

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



TESIS DOCTORAL

Sobre el género imaginario de grupos finitos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Adrián Bacelo Polo

Director

José Javier Etayo Gordejuela

Madrid, 2015

SOBRE EL
GÉNERO IMAGINARIO
DE GRUPOS FINITOS



TESIS DOCTORAL

Adrián Bacelo Polo

Director: José Javier Etayo Gordejuela

Proyectos: MTM2011-22435

y MTM2014-55565-P

*A M^a Eugenia y Alberto,
los pilares de mi vida.*

Agradecimientos

En primer lugar agradecer a la Universidad Complutense, la Facultad de Matemáticas y en especial al Departamento de Álgebra por el apoyo prestado y por lo bien que me han hecho sentir durante todo este tiempo.

Agradecer enormemente a José Javier Etayo, mi director, todo lo que esta tesis significa. Gracias por el apoyo prestado, por cada bocanada de aliento, por cada palabra de motivación, por apoyar cada una de las locas ideas que se nos ocurrían, por hacer de esta etapa la que más me ha llenado académicamente y por hacerme ver que todo es "finito" y se puede conseguir.

Gracias a los profesores del departamento que me han apoyado, a José Francisco Fernando y José Manuel Gamboa por seguir de cerca el crecimiento de esta tesis y apoyarla, y un agradecimiento especial a Elías, con el que he compartido momentos de clase y de distensión y siempre me ha hecho ver que tenía confianza plena en mí y en lo que hacía. Gracias también a Alicia, mi compañera de despacho, que hemos sufrido juntos esta última etapa y que aunque breve, ha sido alentadora. Y por supuesto, gracias a María, mi compañera de master y de doctorado, que tantos ratos hemos pasado, que tantas historias nos hemos contado y que tanto nos queda por compartir. No me gustaría dejar de mencionar aquí a esas personas que compartieron conmigo mi etapa universitaria: Irene, Sara, Gloria, Isaac, Lu, Laura, Rosa, María, Lucía...

Quiero agradecer a M^aLuisa Marmol y a Paco Méndez, mis dos maestros en el teatro, todo lo que me han enseñado y me han aportado, el hacerme mejor persona y sobre todo el haber hecho posible que entre grupo y grupo, pudiera vivir una vida paralela guiada por ellos. Gracias también a Esteban Pérez, mi sensei durante todo mi vida, y a todos mis compañeros y compañeras de dojo (Tony, María, Josito, Agustín, Santi, etc) por enseñarme valores, por enseñarme más allá del tatami y por hacerme ver que la vida hay que disfrutarla y vivirla, luchando por lo que crees.

Gracias a Pablo, a Tuda y a Isa, por todo lo que representais para mí, y que aunque lejos unos de otros, os siento cerca y eso me da fuerzas para seguir adelante y conseguir todos los retos que me proponga. Gracias a Aldaba, mi asociación, y toda la gente que lo compone por ser una parte fundamental de mi vida y aportarme tantas cosas positivas, haciendo posible que esta tesis contenga tanto.

Es necesario y fundamental agradecer a mis amigos y amigas todo lo que son en mi vida, todo lo que me regalan, todo lo que me aguantan, y todo lo que me dan sin darles yo nada a cambio, pues así he podido escribir estas hojas con tanto cariño. Gracias a Ceci, Alba, Silvia, Eloy y Mery, que representan la felicidad de mi vida, mi alegría del día a día, esa familia que elegimos y de la que me siento muy orgulloso, esos que espero esten conmigo mucho tiempo. Gracias a Joze por todo lo que me ha enseñado durante

tanto tiempo y por seguir de cerca este proyecto, así como mi vida en general para poder echar una mano en todo lo que necesitara. Y por supuesto, gracias a May, mi sol, mi otra mitad, mi todo, mi hermana, la que siempre me ha dado fuerza en los peores momentos y para la que no tengo palabras para agradecer todo lo que me ha dado en mi vida.

Por último, como no, gracias a mi padre Alberto y mi madre M^aEugenia, que siempre me han apoyado, que han confiado en mi y han estado al pie del cañón conmigo, aguantando el género imaginario de los grupos desde el principio. Gracias a Ricardo y Elena, mi hermano de sangre y amigo de vida y a su compañera de camino, que siempre han sido los que me han acompañado en cada locura que he iniciado. Y gracias a mi tía Matilde, mi tío Pepe, y mis primas Matilde y M^aCarmen, por cada momento de risas y de distensión necesario entre tanto estrés.

Indice

SUMMARY	I
PRELIMINARES	1
Superficies de Klein y grupos NEC	1
Grupos de automorfismos de las superficies	2
Datos conocidos sobre el género imaginario	3
CAPITULO 1	8
Grupos de género imaginario 10	9
Grupos de género imaginario 11	22
Grupos de género imaginario 12	25
Grupos de género imaginario 13	29
Grupos de género imaginario 14	31
Grupos de género imaginario 15	43
Grupos de género imaginario 16	44
Grupos de género imaginario 17	49
Tablas resumen	55
CAPITULO 2	60
Grupos de orden 32	61
Grupos de orden 33	76
Grupos de orden 34	76
Grupos de orden 35	76
Grupos de orden 36	76
Grupos de orden 37	79
Grupos de orden 38	79
Grupos de orden 39	80
Grupos de orden 40	80
Grupos de orden 41	82
Grupos de orden 42	83
Grupos de orden 43	83
Grupos de orden 44	84
Grupos de orden 45	84
Grupos de orden 46	85
Grupos de orden 47	85
Grupos de orden 48	85
Grupos de orden 49	100
Grupos de orden 50	100
Grupos de orden 51	101
Grupos de orden 52	101
Grupos de orden 53	102
Grupos de orden 54	102

Grupos de orden 55	106
Grupos de orden 56	106
Grupos de orden 57	108
Grupos de orden 58	109
Grupos de orden 59	109
Grupos de orden 60	109
Grupos de orden 61	113
Grupos de orden 62	113
Grupos de orden 63	114
Tablas resumen	115
CAPITULO 3	124
SECCIÓN 1	125
Grupos de género imaginario 27	125
Grupos de género imaginario 39	127
Grupos de género imaginario 51	128
Grupos de género imaginario 63	130
Tablas resumen	132
SECCIÓN 2	133
SECCIÓN 3	137
BIBLIOGRAFIA	146

SUMMARY

The goal of this Thesis is to study several questions related to the symmetric crosscap number of finite groups. This number is defined in terms of non-orientable, unbordered, Klein surfaces. Such a surface is a compact non-orientable unbordered surface endowed with a dianalytic atlas. Throughout the thesis we only deal with this kind of surfaces, and so we call them simply surfaces. These surfaces are determined topologically by their topological genus g . If the genus of a surface is at least 3, its automorphism group is finite, and its order is at most $84(g - 2)$. On the other hand, every finite group acts as an automorphism group of some surface. The least among the topological genera of the surfaces on which the group G acts is called the symmetric crosscap number of G , as was defined by Coy L. May, although there exist earlier results on this parameter.

A wealth of results is presently known about the symmetric crosscap number, although the knowledge on parameters as the symmetric genus, or the real genus, is deeper. For instance, the symmetric crosscap number of some infinite families of groups is known, as well as the one of the groups of order lesser than 32. Also, all groups with symmetric crosscap number lesser than 10 have been obtained. All these results are described in terms of the algebraic structure of the finite group. Besides, by using the automatized libraries of GAP and MAGMA, Marston Conder has obtained the symmetric crosscap number of all groups of order up to 127, and the groups whose symmetric crosscap number is minor than 66. These results are given in terms of the label of the finite group G in the library of GAP, and so they do not allow to know directly the algebraic structure of the group.

Probably, the most important problem on the symmetric crosscap number is presently to determine its spectrum, that is to say, to know which integers are the symmetric crosscap number of some group. It is already known that 3 is not the symmetric crosscap number of any group, and all numbers which are not of the form $12k + 3$ belong to the spectrum.

The procedure followed in our work is the following. The surfaces are uniformized by means of non-Euclidean crystallographic (in short, NEC) groups. These groups have a presentation by generators and relations, which is expressed in the so-called signature of the group, which determines the area of its fundamental region. The surface is the quotient of the hyperbolic plane by a surface (that is to say, without torsion elements) NEC group Γ , and its automorphism group is then a quotient Λ/Γ , where Λ is another NEC group containing Γ as a normal subgroup. Then, the symmetric crosscap number of a group G is obtained by obtaining an NEC group Λ whose fundamental region has minimal area, such that there exists an epimorphism from Λ onto G with kernel Γ , such that G is obtained by images of orientation-preserving elements of Γ .

The lists of Marston Conder identify each finite group by its label in the GAP li-

brary. For each group they give its symmetric crosscap number and the signature of the NEC group Λ . In the first two chapters of the thesis we have identified all groups with symmetric crosscap number between 10 and 17, as well as the symmetric crosscap number of all groups with order between 32 and 63. In order to solve both problems, the first step has been to determine the algebraic structure of the group G , and then, for the corresponding NEC group Λ , to obtain an epimorphism from Λ onto G with kernel Γ . In some cases, for a given group G there exist several groups Λ , and then the epimorphisms corresponding to each of them have been obtained. This work has been especially difficult when the group G has a big order, since then it has been necessary to determine its algebraic structure, and in some cases also a presentation by generators and relations allowing to define the suitable epimorphism.

The results of this thesis are the following. Firstly, all groups with symmetric crosscap number between 10 and 17 have been identified. Secondly, the symmetric crosscap number of all groups of order between 32 and 63. In both cases, we give the algebraic structure of the finite group, as well as a presentation by generators and relations, and the corresponding epimorphism. Finally, we study the spectrum. Since the relevant numbers are those of the form $12k + 3$, we study carefully the groups of symmetric crosscap number 27, 39, 51 and 63. There appear groups of very high order, whose algebraic structure has been deduced case by case, and the result has been very fruitful: from that study we have got information enough to obtain five infinite families of groups whose symmetric crosscap numbers are of the form $12k + 3$. Those numbers were already known to be in the spectrum, but the study of a group of symmetric crosscap number 27 has allowed to define a new family of groups which are candidates to cover all numbers of the form $60k + 27$. These integers, which evidently belong to the set of multiples of 12 plus 3, are the majority among those which is still unknown whether they belong to the spectrum. In the last Section of the thesis it is proven that the first groups in the family have symmetric crosscap number 207 and 267, which were the first two numbers whose belonging to the spectrum was undecided.

This result enforces the idea that the symmetric crosscap number of each group in the family, say G_k , is just $60k + 27$. Hence all these numbers should belong to the spectrum of the symmetric crosscap number. If this is really so, 495 becomes the first number of which it is not known whether it belongs to the spectrum. It looks like the conclusion should be that 3 is actually the unique integer outside the spectrum. However, we have no idea by now about how to find a group of symmetric crosscap number, for instance, 495.

PRELIMINARES

Superficies de Klein y grupos NEC

Una superficie de Klein S es una superficie compacta dotada de una estructura dianalítica [1]. Las superficies de Klein pueden ser vistas como una generalización de superficies de Riemann incluyendo las superficies con borde y no orientables. Una superficie de Klein orientable sin borde es una superficie de Riemann. Dada una superficie de Klein X de género topológico g con k componentes en el borde, el número $p = \eta g + k - 1$ se llama género algebraico de X , donde $\eta = 2$ si X es una superficie orientable y $\eta = 1$ si no.

En el estudio de superficies de Klein y sus grupos de automorfismos los grupos cristalográficos no euclídeos (Grupos NEC, en inglés) juegan un papel esencial. Un grupo NEC Γ es un subgrupo discreto de \mathcal{G} (el grupo completo de isometrías del plano hiperbólico \mathcal{H}) con cociente compacto \mathcal{H}/Γ . Para cada superficie de Klein X con $p \geq 2$ existe un grupo NEC Γ , tal que $X = \mathcal{H}/\Gamma$.

Un grupo finito G de orden N es un grupo de automorfismos de una superficie de Klein $X = \mathcal{H}/\Gamma$ si y solo si existe un grupo NEC Λ tal que Γ es un subgrupo normal de Λ con índice N y $G = \Lambda/\Gamma$. Cada grupo finito G actúa como grupo de automorfismos de una superficie de Klein no orientable sin borde. Al mínimo género de estas superficies lo llamaremos género imaginario de G y se denota por $\tilde{\sigma}(G)$. Una superficie de género topológico $g \geq 3$ tiene a lo más $84(g - 2)$ automorfismos. Así que para cada g hay un número finito de grupos actuando en una superficie de género g .

Un grupo NEC Γ es un subgrupo discreto de isometrías del plano hiperbólico \mathcal{H} , incluyendo elementos que inviertan la orientación, con cociente compacto $X = \mathcal{H}/\Gamma$. Cada grupo NEC Γ tiene asociada una signatura [18]:

$$\sigma(\Gamma) = (g, \pm, [m_1, \dots, m_r], \{(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i}), i = 1, \dots, k\}), \quad (1)$$

donde $g, k, r, m_i, n_{i,j}$ son enteros que satisfacen $g, k, r \geq 0, m_i \geq 2, n_{i,j} \geq 2$. Los números m_i son los períodos propios. Los paréntesis $(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i})$ son los ciclo-períodos. Los números $n_{i,j}$ son los períodos del ciclo-período $(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i})$. Denotaremos por $[-]$, $(-)$ y $\{-\}$ los casos en los que $r = 0$, $s_i = 0$ y $k = 0$, respectivamente.

La signatura determina una presentación [30] de Γ por los generadores x_i ($i = 1, \dots, r$); e_i ($i = 1, \dots, k$); $c_{i,j}$ ($i = 1, \dots, k; j = 0, \dots, s_i$); a_i, b_i ($i = 1, \dots, g$) si σ tiene signo '+'; y d_i ($i = 1, \dots, g$) si σ tiene signo '-'.

Estos generadores satisfacen las siguientes relaciones:

$$x_i^{m_i} = 1; c_{i,j-1}^2 = c_{i,j}^2 = (c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1; e_i^{-1}c_{i,0}e_i c_{i,s_i} = 1$$

y

$$\prod_{i=1}^r x_i \prod_{i=1}^k e_i \prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 1 \text{ si } \sigma \text{ tiene signo '+'}$$

$$\prod_{i=1}^r x_i \prod_{i=1}^k e_i \prod_{i=1}^g d_i^2 = 1 \text{ si } \sigma \text{ tiene signo '-'}$$

Las isometrías x_i son elípticas, e_i, a_i, b_i son hiperbólicas, $c_{i,j}$ son reflexiones y d_i son reflexiones sesgadas.

Cada grupo NEC Γ con signatura (1) tiene asociada una región fundamental cuya área $\mu(\Gamma)$, llamada el área del grupo, es:

$$\mu(\Gamma) = 2\pi \left(\eta g + k - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}} \right) \right), \quad (2)$$

con $\eta = 2$ o 1 dependiendo del signo '+' o '-' en la signatura. Un grupo NEC con signatura (1) existe si y solo si el lado derecho de (2) es mayor que 0 . Denotamos por $|\Gamma|$ la expresión $\mu(\Gamma)/2\pi$ y se llama el área reducida de Γ .

Si Γ es un subgrupo de un grupo NEC Λ de índice finito N , entonces Γ también es un grupo NEC y por la fórmula de Riemann-Hurwitz, $|\Gamma| = N|\Lambda|$.

Sea X una superficie de Klein no orientable de género topológico $g \geq 3$ sin borde. Entonces por [24] existe un grupo NEC Γ con signatura:

$$\sigma(\Gamma) = (g, -, [-], \{-\}), \quad (3)$$

tal que $X = \mathcal{H}/\Gamma$.

Grupos de automorfismos de las superficies

Cada grupo finito G actúa como un grupo de automorfismos de alguna superficie de Klein no orientable y sin borde, lo cual fue estudiado y demostrado por Bujalance en [3]. El mínimo género de estas superficies lo llamaremos género imaginario de G , y se denota por $\tilde{\sigma}(G)$. Sea $X = \mathcal{H}/\Gamma$ una superficie no orientable y sin borde en la cual G actúa como un grupo de automorfismos. Entonces existe otro grupo NEC de superficie Λ tal que $G = \Lambda/\Gamma$. De la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que $g - 2 = o(G)|\Lambda|$, donde $o(G)$ denota el orden de G . Entonces

$$\tilde{\sigma}(G) \leq g = 2 + o(G)|\Lambda|,$$

y así obtener el género imaginario es equivalente a encontrar un grupo Λ y un epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ tal que $\Gamma = \ker \theta$ es un grupo NEC de superficie (esto es, sin elementos de orden finito) y $G = \theta(\Lambda^+)$, donde Λ^+ es el subgrupo formado por los elementos de Λ que preservan la orientación, ver [25], y con mínima $|\Lambda|$.

Datos conocidos sobre el género imaginario

Los grupos que tienen género imaginario 1 y 2 han sido clasificados por T.W. Tucker [29]. Los grupos de género 1 son C_n, D_n, A_4, S_4 y A_5 . Tenemos dos familias de grupos de género 2, $C_2 \times C_n$, $n > 2$ par, y $C_2 \times D_n$, n par. Se sabe que no existe grupo con género imaginario 3, [19].

El género imaginario de los grupos que pertenecen a varias familias infinitas también se ha obtenido. Para los grupos Abelianos de orden impar ha sido calculado en [8] y este resultado fue extendido a todos los grupos Abelianos en [15]. May obtuvo en [19] el género imaginario de los grupos dicíclicos y grupos Hamiltonianos sin parte de orden impar.

Además se sabe el género imaginario de los grupos $C_m \times D_n$ [9], de los grupos $D_m \times D_n$ [10] y de los grupos $DC_3 \times C_n$ y $A_4 \times C_n$ [11]. También se ha obtenido ya el género imaginario de todos los grupos de orden menor que 32, [12].

A continuación exponemos el género imaginario de los grupos de orden menor que 32 cuando no es 1 ni 2, para éstos, véase arriba:

G	$o(G)$	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia
$Q \approx DC_2$	8	6	May [19]
$C_3 \times C_3$	9	5	Etayo [8]
DC_3	12	7	May[19]
$C_4 \times C_4$	16	10	Gromadzki [15]
$C_2 \times C_2 \times C_4$	16	10	Gromadzki [15]
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	16	6	Gromadzki [15]
$C_2 \times Q$	16	14	May [19]
DC_4	16	10	May [19]
L_4	16	6	Etayo y Martínez [12]
$(4,4 \mid 2,2)$	16	6	Etayo y Martínez [12]
QA_4	16	6	Etayo y Martínez [12]
$\langle 2,2,2 \rangle_2$	16	6	Etayo y Martínez [12]
$\langle 2,2 \mid 4; 2 \rangle$	16	10	Etayo y Martínez [12]
$C_3 \times C_6$	18	11	Gromadzki [15]
$C_3 \times D_3$	18	5	Etayo y Martínez [9]
$(3,3 \mid 3;2)$	18	5	Etayo y Martínez [12]
DC_5	20	12	May [19]
$\langle 5,4,2 \rangle$	20	5	Etayo y Martínez [12]
G_{21}	21	9	Etayo y Martínez [12]
$C_2 \times C_2 \times C_6$	24	14	Gromadzki [15]
$C_4 \times D_3$	24	8	Etayo y Martínez [9]
$DC_3 \times C_2$	24	14	Etayo y Martínez [11]
$A_4 \times C_2$	24	4	Etayo y Martínez [11]
$C_3 \times D_4$	24	8	Etayo y Martínez [9]
$C_3 \times Q$	24	18	Etayo y Martínez [12]
$(4,6 \mid 2,2)$	24	7	Etayo y Martínez [12]
$\langle 2,3,3 \rangle$	24	10	Etayo y Martínez [12]
$\langle -2,2,3 \rangle$	24	15	Etayo y Martínez [12]
DC_6	24	14	May [19]
$C_5 \times C_5$	25	17	Etayo [8]
$C_3 \times C_9$	27	17	Etayo [8]
$C_3 \times C_3 \times C_3$	27	29	Etayo [8]
$(3,3 \mid 3,3)$	27	11	Etayo y Martínez [12]
$C_9 \times C_3$	27	17	Etayo y Martínez [12]
DC_7	28	16	May [19]
$C_3 \times D_5$	30	9	Etayo y Martínez [9]
$C_5 \times D_3$	30	9	Etayo y Martínez [9]

Tabla 1. Grupos de orden menor que 32 con género imaginario mayor que 2

Además, se conocen todos los grupos que hay con género imaginario menor o igual que 9:

Género imaginario 1: Tucker [29]

G	$o(G)$
C_n	n
D_n	$2n$
A_4	12
S_4	24
A_5	120

Género imaginario 2: Tucker [29]

G	$o(G)$
$C_2 \times C_n, n > 2$ par	$2n$
$C_2 \times D_n, n$ par	$4n$

Género imaginario 3: No hay, May [19]

Género imaginario 4: Bujalance, Etayo y Martínez [4]

G	$o(G)$	Referencia
$C_2 \times A_4$	24	Etayo y Martínez [11]
$C_2 \times S_4$	48	Etayo y Martínez [9]

Género imaginario 5: Bujalance, Etayo y Martínez [4]

G	$o(G)$	Referencia
$C_3 \times C_3$	9	Etayo [8]
$(3,3,3;2)$	18	Etayo y Martínez [12]
$C_3 \times D_3$	18	Etayo y Martínez [9]
$\langle 5,4,2 \rangle$	20	Etayo y Martínez [12]
$D_3 \times D_3$	36	Etayo y Martínez [10]
$(4,4 \mid 2,3)$	36	Bujalance, Etayo y Martínez [4]
$(2,4,6;2)$	72	Bujalance, Etayo y Martínez [4]
S_5	120	May y Zimmerman [23]

Género imaginario 6:

G	$o(G)$	Referencia
$Q \approx DC_2$	8	May [19] y A. Bacelo [2]
$(4,4 \mid 2,2)$	16	A. Bacelo [2] y Etayo, Martínez [12]
QA_4	16	Etayo, Martínez [12]
L_4	16	A. Bacelo [2] y Etayo, Martínez [12]
$\langle 2,2,2 \rangle_2$	16	Etayo, Martínez [12]
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	16	Gromadzki [15]
$\Gamma_4 a_1$	32	A. Bacelo [2]
$\Gamma_6 a_1$	32	A. Bacelo [2]
$(2,5,5;2)$	80	A. Bacelo [2]
$C_2 \times A_5$	120	A. Bacelo [2]
$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_2$	160	A. Bacelo [2]

Género imaginario 7:

G	$o(G)$	Referencia
DC_3	12	May [19] y A. Bacelo [2]
$(4,6 \mid 2,2)$	24	Etayo, Martínez [12]
$(C_2 \times C_2) \rtimes C_9$	36	A. Bacelo [2]
$((C_2 \times C_2) \rtimes C_9) \rtimes C_2$	72	A. Bacelo [2]

Género imaginario 8:

G	$o(G)$	Referencia
$C_4 \times D_3$	24	A. Bacelo [2] y Etayo, Martínez [9]
$C_3 \times D_4$	24	Etayo, Martínez [9]
$D_3 \times D_4$	24	Etayo, Martínez [10]
$(C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_7$	56	A. Bacelo [2]
$PSL(2,8)$	504	A. Bacelo [2] y Hall [16]

Género imaginario 9:

G	$o(G)$	Referencia
G_{21}	21	Etayo, Martínez [12]
$C_5 \times D_3$	30	Etayo, Martínez [9]
$C_3 \times D_5$	30	Etayo, Martínez [9]
$\langle 7,6,5 \rangle$	42	A. Bacelo [2]
$D_3 \times D_5$	60	Etayo, Martínez [10]
$PSL(2,7)$	168	A. Bacelo [2]
$PSL(2,7) \rtimes C_2$	336	A. Bacelo [2]

M.D.E. Conder en una conferencia en Castro-Urdiales en 2010 anunció que usando software informático, había obtenido los grupos de género imaginario hasta 65, en términos de su descripción en la "SmallGroupLibrary" de MAGMA. El resultado de esta investigación está disponible en su página web <http://www.math.auckland.ac.nz/~conder/>.

La lista contiene la referencia GAP del grupo, su género imaginario y el grupo NEC correspondiente. Sin embargo, esta lista no da información ni sobre la estructura algebraica de los grupos ni sobre los epimorfismos θ que determinan la acción del grupo NEC Λ sobre el grupo G .

En el presente trabajo vamos a estudiar tres tipos de problemas sobre el género imaginario. Por un lado, describir la estructura algebraica, y los respectivos epimorfismos para todos los grupos con género imaginario desde 10 hasta 17. Por otro, continuar la determinación del género imaginario de los grupos de orden pequeño, obteniendo el de todos los grupos desde orden 32 hasta orden 63.

Finalmente el tercer capítulo presta especial atención a grupos que tienen género imaginario de la forma $12k + 3$. Ello se debe a que son los únicos números que no está garantizados que pertenezcan al espectro del género imaginario, véase [14].

Utilizando los resultados sobre grupos concretos, obtenidos en los Capítulos 1 y 2, y en las dos primeras secciones del Capítulo 3, se da un gran avance en la determinación de dicho espectro. En efecto, la mayoría de los números (siempre de la forma $12k + 3$) de los que se ignora si son género imaginario de algún grupo, son congruentes con 27 módulo 60. Pues bien, la Sección tercera y última del capítulo 3 está dedicada a construir una familia infinita de grupos, cada una de los cuales tiene género imaginario menor igual que $60k + 27$ para cada k , y en concreto, para $k = 3, 4$, el género imaginario es precisamente ese. De este modo se obtiene ya sendos grupos de género imaginario 207 y 267, con lo cual están cubiertos todos los números hasta 387. Estos resultados concretos dan pistas firmes para probar que efectivamente todos los números de la forma $60k + 27$ pertenecen al espectro.

CAPÍTULO 1

En este primer capítulo vamos a estudiar los grupos con género imaginario entre 10 y 17, ambos inclusive. En cada género, estudiaremos todos los grupos que aparecen en la lista de Conder, estableciendo su estructura algebraica y el epimorfismo explícito asociado al grupo NEC. Además se detalla en cada uno de ellos por qué el morfismo que se indica es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable.

Como se ha indicado en los preliminares, los grupos de género imaginario menor o igual que 5 habían sido ya obtenidos, y en [2] describí los que tienen género imaginario entre 6 y 9. Aquí se continúa este proceso hasta género 17 inclusive.

Para cada grupo G describiremos su estructura algebraica, y para cada una de las signaturas del grupo NEC Λ que correspondan a G definiremos el epimorfismo de Λ en G cuyo núcleo sea el grupo NEC que determine la superficie no orientable sin borde del género del que se trate. En las ocasiones en las que esto ya haya sido hecho, indicaremos el trabajo en que se hizo por primera vez.

Grupos de género imaginario 10

Según la lista de Conder, tendríamos 30 grupos de género imaginario 10, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[16,2]	16	(0; +; [4,4]; {(-)})
[16,4]	16	(0; +; [4,4]; {(-)})
[16,9]	16	(0; +; [4,4]; {(-)})
[16,10]	16	(0; +; [4]; {(2,2,2)}) ó (0; +; [-]; {(2,2), (-)}) ó (0; +; [2]; {(-), (-)})
[24,3]	24	(0; +; [3,3]; {(-)})
[32,5]	32	(0; +; [-]; {(-), (2)})
[32,6]	32	(0; +; [4]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,4]; {(-)}) ó (0; +; [-]; {(-), (2)})
[32,7]	32	(0; +; [-]; {(-), (2)})
[32,9]	32	(0; +; [4]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,4]; {(-)})
[32,11]	32	(0; +; [4]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,4]; {(-)})
[32,17]	32	(0; +; [-]; {(-), (2)})
[32,19]	32	(0; +; [4]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,4]; {(-)})
[32,28]	32	(0; +; [-]; {(2,2,4,4)})
[32,34]	32	(0; +; [-]; {(2,2,4,4)})
[32,42]	32	(0; +; [-]; {(2,2,4,4)})
[32,46]	32	(0; +; [-]; {(2,2,2,2,2)})
[32,49]	32	(0; +; [-]; {(2,2,2,2,2)})
[48,29]	48	(0; +; [-]; {(2,2,3,3)}) ó (0; +; [3]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,3]; {(-)})
[48,31]	48	(0; +; [12]; {(2)})
[48,33]	48	(0; +; [3]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,3]; {(-)})
[48,50]	48	(0; +; [3]; {(2,2)})
[64,128]	64	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[64,134]	64	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[64,138]	64	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[64,190]	64	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[96,70]	96	(0; +; [6]; {(2)})
[96,187]	96	(0; +; [-]; {(2,4,12)})
[96,193]	96	(0; +; [-]; {(2,2,2,3)})
[96,227]	96	(0; +; [-]; {(3,4,4)}) ó (0; +; [-]; {(2,2,2,3)})
[192,955]	192	(0; +; [-]; {(2,4,6)})

\Rightarrow El primer grupo que tenemos es el [16,2] que tiene estructura algebraica $C_4 \times C_4$. Este grupo ha sido estudiado explícitamente en [15]. Consideremos a y b los generadores de cada C_4 respectivamente. Para el grupo NEC (0; +; [4,4]; {(-)}) tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(e_1) = b^3a^3, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Si tomamos los elementos x_1 y x_2 vemos que tienen como imagen los generadores a y b respectivamente y son elementos que preservan la orientación, luego es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El segundo grupo es el [16,4] cuya estructura algebraica es $C_4 \rtimes C_4$. Este grupo ha sido estudiado explícitamente en [12]. Consideremos S, T generadores tales que cumplen $S^4 = T^4 = 1$ y $T^{-1}ST = S^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = S, \quad \theta(x_2) = ST, \quad \theta(e_1) = T^3S^2, \quad \theta(c_{1,0}) = S^2$$

Si tomamos el elemento x_1 , su imagen es el generador S , y la imagen del elemento $(x_1)^3x_2$ es el generador T . Ambos son elementos que preservan la orientación, luego tenemos el grupo generador como imágenes de elementos que conservan la orientación y hemos comprobado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es [16,9] que tiene estructura algebraica Q_{16} . Este grupo ha sido estudiado por May en [19] dando su género imaginario, pero no el epimorfismo explícito. Así, consideremos X, Y generadores tales que cumplen las relaciones $X^8 = 1, X^4 = Y^2, Y^{-1}XY = X^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = XY, \quad \theta(e_1) = X^5, \quad \theta(c_{1,0}) = Y^2$$

Si tomamos el elemento x_1 y el elemento $x_2(x_1)^3$ vemos que tienen como imagen los generadores Y y X respectivamente y son elementos que preservan la orientación, luego es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [16,10], cuya estructura algebraica es $C_4 \times C_2 \times C_2$. Este grupo ha sido estudiado explícitamente en [15]. Consideremos a, b y c los generadores de cada C_2, C_2 y C_4 respectivamente. En este caso tenemos 3 grupos NEC, luego:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(e_1) = c^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ab, \quad \theta(c_{1,1}) = bc^2, \quad \theta(c_{1,2}) = c^2, \quad \theta(c_{1,3}) = ab$$

Tenemos por una parte que la imagen del elemento x_1 es el generador c . Por otro lado, si tomamos los elementos $c_{1,0}c_{1,1}x_1^2$ y $c_{1,1}c_{1,2}$ tienen como imagen los generadores a y b respectivamente. Así tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación, luego tenemos un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(e_1) = c, \quad \theta(e_2) = c^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ab, \quad \theta(c_{1,1}) = a, \quad \theta(c_{1,2}) = ab, \quad \theta(c_{2,0}) = b$$

Tenemos por una parte que la imagen del elemento e_1 es el generador c . Por otro lado, si tomamos los elementos $c_{1,0}c_{2,0}$ y $c_{1,0}c_{1,1}$ tienen como imagen los generadores a y b respectivamente. Así tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación, luego tenemos un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

iii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(e_1) = c, \quad \theta(e_2) = c^{-1}a, \quad \theta(c_{1,0}) = c^2a, \quad \theta(c_{2,0}) = b$$

Claramente es epimorfismo ya que todos los generadores están en la imagen. Ahora, si tomamos el elemento $x_1(e_1)^2c_{1,0}$ vemos que tiene como imagen el elemento neutro y es un elemento que invierte la orientación, luego es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[24,3]$ con estructura algebraica $\langle 2, 3, 3 \rangle$. Este grupo se estudia con profundidad en [12]. Dada una presentación del grupo con generadores A, B tales que cumplen $A^3 = 1$ y $ABA = BAB$. Para el grupo NEC $(0; +; [3,3]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(x_2) = B, \quad \theta(e_1) = (AB)^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = (AB^{-1})^2$$

Es claro que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que la imagen de x_1 y de x_2 son los generadores A y B respectivamente y ambos son elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El siguiente en la lista que tenemos es [32,5]. Para los grupos de orden 32 seguiremos la notación utilizada en [17]. En este caso se corresponde con Γ_{2j_1} y su estructura algebraica es $(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$. Atendiendo a [26], este grupo tiene una presentación dada por los generadores a, b, c tales que cumplen $a^2 = b^8 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca$ y $bc = cab$. Así para el grupo NEC dado $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(e_1) = b, \quad \theta(c_{1,0}) = a, \quad \theta(e_2) = b^{-1}, \quad \theta(c_{2,0}) = c, \quad \theta(c_{2,1}) = ac$$

Veamos pues que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Claramente los generadores a, b, c están en la imagen, y además tenemos que el elemento $e_2c_{1,0}c_{2,0}e_1c_{2,0}$ tiene como imagen el elemento neutro, y además es un elemento que invierte la orientación. Así tenemos lo que buscábamos. El área del grupo NEC asociado

es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow Ahora nos toca analizar el siguiente grupo que es [32,6], que tiene estructura algebraica $((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$ y que se corresponde con $\Gamma_7 a_1$ según la notación previamente indicada. En [26] encontramos la presentación de este grupo dada por generadores a, b, c, d tales que cumplen $a^2 = b^2 = c^2 = d^4 = 1, bd = dab, cd = dabc$ y el resto conmutan entre ellos. En este caso tenemos 3 grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo correspondiente es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = d, \quad \theta(e_1) = d^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{1,1}) = b, \quad \theta(c_{1,2}) = bc$$

Los generadores están en la imagen, pues b, c, d son imágenes directas de elementos, y para conseguir a solo hace falta la imagen del elemento $x_1^3 c_{1,0} x_1 c_{1,2}$. Es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que la imagen del elemento $c_{1,0} c_{1,1} c_{1,2}$ es el elemento neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(x_2) = dc, \quad \theta(e_1) = cd^{-1}c, \quad \theta(c_{1,0}) = a$$

Los generadores están en la imagen porque las imágenes de $x_1, c_{1,0}$ y $x_2 x_1$ son los generadores c, a y d respectivamente. Además tenemos que la imagen del elemento $c_{1,0} (x_2 x_1)^3 x_1 x_2$ es el generador b . Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el elemento $(c_{1,0} (x_2 x_1)^3 x_1 x_2) x_2 x_1 (c_{1,0} (x_2 x_1)^3 x_1 x_2) c_{1,0} (x_2 x_1)^3$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = dc, \quad \theta(e_2) = cd^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a, \quad \theta(c_{2,0}) = c, \quad \theta(c_{2,1}) = dcd^{-1}$$

Tenemos que los generadores están en la imagen, ya que la imagen de $c_{1,0}$ es el generador a , la imagen de $c_{2,0}$ es el generador c , la imagen de $e_1 c_{2,0}$ es el generador d y la imagen de $c_{1,0} (e_1 c_{2,0})^3 c_{2,0} e_1$ es el generador b . Ahora, es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que tenemos que la imagen del elemento $c_{1,0} (e_1 c_{2,0})^3 c_{2,0} e_1 e_1 c_{2,0} c_{1,0} (e_1 c_{2,0})^3 c_{2,0} e_1 c_{1,0} (e_1 c_{2,0})^3$ es el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida de este grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [32,7] que tiene estructura algebraica $(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2$. En la referencia que utilizamos se corresponde con $\Gamma_7 a_2$. Según [26] este grupo tiene una presentación dada por los generadores a, b, c tales que cumplen

$a^8 = b^2 = c^2 = 1, ab = ba^5, ac = cba$ y $bc = cb$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^4, \quad \theta(c_{2,0}) = c, \quad \theta(c_{2,1}) = aca^{-1}$$

Los generadores están en la imagen porque las imágenes de $e_1, c_{2,0}$ y $c_{2,0}c_{2,1}$ van a los generadores a, c y b respectivamente. Claramente es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el elemento $(e_1)^4c_{1,0}$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow Ahora analizamos el grupo [32,9], cuya notación es Γ_3c_1 y tiene estructura algebraica $(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$. Tenemos en [26] una presentación dada por los generadores a, b, c que cumplen $a^2 = b^8 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca$ y $bc = cab^{-1}$. En este caso tenemos 2 grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo correspondiente es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = bc, \quad \theta(e_1) = cb^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{1,1}) = a, \quad \theta(c_{1,2}) = bcb^{-1}$$

Tenemos los generadores c, a y b como imágenes de los elementos $c_{1,0}, c_{1,1}$ y $x_1c_{1,0}$. Es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que la imagen del elemento $x_1^2c_{1,1}$ es el elemento neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(x_2) = bc, \quad \theta(e_1) = cb^{-1}c, \quad \theta(c_{1,0}) = a$$

Tenemos los generadores a, b y c como imágenes de los elementos $c_{1,0}, x_2x_1$ y x_1 . Claramente es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el elemento $x_2^2c_{1,0}$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos que estudiar es el [32,11] cuya estructura algebraica es $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$ y que en la referencia que utilizamos se corresponde con Γ_3e . La presentación de este grupo, según [26], está dada por los generadores a, b, c que cumplen que $a^4 = b^4 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca$ y $bc = cab^{-1}$. Aquí tenemos 2 grupos NEC, así:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{1,1}) = a^2, \quad \theta(c_{1,2}) = bcb^{-1}$$

Los generadores a, b y c los tenemos como imágenes de los elementos $(c_{1,0}x_1)^2, x_1$ y $c_{1,0}$ respectivamente. Claramente es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el elemento $c_{1,1}(c_{1,0}x_1)^4$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}c, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Si tomamos los elementos $(x_1x_2)^2, x_2$ y x_1 , sus imágenes son los generadores a, b y c . Claramente es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que los elementos antes mencionados preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el siguiente grupo [32,17]. Tomamos Γ_2k con estructura algebraica $C_{16} \times C_2$. La presentación de este grupo, que encontramos en [26], viene dada por los generadores a, b tales que cumplen las relaciones $a^{16} = b^2 = 1$ y $ab = ba^9$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$, tenemos el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado que es

$$\theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^8, \quad \theta(c_{2,0}) = b, \quad \theta(c_{2,1}) = ba^8$$

Tenemos los generadores del grupo como imágenes de los elementos e_1 y $c_{2,0}$. Es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que la imagen del elemento $c_{1,0}e_1^8$ es el elemento neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [32,19], de estructura algebraica QD_{32} . En la referencia que utilizamos se corresponde con Γ_8a_2 . Este grupo tiene una presentación con generadores a, b tales que $a^{16} = b^2 = 1$ y $ab = ba^7$, según [26]. Aquí tenemos dos grupos NEC, luego:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ba, \quad \theta(e_1) = a^{-1}b, \quad \theta(c_{1,0}) = b, \quad \theta(c_{1,1}) = a^8, \quad \theta(c_{1,2}) = ba^{10}$$

Tenemos los generadores a y b como imágenes de los elementos $c_{1,0}x_1$ y $c_{1,0}$ respectivamente. Claramente es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el elemento $(e_1c_{1,0})^8c_{1,1}$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = ba, \quad \theta(e_1) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^8$$

Claramente es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que los elementos x_1x_2 y x_1 tienen como imagen los generadores a y b y ambos son elementos que conservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es [32,28], que en la referencia que utilizamos es $\Gamma_4 b_1$ y cuya estructura algebraica es $(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$. Según [26], este grupo tiene una presentación dada por a, b, c, d que cumplen $a^2 = b^2 = c^4 = d^2 = 1, bd = dab, cd = dc^{-1}$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC dado $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\theta(c_{1,0}) = dc, \quad \theta(c_{1,1}) = a, \quad \theta(c_{1,2}) = b, \quad \theta(c_{1,3}) = d, \quad \theta(c_{1,4}) = dc$$

Los generadores a, b, c y d están en la imagen ya que son imágenes de los elementos $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}c_{1,4}$ y $c_{1,3}$ respectivamente. Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el elemento $c_{1,2}c_{1,3}c_{1,2}c_{1,1}c_{1,3}$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

⇒ Ahora analizamos el grupo [32,34] que tiene estructura algebraica $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$ y en la referencia que utilizamos se corresponde con $\Gamma_4 a_2$. Tenemos que este grupo tiene una presentación dada por a, b, c que cumplen $a^4 = b^4 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca^{-1}$ y $bc = cb^{-1}$, ver [26]. Para el grupo NEC dado $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{1,1}) = a^2, \quad \theta(c_{1,2}) = bc, \quad \theta(c_{1,3}) = ca, \quad \theta(c_{1,4}) = c$$

Los generadores a, b, c son imágenes de los elementos $c_{1,4}c_{1,3}, c_{1,2}c_{1,4}, c_{1,4}$ respectivamente. Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el elemento $(c_{1,4}c_{1,3})^2 c_{1,1}$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

⇒ El siguiente grupo de la lista es [32,42] cuya estructura algebraica es $(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$ y en la referencia que utilizamos se corresponde con $\Gamma_3 b$. Tenemos que este grupo tiene una presentación dada por a, b, c que cumplen $a^8 = b^2 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca^{-1}$ y $bc = ca^4 b$, ver [26]. Para el grupo NEC dado $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{1,1}) = a^4, \quad \theta(c_{1,2}) = ac, \quad \theta(c_{1,3}) = b, \quad \theta(c_{1,4}) = c$$

Tenemos los generadores a, b, c como imágenes de los elementos $c_{1,2}c_{1,4}, c_{1,3}$ y $c_{1,4}$ respectivamente. Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el elemento $c_{1,1}(c_{1,2}c_{1,4})^4$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [32,46]. Tomamos $\Gamma_2 a_1$, que tiene estructura algebraica $C_2 \times C_2 \times D_4 \approx D_2 \times D_4$, por lo que este grupo es estudiado en [10]. Tomemos como presentación de este grupo la que esta dada por generadores A, B, C, D tales que $A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = (AB)^2 = (CD)^4 = 1$ y A y B conmutan con C y D . Así para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\theta(c_{1,0}) = A, \quad \theta(c_{1,1}) = C, \quad \theta(c_{1,2}) = B, \quad \theta(c_{1,3}) = D, \quad \theta(c_{1,4}) = AD, \quad \theta(c_{1,5}) = A$$

Es claro que los elementos $c_{1,3}c_{1,4}, c_{1,5}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,2}, c_{1,5}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,1}, c_{1,0}c_{1,4}$ tienen como imagen los generadores A, B, C, D respectivamente. Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que tenemos los generadores como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El último grupo de orden 32 es [32,49], cuya estructura algebraica es $(C_2 \times D_4) \rtimes C_2$ y en la referencia que utilizamos se corresponde con Γ_{5a_1} . La presentación de este grupo, según [26], está dada por generadores a, b, c, d tales que cumplen las siguientes relaciones $a^4 = 1, b^2 = c^2 = d^2 = a^2, ab = ba^{-1}, cd = dc^{-1}$ y el resto conmutan. Así para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\begin{aligned}\theta(c_{1,0}) &= ac, & \theta(c_{1,1}) &= dcba^2, & \theta(c_{1,2}) &= cab \\ \theta(c_{1,3}) &= db, & \theta(c_{1,4}) &= adcba^2, & \theta(c_{1,5}) &= ac\end{aligned}$$

Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que los elementos $c_{1,0}c_{1,2}, c_{1,2}c_{1,4}, c_{1,4}c_{1,1}, c_{1,1}c_{1,3}$ tienen como imagen los generadores b, d, a, c respectivamente. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow Ahora analizamos el grupo [48,29], que tiene estructura algebraica $GL(2,3)$. Podemos encontrar dos presentaciones de este grupo en [21], una dada por generadores T, X, Y tales que $T^2 = X^3 = Y^3 = (XY)^4 = (TX)^2 = (TY)^2 = 1$ y $[X, Y] = (XY)^2$; y otra dada por generadores R, S tales que $R^8 = S^3 = (RS)^2 = 1$ y $R^4S = SR^4$. En este caso tenemos 3 grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,3,3)\})$, utilizamos la primera presentación, y tenemos que el epimorfismo correspondiente es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TY, \quad \theta(c_{1,1}) = (XY)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = XT, \quad \theta(c_{1,3}) = T, \quad \theta(c_{1,4}) = TY$$

Es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que la imagen del elemento $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador X , la imagen del elemento $c_{1,3}c_{1,4}$ es el generador Y y la imagen del elemento $c_{1,3}c_{1,1}(c_{1,2}c_{1,4})^2$ es el generador T , luego los tres generan el grupo y son elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [3]; \{(2,2)\})$, utilizamos la segunda presentación, y el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = S, \quad \theta(e_1) = S^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = RS, \quad \theta(c_{1,1}) = R^4, \quad \theta(c_{1,2}) = SR$$

Es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que tenemos que las imágenes de los elementos $(c_{1,1}c_{1,0}e_1)^5$ y x_1 son los generadores R y S respectivamente y ambos son elementos que preservan la orientación. El área reducida de este grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$, utilizamos la segunda presentación, y el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = RS, \quad \theta(x_2) = S, \quad \theta(e_1) = SR^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = R^4$$

Es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que tenemos que las imágenes de los elementos $x_1x_2^2$ y x_2 son los generadores R y S respectivamente y ambos son elementos que preservan la orientación. El área reducida de este grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [48,31], cuya estructura algebraica es $C_4 \times A_4$. Este grupo es estudiado en profundidad en [11]. Tomaremos como X el generador del grupo C_4 y las permutaciones $(1\ 4)(3\ 2)$ y $(1\ 2\ 3)$ como generadores de A_4 . Así, para el grupo NEC $(0; +; [12]; \{(2)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = (1\ 2\ 3)X, \quad \theta(e_1) = (1\ 3\ 2)X^3, \quad \theta(c_{1,0}) = (1\ 2)(3\ 4), \quad \theta(c_{1,1}) = (1\ 3)(2\ 4)$$

Tenemos que la imagen del elemento $(x_1)^9$ es el generador X . Por otra parte tenemos que la imagen de $(x_1)^4$ es el elemento $(1\ 2\ 3)$ y que la imagen del elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ es $(1\ 4)(2\ 3)$. Estos dos elementos generan todo A_4 . Así tenemos nuestro grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación y el epimorfismo actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow Ahora analizamos el grupo [48,33] que tiene estructura algebraica $SL(2,3) \times C_2$. Podemos encontrar una presentación de este grupo en [21], dada por generadores S, X, Y tales que $S^2 = X^3 = Y^3 = (XY)^4 = 1, SXS = Y^{-1}$ y $[X, Y]^2 = (XY)^2$. Para este grupo tenemos dos grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [3]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = S, \quad \theta(c_{1,1}) = (XY)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = XSX^{-1}$$

Por una parte tenemos que la imagen de x_1 es el generador X , por otra parte tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,2}x_1$ es el generador Y^{-1} . Por último tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}(c_{1,0}c_{1,2})^2$ es el generador S . Así tenemos que las imágenes de estos elementos generan el grupo G que teníamos, y además son imágenes de elementos que preservan la orientación, luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = S, \quad \theta(x_2) = X^{-1}, \quad \theta(e_1) = XS, \quad \theta(c_{1,0}) = (XY)^2$$

Tenemos que la imagen de x_1 es el generador S , que la imagen de x_2 es el generador X^{-1} y que la imagen de $x_1x_2x_1$ tiene como imagen el generador Y^{-1} ; luego tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación. Así tenemos que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,50], cuya estructura algebraica es $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_3$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores A, B, C tal que $A^2 = B^3 = C^3 = (CB)^2 = (AB^{-1})^3 = C^{-1}B^{-1}ABCA = CBAB^{-1}C^{-1}A = 1$, véase [13]. Así para el grupo NEC $(0; +; [3]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = C, \quad \theta(e_1) = C^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = A, \quad \theta(c_{1,1}) = CB, \quad \theta(c_{1,2}) = CAC^2$$

Es claro que los elementos $c_{1,0}, x_1^2c_{1,1}$ y x_1 tienen como imagen los generadores A, B y C respectivamente. Tenemos que el elemento $(c_{1,0}(e_1c_{1,1})^2)^3$ tiene como imagen el neutro, y además es un elemento que invierte la orientación. Así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow Ahora pasamos a analizar el siguiente grupo [64,128] cuya estructura algebraica es $(C_2 \times C_2 \times D_4) \rtimes C_2$. Usaremos para los grupos de orden 64 la notación de [17]. Según esta notación este grupo se denomina $\Gamma_{15}a_1$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tales que cumplen las relaciones:

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_5^2 = a_6^2 = 1, \quad a_4^2 = a_6,$$

$$[a_1, a_2] = a_4a_6, \quad [a_1, a_3] = a_5, \quad [a_1, a_4] = a_6, \quad [a_2, a_4] = a_6$$

y el resto conmutan. Así para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = a_2, \quad \theta(c_{1,1}) = a_3, \quad \theta(c_{1,2}) = a_6, \quad \theta(c_{1,3}) = a_1, \quad \theta(c_{1,4}) = a_2$$

Tenemos los generadores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ del grupo como imágenes de los elementos $c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,1}, c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,2}, c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}, c_{1,2}$ respectivamente. Para ver que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, vemos que la imagen del elemento $c_{1,4}(c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,2})^3c_{1,2}c_{1,4}(c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,2})$ es el elemento neutro, y es un elemento que invierte la orientación. Así queda probado lo que queríamos. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo a estudiar es el grupo [64,134] que tiene estructura algebraica $((C_4 \times C_4) \rtimes C_2) \rtimes C_2$. Según [17], este grupo se denomina $\Gamma_{26}a_1$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tales que cumplen las siguientes relaciones:

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_5^2 = a_6^2 = 1, \quad a_4^2 = a_6,$$

$$[a_1, a_2] = a_4a_6, \quad [a_1, a_3] = a_5, \quad [a_1, a_4] = a_6, \quad [a_2, a_4] = a_6, \quad [a_2, a_5] = a_6, \quad [a_3, a_4] = a_6$$

y el resto conmutan. Así para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = a_2, \quad \theta(c_{1,1}) = a_3, \quad \theta(c_{1,2}) = a_6, \quad \theta(c_{1,3}) = a_1, \quad \theta(c_{1,4}) = a_2$$

Tenemos los generadores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ del grupo como imágenes de los elementos $c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,1}, c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,2}, c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}, c_{1,2}$ respectivamente. Para ver que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, vemos que la imagen del elemento $(c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,2})c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,4}$ es el elemento neutro, y es un elemento que invierte la orientación. Así queda probado lo que queríamos. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow Ahora a continuación analizamos el grupo [64,138] cuya estructura algebraica es $((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$. Según [17], este grupo se denomina $\Gamma_{25}a_1$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tales que:

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = a_5^2 = a_6^2 = 1,$$

$$[a_1, a_2] = a_4, [a_1, a_3] = a_5, [a_2, a_5] = a_6, [a_3, a_4] = a_6$$

y el resto conmutan. Así para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = a_2, \quad \theta(c_{1,1}) = a_3, \quad \theta(c_{1,2}) = a_6, \quad \theta(c_{1,3}) = a_1, \quad \theta(c_{1,4}) = a_2$$

Tenemos los generadores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ del grupo como imágenes de los elementos $c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,1}, c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,4}, c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}, c_{1,2}$ respectivamente. Para ver que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, vemos que la imagen del elemento $c_{1,4}(c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1})c_{1,4}(c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1})c_{1,2}$ es el elemento neutro, y es un elemento que invierte la orientación. Así queda probado lo que queríamos. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow El último grupo de orden 64 es el grupo [64,190], que tiene estructura algebraica $(C_4 \times D_8) \rtimes C_2$. Según [17], este grupo se denomina $\Gamma_{19}a_1$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ tales que cumplen:

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_6^2 = 1, a_4^2 = a_5a_6, a_5^2 = a_6,$$

$$[a_1, a_2] = a_4a_5, [a_1, a_3] = a_6, [a_1, a_4] = a_5a_6, [a_1, a_5] = a_6, [a_2, a_4] = a_5a_6, [a_2, a_5] = a_6$$

y el resto conmutan. Así para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = a_3, \quad \theta(c_{1,1}) = a_2, \quad \theta(c_{1,2}) = a_6, \quad \theta(c_{1,3}) = a_1, \quad \theta(c_{1,4}) = a_3$$

Tenemos los generadores $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ del grupo como imágenes de los elementos $c_{1,3}, c_{1,1}, c_{1,0}, (c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,2})^3, (c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,2})^9c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}, c_{1,2}$ respectivamente. Para ver que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable,

vemos que la imagen del elemento $c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,2}$ es el elemento neutro, y es un elemento que invierte la orientación. Así queda probado lo que queríamos. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos que estudiar es el [96,70], que tiene estructura algebraica $((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$. Según GAP, este grupo tiene una presentación dada por generadores $x = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 8)(6\ 7)$, $y = (1\ 5)(2\ 8\ 3\ 6\ 4\ 7)$ que cumplen las relaciones $x^2 = y^6 = (yxy^{-1}x)^2 = (y^{-2}x)^3 = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [6]; \{(2)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = y, \quad \theta(e_1) = y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = x, \quad \theta(c_{1,1}) = yxy^{-1}$$

Tenemos que la imagen del elemento x_1 es el generador y y el elemento $c_{1,0}$ tiene como imagen el generador x . Por otra parte tenemos que el elemento $(e_1^2 c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así hemos demostrado que el epimorfismo actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [96,187] cuya estructura algebraica es $(C_2 \times S_4) \rtimes C_2$. Tenemos que según [5] este grupo tiene una presentación dada por los generadores R, S, T tales que $R^4 = S^{12} = T^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = TS^{-1}RS^{-1}R^{-2} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,4,12)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen de $(c_{1,1}c_{1,2})^2 c_{1,2}c_{1,3}(c_{1,1}c_{1,2})^3 c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [96,193] que tiene estructura algebraica $GL(2, 3) \rtimes C_2$. Encontramos este grupo en [28] con la denominación C . Además podemos encontrar una presentación de este grupo en [21], denominado como G_{48}^* . Debemos hacer notar que falta una relación en la presentación que en este artículo viene dada, pues sin ella el grupo es infinito. Así tenemos una presentación del grupo dada por generadores W, R, S tales que $W^2 = R^8 = S^3 = (RS)^2 = (WR)^2 = (WS)^2 = 1$ y $R^4S = SR^4$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = W, \quad \theta(c_{1,1}) = R^4, \quad \theta(c_{1,2}) = RW, \quad \theta(c_{1,3}) = WS, \quad \theta(c_{1,4}) = W$$

Tenemos que la imagen de $c_{1,4}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,2}c_{1,4}$ es el generador R y la imagen de $(c_{1,2}c_{1,4})^3 c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador W . Así tenemos el grupo generador como imágenes de elementos que preservan la orientación y por tanto es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo

NEC es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [96,227], que tiene estructura algebraica $((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2$. Tenemos una presentación de este grupo, dada por GAP, cuyos generadores son a, b, c, d, e, f tales que cumplen las siguientes relaciones:

$$a^2 = b^3 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1, ba = ab^2, ca = ad,$$

$$cb = bd, da = ac, db = bcd, ea = af, eb = bef, fa = ae, fb = be$$

Para este grupo tenemos dos grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(3,4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = ba, \quad \theta(c_{1,1}) = a, \quad \theta(c_{1,2}) = cf, \quad \theta(c_{1,3}) = ba$$

Por una parte tenemos que la imagen de $c_{1,1}$ es el generador a , por otra parte tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}$ es el generador b . Luego tenemos que el elemento $(c_{1,2}c_{1,3})^2$ tiene como imagen el generador c , y el elemento $(c_{1,2}c_{1,3})^2c_{1,2}$ tiene como imagen el generador f . Además tenemos los elementos $c_{1,1}(c_{1,2}c_{1,3})^2c_{1,1}$ y $c_{1,1}(c_{1,2}c_{1,3})^2c_{1,2}c_{1,1}$ que tienen como imágenes los generadores d y e respectivamente. Por último tenemos que la imagen de $((c_{1,2}c_{1,3})^2c_{1,2}c_{1,0}c_{1,1})^3$ es el elemento neutro y además es no orientable, luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = a, \quad \theta(c_{1,1}) = ef, \quad \theta(c_{1,2}) = c, \quad \theta(c_{1,3}) = ba, \quad \theta(c_{1,4}) = a$$

Por una parte tenemos que la imagen de $c_{1,0}$ es el generador a , por otra parte tenemos que la imagen de $c_{1,3}c_{1,4}$ es el generador b . Luego tenemos que el elemento $c_{1,2}$ tiene como imagen el generador c , y el elemento $c_{1,0}c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador d . Además los elementos $c_{1,3}c_{1,4}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,4}$ y $c_{1,3}c_{1,4}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,1}$ tienen como imágenes los generadores e y f respectivamente. Por último tenemos que la imagen de $(c_{1,2}c_{1,3}c_{1,4})^3$ es el elemento neutro y además es no orientable, luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow Por último tenemos que estudiar el grupo [192,955], cuya estructura algebraica es $((((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_3) \rtimes C_2) \rtimes C_2)$. Tenemos que según [5] este grupo tiene una presentación dada por los generadores R, S, T tales que cumplen las siguientes relaciones $R^4 = S^6 = T^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = (RS^{-1})^4 = TS^{-1}RS^2R^{-1}S^{-3}R^{-1} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,4,6)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^3c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^4(c_{1,1}c_{1,2})^3c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

Grupos de género imaginario 11

Según la lista de Conder, tendríamos 8 grupos de género imaginario 11, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[18,5]	18	(0; +; [3,6]; {(-)})
[27,3]	27	(1; -; [3,3]; {-})
[36,13]	36	(0; +; [-]; {(2,2,3,6)})
[54,5]	54	(0; +; [6]; {(3)}) ó (0; +; [2,3]; {(-)})
[54,8]	54	(0; +; [2]; {(3,3)})
[108,15]	108	(0; +; [4]; {(3)})
[108,17]	108	(0; +; [-]; {(2,6,6)}) ó (0; +; [-]; {(2,2,2,3)})
[216,87]	216	(0; +; [-]; {(2,4,6)})

\Rightarrow El primer grupo que tenemos es [18,5], cuya estructura algebraica es $C_6 \times C_3$. Su género imaginario fue obtenido por Gromadzki en [15], pero no el epimorfismo. Sean a y b los generadores de C_6 y C_3 respectivamente. Para el grupo NEC (0; +; [3,6]; {(-)}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(e_1) = a^5b^2, \quad \theta(c_{1,0}) = a^3$$

Tenemos que las imágenes de x_1 y x_2 son los generadores b y a respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación, luego es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El segundo grupo que nos encontramos es el grupo [27,3], con estructura algebraica $(C_3 \times C_3) \rtimes C_3$. Este grupo es estudiado en profundidad en [12]. Sean R, S generadores tales que $S^3 = R^3 = (RS)^3 = (R^{-1}S)^3 = 1$. Dado el grupo NEC (1; -; [3,3]; {-}), tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = R, \quad \theta(x_2) = S, \quad \theta(d_1) = RS$$

Claramente tenemos que la imagen de x_1 y de x_2 son los generadores R y S respectivamente, y ambos elementos preservan la orientación, luego tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que conservan la orientación, y así tenemos que el epimorfismo actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado

es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow Ahora analizamos el siguiente grupo que es el [36,13], cuya estructura algebraica es $C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$. Una presentación de este grupo está dada por generadores a, b, c, d tales que $a^2 = b^3 = c^3 = d^2 = 1, ba = ab^2, ca = ac^2$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,3,6)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = ab, \quad \theta(c_{1,1}) = d, \quad \theta(c_{1,2}) = cad, \quad \theta(c_{1,3}) = da, \quad \theta(c_{1,4}) = ab$$

Ahora observemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador c , la imagen del elemento $c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador a , la imagen de $(c_{1,3}c_{1,4})^4$ es el generador b y la imagen de $(c_{1,3}c_{1,4})^3$ es el generador d . Así tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación y queda probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [54,5] cuya estructura algebraica es $((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^3 = b^6 = (ab)^2 = 1$ y $(ba^{-1}b)^3 = 1$. Para este grupo tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [6]; \{(3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ab, \quad \theta(c_{1,1}) = a^{-1}b^{-1}$$

Es claro que tenemos los generadores en la imagen, pues los elementos x_1 y $c_{1,0}e_1$ van a los generadores b y a respectivamente. Ahora, tenemos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que el elemento $(c_{1,0}e_1)^3$ va al neutro y es un elemento que invierte la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ab, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = b^3$$

Es claro que tenemos los generadores en la imagen, pues los elementos x_2 y $(x_2)^2x_1$ van a los generadores a y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación. Así, tenemos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow Ahora analizamos el siguiente grupo que es [54,8], que tiene estructura algebraica $((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores A, B, C tales que $A^2 = B^3 = C^2 = (B^{-1}A)^2 = (CA)^3 = 1, (B^{-1}C)^2(BC)^2 = 1$ y

$(AB^{-1}C)^2BAC = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(3,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B^{-1}A, \quad \theta(e_1) = A^{-1}B, \quad \theta(c_{1,0}) = C, \quad \theta(c_{1,1}) = A, \quad \theta(c_{1,2}) = B^{-1}ACAB$$

Es claro que tenemos los generadores en la imagen, pues los elementos $c_{1,1}, c_{1,1}e_1$ y $c_{1,0}$ van a los generadores A, B y C respectivamente. Ahora tenemos que el elemento $(c_{1,1}e_1)^3$ va al neutro e invierte la orientación. Así, tenemos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [108,15], cuya estructura algebraica es $((C_3 \times C_3) \times C_3) \times C_4$. La presentación de este grupo, obtenida en GAP, viene dada por dos generadores x e y en forma de permutaciones de S_{18} que son $x = (4\ 7)(5\ 8)(6\ 9)(13\ 16)(14\ 17)(15\ 18)$, e $y = (1\ 17\ 5\ 14\ 2\ 18\ 6\ 15\ 3\ 16\ 4\ 13)(7\ 12\ 9\ 11\ 8\ 10)$ que cumplen las relaciones $x^2 = (y^{-2}x)^3 = y^{-1}xy^4xy^{-3} = y^{-1}xyxy^{-2}xyxy^{-1}x = 1$. Entonces para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = xy^5, \quad \theta(e_1) = y^7x, \quad \theta(c_{1,0}) = x, \quad \theta(c_{1,1}) = xy^5xy^7x$$

Tenemos los generadores en la imagen, pues los elementos $(c_{1,0}x_1)^5$ y $c_{1,0}$ van a los generadores y y x respectivamente. Ahora tenemos que el elemento $(c_{1,0}(c_{1,0}x_1)^2)^3$ va al neutro e invierte la orientación. Así, tenemos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow Ahora analizamos el siguiente grupo [108,17], que tiene estructura algebraica $((C_3 \times C_3) \times C_3) \times C_2 \times C_2$. Según [6], este grupo se denomina $G^{3,6,6}$ y tiene una presentación dada con generadores A, B y C tales que cumplen las siguientes relaciones $A^2 = B^2 = C^2 = (AB)^2 = (AC)^3 = (BC)^6 = (ABC)^6 = 1$. Aquí tenemos 2 grupos NEC, así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,6,6)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = AB, \quad \theta(c_{1,1}) = B, \quad \theta(c_{1,2}) = C, \quad \theta(c_{1,3}) = AB$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}$ es el generador A , la imagen de $c_{1,1}$ es el generador B y por último, la imagen de $c_{1,2}$ es el generador C . Observemos además que el elemento $(c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2})^3$ tiene como imagen el elemento neutro, y es un elemento que invierte la orientación. Luego tenemos los generadores del grupo G y un elemento que va al neutro e invierte la orientación, así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = A, \quad \theta(c_{1,1}) = B, \quad \theta(c_{1,2}) = (BC)^3, \quad \theta(c_{1,3}) = C, \quad \theta(c_{1,4}) = A$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}$ es el generador B , la imagen de $c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador C y por último, tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}$ es el generador A . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow Por último tenemos para estudiar el grupo [216,87] que tiene estructura algebraica $((C_3 \times C_3) \times C_3) \times C_4 \times C_2$. Este grupo tiene una presentación, según [5], con generadores R, S, T tales que $R^4 = S^6 = T^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = T(S^{-1}R)^3R^{-3} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,4,6)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen de $(c_{1,1}c_{1,2})^3((c_{1,1}c_{1,2})^3c_{1,2}c_{1,3})^3$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

Grupos de género imaginario 12

Según la lista de Conder, tendríamos 7 grupos de género imaginario 12, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[20,1]	20	$(0; +; [4,4]; \{-\})$ ó $(1; -; [4,4]; \{-\})$
[40,5]	40	$(1; -; [4]; \{(2,2)\})$ ó $(0; +; [2,4]; \{-\})$
[40,8]	40	$(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ ó $(0; +; [2]; \{(4,4)\})$ ó $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ ó $(0; +; [2,4]; \{-\})$
[40,10]	40	$(0; +; [-]; \{-, (2)\})$
[40,12]	40	$(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ ó $(0; +; [2,4]; \{-\})$
[80,39]	80	$(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$
[240,189]	240	$(0; +; [-]; \{(2,4,6)\})$

\Rightarrow El primer grupo que nos encontramos es [20,1], que tiene estructura algebraica $C_5 \times C_4$. May, en [19], da el género imaginario de este grupo (que es isomorfo a DC_5) pero no da el epimorfismo explícito. Sean X, Y generadores de este grupo, que cumplen $X^{10} = 1, X^5 = Y^2, Y^{-1}XY = X^{-1}$. En este caso tenemos dos grupos NEC, luego:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{-\})$, tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(e_1) = Y^2X^9, \quad \theta(c_{1,0}) = Y^2$$

Tenemos que las imágenes de x_2 y $x_1(x_2)^3$ generan todo el grupo G y son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(1; -; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(d_1) = X^2$$

Tenemos que las imágenes de x_2 y $x_1(x_2)^3$ generan todo el grupo G y son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El segundo grupo que tenemos es el $[40,5]$, cuya estructura algebraica es $C_4 \times D_5$. Este grupo es estudiado en [9]. Sea X generador de C_4 y Y, Z generadores de D_5 tales que $Y^2 = Z^2 = (YZ)^5 = 1$. Tenemos 2 grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(1; -; [4]; \{(2,2)\})$, el epimorfismo no se da en [9]. Según esto tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XYZY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y, \quad \theta(d_1) = (YZ)^2,$$

$$\theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = X^2, \quad \theta(c_{1,2}) = YZY$$

Tenemos que la imagen del elemento $c_{1,0}$ es el generador Y , que la imagen del elemento $(e_1 c_{1,0})^3$ es el generador X , y que la imagen del elemento $c_{1,0} c_{1,2} c_{1,0}$ es el generador Z . Además el elemento $(x_1 e_1)^3 d_1$ tiene como imagen el elemento neutro e invierte la orientación. Luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$, el epimorfismo se da explícitamente en [9], luego el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = XYZY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}YZ, \quad \theta(c_{1,0}) = X^2$$

Tenemos que la imagen de $x_2(e_1 x_2 x_1)^3 x_1$ es el generador X . Si primero llamamos $a = x_2(e_1 x_2 x_1)^3 x_1$, tenemos que la imagen de $x_1 a^3 x_2 x_1$ es el generador Z . Además como la imagen de x_1 es el generador Y , tenemos el grupo generado por imágenes de elementos que preservan la orientación. Así queda visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo $[40,8]$, cuya estructura algebraica es $(C_{10} \times C_2) \rtimes C_2$. Tenemos una presentación que viene dada por generadores X, Y tales que cumplen las relaciones $X^{10} = Y^2 = (XYX)^2 = (X^{-1}Y)^2 (XY)^2 = 1$. Para este grupo tenemos 4 grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = (YX)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = YX^4, \quad \theta(c_{1,3}) = X^5, \quad \theta(c_{1,4}) = Y$$

Tenemos los generadores Y y X como imágenes de los elementos $c_{1,0}$ y $(c_{1,0}c_{1,2}c_{1,3})^9$ respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $(c_{1,3}c_{1,4})^2c_{1,1}$ tiene como imagen el neutro, y es un elemento que invierte la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(4,4)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = Y, \quad \theta(c_{1,0}) = X^5, \quad \theta(c_{1,1}) = X^4Y, \quad \theta(c_{1,2}) = YX^5Y$$

Tenemos de manera obvia que la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}$ es el generador $X^{-1}Y$ y por otra parte el elemento x_1 es el generador Y , luego tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación. Así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = YX, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = (YX)^2, \quad \theta(c_{1,1}) = Y, \quad \theta(c_{1,2}) = (YX)^2$$

Tenemos que el elemento $c_{1,1}x_1$ tiene como imagen el generador X y que el elemento $c_{1,1}$ tiene como imagen el generador Y . Además tenemos que el elemento $x_1^2c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

- iv) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = YX, \quad \theta(e_1) = X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^5$$

Tenemos que el elemento x_1x_2 tiene como imagen el generador X y que la imagen del elemento x_1 es el generador Y , y ambos elementos preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [40,10] cuya estructura algebraica es $C_5 \times D_4$. Este grupo es estudiado en profundidad en [9]. Sea X generador de C_5 y Y, Z generadores de D_4 tales que $Y^2 = Z^2 = (YZ)^4 = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = XYZY, \quad \theta(e_2) = X^{-1}YZY, \quad \theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = (YZ)^2Y, \quad \theta(c_{2,0}) = YZY$$

Tenemos que la imagen de e_1^6 es el generador X , que la imagen de $(e_1c_{2,0}c_{1,0})^5$ es el elemento Y y que la imagen del elemento $(e_1c_{2,0}c_{1,0})^5e_1^5(e_1c_{2,0}c_{1,0})^5$ es el generador Z , todos ellos que preservan la orientación. Así generamos nuestro grupo G como imágenes de elementos que conservan la orientación y hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

⇒ El siguiente grupo que estudiamos es el [40,12], que tiene estructura algebraica $C_2 \times (C_5 \times C_4)$. Podemos encontrar una presentación de $(C_5 \times C_4)$ en [12], dado por los generadores X, Y tales que $X^5 = Y^4 = 1$ y $YXY^{-1} = X^2$. Además consideramos Z generador de C_2 . Aquí tenemos 2 grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = Y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = Y^2X^2, \quad \theta(c_{1,1}) = Z, \quad \theta(c_{1,2}) = XY^2$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador Y , el elemento $(c_{1,2}c_{1,0})^2$ tiene como imagen el generador X y el elemento $x_1^2((c_{1,2}c_{1,0})^2)^4c_{1,2}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador Z , y todos los elementos conservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ZY^2X^2, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(e_1) = Y^3X^3Y^2Z, \quad \theta(c_{1,0}) = Z$$

Tenemos que la imagen de x_2 es el generador Y , la imagen de $(x_2^2c_{1,0}x_1)^3$ es el elemento X y el elemento $x_1(x_2^2c_{1,0}x_1)^4x_2^2$ tiene como imagen el elemento Z ; y todos ellos preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [80,39], cuya estructura algebraica es $D_5 \times D_4$. Este grupo es estudiado con detalle en [10]. Tomamos A y B como generadores de orden 2 de D_5 tales que su producto tiene orden 5 y C y D como generadores de orden 2 de D_4 tales que su producto tiene orden 4. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = C, \quad \theta(c_{1,1}) = A, \quad \theta(c_{1,2}) = D, \quad \theta(c_{1,3}) = DB, \quad \theta(c_{1,4}) = C$$

Observemos que $\theta(c_{1,2}c_{1,3}) = B$, que $\theta((c_{1,3}c_{1,1})^5) = D$, que $\theta(c_{1,0}c_{1,2}(c_{1,3}c_{1,1})^5) = C$ y que $\theta(c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,3}c_{1,1})^5) = A$. Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación y por tanto hemos probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El último grupo que tenemos es [240,189], que algebraicamente se corresponde con $C_2 \times S_5$. Para este grupo, consideramos X generador de C_2 y a S_5 como el grupo de permutaciones de cinco elementos. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,4,6)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = X(1\ 2), \quad \theta(c_{1,1}) = (3\ 4), \quad \theta(c_{1,2}) = (2\ 3)(4\ 5), \quad \theta(c_{1,3}) = X(1\ 2)$$

Tenemos que en primer lugar la imagen del elemento $(c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^2)^3$ es la permutación $(1\ 3)$ y que la imagen del elemento $c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^4c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^2$ es la permutación $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$, y ambas permutaciones generan todo S_5 . Por otro lado tenemos que la imagen de $(c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^3)^3$ es el generador X . Así hemos probado que el grupo está generado como imagen de elementos que preservan la orientación. Luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{24}$.

Grupos de género imaginario 13

Según la lista de Conder, tendríamos 6 grupos de género imaginario 13, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[42,3]	42	$(0; +; [14]; \{(3)\})$
[42,4]	42	$(0; +; [6]; \{(7)\})$
[52,3]	52	$(0; +; [4]; \{(13)\})$
[60,9]	60	$(0; +; [15]; \{(2)\})$
[84,8]	84	$(0; +; [-]; \{(2,6,14)\})$
[120,38]	120	$(0; +; [-]; \{(2,4,15)\})$

\Rightarrow El primer grupo que tenemos es el [42,3], que tiene estructura algebraica $C_7 \times S_3$. Tomemos X generador de C_7 y S_3 las permutaciones de 3 elementos. Para el grupo NEC $(0; +; [14]; \{(3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X(1\ 2), \quad \theta(e_1) = X^6(1\ 2), \quad \theta(c_{1,0}) = (2\ 3), \quad \theta(c_{1,1}) = (1\ 3)$$

Tenemos que x_1^8 tiene como imagen el elemento X , y tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}$ es $(2\ 1\ 3)$, la imagen de x_1^7 es $(1\ 2)$ y la imagen de $(x_1)^7c_{1,0}c_{1,1}$ es el elemento $(1\ 3)$, tenemos generado tanto C_7 como S_3 , luego tenemos nuestro grupo generado por imágenes de elementos que preservan la orientación. Queda probado que es un epimorfismo que actúa en una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{11}{42}$.

Observemos que $S_3 = D_3$, y para el grupo $D_3 \times C_7$, este epimorfismo se encuentra hecho en [9].

\Rightarrow El segundo grupo que tenemos es [42,4], cuya estructura algebraica es $C_3 \times D_7$. Este grupo es estudiado en profundidad en [9]. Tomemos X generador de C_3 y Y, Z generadores de orden 2 de D_7 tales que su producto tiene orden 7. Para el grupo NEC $(0; +; [6]; \{(7)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X(YZ)^3Y, \quad \theta(e_1) = X^{-1}(YZ)^3Y, \quad \theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{1,1}) = Y$$

Tenemos que es epimorfismo ya que la imagen de x_1^4 es el generador X , que la imagen de $x_1^3c_{1,1}(c_{1,1}c_{1,0})^3c_{1,1}$ es el generador Z , y que la imagen de $c_{1,0}x_1^3c_{1,1}(c_{1,1}c_{1,0})^3$ es el generador Y . Así queda probado que el grupo se puede generar como imágenes de elementos que preservan la orientación y que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{11}{42}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que encontramos es el grupo [52,3] que tiene estructura algebraica $C_{13} \times C_4$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^4 = b^{13} = 1$ y $ba = ab^{12}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(13)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ab, \quad \theta(c_{1,1}) = a^{-1}b^{-1}$$

Tenemos que la imagen de x_1 es el generador a y que la imagen de $(c_{1,0}c_{1,1})^6$ es el generador b , luego tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{11}{52}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos [60,9], que tiene estructura algebraica $C_5 \times A_4$. Este grupo es estudiado con detalle en [11]. Tomemos como X el generador de C_5 , y A_4 como el grupo de permutaciones pares de 4 elementos. Para el grupo NEC $(0; +; [15]; \{(2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X(1\ 2\ 3), \quad \theta(e_1) = (1\ 3\ 2)X^4, \quad \theta(c_{1,0}) = (1\ 2)(3\ 4), \quad \theta(c_{1,1}) = (1\ 3)(2\ 4)$$

Tenemos que la imagen de x_1^6 es el generador X , la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}$ es $(1\ 4)(2\ 3)$, y la imagen de x_1^{10} es el elemento $(1\ 2\ 3)$, luego hemos generado tanto C_5 como A_4 (ya que estos dos elementos lo generan) por imágenes de elementos que preservan la orientación. Así es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{11}{60}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es [84,8], cuya estructura algebraica es $D_3 \times D_7$. Este grupo es estudiado en profundidad en [10]. Tomemos A, B generadores de orden 2 de D_3 tales que su producto tiene orden 3 y tomemos C, D generadores de orden 2 de D_7 tales que

su producto tiene orden 7. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,6,14)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = D, \quad \theta(c_{1,1}) = B, \quad \theta(c_{1,2}) = AC, \quad \theta(c_{1,3}) = D$$

Tenemos que $\theta((c_{1,2}c_{1,1})^3) = C$ y que $\theta((c_{1,2}c_{1,1})^4) = AB$. Además tenemos que $\theta((c_{1,3}c_{1,2})^7) = A$ y que $\theta((c_{1,3}c_{1,2})^8) = DC$. Así hemos probado que el grupo está generado como imágenes de elementos que preservan la orientación, luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{11}{84}$.

\Rightarrow Por último tenemos que estudiar el grupo [120,38], que tiene estructura algebraica $(C_5 \times A_4) \rtimes C_2$. Este grupo tiene una presentación, según [5], con generadores R, S, T tales que $R^4 = S^{15} = T^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = TS^{-1}RS^{-1}R^{-2} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,4,15)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen de $c_{1,3}c_{1,2}c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,1})^2$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{11}{120}$.

Grupos de género imaginario 14

Según la lista de Conder, tendríamos 25 grupos de género imaginario 14, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[16,12]	16	(0; +; [4]; {(-), (-)})
[24,4]	24	(0; +; [4,4]; {(-)})
[24,7]	24	(0; +; [4,4]; {(-)})
[24,15]	24	(0; +; [-]; {(2,2), (-)}) ó (0; +; [2]; {(-), (-)})
[32,48]	32	(0; +; [-]; {(2,2,2,2,4)})
[36,11]	36	(0; +; [3,3]; {(-)}) ó (1; -; [3,3]; {-})
[36,12]	36	(0; +; [6]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,6]; {(-)}) ó (0; +; [-]; {(-), (3)})
[48,6]	48	(0; +; [4]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,4]; {(-)})
[48,14]	48	(0; +; [4]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,4]; {(-)})
[48,21]	48	(0; +; [-]; {(-), (2)})
[48,24]	48	(0; +; [-]; {(-), (2)})
[48,37]	48	(0; +; [-]; {(2,2,4,4)})
[48,43]	48	(0; +; [-]; {(2,2,4,4)})
[48,49]	48	(0; +; [-]; {(-), (2)})
[48,51]	48	(0; +; [-]; {(2,2,2,2,2)})
[72,42]	72	(0; +; [2,3]; {(-)})
[72,43]	72	(0; +; [-]; {(2,2,3,3)}) ó (0; +; [2]; {(3,3)})
[72,44]	72	(0; +; [3]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,3]; {(-)})
[72,46]	72	(0; +; [-]; {(2,2,2,6)})
[96,89]	96	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[96,115]	96	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[96,226]	96	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[144,183]	144	(0; +; [-]; {(2,2,2,3)})
[180,19]	180	(0; +; [3]; {(5)})
[360,121]	360	(0; +; [-]; {(2,3,10)})

\Rightarrow El primer grupo que tenemos es [16,12], cuya estructura algebraica es $C_2 \times Q$. Este grupo es estudiado en [19], pero no se da un epimorfismo explícito. Tenemos una presentación de este grupo dada por Z como generador de C_2 y X, Y como generadores de Q tales que cumplen $X^4 = 1, X^2 = Y^2, Y^{-1}XY = X^{-1}$. Para el siguiente grupo NEC (0; +; [4]; {(-), (-)}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(e_1) = Y^{-1}, \quad \theta(e_2) = X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^2, \quad \theta(c_{2,0}) = Z$$

Es epimorfismo ya que tenemos los generadores en la imagen, pues los elementos $e_1^3, e_2^3, c_{2,0}$ tienen como imagen los generadores Y, X, Z . Ahora tenemos que el elemento $c_{1,0}e_2^2$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{3}{4}$.

\Rightarrow El segundo grupo que nos encontramos es el [24,4], que tiene estructura algebraica $C_2 \times DC_3$. Este grupo es estudiado en profundidad en [11]. Tenemos que x es el generador de C_2 y a, b los generadores de DC_3 tales que $a^3 = b^4 = 1, ba = a^2b$. Para el grupo NEC

$(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = ab^3x, \quad \theta(e_1) = ax, \quad \theta(c_{1,0}) = b^2$$

Es epimorfismo ya que tenemos los generadores en la imagen, pues los elementos x_1, e_1^4, e_1^3 tienen como imagen los generadores b, a, x y todos son elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El tercer grupo que tenemos es el [24,7], cuya estructura algebraica es DC_6 . Este grupo es estudiado en [19], pero no se da un epimorfismo explícito. Una presentación del grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^{12} = 1, X^6 = Y^2, Y^{-1}XY = X^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = YX, \quad \theta(e_1) = X^5, \quad \theta(c_{1,0}) = Y^2$$

Es epimorfismo ya que tenemos los generadores en la imagen, pues los elementos $x_1, x_1^3x_2$ tienen como imagen los generadores Y, X respectivamente y ambos son elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [24,15], que tiene estructura algebraica $C_6 \times C_2 \times C_2$. Este grupo se estudia en [15]. Tomemos X generador de orden 6 y Y, Z generadores de orden 2 ambos. Como tenemos dos grupos NEC:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(e_1) &= XYZ, \quad \theta(e_2) = ZYX^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= Y, \quad \theta(c_{1,1}) = X^3, \quad \theta(c_{1,2}) = Y, \quad \theta(c_{2,0}) = Z \end{aligned}$$

Tenemos que los generadores X, Y, Z del grupo son imagen de $e_1c_{2,0}c_{1,0}, c_{1,0}, c_{2,0}$. Ahora tenemos que el elemento que invierte la orientación $(e_1c_{2,0}c_{1,0})^3c_{1,1}$ va al neutro, y así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = XZ, \quad \theta(e_2) = ZX^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Tenemos que los generadores X, Y, Z del grupo son imagen de $e_1c_{1,0}, x_1, c_{1,0}$. Ahora tenemos que el elemento que invierte la orientación $x_1c_{2,0}$ va al neutro, y así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos [32,48], cuya estructura algebraica es $C_2 \times ((C_4 \times C_2) \times C_2)$, y que se corresponde con $\Gamma_2 b$ según la notación descrita con anterioridad en grupos de orden 32. Este grupo está generado, según [26], por generadores a, b, c, d tales que $a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, ab = ba, ac = ca, bc = ca^2b$ y el resto conmutan. Así para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(c_{1,0}) &= cba^{-1}, & \theta(c_{1,1}) &= a^2, & \theta(c_{1,2}) &= ba^2, \\ \theta(c_{1,3}) &= da^2, & \theta(c_{1,4}) &= ca^2, & \theta(c_{1,5}) &= cba^{-1}\end{aligned}$$

Tenemos que los elementos $c_{1,2}c_{1,1}, c_{1,4}c_{1,1}, c_{1,3}c_{1,1}, c_{1,2}c_{1,1}c_{1,4}c_{1,1}c_{1,0}c_{1,1}$ van a los generadores b, c, d y a respectivamente y todos son elementos que preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [36,11], que tiene estructura algebraica $C_3 \times A_4$. Este grupo es estudiado en profundidad en [11]. Tomemos X como generador de C_3 y las permutaciones $(1\ 2)(3\ 4)$ y $(1\ 2\ 3)$ como generadores de A_4 . Tenemos dos grupos NEC, así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(x_1) &= (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3), & \theta(x_2) &= (1\ 3\ 2)X^2, \\ \theta(e_1) &= (1\ 2)(3\ 4)X, & \theta(c_{1,0}) &= (1\ 2)(3\ 4)\end{aligned}$$

Tenemos que los elementos $\theta((c_{1,0}x_1)^4) = (1\ 2\ 3)$, $\theta(x_1(c_{1,0}x_1)^2) = (1\ 2)(3\ 4)$ y $\theta(x_1(c_{1,0}x_1)^2e_1) = X$. Todos estos elementos preservan la orientación, y así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

- ii) Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$, el epimorfismo no viene en [11], entonces tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(x_1) &= (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3), & \theta(x_2) &= (1\ 3\ 2)X^2, \\ \theta(e_1) &= (1\ 2)(3\ 4)X, & \theta(d_1) &= (1\ 2)(3\ 4)\end{aligned}$$

Tenemos que $\theta((d_1x_1)^4) = (1\ 2\ 3)$, $\theta(x_1(d_1x_1)^2) = (1\ 2)(3\ 4)$ y $\theta(x_1(d_1x_1)^2e_1) = X$. Todos estos elementos preservan la orientación, y así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [36,12], cuya estructura algebraica es $C_6 \times S_3$. Observemos que $S_3 \approx D_3$, entonces para el caso *ii*) es estudiado en [9]. Tomemos X como generador del grupo cíclico de orden 6, y S_3 como las permutaciones de 3 elementos. Aquí tenemos 3 grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [6]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(x_1) &= X(1\ 2\ 3), & \theta(e_1) &= (1\ 3\ 2)X^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= (1\ 2), & \theta(c_{1,1}) &= X^3, & \theta(c_{1,2}) &= (1\ 3)\end{aligned}$$

Es claro que el elemento $c_{1,0}c_{1,2}$ tiene como imagen la permutación $(1\ 2\ 3)$, que junto al elemento $c_{1,0}$ que tiene como imagen la permutación $(1\ 2)$ generan todo S_3 . Ahora por otra parte tenemos que la imagen de $x_1(c_{1,0}c_{1,2})^2$ es el generador X . Por último tenemos que el elemento $x_1^3c_{1,1}$ tiene como imagen el neutro, y es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,6]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = (2\ 3), \quad \theta(x_2) = X(1\ 2\ 3), \quad \theta(e_1) = X^2(1\ 2), \quad \theta(c_{1,0}) = X^3$$

Es claro que el elemento $x_1e_1^3$ tiene como imagen la permutación $(1\ 2\ 3)$, que junto al elemento e_1^3 que tiene como imagen la permutación $(1\ 2)$ generan todo S_3 . Ahora por otra parte tenemos que la imagen de $x_2(x_1e_1^3)^2$ es el generador X . Observemos que todos ellos son elementos que preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(e_1) &= X(1\ 2\ 3), & \theta(e_2) &= (1\ 3\ 2)X^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= X^3, & \theta(c_{2,0}) &= (1\ 2), & \theta(c_{2,1}) &= (1\ 3)\end{aligned}$$

Es claro que el elemento $c_{2,0}c_{2,1}$ tiene como imagen la permutación $(1\ 2\ 3)$, que junto al elemento $c_{2,0}$ que tiene como imagen la permutación $(1\ 2)$ generan todo S_3 . Ahora por otra parte tenemos que la imagen de $e_1(c_{2,0}c_{2,1})^2$ es el generador X . Ahora el elemento $(e_1(c_{2,0}c_{2,1})^2)^3c_{1,0}$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[48,6]$, que tiene estructura algebraica $C_{24} \rtimes C_2$. Una presentación de este grupo viene en [13] dada por generadores T, X tales que cumplen $X^{24} = T^2 = 1$ y $TXT = X^{11}$. Tenemos dos grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XT, \quad \theta(e_1) = TX^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = T, \quad \theta(c_{1,1}) = X^{12}, \quad \theta(c_{1,2}) = XTX^{-1}$$

Es claro que el elemento $c_{1,0}$ tiene como imagen el generador T , que junto al elemento $x_1c_{1,0}$ que tiene como imagen el generador X , generan todo el grupo. Ahora tenemos que el elemento $(x_1c_{1,0})^{12}c_{1,1}$ tiene como imagen el neutro, y es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = T, \quad \theta(x_2) = XT, \quad \theta(e_1) = X^{13}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^{12}$$

Es claro que el elemento x_1 tiene como imagen el generador T , que junto al elemento x_2x_1 que tiene como imagen el generador X , generan todo el grupo. Observemos que todos ellos son elementos que preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow Ahora toca analizar el grupo [48,14], cuya estructura algebraica es $(C_{12} \times C_2) \rtimes C_2$. Tenemos una presentación de este grupo en [13], que viene dada por generadores X, R, S tales que $X^3 = R^4 = S^4 = (RS)^2 = (R^{-1}S)^2 = 1, XR = RX, S^{-1}XS = X^{-1}$. Tenemos dos grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XS, \quad \theta(e_1) = S^{-1}X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = SR, \quad \theta(c_{1,1}) = S^2, \quad \theta(c_{1,2}) = X^2S^{-1}R^{-1}$$

Tenemos que la imagen de $(x_1c_{1,2})^8$ es el generador X , que la imagen de $(x_1c_{1,2})^4x_1$ es el generador S y que la imagen del elemento $((x_1c_{1,2})^4x_1)c_{1,1}c_{1,0}$ es el generador R . Observemos además que todos los elementos preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X^2S^{-1}R^{-1}, \quad \theta(x_2) = XS, \quad \theta(e_1) = S^2R^{-1}X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = S^2$$

Tenemos que la imagen de $(x_2x_1)^8$ es el generador X , que la imagen de $(x_2x_1)^4x_2$ es el generador S y que la imagen del elemento $(x_2x_1)^3$ es el generador R . Observemos además que todos los elementos preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que analizamos es el grupo [48,21], que tiene estructura algebraica $C_3 \times (4, 4|2, 2)$. Una presentación de este grupo la encontramos en [13], dada por generadores R, S, Z tales que $Z^3 = R^4 = S^4 = (RS)^2 = (R^{-1}S)^2 = 1$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = ZR, \quad \theta(e_2) = R^{-1}Z^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = R^2, \quad \theta(c_{2,0}) = SR, \quad \theta(c_{2,1}) = RS$$

Es claro que el elemento e_1^9 tiene como imagen el generador R , el elemento e_1^4 va al generador Z , y el elemento $c_{2,0}c_{1,0}e_1^9$ tiene como imagen el generador S . Observemos que los tres elementos preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [48,24], cuya estructura algebraica es $C_3 \times (C_8 \times C_2)$. Una presentación de este grupo la podemos encontrar en [13]. Consideramos generadores X, Y, Z tales que $X^8 = Y^2 = Z^3 = 1, YXY = X^5$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = ZX, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Z^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^4, \quad \theta(c_{2,0}) = Y, \quad \theta(c_{2,1}) = YX^4$$

Es claro que el elemento e_1^9 tiene como imagen el generador X , el elemento e_1^{16} tiene como imagen el generador Z , y el elemento $c_{2,0}c_{1,0}e_1^{12}$ tiene como imagen el generador Y . Observemos de nuevo que los tres preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que estudiamos es el grupo [48,37], cuya estructura algebraica es $(C_{12} \times C_2) \times C_2$. La presentación de este grupo, en [13], viene dada por generadores X, R, S, T tales que $X^3 = R^2 = S^2 = T^2 = 1, TSR = RTS = SRT, RXR = X^{-1}, XS = SX, TXT = X^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = RX, \quad \theta(c_{1,1}) = (RS)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = STS, \quad \theta(c_{1,3}) = S, \quad \theta(c_{1,4}) = RX$$

Tenemos que el elemento $c_{1,3}$ va al generador S , el elemento $c_{1,3}c_{1,2}c_{1,3}$ va al generador T , el elemento $(c_{1,2}c_{1,3})^2(c_{1,2}c_{1,4})^2$ va al generador X^2 , y finalmente el elemento $c_{1,4}(c_{1,2}c_{1,3})^2(c_{1,2}c_{1,4})^2$ va al generador R . Ahora, observemos que claramente el elemento $c_{1,1}(c_{1,3}c_{1,4}(c_{1,2}c_{1,3})^2(c_{1,2}c_{1,4})^2)^2$ va al neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow Ahora tenemos que estudiar el siguiente grupo [48,43] que tiene estructura algebraica $C_2 \times ((C_6 \times C_2) \times C_2)$. Tenemos una presentación de este grupo en [13], dada por

generadores X, Y, Z tales que $X^4 = Y^6 = Z^2 = (XY)^2 = (X^{-1}Y)^2 = 1$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = X^{-1}YZ, \quad \theta(c_{1,1}) = Z, \quad \theta(c_{1,2}) = YX, \quad \theta(c_{1,3}) = Y^3, \quad \theta(c_{1,4}) = X^{-1}YZ$$

Tenemos que el elemento $c_{1,1}$ va al generador Z , el elemento $c_{1,3}c_{1,2}c_{1,0}c_{1,1}$ va al generador Y^{-1} , el elemento $c_{1,3}c_{1,2}c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2}$ va al generador X . Ahora, observamos que el elemento $(c_{1,3}c_{1,2}c_{1,0}c_{1,1})^3c_{1,3}$ va al neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,49], cuya estructura algebraica es $C_2 \times C_2 \times A_4$. Tomaremos como generadores de cada C_2 los elementos X, Z respectivamente, y tomaremos A_4 como el grupo alternado de 4 elementos generado por $(1\ 2)(3\ 4)$ y $(1\ 2\ 3)$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = (1\ 2\ 3)X, \quad \theta(e_2) = (1\ 3\ 2)X,$$

$$\theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{2,0}) = (1\ 2)(3\ 4), \quad \theta(c_{2,1}) = (1\ 3)(2\ 4)$$

Es claro que el elemento e_1^3 tiene como imagen el generador X , el elemento $c_{1,0}$ tiene como imagen el generador Z , el elemento e_1^4 es el generador $(1\ 2\ 3)$ y que junto al elemento $c_{2,0}$ que tiene como imagen el generador $(1\ 2)(3\ 4)$ generan todo el grupo. Observemos que el elemento $(e_1^4c_{2,0})^3$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El último grupo de orden 48 que tenemos aquí es [48,51], que tiene estructura algebraica $C_2 \times C_2 \times D_6 \approx D_2 \times D_6$. Este grupo es estudiado en profundidad en [10]. Sean A, B generadores de D_2 ; y sean C, D generadores de orden 2 de D_6 tales que su producto tiene orden 6. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = A, \quad \theta(c_{1,1}) = C, \quad \theta(c_{1,2}) = B, \quad \theta(c_{1,3}) = D, \quad \theta(c_{1,4}) = AD, \quad \theta(c_{1,5}) = A$$

Entonces tenemos que $\theta(c_{1,0}c_{1,4}) = D, \theta(c_{1,5}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,2}) = B, \theta(c_{1,5}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,1}) = C$ y $\theta(c_{1,5}) = A$. Además tenemos que el elemento $c_{1,5}c_{1,4}c_{1,3}$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow Ahora analizamos el grupo [72,42], que tiene estructura algebraica $C_3 \times S_4$. Tomaremos X generador de C_3 y las permutaciones $(1\ 2)$ y $(1\ 2\ 3\ 4)$ como generadores

de S_4 . Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = (1\ 3), \quad \theta(x_2) = X(1\ 3\ 4), \quad \theta(e_1) = (1\ 4)X^2, \quad \theta(c_{1,0}) = (2\ 3)$$

Tenemos que la imagen del elemento $(x_2c_{1,0})^4$ es el generador X , la imagen del elemento $(x_2c_{1,0})^9$ es la permutación $(1\ 2\ 3\ 4)$ y que la imagen del elemento $x_1c_{1,0}x_1$ es el generador $(1\ 2)$. Así tenemos el grupo generado. Además tenemos que $(x_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo $[72,43]$, cuya estructura algebraica es $(C_3 \times A_4) \rtimes C_2$. Llamamos X al generador de C_3 , tomamos $(1\ 2)(3\ 4)$ y $(1\ 2\ 3)$ como generadores de A_4 , y llamamos Y al generador de C_2 . Hay que determinar cómo actúa Y con los otros generadores, y tomamos las siguientes relaciones que comprobaremos que dan lugar a los epimorfismos que hemos de construir:

$$YX = X^2Y, \quad Y(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)Y, \quad Y(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)Y$$

Como es el único grupo de orden 72 para el que aparecen estos dos grupos NEC hemos probado que esta es la presentación del grupo. Tenemos dos grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(3,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= (1\ 2)(3\ 4)Y, \quad \theta(e_1) = Y(1\ 2)(3\ 4), \\ \theta(c_{1,0}) &= YX, \quad \theta(c_{1,1}) = (1\ 2\ 3)Y, \quad \theta(c_{1,2}) = X^{-1}Y \end{aligned}$$

Tenemos que la imagen de $(x_1c_{1,0})^3$ es el generador $(1\ 2)(3\ 4)$, que la imagen de $(x_1c_{1,0})^4$ es el generador X , la imagen de $(x_1c_{1,0})^4c_{1,2}$ es el generador Y y la imagen del elemento $c_{1,1}(x_1c_{1,0})^4c_{1,2}$ es el generador $(1\ 2\ 3)$. Además tenemos que el elemento $(c_{1,1}e_1)^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,3,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(c_{1,0}) &= Y, \quad \theta(c_{1,1}) = (1\ 2)(3\ 4), \quad \theta(c_{1,2}) = YX, \\ \theta(c_{1,3}) &= (1\ 2\ 3)Y, \quad \theta(c_{1,4}) = Y \end{aligned}$$

Tenemos que la imagen de $c_{1,3}c_{1,4}$ es el generador $(1\ 2\ 3)$, que la imagen de $c_{1,4}c_{1,2}$ es el generador X , la imagen de $c_{1,4}$ es el generador Y y la imagen del elemento $c_{1,1}$ es el generador $(1\ 2)(3\ 4)$. Observemos además que el elemento $(c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3})^3$ invierte la orientación y tiene como imagen el elemento neutro. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow Ahora analizamos el grupo [72,44], que tiene estructura algebraica $A_4 \times S_3$. Tomemos las permutaciones $(1\ 2)(3\ 4)$ y $(1\ 2\ 3)$ como generadores de A_4 , y las permutaciones $(5\ 6\ 7)$ y $(5\ 6)$ como generadores de S_3 . Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [3]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = (1\ 2\ 3)(5\ 6\ 7), \quad \theta(e_1) = (1\ 3\ 2)(5\ 7\ 6), \quad \theta(c_{1,0}) = (5\ 6),$$

$$\theta(c_{1,1}) = (1\ 2)(3\ 4), \quad \theta(c_{1,2}) = (5\ 7)$$

Tenemos que los elementos $(x_1c_{1,0})^4$ y $c_{1,1}$ tienen como imagen las permutaciones $(1\ 2\ 3)$ y $(1\ 2)(3\ 4)$ respectivamente y por tanto generan todo A_4 . Por otro lado tenemos que los elementos $c_{1,0}c_{1,2}$ y $c_{1,0}$ tienen como imagen las permutaciones $(5\ 6\ 7)$ y $(5\ 6)$ respectivamente, que generan todo S_3 . Además tenemos que el elemento $(x_1c_{1,1})^3$ tiene como imagen el elemento neutro, y además es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6), \quad \theta(x_2) = (1\ 2\ 3)(5\ 6\ 7), \quad \theta(e_1) = (5\ 7)(1\ 4\ 3), \quad \theta(c_{1,0}) = (5\ 7)$$

Tenemos que los elementos $(x_2c_{1,0})^4$ y $x_1(x_2c_{1,0})^3$ tienen como imagen las permutaciones $(1\ 2\ 3)$ y $(1\ 2)(3\ 4)$ respectivamente y por tanto generan todo A_4 . Por otro lado tenemos que los elementos $x_2(x_2c_{1,0})^2$ y $(x_2c_{1,0})^3$ tienen como imagen las permutaciones $(5\ 6\ 7)$ y $(5\ 6)$ respectivamente, que generan todo S_3 . Además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro, y además es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos que estudiar es el [72,46], cuya estructura algebraica es $C_2 \times S_3 \times S_3 \approx D_3 \times D_6$, por lo que este grupo se estudia en profundidad en [10]. Sean A, B generadores de orden 2 de D_3 cuyo producto tiene orden 3 y tomemos C, D como generadores de D_6 cuyo producto tiene orden 6 y que conmutan con A y B . Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,6)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = C, \quad \theta(c_{1,1}) = A, \quad \theta(c_{1,2}) = D, \quad \theta(c_{1,3}) = BD, \quad \theta(c_{1,4}) = C$$

Observemos que $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador B , el elemento $(c_{1,1}c_{1,3})^3$ tiene como imagen el generador D . Además tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,2}(c_{1,1}c_{1,3})^3$ es el generador C y la imagen de $c_{1,4}c_{1,3}c_{1,0}c_{1,2}(c_{1,1}c_{1,3})^3$ es el generador A . Todos los elementos preservan la orientación, luego hemos visto que es un epimorfismo que actúa

sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow Ahora seguidamente estudiamos el grupo [96,89], que tiene estructura algebraica $(D_2 \times D_6) \rtimes C_2$. De este grupo no tenemos una presentación explícita, pero en base a su estructura algebraica podemos deducir una presentación dada por generadores a, b, c, d, X tales que $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = X^2 = (ab)^2 = (cd)^6 = 1$ y a, b conmutan con c, d y viceversa. Debemos decidir como actúa X respecto a los otros generadores, y tomamos $Xa = aXb, Xb = bX, Xc = cXd$ y $Xd = dX$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = X, \quad \theta(c_{1,1}) = b, \quad \theta(c_{1,2}) = a, \quad \theta(c_{1,3}) = c, \quad \theta(c_{1,4}) = X$$

Tenemos que los elementos $c_{1,0}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,1}$ y $(c_{1,3}c_{1,4})^2$ tienen como imagen los generadores X, a, c, b y d respectivamente y por tanto generan todo el grupo. Por otro lado tenemos que el elemento $(c_{1,0}c_{1,2})^2c_{1,1}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [96,115], que tiene estructura algebraica $(C_2 \times D_{12}) \rtimes C_2$. De este grupo no tenemos una presentación explícita, pero en base a su estructura algebraica podemos deducir una presentación dada por generadores X, Y, Z, a tales que $X^2 = Y^2 = Z^2 = a^2 = (YZ)^{12} = 1$. Escogemos entonces la siguiente actuación de a respecto a los otros generadores: $Ya = aY, aZ = ZaY$ y $Xa = aX$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{1,1}) = X, \quad \theta(c_{1,2}) = Y, \quad \theta(c_{1,3}) = a, \quad \theta(c_{1,4}) = Z$$

Tenemos que los elementos $c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2}$ y $c_{1,3}$ tienen como imagen los generadores Z, X, Y y a respectivamente y por tanto generan todo el grupo. Por otro lado tenemos que el elemento $(c_{1,3}c_{1,4})^2c_{1,2}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el siguiente grupo que es el [96,226], cuya estructura algebraica es $C_2 \times C_2 \times S_4$. Consideramos X generador de C_2 e Y generador del otro C_2 ; y consideramos las permutaciones $(1\ 2\ 3\ 4)$ y $(1\ 2)$, generadores de S_4 . Para el siguiente grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = (1\ 3), \quad \theta(c_{1,1}) = Y, \quad \theta(c_{1,2}) = (3\ 4)X, \quad \theta(c_{1,3}) = (1\ 2)(3\ 4), \quad \theta(c_{1,4}) = (1\ 3)$$

Tenemos que los elementos $c_{1,3}c_{1,4}$ y $(c_{1,0}c_{1,2})^3c_{1,2}c_{1,3}$ tienen como imagen las permutaciones $(1\ 2\ 3\ 4)$ y $(1\ 2)$ respectivamente y por tanto generan todo S_4 . Por otro lado tenemos que el elemento $(c_{1,0}c_{1,2})^3$ tiene como imagen el generador X . Ahora tomemos como z el elemento $(c_{1,0}c_{1,2})^3c_{1,2}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,1}$ que tiene como imagen $Y(3\ 1\ 2)$. Entonces

tenemos que z^3 tiene como imagen el generador Y . Observemos además que todos estos elementos preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es [144,183], que tiene estructura algebraica $S_3 \times S_4$. Tomemos las permutaciones $(1\ 2\ 3)$ y $(1\ 2)$ como generadores de S_3 y las permutaciones $(4\ 5\ 6\ 7)$ y $(4\ 5)$ como generadores de S_4 . Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(c_{1,0}) &= (1\ 2)(4\ 5), & \theta(c_{1,1}) &= (1\ 2), \\ \theta(c_{1,2}) &= (7\ 4), & \theta(c_{1,3}) &= (1\ 3)(5\ 6), & \theta(c_{1,4}) &= (1\ 2)(4\ 5)\end{aligned}$$

Tenemos que los elementos $(c_{1,3}c_{1,4}c_{1,2})^8$ y $c_{1,1}$ tienen como imagen las permutaciones $(1\ 2\ 3)$ y $(1\ 2)$ respectivamente y por tanto generan todo S_3 . Por otro lado tenemos que los elementos $(c_{1,3}c_{1,4}c_{1,2})^9$ y $c_{1,1}c_{1,4}$ tienen como imagen respectivamente las permutaciones $(4\ 5\ 6\ 7)$ y $(4\ 5)$, que generan todo S_4 . Además tenemos que el elemento $(c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2})^3$ tiene como imagen el elemento neutro, y además es un elemento que invierte la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow El penúltimo grupo que estudiamos es [180,19], que tiene estructura algebraica $GL(2, 4) \approx A_5 \times C_3$. Tomemos X como generador de C_3 y A_5 lo tomamos como el grupo de permutaciones pares de 5 elementos. Para el grupo NEC $(0; +; [3]; \{(5)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X(1\ 2\ 3), \quad \theta(e_1) = X^{-1}(1\ 3\ 2), \quad \theta(c_{1,0}) = (1\ 5)(3\ 4), \quad \theta(c_{1,1}) = (2\ 4)(3\ 5)$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen la permutación $(1\ 3\ 2\ 4\ 5)$, el elemento $x_1c_{1,1}c_{1,0}c_{1,1}e_1c_{1,0}$ tiene como imagen la permutación $(2\ 4\ 3)$ y el elemento $(x_1c_{1,1}c_{1,0}c_{1,1}e_1c_{1,0}e_1)^3$ tiene como imagen la permutación $(2\ 4)(1\ 3)$. Estas tres permutaciones generan un grupo de orden múltiplo de 30, pero en A_5 no hay subgrupos de índice 2, por lo que generan todo A_5 . Además tenemos que el elemento $(x_1c_{1,1}c_{1,0}c_{1,1}e_1c_{1,0}e_1)^2$ tiene como imagen el generador X . Así tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación y hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{15}$.

\Rightarrow Por último tenemos el grupo [360,121], cuya estructura algebraica es $A_5 \times D_3$. Tenemos una presentación de este grupo en [5] dada por generadores R, S, T tales que $R^3 = S^{10} = T^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = S^{-2}RS^3R^{-1}S^{-4}R^{-1}T = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,3,10)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen

de $(c_{1,3}c_{1,2})^2(c_{1,1}c_{1,2})(c_{1,2}c_{1,3})^3c_{1,2}c_{1,1}(c_{1,3}c_{1,2})^4c_{1,2}c_{1,1}$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{30}$.

Grupos de género imaginario 15

Según la lista de Conder, tendríamos 5 grupos de género imaginario 15, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[24,1]	24	$(0; +; [3,8]; \{-\})$
[39,1]	39	$(1; -; [3,3]; \{-\})$
[48,15]	48	$(0; +; [-]; \{(2,2,3,8)\})$
[78,1]	78	$(0; +; [2,3]; \{-\})$
[1092,25]	1092	$(0; +; [-]; \{(2,3,7)\})$

\Rightarrow El primer grupo a estudiar que tenemos es el [24,1], que tiene estructura algebraica $\langle -2,2,3 \rangle$. Este grupo es estudiado en profundidad en [12]. Tenemos que la presentación del grupo viene dada por generadores S, T tales que cumplen las $S^8 = T^8 = (S^3T)^3 = 1$, $S^2 = T^2 = (ST)^3$. Para el grupo NEC $(0; +; [3,8]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = S^3T, \quad \theta(x_2) = S, \quad \theta(e_1) = (S^3TS)^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = S^4$$

Es claro que la imagen de x_2 es el generador S y la imagen de $(x_2)^5x_1$ es el generador T , y ambos son elementos que preservan la orientación. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{13}{24}$.

\Rightarrow El segundo grupo que estudiamos es [39,1], cuya estructura algebraica es $C_{13} \times C_3$. Tenemos que este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b tales que $a^3 = b^{13} = 1, ba = ab^3$. Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^6$$

Tenemos que las imágenes de x_1 y x_1x_2 son los generadores a^{-1} y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación, luego tenemos que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [48,15], que tiene estructura algebraica $(C_3 \times D_4) \times C_2$. Tenemos una presentación de este grupo en [13], dada por generadores X, A, B tales que $X^3 = A^2 = B^8 = (AB)^2 = 1, AXA = X^{-1}, B^{-1}XB = X^{-1}$. Para el siguiente grupo

NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,3,8)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = AB, \quad \theta(c_{1,1}) = B^4, \quad \theta(c_{1,2}) = XA, \quad \theta(c_{1,3}) = A, \quad \theta(c_{1,4}) = AB$$

Tenemos que las imágenes de $c_{1,3}c_{1,0}$, de $c_{1,2}c_{1,3}$ y de $c_{1,3}c_{1,1}(c_{1,3}c_{1,0})^4$ son los generadores B, X y A respectivamente. Además todos son elementos que preservan la orientación, por lo que queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{13}{48}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [78,1], que tiene estructura algebraica $(C_{13} \times C_3) \times C_2$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, c tales que $a^2 = b^3 = c^{13} = 1, ca = ac^{12}, cb = bc^3$ y $ab = ba$. Sea $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$ el grupo NEC asociado y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = cb, \quad \theta(e_1) = b^{-1}c^{-1}a, \quad \theta(c_{1,0}) = ac^8$$

Tenemos que el elemento $(x_1c_{1,0})^2$ tiene como imagen el generador c^3 (que genera lo mismo que c), el elemento $(x_1c_{1,0})^8x_2$ tiene como imagen el generador b y el elemento x_1 tiene como imagen el elemento a . Observemos que todos los elementos preservan la orientación. Así queda probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow El último grupo que tenemos es el grupo [1092,25], cuya estructura algebraica es $PSL(2, 13)$. Este grupo es estudiado por Wendy Hall en [16], donde se establece que $PSL(2, 13)$ es un grupo de $84(g-2)$ automorfismos de una superficie de género g , luego $g = 15$. Tenemos una presentación de este grupo en [5] dada por generadores R, S, T tales que $R^3 = S^7 = T^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = S^{-1}(RS^{-2})^6R^{-1}T = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,3,7)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen de $c_{1,3}c_{1,2}(c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,3}c_{1,2})^2)^6c_{1,2}c_{1,1}$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{84}$.

Grupos de género imaginario 16

Según la lista de Conder, tendríamos 7 grupos de género imaginario 16, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[28,1]	28	$(0; +; [4,4]; \{-\})$ ó $(1; -; [4,4]; \{-\})$
[56,4]	39	$(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ ó $(0; +; [2,4]; \{-\})$
[56,7]	56	$(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ ó $(0; +; [2]; \{(4,4)\})$ ó $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ ó $(0; +; [2,4]; \{-\})$
[56,9]	56	$(0; +; [-]; \{-, (2)\})$
[72,16]	72	$(0; +; [18]; \{(2)\})$
[112,31]	112	$(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$
[144,109]	144	$(0; +; [-]; \{(2,4,18)\})$

\Rightarrow El primer grupo que tenemos es el [28,1], que tiene estructura algebraica DC_7 . Este grupo es estudiado en [19], pero no se da explícitamente el epimorfismo. Consideramos los generadores X, Y tales que $X^{14} = 1, X^7 = Y^2, Y^{-1}XY = X^{-1}$. Tenemos dos grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(1; -; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(d_1) = X^3$$

Es claro que la imagen del elemento $x_1x_2^3$ es el generador X y que la imagen del elemento x_2 es el generador Y , y ambos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = XY, \quad \theta(e_1) = Y^{-1}X^{-1}Y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^7$$

Es claro que la imagen del elemento $x_2x_1^3$ es el generador X y que la imagen del elemento x_1 es el generador Y , y ambos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El segundo grupo que tenemos es el [56,4], cuya estructura algebraica es $C_4 \times D_7$. Este grupo es estudiado en profundidad en [9]. Tomemos X como generador del grupo cíclico e Y, Z como generadores de orden 2 de D_7 tales que su producto tiene orden 7. Como tenemos dos grupos NEC:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$, no aparece el epimorfismo en [9]. Definimos el epimorfismo asociado a él $\theta : \Lambda \rightarrow G$ como

$$\theta(x_1) = XYZY, \quad \theta(e_1) = YZYX^{-1},$$

$$\theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = X^2, \quad \theta(c_{1,2}) = (YZ)^2Y$$

Podemos ver que la imagen de $(x_1c_{1,0})^{21}$ es el generador X , que la imagen del elemento $c_{1,0}(x_1c_{1,0})^7x_1c_{1,0}$ es el generador Z y que la imagen del elemento $c_{1,0}$ es el generador Y . Además tenemos que la imagen del elemento $x_1^2c_{1,1}$ es el neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$, aparece el epimorfismo en [9] dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = XYZY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}YZ, \quad \theta(c_{1,0}) = X^2$$

Tenemos que $\theta(x_2(e_1x_2x_1)^4x_1) = X$. Llamemos $a = x_2(e_1x_2x_1)^4x_1$, entonces tenemos que $\theta(x_1a^3x_2x_1) = Z$ y además es claro que $\theta(x_1) = Y$. Todos los elementos preservan la orientación y por tanto hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que estudiamos es el grupo [56,7], que tiene estructura algebraica $(C_{14} \times C_2) \rtimes C_2$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores A, B tales que $A^2 = B^{14} = 1, (BAB)^2 = 1, (B^{-1}A)^2(BA)^2 = 1$. Tenemos 4 grupos NEC, así:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = A, \quad \theta(c_{1,1}) = (AB)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = AB^8, \quad \theta(c_{1,3}) = B^7, \quad \theta(c_{1,4}) = A$$

Es claro que la imagen del elemento $c_{1,0}$ es el generador A y que la imagen del elemento $c_{1,0}c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador B . Por otra parte tenemos que el elemento $c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el elemento neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así queda visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B^{10}A, \quad \theta(e_1) = B^{10}A, \quad \theta(c_{1,0}) = AB^8, \quad \theta(c_{1,1}) = B^7, \quad \theta(c_{1,2}) = A$$

Observemos que el elemento $(c_{1,1}e_1c_{1,2})^5$ tiene como imagen el generador B y que la imagen del elemento $(c_{1,0}c_{1,1})(c_{1,1}e_1c_{1,2})^9$ es el generador A . Es claro que ambos elementos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(x_1) &= AB, & \theta(e_1) &= B^{-1}A, \\ \theta(c_{1,0}) &= A, & \theta(c_{1,1}) &= (AB)^2, & \theta(c_{1,2}) &= ABAB^{-1}A\end{aligned}$$

Tenemos que la imagen de $c_{1,0}x_1$ es el generador B y que la imagen del elemento $c_{1,0}$ es el generador A . Además tenemos que el elemento $x_1^2c_{1,1}$ tiene como imagen el neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

- iv) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(x_2) = AB, \quad \theta(e_1) = B^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = (AB)^2$$

Tenemos que $\theta(x_1) = A$ y $\theta(x_1x_2) = B$, ambos elementos que preservan la orientación. Así queda visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [56,9], que tiene estructura algebraica $C_7 \times D_4$. Este grupo es estudiado en profundidad en [9]. Consideramos X generador de orden 7 de C_7 e Y, Z generadores de orden 2 de D_4 tales que su producto es de orden 4. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = X^{-1}YZY, \quad \theta(e_2) = XYZY, \quad \theta(c_{1,0}) = YZY, \quad \theta(c_{2,0}) = Y, \quad \theta(c_{2,1}) = (YZ)^2Y$$

Tenemos que $\theta(e_2^8) = X$, $\theta((e_2c_{1,0}c_{2,0})^7) = Y$ y $\theta((e_2c_{1,0}c_{2,0})^7e_2^7(e_2c_{1,0}c_{2,0})^7) = Z$. Así tenemos los generadores como imágenes de elementos que preservan la orientación y por tanto hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [72,16], que tiene estructura algebraica $C_2 \times ((C_2 \times C_2) \times C_9)$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c, d tales que $a^9 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$, $ba = abc$, $ca = ab$ y d conmuta con todos. Para el grupo NEC $(0; +; [18]; \{(2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ad, \quad \theta(e_1) = da^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = bc, \quad \theta(c_{1,1}) = b$$

Tenemos en primer lugar que x_1^9 tiene como imagen el generador d , y por tanto x_1^{10} tiene como imagen el generador a . Ahora tenemos que la imagen del elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ es el generador c y la imagen del elemento $x_1^8c_{1,0}c_{1,1}x_1^{10}$ es el generador b . Así tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación, luego hemos

probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{7}{36}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [112,31], cuya estructura algebraica es $D_7 \times D_4$. Este grupo se estudia con todo detalle en [10]. Tomemos A, B generadores de orden 2 de D_3 tales que su producto tiene orden 3, y tomemos C, D generadores de orden 2 de D_7 tales que su producto tiene orden 7. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = BD, \quad \theta(c_{1,1}) = D, \quad \theta(c_{1,2}) = A, \quad \theta(c_{1,3}) = C, \quad \theta(c_{1,4}) = BD$$

Tenemos que $\theta(c_{1,0}c_{1,1}) = B$, que $\theta((c_{1,0}c_{1,2})^7) = D$, que $\theta(c_{1,3}c_{1,1}(c_{1,0}c_{1,2})^7) = C$ y finalmente $\theta(c_{1,3}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}(c_{1,0}c_{1,2})^7) = A$. Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación y es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow Por último tenemos que estudiar el grupo [144,109], que tiene estructura algebraica $(C_2 \times ((C_2 \times C_2) \rtimes C_9)) \rtimes C_2$. Tenemos una presentación de este grupo en [5] dada por generadores R, S, T tales que cumplen las siguientes relaciones $R^4 = S^{18} = T^2 = 1$, $(RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = TS^{-1}RS^{-1}R^{-2} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,4,18)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen de $c_{1,3}c_{1,2}c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,1})^2$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{7}{72}$.

Grupos de género imaginario 17

Según la lista de Conder, tendríamos 19 grupos de género imaginario 17, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[25,2]	25	(1; -, [5,5]; {-})
[27,2]	27	(1; -, [3,9]; {-})
[27,4]	27	(1; -, [3,9]; {-})
[36,6]	36	(0; +; [3,4]; {-})
[50,3]	50	(0; +; [10]; {(5)}) ó (0; +; [2,5]; {-})
[50,4]	50	(0; +; [2]; {(5,5)})
[54,3]	54	(0; +; [6]; {(9)})
[54,4]	54	(0; +; [18]; {(3)})
[54,6]	54	(0; +; [6]; {(9)})
[54,7]	54	(0; +; [2]; {(3,9)})
[68,3]	68	(0; +; [4]; {(17)})
[72,23]	72	(0; +; [-]; {(2,2,3,4)})
[72,39]	72	(0; +; [8]; {(3)})
[100,12]	100	(0; +; [4]; {(5)})
[100,13]	100	(0; +; [-]; {(2,10,10)}) ó (0; +; [-]; {(2,2,2,5)})
[108,16]	100	(0; +; [-]; {(2,6,18)})
[200,43]	200	(0; +; [-]; {(2,4,10)})
[360,118]	360	(0; +; [-]; {(3,3,4)})
[720,764]	720	(0; +; [-]; {(2,3,8)})

\Rightarrow El primer grupo que tenemos para estudiar es el [25,2], que tiene estructura algebraica $C_5 \times C_5$. Este grupo es estudiado en [8]. Tomemos X, Y generadores de orden 5 de cada C_5 respectivamente. Para el grupo NEC (1; -, [5,5]; {-}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(d_1) = X^2Y^2$$

Tenemos que las imágenes de los elementos x_1 y x_2 son los generadores X e Y , y ambos son elementos que preservan la orientación. Así tenemos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{3}{5}$.

\Rightarrow El segundo grupo que estudiamos es [27,2], cuya estructura algebraica es $C_9 \times C_3$. Este grupo también se estudia en [8]. Tomemos X, Y como generadores de orden 9 y de orden 3 respectivamente de C_9 y de C_3 . Para el grupo NEC (1; -, [3,9]; {-}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = X, \quad \theta(d_1) = X^4Y$$

Tenemos que las imágenes de los elementos x_1 y x_2 son los generadores Y, X , y ambos son elementos que preservan la orientación. Así tenemos que es epimorfismo que

actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{5}{9}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [27,4], que tiene estructura algebraica $C_9 \times C_3$. Este grupo se estudia en [12]. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^3 = Y^9 = 1, YX = XY^4$. Para el grupo NEC (1; -; [3,9]; {-}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(d_1) = YX$$

Tenemos que las imágenes de los elementos x_1 y x_2 son los generadores X e Y , y ambos son elementos que preservan la orientación. Así tenemos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{5}{9}$.

⇒ El siguiente grupo que estudiamos es el [36,6], que tiene estructura algebraica $C_3 \times DC_3$. Este grupo es estudiado en profundidad en [11]. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, c tales que $a^{12} = b^3 = 1, ba = ab^2$. Para el grupo NEC (0; +; [3,4]; {-}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^4b, \quad \theta(x_2) = a^3b, \quad \theta(e_1) = a^5, \quad \theta(c_{1,0}) = a^6$$

Tenemos que la imagen del elemento e_1^5 es el generador a y que la imagen del elemento $e_1^4x_1$ es el generador b , luego tenemos que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{5}{12}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [50,3], que tiene estructura algebraica $C_5 \times D_5$. Este grupo se estudia en [9]. Consideramos X generador de orden 5 de C_5 y a Y, Z generadores de orden 2 de D_5 tales que su producto tiene orden 5. Tenemos que hay dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC (0; +; [10]; {(5)}) tenemos que el epimorfismo aparece en [9] dado por

$$\theta(x_1) = X(YZ)^2Y, \quad \theta(e_1) = X^{-1}(YZ)^2Y, \quad \theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{1,1}) = Y$$

Tenemos que la imagen de x_1^6 es el generador X . Ahora tenemos que la imagen de $(x_1^5c_{1,1})(c_{1,1}c_{1,0})^2c_{1,1}$ es el generador Z y que la imagen de $c_{1,0}(x_1^5c_{1,1})(c_{1,1}c_{1,0})^2$ es el generador Y . Observemos que todos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{3}{10}$.

- ii) Para el grupo NEC (0; +; [2,5]; {-}), no aparece en [9], y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = YZY, \quad \theta(x_2) = X(YZ)^3, \quad \theta(e_1) = X^{-1}(YZ)^4Z, \quad \theta(c_{1,0}) = (YZ)^4Z$$

Tenemos que la imagen de $(x_2c_{1,0})^6$ es el generador X . Ahora tenemos que la imagen de $((x_2c_{1,0})^4x_2)^2(x_2c_{1,0})^6e_1$ es el generador Z y que la imagen del elemento $(x_2e_1(((x_2c_{1,0})^4x_2)^2(x_2c_{1,0})^6e_1))^2x_1$ es el generador Y . Observemos que todos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{3}{10}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [50,4], que tiene estructura algebraica $(C_5 \times C_5) \rtimes C_2$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen las relaciones $a^2 = b^5 = c^5 = 1$, $ba = ab^4$, $ca = ac^4$ y $bc = cb$. Para el siguiente grupo NEC $(0; +; [2]; \{(5,5)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ab, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a, \quad \theta(c_{1,0}) = a, \quad \theta(c_{1,1}) = ca, \quad \theta(c_{1,2}) = ab^2$$

Es claro que la imagen del elemento $c_{1,1}c_{1,0}$ es el generador c . Además tenemos que la imagen del elemento $((c_{1,1}c_{1,0})^4c_{1,1}c_{1,2})^3$ es el generador b y que la imagen del elemento $((c_{1,1}c_{1,0})^4c_{1,1}c_{1,2})^3e_1$ es el generador a . Todos los elementos preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{3}{10}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [54,3], cuya estructura algebraica es $C_3 \times D_9$. Este grupo se estudia en [9]. Tomemos X como generador de orden 3 de C_3 e Y, Z como generadores de orden 2 de D_9 cuyo producto tiene orden 9. Para el siguiente grupo NEC $(0; +; [6]; \{(9)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X(YZ)^4Y, \quad \theta(e_1) = X^{-1}(YZ)^4Y, \quad \theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{1,1}) = Y$$

Tenemos que la imagen de x_1^4 es el generador X . Ahora tenemos que la imagen de $(x_1^3c_{1,1})(c_{1,1}c_{1,0})^4c_{1,1}$ es el generador Z y que la imagen de $c_{1,0}(x_1^3c_{1,1})(c_{1,1}c_{1,0})^4$ es el generador Y . Observemos que todos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{5}{18}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el [54,4], grupo que tiene estructura algebraica $C_9 \times D_3$. Este grupo se estudia en profundidad en [9]. Tomemos X generador de C_9 y los elementos Y, Z como generadores de orden 2 de D_3 tal que su producto tiene orden 3. Para el grupo NEC $(0; +; [18]; \{(3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XYZY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}YZY, \quad \theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{1,1}) = Y$$

Tenemos que la imagen de x_1^{10} es el generador X . Por otra parte tenemos que $\theta(x_1^9c_{1,0}c_{1,1}) = Z$ y que $\theta(c_{1,0}x_1^9c_{1,0}) = Y$. Observemos que todos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{5}{18}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [54,6], que tiene estructura algebraica $(C_9 \times C_3) \times C_2$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen las relaciones $a^2 = b^9 = c^3 = 1, ba = a^8b, cb = bcb^3$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [6]; \{(9)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ac, \quad \theta(e_1) = c^{-1}a, \quad \theta(c_{1,0}) = ab, \quad \theta(c_{1,1}) = bcb^{-1}a$$

Tenemos que la imagen de x_1^3 es el generador a , que la imagen de $(x_1^4 c_{1,1} x_1)^2$ es el elemento b^2 (que genera lo mismo que b) y que la imagen de x_1^4 es el generador c . Observemos que todos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{5}{18}$.

⇒ El siguiente grupo que estudiamos es el grupo [54,7], cuya estructura algebraica es $(C_9 \times C_3) \times C_2$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^2 = b^3 = c^9 = 1, ba = ab^2, ca = ac^8$. Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(3,9)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ac, \quad \theta(e_1) = c^{-1}a, \quad \theta(c_{1,0}) = a, \quad \theta(c_{1,1}) = ba, \quad \theta(c_{1,2}) = c^7a$$

Es claro que la imagen de $c_{1,1}c_{1,0}$ es el generador b . Además tenemos que la imagen de $(c_{1,2}c_{1,0})^4$ es el generador c y que por tanto la imagen de $(c_{1,2}c_{1,0})^4 e_1$ es el generador a . Todos estos elementos preservan la orientación, luego hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{18}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [68,3] que tiene estructura algebraica $C_{17} \times C_4$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^4 = b^{17} = 1, ba = ab^{13}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(17)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^3b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2, \quad \theta(c_{1,1}) = a^2b^8$$

Tenemos que la imagen de $(c_{1,0}c_{1,1})^{15}$ es el generador b y que la imagen del elemento $(c_{1,0}c_{1,1})^{15} e_1$ es el generador a . Observemos que todos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{15}{68}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [72,23], que tiene estructura algebraica $(C_6 \times D_3) \times C_2$. De este grupo no conocíamos una presentación explícita, pero en base a su estructura algebraica podemos deducir una presentación dada por generadores X, Y, Z, W tales que $X^6 = Y^2 = Z^2 = W^2 = (YZ)^3 = 1, YW = WYZ, WZ = ZW, WX = X^3W$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,3,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = W, \quad \theta(c_{1,1}) = X^3, \quad \theta(c_{1,2}) = Z, \quad \theta(c_{1,3}) = Y, \quad \theta(c_{1,4}) = W$$

Tenemos que los elementos $c_{1,0}$, $c_{1,2}$, $c_{1,3}$ y $c_{1,0}c_{1,1}c_{1,0}$ tienen como imagen los generadores W, Z, Y y X respectivamente y por tanto generan todo el grupo. Por otro lado tenemos que el elemento $(c_{1,3}c_{1,4})^2c_{1,2}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{5}{24}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [72,39] que tiene estructura algebraica $(C_3 \times C_3) \times C_8$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^8 = b^3 = c^3 = 1, ba = ac^2, ca = ab, bc = cb$. Para el grupo NEC $(0; +; [8]; \{(3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = b^{-1}a^4, \quad \theta(c_{1,1}) = a^4b^{-1}$$

Tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}$ es el generador b , que la imagen de x_1 es el generador a y que la imagen de $x_1^7c_{1,0}c_{1,1}x_1$ es el generador c . Observemos que todos son elementos que preservan la orientación. Así queda probado que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{5}{24}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [100,12] que tiene estructura algebraica $(C_5 \times C_5) \times C_4$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen las relaciones $a^4 = b^5 = c^5 = 1, ba = ab^2, ca = ac^2$, y b y c lógicamente conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(5)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ab^2c^2, \quad \theta(e_1) = c^3b^3a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ca^2, \quad \theta(c_{1,1}) = a^2b$$

Tenemos que el elemento $x_1(c_{1,0}c_{1,1})^3$ tiene como imagen el generador a , el elemento $((c_{1,0}x_1^2)^2c_{1,0}c_{1,1})^2$ tiene como imagen el generador b , y por último el elemento $c_{1,0}c_{1,1}((c_{1,0}x_1^2)^2c_{1,0}c_{1,1})^3$ tiene como imagen el generador c . Observemos que todos esos elementos preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{20}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [100,13], cuya estructura algebraica es $D_5 \times D_5$. Este grupo es estudiado en profundidad en [10]. Tomemos A, B generadores de orden 2 cuyo producto tiene orden 5, y C, D de igual forma para el otro D_5 . Tenemos dos grupos NEC, así:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,10,10)\})$, el epimorfismo aparece en [10] dado por $\theta : \Lambda \rightarrow G$

$$\theta(c_{1,0}) = B, \quad \theta(c_{1,1}) = D, \quad \theta(c_{1,2}) = AC, \quad \theta(c_{1,3}) = B$$

Tenemos que $\theta((c_{1,0}c_{1,2})^5) = C$ y que $\theta((c_{1,0}c_{1,2})^6) = AB$. Además tenemos que $\theta((c_{1,2}c_{1,1})^5) = A$ y que $\theta((c_{1,2}c_{1,1})^6) = DC$. Así tenemos que el grupo está generado por elementos que preservan la orientación, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{20}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,5)\})$, el epimorfismo no aparece en [10]. Definimos $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = AD, \quad \theta(c_{1,1}) = A, \quad \theta(c_{1,2}) = C, \quad \theta(c_{1,3}) = CB, \quad \theta(c_{1,4}) = AD$$

Tenemos que $\theta(c_{1,1}c_{1,0}) = D$ y que $\theta(c_{1,2}c_{1,3}) = B$. Además tenemos $\theta(c_{1,1}) = A$ y que $\theta(c_{1,2}) = C$. Observemos que la imagen del elemento $(c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3})^5$ es el neutro y es un elemento que invierte la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{20}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [108,16], que tiene estructura algebraica $D_3 \times D_9$. Este grupo es estudiado a fondo en [10]. Tomemos A, B generadores de orden 2 de D_3 cuyo producto tiene orden 3, y los generadores C, D de orden 2 de D_9 tales que su producto tiene orden 9. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,6,18)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = D, \quad \theta(c_{1,1}) = B, \quad \theta(c_{1,2}) = AC, \quad \theta(c_{1,3}) = D$$

Tenemos que $\theta((c_{1,1}c_{1,2})^3) = C$ y que $\theta((c_{1,1}c_{1,2})^4) = AB$. Además tenemos que $\theta((c_{1,2}c_{1,3})^9) = A$ y que $\theta((c_{1,2}c_{1,3})^{10}) = DC$. Así tenemos que el grupo está generado por elementos que preservan la orientación, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{36}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [200,43], cuya estructura algebraica es $(D_5 \times D_5) \rtimes C_2$. Tenemos una presentación de este grupo en [5] dada por generadores R, S, T tales que $R^4 = S^{10} = T^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = [RS, SR] = TS^{-1}(RS^{-3})^2R^{-2} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,4,10)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen de $c_{1,3}c_{1,2}(c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,3}c_{1,2})^3)^2(c_{1,2}c_{1,1})^2$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{3}{40}$.

\Rightarrow El penúltimo grupo que tenemos es el [360,118], que tiene estructura algebraica A_6 . Tomaremos el grupo como el grupo de permutaciones pares de 6 elementos. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(3,3,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = (1\ 2)(3\ 4), \quad \theta(c_{1,1}) = (1\ 2)(4\ 5), \quad \theta(c_{1,2}) = (2\ 3)(5\ 6), \quad \theta(c_{1,3}) = (1\ 2)(3\ 4)$$

Vemos que la imagen del elemento $c_{1,0}c_{1,1}(c_{1,2}c_{1,3})^2$ es la permutación $(1\ 4\ 2\ 3\ 5)$, que la imagen del elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ es la permutación $(3\ 5\ 4)$ y además que la imagen del elemento $c_{1,2}c_{1,3}$ es la permutación $(1\ 2\ 4\ 3)(5\ 6)$. Por tanto estos elementos generan un grupo de orden múltiplo de 60, y sabiendo que el único subgrupo propio de A_6 con orden múltiplo de 60 es A_5 , el cual no tiene elementos de orden 4, tenemos que estos elementos generan todo A_6 . Como todos los elementos preservan la orientación, tenemos que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{24}$.

\Rightarrow El último grupo que tenemos es el $[720,764]$, cuya estructura algebraica es $A_6 \times C_2$. Tenemos una presentación de este grupo en [5] dada por generadores R, S, T tales que $R^3 = S^8 = T^2 = (RS)^2 = (TS)^2 = (RT)^2 = TS^{-1}RS^3RS^{-2}R^{-1}SR^{-1}S^{-3}R^{-1} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,3,8)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Ahora, vemos que la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S , la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador R y por último, usando la relación de la presentación tenemos que la imagen de $(c_{1,2}c_{1,3})^7 c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^3 c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^6 (c_{1,1}c_{1,2})^2 c_{1,2}c_{1,3}(c_{1,1}c_{1,2})^2 (c_{1,2}c_{1,3})^5 (c_{1,1}c_{1,2})^2$ es el generador T . Luego tenemos los generadores del grupo G como imágenes de elementos que preservan la orientación, y así es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{48}$.

Por tanto podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.1:

En las siguientes tablas se muestran los grupos con género imaginario desde 10 hasta 17, dando su nomenclatura GAP, su estructura algebraica, la referencia y la página donde se encuentra su estudio:

Género imaginario 10:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[16,2]	$C_4 \times C_4$	16	Gromadzki [15]	9
[16,4]	$C_4 \rtimes C_4$	16	Etayo, Martínez [12]	10
[16,9]	DC_4	16	May [19] y Este trabajo	10
[16,10]	$C_4 \times C_2 \times C_2$	16	Gromadzki [15]	10
[24,3]	$\langle 2,3,3 \rangle$	24	Etayo, Martínez [12]	11
[32,5]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	11
[32,6]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	12
[32,7]	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	12
[32,9]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	13
[32,11]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	13
[32,17]	$C_{16} \rtimes C_2$	32	Este trabajo	14
[32,19]	QD_{32}	32	Este trabajo	14
[32,28]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	15
[32,34]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	15
[32,42]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	15
[32,46]	$D_2 \times D_4$	32	Etayo, Martínez [10]	15
[32,49]	$(C_2 \times D_4) \rtimes C_2$	32	Este trabajo	16
[48,29]	$GL(2, 3)$	48	Este trabajo	16
[48,31]	$C_4 \times A_4$	48	Etayo, Martínez [11]	17
[48,33]	$SL(2, 3) \times C_2$	48	Este trabajo	17
[48,50]	$(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \times C_3$	48	Este trabajo	18
[64,128]	$(C_2 \times C_2 \times D_4) \rtimes C_2$	64	Este trabajo	18
[64,134]	$((C_4 \times C_4) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	64	Este trabajo	18
[64,138]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 \rtimes C_2$	64	Este trabajo	19
[64,190]	$(C_4 \times D_8) \rtimes C_2$	64	Este trabajo	19
[96,70]	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \times C_3) \rtimes C_2$	96	Este trabajo	20
[96,187]	$(C_2 \times S_4) \rtimes C_2$	96	Este trabajo	20
[96,193]	$GL(2, 3) \times C_2$	96	Este trabajo	20
[96,227]	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \times C_3) \rtimes C_2$	96	Este trabajo	21
[192,955]	$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \times C_3) \rtimes C_2 \rtimes C_2$	192	Este trabajo	21

Género imaginario 11:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[18,5]	$C_6 \times C_3$	18	Gromadzki [15] y Este trabajo	22
[27,3]	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_3$	27	Etayo, Martínez [12]	22
[36,13]	$C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$	36	Este trabajo	23
[54,5]	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	54	Este trabajo	23
[54,8]	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$	54	Este trabajo	23
[108,15]	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_4$	108	Este trabajo	24
[108,17]	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2 \rtimes C_2$	108	Este trabajo	24
[216,87]	$((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_4 \rtimes C_2$	216	Este trabajo	25

Género imaginario 12:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[20,1]	DC_5	20	May [19] y Este trabajo	25
[40,5]	$C_4 \times D_5$	40	Etayo, Martínez [9]	26
[40,8]	$(C_{10} \times C_2) \rtimes C_2$	40	Este trabajo	26
[40,10]	$C_5 \times D_4$	40	Etayo, Martínez [9]	28
[40,12]	$C_2 \times (C_5 \times C_4)$	40	Este trabajo	28
[80,39]	$D_5 \times D_4$	80	Etayo, Martínez [10]	28
[240,189]	$C_2 \times S_5$	240	Este trabajo	29

Género imaginario 13:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[42,3]	$C_7 \times D_3$	42	Etayo, Martínez [9]	29
[42,4]	$C_3 \times D_7$	42	Etayo, Martínez [9]	30
[52,3]	$C_{13} \times C_4$	52	Este trabajo	30
[60,9]	$C_5 \times A_4$	60	Etayo, Martínez [11]	30
[84,8]	$D_3 \times D_7$	84	Etayo, Martínez [10]	30
[120,38]	$(C_5 \times A_4) \rtimes C_2$	120	Este trabajo	31

Género imaginario 14:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[16,12]	$C_2 \times Q$	16	May [19] y Este trabajo	32
[24,4]	$C_2 \times DC_3$	24	Etayo, Martínez [11]	32
[24,7]	DC_6	24	May [19] y Este trabajo	33
[24,15]	$C_6 \times C_2 \times C_2$	24	Gromadzki [15]	33
[32,48]	$C_2 \times ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2)$	32	Este trabajo	34
[36,11]	$C_3 \times A_4$	36	Etayo, Martínez [11]	34
[36,12]	$C_6 \times D_3$	36	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	34
[48,6]	$C_{24} \times C_2$	48	Este trabajo	35
[48,14]	$(C_{12} \times C_2) \rtimes C_2$	48	Este trabajo	36
[48,21]	$C_3 \times (4, 4 2, 2)$	48	Este trabajo	37
[48,24]	$C_3 \times (C_8 \times C_2)$	48	Este trabajo	37
[48,37]	$(C_{12} \times C_2) \rtimes C_2$	48	Este trabajo	37
[48,43]	$C_2 \times ((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$	48	Este trabajo	37
[48,49]	$C_2 \times C_2 \times A_4$	48	Este trabajo	38
[48,51]	$D_2 \times D_6$	48	Etayo, Martínez [10]	38
[72,42]	$C_3 \times S_4$	72	Este trabajo	38
[72,43]	$(C_3 \times A_4) \rtimes C_2$	72	Este trabajo	39
[72,44]	$A_4 \times S_3$	72	Este trabajo	40
[72,46]	$D_3 \times D_6$	72	Etayo, Martínez [10]	40
[96,89]	$(D_2 \times D_6) \rtimes C_2$	96	Este trabajo	41
[96,115]	$(C_2 \times D_{12}) \rtimes C_2$	96	Este trabajo	41
[96,226]	$C_2 \times C_2 \times S_4$	96	Este trabajo	41
[144,183]	$S_3 \times S_4$	144	Este trabajo	42
[180,19]	$A_5 \times C_3$	180	Este trabajo	42
[360,121]	$A_5 \times D_3$	360	Este trabajo	42

Género imaginario 15:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[24,1]	$\langle -2, 2, 3 \rangle$	24	Etayo, Martínez [12]	43
[39,1]	$C_{13} \times C_3$	39	Este trabajo	43
[48,15]	$(C_3 \times D_4) \rtimes C_2$	48	Este trabajo	43
[78,1]	$(C_{13} \times C_3) \rtimes C_2$	78	Este trabajo	44
[1092,25]	$PSL(2, 13)$	1092	Hall [16] y Este trabajo	44

Género imaginario 16:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[28,1]	DC_7	28	May [19] y Este trabajo	45
[56,4]	$C_4 \times D_7$	56	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	45
[56,7]	$(C_{14} \times C_2) \rtimes C_2$	56	Este trabajo	46
[56,9]	$C_7 \times D_4$	56	Etayo, Martínez [9]	47
[72,16]	$C_2 \times ((C_2 \times C_2) \rtimes C_9)$	72	Este trabajo	47
[112,31]	$D_7 \times D_4$	112	Etayo, Martínez [10]	48
[144,109]	$(C_2 \times ((C_2 \times C_2) \rtimes C_9)) \rtimes C_2$	144	Este trabajo	48

Género imaginario 17:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[25,2]	$C_5 \times C_5$	25	Etayo [8]	49
[27,2]	$C_9 \times C_3$	27	Etayo [8]	49
[27,4]	$C_9 \rtimes C_3$	27	Etayo, Martínez [12]	50
[36,6]	$C_3 \times DC_3$	36	Etayo, Martínez [11]	50
[50,3]	$C_5 \times D_5$	50	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	50
[50,4]	$(C_5 \times C_5) \rtimes C_2$	50	Este trabajo	51
[54,3]	$C_3 \times D_9$	54	Etayo, Martínez [9]	51
[54,4]	$C_9 \times D_3$	54	Etayo, Martínez [9]	51
[54,6]	$(C_9 \times C_3) \rtimes C_2$	54	Este trabajo	52
[54,7]	$(C_9 \times C_3) \rtimes C_2$	54	Este trabajo	52
[68,3]	$C_{17} \rtimes C_4$	68	Este trabajo	52
[72,23]	$(C_6 \times D_3) \rtimes C_2$	72	Este trabajo	52
[72,39]	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_8$	72	Este trabajo	53
[100,12]	$(C_5 \times C_5) \rtimes C_4$	100	Este trabajo	53
[100,13]	$D_5 \times D_5$	100	Etayo, Martínez [10] y Este trabajo	53
[108,16]	$D_3 \times D_9$	108	Etayo, Martínez [10]	54
[200,43]	$(D_5 \times D_5) \rtimes C_2$	200	Este trabajo	54
[360,118]	A_6	360	Este trabajo	54
[720,764]	$A_6 \times C_2$	720	Este trabajo	55

CAPÍTULO 2

En este segundo capítulo vamos a pasar a estudiar todos los grupos entre orden 32 y 63 ambos inclusive, estableciendo su género imaginario basándonos en la lista de Conder. Todos los grupos con orden menor que 32 ya están clasificados en [12], y por tanto toca empezar este estudio en los grupos con orden 32. Se para en orden 63 porque en orden 64 nos encontramos con 267 grupos distintos, lo que elevaría la complejidad de su estudio en gran medida. En cada orden, se establece el número de grupos, el epimorfismo explícito y la estructura algebraica, dando explicación detallada del porqué es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable.

Por supuesto cuando resulte un género imaginario menor o igual que 17, se remite directamente al Capítulo 1, o bien si es menor que 10, al trabajo en que ya se obtuvo el género imaginario del grupo en cuestión.

Grupos de orden 32

Para todos los grupos de orden 32 utilizaremos la notación que aparece en [17].

⇒ El primer grupo que tenemos es el [32,1], cuya estructura algebraica es C_{32} . Como sabemos este grupo tiene género imaginario 1, [29].

⇒ El grupo [32,2] tiene estructura algebraica $(C_4 \times C_2) \rtimes C_4$ y según la notación que hemos indicado antes sería $\Gamma_2 h$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^2 = b^4 = c^4 = 1, ab = ba, ac = ca, bc = cab$. Entonces para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = c, \quad \theta(e_1) = c^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a$$

Tenemos que el grupo está generado por los elementos x_1, x_2 y $c_{1,0}$ ya que tienen imagen b, c y a respectivamente. Ahora por otro lado tenemos que el elemento $e_1 x_2 x_1 c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es un elemento que invierte la orientación. Por tanto hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Este grupo tiene género imaginario 18. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

⇒ El grupo [32,3] tiene estructura algebraica $C_8 \times C_4$. Este grupo es estudiado en [15] pero no se da el epimorfismo explícitamente. Está generado por X e Y tales que $X^8 = Y^4 = 1$ y que conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [4,8]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^4$$

Las imágenes de los elementos x_1 y x_2 generan el grupo y son elementos que preservan la orientación, luego es claro que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Este grupo tiene género imaginario 22. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{8}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [32,4], que según la notación citada es $\Gamma_2 i$, y que tiene estructura algebraica $C_8 \rtimes C_4$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b tales que $a^8 = b^4 = 1$ y $ab = ba^5$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,8]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = b^2$$

Tenemos el grupo generado por las imágenes de los elementos x_1 y x_2 , que son los generadores b y a respectivamente, por lo que tenemos que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Este grupo tiene género imaginario 22. El área reducida del grupo NEC es $\frac{5}{8}$.

⇒ El grupo [32,5], con estructura algebraica $(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$, tiene género imaginario 10, luego podemos encontrar su estudio en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo es el [32,6], que tiene género imaginario 10 y tiene estructura algebraica $((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$. En el Capítulo 1 este grupo está estudiado.

⇒ El siguiente grupo es el [32,7], con estructura algebraica $(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$ y género imaginario 10, luego lo tenemos hecho en el Capítulo 1.

⇒ Ahora con el grupo [32,8], que tiene estructura algebraica $(C_2 \times C_2).(C_4 \times C_2)$. Según notación de Hall-Senior tenemos que es el grupo Γ_{7a_3} . Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen las relaciones $a^8 = b^2 = 1$, $c^2 = a^4$, $ab = ba^5$, $ac = cba$ y $bc = cb$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,8]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}c^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c^2$$

Entonces tenemos que si tomamos el elemento x_1 tiene como imagen el generador c , el elemento x_2 tiene como imagen el generador a y el elemento $x_1^3 x_2 x_1 x_2^7$ tiene como imagen el generador b . Así tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación, por lo tanto es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario del grupo es 22. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{8}$.

⇒ El grupo [32,9] con estructura algebraica $(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$ tiene género imaginario 10, por lo que podemos encontrar un estudio en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [32,10] cuya estructura algebraica es $Q \rtimes C_4$, y que según la notación utilizada es el Γ_{3c_2} . Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^2 = b^8 = 1$, $c^2 = b^4$, $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cab^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(x_2) = cb, \quad \theta(e_1) = b^{-1}c^2, \quad \theta(c_{1,0}) = a$$

Tenemos que $\theta(x_1) = c$, $\theta(x_1^3 x_2) = b$ y que $\theta(x_1^2 x_2^2) = a$, todos ellos elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 18 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ Ahora el grupo [32,11] tiene género imaginario 10 y tiene estructura algebraica $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$. Este grupo se estudia en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [32,12], con estructura algebraica $C_4 \rtimes C_8$. Según Hall-Senior la notación de este grupo es Γ_{2j_2} . Este grupo tiene una presentación

dada por generadores a, b tales que cumplen $a^4 = b^8 = 1$ y $ab = ba^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,8]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Tomando los elementos x_1 y x_2 , que preservan la orientación, tenemos que hemos generado el grupo ya que sus imágenes son los generadores a y b respectivamente. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario del grupo es 22 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{8}$.

\Rightarrow El grupo [32,13] tiene estructura algebraica $C_8 \times C_4$ y según Hall-Senior, notación $\Gamma_3 d_2$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b tales que $a^8 = b^4 = 1$ y $ab = ba^3$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = b^2$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador b y que el elemento $x_2 x_1^3$ tiene como imagen el generador a , y ambos son elementos que preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 18 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [32,14] que tiene estructura algebraica $C_8 \times C_4$ y que se corresponde con $\Gamma_3 d_1$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b tales que $a^8 = b^4 = 1$ y $ab = ba^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = ba, \quad \theta(e_1) = a^{-1}b^2, \quad \theta(c_{1,0}) = b^2 a^4$$

Tenemos que $\theta(x_1) = b$ y $\theta(x_1^3 x_2) = a$, ambos elementos que preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 18 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos que el grupo [32,15] tiene estructura algebraica $C_4.(C_4 \times C_2)$, que corresponde con $\Gamma_3 f$. Este grupo tiene generadores a, b tales que $a^8 = 1, b^4 = a^4$ y $ab = ba^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [8,8]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^4$$

Es claro que los elementos x_1 y x_2 tienen como imagen los generadores a y b , y ambos son elementos que preservan la orientación. Así queda visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 26 y el

área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

⇒ Tenemos que el grupo [32,16] tiene estructura algebraica $C_{16} \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 2, [29].

⇒ El siguiente grupo es el [32,17] que tiene estructura algebraica $C_{16} \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 10, por lo que está estudiado en profundidad en el Capítulo 1.

⇒ El grupo [32,18] tiene estructura algebraica D_{16} . Este grupo tiene género imaginario 1, pues es un grupo diedral [29].

⇒ Ahora tenemos el grupo [32,19], con género imaginario 10 y estructura algebraica QD_{32} . Por tanto, este grupo se estudia en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [32,20], cuya estructura algebraica es DC_8 y tiene notación $\Gamma_8 a_3$. Este grupo es estudiado por May en [19] pero no se da un epimorfismo. Tenemos una presentación del grupo dada por generadores a, b tales que $a^{16} = 1, a^8 = b^2$ y $ab = ba^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^8$$

Tenemos claramente el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación pues $\theta(x_2 x_1^3) = a$ y $\theta(x_1) = b$. Así hemos visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 18 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ Ahora el grupo que tenemos es [32,21] que tiene estructura algebraica $C_4 \times C_4 \times C_2$. Este grupo es estudiado en [15], pero no se da el epimorfismo explícitamente. Tiene una presentación dado por generadores a, b, c que $a^4 = b^4 = c^2 = 1$ tales que conmutan entre ellos. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(e_1) = bc, \quad \theta(e_2) = b^{-1}a^{-1}c, \quad \theta(c_{1,0}) = b^2, \quad \theta(c_{2,0}) = c$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $x_1 e_2 c_{2,0} c_{1,0}$ tiene como imagen el generador b y el elemento $x_1^2 e_2 c_{2,0} c_{1,0} e_2$ tiene como imagen el generador c , y todos esos elementos preservan la orientación. Así hemos visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 26 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

⇒ Ahora tenemos que estudiar el siguiente grupo que es el [32,22], cuya estructura algebraica es $C_2 \times ((C_4 \times C_2) \times C_2)$. Este grupo tiene género imaginario 18 y la notación del grupo es $\Gamma_2 c_1$. Tiene una presentación dada por los generadores a, b, c , y d tales que

$a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$, $ab = ba$, $ac = ca^3b$, $bc = cb$ y d conmuta con el resto. Para este grupo tenemos 3 grupos NEC, así:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = cb, \quad \theta(c_{1,1}) = b, \quad \theta(c_{1,2}) = bd, \quad \theta(c_{1,3}) = ca^2$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador c , el elemento x_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador d y por último el elemento $(x_1c_{1,0}c_{1,1})^2$ tiene como imagen el generador b . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = cb, \quad \theta(c_{1,1}) = bd, \quad \theta(c_{1,2}) = ca^2, \quad \theta(c_{2,0}) = b$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}c_{2,0}$ tiene como imagen el generador c , el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $c_{2,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador d y por último el elemento $(e_1c_{1,0}c_{2,0})^2$ tiene como imagen el generador b . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = cb, \quad \theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}bc, \quad \theta(c_{1,0}) = b, \quad \theta(c_{2,0}) = bd$$

Tenemos que el elemento $e_1x_1e_1$ tiene como imagen el generador c , el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $c_{1,0}c_{2,0}$ tiene como imagen el generador d y por último el elemento $(e_1x_1c_{1,0})^2$ tiene como imagen el generador b . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo $[32,23]$, cuya estructura algebraica es $C_2 \times (C_4 \rtimes C_4)$. Este grupo tiene notación Γ_2c_2 . Tenemos que una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, c tales que $a^4 = b^4 = c^2 = 1$, $ab = ba^{-1}$ y c conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(e_1) = b, \quad \theta(e_2) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ca^2, \quad \theta(c_{2,0}) = a^2$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador a , el elemento x_2 tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{1,0}c_{2,0}$ tiene como imagen el generador c , y todos estos elementos preservan la orientación. Así hemos visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 26 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [32,24] que tiene estructura algebraica $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$ y notación $\Gamma_2 f$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^4 = b^4 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca$ y $bc = ca^2b$. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(e_1) = ca, \quad \theta(e_2) = a^{-1}c^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ca^2b^2, \quad \theta(c_{2,0}) = a^2b^2$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}c_{2,0}e_1$ tiene como imagen el generador a , el elemento x_1 tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{1,0}c_{2,0}$ tiene como imagen el generador c , y todos esos elementos preservan la orientación. Así hemos visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 26 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [32,25], cuya estructura algebraica es $C_4 \times D_4$. Este grupo se estudia con detalle en [9]. Este grupo tiene género imaginario 18. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que X tiene orden 4 y genera el grupo cíclico y los generadores Y, Z generan el grupo diedral y tienen orden 2 con su producto orden 4. Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$, en [9] no aparece el epimorfismo y por tanto lo definimos como $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1},$$

$$\theta(c_{1,0}) = YZY, \quad \theta(c_{1,1}) = (YZ)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = YZY, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador X , el elemento $c_{2,0}$ tiene como imagen el generador Y y el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador Z . Así hemos generado el grupo y además tenemos que el elemento $c_{1,1}(c_{1,2}c_{2,0})^2$ es no orientable y tiene como imagen el neutro. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$, aparece el epimorfismo explícitamente en [9] y tenemos que es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = YZY, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador Y , el elemento e_1 tiene como imagen el generador X y el elemento $x_1c_{1,0}c_{2,0}$ tiene como imagen

el generador Z . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora estudiemos el grupo [32,26], con estructura algebraica $C_4 \times Q$. Tomemos X generador de orden 4 del grupo cíclico y tomemos a, b generadores de los cuaterniones tales que tienen orden 4 y cumplen $a^2 = b^2$ y $ba = ab^3$. Este grupo tiene género imaginario 42. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(x_3) = b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^{-1}X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^2$$

Es claro que las imágenes de los elementos x_1, x_2 y x_3 generan todo el grupo, y son elementos que preservan la orientación. Así queda visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{4}$.

\Rightarrow El grupo [32,27] tiene estructura algebraica $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$ y género imaginario 6. Este grupo se estudia en profundidad en [2].

\Rightarrow El siguiente grupo es el [32,28], con género imaginario 10 y estructura algebraica $(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$. Podemos encontrar su estudio en el Capítulo 1.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [32,29], cuya estructura algebraica es $(C_2 \times Q) \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 26 y su notación según lo indicado es $\Gamma_4 b_2$. Tiene una presentación dada por generadores a, b, c, d tales que cumplen las siguientes relaciones $a^2 = b^2 = c^4 = 1, c^2 = d^2, bd = dab, cd = dc^{-1}$, y el resto conmutan entre ellos. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = bd, \quad \theta(e_1) = cbd, \quad \theta(e_2) = d^{-1}bc^{-1}d^{-1}b, \quad \theta(c_{1,0}) = a, \quad \theta(c_{2,0}) = b$$

Primero tenemos que el elemento $c_{1,0}c_{2,0}e_2e_1$ tiene como imagen el generador d y que el elemento $c_{1,0}c_{2,0}x_1c_{1,0}c_{2,0}e_1$ tiene como imagen el generador c . Ahora el elemento $c_{1,0}c_{2,0}x_1c_{1,0}c_{2,0}e_2^2c_{1,0}c_{2,0}x_1$ tiene como imagen el generador b y por último el elemento $(c_{1,0}c_{2,0}e_2e_1)^3(c_{1,0}c_{2,0}x_1c_{1,0}c_{2,0}e_2^2c_{1,0}c_{2,0}x_1)(c_{1,0}c_{2,0}e_2e_1)(c_{1,0}c_{2,0}x_1c_{1,0}c_{2,0}e_2^2c_{1,0}c_{2,0}x_1)$ tiene como imagen el generador a . Todos son elementos que preservan la orientación. Así hemos visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 26 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [32,30], que tiene estructura algebraica $(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$. Este grupo según notación es el $\Gamma_4 c_1$ y tiene género imaginario 18. Este grupo admite una presentación dada por generadores a, b, c, d tales que cumplen $a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, ad = dab, cd = da^2c$, y el resto conmutan. Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = da^2, \quad \theta(c_{1,1}) = a^2, \quad \theta(c_{1,2}) = a^{-1}da, \quad \theta(c_{2,0}) = c$$

Tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador d , el elemento $c_{2,0}$ tiene como imagen el generador c y el elemento $e_2c_{1,0}c_{1,1}e_1c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador b . Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^2c_{1,1}$ es no orientable y tiene como imagen el elemento neutro. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ el epimorfismo que tenemos es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = d, \quad \theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}d^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2c, \quad \theta(c_{2,0}) = a^2$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador d , el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $e_1^{-1}x_1e_1x_1$ tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{2,0}c_{1,0}$ tiene como imagen el generador c . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [32,31] cuya estructura algebraica es $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 22 y según la notación le corresponde Γ_4c_2 . Este grupo admite una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen las siguientes relaciones $a^4 = b^4 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca^{-1}$ y $bc = ca^2b^{-1}$. Entonces para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= ca^2, \quad \theta(c_{1,1}) = a^2, \quad \theta(c_{1,2}) = a^{-1}bcb^{-1}, \quad \theta(c_{1,3}) = bca^2b^{-1} \end{aligned}$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador b , el elemento $c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador a y el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador c . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que estudiamos es el [32,32], que tiene estructura algebraica $(C_2 \times C_2).(C_2 \times C_2 \times C_2)$. Este grupo tiene género imaginario 42 y en la notación usada es el Γ_4c_3 . Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^4 = b^4 = 1, c^2 = a^2b^2, ab = ba, ac = ca^{-1}$ y $bc = ca^2b^{-1}$. Entonces para el grupo NEC $(0; +; [4,4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(x_3) = c, \quad \theta(e_1) = c^{-1}b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Es claro que las imágenes de los elementos x_1, x_2 y x_3 generan todo el grupo, y son elementos que preservan la orientación. Así queda visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{4}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [32,33], cuya estructura algebraica es $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 34 y según la notación utilizada es el $\Gamma_4 d$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen las relaciones $a^4 = b^4 = c^2 = 1, ab = ba, ac = cb^2 a^{-1}$ y $bc = ca^2 b$. Para este grupo tenemos 3 grupos NEC, así

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(x_1) &= a, & \theta(x_2) &= b, & \theta(e_1) &= b^{-1}a^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= ca^2, & \theta(c_{1,1}) &= a^2, & \theta(c_{1,2}) &= ca^2b^2\end{aligned}$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador c , el elemento x_1 tiene como imagen el generador a y el elemento x_2 tiene como imagen el generador b . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es 1.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(x_3) = b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^{-1}c^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Tenemos que los elementos x_1, x_2 y x_3 tienen como imágenes los generadores de todo el grupo. Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es 1.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(x_1) &= a, & \theta(e_1) &= b, & \theta(e_2) &= b^{-1}a^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= b^2, & \theta(c_{2,0}) &= ca^2, & \theta(c_{2,1}) &= a^2cb^2\end{aligned}$$

Tenemos que el elemento $c_{2,0}x_1^2$ tiene como imagen el generador c , el elemento e_1 tiene como imagen el generador b y el elemento x_1 tiene como imagen el generador a . Por otra parte tenemos que el elemento $c_{2,0}c_{2,1}c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es 1.

⇒ Tenemos ahora el grupo [32,34], cuya estructura algebraica es $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 10, luego se estudia en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo es el [32,35] que tiene estructura algebraica $C_4 \rtimes Q$. Este grupo tiene género imaginario 42 y según la notación es $\Gamma_4 a_3$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^4 = b^4 = 1, c^2 = a^2, ab = ba, ac = ca^{-1}$ y $bc = cb^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(x_3) = c, \quad \theta(e_1) = c^{-1}b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Es claro que las imágenes de los elementos x_1, x_2 y x_3 generan todo el grupo, y son elementos que preservan la orientación. Así queda visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{4}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [32,36] cuya estructura algebraica es $C_8 \times C_2 \times C_2$. El género imaginario de este grupo es 18. Este grupo es estudiado en [15], pero no se da el epimorfismo explícitamente. Una presentación de este grupo viene dado por generadores X, Y, Z tales que $X^8 = Y^2 = Z^2 = 1$ y conmutan entre ellos. Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1},$$

$$\theta(c_{1,0}) = YZ, \quad \theta(c_{1,1}) = Y, \quad \theta(c_{1,2}) = YZ, \quad \theta(c_{2,0}) = Z$$

Tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador X , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador Z y el elemento $c_{1,2}c_{2,0}$ tiene como imagen el generador Y . Todos ellos son elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ el epimorfismo que tenemos es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = ZY, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador Y , el elemento e_1 tiene como imagen el generador X y el elemento $c_{1,0}c_{2,0}$ tiene como imagen el generador Z . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [32,37] que tiene estructura algebraica $C_2 \times (C_8 \times C_2)$. Tiene género imaginario 18 y según la notación es $\Gamma_2 d$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, c tales que $a^8 = b^2 = c^2 = 1, ab = ba^5$, y c conmuta con ambos. Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = bc, \quad \theta(c_{1,1}) = c, \quad \theta(c_{1,2}) = bca^4, \quad \theta(c_{2,0}) = a^4$$

Tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{1,1}$ tiene como imagen el generador c . Por otra parte tenemos que el elemento $c_{1,0}c_{1,2}c_{2,0}$ es no orientable y tiene como imagen el elemento neutro. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ el epimorfismo que tenemos es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{2,0}) = a^4$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador b , el elemento e_1 tiene como imagen el generador a y el elemento $c_{1,0}$ tiene como imagen el generador c . Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^4 c_{2,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [32,38], cuya estructura algebraica es $(C_8 \times C_2) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 18 y según la notación es $\Gamma_2 g$. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, c tales que $a^8 = b^2 = c^2 = 1, ab = ba, ac = ca$ y $bc = ca^4b$. Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1},$$

$$\theta(c_{1,0}) = ba^4, \quad \theta(c_{1,1}) = a^4, \quad \theta(c_{1,2}) = ba^4, \quad \theta(c_{2,0}) = a^4c$$

Tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{1,1}c_{2,0}$ tiene como imagen el generador c . Todos estos elementos preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ el epimorfismo que tenemos es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^4c, \quad \theta(c_{2,0}) = a^4$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador b , el elemento e_1 tiene como imagen el generador a y el elemento $c_{2,0}c_{1,0}$ tiene como imagen el generador c . Tenemos todos los generadores como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [32,39], con estructura algebraica $C_2 \times D_8$ y género imaginario 2, como se obtuvo en [29].

\Rightarrow El siguiente grupo que estudiamos es el [32,40], que tiene estructura algebraica $C_2 \times QD_8$. Este grupo tiene género imaginario 18 y según la notación indicada Γ_{3a_2} . Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen las relaciones $a^8 = b^2 = c^2 = 1, ab = ba^3$, y c conmuta con los otros dos. Para este grupo tenemos 3 grupos NEC, así

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= ab, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2b, \\ \theta(c_{1,1}) &= a^2bc, \quad \theta(c_{1,2}) = a^4, \quad \theta(c_{1,3}) = aba \end{aligned}$$

Tenemos que el elemento $c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador b , el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador c y el elemento $x_1c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador a . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{1,1}) = aba, \quad \theta(c_{1,2}) = c, \quad \theta(c_{2,0}) = a^4$$

Tenemos que el elemento $c_{2,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador b , el elemento e_1 tiene como imagen el generador a y el elemento $c_{1,0}$ tiene como imagen el generador c . Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^4c_{2,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

iii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}b, \quad \theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{2,0}) = a^4$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador b , el elemento e_1 tiene como imagen el generador a y el elemento $c_{1,0}$ tiene como imagen el generador c . Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^4 c_{2,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [32,41] cuya estructura algebraica es $C_2 \times DC_4$. Este grupo tiene género imaginario 26 y según la notación es $\Gamma_3 a_3$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^8 = c^2 = 1, b^2 = a^4, ab = ba^{-1}$, y c conmuta con los otros dos. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^4, \quad \theta(c_{2,0}) = c$$

Primero tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento x_1 tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{2,0}$ tiene como imagen el generador c . Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^4 c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así hemos visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El género imaginario de este grupo es 26 y el área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que estudiamos es el [32,42] que tiene estructura algebraica $(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 10, por lo que se estudia en el Capítulo 1.

\Rightarrow Ahora seguidamente estudiamos el grupo [32,43] el cual tiene estructura algebraica $(C_2 \times D_4) \rtimes C_2$. El género imaginario de este grupo es 6, por lo que se estudia en [2].

\Rightarrow El siguiente grupo es el [32,44] cuya estructura algebraica es $(C_2 \times Q) \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 18 y según notación es $\Gamma_6 a_2$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen las siguientes relaciones $a^8 = b^2 = 1, c^2 = a^4, ab = ba^5, ac = ca^{-1}$ y $bc = cb$. Tenemos dos grupos NEC así que:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(e_1) &= cb, & \theta(e_2) &= bc^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= bca^3, & \theta(c_{1,1}) &= a^4, & \theta(c_{1,2}) &= cba^5, & \theta(c_{2,0}) &= b \end{aligned}$$

Tenemos que el elemento $c_{2,0}$ tiene como imagen el generador b , el elemento $e_1c_{2,0}$ tiene como imagen el generador c y el elemento $e_1^3c_{1,2}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador a . Por otra parte tenemos que el elemento $(e_1^3c_{1,2}c_{1,1})^4c_{1,1}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ tenemos que es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = bca^3, \quad \theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = cb, \quad \theta(c_{1,0}) = a^4, \quad \theta(c_{2,0}) = b$$

Tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento $c_{2,0}$ tiene como imagen el generador b y el elemento $e_2c_{2,0}$ tiene como imagen el generador c . Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^4c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora seguidamente estudiamos el grupo [32,45] que tiene estructura algebraica $C_4 \times C_2 \times C_2 \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 26. Este grupo es estudiado en [15], pero no se da el epimorfismo explícitamente. Tomemos generadores X, Y, Z, W tales que cumplen $W^4 = Y^2 = Z^2 = X^2 = 1$ y que conmutan todos entre ellos y tenemos una presentación del grupo. Tenemos dos grupos NEC así que:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(e_1) &= W, \quad \theta(e_2) = W^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = XY, \quad \theta(c_{1,1}) = YZ, \\ \theta(c_{1,2}) &= Y, \quad \theta(c_{1,3}) = XY, \quad \theta(c_{2,0}) = X \end{aligned}$$

Tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador W , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador Z , el elemento $c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador X y el elemento $c_{2,0}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador Y . Observemos que todos esos elementos preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2,2,2)\})$ tenemos que es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= W, \quad \theta(e_1) = W^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = XY, \quad \theta(c_{1,1}) = YZ, \\ \theta(c_{1,2}) &= Y, \quad \theta(c_{1,3}) = X, \quad \theta(c_{1,4}) = XY \end{aligned}$$

Tenemos que el elemento x_1 tiene como imagen el generador W , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador Z , el elemento $c_{1,3}c_{1,4}$ tiene como imagen el generador Y y el elemento $c_{1,0}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador X . Todos son elementos que preservan la orientación. Así hemos generado el grupo como imágenes de

elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [32,46] cuya estructura algebraica es $D_2 \times D_4$. Este grupo tiene género imaginario 10, por lo que se estudia en el Capítulo 1.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [32,47] que tiene estructura algebraica $C_2 \times C_2 \times Q$. El género imaginario de este grupo es 34 y su notación es $\Gamma_2 a_2$. Este grupo admite una presentación dada por generadores a, b, c, d tales que $a^4 = c^2 = d^2 = 1, b^2 = a^2, ab = ba^{-1}$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (-), (-)\})$ tenemos que es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = a, \quad \theta(e_2) = b, \quad \theta(e_3) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2c, \quad \theta(c_{2,0}) = a^2cd, \quad \theta(c_{3,0}) = a^2d$$

Tenemos que el elemento e_1 tiene como imagen el generador a , el elemento e_2 tiene como imagen el generador b , el elemento $c_{1,0}c_{2,0}$ tiene como imagen el generador d y el elemento $c_{2,0}c_{3,0}$ tiene como imagen el generador c . Todos esos elementos preservan la orientación. Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es 1.

⇒ El siguiente grupo es [32,48] el cual tiene estructura algebraica $C_2 \times ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2)$. Este grupo tiene género imaginario 14, por lo que se estudia en el Capítulo 1.

⇒ Ahora tenemos que estudiar el grupo [32,49] que tiene estructura algebraica $(C_2 \times D_4) \rtimes C_2$. El género imaginario de este grupo es 10 por lo que se estudia en el Capítulo 1.

⇒ El penúltimo grupo que tenemos es el grupo [32,50] cuya estructura algebraica es $(C_2 \times Q) \rtimes C_2$. Según la notación es $\Gamma_5 a_2$ y tiene género imaginario 22. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c, d tales que cumplen las relaciones $a^2 = b^4 = c^2 = 1, d^2 = b^2, ac = cb^2a, bc = cb^{-1}, ad = db^2a$, y el resto conmuta. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,4,4,4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = ab^2, \quad \theta(c_{1,1}) = b^2, \quad \theta(c_{1,2}) = b^2c, \quad \theta(c_{1,3}) = bc, \quad \theta(c_{1,4}) = dab^2, \quad \theta(c_{1,5}) = ab^2$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador a , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador c , el elemento $c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{1,4}c_{1,5}$ tiene como imagen el generador d . Observemos que todos estos elementos preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{8}$.

\Rightarrow El último grupo que estudiamos es el grupo [32,51] que tiene estructura algebraica $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 18. Este grupo se estudia en [15] pero no se da un epimorfismo explícito. Tenemos una presentación de este grupo dada por generadores A, B, C, D, E todos de orden 2 y que conmutan entre ellos. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned} \theta(c_{1,0}) &= AB, & \theta(c_{1,1}) &= B, & \theta(c_{1,2}) &= BC, & \theta(c_{1,3}) &= CBD, \\ \theta(c_{1,4}) &= AE, & \theta(c_{1,5}) &= A, & \theta(c_{1,6}) &= AB \end{aligned}$$

Tenemos que los elementos $c_{1,0}c_{1,1}, c_{1,1}c_{1,2}, c_{1,2}c_{1,3}, c_{1,4}c_{1,5}, c_{1,5}c_{1,6}$ tienen como imagen los generadores A, C, D, E, B respectivamente. Observemos que todos los elementos preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

Grupos de orden 33

En este apartado sólo encontramos un grupo, el [33,1] que tiene estructura algebraica C_{33} . Es el grupo cíclico que tiene género imaginario 1, [29].

Grupos de orden 34

Aquí tenemos dos grupos, el [34,1] y el [34,2] cuyas estructuras algebraicas son D_{17} y C_{34} respectivamente. Ambos tienen género imaginario 1, por lo que están clasificados en [29].

Grupos de orden 35

Volvemos a tener sólo el grupo cíclico en los grupos de orden 35. Este grupo tiene género imaginario 1, [29].

Grupos de orden 36

Aquí tenemos 14 grupos distintos, así que analizaremos uno a uno cada uno de ellos:

⇒ El primer grupo es el [36,1], que tiene estructura algebraica $C_9 \times C_4 \approx DC_9$. El género imaginario de este grupo se estudia en [19] pero no se da el epimorfismo. Tenemos entonces una presentación dada por generadores a, b tales que $a^4 = b^9 = 1$ y $ba = ab^8$, que podemos encontrar en GAP. Este grupo tiene género imaginario 20. Para este grupo tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^2, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento $x_1^3x_2$ tienen como imagen los generadores a, b respectivamente. Así tenemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(1; -; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^4$$

Tenemos que $\theta(x_1^3) = a$ y $\theta(x_1x_2) = b$, por lo que tenemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [36,2], que tiene estructura algebraica C_{36} . Este grupo es cíclico, luego tiene género imaginario 1, [29].

⇒ El siguiente grupo es el [36,3], cuya estructura algebraica es $(C_2 \times C_2) \times C_9$. Este grupo tiene género imaginario 7, luego es estudiado en [2].

⇒ Ahora el grupo [36,4] tiene estructura algebraica D_{18} y género imaginario 1. Este grupo es clasificado por Tucker en [29].

⇒ El siguiente grupo es el [36,5], cuya estructura algebraica es $C_{18} \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 2, [29].

⇒ Ahora tenemos el grupo [36,6] con estructura algebraica $C_3 \times DC_3$. Este grupo tiene género imaginario 17 por lo que es estudiado en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo es el [36,7], cuya estructura algebraica es $(C_3 \times C_3) \times C_4$. Este grupo tiene género imaginario 41. Una presentación de este grupo viene dada por generadores $a^4 = b^3 = c^3 = 1, ba = ab^2$ y $ca = ac^2$, que encontramos en GAP. Para el

grupo NEC $(0; +; [3,4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = abc, \quad \theta(x_3) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}c^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Claramente tenemos que los elementos $x_3, x_1, x_1^2x_3^3x_2$ tienen como imagen los generadores a, b, c respectivamente. Todos son elementos que preservan la orientación, luego hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{13}{12}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [36,8] que tiene estructura algebraica $C_{12} \times C_3$. Este grupo tiene género imaginario 23 y es estudiado en [15], pero no se da un epimorfismo explícito. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^{12} = Y^3 = 1$ y conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [3,12]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^6$$

Si tomamos los elementos x_1 y x_2 tienen como imagen los generadores Y y X respectivamente, y por tanto hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Así queda demostrado que el epimorfismo actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{7}{12}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [36,9], cuya estructura algebraica es el $(4,4|2,3)$. Este grupo tiene género imaginario 5, y es estudiado en [4].

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [36,10] con estructura algebraica $D_3 \times D_3$. Este grupo tiene género imaginario 5. Para este grupo tenemos dos grupos NEC:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,6,6)\})$, tenemos el epimorfismo estudiado en [10].
- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$, no está el epimorfismo explícitamente. Tenemos que A, B son generadores de orden 2 de D_3 tales que su producto tiene orden 3, y C, D de igual manera para el otro D_3 , donde A y B conmutan con C y D . Así tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = BD, \quad \theta(c_{1,1}) = D, \quad \theta(c_{1,2}) = A, \quad \theta(c_{1,3}) = CA, \quad \theta(c_{1,4}) = BD$$

Así tenemos las igualdades $\theta(c_{1,0}c_{1,1}) = B, \theta((c_{1,0}c_{1,2})^3) = D, \theta(c_{1,3}c_{1,2}) = C$ y $\theta((c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,2})^3) = A$. Luego hemos probado que elementos que preservan la orientación generan el grupo, por lo que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{12}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [36,11], cuya estructura algebraica es $C_3 \times A_4$. Este grupo tiene género imaginario 14, luego es estudiado en el Capítulo 1.

⇒ Ahora tenemos el grupo [36,12] que tiene estructura algebraica $C_6 \times D_3$. Tiene género imaginario 14, luego se estudia en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo es el [36,13], cuya estructura algebraica es $C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$. Como tiene género imaginario 11, este grupo es estudiado en el Capítulo 1.

⇒ El último grupo que tenemos que estudiar es el [36,14], cuya estructura algebraica es el $C_6 \times C_6$. Este grupo tiene género imaginario 26, y es estudiado en [15], pero no se da un epimorfismo explícito. Tenemos una presentación de este grupo dada por generadores X, Y de orden 6 tales que conmutan. Para este grupo tenemos dos grupos NEC, así:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [6,6]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(e_1) = Y^{-1}X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^3$$

Es claro que x_1 y que x_2 tienen como imagen los generadores X e Y . Ambos son elementos que preservan la orientación y por tanto hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{2}{3}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [3]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X^2, \quad \theta(e_1) = Y, \quad \theta(e_2) = Y^{-1}X^4, \quad \theta(c_{1,0}) = X^3, \quad \theta(c_{2,0}) = Y^3$$

Si tomamos los elementos e_1 y $x_1c_{1,0}$, tienen como imagen los generadores Y, X^{-1} respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^3c_{2,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así tenemos que el epimorfismo actúa sobre una superficie no orientable, y que el área del grupo NEC asociado es $\frac{2}{3}$.

Grupos de orden 37

Solo hay un grupo de orden 37, el correspondiente a C_{37} , el grupo cíclico. Este grupo tiene género imaginario 1, [29].

Grupos de orden 38

Tenemos dos grupos de orden 38, ambos de género imaginario 1. Los grupos son el D_{19} y el C_{38} correspondientes a [38,1] y a [38,2] respectivamente. Estos grupos son clasificados en [29] por Tucker.

Grupos de orden 39

Aquí tenemos dos grupos, el [39,1] y el [39,2], cuyas estructuras algebraicas son $C_{13} \rtimes C_3$ y C_{39} respectivamente. El primero tiene género imaginario 15, luego es estudiado en el Capítulo 1, y el segundo tiene género imaginario 1, luego es estudiado en [29] por Tucker.

Grupos de orden 40

Tenemos 14 grupos de este orden, por lo que estudiaremos cada uno particularmente:

\Rightarrow El primer grupo que tenemos es el [40,1], que tiene estructura algebraica $C_5 \rtimes C_8$. Este grupo tiene género imaginario 29. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^8 = b^5 = 1$ y $ba = ab^4$, que encontramos en GAP. Para el grupo NEC $(0; +; [5,8]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^4$$

Tenemos que los elementos x_2 y x_1 tienen como imagen los generadores a y b respectivamente. Son elementos que preservan la orientación, luego hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{27}{40}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [40,2] cuya estructura algebraica es C_{40} . Este grupo tiene género imaginario 1, [29].

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [40,3] con estructura algebraica $C_5 \rtimes C_8$. Este grupo tiene género imaginario 27. Tenemos que una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^8 = b^5 = 1$ y $ba = ab^2$, que encontramos en GAP. Para el grupo NEC $(0; +; [4,8]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ba^2, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(e_1) = a^5b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^4$$

Tenemos que el elemento x_2 y el elemento $x_1x_2^6$ tienen como imagen los generadores a y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [40,4] cuya estructura algebraica es $C_5 \rtimes Q \approx DC_{10}$. May en [19] da el género imaginario de este grupo pero no un epimorfismo. Este grupo tiene género imaginario 22. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, c tales que $a^4 = b^4 = c^5 = 1, b^2 = a^2, ba = ab^3, ca = ac^4$ y $bc = cb$, que encontramos en

GAP. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ca, \quad \theta(x_2) = a^{-1}b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}c^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Tenemos que el elemento e_1^4 tiene como imagen el generador c , el elemento e_1^{15} tiene como imagen el generador b y el elemento $(x_2e_1^5)^3$ tiene como imagen el generador a . Todos estos elementos preservan la orientación luego hemos probado que el epimorfismo actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo $[40,5]$ que tiene estructura algebraica $C_4 \times D_5$. Este grupo tiene género imaginario 12, luego es estudiado en el Capítulo 1.

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[40,6]$ cuya estructura algebraica es D_{20} . Tiene género imaginario 1, [29].

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo $[40,7]$ cuya estructura algebraica es $C_2 \times (C_5 \times C_4)$. El género imaginario de este grupo es 22. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, c tales que cumplen las relaciones $a^4 = b^5 = c^2 = 1, ba = ab^2$ y c conmuta con ambos. Luego tenemos que para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ca^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(e_1) = cb^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c$$

Tomemos los elementos $e_1^5x_1, e_1^4$ y e_1^5 que tienen como imagen los generadores a^{-1}, b, c respectivamente, y todos ellos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[40,8]$ cuya estructura algebraica es $(C_{10} \times C_2) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 12, así que es estudiado en el Capítulo 1.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo $[40,9]$ con estructura algebraica $C_{20} \times C_2$. Tiene género imaginario 2, [29].

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[40,10]$ cuya estructura algebraica es $C_5 \times D_4$. Este grupo tiene género imaginario 12 y por tanto es estudiado en el Capítulo 1.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo $[40,11]$ que tiene estructura algebraica $C_5 \times Q$. Este grupo tiene género imaginario 30. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que $X^5 = Y^4 = Z^4 = 1, Y^2 = Z^2, ZY = YZ^3$ y X conmuta con ambos. Para el grupo NEC $(0; +; [4,20]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ZY, \quad \theta(x_2) = Y^{-1}X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Z^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = Y^2$$

Tenemos que $\theta(x_2^{16}) = X$, que $\theta(x_2^{15}) = Y$ y que $\theta(x_1x_2^5) = Z$. Todos son elementos que preservan la orientación, luego tenemos que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{7}{10}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [40,12] cuya estructura algebraica es $C_2 \times (C_5 \times C_4)$. Este grupo tiene género imaginario 12, por lo tanto es estudiado en el Capítulo 1.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [40,13] con estructura algebraica $C_2 \times D_{10}$, luego tiene género imaginario 2, [29].

\Rightarrow El último grupo es el [40,14] cuya estructura algebraica es $C_{10} \times C_2 \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 22. Este grupo es estudiado por Gromadzki en [15] pero no se da un epimorfismo explícito. Una presentación de este grupo viene dado por generadores X, Y, Z tales que $X^{10} = Y^2 = Z^2 = 1$ y todos conmutan. Tenemos dos grupos NEC para este grupo, así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ZY, \quad \theta(c_{1,1}) = Y, \quad \theta(c_{1,2}) = ZY, \quad \theta(c_{2,0}) = Z$$

Tomemos los elementos $e_1, c_{1,0}c_{1,1}$ y $c_{2,0}c_{1,2}$ que tienen como imagen los generadores X, Z e Y respectivamente. Todos son elementos que preservan la orientación, y por tanto hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = ZY, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Tenemos que $\theta(x_1) = Y$, que $\theta(e_1) = X$ y que $\theta(c_{1,0}c_{2,0}) = Z$. Los tres son elementos que preservan la orientación, y por tanto tenemos que θ es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{2}$.

Grupos de orden 41

En este apartado solo encontramos el grupo cíclico C_{41} , que tiene género imaginario 1, [29].

Grupos de orden 42

Tenemos 6 grupos de orden 42, así que estudiaremos cada uno por separado:

⇒ El primer grupo que tenemos que estudiar es el [42,1], que tiene estructura algebraica $(C_7 \times C_3) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 9, luego es estudiado en [2].

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [42,2] cuya estructura algebraica es $C_2 \times (C_7 \times C_3)$. Este grupo tiene género imaginario 23. Tiene una presentación dada por generadores X, Y, Z tales que $X^3 = Y^7 = Z^2 = 1, YX = XY^2$ y Z conmuta con los otros generadores. Para esta presentación hemos tomado Z como generador de C_2 y hemos tomado para $(C_7 \times C_3)$ la presentación que encontramos en [12]. Para el grupo NEC $(0; +; [3,6]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(x_2) = XZ, \quad \theta(e_1) = Z^{-1}X^{-1}Y^{-1}X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = Z$$

Tenemos que x_2^4, x_2^3 y $x_2^2x_1$ tienen como imagen los generadores X, Z e Y . Los tres elementos preservan la orientación y por tanto es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [42,3] con estructura algebraica $C_7 \times D_3$. Este grupo tiene género imaginario 13 y es estudiado en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [42,4] cuya estructura algebraica es $C_3 \times D_7$. Tiene género imaginario 13 y por tanto es estudiado en el Capítulo 1.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [42,5] que tiene estructura algebraica D_{21} . Este grupo tiene género imaginario 1 y es estudiado y clasificado por Tucker en [29].

⇒ El último grupo que tenemos es el [42,6] cuya estructura algebraica es C_{42} . El grupo cíclico tiene género imaginario 1 y por tanto es estudiado y clasificado en [29] por Tucker.

Grupos de orden 43

Solo tenemos un grupo de orden 43, el que tiene estructura algebraica C_{43} , que tiene género imaginario 1, [29].

Grupos de orden 44

Tenemos 4 grupos en este apartado, por lo que tenemos que:

\Rightarrow El primer grupo es el [44,1] que tiene estructura algebraica $C_{11} \times C_4 \approx DC_{11}$. Este grupo es estudiado por May en [19] pero no se da el epimorfismo. Este grupo tiene género imaginario 24. Tenemos que una presentación de este grupo, que encontramos en GAP, viene dada por generadores a, b tales que $a^4 = b^{11} = 1$ y $ba = ab^{10}$. Tenemos dos grupos NEC para este grupo así que:

- i) Para el grupo NEC (0; +; [4,4]; {(-)}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^2, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Tenemos que los elementos x_1 y $x_1^3x_2$ tienen como imagen los generadores a y b . Ambos elementos preservan la orientación y por tanto tenemos que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC (1; -; [4,4]; {-}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^5$$

Es claro que las imágenes de los elementos x_1 y x_2 generan todo el grupo y preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [44,2] cuya estructura algebraica es C_{44} . Este grupo tiene género imaginario 1, así que está estudiado y clasificado en [29] por Tucker.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [44,3] que tiene estructura algebraica D_{22} . Tiene género imaginario 1 luego se clasifica por Tucker en [29].

\Rightarrow El último grupo que tenemos es el [44,4] cuya estructura algebraica es $C_{22} \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 2, así que es clasificado en [29] por Tucker.

Grupos de orden 45

Tenemos dos grupos de orden 45, que serían:

⇒ Uno de los grupos sería el [45,1], cuya estructura algebraica es C_{45} y que tiene género imaginario 1. Este grupo es clasificado en [29] por Tucker.

⇒ El otro grupo sería el [45,2] con estructura algebraica $C_{15} \times C_3$. El género imaginario de este grupo es 29. Este grupo viene clasificado y estudiado en [8]. Tenemos que una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^{15} = Y^3 = 1$ y conmutan. Para el grupo NEC $(1; -, [3,15]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = X, \quad \theta(d_1) = X^7Y$$

Tenemos que los elementos x_1 y x_2 tienen como imagen los generadores Y y X respectivamente. Ambos elementos preservan la orientación y por tanto hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{5}$.

Grupos de orden 46

Hay dos grupos de orden 46, el grupo [46,1] y [46,2] cuyas estructuras algebraicas son D_{23} y C_{46} respectivamente. Ambos tienen género imaginario 1, luego se clasifican por Tucker en [29].

Grupos de orden 47

Solo hay un grupo de orden 47, el grupo cíclico C_{47} que tiene género imaginario 1. Este grupo es clasificado en [29] por Tucker.

Grupos de orden 48

Tenemos que hay 52 grupos distintos de orden 48, por lo que estudiemos uno a uno los grupos. Todas las presentaciones que aparecen han sido sacadas de [13], a menos que en el propio grupo se indique lo contrario:

⇒ El primer grupo que estudiamos es el grupo [48,1] que tiene estructura algebraica $C_3 \times C_{16}$. Este grupo tiene género imaginario 31. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B tales que $A^{16} = B^3 = 1$ y $BA = AB^2$. Para el grupo NEC $(0; +; [3,16]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B, \quad \theta(x_2) = A, \quad \theta(e_1) = A^{-1}B^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = A^8$$

Tenemos que los elementos x_1 y x_2 tienen como imagen los generadores B y A respectivamente. Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación y hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{29}{48}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [48,2], cuya estructura algebraica es C_{48} . Este grupo cíclico tiene género imaginario 1, [29].

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [48,3], con estructura algebraica $(C_4 \times C_4) \times C_3$. El género imaginario de este grupo es 18. Una presentación del mismo viene dada por generadores R, S tales que $R^3 = S^3 = (RS)^3 = (R^{-1}S)^4 = 1$. Tenemos dos grupos NEC por lo que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = R, \quad \theta(x_2) = S^{-1}, \quad \theta(e_1) = SR^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = (SR^{-1})^2$$

Tenemos que el elemento x_1 va al generador R y que el elemento x_2 va al generador S^{-1} . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

- ii) Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = RS, \quad \theta(x_2) = S^{-1}, \quad \theta(d_1) = R$$

Tenemos que el elemento x_2 va al generador S^{-1} y que el elemento x_1x_2 va al generador R . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [48,4], cuya estructura algebraica es $C_8 \times D_3$. Este grupo tiene género imaginario 18 y se estudia en profundidad en [9]. Tenemos que la presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z , siendo X el generador del grupo C_8 de orden 8 e Y, Z los generadores del grupo D_3 ambos de orden 2 y su producto tiene orden 3. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(3), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = XYZY, \quad \theta(e_2) = X^{-1}YZY, \quad \theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = (YZ)^2Y, \quad \theta(c_{2,0}) = X^4$$

Así tenemos que los elementos $(e_1c_{1,0})^9, c_{1,0}, c_{1,0}(e_1c_{1,0})^9e_2c_{1,0}$ tienen como imagen los generadores X, Y y Z respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^{12}c_{2,0}$ va al elemento neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un

epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ Estudiemos el grupo [48,5], con estructura algebraica $C_{24} \rtimes C_2$. El género imaginario de este grupo es 20. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B tales que $A^2 = B^8 = 1, AB = B^2AB^{-1}$ y $(B^{-1}A)^3BA(B^{-1}A)^2 = 1$. Esta presentación ha sido obtenida de GAP. Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [8]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B, \quad \theta(e_1) = B^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = A, \quad \theta(c_{1,1}) = B^4, \quad \theta(c_{1,1}) = BAB^{-1}$$

Tenemos que el elemento x_1 va al generador B y que el elemento $c_{1,0}c_{1,1}e_1^4$ va al generador A . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{8}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,8]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(x_2) = B, \quad \theta(e_1) = B^{-1}A, \quad \theta(c_{1,0}) = B^4$$

Tenemos que el elemento x_1 va al generador A y que el elemento x_2 va al generador B . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{8}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [48,6], cuya estructura algebraica es $C_{24} \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 14, por lo que este grupo se estudia en el Capítulo 1.

⇒ Ahora tenemos el grupo [48,7], que tiene estructura algebraica D_{24} . Este grupo tiene género imaginario 1, [29].

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,8], cuya estructura algebraica es $C_3 \rtimes DC_4 \approx DC_{12}$. El género imaginario de este grupo es 26. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^{24} = 1, X^{12} = Y^2$ y $Y^{-1}XY = X^{-1}$. May estudió este grupo en [19] y da esta presentación, pero no se especifica el epimorfismo explícitamente. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(e_1) = Y^2X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^{12}$$

Tenemos que el elemento $x_1x_2^3$ va al generador X y que el elemento x_2 va al generador Y . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora estudiemos el grupo [48,9], con estructura algebraica $C_2 \times (C_3 \times C_8)$. Este grupo tiene género imaginario 34. Este grupo tiene una presentación dada por generadores X, S, T tales que $X^2 = S^8 = T^8 = (S^3T)^3 = 1$ y X conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [3]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = S^3T, \quad \theta(e_1) = S, \quad \theta(e_2) = S^{-1}T^{-1}S^5, \quad \theta(c_{1,0}) = S^4, \quad \theta(c_{2,0}) = X$$

Tenemos que el elemento e_1 va al generador S , que el elemento $e_1^5x_1$ va al generador T y el elemento $c_{2,0}$ va al generador X . Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^4c_{1,0}$ es no orientable y tiene como imagen el elemento neutro. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{2}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,10], cuya estructura algebraica es $(C_3 \times C_8) \times C_2$. El género imaginario de este grupo es 36. Una presentación del grupo viene dada por generadores A, B tales que $A^8 = B^{-1}A^2B^{-1} = (B^{-1}ABA^{-1}B^{-1}A^{-1})^2 = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [6,8]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = AB, \quad \theta(x_2) = A, \quad \theta(e_1) = A^{-1}B^{-1}A^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = A^4$$

El estudio del orden de AB viene hecho en [13]. Tenemos que los elementos x_2 y $x_2^7x_1$ tienen como imagen los generadores A y B respectivamente. Ambos son elementos que preservan la orientación y por tanto se ha demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{17}{24}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [48,11], con estructura algebraica $C_4 \times DC_3$. El género imaginario de este grupo es 26 y es estudiado en [11]. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que $X^6 = Z^4 = 1, X^3 = Y^2, Y^{-1}XY = X^{-1}$ y Z conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XYZ, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(e_1) = (XY^2Z)^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^3Z^2$$

Tomemos el elemento x_2 cuya imagen es el generador Y , el elemento $(x_1x_2^3)^2c_{1,0}$ que tiene como imagen el generador X^{-1} y el elemento $(x_1x_2^3)^2c_{1,0}(x_1x_2^3)$ que tiene como imagen el generador Z . Por otra parte tenemos que el elemento $x_1^2c_{1,0}$ es no orientable y su imagen es el neutro. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,12], cuya estructura algebraica es $DC_3 \times C_4$. Este grupo tiene género imaginario 26. Una presentación de este grupo, recogida en GAP, viene dada por generadores A, B tales que cumplen las relaciones $A^4 = B^4 = A^{-1}B^{-1}A^2BA^{-1} = A^{-1}B^2AB^2 = (A^{-1}B^{-1})^3(AB)^2A^{-1}B = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(x_2) = A^2B, \quad \theta(e_1) = B^{-1}A, \quad \theta(c_{1,0}) = A^2$$

Tomemos el elemento x_1 cuya imagen es el generador A y el elemento $x_1^2x_2$ que tiene como imagen el generador B . Los dos elementos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [48,13], con estructura algebraica $C_{12} \times C_4$. El género imaginario de este grupo es 26. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B tales que cumplen las relaciones $A^4 = B^{12} = A^{-1}B^{-1}AB^{-1} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A^{-1}, \quad \theta(x_2) = AB, \quad \theta(e_1) = B^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = B^6$$

Tomemos el elemento x_1 cuya imagen es el generador A^{-1} y el elemento x_1x_2 que tiene como imagen el generador B . Ambos son elementos que preservan la orientación y hemos generado todo el grupo. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,14], cuya estructura algebraica es $(C_{12} \times C_2) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 14, por lo que en el Capítulo 1 hay un estudio del grupo.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [48,15], que tiene estructura algebraica $(C_3 \times D_4) \times C_2$. El género imaginario de este grupo es 15, por lo que encontramos un estudio en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo que estudiamos es el grupo [48,16], cuya estructura algebraica es $\langle -2, 2, 3 \rangle \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 30. Una presentación de este grupo viene dada por los generadores A y B tales que cumplen:

$$A^4 = A^{-1}B^{-1}A^2BA^{-1} = B^{-2}A^2B^{-2} = A^{-1}B^{-2}AB^{-2} = (A^{-1}B^{-1})^3(AB)^2A^{-1}B^{-1} = 1$$

Para el grupo NEC $(0; +; [4,6]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A^{-1}, \quad \theta(x_2) = AB, \quad \theta(e_1) = B^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = B^4$$

Indiquemos que en [13] está hecho el análisis sobre el orden de AB . Tomemos el elemento x_1 cuya imagen es el generador A^{-1} y el elemento x_1x_2 que tiene como imagen el

generador B . Ambos elementos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{7}{12}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [48,17], que tiene estructura algebraica $(C_3 \times Q) \rtimes C_2$. El género imaginario de este grupo es 20. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B tales que $A^2 = B^8 = (BAB)^2 = (B^{-1}A)^3BAB^{-1}AB = 1$. Esta presentación ha sido obtenida de GAP. Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [8]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B, \quad \theta(e_1) = B^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = A, \quad \theta(c_{1,1}) = B^4, \quad \theta(c_{1,1}) = BAB^{-1}$$

Tenemos que el elemento x_1 va al generador B y que el elemento $c_{1,0}c_{1,1}e_1^4$ va al generador B . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{8}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,8]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(x_2) = B, \quad \theta(e_1) = B^{-1}A, \quad \theta(c_{1,0}) = B^4$$

Tenemos que el elemento x_1 va al generador A y y que el elemento x_2 va al generador B . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{8}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos que estudiar es el [48,18], cuya estructura algebraica es $C_3 \rtimes DC_4$. Este grupo tiene género imaginario 32. Una presentación parcial está dada por generadores A, B tales que $B^4 = A^6B^2 = 1$. Es claro que de la presentación, al tener que $A^6 = B^2$ tenemos que $A^{12} = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [4,8]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B^{-1}, \quad \theta(x_2) = BA, \quad \theta(e_1) = A^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = A^6$$

Indiquemos que en [13] está hecho el análisis sobre el orden de AB . Tomemos el elemento x_1 cuya imagen es el generador B^{-1} y el elemento x_1x_2 que tiene como imagen el generador A . Ambos elementos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{8}$.

⇒ Ahora estudiamos el siguiente grupo que es [48,19], que tiene una estructura algebraica $(C_2 \times DC_3) \rtimes C_2$. El género imaginario de este grupo es 26. Una presentación de este grupo viene dada por los generadores A, B tales que cumplen las relaciones $A^4 = B^6 = A^{-1}B^{-1}A^2BA^{-1} = A^{-1}B^{-2}AB^{-2} = (A^{-1}B^{-1})^2(AB)^2 = 1$. Esta presentación ha sido tomada de GAP, ya que si observamos la presentación dada en [13] observamos que hay una errata en la cuarta relación, ya que el último exponente debe ser un -2 en vez de un 2. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A^{-1}, \quad \theta(x_2) = AB, \quad \theta(e_1) = B^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = B^3$$

Estudiemos el elemento AB . Tenemos que $(AB)^4 = AB(AB)^2AB = AB(BA)^2AB = AB^2ABA^2B = A^2B^{-2}BA^2B = A^2B^{-1}A^2B = A^2B^{-1}BA^2 = 1$; por lo que AB tiene orden 4. Tomemos el elemento x_1 cuya imagen es el generador A^{-1} y el elemento $x_1^2x_2$ que tiene como imagen el generador B . Ambos elementos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [48,20], cuya estructura algebraica es $C_{12} \times C_4$. Este grupo tiene género imaginario 34 y es estudiado por Gromadzki en [15] pero no se da el epimorfismo. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que cumplen $X^{12} = Y^4 = 1$ y ambos conmutan. Sea $(0; +; [4,12]; \{(-)\})$ el grupo NEC asociado y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^6$$

Tomemos los elementos x_1 y x_2 que tienen como imágenes a los generadores Y y X respectivamente. Ambos elementos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{2}{3}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [48,21], con estructura algebraica $C_3 \times (4, 4|2, 2)$. El género imaginario de este grupo es 14, así que en el Capítulo 1 tenemos un estudio del mismo.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,22], cuya estructura algebraica es $C_3 \times (C_4 \rtimes C_4)$. Este grupo tiene género imaginario 34. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, S, T tales que $X^3 = S^4 = T^4 = 1, T^{-1}ST = S^{-1}$ y X conmuta con el resto. Para el grupo NEC $(0; +; [4,12]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = S, \quad \theta(x_2) = TX, \quad \theta(e_1) = X^{-1}T^{-1}S^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = S^2$$

Tomemos el elemento x_1 cuya imagen es el generador S , el elemento x_2^9 tiene como imagen el generador T y el elemento x_2^4 que tiene como imagen el generador X . Todos los elementos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que

actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{2}{3}$.

⇒ Estudiemos el grupo [48,23], que tiene estructura algebraica $C_{24} \times C_2$. El género imaginario de este grupo es 2, por lo que Tucker en [29] lo clasifica.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,24], cuya estructura algebraica es $C_3 \times (C_8 \times C_2)$. Este grupo tiene género imaginario 14, así que tenemos su estudio en el Capítulo 1.

⇒ Ahora estudiemos el grupo [48,25], que tiene estructura algebraica $C_3 \times D_8$. El género imaginario de este grupo es 18. Este grupo es estudiado en [9]. Tenemos que la presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z , siendo X el generador de C_3 de orden 3 e Y, Z los generadores de D_8 ambos de orden 2 y su producto de orden 8. Tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [6]; \{(2,2)\})$, no aparece el epimorfismo explícitamente en [9], así que definimos $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XZ, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Z, \quad \theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = (YZ)^4, \quad \theta(c_{1,2}) = ZYZ$$

Tenemos que los elementos $(x_1c_{1,0})^8, (x_1c_{1,0})^9c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,0}x_1)^9, (x_1c_{1,0})^9c_{1,0}$ tienen como imagen los generadores X^{-1}, Y y Z respectivamente. Todos ellos son elementos que preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,6]; \{(-)\})$, sí tenemos en [9] el epimorfismo explícitamente, que es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = XYZY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}YZ, \quad \theta(c_{1,0}) = (YZ)^4$$

Así tenemos que los elementos $x_2^4, x_1, x_2^4x_1e_1$ tienen como imagen los generadores X, Y y Z respectivamente, y todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,26], cuya estructura algebraica es $C_3 \times QD_8$. Este grupo tiene género imaginario 20. Este grupo tiene una presentación dada por generadores X, Y, Z tales que $X^8 = Y^2 = Z^3 = 1, YXY = X^3$ y Z conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-), (4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = XZ, \quad \theta(e_2) = Z^{-1}X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^4, \quad \theta(c_{2,0}) = Y, \quad \theta(c_{2,1}) = XYX^{-1}$$

Así tenemos que los elementos $e_1^9, c_{2,0}, e_1^{16}$ tienen como imagen los generadores X, Y y Z respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^{12}c_{1,0}$ va al elemento neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una

superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{8}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [48,27], con estructura algebraica $C_3 \times DC_4$. El género imaginario de este grupo es 34. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que $X^8 = Z^3 = 1, X^4 = Y^2, XY = YX^{-1}$ y Z conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [4,12]; \{(-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(x_2) = YZ, \quad \theta(e_1) = Z^{-1}Y^2X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^4$$

Así tenemos que el elemento $x_1x_2^3$ va al generador X , el elemento x_2^9 va al generador Y y el elemento x_2^4 tiene como imagen el generador Z y todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{2}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo estudiado es el [48,28], cuya estructura algebraica es $SL(2, 3).C_2$. Este grupo tiene género imaginario 22 y una presentación, obtenida de GAP, dada por generadores R, T, S tales que $R^3 = S^3 = (RS)^2 = T^2$ y $T^{-1}RT = S$. De esta presentación se obtiene que R tiene orden 6. Para el siguiente grupo NEC $(0; +; [3,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = R^2, \quad \theta(x_2) = T, \quad \theta(e_1) = T^{-1}R^4, \quad \theta(c_{1,0}) = R^3$$

Así tenemos que los elementos $x_2, x_2e_1c_{1,0}, x_2^3(x_2e_1c_{1,0})x_2$ tienen como imagen los generadores T, R y S respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $x_2^2c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{12}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [48,29], que tiene estructura algebraica $GL(2, 3)$. El género imaginario de este grupo es 10. Podemos encontrar en el Capítulo 1 un estudio de este grupo.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [48,30], cuya estructura algebraica es $A_4 \times C_4$. Este grupo tiene género imaginario 22. Está generado por permutaciones V, U en $S_4 \times S_4$ tales que $V = (1\ 2\ 3)$ y $U = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$, que podemos encontrar en [27]. Para el grupo NEC $(0; +; [3,4]; \{(-)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = V, \quad \theta(x_2) = U, \quad \theta(e_1) = U^{-1}V^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = VUVU$$

Es claro que los elementos x_2 y x_1 tienen como imagen los generadores U y V respectivamente, y todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{12}$.

⇒ Ahora estudiemos el grupo [48,31], con estructura algebraica $C_4 \times A_4$. El género imaginario de este grupo es 10, por lo que en el Capítulo 1 esta su estudio.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,32], cuya estructura algebraica es $C_2 \times \langle 2, 3, 3 \rangle$. El género imaginario de este grupo es 22. Una presentación del mismo viene dada por generadores A, B, Z tales que $A^3 = Z^2 = 1, ABA = BAB$ y Z conmuta con los otros generadores. Para saber que $B^3 = (ABA)^4 = 1$, solo hace falta consultar la tabla del grupo 24/13 en [26]. Para el grupo NEC $(0; +; [3,4]; \{(-)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A^{-1}, \quad \theta(x_2) = AB AZ, \quad \theta(e_1) = Z^{-1}A^{-1}B^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = Z$$

Así tenemos que los elementos $x_1^2, (x_1x_2x_1)^4, (x_1x_2x_1)^3$ tienen como imagen los generadores A, B y Z respectivamente, y todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{12}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [48,33], con estructura algebraica $SL(2, 3) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 10, así que encontramos el estudio de este grupo en el Capítulo 1.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,34], cuya estructura algebraica es $C_2 \times DC_6$. El género imaginario de este grupo es 38. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que $Z^2 = X^{12} = 1, X^6 = Y^2, XY = YX^{-1}$ y Z conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Y^{-1}X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^6, \quad \theta(c_{2,0}) = Z$$

Tomemos el elemento e_1 que tiene como imagen el generador X , el elemento $c_{2,0}$ que tiene como imagen el generador Z y el elemento $e_1^{11}x_1$ tiene como imagen el generador Y . Por otra parte, el elemento $e_1^6c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

⇒ Ahora tenemos que el siguiente grupo es el grupo [48,35], que tiene estructura algebraica $C_2 \times C_4 \times S_3 \approx C_4 \times D_6$. Este grupo tiene género imaginario 26. Este grupo se estudia en [9], pero sólo aparece el epimorfismo explícitamente del tercer grupo NEC. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que X tiene orden 4 y genera C_4 ; Y, Z tienen orden 2 con producto de orden 6 y generan D_6 , y X conmuta con Y, Z . Tenemos 3 grupos NEC por lo que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XZ, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Z, \quad \theta(c_{1,0}) = Y,$$

$$\theta(c_{1,1}) = (YZ)^3, \quad \theta(c_{1,2}) = YZY, \quad \theta(c_{1,3}) = ZYZ$$

Tenemos que los elementos $(x_1c_{1,2})^9, c_{1,0}, (x_1c_{1,0})^4c_{1,2}c_{1,3}c_{1,0}$ tienen como imagen los generadores X, Y y Z respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = XZ, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Z,$$

$$\theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = (YZ)^3, \quad \theta(c_{1,2}) = ZYZ, \quad \theta(c_{2,0}) = X^2$$

Tomemos el elemento $(e_1c_{1,0}c_{1,1})^9$, el elemento $(e_1c_{1,0}c_{1,1})^3e_2c_{2,0}c_{1,2}(e_1c_{1,0}c_{1,1})^9e_2$ y el elemento $(e_1c_{1,0}c_{1,1})^9e_2$ que tienen como imagen los generadores X, Y y Z respectivamente, y todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$, que aparece en la referencia, el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = YZY, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Así tenemos que los elementos $e_1, x_1, x_1c_{1,0}c_{2,0}$ tienen como imagen los generadores X, Y y Z respectivamente, y todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [48,36], cuya estructura algebraica es $C_2 \times D_{12}$. El género imaginario de este grupo es 2, por lo que Tucker lo clasifica en [29].

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [48,37], que tiene estructura algebraica $(C_{12} \times C_2) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 14, así que en el Capítulo 1 hay un estudio del mismo.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [48,38], cuya estructura algebraica es $D_4 \times S_3$. El género imaginario de este grupo es 8, por lo que encontramos su estudio en [2].

\Rightarrow Nos toca estudiar seguidamente el siguiente grupo [48,39], con estructura algebraica $(C_2 \times DC_3) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 26. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B, C tales que $A^2 = B^4 = C^{-1}B^2C^{-1} = 1$ y $B^{-1}ABA = B^{-1}C^{-1}ABC^{-1}A = (B^{-1}C)^2AC^{-1}B^{-1}C^{-1}BCAC^{-1} = 1$. Tenemos dos grupos NEC para este grupo por lo que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(e_1) &= C^3, \quad \theta(e_2) = C, \quad \theta(c_{1,0}) = A, \\ \theta(c_{1,1}) &= C^2, \quad \theta(c_{1,2}) = C^{-1}AC, \quad \theta(c_{2,0}) = ACACBC\end{aligned}$$

En [13] está hecho el análisis sobre el orden del elemento $ACACBC$ y la demostración de que la imagen de $e_2^{-1}c_{2,0}e_2c_{2,0}$ es el neutro. Así si tomamos los elementos $c_{1,0}, (e_1c_{1,0})^2c_{2,0}e_1, e_2$ tienen como imagen los generadores A, B y C respectivamente. Por otra parte tomemos el elemento $c_{1,1}e_2^2$ que es no orientable y tiene como imagen el neutro. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(e_1) = C, \quad \theta(e_2) = C^{-1}A, \quad \theta(c_{1,0}) = ACACBC, \quad \theta(c_{2,0}) = C^2$$

Tomemos los elementos $x_1, e_2^2c_{1,0}c_{2,0}e_1, e_1$ que tienen como imagen los generadores A, B y C respectivamente, y todos ellos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [48,40], cuya estructura algebraica es $Q \times D_3$. El género imaginario de este grupo es 38. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B, i, j tales que $A^2 = B^2 = (AB)^3 = i^4 = j^4 = 1, i^2 = j^2, ji = ij^3$ y A, B conmutan con i, j . Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = iA, \quad \theta(e_1) = j, \quad \theta(e_2) = j^{-1}i^{-1}A^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = B, \quad \theta(c_{2,0}) = i^2$$

Tomemos los elementos $(x_1c_{1,0})^9, e_1, c_{1,0}, (x_1c_{1,0})^3x_1$ tienen como imagen los generadores i, j, B y A respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $(x_1c_{1,0})^6c_{2,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [48,41], que tiene estructura algebraica $(C_4 \times D_3) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 18. El grupo admite una presentación dada por generadores A, B, C tales que $A^4 = B^2 = C^2 = A^{-1}BA^2BA^{-1} = A^{-1}CA^2CA^{-1} = 1$ y $(A^{-1}CB)^2 = (A^{-1}B)^2(AC)^2 = C(BA^{-1})^2BCB = 1$. Entonces tenemos que para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,4,12)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = B, \quad \theta(c_{1,1}) = A^2, \quad \theta(c_{1,2}) = C, \quad \theta(c_{1,3}) = A^{-1}CB, \quad \theta(c_{1,4}) = B$$

De las relaciones 4^a y 5^a podemos deducir que A^2 está en el centro del grupo. Además en [13] está hecho el análisis de que $CA^{-1}CB$ tiene orden 4 y que $A^{-1}C$ tiene orden 12. Tomemos los elementos $c_{1,0}, c_{1,2}, c_{1,3}c_{1,0}c_{1,2}$ que tienen como imagen los generadores B, C y A^{-1} respectivamente. Ahora tenemos que el elemento no orientable $(c_{1,3}c_{1,0}c_{1,2})^2c_{1,1}$ va al neutro. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,42], cuya estructura algebraica es $C_2 \times C_2 \times DC_3$. El género imaginario de este grupo es 38. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, W, Z tales que cumplen $X^6 = W^2 = Z^2 = 1, X^3 = Y^2, XY = YX^{-1}$ y W, Z conmutan entre ellos y con X e Y . Así tenemos que para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XYZ, \quad \theta(e_1) = Y, \quad \theta(e_2) = (XY^2Z)^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^3, \quad \theta(c_{2,0}) = W$$

Tomemos los elementos $e_1, c_{2,0}, c_{1,0}(x_1e_1^3)^3, x_1e_1^3c_{1,0}(x_1e_1^3)^3$ tienen como imagen los generadores Y, W, Z y X respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^2c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

⇒ Estudiemos ahora el grupo [48,43], con estructura algebraica $C_2 \times ((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$. Este grupo tiene género imaginario 14, así que en el Capítulo 1 encontramos su estudio.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,44], cuya estructura algebraica es $C_{12} \times C_2 \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 26 y es estudiado por Gromadzki en [15] pero no da el epimorfismo. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que $X^{12} = Y^2 = Z^2 = 1$ y todos los generadores conmutan. Tenemos dos grupos NEC para este grupo por lo que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = YZ, \quad \theta(c_{1,1}) = Z, \quad \theta(c_{1,2}) = YZ, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Así si tomamos los elementos $e_1, c_{1,0}c_{1,1}, c_{2,0}c_{1,2}$ tienen como imagen los generadores X, Y y Z respectivamente y todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = YZ, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Tomemos los elementos $x_1, e_1, c_{2,0}c_{1,0}$ que tienen como imagen los generadores Y, X y Z respectivamente, y preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [48,45], que tiene estructura algebraica $C_6 \times D_4$. Este grupo tiene género imaginario 26. Este grupo está estudiado en [9], pero no aparecen ambos epimorfismos explícitamente. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que X tiene orden 6 y se corresponde con C_6 e Y, Z de orden 2 tal que su producto tiene orden 4 y se corresponde con D_4 . Tenemos dos grupos NEC para este grupo por lo que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ no aparece el epimorfismo explícitamente así que tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\begin{aligned}\theta(e_1) &= XZ, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Z, \quad \theta(c_{1,0}) = Y, \\ \theta(c_{1,1}) &= (YZ)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = ZYZ, \quad \theta(c_{2,0}) = Z\end{aligned}$$

Así si tomamos los elementos $c_{1,0}, e_1c_{2,0}, c_{2,0}$ tienen como imagen los generadores Y, X y Z respectivamente. Por otra parte tomemos el elemento $c_{1,1}c_{1,0}c_{1,2}$ que es no orientable y tiene como imagen el neutro. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$, sí tenemos el epimorfismo explícitamente, que es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = YZY, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Tomemos los elementos $x_1, x_1c_{1,0}c_{2,0}, e_1$ tienen como imagen los generadores Y, Z y X respectivamente, y todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [48,46], que tiene estructura algebraica $C_6 \times Q$. El género imaginario de este grupo es 38. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, i, j tales que $X^6 = i^4 = j^4 = 1, i^2 = j^2, ji = ij^{-1}$ y X conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = i, \quad \theta(e_1) = Xj, \quad \theta(e_2) = j^{-1}X^{-1}i^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^3, \quad \theta(c_{2,0}) = i^2$$

Tomemos los elementos $x_1, c_{1,0}e_1^9, c_{1,0}e_1^4$ tienen como imagen los generadores i, j y X respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $x_1^2c_{2,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa

sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,47], cuya estructura algebraica es $C_3 \times ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2)$. Este grupo tiene género imaginario 26. Una presentación de este grupo viene dada por generadores R, S, T, X tales que cumplen las relaciones $R^2 = S^2 = T^2 = X^3 = (RS)^4 = (ST)^4 = 1, RST = STR = TRS$ y X conmuta con el resto de generadores. Tenemos dos grupos NEC para este grupo por lo que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = XRST, \quad \theta(e_2) = TSRX^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = R,$$

$$\theta(c_{1,1}) = (RS)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = R, \quad \theta(c_{2,0}) = T$$

Así si tomamos los elementos $c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,0}e_2e_1^4c_{1,0}, e_1^4$ tienen como imagen los generadores R, T, S y X respectivamente. Tomemos el elemento $(c_{1,0}c_{2,0}e_2e_1^4c_{1,0})^2c_{1,1}$ que es no orientable y tiene como imagen el neutro. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = T, \quad \theta(e_1) = XR, \quad \theta(e_2) = RX^{-1}T, \quad \theta(c_{1,0}) = R, \quad \theta(c_{2,0}) = S$$

Tomemos los elementos $e_1^3, e_1^4, x_1, c_{2,0}$ tienen como imagen los generadores R, X, T y S respectivamente. Además tenemos que el elemento $e_1^3c_{1,0}$ tiene como imagen el neutro y es no orientable. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Estudiemos el grupo [48,48], con estructura algebraica $C_2 \times S_4$. Este grupo tiene género imaginario 4, por lo que en [4] está hecho el estudio del mismo.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,49], cuya estructura algebraica es $C_2 \times C_2 \times A_4$. El género imaginario de este grupo es 14, así que en el Capítulo 1 encontramos el estudio.

\Rightarrow Ahora tenemos que estudiar el siguiente grupo que es [48,50], que tiene estructura algebraica $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_3$. Este grupo tiene género imaginario 10, por lo que podemos encontrar un estudio del mismo en el Capítulo 1.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el grupo [48,51], cuya estructura algebraica es $D_2 \times D_6$. El género imaginario de este grupo es 14, así que consultando el Capítulo 1

encontramos el estudio.

⇒ El último grupo que tenemos que estudiar es el grupo [48,52], cuya estructura algebraica es $C_6 \times C_2 \times C_2 \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 38 y es estudiado por Gromadzki en [15] pero no da el epimorfismo. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, W, Z tales que $X^6 = Y^2 = Z^2 = W^2 = 1$ y todos conmutan entre ellos. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}$$

$$\theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = Z, \quad \theta(c_{1,2}) = W, \quad \theta(c_{1,3}) = Y, \quad \theta(c_{2,0}) = X^3$$

Así si tomamos los elementos $e_1, c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2}$ tienen como imagen los generadores X, Y, Z y W respectivamente. Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^3 c_{2,0}$ es no orientable y tiene como imagen el neutro. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{4}$.

Grupos de orden 49

Podemos encontrar dos grupos de orden 49 y es necesario un estudio personalizado de los grupos:

⇒ El primer grupo que tenemos es el [49,1] que tiene estructura algebraica C_{49} . Este grupo tiene género imaginario 1, por lo que su clasificación se encuentra en [29].

⇒ El segundo grupo es el [49,2], con estructura algebraica $C_7 \times C_7$. Podemos encontrar su estudio en profundidad en [8]. Este grupo tiene género imaginario 37. Tomemos X, Y generadores del grupo, ambos de orden 7 y que conmutan entre ellos. Para el grupo NEC $(1; -; [7,7]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(d_1) = X^3 Y^3$$

Si tomamos los elementos x_1 y x_2 tenemos que sus imágenes son los generadores X e Y , y ambos elementos preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{7}$.

Grupos de orden 50

Tenemos 5 grupos de orden 50, aunque sólo será necesario el estudio de uno de ellos:

⇒ Tenemos que los grupos [50,1] y [50,2], con estructuras algebraicas D_{25} y C_{50} respectivamente, tienen género imaginario 1, luego se encuentran clasificadas por Tucker en [29].

⇒ Los grupos [50,3] y [50,4], cuyas estructuras algebraicas son $C_5 \times D_5$ y $(C_5 \times C_5) \rtimes C_2$ respectivamente, tienen género imaginario 17, luego su estudio se encuentra en el Capítulo 1.

⇒ El último grupo, el [50,5] con estructura algebraica $C_{10} \times C_5$, que podemos encontrar la clasificación del mismo en [15] pero sin que aparezca el epimorfismo explícitamente, tiene género imaginario 37. Tomemos una presentación de este grupo dada por generadores X, Y tales que cumplen las relaciones $X^{10} = Y^5 = 1$ y ambos conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [5,10]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^5$$

Tomando los elementos x_1 y x_2 tenemos los generadores Y, X respectivamente y tenemos generado todo el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área del grupo NEC asociado es $\frac{7}{10}$.

Grupos de orden 51

En este apartado solo encontramos un grupo de orden 51, el correspondiente al grupo cíclico C_{51} . Este grupo tiene género imaginario 1, por lo que está clasificado por Tucker en [29].

Grupos de orden 52

Podemos encontrar 5 grupos distintos de orden 52:

⇒ El primer grupo es el [52,1], cuya estructura algebraica es $C_{13} \rtimes C_4 \approx DC_{13}$. Tiene género imaginario 28 y es clasificado por May en [20] pero no se da el epimorfismo. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^4 = b^{13} = 1$ y $ba = ab^{12}$, la cual encontramos en GAP. Tenemos dos grupos NEC así que:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(e_1) = b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Tenemos que $\theta(x_1^3) = a$ y que $\theta(e_1^{12}) = b$, por lo que tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación y queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(1; -; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^6$$

Si tomamos los elementos x_1 y x_1x_2 tenemos que sus imágenes son los generadores a^{-1} y b respectivamente. Así queda demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que el grupo está generado como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos los grupos $[52,2]$, $[52,4]$ y $[52,5]$ que tienen estructura algebraica C_{52} , D_{26} y $C_{26} \times C_2$ respectivamente. Los dos primeros grupos ($[52,2]$ y $[52,4]$) tienen género imaginario 1 y el otro ($[52,5]$) tiene género imaginario 2, por lo que los tres grupos se clasifican por Tucker en [29].

\Rightarrow Nos queda el grupo $[52,3]$, cuya estructura algebraica es $C_{13} \times C_4$. Este grupo tiene género imaginario 13, por lo que en el Capítulo 1 se estudia.

Grupos de orden 53

Tan solo hay un grupo de orden 53, cuya estructura algebraica es C_{53} . El grupo cíclico de orden 53 tiene género imaginario 1, luego es estudiado en [29] por Tucker.

Grupos de orden 54

Podemos encontrar 15 grupos distintos en este apartado. Vamos a hacer un análisis individual de cada uno de ellos:

\Rightarrow El primer grupo y el segundo que tenemos son el $[54,1]$ y el $[54,2]$, que tienen estructura algebraica D_{27} y C_{54} respectivamente. Ambos tienen género imaginario 1, por lo que se clasifican en [29] por Tucker.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [54,3], que tiene estructura algebraica $C_3 \times D_9$. El género imaginario de este grupo es 17, así que en el Capítulo 1 encontramos un estudio del mismo.

⇒ El siguiente grupo es el [54,4], cuya estructura algebraica es $C_9 \times D_3$. Este grupo tiene género imaginario 17, así que tenemos su estudio en el Capítulo 1.

⇒ Ahora tenemos el grupo [54,5], con estructura algebraica $((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$. El género imaginario de este grupo es 11, así que en el Capítulo 1 tenemos un estudio del mismo.

⇒ El siguiente grupo es el [54,6], cuya estructura algebraica es $(C_9 \times C_3) \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 17, por lo que en el Capítulo 1 tenemos su estudio.

⇒ Estudiemos el grupo [54,7], que tiene estructura algebraica $(C_9 \times C_3) \rtimes C_2$. El género imaginario de este grupo es 17, así que en el Capítulo 1 tenemos su estudio.

⇒ El siguiente grupo es el [54,8], cuya estructura algebraica es $((C_3 \times C_3) \rtimes C_3) \rtimes C_2$. Este grupo tiene género imaginario 11, por lo que tenemos el estudio en el Capítulo 1.

⇒ Ahora tenemos el grupo [54,9], con estructura algebraica $C_{18} \times C_3$. El género imaginario de este grupo es 35 y es clasificado por Gromadzki en [15] pero no se da el epimorfismo explícitamente. Tenemos que una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^{18} = Y^3 = 1$ y ambos conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [3,18]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^9$$

Tomemos los elementos x_1 y x_2 tales que sus imágenes son los generadores Y, X respectivamente. Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación y por tanto hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{11}{18}$.

⇒ El siguiente grupo es el [54,10], cuya estructura algebraica es $C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3)$. Este grupo tiene género imaginario 29. Este grupo tiene una presentación dada por generadores A, B, C, Z tales que $A^3 = B^3 = C^3 = Z^2 = 1, BA = ABC$ y Z conmuta con el resto de generadores. Hemos tomado aquí Z como generador del grupo C_2 y luego tomamos una presentación de $(C_3 \times C_3) \rtimes C_3$ tomada de GAP. Para el grupo NEC $(0; +; [3,6]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(x_2) = BZ, \quad \theta(e_1) = ZB^{-1}A^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = Z$$

Tomemos los elementos x_1, x_2^3, x_2^4 y $x_2^2 x_1^{-1} x_2^4 x_1$ que tienen como imagen los generadores A, Z, B y C respectivamente. Así hemos generado el grupo como imagen de

elementos que preservan la orientación y hemos probado que el epimorfismo actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [54,11], que tiene estructura algebraica $C_2 \times (C_9 \rtimes C_3)$. El género imaginario de este grupo es 35. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B, Z tales que $A^3 = B^9 = Z^2 = 1$, $BA = AB^4$ y Z conmuta con los otros generadores. Hemos tomado aquí Z como generador de C_2 y luego una presentación de $C_9 \rtimes C_3$ tomada de [12]. Para el grupo NEC $(0; +; [3,18]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(x_2) = BZ, \quad \theta(e_1) = ZB^{-1}A^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = Z$$

Tenemos que $\theta(x_1) = A$, que $\theta(x_2^9) = Z$ y que $\theta(x_2^{10}) = B$. Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{11}{18}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [54,12], cuya estructura algebraica es $C_3 \times C_3 \times D_3$. Este grupo tiene género imaginario 29. En este caso tomemos que $D_3 \approx S_3$, y así tenemos que una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^3 = Y^3 = 1$ pertenecientes a los C_3 y las permutaciones $(1\ 2)$ y $(1\ 2\ 3)$ que generan S_3 ; y X, Y todos conmutan con ellas y entre sí. Para el grupo NEC $(0; +; [3,6]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X(1\ 2\ 3), \quad \theta(x_2) = Y(1\ 2), \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y^{-1}(2\ 3), \quad \theta(c_{1,0}) = (2\ 3)$$

Tomemos primeramente los elementos x_2^3 y $(x_1x_2^3)^2x_1$ tienen como imágenes las permutaciones $(1\ 2)$ y $(1\ 2\ 3)$ respectivamente, que generan todo S_3 . Por otro lado tomemos los elementos x_2^4 y $(x_1x_2^3)^4$ que tienen como imagen los generadores Y y X . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación y por tanto hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos que estudiar el grupo [54,13], que tiene estructura algebraica $C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$. El género imaginario de este grupo es 29. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z y A tales que cumplen las relaciones $X^3 = Y^3 = Z^2 = A^3 = 1$, $XY = YX$, $ZXZ^{-1} = X^2$, $ZYZ^{-1} = Y^2$ y A conmuta con el resto de generadores. Hemos tomado aquí A como generador de C_3 y una presentación de $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ tomada de [12]. Tenemos dos grupos NEC, por lo que:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [6]; \{(3,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = AZ, \quad \theta(e_1) = ZA^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = ZX, \quad \theta(c_{1,1}) = ZY, \quad \theta(c_{1,2}) = ZX^{-1}$$

Tenemos que $x_1^3, x_1^4, c_{1,0}c_{1,2}$ y $c_{1,0}c_{1,2}c_{1,0}c_{1,1}$ tienen como imagen los generadores Z, A, X e Y respectivamente. Ya tenemos entonces generado el grupo, además estos elementos preservan la orientación, luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Z, \quad \theta(x_2) = AX, \quad \theta(e_1) = X^{-1}A^{-1}Z, \quad \theta(c_{1,0}) = YXZ, \quad \theta(c_{1,1}) = ZY$$

Tenemos que $\theta(x_1) = Z$, que $\theta(x_1c_{1,1}) = Y$, que $\theta((x_1c_{1,1})^2c_{1,0}c_{1,1}(x_1c_{1,1})^2) = X$ y que $\theta(x_2((x_1c_{1,1})^2c_{1,0}c_{1,1}(x_1c_{1,1})^2)^2) = A$. Así tenemos todos los generadores en la imagen. Por otra parte tenemos que el elemento $(x_1c_{1,1})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [54,14], cuya estructura algebraica es $(C_3 \times C_3 \times C_3) \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 29. Una presentación de este grupo, que podemos encontrar en GAP, viene dada por generadores a, b, c, d tales que $a^2 = b^3 = c^3 = d^3 = 1, ba = ab^2, ca = ac^2, da = ad^2$ y b, c, d conmutan entre sí. Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(3,3,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(e_1) = a, \quad \theta(c_{1,0}) = ba, \quad \theta(c_{1,1}) = ac, \quad \theta(c_{1,2}) = ad, \quad \theta(c_{1,3}) = b^{-1}a$$

Tomemos los elementos $x_1, c_{1,0}x_1, x_1c_{1,1}$ y $x_1c_{1,2}$ que tienen como imagen los generadores a, b, c y d respectivamente. Ahora por otra parte tomemos el elemento $(x_1c_{1,1})^3$ que tiene como imagen el elemento neutro, y además es no orientable. Por tanto hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El último grupo que estudiamos es el grupo [54,15], con estructura algebraica es $C_6 \times C_3 \times C_3$. El género imaginario de este grupo es 65 y es estudiado por Gromadzki en [15] pero sin que aparezca el epimorfismo explícitamente. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que $X^6 = Y^3 = Z^3 = 1$ y conmutan todos ellos. Para el grupo NEC $(0; +; [3,3,6]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = Z, \quad \theta(x_3) = X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Z^{-1}Y^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = X^3$$

Es claro que los elementos x_3, x_1 y x_2 tienen como imagen los generadores X, Y y Z , y los tres elementos preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{7}{6}$.

Grupos de orden 55

Tenemos dos grupos de orden 55, por lo que:

⇒ El primer grupo que tenemos es el [55,1], cuya estructura algebraica es $C_{11} \times C_5$. El género imaginario de este grupo es 35. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^5 = b^{11} = 1$ y $ba = ab^4$, la cual encontramos en GAP. Para el grupo NEC (1; -; [5,5]; {-}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^5$$

Es claro que las imágenes de los elementos x_1 y x_1x_2 generan todo el grupo y preservan la orientación, luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{5}$.

⇒ El segundo grupo es el [55,2] que tiene estructura algebraica C_{55} . Este grupo tiene género imaginario 1, por lo que se clasifica en [29] por Tucker.

Grupos de orden 56

Hay 13 grupos distintos de orden 56, por lo que tenemos que:

⇒ El primer grupo que tenemos es el [56,1], que tiene estructura algebraica $C_7 \times C_8$. Este grupo tiene género imaginario 43. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^8 = b^7 = 1$ y $ba = ab^6$, que podemos encontrar en GAP. Para el grupo NEC (0; +; [7,8]; {-}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^4$$

Tomemos los elementos x_1 y x_2 que tienen como imagen los generadores b y a respectivamente. Hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación y por tanto hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{41}{56}$.

⇒ El siguiente grupo es el [56,2], cuya estructura algebraica es C_{56} . Este grupo tiene género imaginario 1 por lo que en [29] podemos encontrar su clasificación por Tucker.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [56,3], con estructura algebraica $C_7 \times Q$. El género imaginario de este grupo es 30. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, c tales que $a^4 = b^4 = c^7 = 1, b^2 = a^2, ba = ab^3, bc = cb$ y $ca = ac^6$, la cual encontramos en GAP. Para el grupo NEC (0; +; [4,4]; {-}) tenemos que el epimorfismo

asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c^{-1}a, \quad \theta(x_2) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(e_1) = bc, \quad \theta(c_{1,0}) = b^2$$

Tenemos que $\theta(e_1^8) = c$, que $\theta(e_1^{21}) = b$ y que $\theta(e_1^8 x_1) = a$. Todos los elementos preservan la orientación, luego hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación, y por tanto hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [56,4], cuya estructura algebraica es $C_4 \times D_7$. Este grupo tiene género imaginario 16, por lo que en el Capítulo 1 encontramos su estudio.

\Rightarrow Tenemos ahora el grupo [56,5], que tiene estructura algebraica D_{28} . El género imaginario de este grupo es 1, [29].

\Rightarrow El siguiente grupo es el [56,6], cuya estructura algebraica es $C_2 \times (C_7 \times C_4)$. Este grupo tiene género imaginario 30. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, a, b tales que $X^2 = a^4 = b^7 = 1, ba = ab^6$ y X conmuta con los otros generadores. Hemos tomado aquí X como generador de C_2 y una luego una presentación de $C_7 \times C_4$ tomada de GAP. Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(x_2) = aX, \quad \theta(e_1) = bX, \quad \theta(c_{1,0}) = X$$

Tenemos que $c_{1,0}$ va al generador X , que $x_2 c_{1,0}$ va al generador a y que $e_1 c_{1,0}$ va al generador b . Por otra parte tenemos que el elemento $e_1^7 c_{1,0}$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [56,7], con estructura algebraica $(C_{14} \times C_2) \times C_2$. El género imaginario de este grupo es 16, por lo que en el Capítulo 1 se estudia.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [56,8], cuya estructura algebraica es $C_{28} \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 2, [29].

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [56,9], que tiene estructura algebraica $C_7 \times D_4$. El género imaginario de este grupo es 16, por lo que se puede encontrar su estudio en el Capítulo 1.

\Rightarrow El siguiente grupo es el [56,10], cuya estructura algebraica es $C_7 \times Q$. Este grupo tiene género imaginario 42. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, A, B tales que $X^7 = A^4 = B^4 = 1, B^2 = A^2, BA = AB^3$ y X conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [4,28]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B^{-1}A^{-1}, \quad \theta(x_2) = AX, \quad \theta(e_1) = X^{-1}B, \quad \theta(c_{1,0}) = A^2$$

Tenemos que x_2^8, x_2^{21} y que e_1^{21} tienen como imagen los generadores X, A y B respectivamente. Hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación, luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5}{7}$.

⇒ Ahora estudiamos el siguiente grupo que es el [56,11], que tiene estructura algebraica $(C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_7$. Este grupo tiene género imaginario 8, por lo que se estudia en [2].

⇒ El siguiente es el [56,12], cuya estructura algebraica es $C_2 \times C_2 \times D_7 \approx C_2 \times D_{14}$. El género imaginario de este grupo es 2, por lo que Tucker lo clasifica en [29].

⇒ El último grupo es el [56,13], con estructura algebraica $C_{14} \times C_2 \times C_2$. Este grupo tiene género imaginario 30 y es estudiado por Gromadzki en [15] pero no se da el epimorfismo explícito. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y, Z tales que $X^{14} = Y^2 = Z^2 = 1$, tales que conmutan entre ellos. Tenemos dos grupos NEC luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = YZ, \quad \theta(c_{1,1}) = Z, \quad \theta(c_{1,2}) = YZ, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Tenemos que e_1 tiene como imagen el generador X , que $c_{1,0}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador Y y que $c_{2,0}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador Z . Así tenemos los generadores como imágenes de elementos que preservan la orientación, y por tanto es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(-), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(e_1) = X, \quad \theta(e_2) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = YZ, \quad \theta(c_{2,0}) = Y$$

Es claro que los elementos x_1, e_1 y $c_{2,0}c_{1,0}$ tienen como imagen los generadores Y, X y Z respectivamente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

Grupos de orden 57

Tenemos dos grupos de orden 57, así que:

⇒ El primer grupo es el [57,1], cuya estructura algebraica es $C_{19} \rtimes C_3$. El género imaginario de este grupo es 21. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b tales que $a^3 = b^{19} = 1$ y $ba = ab^7$, que podemos encontrar en GAP. Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^9$$

Es claro que las imágenes de los elementos x_1 y x_1x_2 generan todo el grupo y preservan la orientación, luego es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ El segundo grupo que tenemos es [57,2], que tiene estructura algebraica C_{57} . Este grupo cíclico tiene género imaginario 1, por lo que su clasificación se encuentra en [29] por Tucker.

Grupos de orden 58

Hay dos grupos de orden 58, los correspondientes a [58,1] y [58,2] cuyas estructuras algebraicas son D_{29} y C_{58} respectivamente. Ambos grupos tienen género imaginario 1, luego podemos encontrar su estudio y clasificación en [29] por Tucker.

Grupos de orden 59

En este apartado solo encontramos un grupo de orden 59, el correspondiente al grupo cíclico C_{59} . Este grupo tiene género imaginario 1, por lo que está clasificado por Tucker en [29].

Grupos de orden 60

Tenemos 13 grupos distintos de orden 60, así que haremos un estudio en detalle de cada uno de ellos:

⇒ El primer grupo que tenemos que estudiar es el [60,1], que tiene estructura algebraica $C_5 \times DC_3$. Este grupo tiene género imaginario 39 y está estudiado en profundidad en [11]. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, X tales que $a^4 = b^3 = X^5 = 1$, $ba = ab^2$ y X conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(0; +; [3,20]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = b, \quad \theta(x_2) = aX, \quad \theta(e_1) = X^{-1}a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Tenemos que x_2^{16} va al generador X , que x_2^5 va al generador a y que x_1 va al generador b . Todos son elementos que preservan la orientación. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{37}{60}$.

⇒ El siguiente grupo es el $[60,2]$, cuya estructura algebraica es $C_3 \times (C_5 \times C_4)$. El género imaginario de este grupo es 42. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, X tales que $a^4 = b^5 = X^3 = 1, ba = ab^4$ y X conmuta con los otros generadores. Hemos tomado aquí X como generador de C_3 y una presentación de $C_5 \times C_4$ tomada de GAP. Tenemos dos grupos NEC para este grupo así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4,12]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ba, \quad \theta(x_2) = a^{-1}X, \quad \theta(e_1) = X^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^2$$

Tenemos que los elementos $x_2^4, x_2^3, x_2^4e_1$ van a los generadores X, a y b^{-1} respectivamente. Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{2}{3}$.

- ii) Para el grupo NEC $(1; -; [4,12]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ba, \quad \theta(x_2) = a^{-1}X, \quad \theta(d_1) = b^2X$$

Tenemos que los elementos $x_2^4, x_2^3, x_1x_2^9$ van a los generadores X, a y b respectivamente. Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{2}{3}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo $[60,3]$, con estructura algebraica $C_{15} \times C_4$. Este grupo tiene género imaginario 32. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B tales que $A^4 = B^{15} = A^{-1}B^{-1}AB^{-1} = 1$, que podemos encontrar en GAP. Tenemos dos grupos NEC para este grupo así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = A, \quad \theta(x_2) = A^{-1}B^{-1}, \quad \theta(e_1) = B, \quad \theta(c_{1,0}) = A^2$$

Tenemos que los elementos x_1 y e_1 van a los generadores A y B respectivamente. Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

ii) Para el grupo NEC $(1; -; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = BA^{-1}, \quad \theta(x_2) = A, \quad \theta(d_1) = B^7$$

Tenemos que los elementos x_2 y x_1x_2 van a los generadores A y B respectivamente. Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[60,4]$, cuya estructura algebraica es C_{60} . El género imaginario de este grupo es 1, por lo que podemos encontrar en [29] su clasificación por Tucker.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo $[60,5]$, que tiene estructura algebraica A_5 . Este grupo es estudiado en [29] por Tucker ya que tiene género imaginario 1.

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[60,6]$, cuya estructura algebraica es $C_3 \times (C_5 \rtimes C_4)$. El género imaginario de este grupo es 21. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, A, B tales que $X^3 = A^4 = B^5 = 1, BA = AB^2$ y X conmuta con los otros generadores. Hemos tomado aquí X como generador de C_3 y una presentación de $C_5 \rtimes C_4$ tomada de GAP. Para el grupo NEC $(0; +; [12]; \{(5)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XA, \quad \theta(e_1) = A^{-1}X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = B^3A^2, \quad \theta(c_{1,1}) = B^{-1}A^2$$

Tenemos que los elementos $c_{1,0}c_{1,1}, x_1^4, x_1^9$ tienen como imagen los generadores B^{-1}, X y A respectivamente. Hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable al haber generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{19}{60}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[60,7]$, cuya estructura algebraica es $C_{15} \rtimes C_4$. Este grupo tiene género imaginario 32. Una presentación de este grupo viene dada por generadores A, B tales que $A^4 = B^6 = A^{-1}B^{-2}AB^{-2} = AB^{-1}A^{-2}B^{-1}A^{-1}B = 1$, que encontramos en GAP. Tenemos dos grupos NEC para este grupo así que:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B^2A^{-1}, \quad \theta(x_2) = A, \quad \theta(e_1) = B^4, \quad \theta(c_{1,0}) = B^3$$

Tenemos que el elemento x_2 va al generador A . Por otra parte tenemos que de una relación sabemos que $B = ABA^2BA^{-1}$, así tenemos que el elemento $x_2e_1c_{1,0}x_2^2e_1c_{1,0}x_2^3$ va al generador B . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

- ii) Para el grupo NEC $(1; -; [4,4]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = B^4 A^{-1}, \quad \theta(x_2) = A, \quad \theta(d_1) = B$$

Tenemos que el elemento x_2 va al generador A . Por otra parte tenemos, sabiendo la relación descrita en el apartado anterior, que $x_2 d_1 x_2^2 d_1 x_2^3$ va al generador B . Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo $[60,8]$, con estructura algebraica $D_3 \times D_5$. El género imaginario de este grupo es 9, por lo que encontramos su estudio en [2].

\Rightarrow El siguiente grupo es el $[60,9]$, cuya estructura algebraica es $C_5 \times A_4$. Este grupo tiene género imaginario 13, así que en el Capítulo 1 encontramos su estudio.

\Rightarrow El siguiente grupo que nos toca estudiar es el $[60,10]$, cuya estructura algebraica es $C_3 \times D_{10} \approx C_6 \times D_5$. El género imaginario de este grupo es 22. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X de orden 3 o 6 correspondiente a C_3 ó C_6 y generadores Y, Z de orden 2 cuyo producto tiene orden 10 ó 5, correspondientes a D_{10} ó D_5 . Este grupo se estudia en [9]. Tenemos dos grupos NEC para este grupo así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [6]; \{(2,2)\})$, no aparece el epimorfismo en [9], utilizaremos la estructura algebraica dada por $C_6 \times D_5$, y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XZ, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Z, \quad \theta(c_{1,0}) = ZYZ, \quad \theta(c_{1,1}) = X^3, \quad \theta(c_{1,2}) = Y$$

Tenemos que $\theta((x_1 c_{1,0})^6)$ es el elemento YZ . Por tanto tenemos que $c_{1,2}(x_1 c_{1,0})^6$ tiene como imagen el generador Z , y el elemento $c_{1,2}$ tiene como imagen el generador Y . Por otra parte tenemos que el elemento $(x_1 c_{1,0})^5$ tiene como imagen el generador X^{-1} . Así hemos generado todo el grupo. Además tenemos que el elemento $(x_1 c_{1,0})^{15} c_{1,1}$ tiene como imagen el elemento neutro. Así hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,6]; \{(-)\})$, aparece en [9] el epimorfismo explícitamente utilizando la estructura algebraica $C_3 \times D_{10}$, y es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = XYZY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}YZ, \quad \theta(c_{1,0}) = (YZ)^5$$

Tenemos que los elementos x_2^4, x_1 y $x_2^4 x_1 e_1$ van a los generadores X, Y y Z respectivamente. Estos elementos preservan la orientación claramente. Así hemos

demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ El siguiente grupo es el [60,11], cuya estructura algebraica es $C_5 \times D_6$. Este grupo tiene género imaginario 22. El grupo se estudia en profundidad en [9]. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X de orden 5 correspondiente a C_5 y generadores Y, Z de orden 2 cuyo producto tiene orden 6, correspondientes a D_6 . Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(3), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = XYZY, \quad \theta(e_2) = X^{-1}YZY, \quad \theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = (YZ)^2Y, \quad \theta(c_{2,0}) = YZY$$

Así tenemos que los elementos $e_1^6, (e_1c_{2,0}c_{1,0})^5, (e_1c_{2,0}c_{1,0})^5e_1^5(e_1c_{2,0}c_{1,0})^5$ tienen como imagen los generadores X, Y y Z respectivamente. Todos los elementos preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ Estudiemos el grupo [60,12], con estructura algebraica D_{30} . Este grupo tiene género imaginario 1, por lo que lo clasifica Tucker en [29].

⇒ El último grupo es el [60,13], cuya estructura algebraica es $C_{30} \times C_2$. Tenemos que este grupo tiene género imaginario 2, por lo que en [29] es clasificado por Tucker.

Grupos de orden 61

Tan solo hay un grupo de orden 61, cuya estructura algebraica es C_{61} . El grupo cíclico de orden 61 tiene género imaginario 1, [29].

Grupos de orden 62

Hay dos grupos de orden 62, los correspondientes a [62,1] y [62,2] cuyas estructuras algebraicas son D_{31} y C_{62} respectivamente. Ambos grupos tienen género imaginario 1, luego podemos encontrar su estudio y clasificación en [29] por Tucker.

Grupos de orden 63

En este último apartado tenemos que hay 4 grupos distintos de orden 63:

⇒ El primer grupo que tenemos es el [63,1], que tiene estructura algebraica $C_7 \times C_9$. Este grupo tiene género imaginario 49. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^7 = Y^9 = 1$ y $Y^{-1}XY = X^2$, que hemos sacado de [19]. Para el grupo NEC $(1; -; [7,9]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = X, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(d_1) = (XY)^4$$

Tenemos que los elementos x_1 y x_2 tienen como imagen los generadores X e Y respectivamente, por lo que tenemos el grupo generado como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{47}{63}$.

⇒ El segundo grupo es el [63,2], cuya estructura algebraica es C_{63} . El género imaginario de este grupo es 1, por lo que Tucker lo clasifico en [29].

⇒ El tercer grupo es el [63,3], con estructura algebraica $C_3 \times (C_7 \times C_3)$. Este grupo tiene género imaginario 23. Una presentación de este grupo viene dada por generadores a, b, X tales que $a^3 = b^7 = X^3 = 1$, $ba = ab^2$ y X conmuta con los otros generadores. Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ba, \quad \theta(x_2) = a^{-1}X, \quad \theta(d_1) = b^3X$$

Tomemos los elementos $(x_1x_2)^7, (x_1x_2)^{15}$ y $x_2(x_1x_2)^{14}$ que tienen como imagen los generadores X, b y a^{-1} respectivamente. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ El último grupo es el [63,4], que tiene estructura algebraica $C_{21} \times C_3$. El género imaginario de este grupo es 41 y es estudiado en profundidad en [8]. Una presentación de este grupo viene dada por generadores X, Y tales que $X^{21} = Y^3 = 1$ y conmutan entre ellos. Para el grupo NEC $(1; -; [3,21]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = X, \quad \theta(d_1) = YX^{10}$$

Es claro que $\theta(x_1) = Y$ y que $\theta(x_2) = X$ y por tanto el grupo está generado como imágenes de elementos que preservan la orientación. Hemos visto que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{13}{21}$.

Por tanto podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.1:

En las siguientes tablas se muestran los grupos de orden 32 a 63, dando su nomenclatura GAP, su estructura algebraica, su género imaginario, la referencia y la página donde se encuentra su estudio:

Grupos de orden 32:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[32,1]	C_{32}	1	Tucker [29]	61
[32,2]	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_4$	18	Este trabajo	61
[32,3]	$C_8 \times C_4$	22	Gromadzki [15] y Este trabajo	61
[32,4]	$C_8 \rtimes C_4$	22	Este trabajo	61
[32,5]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	10	Este trabajo	62 y 11
[32,6]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	10	Este trabajo	62 y 12
[32,7]	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2$	10	Este trabajo	62 y 12
[32,8]	$(C_2 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)$	22	Este trabajo	62
[32,9]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	10	Este trabajo	62 y 13
[32,10]	$Q \rtimes C_4$	18	Este trabajo	62
[32,11]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	10	Este trabajo	62 y 13
[32,12]	$C_4 \times C_8$	22	Este trabajo	62
[32,13]	$C_8 \times C_4$	18	Este trabajo	63
[32,14]	$C_8 \rtimes C_4$	18	Este trabajo	63
[32,15]	$C_4 \cdot (C_4 \times C_2)$	26	Este trabajo	63
[32,16]	$C_{16} \times C_2$	2	Tucker [29]	64
[32,17]	$C_{16} \rtimes C_2$	10	Este trabajo	64 y 14
[32,18]	D_{16}	1	Tucker [29]	64
[32,19]	QD_{32}	10	Este trabajo	64 y 14
[32,20]	DC_8	18	May [19] y Este trabajo	64
[32,21]	$C_4 \times C_4 \times C_2$	26	Gromadzki [15] y Este trabajo	64
[32,22]	$C_2 \times ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2)$	18	Este trabajo	64
[32,23]	$C_2 \times (C_4 \rtimes C_4)$	26	Este trabajo	65
[32,24]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	26	Este trabajo	66
[32,25]	$C_4 \times D_4$	18	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	66
[32,26]	$C_4 \times Q$	42	Este trabajo	67
[32,27]	$(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$	6	A. Bacelo [2]	67
[32,28]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$	10	Este trabajo	67 y 15
[32,29]	$(C_2 \times Q) \rtimes C_2$	26	Este trabajo	67
[32,30]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$	18	Este trabajo	67
[32,31]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	22	Este trabajo	68

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[32,32]	$(C_2 \times C_2).(C_2 \times C_2 \times C_2)$	42	Este trabajo	68
[32,33]	$(C_4 \times C_4) \times C_2$	34	Este trabajo	69
[32,34]	$(C_4 \times C_4) \times C_2$	10	Este trabajo	70 y 15
[32,35]	$C_4 \rtimes Q$	42	Este trabajo	70
[32,36]	$C_8 \times C_2 \times C_2$	18	Gromadzki [15] y Este trabajo	70
[32,37]	$C_2 \times (C_8 \times C_2)$	18	Este trabajo	71
[32,38]	$(C_8 \times C_2) \times C_2$	18	Este trabajo	71
[32,39]	$C_2 \times D_8$	2	Tucker [29]	72
[32,40]	$C_2 \times QD_8$	18	Este trabajo	72
[32,41]	$C_2 \times DC_4$	26	Este trabajo	73
[32,42]	$(C_8 \times C_2) \times C_2$	10	Este trabajo	73 y 15
[32,43]	$(C_2 \times D_4) \times C_2$	6	A. Bacelo [2]	73
[32,44]	$(C_2 \times Q) \times C_2$	18	Este trabajo	73
[32,45]	$C_4 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	26	Gromadzki [15] y Este trabajo	74
[32,46]	$D_2 \times D_4$	10	Etayo, Martínez [10]	75 y 15
[32,47]	$C_2 \times C_2 \times Q$	34	Este trabajo	75
[32,48]	$C_2 \times ((C_4 \times C_2) \times C_2)$	14	Este trabajo	75 y 34
[32,49]	$(C_2 \times D_4) \times C_2$	10	Este trabajo	75 y 16
[32,50]	$(C_2 \times Q) \times C_2$	22	Este trabajo	75
[32,51]	$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	18	Gromadzki [15] y Este trabajo	76

Grupos de orden 33:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[33,1]	C_{33}	1	Tucker [29]	76

Grupos de orden 34:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[34,1]	D_{17}	1	Tucker [29]	76
[34,2]	C_{34}	1	Tucker [29]	76

Grupos de orden 35:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[35,1]	C_{35}	1	Tucker [29]	76

Grupos de orden 36:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[36,1]	DC_9	20	May [19] y Este trabajo	77
[36,2]	C_{36}	1	Tucker [29]	77
[36,3]	$(C_2 \times C_2) \rtimes C_9$	7	A. Bacelo [2]	77
[36,4]	D_{18}	1	Tucker [29]	77
[36,5]	$C_{18} \times C_2$	2	Tucker [29]	77
[36,6]	$C_3 \times DC_3$	17	Este trabajo	77 y 50
[36,7]	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_4$	41	Este trabajo	77
[36,8]	$C_{12} \times C_3$	23	Gromadzki [15] y Este trabajo	78
[36,9]	$(4, 4 2, 3)$	5	Bujalance, Etayo, Martínez [4]	78
[36,10]	$D_3 \times D_3$	5	Etayo, Martínez [10] y Este trabajo	78
[36,11]	$C_3 \times A_4$	14	Etayo, Martínez [11] y Este trabajo	78 y 34
[36,12]	$C_6 \times D_3$	14	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	79 y 34
[36,13]	$C_2 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_2)$	11	Este trabajo	79 y 23
[36,14]	$C_6 \times C_6$	26	Gromadzki [15] y Este trabajo	79

Grupos de orden 37:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[37,1]	C_{37}	1	Tucker [29]	79

Grupos de orden 38:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[38,1]	D_{19}	1	Tucker [29]	79
[38,2]	C_{38}	1	Tucker [29]	79

Grupos de orden 39:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[39,1]	$C_{13} \times C_3$	15	Este trabajo	80 y 43
[39,2]	C_{39}	1	Tucker [29]	80

Grupos de orden 40:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[40,1]	$C_5 \times C_8$	29	Este trabajo	80
[40,2]	C_{40}	1	Tucker [29]	80
[40,3]	$C_5 \times C_8$	27	Este trabajo	80
[40,4]	DC_{10}	22	May [19] y Este trabajo	80
[40,5]	$C_4 \times D_5$	12	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	81 y 26
[40,6]	D_{20}	1	Tucker [29]	81
[40,7]	$C_2 \times (C_5 \times C_4)$	22	Este trabajo	81
[40,8]	$(C_{10} \times C_2) \times C_2$	12	Este trabajo	81 y 26
[40,9]	$C_{20} \times C_2$	2	Tucker [29]	81
[40,10]	$C_5 \times D_4$	12	Etayo, Martínez [9]	81 y 28
[40,11]	$C_5 \times Q$	30	Este trabajo	81
[40,12]	$C_2 \times (C_5 \times C_4)$	12	Este trabajo	82 y 28
[40,13]	$C_2 \times D_{10}$	2	Tucker [29]	82
[40,14]	$C_{10} \times C_2 \times C_2$	22	Gromadzki [15] y Este trabajo	82

Grupos de orden 41:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[41,1]	C_{41}	1	Tucker [29]	82

Grupos de orden 42:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[42,1]	$(C_7 \times C_3) \times C_2$	9	A. Bacelo [2]	83
[42,2]	$C_2 \times (C_7 \times C_3)$	23	Este trabajo	83
[42,3]	$C_7 \times D_3$	13	Etayo, Martínez [9]	83 y 29
[42,4]	$C_3 \times D_7$	13	Etayo, Martínez [9]	83 y 30
[42,5]	D_{21}	1	Tucker [29]	83
[42,6]	C_{42}	1	Tucker [29]	83

Grupos de orden 43:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[43,1]	C_{43}	1	Tucker [29]	83

Grupos de orden 44:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[44,1]	DC_{11}	24	May [19] y Este trabajo	84
[44,2]	C_{44}	1	Tucker [29]	84
[44,3]	D_{22}	1	Tucker [29]	84
[44,4]	$C_{22} \times C_2$	2	Tucker [29]	84

Grupos de orden 45:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[45,1]	C_{45}	1	Tucker [29]	85
[45,2]	$C_{15} \times C_3$	29	Etayo [8]	85

Grupos de orden 46:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[46,1]	D_{23}	1	Tucker [29]	85
[46,2]	C_{46}	1	Tucker [29]	85

Grupos de orden 47:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[47,1]	C_{47}	1	Tucker [29]	85

Grupos de orden 48:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[48,1]	$C_3 \times C_{16}$	31	Este trabajo	85
[48,2]	C_{48}	1	Tucker [29]	86
[48,3]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_3$	18	Este trabajo	86
[48,4]	$C_8 \times D_3$	18	Etayo, Martínez [9]	86
[48,5]	$C_{24} \times C_2$	20	Este trabajo	87
[48,6]	$C_{24} \times C_2$	14	Este trabajo	87 y 35
[48,7]	D_{24}	1	Tucker [29]	87
[48,8]	DC_{12}	26	May [19] y Este trabajo	87
[48,9]	$C_2 \times (C_3 \times C_8)$	34	Este trabajo	88
[48,10]	$(C_3 \times C_8) \rtimes C_2$	36	Este trabajo	88
[48,11]	$C_4 \times DC_3$	26	Etayo, Martínez [11]	88
[48,12]	$DC_3 \times C_4$	26	Este trabajo	89
[48,13]	$C_{12} \times C_4$	26	Este trabajo	89
[48,14]	$(C_{12} \times C_2) \rtimes C_2$	14	Este trabajo	89 y 36
[48,15]	$(C_3 \times D_4) \rtimes C_2$	15	Este trabajo	89 y 43
[48,16]	$\langle -2, 2, 3 \rangle \rtimes C_2$	30	Este trabajo	89
[48,17]	$(C_3 \times Q) \rtimes C_2$	20	Este trabajo	90
[48,18]	$C_3 \times DC_4$	32	Este trabajo	90
[48,19]	$(C_2 \times DC_3) \rtimes C_2$	26	Este trabajo	91
[48,20]	$C_{12} \times C_4$	34	Gromadzki [15] y Este trabajo	91
[48,21]	$C_3 \times (4, 4 2, 2)$	14	Este trabajo	91 y 37
[48,22]	$C_3 \times (C_4 \times C_4)$	34	Este trabajo	91
[48,23]	$C_{24} \times C_2$	2	Tucker [29]	92
[48,24]	$C_3 \times (C_8 \times C_2)$	14	Este trabajo	92 y 37
[48,25]	$C_3 \times D_8$	18	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	92

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[48,26]	$C_3 \times QD_8$	20	Este trabajo	92
[48,27]	$C_3 \times DC_4$	34	Este trabajo	93
[48,28]	$SL(2,3).C_2$	22	Este trabajo	93
[48,29]	$GL(2,3)$	10	Este trabajo	93 y 16
[48,30]	$A_4 \times C_4$	22	Este trabajo	93
[48,31]	$C_4 \times A_4$	10	Etayo, Martínez [11]	94 y 17
[48,32]	$C_2 \times \langle 2,3,3 \rangle$	22	Este trabajo	94
[48,33]	$SL(2,3) \times C_2$	10	Este trabajo	94 y 17
[48,34]	$C_2 \times DC_6$	38	Este trabajo	94
[48,35]	$C_4 \times D_6$	26	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	94
[48,36]	$C_2 \times D_{12}$	2	Tucker [29]	95
[48,37]	$(C_{12} \times C_2) \times C_2$	14	Este trabajo	95 y 37
[48,38]	$D_4 \times S_3$	8	A. Bacelo [2]	95
[48,39]	$(C_2 \times DC_3) \times C_2$	26	Este trabajo	95
[48,40]	$Q \times D_3$	38	Este trabajo	99
[48,41]	$(C_4 \times D_3) \times C_2$	18	Este trabajo	96
[48,42]	$C_2 \times C_2 \times DC_3$	38	Este trabajo	97
[48,43]	$C_2 \times ((C_6 \times C_2) \times C_2)$	14	Este trabajo	97 y 37
[48,44]	$C_{12} \times C_2 \times C_2$	26	Gromadzki [15] y Este trabajo	97
[48,45]	$C_6 \times D_4$	26	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	98
[48,46]	$C_6 \times Q$	38	Este trabajo	98
[48,47]	$C_3 \times ((C_4 \times C_2) \times C_2)$	26	Este trabajo	99
[48,48]	$C_2 \times S_4$	4	Bujalance, Etayo, Martínez [4]	99
[48,49]	$C_2 \times C_2 \times A_4$	14	Este trabajo	99 y 38
[48,50]	$(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \times C_3$	10	Este trabajo	99 y 18
[48,51]	$D_2 \times D_6$	14	Etayo, Martínez [10]	99 y 38
[48,52]	$C_6 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	38	Gromadzki [15] y Este trabajo	100

Grupos de orden 49:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[49,1]	C_{49}	1	Tucker [29]	100
[49,2]	$C_7 \times C_7$	37	Etayo [8]	100

Grupos de orden 50:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[50,1]	D_{25}	1	Tucker [29]	101
[50,2]	C_{50}	1	Tucker [29]	101
[50,3]	$C_5 \times D_5$	17	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	101 y 50
[50,4]	$(C_5 \times C_5) \times C_2$	17	Este trabajo	101 y 51
[50,5]	$C_5 \times C_{10}$	37	Gromadzki [15] y Este trabajo	101

Grupos de orden 51:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[51,1]	C_{51}	1	Tucker [29]	101

Grupos de orden 52:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[52,1]	DC_{13}	28	May [19] y Este trabajo	101
[52,2]	C_{52}	1	Tucker [29]	102
[52,3]	$C_{13} \times C_4$	13	Este trabajo	102 y 30
[52,4]	D_{26}	1	Tucker [29]	102
[52,5]	$C_{26} \times C_2$	2	Tucker [29]	102

Grupos de orden 53:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[53,1]	C_{53}	1	Tucker [29]	102

Grupos de orden 54:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[54,1]	D_{27}	1	Tucker [29]	102
[54,2]	C_{54}	1	Tucker [29]	102
[54,3]	$C_3 \times D_9$	17	Etayo, Martínez [9]	103 y 51
[54,4]	$C_9 \times D_3$	17	Etayo, Martínez [9]	103 y 51
[54,5]	$(C_3 \times C_3) \times C_3 \times C_2$	11	Este trabajo	103 y 23
[54,6]	$(C_9 \times C_3) \times C_2$	17	Este trabajo	103 y 52
[54,7]	$(C_9 \times C_3) \times C_2$	17	Este trabajo	103 y 52
[54,8]	$((C_3 \times C_3) \times C_3) \times C_2$	11	Este trabajo	103 y 23
[54,9]	$C_{18} \times C_3$	35	Gromadzki [15] y Este trabajo	103
[54,10]	$C_2 \times ((C_3 \times C_3) \times C_3)$	29	Este trabajo	103
[54,11]	$C_2 \times (C_9 \times C_3)$	35	Este trabajo	104
[54,12]	$C_3 \times C_3 \times D_3$	29	Este trabajo	104
[54,13]	$C_3 \times ((C_3 \times C_3) \times C_2)$	29	Este trabajo	104
[54,14]	$(C_3 \times C_3 \times C_3) \times C_2$	29	Este trabajo	105
[54,15]	$C_6 \times C_3 \times C_3$	65	Gromadzki [15] y Este trabajo	105

Grupos de orden 55:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[55,1]	$C_{11} \times C_5$	35	Este trabajo	106
[55,2]	C_{55}	1	Tucker [29]	106

Grupos de orden 56:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[56,1]	$C_7 \times C_8$	43	Este trabajo	106
[56,2]	C_{56}	1	Tucker [29]	106
[56,3]	$C_7 \times Q$	30	Este trabajo	106
[56,4]	$C_4 \times D_7$	16	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	107 y 45
[56,5]	D_{28}	1	Tucker [29]	107
[56,6]	$C_2 \times (C_7 \times C_4)$	30	Este trabajo	107
[56,7]	$(C_{14} \times C_2) \times C_2$	16	Este trabajo	107 y 46
[56,8]	$C_{28} \times C_2$	2	Tucker [29]	107
[56,9]	$C_7 \times D_4$	16	Etayo, Martínez [9]	107 y 47
[56,10]	$C_7 \times Q$	42	Este trabajo	107
[56,11]	$(C_2 \times C_2 \times C_2) \times C_7$	8	A. Bacelo [2]	108
[56,12]	$C_2 \times D_{14}$	2	Tucker [29]	108
[56,13]	$C_{14} \times C_2 \times C_2$	30	Gromadzki [15] y Este trabajo	108

Grupos de orden 57:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[57,1]	$C_{19} \times C_3$	21	Este trabajo	109
[57,2]	C_{57}	1	Tucker [29]	109

Grupos de orden 58:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[58,1]	D_{29}	1	Tucker [29]	109
[58,2]	C_{58}	1	Tucker [29]	109

Grupos de orden 59:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[59,1]	C_{59}	1	Tucker [29]	109

Grupos de orden 60:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[60,1]	$C_5 \times DC_3$	39	Etayo, Martínez [11]	109
[60,2]	$C_3 \times (C_5 \times C_4)$	42	Este trabajo	110
[60,3]	$C_{15} \times C_4$	32	Este trabajo	110
[60,4]	C_{60}	1	Tucker [29]	111
[60,5]	A_5	1	Tucker [29]	111
[60,6]	$C_3 \times (C_5 \times C_4)$	21	Este trabajo	111
[60,7]	$C_{15} \times C_4$	32	Este trabajo	111
[60,8]	$D_3 \times D_5$	9	A. Bacelo [2]	112
[60,9]	$C_5 \times A_4$	13	Etayo, Martínez [11]	112 y 30
[60,10]	$C_6 \times D_5$	22	Etayo, Martínez [9] y Este trabajo	112
[60,11]	$C_5 \times D_6$	22	Etayo, Martínez [9]	113
[60,12]	D_{30}	1	Tucker [29]	113
[60,13]	$C_{30} \times C_2$	2	Tucker [29]	113

Grupos de orden 61:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[61,1]	C_{61}	1	Tucker [29]	113

Grupos de orden 62:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[62,1]	D_{31}	1	Tucker [29]	113
[62,2]	C_{62}	1	Tucker [29]	113

Grupos de orden 63:

GAP	G	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia	Pág.
[63,1]	$C_7 \times C_9$	49	Este trabajo	114
[63,2]	C_{63}	1	Tucker [29]	114
[63,3]	$C_3 \times (C_7 \times C_3)$	23	Este trabajo	114
[63,4]	$C_{21} \times C_3$	41	Etayo [8]	114

CAPITULO 3

En este último capítulo pasamos a estudiar uno de los grandes problemas dentro del género imaginario: encontrar al menos un grupo para cada género imaginario. Durante todos estos años de estudio se ha conseguido rellenar gran cantidad de huecos, y solamente hay dificultades en los números que son de la forma $12k + 3$. Por eso los últimos esfuerzos en este campo han ido encaminados a rellenar estos huecos, consiguiendo grandes avances.

Como se indicará, para todo número n que no sea de la forma $12k + 3$ se conoce algún grupo con género imaginario n . Por ello vamos a hacer en la primera parte del capítulo un estudio pormenorizado de los grupos con género imaginario 27, 39, 51 y 63, para intentar entender el comportamiento de estos grupos en estos géneros.

En la segunda parte, utilizando lo obtenido en la primera, construiremos seis familias infinitas de grupos con género imaginario $12k + 3$.

Terminaremos el capítulo, y con él la tesis, describiendo una familia de grupos que parece cubrir la mayor parte de los huecos que quedan todavía por determinar.

SECCIÓN 1

En esta primera sección vamos a estudiar los grupos con género imaginario 27, 39, 51 y 63, pues los de género 15 ya están estudiados en el Capítulo 1.

Grupos de género imaginario 27

⇒ El primer grupo que tenemos es el [40,3], cuya estructura algebraica es $C_5 \rtimes C_8$. El análisis de este grupo está hecho en detalle en el Capítulo 2.

⇒ El siguiente grupo es el [75,2] con estructura algebraica $(3, 3|3, 5)$. Este grupo es estudiado en profundidad en [12], y tiene una presentación dada por generadores a y b tales que $a^3 = b^3 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^5 = 1$. Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(d_1) = ab$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento x_2 tienen como imagen los generadores a y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ Ahora estudiamos el grupo [150,5] cuya estructura algebraica tenemos que es $(3, 3|3, 5) \rtimes C_2$. Tenemos dos presentaciones para este grupo. Para la primera tomamos la presentación de $(3, 3|3, 5)$, un generador X de C_2 y determinamos la actuación de X sobre los generadores de $(3, 3|3, 5)$ de modo que exista el epimorfismo buscado. Luego está dada por generadores a, b y X tales que cumplen $a^3 = b^3 = X^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^5 = 1$, $Xa = a^2X$ y $Xb = b^2X$. La segunda presentación que tenemos está dada por generadores $x = (6 \ 15)(7 \ 11)(8 \ 12)(9 \ 13)(10 \ 14)$, $y = (1 \ 11 \ 6)(2 \ 12 \ 7)(3 \ 13 \ 8)(4 \ 14 \ 9)(5 \ 15 \ 10)$ que cumplen $x^2 = y^3 = (xy)^{10} = [x, y]^3 = 1$, luego es el grupo $(2, 3, 10; 3)$, véase [6]. Para este grupo tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$, tomemos la segunda presentación y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = x, \quad \theta(x_2) = y, \quad \theta(e_1) = y^{-1}x, \quad \theta(c_{1,0}) = (xy)^5$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento x_2 tienen como imagen los generadores x e y respectivamente, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable al generar el grupo como imágenes de elementos orientables. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(3,3)\})$, tomemos la primera presentación y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Xa, \quad \theta(e_1) = a^{-1}X, \quad \theta(c_{1,0}) = X, \quad \theta(c_{1,1}) = Xb, \quad \theta(c_{1,2}) = aX$$

Tenemos que $\theta(c_{1,0}) = X, \theta(c_{1,0}c_{1,1}) = b$ y $\theta(c_{1,0}x_1) = a$, y además tenemos que el elemento $(c_{1,0}x_1)^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que encontramos es el grupo [150,6], cuya estructura algebraica es otro producto semidirecto $(3, 3|3, 5) \times C_2$. Al igual que en el grupo anterior, hemos de determinar la actuación de X sobre a y b . Definimos la presentación dada por generadores a, b y X tales que $a^3 = b^3 = X^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^5 = 1, Xa = aX$ y $Xb = b^2X$. Por otra parte este grupo es el $(2, 3, 6; 5)$ cuya presentación viene dada por generadores R, T tal que $R^6 = T^2 = (TR)^3 = (R^3T)^5 = 1$, véase [6]. Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Xb, \quad \theta(x_2) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(e_1) = aX, \quad \theta(c_{1,0}) = X$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}$, el elemento $e_1c_{1,0}$ y el elemento $c_{1,0}x_1$ tienen como imagen los generadores X, a y b respectivamente. Además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow Por último tenemos que estudiar el grupo [300,25] que tiene estructura algebraica $((3, 3|3, 5) \times C_2) \times C_2$. Tenemos que hacer lo mismo que con los grupos anteriores y tenemos que el grupo está generado por elementos a, b, X, Y tales que $a^3 = b^3 = X^2 = 1, Y^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^5 = 1, Xa = a^2X, aY = Ya^2, Yb = bY$ y $Xb = b^2X$. Este grupo, según [6], es el $G^{3,6,10}$, cuya presentación viene dada por generadores A, B, C tal que $A^3 = B^6 = C^{10} = (AB)^2 = (BC)^2 = (CA)^2 = (ABC)^2 = 1$. Para el siguiente grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = aX, \quad \theta(c_{1,1}) = XY, \quad \theta(c_{1,2}) = Y, \quad \theta(c_{1,3}) = Xb, \quad \theta(c_{1,4}) = aX$$

Tenemos que el elemento $c_{1,2}$ tiene como imagen el generador Y , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador X , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{1,4}c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador a . Además tenemos que el elemento $(c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{12}$.

Grupos de género imaginario 39

⇒ El primer grupo que encontramos es el [60,1] con estructura algebraica $DC_3 \times C_5$. Este grupo ha sido estudiado en profundidad y en detalle en el Capítulo 2.

⇒ El siguiente grupo es el [111,1] cuya estructura algebraica es $C_{37} \times C_3$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b tales que $a^3 = b^{37} = 1$ y $ba = ab^{10}$. Para el grupo NEC (1; -; [3,3]; {-}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^{18}$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento x_1x_2 tienen como imagen los generadores a^{-1} y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [120,12], que tiene estructura algebraica $(DC_3 \times C_5) \times C_2$. Para obtener una presentación de este grupo, tenemos que volver a tener en cuenta su estructura algebraica, y el epimorfismo que deseamos construir, así que podemos decir que el grupo está generado por elementos a, b, X, Y tales que cumplen $a^4 = b^3 = X^5 = Y^2 = 1, ba = ab^2, aY = Ya^3, XY = YX^4, Yb = b^2Y$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC (0; +; [-]; {(2,2,3,20)}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = YXa, \quad \theta(c_{1,1}) = a^2, \quad \theta(c_{1,2}) = a^2Y, \quad \theta(c_{1,3}) = Yba^2, \quad \theta(c_{1,4}) = YXa$$

Tenemos que el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador Y , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador b , el elemento $(c_{1,3}c_{1,4})^{16}$ tiene como imagen el generador X y el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,4}(c_{1,3}c_{1,4})^4$ tiene como imagen el generador a . Hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{37}{120}$.

⇒ El último grupo que tenemos es el [222,1], con estructura algebraica $(C_{37} \times C_3) \times C_2$. Volvemos a estar en la situación citada anteriormente, y haciendo el análisis explicado antes, hemos podido deducir una presentación del grupo tal que los generadores son a, b, c que cumplen $a^3 = b^{37} = c^2 = 1, ba = ab^{10}$ y $bc = cb^{-1}$. Así que para el grupo NEC (0; +; [2,3]; {(-)}) tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = cb, \quad \theta(x_2) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(e_1) = ac, \quad \theta(c_{1,0}) = c$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}$, el elemento $e_1c_{1,0}$ y el elemento $c_{1,0}x_1$ tienen como imagen los generadores c, a y b respectivamente. Además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado

que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

Grupos de género imaginario 51

⇒ El primer grupo que tenemos para estudiar es el [84,2], que tiene estructura algebraica $C_4 \times (C_7 \rtimes C_3)$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que cumplen $a^3 = b^7 = c^4 = 1, ba = ab^2$ y el resto conmutan. Para el grupo NEC $(0; +; [3,12]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ba^{-1}, \quad \theta(x_2) = ac, \quad \theta(e_1) = c^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c^2$$

Tenemos que el elemento x_2^4 , el elemento x_2^9 y el elemento $x_1x_2^4$ tienen como imagen los generadores a, c y b respectivamente. Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, así que tenemos los generadores del grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{7}{12}$.

⇒ El siguiente grupo que tenemos es el [147,1], que puede tener estructura algebraica $C_{49} \rtimes C_3$ ó $(3, 3|3, 7)$. Atendiendo a otros grupos organizados en GAP, suponemos que se corresponde con la primera estructura algebraica. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b tales que cumplen $a^3 = b^{49} = 1$ y $ba = ab^{18}$. Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^{24}$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento x_1x_2 tienen como imagen los generadores a^{-1} y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

⇒ Ahora tenemos el grupo [147,5], y atendiendo a lo dicho en el grupo anterior, tendría estructura algebraica $(3, 3|3, 7)$. Este grupo es estudiado en [12], y tiene una presentación dada por generadores a y b tales que $a^3 = b^3 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^7 = 1$. Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(d_1) = ab$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento x_2 tienen como imagen los generadores a y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow Estudiemos ahora el grupo [294,1] cuya estructura algebraica, atendiendo a los grupos anteriores y a cómo se comportan los grupos de género imaginario 27, tiene que ser $(C_{49} \times C_3) \times C_2$. Como en casos anteriores, tenemos que deducir la presentación, que en este caso viene dada por generadores a, b, c tales que $a^3 = b^{49} = c^2 = 1, ac = ca^{-1}, bc = cb$ y $ba = ab^{18}$. Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ca, \quad \theta(x_2) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(e_1) = bc, \quad \theta(c_{1,0}) = c$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}$, el elemento $e_1c_{1,0}$ y el elemento $c_{1,0}x_1$ tienen como imagen los generadores c, b y a respectivamente. Además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow Ahora tenemos el grupo [294,7], que tiene estructura algebraica $(3, 3|3, 7) \times C_2$ teniendo en cuenta lo dicho en el grupo anterior. Tenemos dos presentaciones para este grupo, una deducida en base a su estructura algebraica y el epimorfismo que buscamos, y otra dada como grupo de permutaciones. La primera presentación viene dada por generadores a, b y c tales que $a^3 = b^3 = c^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^7 = 1, ca = a^2c$ y $cb = b^2c$; y la segunda presentación que tenemos viene dada por dos generadores $x = (1\ 10)(2\ 14)(3\ 11)(4\ 8)(5\ 12)(6\ 9)(7\ 13), y = (1\ 4\ 2)(3\ 5\ 6)(9\ 10\ 12)(11\ 14\ 13)$ que cumplen $x^2 = y^3 = (xy)^{14} = [x, y]^3 = 1$, luego es el grupo $(2, 3, 14; 3)$; véase [6]. Para este grupo tenemos dos grupos NEC así que:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$, tomemos la segunda presentación y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = x, \quad \theta(x_2) = y, \quad \theta(e_1) = y^{-1}x, \quad \theta(c_{1,0}) = (xy)^7$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento x_2 tienen como imagen los generadores x e y respectivamente, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable al generar el grupo como imágenes de elementos orientables. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(3,3)\})$, tomemos la primera presentación y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(e_1) = c, \quad \theta(c_{1,0}) = ac, \quad \theta(c_{1,1}) = cb, \quad \theta(c_{1,2}) = a^{-1}c$$

Tenemos que $\theta(x_1) = c, \theta(c_{1,0}x_1) = a$ y $\theta(x_1c_{1,1}) = b$, y además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así tenemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

⇒ El siguiente grupo que estudiamos es el [294,14], que es otro producto semidirecto $(3, 3|3, 7) \rtimes C_2$. Así tenemos una presentación, deducida de la estructura algebraica y del grupo NEC, dada por generadores a, b, c tales que $a^3 = b^3 = c^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^7 = 1$, $ac = ca$ y $bc = cb^{-1}$, y además, según [6], tenemos que este grupo es el $(2, 3, 6; 7)$ cuya presentación viene dada por generadores R, T tal que $R^6 = T^2 = (TR)^3 = (R^3T)^7 = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = cb, \quad \theta(x_2) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(e_1) = ac, \quad \theta(c_{1,0}) = c$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}$, el elemento $e_1c_{1,0}$ y el elemento $c_{1,0}x_1$ tienen como imagen los generadores c, a y b respectivamente. Además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

⇒ El último grupo que tenemos para estudiar es el [588,35], con estructura algebraica $((3, 3|3, 7) \rtimes C_2) \rtimes C_2$. La presentación de este grupo, deducida como en casos anteriores al igual que la estructura algebraica, viene dada por generadores a, b, c y X tales que $a^3 = b^3 = c^2 = X^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^7 = 1$, $ac = ca^{-1}$, $bc = cb^{-1}$, $aX = Xa^{-1}$ y $Xb = bX$, y además, según [6], tenemos que este grupo es el $G^{3,6,14}$ cuya presentación viene dada por generadores A, B, C tal que $A^3 = B^6 = C^{14} = (AB)^2 = (BC)^2 = (CA)^2 = (ABC)^2 = 1$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = aX, \quad \theta(c_{1,1}) = Xc, \quad \theta(c_{1,2}) = c, \quad \theta(c_{1,3}) = Xb, \quad \theta(c_{1,4}) = aX$$

Tenemos que el elemento $c_{1,2}$ tiene como imagen el generador c , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador X , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{1,4}c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador a . Además tenemos que el elemento $(c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{12}$.

Grupos de género imaginario 63

⇒ El primer grupo que tenemos es el [96,1], cuya estructura algebraica es $C_3 \rtimes C_{32}$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b tales que $a^3 = b^{32} = 1$ y $ab = ba^2$. Para el grupo NEC $(0; +; [3,32]; \{(-)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(x_2) = b, \quad \theta(e_1) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = b^{16}$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento x_2 tienen como imagen los generadores a y b respectivamente. Hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{61}{96}$.

\Rightarrow Ahora estudiamos el grupo [183,1] que tiene estructura algebraica $C_{61} \rtimes C_3$. Este grupo tiene una presentación dada por generadores a, b tales que cumplen $a^3 = b^{61} = 1$ y $ba = ab^{13}$. Para el grupo NEC $(1; -; [3,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^{30}$$

Tenemos que el elemento x_1 y el elemento x_1x_2 tienen como imagen los generadores a^{-1} y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación. Así hemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que estudiamos es el grupo [192,78] con estructura algebraica $(C_3 \rtimes C_{32}) \rtimes C_2$. Debemos deducir la estructura algebraica y su presentación como se ha indicado anteriormente, y podemos decir que este grupo tiene generadores a, b, Y tales que $a^3 = b^{32} = Y^2 = 1, Ya = a^2Y, Yb = b^{-1}Y$ y $ab = ba^2$. Así tenemos el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,3,32)\})$ y el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = Yb, \quad \theta(c_{1,1}) = b^{16}, \quad \theta(c_{1,2}) = aY, \quad \theta(c_{1,3}) = Y, \quad \theta(c_{1,4}) = Yb$$

Tenemos que el elemento $c_{1,3}c_{1,4}$ tiene como imagen el generador b , el elemento $c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador a y el elemento $c_{1,0}c_{1,1}(c_{1,3}c_{1,4})^{15}$ tiene como imagen el generador Y . Hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que tenemos los generadores del grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{61}{192}$.

\Rightarrow El último grupo que estudiamos es el grupo [366,1] cuya estructura algebraica es $(C_{61} \rtimes C_3) \rtimes C_2$, teniendo en cuenta lo dicho anteriormente. No tenemos presentación explícita, pero podemos deducirla teniendo en cuenta el comportamiento de los grupos en los otros géneros imaginarios. Así este grupo está generado por elementos a, b, c tales que $a^{61} = b^3 = c^2 = 1, ab = ba^{13}, bc = cb$ y $ac = ca^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{-\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = ca, \quad \theta(x_2) = a^{-1}b^{-1}, \quad \theta(e_1) = bc, \quad \theta(c_{1,0}) = c$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}$, el elemento $e_1c_{1,0}$ y el elemento $c_{1,0}x_1$ tienen como imagen los generadores c, b y a respectivamente. Además tenemos que el elemento $(c_{1,0}x_1)^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{6}$.

Por tanto podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.1:

En las siguientes tablas se muestran los grupos con género imaginario 27, 39, 51 y 63; dando su nomenclatura GAP, su estructura algebraica, la referencia y la página donde se encuentra su estudio:

Género imaginario 27:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[40,3]	$C_5 \times C_8$	40	Este trabajo	125 y 80
[75,2]	$(3, 3 3, 5)$	75	Etayo, Martínez [12]	125
[150,5]	$(3, 3 3, 5) \times C_2$	150	Este trabajo	125
[150,6]	$(3, 3 3, 5) \times C_2$	150	Este trabajo	126
[300,25]	$((3, 3 3, 5) \times C_2) \times C_2$	300	Este trabajo	126

Género imaginario 39:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[60,1]	$DC_3 \times C_5$	60	Etayo, Martínez [11]	127 y 109
[111,1]	$C_{37} \times C_3$	111	Este trabajo	127
[120,12]	$(DC_3 \times C_5) \times C_2$	120	Este trabajo	127
[222,1]	$(C_{37} \times C_3) \times C_2$	222	Este trabajo	127

Género imaginario 51:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[84,2]	$C_4 \times (C_7 \times C_3)$	84	Este trabajo	128
[147,1]	$C_{49} \times C_3$	147	Este trabajo	128
[147,5]	$(3, 3 3, 7)$	147	Etayo, Martínez [12]	128
[294,1]	$(C_{49} \times C_3) \times C_2$	294	Este trabajo	129
[294,7]	$(3, 3 3, 7) \times C_2$	294	Este trabajo	129
[294,14]	$(3, 3 3, 7) \times C_2$	294	Este trabajo	130
[588,35]	$((3, 3 3, 7) \times C_2) \times C_2$	588	Este trabajo	130

Género imaginario 63:

GAP	G	$o(G)$	Referencia	Pág.
[96,1]	$C_3 \times C_{32}$	96	Este trabajo	130
[183,1]	$C_{61} \times C_3$	183	Este trabajo	131
[192,78]	$(C_3 \times C_{32}) \times C_2$	192	Este trabajo	131
[366,1]	$(C_{61} \times C_3) \times C_2$	366	Este trabajo	131

SECCIÓN 2:

Así pues, habiendo estudiado estos géneros imaginarios concretos, podemos pasar a enunciar varias proposiciones mediante las cuales encontramos familias infinitas de grupos cuyos géneros imaginarios son del tipo $12k + 3$:

Proposición 3.1: Sea $n = 12k + 3$ tal que $n - 2$ tiene todos sus factores primos congruentes con 1 (mód 3). Entonces $(C_{12k+1} \rtimes C_3) \rtimes C_2$ tiene género imaginario n .

Demostración: Primeramente tenemos que $C_{12k+1} \rtimes C_3$ tiene una presentación dada por generadores a, b tales que cumplen que $a^3 = b^{12k+1} = (ab)^3 = 1$. Ahora sea $\Lambda = (1; -, [3, 3]; \{-\})$ un grupo NEC cuya área reducida es $\frac{1}{3}$. Podemos construir un epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = a^{-1}, \quad \theta(x_2) = ab, \quad \theta(d_1) = b^{6k}$$

Tenemos que las imágenes de x_1 y x_1x_2 son los generadores a^{-1} y b respectivamente, y ambos son elementos que preservan la orientación, luego tenemos que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Además el área del grupo NEC es mínima por [14] y por lo tanto el género imaginario de $C_{12k+1} \rtimes C_3$ es n .

Ahora tenemos $(C_{12k+1} \rtimes C_3) \rtimes C_2$ que tiene una presentación, deducida a partir de su estructura algebraica, dada por generadores a, b, c tales que cumplen las siguientes relaciones $a^3 = b^{12k+1} = c^2 = (ab)^3 = 1, ca = ac$ y $bc = cb^{-1}$. Ahora sea $\Lambda = (0; +; [2, 3]; \{(-)\})$ un grupo NEC cuya área reducida es $\frac{1}{6}$. Por tanto si construimos un epimorfismo este grupo tendrá género imaginario menor o igual que n . Podemos construir un epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = cb, \quad \theta(x_2) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(e_1) = ac, \quad \theta(c_{1,0}) = c$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}$, el elemento $e_1c_{1,0}$ y el elemento $c_{1,0}x_1$ tienen como imagen los generadores c, a y b respectivamente. Además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Por este epimorfismo podemos decir que $(C_{12k+1} \rtimes C_3) \rtimes C_2$ tiene género imaginario n o menor. Pero como contiene a $C_{12k+1} \rtimes C_3$, que tiene género imaginario n debe ser al menos ese, y por tanto $(C_{12k+1} \rtimes C_3) \rtimes C_2$ tiene género imaginario n .

Proposición 3.2: Sea $n = 12k + 3$ tal que $n - 2 = m^2$ es un cuadrado, con m impar. Entonces tenemos que hay dos grupos con estructura algebraica $(3, 3|3, m) \rtimes C_2$ que tienen género imaginario n .

Demostración: Primeramente tenemos que $(3, 3|3, m)$ tiene una presentación dada por generadores a, b tales que cumplen que $a^3 = b^3 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^m = 1$. Por

[12], sabemos que estos grupos tienen género imaginario $m^2 + 2$.

Ahora tenemos dos grupos con estructura algebraica $(3, 3|3, m) \rtimes C_2$:

- i) El primero, que es el grupo $(2, 3, 2m; 3)$ según [6], tiene una presentación dada por generadores a, b, c tales que $a^3 = b^3 = c^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^m = 1, ca = a^2c$ y $cb = b^2c$. Sea el grupo NEC $(0; +; [2]; \{(3,3)\})$, que tiene área reducida $\frac{1}{6}$, y por tanto si conseguimos hacer el epimorfismo tendremos que este grupo tiene género imaginario como mucho $m^2 + 2$. Así tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = c, \quad \theta(e_1) = c, \quad \theta(c_{1,0}) = ac, \quad \theta(c_{1,1}) = cb, \quad \theta(c_{1,2}) = a^{-1}c$$

Tenemos que $\theta(x_1) = c, \theta(c_{1,0}x_1) = a$ y $\theta(x_1c_{1,1}) = b$, y además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. Así tenemos probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Por tanto tenemos que este grupo tiene género imaginario como mucho $m^2 + 2$, pero como contiene a $(3, 3|3, m)$ que tiene ese género imaginario, entonces hemos probado que $(3, 3|3, m) \rtimes C_2$ tiene género imaginario n .

- ii) El segundo, que es el grupo $(2, 3, 6; m)$ según [6], tiene una presentación dada por generadores a, b y c tales que cumplen $a^3 = b^3 = c^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^m = 1, ac = ca$ y $bc = cb^{-1}$. Para el grupo NEC $(0; +; [2,3]; \{(-)\})$, con área reducida $\frac{1}{6}$, como en el caso anterior si hacemos el epimorfismo habremos probado que tiene como máximo género imaginario $m^2 + 2$. Tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = cb, \quad \theta(x_2) = b^{-1}a^{-1}, \quad \theta(e_1) = ac, \quad \theta(c_{1,0}) = c$$

Tenemos que el elemento $c_{1,0}$, el elemento $e_1c_{1,0}$ y el elemento $c_{1,0}x_1$ tienen como imagen los generadores c, a y b respectivamente. Además tenemos que el elemento $(e_1c_{1,0})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Así tenemos que este grupo tiene género imaginario como mucho $m^2 + 2$, pero como contiene a $(3, 3|3, m)$ que tiene ese género imaginario, entonces hemos probado que $(3, 3|3, m) \rtimes C_2$ tiene género imaginario n .

Proposición 3.3: Sea $n = 12k + 3$ tal que $n - 2 = m^2$ es un cuadrado, con m impar. Entonces tenemos que el grupo $((3, 3|3, m) \rtimes C_2) \rtimes C_2 \approx G^{3,6,2m}$ tiene género imaginario n .

Demostración: Tenemos que una presentación del grupo $((3, 3|3, m) \rtimes C_2) \rtimes C_2$ viene dada por a, b, X, c que cumple $a^3 = b^3 = X^2 = c^2 = (ab)^3 = (a^{-1}b)^m = 1,$

$aX = Xa^{-1}, bX = Xb^{-1}, ac = ca^{-1}$ y $cb = bc$. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = aX, \quad \theta(c_{1,1}) = Xc, \quad \theta(c_{1,2}) = c, \quad \theta(c_{1,3}) = Xb, \quad \theta(c_{1,4}) = aX$$

Tenemos que el elemento $c_{1,2}$ tiene como imagen el generador c , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador X , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador b y el elemento $c_{1,4}c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador a . Además tenemos que el elemento $(c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2})^3$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{12}$, por tanto hemos demostrado que este grupo tiene género imaginario como mucho $m^2 + 2$, pero como contiene a $(3,3|3,m) \rtimes C_2$, que tiene ese mismo género imaginario, entonces nuestro grupo tiene género imaginario n . Este grupo es denominado $G^{3,6,2m}$ en [6].

Proposición 3.4: Sea $n = 48k + 39$. Entonces tenemos que el género imaginario de $(DC_3 \times C_{6k+5}) \rtimes C_2$ es n .

Demostración: Tenemos que una presentación del grupo $(DC_3 \times C_{6k+5}) \rtimes C_2$ viene dada por los generadores a, b, X, Y tales que cumplen $a^4 = b^3 = X^{6k+5} = Y^2 = 1$, $ba = ab^2, aY = Ya^3, XY = YX^{-1}, Yb = b^2Y$ y el resto conmutan. Consideremos el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,2,3,4(6k+5))\})$, que tiene área reducida $\frac{8(6k+5)-3}{24(6k+5)}$. Así si tenemos un epimorfismo, tendríamos que este grupo tiene género imaginario como máximo $48k + 39$, pero como contiene a $DC_3 \times C_{6k+5}$ que tiene ese mismo género imaginario (estudio que podemos encontrar en [11]), quedaría demostrado que tiene ese género imaginario. Entonces tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(c_{1,0}) = YXa, \quad \theta(c_{1,1}) = a^2, \quad \theta(c_{1,2}) = a^2Y, \quad \theta(c_{1,3}) = Yba^2, \quad \theta(c_{1,4}) = YXa$$

Tenemos que el elemento $c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador Y , el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}$ tiene como imagen el generador b . Diferenciamos ahora dos casos según el valor de k :

- a) Si k es par, entonces tenemos que el elemento $(c_{1,3}c_{1,4})^{3(6k+5)+1}$ tiene como imagen el generador X y el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,4}(c_{1,3}c_{1,4})^{(6k+5)-1}$ tiene como imagen el generador a .
- b) Si k es impar, entonces tenemos que el elemento $(c_{1,3}c_{1,4})^{(6k+5)+1}$ tiene como imagen el generador X y el elemento $c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,4}(c_{1,3}c_{1,4})^{(3(6k+5)-1)}$ tiene como imagen el generador a .

Así en ambos casos, hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación, por lo que hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable.

Proposición 3.5: Sea $n = 84k + 51$ tal que $12k + 7$ no tenga factores primos congruentes con 2 (mód 3). Entonces el género imaginario de $C_4 \times (C_{12k+7} \rtimes C_3)$ es n .

Demostración: Primeramente indiquemos, que con las condiciones impuestas en el enunciado, tenemos que existen grupos de orden $36k + 21$ con estructura algebraica $C_{12k+7} \rtimes C_3$ y con una presentación dada por generadores a, b tales que cumplen $a^3 = b^{12k+7} = (ab)^3 = 1$. Definamos c generador de C_4 .

Sea $\Lambda = (0; +; [3,12]; \{(-)\})$ un grupo NEC con área reducida $\frac{7}{12}$ y construimos el epimorfismo asociado a él $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por:

$$\theta(x_1) = ba, \quad \theta(x_2) = a^{-1}c, \quad \theta(e_1) = c^{-1}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c^2$$

Tenemos que el elemento x_2^9 tiene como imagen el generador c , el elemento x_2^8 tiene como imagen el generador a y el elemento $x_1x_2^4$ tiene como imagen el generador b . Así hemos generado el grupo como imágenes de elementos orientables y por tanto queda probado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Por tanto el género imaginario del grupo sería como mucho n .

Por otra parte tenemos que el grupo $C_{12k+7} \rtimes C_3$ se puede generar con dos elementos de orden 3 y no se puede bajar más esta condición. De igual manera, necesitamos un elemento de orden 4 para generar el grupo C_4 . Por tanto, necesitamos como mínimo dos generadores para obtener $C_4 \times (C_{12k+7} \rtimes C_3)$, de orden 3 y 12 respectivamente. Así que, visto el grupo NEC, no podemos bajar más el área reducida del grupo NEC y por tanto es la mínima. Demostrado esto, tenemos que el género imaginario de nuestro grupo es n .

Los géneros imaginarios obtenidos en la Proposición 1 a 4, aunque de forma $12k+3$, ya habían sido obtenidos, como se ve en las propias demostraciones. En el caso de la Proposición 5, también estos números n estaban ya cubiertos, pues el grupo $C_{7(12k+7)} \rtimes C_3$, en las condiciones del enunciado, tiene género imaginario $84k + 51$, véase [14]. Al analizar los grupos que aparecen en la Sección 1 y no han sido utilizados vamos a reconsiderar el grupo [40,3], de género imaginario 27. Éste es particularmente interesante, debido a los actuales conocimientos sobre los números que pudieran no ser género imaginario de ningún grupo. Vamos a tomar de [14] la situación de este problema en este momento:

Teorema A: Sea $n > 3$ un hueco del espectro del género imaginario. Entonces $n \equiv 3, 15$ ó 27 (mód 48), $n - 2$ no es un cuadrado, y $n - 2$ tiene algún factor primo $p \equiv 2$ (mód 3), es decir $p \equiv 5$ (mód 6).

De este teorema, y de tres ejemplos sueltos que también aparecen en [14], resulta que en este momento quedan 14 posibles huecos hasta 1000, que son:

207	507	783
267	651	867
387	687	915
447	699	927
495	747	

SECCIÓN 3:

De la lista de posibles huecos hasta 1000, resulta que casi todos son de la forma $60k + 27$. Repasando los grupos de género imaginario 27, tenemos que el grupo $[40,3]$ de género imaginario 27 no hemos podido generalizarlo de alguna manera. Primeramente observemos que este grupo tiene estructura algebraica $C_5 \rtimes C_8$ y que el área mínima del grupo NEC asociado $\Lambda = (0; +; [4, 8]; \{(-)\})$ es $\frac{5}{8}$. Por tanto nos interesaría generalizar este resultado para intentar cubrir los números de la forma $60k + 27$ que son el objetivo de esta sección.

Así, observando este grupo, nos interesaría poder generalizar este resultado a grupos con estructura algebraica $G = C_5 \rtimes C_{8+16k}$. Tomemos entonces b generador de orden 5 de C_5 , a generador de orden $8 + 16k$ de C_{8+16k} , y definamos su producto como $ba = ab^2$, tomando ejemplo del grupo que conocemos de género imaginario 27. La pregunta ahora sería si este grupo que hemos definido es un producto semidirecto de nuestros dos grupos. La respuesta es afirmativa, pues vemos fácilmente que el subgrupo generado por b es subgrupo normal de G .

Proposición 3.6: El género imaginario del grupo $C_5 \rtimes C_{8+16k}$ es menor o igual que $60k + 27$.

Demostración: Sea $\Lambda = (0; +; [4, 8 + 16k]; \{(-)\})$ el grupo NEC que vamos a asociar a cada grupo $C_5 \rtimes C_{8+16k}$ y vamos a construir el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por:

$$\theta(x_1) = ba^{2+4k}, \quad \theta(x_2) = a, \quad \theta(e_1) = a^{5+12k}b^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = a^{4+8k}$$

Veamos que efectivamente $\theta(x_1)$ tiene orden 4:

$$\begin{aligned} (ba^{2+4k})^2 &= ba^{2+4k}ba^{2+4k} = a^{2+4k}b^{2^{2+4k}}ba^{2+4k} = a^{2+4k}b^{4 \cdot 16^k}ba^{2+4k} = \\ &= a^{2+4k}(b^{-1})^{16^k}ba^{2+4k} = a^{2+4k}b^{-1}ba^{2+4k} = a^{4+8k} \end{aligned}$$

Este elemento tiene orden 2 y remarquemos que b tiene orden 5, y que entonces el elemento $(b^{-1})^{16} = b^{-1}$, da igual el número de veces que lo elevemos a 16. Por tanto el elemento ba^{2+4k} tiene orden 4.

Tenemos que x_2 tiene como imagen el generador a y que el elemento $x_1x_2^{6+12k}$ tiene como imagen el generador b . Por tanto hemos generado el grupo como imágenes de elementos que preservan la orientación y hemos demostrado que es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{5+12k}{8+16k}$, y entonces tendríamos que $5 \cdot (8 + 16k) \cdot \frac{5+12k}{8+16k} + 2 = 25 + 60k + 2 = 27 + 60k$, y por lo tanto este grupo tiene género imaginario como mucho $60k + 27$. \square

Así que si demostrásemos que nuestro grupo NEC tiene área mínima para este grupo, conseguiríamos una colección de grupos cuyos géneros imaginarios son los números $60k + 27$.

Como el primer posible hueco que queda es $207 = 60 \cdot 3 + 27$, tomamos $k = 3$ y tenemos el grupo $G = C_5 \times C_{56}$. Vamos a estudiar los órdenes de los elementos de este grupo. Este grupo, como se ha indicado anteriormente, está generado por a, b tales que $a^{56} = b^5 = 1$ y $ba = ab^2$. Por tanto los elementos del grupo distintos del neutro serán de la forma $a^t, b^p, a^t b^p$ con $0 < t < 56$ y $0 < p < 5$.

Sabemos que el orden del elemento a^t será 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28 ó 56 dependiendo de t y sabemos también que b^p siempre tiene orden 5 para todo p . Analicemos entonces el resto de elementos:

- 1) Estudiemos primero los elementos de la forma $a^t b$ para todo t . Entonces:

$$(a^t b)^2 = a^t b a^t b = a^{2t} b^{2^t + 1}$$

Primero observamos que si $t = 28$, entonces $a^{28} b$ tiene orden 10. Ahora tenemos que ver para qué t tenemos que $2^t + 1$ es un múltiplo de 5. O lo que es lo mismo, las potencias de 2 que sean congruentes con 4 módulo 5. Al hacer el estudio tenemos que los t que buscamos son los $t \equiv 2 \pmod{4}$. Por tanto aquí tenemos entonces la siguiente lista:

t	Elemento	Orden
2	$a^2 b$	28
6	$a^6 b$	28
10	$a^{10} b$	28
14	$a^{14} b$	4
18	$a^{18} b$	28
22	$a^{22} b$	28
26	$a^{26} b$	28
28	$a^{28} b$	10
30	$a^{30} b$	28
34	$a^{34} b$	28
38	$a^{38} b$	28

t	Elemento	Orden
42	$a^{42}b$	4
46	$a^{46}b$	28
50	$a^{50}b$	28
54	$a^{54}b$	28

Tabla 1

Seguimos con el estudio de $a^t b$ para el resto de t , entonces tenemos que:

$$(a^t b)^3 = a^{2t} b^{2^t+1} a^t b = a^{3t} b^{2^t(2^t+1)+1} = a^{3t} b^{2^{2t}+2^t+1}$$

Como 56 no es múltiplo de 3, para a^{3t} no tenemos ningún t que haga que ese elemento sea el neutro. Por otra parte tenemos que ver para qué t se cumple que $2^{2t} + 2^t + 1$ es congruente con 0 módulo 5. Y se puede ver fácilmente que no hay ningún t que cumpla esta condición.

Por tanto hay que seguir en el estudio del elemento:

$$(a^t b)^4 = a^{3t} b^{2^{2t}+2^t+1} a^t b = a^{4t} b^{2^t(2^{2t}+2^t+1)+1} = a^{4t} b^{2^{3t}+2^{2t}+2^t+1}$$

Para que a^{4t} sea el neutro tenemos que t tendría que ser 14 ó 42, pero esa opción ya está estudiada. Luego nos queda ver qué t cumple que $2^{3t} + 2^{2t} + 2^t + 1$ es múltiplo de 5. Haciendo el estudio vemos que $t \equiv 1 \pmod{4}$ y $t \equiv 3 \pmod{4}$ cumplen esta condición y por tanto podemos obtener los siguientes órdenes de elementos:

t	Elemento	Orden
1	ab	56
3	a^3b	56
5	a^5b	56
7	a^7b	8
9	a^9b	56
11	$a^{11}b$	56
13	$a^{13}b$	56
15	$a^{15}b$	56
17	$a^{17}b$	56
19	$a^{19}b$	56
21	$a^{21}b$	8
23	$a^{23}b$	56
25	$a^{25}b$	56
27	$a^{27}b$	56
29	$a^{29}b$	56
31	$a^{31}b$	56
33	$a^{33}b$	56
35	$a^{35}b$	8

t	Elemento	Orden
37	$a^{37}b$	56
39	$a^{39}b$	56
41	$a^{41}b$	56
43	$a^{43}b$	56
45	$a^{45}b$	56
47	$a^{47}b$	56
49	$a^{49}b$	8
51	$a^{51}b$	56
53	$a^{53}b$	56
55	$a^{55}b$	56

Tabla 2

Vamos a dar el último paso y tenemos que:

$$(a^t b)^5 = a^{4t} b^{2^{3t} + 2^{2t} + 2^t + 1} a^t b = a^{5t} b^{2^t(2^{3t} + 2^{2t} + 2^t + 1) + 1} = a^{5t} b^{2^{4t} + 2^{3t} + 2^{2t} + 2^t + 1}$$

Primero, igual que en los casos anteriores, estudiamos a^{5t} , pero vemos que 56 no es múltiplo de 5, luego no tenemos ningún t que haga que a^{5t} sea el neutro. Por otra parte tenemos que ver qué t cumple que $2^{4t} + 2^{3t} + 2^{2t} + 2^t + 1$ es múltiplo de 5. Es fácil comprobar que los $t \equiv 0 \pmod{4}$ cumplen esa condición, obteniendo así el resto de órdenes que nos faltaban:

t	Elemento	Orden
4	a^4b	70
8	a^8b	35
12	$a^{12}b$	70
16	$a^{16}b$	35
20	$a^{20}b$	70
24	$a^{24}b$	35
32	$a^{32}b$	35
36	$a^{36}b$	70
40	$a^{40}b$	35
44	$a^{44}b$	70
48	$a^{48}b$	35
52	$a^{52}b$	70

Tabla 3

Observando entonces todos los resultados podemos decir que:

⇒ Si $t \equiv 2$ (mód 4), y t es distinto de 10, 28 y 42; el orden de $a^t b$ es 28.

⇒ Si t es impar y no es múltiplo de 7; el orden de $a^t b$ es 56

⇒ Si t es impar y es múltiplo de 7; el orden de $a^t b$ es 8

⇒ Si $t \equiv 0$ (mód 4) y múltiplo de 8; el orden de $a^t b$ es 35

⇒ Si $t \equiv 0$ (mód 4) y no múltiplo de 8; el orden de $a^t b$ es 70

⇒ Si $t = 10$ ó 42; el orden de $a^t b$ es 4.

⇒ Si $t = 28$; el orden de $a^t b$ es 10.

2) Estudiemos ahora los elementos de la forma $a^t b^2$. Así tenemos que:

$$(a^t b^2)^2 = a^t b^2 a^t b^2 = a^{2t} b^{2^{t+1}+2}$$

Tenemos, como en el caso anterior, que si t es 28, el elemento $a^{28} t$ tiene orden 10. Por otra parte tenemos que ver cuándo $2^{t+1} + 2$ es múltiplo de 5. Pero observemos que $2^{t+1} + 2 = 2(2^t + 1)$, y por tanto, estudiar si $2^{t+1} + 2$ es múltiplo de 5 se reduce a ver si $2^t + 1$ lo es, por lo que estamos en el caso anterior y obtenemos la misma lista.

El siguiente paso sería:

$$(a^t b^2)^3 = a^{2t} b^{2^{t+1}+2} a^t b^2 = a^{3t} b^{2^t(2^{t+1}+2)+2} = a^{3t} b^{2^{2t+1}+2^{t+1}+2}$$

Como en el caso anterior, con el elemento a^{3t} no podemos obtener nada, y tenemos que estudiar para qué valor de t tenemos que $2^{2t+1} + 2^{t+1} + 2$ es congruente con 0 módulo 5. Pero observemos que estudiar esa congruencia es igual a estudiar la congruencia con 0 módulo 5 de $2^{2t} + 2^t + 1$ y por tanto estamos de nuevo en el caso anterior y no obtenemos nada de este paso.

Ahora tendríamos que:

$$(a^t b^2)^4 = a^{3t} b^{2^{2t+1}+2^{t+1}+2} a^t b^2 = a^{4t} b^{2^t(2^{2t+1}+2^{t+1}+2)+2} = a^{4t} b^{2^{3t+1}+2^{2t+1}+2^{t+1}+2}$$

Se observa rápidamente, que el estudio de este paso se reduce al caso anterior de igual modo.

Por último tendríamos que:

$$(a^t b^2)^5 = a^{4t} b^{2^{3t+1}+2^{2t+1}+2^{t+1}+2} a^t b^2 =$$

$$= a^{5t} b^{2^t(2^{3t+1}+2^{2t+1}+2^{t+1}+2)+2} = a^{5t} b^{2^{4t+1}+2^{3t+1}+2^{2t+1}+2^{t+1}+2}$$

Fácilmente podemos observar que el estudio de la congruencia puede reducirse a la del caso anterior, por la misma razón que las anteriores. Por tanto el orden de $a^t b^2$ es el orden de $a^t b$ para todo t .

3) Estudiemos ahora los elementos de la forma $a^t b^3$. Así tenemos que:

$$(a^t b^3)^2 = a^t b^3 a^t b^3 = a^{2t} b^{3 \cdot 2^t + 3}$$

Tenemos, como en el caso anterior, que si t es 28, el elemento $a^{28} t$ tiene orden 10. Por otra parte tenemos que ver cuándo $3 \cdot 2^t + 3$ es múltiplo de 5. Pero observemos que $3 \cdot 2^t + 3 = 3(2^t + 1)$, y por tanto, estudiar si $3 \cdot 2^t + 3$ es múltiplo de 5 se reduce a ver si $2^t + 1$ lo es, por lo que estamos en el primer caso y obtenemos la misma lista.

El siguiente paso sería:

$$(a^t b^3)^3 = a^{2t} b^{3 \cdot 2^t + 3} a^t b^3 = a^{3t} b^{2^t(3 \cdot 2^t + 3) + 3} = a^{3t} b^{3 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 2^t + 3}$$

Como en el caso anterior, con el elemento a^{3t} no podemos obtener nada, y tenemos que estudiar para qué valor de t tenemos que $3 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 2^t + 3$ es congruente con 0 módulo 5. Pero observemos que estudiar esa congruencia es igual a estudiar la congruencia con 0 módulo 5 de $2^{2t} + 2^t + 1$ y por tanto estamos de nuevo en el primer caso y no obtenemos nada de este paso.

Ahora tendríamos que:

$$(a^t b^3)^4 = a^{3t} b^{3 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 2^t + 3} a^t b^3 = a^{4t} b^{2^t(3 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 2^t + 3) + 3} = a^{4t} b^{3 \cdot 2^{3t} + 3 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 2^t + 3}$$

Se observa rápidamente, que el estudio de este paso se reduce al primer caso de igual modo.

Por último tendríamos que:

$$(a^t b^3)^5 = a^{4t} b^{3 \cdot 2^{3t} + 3 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 2^t + 3} a^t b^3 =$$

$$= a^{5t} b^{2^t(3 \cdot 2^{3t} + 3 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 2^t + 3) + 3} = a^{5t} b^{3 \cdot 2^{4t} + 3 \cdot 2^{3t} + 3 \cdot 2^{2t} + 3 \cdot 2^t + 3}$$

Fácilmente podemos observar que el estudio de la congruencia puede reducirse a la del caso anterior, por la misma razón que las anteriores. Por tanto el orden de $a^t b^3$ es el orden de $a^t b$ para todo t .

- 4) Estudiemos ahora los elementos de la forma $a^t b^4 = a^t b^{-1}$. Procediendo de igual manera que en el caso 2) y 3), observamos que nuestro estudio siempre se reduce al caso 1), y por tanto volvemos a obtener que el orden de $a^t b^{-1}$ es el orden de $a^t b$ para todo t .

Por tanto así ya tenemos los órdenes de los 280 elementos de G . De esta lista podemos ver que el único elemento de orden 2 es el a^{28} . Lo que nos interesa ver es si hay dos elementos de órdenes más pequeños que 4 y 56 que generen todo el grupo. Tenemos que:

- i) Los elementos de orden 4 son a^{14}, a^{42} y sus productos por b^p para todo p .
- ii) Los elementos de orden 7 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- iii) Los elementos de orden 8 son de la forma $a^t b^p$ con t múltiplo de 7.
- iv) Los elementos de orden 14 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- v) Los elementos de orden 28 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- vi) Los elementos de orden 35 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- vii) Los elementos de orden 70 son de la forma $a^t b^p$ con t par.

Con esto podemos ver que si tomamos un elemento de orden 4 y un elemento de tipo ii), iii), iv), v), vi) ó vii), no podemos generar todo el grupo; porque al multiplicar elementos de la forma $a^t b^p$ y $a^t b^{p'}$ se obtiene un elemento de la forma $a^{t+t'} b^r$. Lo mismo ocurre si tomamos dos elementos de orden 7. Finalmente, si tomamos un elemento de orden 7 y otro de orden 8, el área reducida de ese grupo NEC es la misma que la del grupo que tiene dos generadores de orden 4 y 56. Obsérvese que si tomamos a^{28} y cualquier otro elemento tampoco podemos generar el grupo, ya que todos los elementos que tienen órdenes pares, tienen a a^{28} como una potencia de ellos; y en los casos de elementos con órdenes impares, sólo generan elementos $a^t b^p$ con t pares.

Por tanto así demostramos que no podemos bajar el área reducida del grupo NEC asociado y que la obtenida anteriormente es la menor. Por lo tanto hemos demostrado:

Teorema 3.2: El grupo $C_5 \times C_{56}$ tiene género imaginario 207.

El siguiente hueco es el $267 = 60 \cdot 4 + 27$, así que tomamos $k = 4$ y tenemos el grupo $C_5 \times C_{72}$. Observando el estudio que hemos hecho con el grupo anterior respecto a los órdenes de $a^t b, a^t b^2, a^t b^3, a^t b^4$, vemos que el orden del elemento a no ha tenido nada que ver, por lo que el mismo estudio respecto a los órdenes se puede aplicar a este grupo, reduciéndolo a conseguir los órdenes de $a^t b$. De la misma manera, el desarrollo hecho para los elementos $a^t b$ se puede aplicar de igual forma a este, y la solución es la misma exceptuando que sí que aparece un t que cumple que a^{3t} es el neutro.

Por tanto, aplicando el mismo procedimiento podemos llegar a que los órdenes de los elementos son:

- ⇒ Si $t \equiv 2 \pmod{4}$, y t es distinto de 6, 18, 30, 42, 54 y 66; el orden de $a^t b$ es 36.
- ⇒ Si $t = 6, 30, 42$ ó 66; el orden de $a^t b$ es 12.
- ⇒ Si $t = 18$ ó 54; el orden de $a^t b$ es 4.
- ⇒ Si t es impar y no es múltiplo de 3; el orden de $a^t b$ es 72
- ⇒ Si t es impar, múltiplo de 3 y no es potencia de 3, ó bien $t = 3$; el orden de $a^t b$ es 24
- ⇒ Si t es impar y potencia de 3 con $t \neq 3$; el orden de $a^t b$ es 8
- ⇒ Si $t = 12$ ó 60; el orden de $a^t b$ es 30
- ⇒ Si $t = 4, 20, 28, 44, 52$ ó 68; el orden de $a^t b$ es 90
- ⇒ Si $t = 8, 16, 32, 40, 56$ ó 64; el orden de $a^t b$ es 45
- ⇒ Si $t = 36$; el orden de $a^t b$ es 10.
- ⇒ Si $t = 24$ ó 48; el orden de $a^t b$ es 15.

Por tanto así ya tenemos los órdenes de los 360 elementos de G . De esta lista podemos ver que el único elemento de orden 2 es el a^{36} . Lo que nos interesa ver es si hay dos elementos de órdenes más pequeños que 4 y 72 que generen todo el grupo. Tenemos que:

- i) Los elementos de orden 4 son a^{18}, a^{54} y sus productos por b^p para todo p .
- ii) Los elementos de orden 8 son de la forma $a^t b^p$ con t múltiplo de 9.
- iii) Los elementos de orden 12 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- iv) Los elementos de orden 15 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- v) Los elementos de orden 24 son de la forma $a^t b^p$ con t múltiplo de 3.
- vi) Los elementos de orden 30 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- vii) Los elementos de orden 36 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- viii) Los elementos de orden 45 son de la forma $a^t b^p$ con t par.
- ix) Los elementos de orden 90 son de la forma $a^t b^p$ con t par.

Con esto podemos ver que si tomamos un elemento de orden 4 y un elemento de tipo ii), iii), iv), v), vi), vii), viii) ó ix), no podemos generar todo el grupo; porque al multiplicar elementos de la forma $a^t b^p$ y $a^t b^q$ se obtiene un elemento de la forma $a^{t+t'} b^r$. Obsérvese que si tomamos a^{36} y cualquier otro elemento tampoco podemos generar el grupo, ya que todos los elementos que tienen órdenes pares, tienen a a^{36} como una potencia de ellos; y en los casos de elementos con órdenes impares, sólo generan elementos $a^t b^p$ con t pares.

Por otra parte tenemos elementos de orden 3 en el grupo, que son a^{24} y a^{48} y tenemos que ver si con algún otro elemento, da igual el orden, puede generar el grupo. El argumento anterior se puede aplicar de igual manera a estos dos elementos, pero nos faltaría por ver si un elemento de orden 3 y uno de 72 generan todo el grupo. Tomemos a^{24} y $a^t b^p$ con t impar y no múltiplo de 3, por lo que tiene orden 72. Veamos si con estos dos elementos podemos generar alguna potencia de b . Para ello necesitaríamos tomar x veces a^{24} e y veces el elemento $a^t b^p$. Necesitamos pues que $24x + yt$ sea múltiplo de 72. Como 24 y 72 son múltiplos de 4, yt debe serlo también, pero al ser t impar, necesariamente debe serlo y . Así tenemos que el elemento $a^t b^p$ está elevado a un número múltiplo de 4, y por la demostración hecha antes tenemos que $(a^t b^p)^4$ es una potencia de a , por lo que no podríamos generar b con estos dos elementos. Hemos probado que estos dos elementos no pueden generar el grupo.

Por tanto así demostramos que no podemos bajar el área reducida del grupo NEC asociado y que la obtenida anteriormente es la menor. Así, hemos probado:

Teorema 3.3: El grupo $C_5 \times C_{72}$ tiene género imaginario 267.

Así hemos conseguido cubrir los dos primeros huecos del Teorema A, y si consiguiéramos demostrar en la Proposición 3.6 que el área del grupo NEC que ponemos es la mínima, tendríamos cubiertos todos los huecos de la forma $60k + 27$. Por tanto el siguiente paso sería conseguir una generalización de estos dos ejemplos particulares que hemos dado, para que así sólo nos quedaran 5 huecos hasta 1000, que serían: 495, 651, 699, 783, 915.

Referencias

- [1] N.L. Alling, N. Greenleaf; *Foundations of the theory of Klein Surfaces*, Lect. Notes in Math. **219**, Springer-Verlag, 1971.
- [2] A. Bacelo; *Los grupos de género imaginario menor que 10*, Trabajo Fin de Master, Universidad Complutense, Madrid (2013).
- [3] E. Bujalance; *Cyclic groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary*, Pac. J. Math. 109 (1983) 279-289.
- [4] E. Bujalance, J. J. Etayo, E. Martínez; *The full group of automorphisms of non-orientable unbordered Klein surfaces of topological genus 3, 4 and 5*, Rev. Mat. Compl. 27 (2014) 305-326.
- [5] M. Conder, P. Dobcsányi; *Determination of all regular maps of small genus*, J. Combin. Theory Ser. B 81 (2001), no. 2, 224–242.
- [6] Coxeter, H. S. M.; *The abstract groups $G^{m,n,p}$* , Trans. Amer. Math. Soc. 45 (1939), no. 1, 73–150.
- [7] Coxeter, H. S. M., Moser, W. O. J.; *Generators and relations for discrete groups* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 14. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [8] J. J. Etayo; *Sobre grupos de automorfismos de superficies de Klein*, Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid (1983).
- [9] J.J. Etayo, E. Martínez; *The symmetric crosscap number of the groups $C_m \times D_n$* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 138 (2008) 1197-1213.
- [10] J.J. Etayo, E. Martínez; *The action of the groups $D_m \times D_n$ on unbordered Klein surfaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 102 (2011) 97-108.
- [11] J.J. Etayo, E. Martínez; *The symmetric crosscap number of the groups $DC_3 \times C_n$ and $A_4 \times C_n$* , Houston J. Math. 38 (2012) 345-358.
- [12] J.J. Etayo, E. Martínez; *The symmetric Crosscap number of the groups of small-order*, J. Algebra and Appl. 12 (2013), 1250164 (16 pp.).
- [13] J.J. Etayo, E. Martínez; *The real genus of the groups of order 48*, Collectanea Mathematica 65 (2014) 29-46.
- [14] J.J. Etayo, E. Martínez; *Filling the gaps of the symmetric crosscap spectrum*, Preprint (2015).

- [15] G. Gromadzki; *Abelian groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary*, Comment. Math. Prace mat. 28 (1989) 197-217.
- [16] W. Hall; *Automorphisms and coverings of Klein surfaces*, Ph.D. thesis, University of Southampton, Southampton (1977).
- [17] M. Hall Jr., J.K. Senior; *The groups of order 2^n ($n \leq 6$)*, Mc Millan Co., N. York (1964).
- [18] A. M. Macbeath; *The classification of non-Euclidean crystallographic groups*, Canad. J. Math. 19 (1967) 1192-1205.
- [19] C.L. May; *The symmetric crosscap number of a group*, Glasgow Math. J. 41 (2001) 399-410.
- [20] C.L. May; *The groups of real genus $\rho \leq 16$* , Rocky Mt. J. Math. 39 (2009) 1573-1595.
- [21] C.L. May, J. Zimmerman; *Groups of small symmetric genus*, Glasgow Math. J. 37, 115-129 (1995).
- [22] C. L. May, J. Zimmerman; *The groups of symmetric genus $\sigma \leq 8$* , Comm. Algebra 36 (2008), no. 11, 4078-4095.
- [23] C. L. May, J. Zimmerman; *The group of symmetric Euler characteristic -3* , Houston J. Math. 27 (2001) 737-752.
- [24] R. Preston; *Projective Structures and fundamental domains on compact Klein surfaces*, Thesis Univ. of Texas, 1975.
- [25] D. Singerman; *Automorphisms of compact non-orientable Riemann surfaces*, Glasgow Math. J. 12 (1971) 50-59.
- [26] A.D. Thomas, G.V. Wood; *Group Tables*, Shiva Publishing Limited, Orpington (1980).
- [27] R. Tomé; *Aplicación de la teoría de grupos al cubo de Rubik desde un punto de vista superior*, Trabajo Fin de Grado, Universidad Complutense, Madrid (En preparación).
- [28] T.W. Tucker; *There is a group of genus two*, J. Combinational Theory B 36 (1984) 269-275.
- [29] T.W. Tucker; *Symmetric embeddings of Cayley graphs in non-orientable surfaces*, in Graph Theory, Combinatorics and Applications, ed. I. Alavy et al. (Wiley, 1991), pp. 1105-1120.
- [30] H. C. Wilkie; *On non-Euclidean crystallographic groups*, Math. Z. 91 (1966) 87-102.