (6)$$

Lo interesante es que, dado un estado entrelazado, la matriz densidad reducida de un subsistema tiene la forma de la matriz densidad de un estado mezcla (es decir, no es idempotente) [2], convirtiéndose en una herramienta muy útil para identificar y medir el entrelazamiento, hasta el punto en el que “entropía de von Neumann” y “entropía de entrelazamiento” se utilizan como sinónimos (y así lo haremos en este texto).

Armados con este formalismo y la entropía de von Neumann (3), estamos listos para abordar un ejemplo. Sea un estado de dos qubits, A y B , definido por el estado de Bell

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B), \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Se puede comprobar que este estado es puro mirando la idempotencia de ρ

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} [|10\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho^2. \quad (8)$$

Sin embargo, hallando la matriz densidad reducida a uno de los qubits (se obtiene trazando sobre el espacio de Hilbert del otro)

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \neq \rho_A^2 \quad (9)$$

observamos que la matriz densidad reducida al qubit A no es idempotente, por lo que hemos detectado entrelazamiento. ¿Cuánto? Eso nos lo dirá la entropía (3)

$$S_{VN} = -\text{tr} \begin{pmatrix} -\frac{\log 2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\log 2}{2} \end{pmatrix} = \log 2 \quad (10)$$

Podemos considerar la medición de entrelazamiento con respecto a más de una partición del sistema, digamos A, B, C, \dots y también conjuntos como $A \cup B, A \cup C, \dots$. En este caso la entropía de entrelazamiento satisface una desigualdad muy importante, llamada **strong subadditivity**¹, que nos dice que si consideramos dos sistemas, A y B , la entropía de entrelazamiento no decrece si adjuntamos un tercer sistema C .

1.2. Entropía de entrelazamiento en Teorías Cuánticas de Campos

La Teoría Cuántica de Campos (o **QFT**, por sus siglas en inglés) surge de la necesidad de una extensión relativista de la mecánica cuántica. A partir del paradigma de las teorías clásicas de campos, el campo cuántico asocia a cada punto del espacio-tiempo un operador que transforma bajo una representación del grupo de Poincaré y que actúa sobre un espacio de Hilbert. En el caso de teorías libres, este es el espacio de Fock, que describe estados de **partículas**, correspondientes a las excitaciones cuánticas del campo, digamos $\Phi(\vec{x})$. Esto significa que los campos en distintos puntos del espacio-tiempo están correlacionados. Por ejemplo, aunque una teoría sea libre, las correlaciones vienen dadas por *two-point functions* $\langle \Phi(\vec{x}_1) \Phi(\vec{x}_2) \rangle$ y las *n-point functions* están determinadas por sumas y productos de estas *two-point functions* gracias al teorema de Wick. Esto es, incluso en una teoría libre, el estado fundamental admite correlación. En lo que sigue, queremos traducir esta

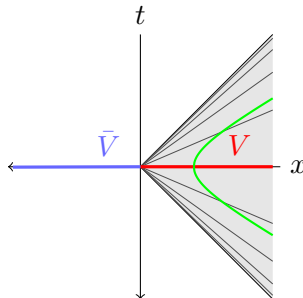


Figura 1: Subsistema V en rojo, su complementario \bar{V} en azul y su desarrollo causal \mathcal{R} en gris.

correlación en entropía de entrelazamiento.

Dividiremos el espacio en dos regiones, V y su complementario \bar{V} , delimitadas por una (hi-per)superficie $\Sigma = \partial V$ y nos preguntamos cuánta entropía de entrelazamiento hay entre las dos regiones para la teoría de campos. Esta es la pregunta análoga a la de cuánta entropía de entrelazamiento existe entre, por ejemplo, dos qubits en mecánica cuántica (como hemos visto en la sección 1.1). La diferencia fundamental ahora es que la entropía de entrelazamiento se estudia entre **regiones del espacio-tiempo**.

Siguiendo la analogía con QM y la idea de utilizar la entropía de von Neumann (3) para calcular la entropía de entrelazamiento, debemos explicar a qué nos referimos con matriz densidad reducida a V en la QFT [3]. Para ello, consideremos la formulación de una QFT a través de la integral de caminos de Feynman (en inglés, *path integral*, que usaremos en lo sucesivo). Este se basa en el hecho intuitivo de que si un sistema está descrito por un campo cuántico, debemos tener en cuenta todas las posibles configuraciones del mismo mediante la **función de partición**, definida como

$$Z = \int [D\Phi] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\Phi]}, \quad (11)$$

donde $\int [D\Phi]$ significa que integramos sobre todas las posibles configuraciones del campo Φ y, como en mecánica estadística, pesamos cada configuración, en este caso con la acción $\mathcal{S}[\Phi]$. En la formulación de Feynman de QFT, el límite clásico ($\hbar \rightarrow 0$) es una aproximación de punto de silla (*saddle point approximation*) de la integral (11), que proporciona las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de la acción $\mathcal{S}[\Phi]$. En el régimen cuántico ($\mathcal{S} \approx \hbar$) consideramos todas las posibles configuraciones, con lo que si existe una matriz densidad como la de la expresión (4) que describa dichas configuraciones, tendríamos

$$\text{tr}(\rho) = Z = \int [D\Phi] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\Phi]}. \quad (12)$$

Aunque no lo hayamos explicitado en (11), la función de partición Z depende de las fuentes externas de la teoría, i.e. el término de masa o las constantes de acoplamiento en $\mathcal{S}[\Phi]$, y puede ser ampliada insertando en el integrando otras funciones del campo Φ . Por ejemplo, si queremos calcular los funcionales generadores de las funciones de correlación locales, hacemos $\mathcal{S}[\Phi] \rightarrow \mathcal{S}[\Phi] + \int J\Phi$, con J una fuente externa. Finalmente, la función de partición depende del espacio-tiempo en el que está definido el campo $\Phi(\vec{x})$ que, en la literatura convencional, suele ser Minkowski d -dimensional o el espacio euclídeo.

¹ $S(AB) + S(BC) \geq S(B) + S(ABC)$.

De la formulación de la *path integral* de QFT se sigue que la matriz densidad reducida a V está determinada por una función de partición en un espacio-tiempo que solo ve el desarrollo causal² de V , que denotaremos como \mathcal{D} , de tal forma que no se tiene acceso a información o configuraciones del campo en \bar{V} por haber hecho la traza sobre este último. Así, lo primero que tenemos que hacer es encontrar una transformación de coordenadas tal que el campo $\Phi(\vec{x})$ viva dentro del desarrollo causal de V . En lo sucesivo, restringiremos la superficie de entrelazamiento Σ a ser la más simple y simétrica superficie esférica (ver fig. 2). En 1+1 dimensiones es un intervalo, así que el primer caso no trivial es realmente 1+2 dimensiones (donde, en polares, se hace explícita la dependencia angular).

No obstante, para empezar y entender el cambio de coordenadas de Minkowski a un espacio donde las coordenadas sólo cubran el desarrollo causal de V , consideraremos el caso de 1 + 1 dimensiones y de la semirecta $V = \{t = 0, x \geq 0\}$ ³. Su desarrollo causal es la **cuña o espacio de Rindler**, \mathcal{R} (figura 1)

$$\mathcal{R} = \{|t| \leq x\}. \quad (13)$$

El cambio de coordenadas para pasar de Minkowski a Rindler es:

$$\begin{cases} t(\tau, \xi) = \xi \sinh\left(\frac{\tau}{R}\right) \\ x(\tau, \xi) = \xi \cosh\left(\frac{\tau}{R}\right) \end{cases} \quad (14)$$

y aplicando la transformación a la métrica de Minkowski $ds_M^2 = -dt^2 + dx^2$ obtenemos

$$ds^2 = \frac{\xi^2}{R^2} \left(-d\tau^2 + \frac{R^2}{\xi^2} d\xi^2 \right), \quad (15)$$

donde R es un factor de escala que hace adimensionales los argumentos del seno y coseno hiperbólicos. La métrica (15) es, a menos del factor $\Omega^2 \equiv \frac{\xi^2}{R^2}$, la métrica del espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$.

En nuestro caso, ya que consideramos una superficie de entrelazamiento esférica (i.e, tomamos la región V como una hiperesfera S^{d-1} en Minkowski d -dimensional), convendrá partir del espacio de Minkowski en polares. Para que sea más claro, haremos el ejemplo en 1 + 2 dimensiones para explicitar la variable angular [4]. Partiendo de Minkowski en polares

$$ds_M^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (16)$$

y efectuando la transformación

$$\begin{cases} t(\tau, u) = R \frac{\sinh\left(\frac{\tau}{R}\right)}{\cosh u + \cosh\left(\frac{\tau}{R}\right)} \\ r(\tau, u) = R \frac{\sinh u}{\cosh u + \cosh\left(\frac{\tau}{R}\right)} \end{cases} \quad (17)$$

llegamos a la métrica

$$ds^2 = \Omega^2 \left[-d\tau^2 + R^2 (du^2 + \sinh^2 u d\phi^2) \right], \quad \Omega^2 = \left[\cosh u + \cosh\left(\frac{\tau}{R}\right) \right]^{-2} \quad (18)$$

²El desarrollo causal de una región del espacio es el conjunto de puntos cuyas curvas causales intersecan a dicha región. Ver [4].

³Ahora, el concepto de *subsistema* se generaliza a \mathcal{D} , i.e., si dos regiones tienen desarrollos causales distintos, entonces no pueden ser el mismo subsistema. Se elige t constante porque en Minkowski las superficies de t constante son *superficies de Cauchy* o *Cauchy slices*. Ver [5].

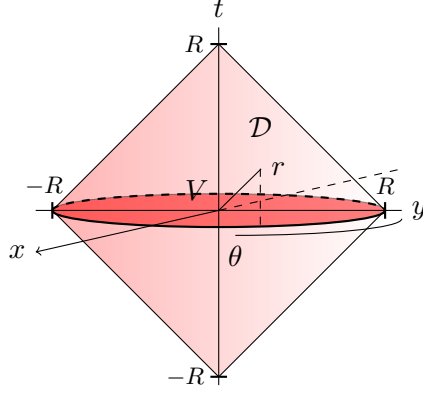


Figura 2: Fragmento de Minkowski cubierto por las coordenadas (τ, u, θ) tras la transformación (17). Representación esquemática.

donde se puede reconocer el elemento de línea, a menos del factor Ω^2 , del espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$.

Si antes el desarrollo causal de la semirrecta $\{t = 0, x \geq 0\}$ era la cuña de Rindler \mathcal{R} (13), que coincidía con el espacio cubierto tras el cambio de coordenadas (14), ahora el espacio cubierto por las coordenadas (17) es

$$\begin{cases} (\tau, u) \rightarrow (\pm\infty, 0) \implies (t, r) \rightarrow (\pm R, 0) \\ (\tau, u) \rightarrow (0, \infty) \implies (t, r) \rightarrow (0, R) \end{cases} \implies \{|t| \leq R, 0 \leq r \leq R\} \quad (19)$$

que, según se aprecia en la figura 2, coincide con el desarrollo causal de la región esférica V considerada en la métrica (16).

La conclusión de esta discusión (que podemos generalizar a d dimensiones) es que la matriz densidad reducida de la QFT en V se determina a partir de una *path integral* de la misma QFT que ahora vive en el espacio con la métrica de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{d-1}$ a menos de un factor Ω , y por tanto

$$\text{tr}(\rho_V) = Z[g] = \int [D\Phi] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[g, \Phi]}. \quad (20)$$

Notamos ahora que la función de partición va a depender de la geometría de la superficie de entrelazamiento. En nuestro caso particular, del valor de R (radio de dicha superficie).

Entropía de Rényi

Hemos concluido cómo en QFT la traza de ρ_V se calcula a partir de una *path integral*, pero calcular el operador densidad en sí es mucho más complicado. Un cálculo directo de la entropía von Neumann a partir de su definición requiere una representación explícita del operador $\log \rho_V$, lo que básicamente requiere diagonalizar ρ_V [5]. Daremos un rodeo que nos permite, con un poco de trabajo, calcular la entropía de entrelazamiento, llamado *replica trick*⁴. Para ello introducimos la **entropía de Rényi** (21)

$$S_q = \frac{1}{1-q} \log \text{tr} \rho_V^q, \quad q \geq 0. \quad (21)$$

⁴Ver apéndice A.

En nuestro caso, si tenemos S_q como función analítica de q , la entropía de von Neumann es igual a la de Rényi en el límite $q \rightarrow 1$.

$$S_{VN} = \lim_{q \rightarrow 1} S_q. \quad (22)$$

Observamos que calcular las entropías de Rényi es equivalente a calcular una función de partición, ya que simplemente hace falta conocer la secuencia de “réplicas” $\text{tr}\rho^2, \text{tr}\rho^3, \dots, \text{tr}\rho^q$. Resulta, de hecho, que dicha entropía puede escribirse en términos de las funciones de partición [6]

$$S_q = \frac{q\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_q}{1 - q}, \quad \text{con } \mathcal{F}_q = -\log|Z_q|, \quad (23)$$

donde construir Z_q requerirá añadir otra deformación geométrica del desarrollo causal. Consideraremos un ejemplo explícito en la sección 2.

1.3. Entropía de entrelazamiento en Teorías de Campos Conformes

Hasta aquí hemos dado un algoritmo general para calcular la entropía de entrelazamiento en una QFT, donde el paso técnico involucra calcular o bien una función de partición en un espacio-tiempo con la topología de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{d-1}$, ver (18), o bien el empleo del *replica trick* y la entropía de Rényi, como hemos explicado anteriormente. Aún así, esto no es trivial en general. Lo que podemos hacer ahora es considerar, en lugar de una QFT general, una con algunas propiedades geométricas que nos ayuden en el cálculo. Estas son teorías que son invariantes no solo bajo las transformaciones del grupo de Poincaré, sino bajo un grupo de simetrías mayor, llamado **grupo conforme**, donde llamamos **transformación conforme** a aquella transformación de coordenadas que **preserva los ángulos**. En estas teorías de campos conformes (**CFT**, por sus siglas en inglés), de forma pragmática, podemos eliminar o absorber el prefactor Ω que aparece en la descripción del desarrollo causal y, por tanto, podemos identificar directamente \mathcal{D} con $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{d-1}$. Para justificar esto último, proporcionaremos a continuación una introducción a las propiedades geométricas de las transformaciones de coordenadas conformes ($x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x)$). Para la métrica, una transformación conforme se define como [7]

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \quad (24)$$

i.e. una transformación conforme es aquella que deja invariante la métrica a menos de un factor $\Omega^2(x)$ dependiente de la posición, es decir, rescala las coordenadas espacio-temporales dependiendo de la posición. El conjunto de transformaciones conformes (aquellas que reescalan preservando los ángulos) forman un grupo: **el grupo conforme**. Este grupo está formado por las siguientes transformaciones, las cuales satisfacen (24) para un cierto factor Ω :

- **Traslaciones:** $\tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu$, con a^μ un vector constante.
- **Transformaciones de Lorentz (rotaciones y boosts):** $\tilde{x}^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$, con Λ_ν^μ una matriz constante que verifica $g_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\lambda g_{\sigma\lambda}$. La unión de traslaciones, rotaciones y boosts forma el grupo de Poincaré, que es subgrupo del conforme (cuando $\Omega = 1$).
- **Dilataciones:** $\tilde{x}^\mu = \lambda x^\mu$, con λ una constante (caso particular en el que $\Omega^2 = \lambda$ es constante).
- **Transformaciones Conformes Especiales (SCT, Special Conformal Transformations):** $\tilde{x}^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + b^2 x^2 + 2b_\nu x^\nu}$, con b^μ un vector constante. $\Omega(x) = \frac{1}{1 + b^2 x^2 + 2b_\nu x^\nu}$. Pueden ser

entendidas como la sucesión de tres transformaciones en orden: inversión \rightarrow traslación \rightarrow inversión.⁵

Esto, como hemos comentado antes, nos permite absorber los prefactores Ω^2 de una métrica como, por ejemplo, (15) o (18).

Una vez visto cómo transforman las coordenadas, veamos cómo transforman los campos bajo este grupo de simetrías. En una CFT, los campos quedan invariantes bajo el grupo de Poincaré, pero sí transforman bajo dilataciones y SCT's. Para un campo libre, tenemos que

$$\Phi(x) \rightarrow \tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \Omega^{-\Delta} \Phi(x) \quad (25)$$

donde $\Delta = \frac{d-2}{2}$ y el campo transformado $\tilde{\Phi}(\tilde{x})$ es una función del campo sin transformar $\Phi(x)$. Dada esta transformación en los campos, es útil escribir la acción de un campo escalar libre Φ en d -dimensiones en un espacio-tiempo genérico, la cual es invariante bajo transformaciones conformes

$$\mathcal{S} = \int d^d x \sqrt{g} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{d-2}{4(d-1)} \mathcal{R}_s[g] |\Phi|^2 \right) \quad (26)$$

donde $\mathcal{R}_s[g]$ es la curvatura escalar de Ricci⁶ de la métrica g .

En dos dimensiones ($d = 2$) existe un resultado universal sobre la entropía de entrelazamiento para cualquier CFT, sea libre o interactuante, que se debe al trabajo de J. Cardy y P. Calabrese [8]. En este caso la superficie de entrelazamiento se reduce a un intervalo y la entropía sigue la ley logarítmica $S \sim \log \frac{|x_1 - x_2|}{\epsilon}$. La constante de proporcionalidad se interpreta como una medida de los grados de libertad de la teoría. En este trabajo nos focalizaremos en el caso de tres dimensiones, donde el resultado tiene más estructura y por lo tanto es interesante a la vez que comparamos teorías.

1.4. Objetivos y metodología

El objetivo principal es discutir el tema de la entropía de entrelazamiento como punto de partida para entender los últimos desarrollos en el ámbito de la Información Cuántica desde el punto de vista de la física teórica. Para ello seguiremos la siguiente metodología:

- En la sección 2 nos centraremos en el cálculo de la entropía de entrelazamiento a partir de la de Rényi en el vacío en una teoría escalar libre mediante la diagonalización de los operadores presentes en la acción y algunas técnicas de regularización, expresando la matriz densidad en términos de funciones de partición y haciendo uso de las ventajas de la simetría conforme sin mención a holografía.
- En la sección 3 exploraremos la correspondencia AdS/CFT para una CFT holográfica (*strongly coupled*) donde mostraremos la equivalencia entre la entropía de entrelazamiento en el vacío de Minkowski d -dimensional con una superficie de entrelazamiento esférica en la frontera de

⁵La inversión se define como: $\tilde{x}^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}$. Manda puntos cerca del origen muy lejos y puntos lejos del origen muy cerca. Junto con la paridad y la inversión temporal, la inversión pertenece a la parte no conexas del grupo conforme, i.e. no pueden ser descritas como una transformación infinitesimal cerca de la identidad. Nos centraremos en la parte conexas, formada por las transformaciones descritas arriba.

⁶El hecho de imponer invariancia bajo transformaciones conformes es el causante de que en una teoría libre aparezca este “término de masa”. Dado que el espacio-tiempo considerado tiene curvatura distinta de cero, hay que compensar la acción con un término, correspondiente al que implica la curvatura escalar de Ricci.

AdS y la entropía de un agujero negro en el *bulk* de AdS, viendo como ésta última sigue una ley de área con respecto al radio de la superficie de entrelazamiento de la frontera.

El desarrollo de estas secciones ha requerido el estudio de nuevas metodologías dentro de la física teórica con respecto a los contenidos del grado: el formalismo de *path integral*, la aplicación de geometría diferencial en el ámbito de QFT, introducción a AdS/CFT, uso de Wolfram Mathematica, etc.

2. Cálculo para un campo escalar libre en CFT

El objetivo de esta sección será calcular la entropía de entrelazamiento para un campo escalar libre Φ en tres dimensiones, a partir de la *path integral* Z definida en la variedad \mathcal{D} , que describe el desarrollo causal de la superficie de entrelazamiento $\Sigma = S^1$.

Hay varias etapas antes de llegar al resultado final, que comentaremos mas en detalle en las siguientes subsecciones. De todas formas, es interesante anticipar que nos esperamos la estructura

$$S = \frac{R}{\epsilon} - F. \quad (27)$$

Analizamos estos dos términos por separado. El primer termino es proporcional al área del la superficie de entrelazamiento, $2\pi R$, y por análisis dimensional tiene que ir junto a otra escala ϵ . Debido al hecho que una QFT depende de la escala de energía, en una teoría libre la escala $\epsilon \ll 1$ solo puede estar asociada a un *cutoff* de las excitaciones de altas energías (o corto alcance) alrededor de Σ . Entonces el primer termino es lo que nos esperamos como medida de la correlación que cruza Σ . El segundo termino, F , es una constante que podemos catalogar como **universal** porque no depende de cómo elegimos ϵ , e identificaremos con S regularizada.

2.1. La esfera y $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$

Como se explica en la introducción, tenemos la variedad (en $d=3$) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ con métrica (18). Aunque se pueda calcular la función de partición en estos espacios de forma directa [6], tomaremos un enfoque donde podemos decir que el cálculo no se sale del estudio de ciertas autofunciones que son simples generalizaciones de las que se ven en QM. Para ello utilizamos otra vez un cambio de coordenadas y mapeamos \mathcal{D} a una esfera [6, 9]. Con el cambio de coordenadas $\sinh u = \tan \theta$, llegamos a un espacio que es conforme⁷ a la esfera, si además consideramos una rotación de Wick⁸ $\tau \rightarrow i\tau$. Con esto se llega a estudiar un campo escalar conforme acoplado a la métrica

$$ds^2 = R^2 [\cos^2 \theta d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad \begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 \leq \tau \leq 2\pi \end{cases} . \quad (28)$$

Para las entropías de Rényi y aplicando el *replica trick*, en vez de la esfera tenemos que considerar los espacios \mathcal{C}_q donde $0 \leq \tau < 2\pi q$, que son las q -variedades ramificadas recubridoras de la 3-esfera o *q-fold branched coverings of S^3* (tomamos $R = 1$ por simplicidad). La acción previamente mencionada es (26), donde \mathcal{R}_s es constante e igual a 6 en este espacio, $\sqrt{g(r)}$ es la raíz del determinante de la métrica y $d = 3$. Con esto, la acción normalizada queda

⁷Se dice que es conforme porque después de hacer en (18) el cambio $\sinh u = \tan \theta$, debemos multiplicar la métrica resultante por $\cos^2 \theta$, llegando a (28).

⁸La transformación de Wick nos lleva al espacio euclídeo, y con ello la *path integral* pasa de (11) a (33).

$$\mathcal{S} = 2\pi \int d^3r \sqrt{g(r)} \left[|\partial_\mu \Phi|^2 + \frac{3}{4} |\Phi|^2 \right]. \quad (29)$$

Utilizando el **operador de Laplace-Beltrami (LBO)** (generalización del laplaciano a variedades Riemannianas o pseudo-Riemannianas)

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (30)$$

podemos escribir la acción como

$$\mathcal{S} = 2\pi \int d^3r \sqrt{g(r)} \Phi \left[-\Delta + \frac{3}{4} \right] \Phi + 2\pi \int_{\partial\mathcal{C}_q} \Phi \sqrt{g} \partial^\mu \Phi n_\mu. \quad (31)$$

La integral de la frontera que aparece tras aplicar el teorema de la divergencia se anula debido a que los espacios \mathcal{C}_q son compactos y sin frontera⁹. El desarrollo hasta llegar a la energía libre $\mathcal{F}_q = -\log(Z_q)$ se expone en la siguiente sección.

2.2. Path integral

Escribiremos el campo Φ como expansión en autofunciones del LBO, W_σ

$$\Phi = \sum_\sigma c_\sigma W_\sigma(\tau, \theta, \phi), \quad c_\sigma \in \mathbb{C} \quad (32)$$

con σ un conjunto de números cuánticos que identificaremos posteriormente.

La forma general de una *path integral* euclídea

$$Z = \int [D\Phi] e^{-\mathcal{S}[\Phi]}, \quad (33)$$

con $\mathcal{S}[\Phi]$ la acción (29), que tras aplicar la definición (30) e identificar el término de masa como $m = \frac{3}{4}$, puede escribirse como

$$\mathcal{S}[\Phi] = 2\pi \int d^3r \sqrt{g} \Phi^\dagger (-\Delta + m) \Phi. \quad (34)$$

Sustituyendo (32) en (34) y considerando que hay dos campos, $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$, y la ortonormalidad de las autofunciones $W^{(1)}$ y $W^{(2)}$, la *path integral* (33) pasa a ser

$$Z = \int \prod_\sigma dc_\sigma dc_\sigma^\dagger e^{-2\pi \sum_\sigma c_\sigma^\dagger (-\lambda_\sigma + m) c_\sigma} \quad (35)$$

que puede identificarse con una integral gaussiana multidimensional, donde $(-\lambda_\sigma + m) \equiv A$ es una matriz diagonal de dimensión infinita. Esta integral es el inverso del determinante de la matriz A , $Z = (\det A)^{-1}$ [10]. La energía libre se define a partir de $\mathcal{F}_q = -\log|Z_q|$, por lo que estudiaremos

$$\mathcal{F}_q = \log \left[\prod_\sigma (-\lambda_\sigma + m) \right] = \sum_\sigma \log(-\lambda_\sigma + m). \quad (36)$$

⁹Podemos asegurar la compactibilidad porque todas las coordenadas tienen rangos finitos y son periódicas y/o acotadas, y la integral se anula debido a que no hay puntos límite que queden fuera del espacio definido por la métrica y por tanto $\partial\mathcal{C}_q = \emptyset$.

La suma de los elementos de la diagonal es la traza de la matriz A mencionada anteriormente, con lo que finalmente se obtiene la expresión

$$\mathcal{F}_q = \text{tr} \log \left(-\Delta + \frac{3}{4} \right), \quad (37)$$

2.3. Problema de autovalores

Como puede apreciarse en la métrica, \mathcal{C}_q tiene dos isometrías $U(1)$ correspondientes a las coordenadas τ y ϕ , por lo que el campo W_σ puede escribirse como $f(\theta)e^{i(m_\tau\tau+m_\phi\phi)}$ para ciertos valores de m_τ y m_ϕ asociados a las periodicidades de las variables τ y ϕ ($m_\tau \in \mathbb{Z}/q$, $m_\phi \in \mathbb{Z}$).

Por la forma de escribir el campo previamente mencionada, el LBO aplicado al campo W_σ pasa a ser una ecuación diferencial para $f(\theta)$. El problema de autovalores es

$$f''(\theta) + 2 \cot(2\theta)f'(\theta) - \left(\frac{m_\tau^2}{\cos^2\theta} + \frac{m_\phi^2}{\sin^2\theta} \right) f(\theta) = \lambda f(\theta), \quad (38)$$

y un cálculo simbólico con Wolfram Mathematica arroja la solución (39) a esta ecuación diferencial

$$f(\theta) = (\cos \theta)^{|m_\tau|} (\sin \theta)^{|m_\phi|} \times {}_2F_1 \left(\frac{1 + |m_\tau| + |m_\phi| - \sqrt{1 - \lambda}}{2}, \frac{1 + |m_\tau| + |m_\phi| + \sqrt{1 - \lambda}}{2}, 1 + |m_\tau|, \cos^2 \theta \right). \quad (39)$$

La función ${}_2F_1(a, b; c; z)$ se conoce como la **función hipergeométrica de Gauss**, que es solución de la ecuación diferencial (40)

$$z(1 - z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [c - (a + b + 1)z] \frac{dw}{dz} + abw = 0. \quad (40)$$

Efectivamente, si se hace un cambio de variable tal que $z = \cos^2(\theta)$ en la ecuación (38) dividida entre $(\cos \theta)^{|m_\tau|} (\sin \theta)^{|m_\phi|}$, se obtiene una ecuación de la forma (40) donde es posible identificar los coeficientes a, b, c

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 + |m_\tau| + |m_\phi| - \sqrt{1 - \lambda}}{2} \\ b &= \frac{1 + |m_\tau| + |m_\phi| + \sqrt{1 - \lambda}}{2} \\ c &= 1 + |m_\tau| \end{aligned} \quad (41)$$

con λ el autovalor correspondiente a la autofunción $f(\theta)$ que se corresponden con los obtenidos en la solución simbólica (39).

La función hipergeométrica tiene dos puntos singulares: $z = 0$ y $z = 1$ (correspondientes a $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = 0$ respectivamente), pues son los puntos que hacen 0 el coeficiente de la segunda derivada en (40). La regularidad en $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($z = 0$) ya viene impuesta al fijar las constantes de integración tras resolver la ecuación diferencial, donde aparece un término divergente acompañado de una constante la cual se toma igual a cero. La imposición de regularidad en $\theta = 0$ ($z = 1$) es la

que dará información sobre los autovalores. Utilizando la relación

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) \quad (42)$$

se procederá al estudio del caso $z = 1$. En este caso el exponente de $(1-z)$ en el primer sumando, $c-a-b$, es igual a $-m_\phi$, que puede tomar valores negativos, dando lugar a una divergencia $(1-z)^{-m_\phi}$. La solución es hacer 0 el coeficiente de tal sumando. Insertando los valores obtenidos para los parámetros a, b, c en la función Γ de Euler, se obtiene

$$\frac{\Gamma(1+m_\tau)\Gamma(m_\phi)}{\Gamma\left(\frac{1+|m_\tau|+|m_\phi|-\sqrt{1-\lambda}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+|m_\tau|+|m_\phi|+\sqrt{1-\lambda}}{2}\right)} = 0. \quad (43)$$

De (43) se infieren dos cosas: la primera es que para no incurrir en divergencias se debe tomar el valor absoluto de m_τ y m_ϕ (la función Γ de Euler nunca se hace cero y tiene polos en los enteros negativos); lo segundo es que, para que se cumpla dicha relación, el denominador tiene que tender a infinito, lo cual implica que el argumento de cualquiera de las dos funciones Γ que están multiplicándose en el denominador tiene que ser un entero negativo, que pondremos igual a $-a$, con $a \in \mathbb{N}$. Imponiendo estas restricciones, se llega la expresión para los autovalores [6]

$$\lambda = -n(n+2), \quad n = |m_\tau| + |m_\phi| + 2a, \quad m_\tau \in \mathbb{Z}/q, \quad m_\phi \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{N} \quad (44)$$

y los números cuánticos resultan ser, por tanto, $\sigma = (m_\tau, m_\phi, a)$.

2.4. Degeneración

Para poder hacer la traza del LBO es necesario tener en cuenta la degeneración de cada autovalor, que en este caso se traduce en contar cuántas formas posibles hay de sumar n en función de m_τ , m_ϕ y a , teniendo en cuenta los conjuntos a los que pertenece cada parámetro. Dado que $m_\tau \in \mathbb{Z}/q$, n puede pertenecer o bien a \mathbb{N} (si m_τ es 0 o múltiplo de q) o bien a \mathbb{N}/q (en caso contrario).

Si $n \in \mathbb{N}$, se distinguen dos casos: n par y n impar. La degeneración en este caso es:

$$g_n = \begin{cases} 1 + \sum_{a=0}^{\frac{n}{2}-1} 4(n-2a) & \text{si } n \text{ es par} \\ \sum_{a=0}^{\frac{n-1}{2}} 4(n-2a) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (45)$$

y ambas sumas dan por resultado $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Si $n \in \mathbb{N}/q$, la degeneración viene dada por

$$g_n = 2 \sum_{t=0}^{n-\frac{p}{q}} t + 1, \quad 1 \leq p < q. \quad (46)$$

Haciendo el cambio $n \rightarrow k + \frac{p}{q}$ esta suma da como resultado $(k+1)(k+2)$.

La degeneración de n (y, por tanto, de λ) para cada caso es

$$g_n = \begin{cases} (n+1)^2 & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ (k+1)(k+2) & \text{si } n = k + \frac{p}{q}, \text{ donde } k, p \in \mathbb{N}, 1 \leq p < q. \end{cases} \quad (47)$$

2.5. Energía libre regularizada

Una vez hallados los autovalores y su degeneración, se procede a calcular la energía libre (37). Sustituyendo $\text{tr} \log(-\Delta + 3/4)$ por $\sum_n g_n \log(\lambda_n + 3/4)$ se tiene

$$\mathcal{F}_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \log \left[n(n+2) + \frac{3}{4} \right] + \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \log \left[\left(k + \frac{p}{q} \right) \left(k + \frac{p}{q} + 2 \right) + \frac{3}{4} \right]. \quad (48)$$

Con un cambio de índices $n \rightarrow k-1$ en el primer sumatorio y $k \rightarrow k-1$ en el segundo se tiene

$$\mathcal{F}_q = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \log \left[k^2 - \frac{1}{4} \right] + \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \log \left[\left(k + \frac{p}{q} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]. \quad (49)$$

La suma de la expresión (49) diverge y se palia mediante la regularización por la función ζ

$$\zeta(s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^{-s}. \quad (50)$$

Tras escribir $k^2 - \frac{1}{4}$ como $(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2})$ y $(k + \frac{p}{q})^2 - \frac{1}{4}$ como $(k + \frac{p}{q} + \frac{1}{2})(k + \frac{p}{q} - \frac{1}{2})$ la expresión (49) puede escribirse como

$$\mathcal{F}_q = -\frac{d}{ds} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 - 2k + 1}{(k - \frac{1}{2})^s} + 2 \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k + \frac{p}{q} - \frac{1}{2})^s} \right] \Big|_{s=0}. \quad (51)$$

Para poder emplear la función ζ el índice k debe empezar en 0, por lo que se hace $k \rightarrow k+1$ y utilizando que $\frac{2(k+1)^2 - 2(k+1) + 1}{(k+1/2)^s} = \frac{2}{(k+1/2)^{s-2}} + \frac{1}{2(k+1/2)^s}$ y haciendo uso de la expresión (50), la expresión (51) queda

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_q = & -2 \left[\zeta'(-2, 1/2) + \frac{1}{4} \zeta'(0, 1/2) \right] \\ & - 2 \sum_{p=1}^{q-1} \left[\zeta' \left(-2, \frac{p}{q} + \frac{1}{2} \right) - 2 \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2} \right) \zeta' \left(-1, \frac{p}{q} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2} \right)^2 \zeta' \left(0, \frac{p}{q} + \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

2.6. Entropía y discusion de los resultados

En esta seccion discutimos los resultados de los apartados anteriores. Antes de todo, se puede llegar a demostrar que la divergencia en las sumas (49) está relacionada con la ley de área con respecto a R/ϵ . Luego, los valores numéricos proporcionados por (52) se pueden encontrar también a partir de calcular la *path integral* en $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ [6]. En ese caso se encuentra la expresión

$$\mathcal{F}_q = - \int_0^{\infty} d\lambda \tanh(\pi\sqrt{\lambda}) \log \left(1 - e^{-2\pi q\sqrt{\lambda}} \right) + q \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} \quad (53)$$

y numéricamente hemos verificado que reproduce los mismos resultados. La formula (53) proporciona una **continuación analítica** de \mathcal{F}_q cuando $q \in \mathbb{N}$, y por lo tanto nos permite calcular la entropía de entrelazamiento en el limite $q \rightarrow 1$. Además, a la hora de tomar dicho límite, encontramos que [6]

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\mathcal{F}_q}{dq} \Big|_{q=1} = - \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\sqrt{\lambda}}{1 + e^{2\pi\sqrt{\lambda}}} + \frac{3\zeta(3)}{8\pi^3} = 0 \quad (54)$$

lo cual implica que

$$S_1 = \lim_{q \rightarrow 1} S_q = -\mathcal{F}_1 = -0,127614. \quad (55)$$

Este valor numérico corresponde a la entropía de entrelazamiento regularizada. Al final, notamos que si identificamos $T = 1/(2\pi Rq)$ y llamamos $F(T) \equiv \frac{\mathcal{F}_q}{2\pi Rq}$ podemos reescribir (55) como

$$S_1 = - \left. \frac{dF(T)}{dT} \right|_{T=1/(2\pi R)} = S_{term} \left(\frac{1}{2\pi R} \right) \quad (56)$$

y por lo tanto interpretar S_1 como la entropía térmica a temperatura $1/(2\pi R)$ para el espacio $S^1 \times \mathbb{H}^2$, donde se ha compactificado la variable temporal en una circunferencia de longitud igual al inverso de dicha temperatura.

3. Entropía de entrelazamiento en AdS/CFT

Hay CFT's, llamadas CFT's holográficas, que durante las últimas dos décadas han recibido una gran cantidad de atención, ya que satisfacen el **principio de holografía**. Este principio hace referencia a la idea general de que la dinámica de un sistema que vive en una región de un espacio con frontera está codificada en una teoría de una dimensión menos que vive en dicha frontera. J. Maldacena, en su artículo seminal [11], propuso una materialización del principio de holografía, donde algunas teorías de gravedad definidas en un espacio anti-de Sitter (AdS) son duales a algunas CFT's que puede considerarse que viven en la frontera de AdS, donde el espacio AdS es una solución maximalmente simétrica de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General con constante cosmológica negativa. Esta dualidad o correspondencia fue desarrollada en más detalle por E. Witten [12] y recibe el nombre de **correspondencia AdS/CFT**. Esta correspondencia permite reformular cuestiones acerca de la emersión del espacio-tiempo a partir del entrelazamiento como cuestiones resolubles en CFT's [13], brindando un mejor entendimiento de la gravedad cuántica en general.

Pese a que la teoría de cuerdas es la única vía conocida para construir ejemplos de esta correspondencia, en este trabajo no será discutida. Sin embargo, tomaremos una ruta axiomática que establece qué correspondencia existe entre observables de nuestro interés en las CFT's con aquellos en la teoría de gravedad una vez se identifiquen los parámetros duales.

3.1. Introducción a la geometría de AdS

El espacio hiperbólico tiene, por definición, una frontera. El espacio AdS_{d+1} puede expresarse como un hiperboloide inmerso en $\mathbb{R}^{2,d}$, con signatura $(-, -, +, \dots, +)$. Así, deducimos que el espacio AdS_{d+1} debe tener una frontera. La métrica del espacio $\mathbb{R}^{d,2}$ es

$$ds^2 = -dy_{-1}^2 - dy_0^2 + dy_1^2 + \dots + dy_d^2, \quad (57)$$

y la (hiper)superficie que define el espacio AdS_{d+1} es el hiperboloide [4]

$$-y_{-1}^2 - y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_d^2 = -L^2. \quad (58)$$

El hiperboloide (58) se puede parametrizar de distintas formas, con lo que pasa a ser una ligadura que induce una métrica en el espacio $\mathbb{R}^{2,d}$. Un ejemplo es el *parche de Poincaré* (o coordenadas de Poincaré)

$$y_{-1} + y_d = \frac{L^2}{z}, \quad y^a = \frac{L}{z} x^a, \quad \text{con } a = 0, \dots, d-1 \quad (59)$$

con lo que la ligadura (58) toma la forma

$$y_{-1} - y_d = z + \frac{1}{z} \eta_{ab} x^a x^b \quad (60)$$

con η_{ab} la métrica de Minkowski en d dimensiones. Así, la métrica inducida pasa a ser la métrica estándar de AdS_{d+1}

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(dz^2 + \eta_{ab} dx^a dx^b \right). \quad (61)$$

La frontera de un espacio (o hipervolumen) d -dimensional tiene $d - 1$ dimensiones. Ese grado de libertad, diferencia entre la dimensión total del espacio y la dimensión de su frontera, se denomina *bulk*. En esta parametrización de AdS_{d+1} , z es la coordenada del *bulk*, que está siendo foliado con capas d -dimensionales con métrica de Minkowski.

3.2. Correspondencia AdS/CFT axiomática

Desde el punto de vista de teoría de campos, hay algunos requisitos que debe cumplir la CFT interactuante para que tenga un dual holográfico, i.e. no todas las CFT's son holográficas, como por ejemplo no lo son las teorías libres. Podemos entender cómo funciona considerando una teoría específica, con Lagrangiano similar al de teorías gauge Yang-Mills como QED o QCD, llamada “ $\mathcal{N} = 4$ SYM” en cuatro dimensiones [14]. Esta teoría es una teoría gauge, con grupo gauge $SU(N)$, acoplada a un número de fermiones y a un número de escalares en la representación adjunta. Esquemáticamente, el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermionico}} + \mathcal{L}_{\text{escalar}} + \mathcal{L}_{\text{interacciones}}$$

En términos simples, solo necesitamos saber que es una teoría de matrices interactuantes con interacciones bien definidas tal que existe una simetría más grande (llamada supersimetría $\mathcal{N} = 4$) [15]. Esta supersimetría permite caracterizar la teoría mediante dos parámetros: el rango del grupo gauge, N , y la constante de acoplo g_{YM} . Por razones históricas, en lugar de g_{YM} se emplea el llamado *'t Hooft coupling*: $\lambda_{t\text{Hooft}} = Ng_{YM}^2$. Desde el paradigma de teoría de cuerdas, Maldacena en [11] encontró una correspondencia entre esta teoría y la Relatividad General de Einstein donde la escala de AdS, L , y la constante de Newton, G_N (en unidades de la longitud de cuerda l_s), vienen dados por las relaciones

$$L^4 = \lambda_{t\text{Hooft}}, \quad G_N = \frac{1}{N^2}. \quad (62)$$

La teoría de gravedad es clásica a primer orden cuando el espacio es muy grande y la interacción entre cuerpos (codificada en G_N) es pequeña. Esto significa que la CFT se convierte en holográfica con una aproximación de gravedad clásica en el régimen de matrices interactuantes grandes,

$$\lambda_{t\text{Hooft}} = Ng_{YM}^2 \gg 1, \quad N \gg 1. \quad (63)$$

Por tanto, la correspondencia AdS/CFT es una dualidad débil/fuerte. En dualidades AdS/CFT más generales, la CFT se parametriza también por dos parámetros: una constante de acoplo (análogo a $\lambda_{t\text{Hooft}}$) y uno que tiene en cuenta el número de grados de libertad (análogo a N^2 , c , llamado *central charge*). Con esto, el régimen donde la gravedad dual es clásica es aquel donde la *central charge* es grande y la teoría está fuertemente acoplada (o *strongly coupled*).

En los primeros días de la correspondencia AdS/CFT, se comprendió que dicha dualidad relaciona operadores en la teoría de campos con campos en la teoría de gravedad y proporciona una igualdad de funcionales generadores [12]. Por un lado, en la CFT podemos calcular [10]

$$W_{CFT}[J] = \int [D\Phi] e^{-\mathcal{S}_{CFT}[\Phi] + \int d^d x J(x) O_{\Delta}(x)} \quad (64)$$

donde \mathcal{S}_{CFT} es una acción clásica general y \mathcal{O}_Δ (operador de dimensión conforme Δ , ver [7] sección 0.6) se construye a partir de los campos de la CFT, en este caso Φ .

Por otro lado, el funcional generador $W_{gravity}[J]$ de la teoría de campos que vive en el *bulk* de AdS es una función de una fuente de la frontera y viene dado por la *path integral*

$$W_{gravity}[J] = \int [Dg][D\phi] e^{+\frac{1}{G_N} \mathcal{S}_{gravity}[g,\phi]} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} g_{\mu\nu}(z \rightarrow 0, \vec{x}) & \rightarrow z^{-2} \delta_{\mu\nu} \\ \phi(z \rightarrow 0, \vec{x}) & \rightarrow z^{d-\Delta} J \end{cases} \quad (65)$$

donde, por concreción, pensamos en gravedad de Einstein acoplada a un campo escalar en el *bulk* $\phi(z, \vec{x})$ de masa m . Entonces, la acción total del sistema $\mathcal{S}_{gravity}[g, \phi]$ incluye gravedad y un campo escalar. Las condiciones de contorno en la frontera de AdS, necesarias para resolver las ecuaciones del movimiento de los campos en el problema clásico gravitacional, pueden entenderse como fuentes para operadores duales que viven en la CFT. En el caso de $\phi(z, \vec{x})$, el operador dual es \mathcal{O}_Δ , y $m^2 L^2 = \Delta(\Delta - d)$ es la relación entre la masa y la dimensión conforme.

El axioma AdS/CFT establece que, para una clase de teorías gravitacionales en un lado y una clase de CFT's en el otro

$$W_{gravity}[J] = W_{CFT}[J]. \quad (66)$$

Esta identidad, si bien marca el inicio de AdS/CFT, no es exactamente lo que necesitamos para calcular la entropía de entrelazamiento. Como hemos visto en la introducción, lo que necesitamos es una función de partición en la CFT sobre cierto espacio hiperbólico $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{d-1}$. Por tanto, lo próximo es entender cómo geometrizar la filosofía general del cálculo de la entropía de entrelazamiento mediante transformaciones conformes, como se expone en la siguiente sección.

3.3. Entropía de entrelazamiento a partir de un agujero negro en AdS

Con el fin de geometrizar el cálculo de la entropía de entrelazamiento y estudiarla, queremos encontrar un cambio de coordenadas en para el parche de Poincaré en AdS que sea análogo al cambio de coordenadas (17) que utilizamos para aislar el desarrollo causal con respecto a todo Minkowski en secciones anteriores. Esto se consigue por medio de las bien conocidas **coordenadas globales**. Una forma conveniente de poner este cambio de coordenadas es la siguiente¹⁰

$$\begin{aligned} y_{-1} &= \cosh \beta \rho \cosh u + \sinh \beta \tilde{\rho} \cosh(\tilde{\tau}/L), & y_d &= \cosh \beta \tilde{\rho} \cosh(\tilde{\tau}/L) + \sinh \beta \rho \cosh u, \\ y_0 &= \tilde{\rho} \sinh(\tilde{\tau}/L), & & \\ y_1 &= \rho \sinh u \cos \phi_1, & y_2 &= \rho \sinh u \sin \phi_1 \cos \phi_2, \dots, & y_{d-1} &= \rho \sinh u \sin \phi_1 \sin \phi_2 \dots \sin \phi_{d-2} \end{aligned} \quad (67)$$

con esto, la ligadura (58) toma la forma $\tilde{\rho}^2 = \rho^2 - L^2$, y la métrica inducida es

$$ds^2 = - \left(\frac{\rho^2}{L^2} - 1 \right) d\tilde{\tau}^2 + \frac{d\rho^2}{\frac{\rho^2}{L^2} - 1} + \rho^2 (du^2 + \sinh^2 u d\Omega_{d-2}^2) \quad (68)$$

donde $d\Omega_{d-2}^2$ es el elemento de línea de una hipersfera S^{d-2} unidad. El término $(du^2 + \sinh^2 u d\Omega_{d-2}^2)$ es el elemento de línea en \mathbb{H}^{d-1} con curvatura unidad, por lo que esta vez estamos foliando el *bulk* de AdS_{d+1} con hipersuperficies de geometría $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{d-1}$.

Lo interesante de la métrica (68) es que tiene características similares a la de Schwarzschild, a diferencia del seno hiperbólico: ambas tienen en común la forma de los coeficientes radial y temporal, que indican la existencia de un horizonte (en el caso de (68), situado en $\rho = L$). Por tanto, la

¹⁰ $\cosh \beta$ y $\sinh \beta$ vienen de hacer un boost en el plano y_{-1}, y_d para que a L fijo, $R = e^{-\beta} L$.

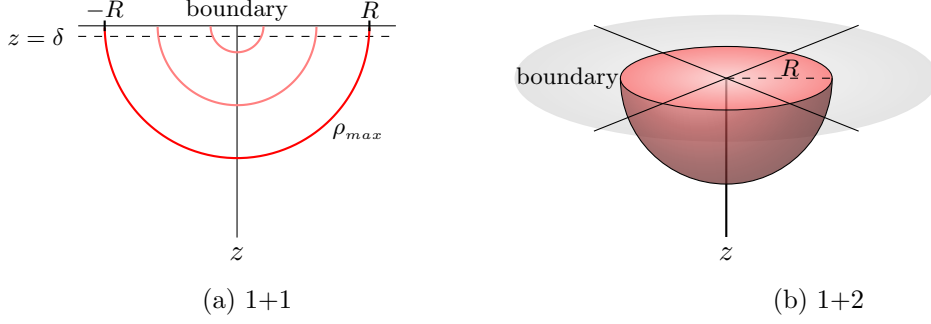


Figura 3: Foliación hiperbólica de AdS_{d+1} . El agujero negro se extiende hasta la frontera, intersecándola en una superficie esférica de radio R . Las curvas en rojo son, en 1+1, las geodésicas en este espacio (con la línea discontinua $z = \delta$ el *cutoff*) y, en 1+2, las superficies mínimas homólogas a la región V que se extienden en el bulk.

foliación de AdS inducida por las coordenadas globales se puede entender como un **agujero negro**, aunque el espacio AdS en sí no tenga un horizonte de eventos.

Es muy importante ahora entender lo que pasa con el horizonte (68) cuando lo vemos desde el punto de vista de las coordenadas de Poincaré. Vamos a demostrar que dicho agujero negro interseca con la frontera de AdS (figura 3). Para saber dónde, necesitamos conocer la relación entre ambos parches, global y de Poincaré. Comparando (59) con (67) cuando $\rho = L$, obtenemos la siguiente relación entre las coordenadas z y u :

$$y_{-1} + y_d = R \cosh(u) = \frac{R^2}{z}, \quad y_0^2 + \dots + y_{d-1}^2 = R^2 \sinh^2(u) = \frac{R^2}{z^2} r^2, \quad (69)$$

donde hemos puesto que $R = e^{-\beta} L$ y $r^2 = \sum_{a=0}^{d-1} x_a^2$ y estamos considerando un valor fijo de $\tilde{\tau}$. La frontera de AdS está en el límite $z \rightarrow 0$, lo cual implica $u \rightarrow \infty$. Desarrollando (69) llegamos a

$$\lim_{z \rightarrow 0} r^2 = \lim_{u \rightarrow \infty} R^2 \tanh^2 u = R^2. \quad (70)$$

Llegamos entonces a la conclusión crucial de que el horizonte del agujero negro (68) interseca la misma superficie de entrelazamiento que consideramos en la frontera. O sea, el agujero negro se corresponde con el desarrollo causal \mathcal{D} en la frontera de AdS . Esta conclusión nos permite calcular la entropía de entrelazamiento de la CFT holográfica utilizando la demostración de [16] de que al agujero negro se le puede asociar de forma unívoca una entropía, la entropía de Hawking

$$S_{BH} = \frac{\text{Area}}{4G_N}. \quad (71)$$

3.4. Entropía de entrelazamiento holográfica

La entropía del agujero negro puede calcularse mediante [17]

$$S_{BH} = \frac{1}{4G_N} \int_{\text{horizonte}} d^{d-1} x \sqrt{h} = \frac{\text{Vol}(\Omega_{d-2}) L^{d-1}}{4G_N} \int_0^{x_{max}} dx \frac{x^{d-2}}{\sqrt{1+x^2}} \quad (72)$$

donde hemos utilizado que $\sqrt{h} = L^{d-1} \sinh^{d-2}(u)$ y hemos cambiado de coordenada a $x = \sinh(u)$. x_{max} esta determinado por la intersección del *cutoff* en $z = \delta$ con el horizonte, cuando lo vemos

como superficie en el parche de Poincaré (fig. 3). Entonces

$$x_{max} = \sinh(u_{max}) = \sqrt{\frac{R^2}{\delta^2} - 1}. \quad (73)$$

Con un ulterior cambio de coordenadas $x = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$ encontramos

$$S_{BH} = C \int_{\frac{\delta}{R}}^1 \frac{(1-y^2)^{\frac{d-3}{2}}}{y^{d-1}} dy, \quad (74)$$

con $C = 2\pi^{(d-1)/2} L^{d-1} / \Gamma(\frac{d-1}{2})$. La integral (74) da por resultado [17]

$$S_{BH} = p_1 \left(\frac{R}{\delta}\right)^{d-2} + \dots + \begin{cases} p_{d-2} \left(\frac{R}{\delta}\right) + p_{d-1} + O\left(\frac{R}{\delta}\right), & d : \text{impar}, \\ p_{d-3} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 + q \log\left(\frac{R}{\delta}\right) + O(1), & d : \text{par}, \end{cases} \quad (75)$$

con $p_1/C = (d-2)^{-1}$, $p_{d-1}/C = (2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(\frac{2-d}{2})$ y $q/C = (-1)^{(d-2)/2} (d-3)!! / (d-2)!!$.

Con este resultado queda demostrada la **ley de área** para la entropía de entrelazamiento en CFT's holográficas. Observamos que este resultado no es obvio, sino que procede de la forma que toma el determinante de la métrica h dentro de (72). Otra métrica que no fuera la del agujero negro habría proporcionado una dependencia distinta. Observamos también que encontramos la ley de área como en la teoría libre, a pesar de que las teorías holográficas son *strongly coupled* y por lo tanto no se pueden comparar con la teorías libres. Como en caso de $d = 2$ [8], también hay características universales en la entropía de entrelazamiento en dimensiones $d > 2$.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la entropía de entrelazamiento en teorías de campos, dando una introducción general en QM [2] y QFT [10]. En particular, hemos calculado la entropía de entrelazamiento para una CFT libre y para CFT's holográficas, reproduciendo los resultados de [6] y [4, 17] respectivamente. A pesar de ser teorías distintas, la primera libre y la segunda *strongly coupled*, hemos encontrado para ambas una ley de área: en la teoría libre simplemente hemos confirmado la intuición de que el entrelazamiento viene de correlaciones que cruzan la superficie de entrelazamiento, mientras que en la teoría holográfica hemos demostrado la ley de área a partir de interpretar el desarrollo causal de la superficie de entrelazamiento como un agujero negro en el *bulk* de AdS. Es interesante observar que este último calculo pone en relación una estructura no trivial del espacio tiempo con una estructura de entrelazamiento, y por lo tanto estipula, dentro el marco de teorías holográficas, que el espacio-tiempo puede surgir del entrelazamiento.

Aunque el concepto de entropía de entrelazamiento se aplique a cualquier QFT, el rol de la simetría conforme ha sido crucial para llevar a cabo el cálculo de las funciones de partición que determinan la entropía de entrelazamiento. Esta discusión, a la vez que proporciona un recorrido original dentro de la idea de Feynman de definir teorías cuánticas de campos por medio de la *path integral*, ayuda a entender de forma más profunda las consecuencias del entrelazamiento en la física moderna.

La entropía de entrelazamiento también es la base para la teoría de la información cuántica, que como hemos llegado a ver en teorías holográficas, hoy en día tiene aplicaciones muy interesantes en teorías de gravedad. Este trabajo ha sido útil para dar un perspectiva amplia sobre un tema

tan complejo como el posible planteamiento de un paradigma que combine gravedad y mecánica cuántica de forma satisfactoria.

Referencias

- [1] Daniel F. Styer et al. «Nine formulations of quantum mechanics». En: *American Journal of Physics* 70.3 (mar. de 2002), págs. 288-297. ISSN: 0002-9505. DOI: [10.1119/1.1445404](https://doi.org/10.1119/1.1445404).
- [2] David J. Griffiths y Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3.^a ed. Cambridge University Press, 2018.
- [3] H Casini y M Huerta. «Entanglement entropy in free quantum field theory». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.50 (dic. de 2009), pág. 504007. ISSN: 1751-8121. DOI: [10.1088/1751-8113/42/50/504007](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504007).
- [4] Horacio Casini, Marina Huerta y Robert C. Myers. «Towards a derivation of holographic entanglement entropy». En: *Journal of High Energy Physics* 2011.5 (mayo de 2011). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep05\(2011\)036](https://doi.org/10.1007/jhep05(2011)036).
- [5] Matthew Headrick. *Lectures on entanglement entropy in field theory and holography*. 2019. arXiv: [1907.08126](https://arxiv.org/abs/1907.08126) [hep-th].
- [6] Igor R. Klebanov et al. «Rényi entropies for free field theories». En: *Journal of High Energy Physics* 2012.4 (abr. de 2012). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep04\(2012\)074](https://doi.org/10.1007/jhep04(2012)074).
- [7] Andrew M. Evans, Alexandra Miller y Aaron Russell. *A Conformal Field Theory Primer in $D \geq 3$* . 2023. arXiv: [2309.10107](https://arxiv.org/abs/2309.10107) [hep-th].
- [8] Pasquale Calabrese y John Cardy. «Entanglement entropy and conformal field theory». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.50 (dic. de 2009), pág. 504005. ISSN: 1751-8121. DOI: [10.1088/1751-8113/42/50/504005](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504005).
- [9] Ling-Yan Hung et al. «Holographic calculations of Rényi entropy». En: *Journal of High Energy Physics* 2011.12 (dic. de 2011). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep12\(2011\)047](https://doi.org/10.1007/jhep12(2011)047).
- [10] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. *A Modern Introduction To Quantum Field Theory*. 1995.
- [11] Juan Maldacena. En: *International Journal of Theoretical Physics* 38.4 (1999), págs. 1113-1133. ISSN: 0020-7748. DOI: [10.1023/a:1026654312961](https://doi.org/10.1023/a:1026654312961).
- [12] Edward Witten. «Anti-de Sitter space and holography». En: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), págs. 253-291. DOI: [10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2](https://doi.org/10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2). arXiv: [hep-th/9802150](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802150).
- [13] Hadyan Luthfan Prihadi et al. «Replica trick calculation for entanglement entropy of static black hole spacetimes». En: *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 20.08 (mar. de 2023). ISSN: 1793-6977. DOI: [10.1142/s0219887823501323](https://doi.org/10.1142/s0219887823501323).
- [14] Eric D'Hoker y Daniel Z. Freedman. *Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence*. 2002. arXiv: [hep-th/0201253](https://arxiv.org/abs/hep-th/0201253) [hep-th].
- [15] Adel Bilal. *Introduction to Supersymmetry*. 2001. arXiv: [hep-th/0101055](https://arxiv.org/abs/hep-th/0101055) [hep-th].
- [16] G. W. Gibbons y S. W. Hawking. «Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity». En: *Phys. Rev. D* 15 (1977), págs. 2752-2756. DOI: [10.1103/PhysRevD.15.2752](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2752).
- [17] Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi. «Holographic Derivation of Entanglement Entropy from the anti-de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence». En: *Physical Review Letters* 96.18 (mayo de 2006). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.96.181602](https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.181602).

- [18] Tatsuma Nishioka, Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi. «Holographic entanglement entropy: an overview». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.50 (dic. de 2009), pág. 504008. DOI: [10.1088/1751-8113/42/50/504008](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/50/504008).
- [19] Wikipedia. *Riemann surface*. n.d. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_surface.

A. Replica Trick

El *replica trick* es un método para calcular la entropía de von Neumann (o de entrelazamiento) a partir de la de Rényi, primero evaluando $\text{tr}\rho_V^q$, después encontrando una continuación analítica y por último tomando el límite $q \rightarrow 1$ [18].

Para calcular $\text{tr}\rho_V^q$, se consideran q copias del sistema, el cual está dividido en dos: V (que es donde queremos medir la entropía) y su complementario, \bar{V} . Las regiones V de cada copia se conectan cíclicamente entre sí, generando una q -sheeted *Riemann surface* para la función $f(z) = z^{1/q}$. Calcular entonces la traza de ρ_V^q será equivalente a calcular la *path integral* en esta superficie de Riemann. Como hemos visto antes, la traza del operador densidad se puede escribir como una función de partición, ver ec. (20), pero ahora sobre esta topología, obteniendo

$$Z_q = \int [D\phi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi, M_q]} \quad (76)$$

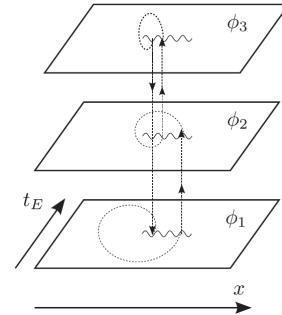
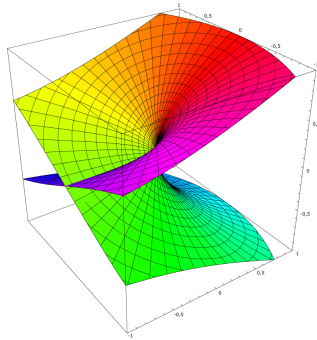
con M_q esta variedad, donde la variable “temporal” euclídea tras la rotación de Wick se considera cíclica y de periodo $2\pi q$. Tras imponer la normalización, obtenemos

$$\text{tr}(\rho_V^q) = \frac{Z_q}{(Z_1)^q}. \quad (77)$$

Si se encuentra una continuación analítica adecuada para Z_q podemos tomar el límite $q \rightarrow 1$

$$S_{VN} = \lim_{q \rightarrow 1} S_q = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_q}{1 - q}, \quad \text{con } \mathcal{F}_q = -\log|Z_q|. \quad (78)$$

y entonces el cálculo de la entropía de entrelazamiento se reduce al cálculo de Z_q , es decir, una *path integral*.



(a) Superficie de Riemann para $f(z) = z^{1/2}$ [19]. (b) Esquema del *replica trick* para $q = 3$ [18].

Figura 4: *Replica trick*