UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

Análisis de procesos didácticos sobre la determinación y construcción de sólidos en la educación secundaria

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Carlos Rojas Suárez

DIRECTOR

Tomás Ángel Sierra Delgado

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

CENTRO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

ANÁLISIS DE PROCESOS DIDÁCTICOS SOBRE LA DETERMINACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE SÓLIDOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

CARLOS ROJAS SUÁREZ

DIRECTOR

TOMÁS ÁNGEL SIERRA DELGADO

Madrid 2024

AGRADECIMIENTOS

Luego de haber tenido la oportunidad de vivir esta maravillosa aventura, que se ha concretado con la construcción de esta memoria, y que, entre otras cosas, me llevó a otro continente, me ofreció la posibilidad de conocer personas excepcionales y me permitió abrir las puertas a un nuevo mundo de conocimientos, solo me resta agradecer a todos aquellos que han formado parte, en mayor a menor medida, de esta experiencia, entre ellos:

A mi tutor, director de tesis y entrañable amigo Tomás Sierra, por su guía, compañía, comprensión, apoyo y paciencia para que yo pudiera llevar a buen término mi tesis doctoral.

A los profesores miembros del grupo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, por sus valiosos aportes cada vez que les presentábamos los avances de nuestra investigación; en especial a Josep Gascón, quien ha dedicado muchas horas a las lecturas de las versiones preliminares de los artículos que forman parte fundamental de esta memoria.

A los estudiantes y profesores del I.E.S. Menéndez Pelayo de Getafe y a los del I.E.S. Cardenal Cisneros de Madrid, por haber formado parte fundamental de nuestra investigación. Siempre estarán en mi corazón.

A mi hijo Daniel, por haber dedicado tanto tiempo a recabar información en torno a todo lo que representa emprender un proyecto de esta magnitud, además, porque fue gracias a él que elegí la Universidad Complutense de Madrid para vivir esta apasionante aventura que ha supuesto estudiar un doctorado.

A mi hijo Naren, por haber antepuesto mis sueños a los suyos y por haber cruzado el océano para vivir a mi lado todas las experiencias que nos ofreció la vida en España mientras yo desarrollaba mi proyecto de estudios.

A mi esposa Luz Simi, mi compañera incondicional, quien ha estado a mi lado en todo momento. Gracias a su apoyo he podido materializar los sueños más extraordinarios que jamás pensé lograr.

Al universo, por haberme ofrecido la posibilidad de romper muchas barreras mentales, por conducirme a lugares que nunca creí poder conocer y por permitirme aún estar con vida.

A mis hijos, Naren y Daniel

y

A mi esposa, Luz Simi

ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN

Esta memoria es el fruto de varios años de investigación en los que hemos trabajado con el objetivo de hacerle frente a la problemática de la *pérdida de las razones de ser de la geometría elemental de sólidos* tal como se propone para ser estudiada en la Educación Secundaria Obligatoria en España. Para ello, apoyados fundamentalmente en los presupuestos epistemológicos y metodológicos ofrecidos por la Teoría Antropológica de lo Didáctico y en la noción de Modelización Espacio-Geométrica desarrollada en el ámbito de la Teoría de Situaciones Didácticas, hemos diseñado, implementado y analizado, en dos ocasiones, un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) en torno al problema espacial que supone el diseño y construcción de envases.

A medida que nuestra investigación ha ido avanzando, hemos sometido a evaluación los diferentes resultados que hemos ido obteniendo. Hemos enviado dos artículos a dos revistas internacionales y un tercero a una nacional. La retroalimentación recibida por los evaluadores ciegos por pares de cada artículo ha permitido mejorar nuestra labor de investigación. Los tres artículos presentados y publicados está muy interrelacionados entre sí, pues relacionan la elaboración teórica y razonada de un Modelo Epistemológico de Referencia con un trabajo más experimental de diseño, y análisis de dos versiones de un recorrido de estudio e investigación implementado en dos institutos de Educación Secundaria. En consecuencia, hemos decidido presentar nuestro trabajo de investigación mediante una tesis por compendio de publicaciones. Los tres artículos que forman parte fundamental de esta memoria, en orden de publicación, se titulan:

1. *Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación*,

2. *Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria* y

3. *A reference epistemological model regarding the determination and construction of solids for compulsory secondary education*.

Así, entre los principales aportes de nuestra investigación se encuentra el diseño de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) sobre la determinación y construcción de sólidos que servirá como modelo alternativo al vigente. Entre las

funciones de dicho MER destaca la fundamentación de los REI experimentados sobre la determinación y construcción de sólidos. Estos REI favorecen el uso de técnicas de modelización espacio-geométrica y de modelización algebraico-funcional, así como la superación de algunos fenómenos didácticos indeseables que hemos detectado, tales como la interpretación casi exclusivamente aritmética de las fórmulas para el cálculo de áreas y de volúmenes en geometría y la separación entre las geometrías bidimensional y tridimensional.

Dichas propuestas didácticas van a promover que sea posible interrelacionar sectores de las matemáticas que habitualmente se estudian de manera aislada como, el álgebra, las funciones y la geometría, planteando tipos de tareas abiertas e inversas en torno al cálculo de áreas y de volúmenes.

La primera implementación del dispositivo didáctico la llevamos a cabo en un Instituto de Educación Secundaria de Getafe (España), con estudiantes de cuarto de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato. Allí, propusimos tres tipos de tareas: a) sobre el análisis de la forma; b) sobre las dimensiones y la capacidad de algunos envases comerciales; y c) sobre el diseño y la construcción de un envase de litro y, posteriormente, de un envase para un perfume. Gracias al trabajo realizado, perfilamos las tareas propuestas y llevamos a cabo una segunda implementación en otro Instituto de Educación Secundaria, esta vez en Madrid (España), en el marco de una asignatura optativa denominada *Ampliación en matemáticas*, ofrecida a estudiantes de 3º de la Educación Secundaria Obligatoria. En esta ocasión, incluimos una tarea adicional, una evaluación en la que pedimos a los estudiantes que hallasen las medidas de un envase determinado, una vez dada su capacidad y su forma.

Dentro de las conclusiones a las que hemos llegado en nuestra investigación, destacamos:

- El análisis de manuales escolares de matemáticas de la Educación Secundaria nos permite señalar la ausencia casi absoluta de tipos de problemas espaciales que podrían convertirse en una posible razón de ser de algunos de los saberes geométricos que son objeto de estudio en dicha institución.
- La falta de una interpretación algebraico-funcional de las fórmulas que se usan para el cálculo de áreas y de volúmenes de sólidos. La interpretación dominante identifica las fórmulas con algoritmos aritméticos de cálculo.

- La necesidad de ampliar el tiempo que se destina al estudio de las matemáticas en el aula de clase para poder llevar a cabo procesos de estudio donde sea posible trabajar en pequeños grupos y realizar puestas en común que permitan exponer los informes obtenidos por cada grupo y hacer un balance de las posibles respuestas obtenidas. Sugerimos periodos de, por lo menos, 90 minutos que permitan profundizar en las tareas propuestas y donde sea posible el acceso a internet y el uso de programas de geometría dinámica.
- A lo largo de las experimentaciones, hemos constatado el potencial que ofrece la modelización espacio-geométrica para dotar de sentido a los saberes geométricos que se requieren para determinar y construir algunos sólidos y para articular las geometrías bidimensional y tridimensional.
- La importancia de las funciones epistemológicas y didácticas del Modelo Epistemológico de Referencia que hemos diseñado, como una herramienta que potencia el desarrollo de diferentes técnicas de modelización en la actividad matemática en torno a la problemática sobre la determinación y construcción de sólidos, tal como postula la teoría antropológica de lo didáctico.

Palabras clave: Determinación y construcción de sólidos, Modelización espacio-geométrica, Educación secundaria, Recorrido de estudio e investigación, Modelo epistemológico de referencia.

ABSTRACT

This dissertation represents the culmination of several years of research devoted to addressing the issue of the loss of fundamental principles in elementary solid geometry, as proposed for study in Compulsory Secondary Education in Spain. To achieve this goal, we have primarily relied on the epistemological and methodological foundations provided by the Anthropological Theory of Didactics and the concept of Spatial-Geometric Modeling developed within the framework of the Theory of Didactic Situations. On two occasions, we have designed, implemented, and analyzed a Study and Research Path (SRP), focusing on the spatial problem posed by the design and construction of packaging.

As our research has progressed, we subjected the various results obtained to evaluation. Two articles were submitted to international journals, and a third was submitted to a national journal. The feedback received from blind peer reviewers for each article has significantly contributed to the improvement of our research work. The three articles presented and published are closely interconnected, as they relate the theoretical and reasoned development of a Reference Epistemological Model with more experimental work involving the design and analysis of two versions of a Study and Research Path implemented in two secondary education institutes. Consequently, we have decided to present our research work through a thesis by compilation of publications. The three articles that constitute a fundamental part of this compilation, in order of publication, are titled:

1. *Geometric Knowledge as a Response to a Spatial Problem in the Development of a Study and Research Path,*
2. *Institutional Constraints Hindering Space-Geometric Modeling in Secondary Education, and*
3. *A reference epistemological model regarding the determination and construction of solids for compulsory secondary education*.

Thus, among the main contributions of our research is the design of an Epistemological Model of Reference (EMR) on the determination and construction of

solids, which will serve as an alternative model to the current one. One of the functions of this EMR is to provide the foundation for the Study and Research Path (SRP) experienced in the determination and construction of solids. These SRP promote the use of space-geometric and algebraic-functional modeling techniques, as well as overcoming some undesirable didactic phenomena we have identified, such as the almost exclusively arithmetic interpretation of formulas for calculating areas and volumes in geometry and the separation between two-dimensional and three-dimensional geometries.

This approach facilitates the interconnection of mathematical sectors traditionally studied in isolation, such as algebra, functions, and geometry, by introducing types of open and inverse tasks related to the calculation of areas and volumes. The first implementation of the didactic approach occurred at a Secondary Education Institute in Getafe (Spain), involving students in the fourth year of Compulsory Secondary Education and in the Baccalaureate. Three types of tasks were presented: a) focusing on shape analysis; b) addressing the dimensions and capacity of some commercial containers; and c) involving the design and construction of a one-liter container and, subsequently, a container for a perfume. Through the work carried out, we refined the proposed tasks and conducted a second implementation at another Secondary Education Institute, this time in Madrid (Spain), within the framework of an elective course called "Mathematics Extension" offered to third-year students of Compulsory Secondary Education. On this occasion, we included an additional task—an evaluation in which we asked students to determine the measurements of a given container, considering its capacity and shape.

Within the conclusions reached in our research, we highlight:

- The analysis of mathematics textbooks in Secondary Education allows us to point out the almost absolute absence of types of spatial problems that could become a possible rationale for some of the geometric knowledge studied in said institution.
- The lack of an algebraic-functional interpretation of the formulas used for calculating the areas and volumes of solids. The dominant interpretation identifies the formulas with arithmetic calculation algorithms.
- The need to extend the time devoted to the study of mathematics in the classroom to carry out study processes where working in small groups and sharing results can take place. We suggest periods of at least 90 minutes to

delve into proposed tasks, allowing access to the internet and the use of dynamic geometry software.

- Throughout the experiments, we have observed the potential offered by space-geometric modeling to give meaning to the geometric knowledge required to determine and construct some solids and to articulate two-dimensional and three-dimensional geometries.
- The importance of the epistemological and didactic functions of the Reference Epistemological Model we have designed, serving as a tool that enhances the development of different modeling techniques in mathematical activity regarding the issues of determining and constructing solids, as postulated by the anthropological theory of didactics.

Keywords: Determination and construction of solids, Space-geometric modeling, Secondary education, Study and research path, Reference epistemological model.

INTRODUCCIÓN

La problemática que tratamos en esta memoria, situada y analizada en el marco teórico de la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD), se ubica fundamentalmente en los niveles educativos que se corresponden con la *Educación Secundaria Obligatoria* (ESO) en España (MECD, 2022). A pesar de ello, los fenómenos y hechos didácticos que describiremos, así como las conclusiones que presentaremos, no son exclusivos, de este ciclo de formación (alumnos de 12 a 16 años).

El objetivo que nos hemos planteado versa sobre la búsqueda de una posible *razón de ser* de la *geometría elemental*, que forma parte de la problemática general de la pérdida de las razones de ser de la enseñanza de la geometría en la *Educación Secundaria* (Gascón, 2002, 2003, 2004). En concreto, nos hemos decantado por la búsqueda de una posible *razón de ser* de la geometría elemental de sólidos que habitualmente se estudian en la ESO. Para ello, hemos planteado y abordado cuestiones en torno a la determinación y construcción de figuras en 3D, a partir de un tipo de problemas conocidos como *problemas espaciales* en torno al diseño y construcción de envases (Berthelot & Salin, 1992, 2001, 2005; Salin, 2004).

El problema espacial que hemos propuesto, y que se constituyó en el corazón de un *recorrido de estudio e investigación* (REI) que implementamos en dos ocasiones con estudiantes de secundaria, tuvo como propósito el análisis, diseño y construcción de envases con un volumen o una capacidad dados de antemano. La primera implementación del REI tuvo lugar con 14 estudiantes de un instituto de Educación Secundaria de Getafe (España), 10 de cuarto de la ESO y 4 de primero de Bachillerato, a lo largo de 12 sesiones extraescolares de hora y media cada una. Allí abordamos tres tipos de tareas: el análisis de la forma, dimensiones y capacidad de algunos envases comerciales, el diseño y construcción de un envase de litro, y posteriormente el de un envase para un perfume.

La segunda experimentación se desarrolló con 7 estudiantes de un instituto de Educación Secundaria de Madrid capital (España), en 27 sesiones de 55 minutos, en el marco de una asignatura optativa denominada *Ampliación en matemáticas*, ofrecida a estudiantes de 3º de ESO. En este caso, perfilamos las tareas propuestas en la primera implementación del REI e incluimos una tarea adicional en la que propusimos una prueba de evaluación donde era necesario hallar las medidas de un envase determinado, una vez dada su capacidad y su forma.

El punto de partida de nuestra investigación, que nos orientó hacia la necesidad de tratar la problemática de la determinación y construcción de figuras 3D y la riqueza didáctica que hay en ello, lo constituyó fundamentalmente:

a. primero, la revisión del currículo de matemáticas de secundaria (MECD, 2015), en la que encontramos algunos hechos didácticos como la relación cíclica entre los tipos de tareas y las técnicas que sirven como ejemplo para presentar los saberes propuestos para su enseñanza (Rojas & Sierra, 2017). También observamos que los tipos de tareas que se proponen habitualmente a los estudiantes en torno al estudio de los cuerpos geométricos en la ESO solo requieren un uso casi exclusivamente aritmético de las diferentes fórmulas que aparecen;
b. segundo, la lectura de algunas investigaciones previas en torno a la enseñanza de la geometría: a) las que plantean la necesidad de revisar la enseñanza de la geometría en la institución secundaria (Chevallard & Jullien, 1991; Fonseca, 2004; Santaló, 1985); b) las que presentan el espacio sensible como medio fundamental para el estudio de la geometría (Brousseau, 2000; Fregona, 1995); y c) las que relacionan los saberes geométricos con cierto tipo de problemas, denominados problemas espaciales, a través de la *modelización espacio-geométrica* (MEG) (Berthelot & Salin, 1992; Salin, 2004). Lo que muy pronto nos llevó a considerar la riqueza que existe en la relación entre los problemas espaciales y los conocimientos geométricos. Esto nos condujo a la búsqueda de posibles problemas espaciales que pudieran convertirse en una razón de ser de algunos de los saberes geométricos objeto de estudio en la ESO (Rojas & Sierra, 2020);
c. y tercero, los hallazgos que fuimos encontrando nos llevaron al diseño e implementación de un REI sobre el esbozo y elaboración de un envase y a su posterior análisis. Los resultados de las dos experimentaciones realizadas fueron comunicados en diferentes eventos académicos, como en el XXII Simposio que la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (Rojas & Sierra, 2018) y en el Advanced Course on Dialogue between theories in Mathematics Education celebrado en el Centre de Recerca Matemàtica de Cataluña (Rojas & Sierra, 2019). Y posteriormente

se tradujeron en varias publicaciones que forman parte esencial de esta memoria (Rojas & Sierra, 2021a, 2021b).

Este recorrido nos permitió, además, perfilar paralelamente un *modelo epistemológico de referencia* (MER) en torno a la determinación y elaboración de figuras 3D (Rojas & Sierra, 2022). Dicho MER consideramos que, de una parte, servirá como modelo alternativo para superar los fenómenos didácticos indeseables que hemos encontrado en el curso de nuestra investigación, en relación con el modelo epistemológico dominante en la enseñanza de la geometría de sólidos en la ESO; y de otra, abrirá las puertas a desarrollar futuros procesos de estudio en torno la enseñanza de la geometría 3D en la ESO, donde se vincule de manera razonada: el estudio algebraico-funcional del cálculo de áreas y de volúmenes de sólidos, la construcción y determinación de figuras geométricas 2D y 3D y la MEG.

Hemos optado por presentar esta memoria como compendio de publicaciones. Por tanto, a continuación, describiremos su estructura haciendo una mención breve a cada uno de los capítulos que la conforman, así como a las publicaciones que se corresponden con dichos capítulos.

En el capítulo 1, presentamos; por un lado, el problema de investigación en términos del esquema heurístico que ha utilizado Gascón (2011) para definir un problema didáctico en el ámbito de la TAD, así como su evolución y los objetivos que hemos tratado; y por otro, un breve resumen de los elementos teóricos que hemos utilizado para sustentar nuestra investigación, debido a que ya aparecen explicados en cada una de las publicaciones que forman parte de los capítulos 2, 3 y 4.

El capítulo 2 trata fundamentalmente del proceso de elaboración de un MER en torno a la determinación y construcción de sólidos, en el que proponemos un modelo alternativo para el estudio de los cuerpos geométricos en la ESO. La propuesta del MER viene desarrollada en el artículo publicado en la revista Acta Scientiae (Rojas & Sierra, 2022).

Los capítulos 3 y 4 se han dedicado, respectivamente, al análisis de la primera y de la segunda implementación del REI diseñado (Rojas & Sierra, 2021a, 2021b). Asimismo, en ambos artículos se explican y analizan los resultados obtenidos y se proponen algunas conclusiones sobre dichas implementaciones.

En el capítulo 5, exponemos las conclusiones, aportaciones y problemas abiertos en torno a nuestra investigación.

Por último, esta memoria se completa con los anexos en los que se incluyen, entre otros, las tareas propuestas a los estudiantes durante las dos implementaciones del REI y el diario de campo que se corresponde con dichas experimentaciones.

CAPITULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, OBJETIVOS, MARCO TEÓRICO Y ESTADO ACTUAL DEL TEMA

En este capítulo explicamos el problema de investigación que hemos abordado, así como los objetivos, el diseño general de nuestra investigación (evoluación del problema, marco teórico y metodología) y una breve revisión actual del tema. Cabe anotar que como hemos elegido el formato de tesis por compendio de publicaciones para dar a conocer nuestro trabajo, y para evitar repeticiones, mencionaremos dichos artículos cada vez que sea necesario ya que forman parte de algunos de los capítulos de esta memoria.

1.1 Punto de partida de la investigación

El problema didáctico que hemos estudiado en nuestra investigación versa sobre el tipo de conocimientos matemáticos, especialmente geométricos, que se ponen en juego cuando se hace necesario determinar y construir un sólido o figura 3D, por ejemplo, cuando se hace frente al *problema espacial*[1] que supone el diseño y construcción de un envase que cumple determinadas condiciones preestablecidas.

Para centrar, describir y desarrollar el estudio de este problema didáctico nos basaremos en el patrón heurístico propuesto en Gascón (2011), en el ámbito de la *teoría antropológica de lo didáctico* (en adelante, TAD), en el que se proponen tres dimensiones fundamentales para definir los problemas didácticos (P_δ) en las matemáticas; a saber, la dimensión epistemológica (P_1), la dimensión económica (P_2), y la dimensión ecológica (P_3), además de una formulación inicial o *problema docente* (P_0). El citado esquema heurístico[2] se expresa así:

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$$

En lo que sigue describiremos nuestro problema didáctico de investigación siguiendo este esquema heurístico. Empezaremos por indicar que P_0 no está considerado

[1] La noción de problema espacial se aborda a lo largo de los artículos que forman parte de esta memoria.

[2] En este esquema, el símbolo $\oplus$ indica que P_0 es un problema didáctico incompleto y el símbolo $\hookrightarrow$ indica que hay una secuencia lógica, que no es una camisa de fuerza, entre cada una de las dimensiones.

como una dimensión que forme parte de todos los problemas didácticos (Gascón, 2011). Sin embargo, en nuestro caso la problemática docente sí que es un elemento preponderante; además "es necesario añadirle, al menos, la dimensión *epistemológica* P_1 para que pueda ser considerado como un problema" (Ibid., p. 206). Y, por último, P_0 se caracteriza por los cuestionamientos a los que se enfrentan los profesores en torno a lo que se debe enseñar y cómo hacerlo. Por tanto, comenzaremos por describir dicha formulación inicial, el problema docente original, porque así podrá entenderse mejor el origen y, eventualmente, los porqués de las decisiones que hemos tomado a lo largo de nuestra investigación.

Cabe anotar que, "el desarrollo histórico de la investigación didáctica no siempre atiende ni respeta de manera estricta el patrón heurístico, ya que en la historia real puede cambiar el orden en que se estudian algunas dimensiones básicas de un problema didáctico" (Gascón, 2011, p. 206). De hecho, los procesos de investigación rara vez son lineales; más bien, se desarrollan como una red de senderos simultáneos que parten de un mismo punto, a través de los cuales el investigador transita en la búsqueda de una posible solución a la problemática que ha decidido hacer frente.

Por tanto, aunque presentaremos nuestro problema de investigación en paralelo con la descripción de cada una de estas dimensiones, constantemente haremos alusión a los diferentes capítulos que componen esta memoria, ya que estos se corresponden con los avances de nuestro proceso de investigación. En definitiva, como hemos dicho, nuestro trabajo tuvo su origen en un *problema docente*, que describiremos a continuación.

1.1.1 La problemática docente en torno a la enseñanza de la geometría[3]

Desde el 2010 me incorporé al sector público de la educación en Colombia, tras obtener una plaza como profesor de matemáticas. A pesar de que la estructura educativa en mi país supone que un profesor formado para la enseñanza de las matemáticas, como ha sido mi caso, imparta clases de cualquiera de los sectores en los que está *organizada* esta disciplina en el currículo, siempre me sentí más atraído por la geometría por su potencial para vincular y explicar, de manera *evidente*, este sector con otros sectores de

[3] En este apartado no usaré el plural porque la naturaleza misma de la descripción de la problemática inicial supone la escritura en primera persona.

las matemáticas (e.g., el álgebra, la aritmética, el cálculo, etc.). Sin embargo, cuanto más me enfrentaba a la enseñanza de la geometría, más cuestionamientos surgían sobre lo que debía hacer, y cómo hacerlo, para que los estudiantes llegaran a comprender cuál era la razón de ser de las nociones geométricas estudiadas en el aula.

Está claro que, de una parte, entré en el encierro temático que convierte a los profesores en administradores del currículo (Gascón, 2003), en buena medida generado por la presión administrativa en torno al avance de las temáticas establecidas para ser enseñadas en cada nivel de la educación; y de otra parte, desconocía los cuestionamientos en torno a la *relatividad institucional* del saber matemático, y más en concreto del saber geométrico. Y esto último, precisamente porque el currículo escolar en Colombia (Colombia-MEN, 1998, 2006, 2017) supone una concepción única, generalizada y aceptada sobre lo que se entiende por matemáticas y, por tanto, por cada uno de los sectores que la componen.

Esta situación, que comenzó a agudizar y a poner de relieve un conflicto personal y profesional sobre la enseñanza de las matemáticas y en particular de la geometría, me impulsó a elaborar un estudio en el que indagué por las relaciones entre las matemáticas escolares y la cotidianidad de los estudiantes (Rojas, 2015). En dicho estudio, el punto de partida para implicar a los participantes fue una situación en la que ellos mismos, trabajando en equipos, debían tomar decisiones sobre la cantidad, el tipo y la calidad de los materiales necesarios para pintar las paredes de su casa. Este trabajo arrojó luces sobre el tipo de relaciones entre las matemáticas y la cotidianidad de los estudiantes. Sin embargo, también supuso el planteamiento de nuevos y más profundos cuestionamientos sobre la naturaleza de las situaciones que podrían potenciar dichas relaciones. Esto me condujo a una nueva investigación, esta vez, en torno a la búsqueda de las razones de ser de la enseñanza de la geometría.

Fue así como, en el marco del programa de Doctorado en Educación de la Universidad Complutense de Madrid, tras plantearle mis inquietudes e intereses investigativos a mi tutor, comenzamos con el análisis de algunos de los manuales de texto que se correspondían con el currículo de la ESO (MECD, 2015). Como producto de dicha revisión, presentamos una ponencia en el XXI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (Rojas & Sierra, 2017), en el que reportamos algunos resultados como los siguientes:

- El currículo de Secundaria contempla la resolución de problemas como el eje vertebrador de la actividad matemática a realizar. Sin embargo, el estudio de los conocimientos geométricos no se presenta a partir de tipos de problemas o tareas donde la mejor solución incluya el uso de dichos conocimientos, sino donde los datos, las fórmulas y la técnica o técnicas que conducen a ella, vienen dados de antemano.
- Los tipos de tareas y técnicas propuestos en los manuales escolares están promoviendo el aprendizaje de objetos geométricos, que sirven para ser usados en la solución de situaciones en donde intervienen estos mismos objetos. Por ejemplo, se definen las razones trigonométricas y se usan para calcular la medida de los lados o ángulos en un triángulo rectángulo. Esto nos conduce a enunciar que los problemas del mundo sensible, los verdaderos problemas a los que nos podemos ver enfrentados en el mundo real, están completamente alejados del currículo y de los manuales escolares.
- Algunas de las situaciones presentes en los manuales escolares que vinculan datos y eventos reales resultan situaciones pseudo reales, es decir, no constituyen *verdaderos* problemas espaciales, puesto que en el mismo texto se sugiere el conocimiento geométrico a utilizar.

Más adelante, en el VI Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico (CITAD 6), presentamos una ponencia en la que, a partir del trabajo realizado para la SEIEM y de las primeras exploraciones documentales, centramos nuestro interés en un tipo de problemas conocidos como *problemas espaciales* que favorecen la modelización matemática del espacio sensible a través de los conocimientos geométricos.

La ponencia presentada en el CITAD 6 se tradujo en un artículo que fue publicado en una edición especial de la revista *Educaçao Matemática Pesquisa* (Rojas & Sierra, 2020), sobre los avances de la TAD.

Como resultado de esos primeros trabajos, y habiendo reconocido el potencial de los problemas espaciales para dar sentido a los conocimientos geométricos a través de la modelización espacio-geométrica (Salin, 2004), hipotetizamos que "existen problemas espaciales que pueden constituirse en una posible razón de ser de algunos de los conocimientos geométricos escolares referidos en el currículo la ESO" (Rojas & Sierra, 2020, p. 600). Así, decidimos profundizar en el estudio de este tipo de problemas (Berthelot & Salin, 1992, 2005), recabar información de otros trabajos en la misma línea (Brousseau, 2000; Gálvez, 1985) y comenzar con el diseño de un recorrido de estudio e investigación (REI) para implementar en la escuela secundaria.

En ese momento, las primeras preguntas de investigación giraron en torno a los tipos de problemas espaciales a los que suelen enfrentarse las personas que tienen profesiones manuales, a las técnicas que permiten resolverlos y a su dominio y validez, y a los elementos tecnológicos que permitirían explicar, justificar y hacer comprensibles dichas técnicas. Sin embargo, como puede verse en los capítulos 3 y 4, y dado que detectamos que uno de los hechos didácticos preponderantes que se puso de relieve durante la revisión del currículo y los manuales de texto era la desarticulación entre las geometrías bidimensional (2D) y tridimensional (3D) en la ESO, nos centramos en la búsqueda de posibles problemas espaciales que nos permitieran articular dichas geometrías. Fue así como definimos y refinamos el problema espacial sobre el diseño y construcción de un envase. Por tanto, en esta memoria hemos partido del problema docente siguiente: *¿Qué tengo que enseñar y cómo tengo que enseñar la geometría 3D en la enseñanza Secundaria?*

1.1.2 La dimensión epistemológica del problema didáctico

La problemática de la dimensión epistemológica, P_1, hace referencia, de manera general, a la descripción e interpretación de un determinado ámbito matemático, que en nuestro caso se concreta en la determinación y construcción de sólidos. Dicha descripción se hace "conforme a la génesis y el desarrollo (incluyendo ampliaciones y completaciones progresivas) de determinadas praxeologías matemáticas" (Gascón, 2011, p. 2012). En nuestro caso, gracias a las dos implementaciones del REI sobre el diseño y construcción de envases, que se describen en los capítulos 3 y 4 respectivamente, fuimos perfilando y retroalimentando el MER en torno a *la determinación y construcción de sólidos en la ESO*, que detallamos en el capítulo 2.

Con la construcción de dicho MER pretendemos responder a cuestiones tales como las siguientes:

- ¿Cómo se puede caracterizar la determinación y construcción de sólidos mediante un MER elaborado en el marco del modelo general de la actividad matemática que plantea la TAD?
- ¿Cuáles son las cuestiones a las que responde la determinación y construcción de sólidos, es decir, cuál es su razón de ser?
- ¿Cómo puede relacionarse la geometría 3D con la modelización espacio-geométrica y la modelización algebraico-funcional?

En dicho MER presentamos, a partir de la cuestión generatriz sobre cómo diseñar y construir un envase adecuado que tenga una capacidad o volumen predeterminado, en primer lugar, de forma breve, una organización matemática (OM) sobre la determinación y construcción de figuras 2D y; en segundo lugar, de forma más amplia, la OM en torno a la determinación y construcción de sólidos. De este modo, ofrecemos una posible razón de ser desde el punto de vista algebraico-funcional, tanto para la determinación de algunos sólidos en la ESO, mediante el debilitamiento progresivo de la regularidad, como para la articulación entre las geometrías 2D y 3D en la ESO.

Así, el MER construido, considerado como un sistema de referencia relativo y provisional, nos va a permitir relacionar la dimensión epistemológica del problema didáctico con la problemática de la *dimensión económica* que consideramos a continuación.

1.1.3 La dimensión económica del problema didáctico

La problemática de la dimensión económica, P_2, incluye las cuestiones en torno a cómo son las OM y las organizaciones didácticas (OD) en una institución determinada. Es decir, cómo está organizado un determinado saber en, por ejemplo, la institución escolar de Secundaria. Y para responder a esta cuestión, "todo problema didáctico tiene que hacer referencia, en forma más o menos explícita, a todas las etapas de la transposición didáctica y debe contener una praxeología matemática suficientemente amplia" (Gascón, 2011, p. 214). Dichas etapas incluyen: el *saber sabio*, del cual se ocupan las instituciones productoras del saber; el *saber a enseñar*, a cargo de los eruditos que integran la noosfera y que cuestionan y sugieren qué se ha de enseñar; el *saber enseñado*, que está a cargo generalmente de los profesores en la institución escolar; y el *saber aprendido*, que es el que finalmente construye el estudiante.

De este modo, para dar una respuesta a la problemática de la dimensión económica deberemos responder a cuestiones como las siguientes:

- ¿Qué características presentan la OM y las OD en torno a la determinación y construcción de envases en Secundaria?
- ¿Qué tipo de prácticas matemáticas sobre dicho saber matemático, de las consideradas en el MER pueden realizarse en la Enseñanza Secundaria?
- ¿Hasta qué punto se lleva a cabo o es posible llevar a cabo en Secundaria actividades de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcional?
- ¿Cuál es modelo epistemológico dominante en Secundaria sobre la determinación y construcción de sólidos?
- ¿Qué dificultades se presentan cuando se plantean tipos de tareas sobre el diseño y construcción de envases en Secundaria?

Para contestar a estas preguntas utilizaremos el MER elaborado como respuesta a la problemática de la dimensión epistemológica. Así, desde la perspectiva que proporciona dicho MER, podremos observar la ausencia de técnicas de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcional al analizar la propuesta sobre la construcción de sólidos que propone el texto escolar usado por los alumnos de Secundaria. Asimismo, mostraremos las dificultades para poner en práctica dichas técnicas de modelización en el recorrido de estudio e investigación propuesto sobre el diseño y construcción de envases.

En los capítulos 2, 3 y 4, presentamos los elementos fundamentales que intervienen en el proceso de transposición didáctica de la determinación y construcción de sólidos, teniendo como base la modelización espacio-geométrica. Por ejemplo, en el capítulo 3, utilizamos los *indicadores de grado de completitud* de una organización matemática local relativamente completa, para analizar y describir la actividad matemática de modelización efectivamente llevada a cabo por los estudiantes, tras la primera implementación del REI (Rojas & Sierra, 2021a). Así, analizamos hasta qué punto la actividad matemática desarrollada por los alumnos permite la elaboración de una organización matemática relativamente completa en torno a la determinación y construcción de sólidos (análisis del *saber aprendido* por los estudiantes).

1.1.4 La dimensión ecológica del problema didáctico

En la problemática de la dimensión ecológica, P_3, los cuestionamientos se centran en el por qué las organizaciones matemáticas y didácticas han llegado a ser como son en una institución determinada, y en las condiciones que se requerirían (y las restricciones que dificultarían) su desarrollo en una dirección determinada. En nuestro caso, en el capítulo 4, presentamos y discutimos las restricciones institucionales que encontramos para llevar a cabo una actividad de modelización espacio-geométrica en Secundaria, en el desarrollo de la segunda implementación del REI (Rojas & Sierra, 2021b). El tipo de cuestiones que abordamos dentro esta problemática son:

- ¿Por qué la modelización espacio-geométrica está ausente en la Enseñanza Secundaria?
- ¿Qué restricciones dificultan la puesta en práctica de técnicas de modelización espacio-geométrica cuando se implementa un proceso de estudio sobre el diseño y construcción de envases?
- ¿Cómo organizar el estudio de la determinación y construcción de sólidos de modo que sea posible desarrollar técnicas de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcionales?
- ¿Qué tipo de dispositivos didácticos sería necesario implementar de modo que se facilite el uso de dichas técnicas de modelización?

En definitiva, la problemática de la dimensión ecológica plantea cuestiones sobre cuáles son las condiciones para que las técnicas de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcionales vivan y puedan articularse en la Educación Secundaria, así como cuáles son las restricciones que dificultan su estudio.

En resumen, los capítulos 2, 3 y 4 que forman parte de esta memoria contienen elementos de respuesta, en mayor o menor medida, a las cuestiones que forman parte de cada una de las dimensiones que permiten definir nuestro problema didáctico. Estos elementos de respuesta se obtienen de las descripciones y análisis de las implementaciones de un REI sustentado en un MER para la construcción y determinación de sólidos en la Educación Secundaria.

1.2 Evolución del problema de investigación

En los capítulos 2, 3 y 4 describimos y explicamos tanto el problema de investigación al que hemos decidido hacer frente como los resultados obtenidos al intentar abordarlo. Consideramos que para una mejor comprensión de este es necesario describir su evolución.

Como ya lo hemos indicado, tras la primera revisión del currículo de matemáticas y de los manuales escolares (Rojas & Sierra, 2017), identificamos una serie de hechos didácticos que forman parte del fenómeno de la pérdida de las razones de ser de la enseñanza de la geometría. Desde ese momento comenzamos a identificar la relación entre los problemas espaciales y los conocimientos geométricos. Entonces, nos planteamos la siguiente pregunta:

> *"¿Qué tipo de organizaciones matemático-didácticas en torno a los conocimientos geométricos propuestos en la ESO pueden plantearse de modo que los alumnos puedan encontrar en ellas alguna de las razones de ser de dichos conocimientos?"* (Rojas & Sierra, 2020, p. 595).

La búsqueda de una respuesta a esta pregunta nos condujo a una exploración documental sobre la enseñanza de la geometría, a una nueva revisión del currículo, a un nuevo análisis de algunos de los manuales escolares que se corresponden con dicho currículo y al estudio de los presupuestos epistemológicos de la TAD.

Como resultado de este trabajo empírico, nuestro problema se fue perfilando y, en cierto sentido, desarrollando, de manera que luego de la nueva revisión curricular nos preguntamos:

> *¿Qué tipo de organizaciones matemático-didácticas (OMD) permitirían sacar a la luz y situar en el centro del proceso de estudio las razones de ser de algunos de los contenidos geométricos de la ESO, permitiendo articular su relación dentro de la geometría en 2D y 3D?* (Rojas & Sierra, 2021a, p. 219).

Para poder encontrar una posible solución al problema didáctico general anterior nos propusimos empezar por intentar una respuesta a las siguientes cuestiones:

> *Los problemas espaciales tal como fueron caracterizados en (Salin, 2004), ¿pueden constituirse en una posible razón de ser de un ámbito significativo de los conocimientos de la geometría elemental de la ESO? Más concretamente, ¿qué conocimientos de la geometría 2D y 3D requieren las cuestiones y las tareas que se plantean cuando se pretende diseñar y construir un envase de un litro? ¿Qué restricciones y limitaciones es previsible que surjan a lo largo del desarrollo de un REI generado por el problema espacial asociado a dicha construcción?* (Rojas & Sierra, 2021a, p. 219).

Para intentar responder a dichas preguntas, desarrollamos e implementamos un REI en torno al diseño y construcción de envases, matizado por la noción de modelización espacio-geométrica (Berthelot & Salin, 1992, 2005; Bloch & Salin, 2004; Salin, 2004).

Así, el avance en nuestra investigación nos permitió evidenciar cada vez con mayor claridad la potencia de la modelización espacio-geométrica en la articulación de las geometrías 2D y 3D, durante la resolución de un problema espacial. Al mismo tiempo, estudiamos qué tipo de restricciones dificultan el uso de técnicas de este tipo de modelización en las instituciones de enseñanza. Por esta razón, concentramos la mirada en la ecología de la determinación y construcción de sólidos en la Educación Secundaria. Y es precisamente con la intención de abordar el problema ecológico que refinamos el REI e hicimos una segunda implementación. En dicha implementación, nos enfocamos en la dimensión ecológica de la enseñanza de la geometría 3D mediante el uso de técnicas de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcionales (Rojas & Sierra, 2021b).

Tras la segunda implementación del REI logramos identificar algunas de las condiciones y restricciones que dificultan y reducen las posibilidades de que los alumnos desarrollen dichas técnicas de modelización en la Educación Secundaria.

Al mismo tiempo que hemos dado posibles respuestas a las cuestiones anteriores, hemos ido abordando el problema de la elaboración de un MER en torno a la determinación y construcción de sólidos. Dicha tarea ha consistido en explicitar las condiciones que permiten determinar la forma y el tamaño de un sólido (en nuestro caso, un envase) como paso previo a la puesta en marcha de una técnica para construirlo. El desarrollo progresivo del MER nos ha permitido mostrar cómo es posible interrelacionar el estudio de la geometría con el del álgebra y las funciones mediante la puesta en práctica de técnicas de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcionales, muy poco frecuentes en la Enseñanza Secundaria (Rojas & Sierra, 2022).

En definitiva, a lo largo del desarrollo de nuestra investigación hemos tratado de dar respuesta a los *siguientes objetivos*:

- Elaborar un modelo epistemológico de referencia (MER) donde se expliciten las condiciones que permiten determinar la forma y el tamaño de un sólido, para después estudiar las posibles técnicas que permiten construirlo (Rojas & Sierra, 2022).
- Analizar la propuesta didáctica en torno a la geometría tridimensional (3D) (construcción de cuerpos geométricos) presentada en algunos los textos escolares de Educación Secundaria Obligatoria (Rojas & Sierra, 2017, 2021b).
- Detectar algunos de los fenómenos didácticos que se presentan en la enseñanza de la construcción de cuerpos geométricos (Rojas & Sierra, 2021a, 2021b).
- Diseñar e implementar una propuesta didáctica dentro del marco de la teoría antropológica de los didáctico (TAD) para el estudio de la determinación y construcción de sólidos en la Enseñanza Secundaria con el fin de hacer frente a algunos de los fenómenos didácticos encontrados (Rojas & Sierra, 2021b).
- Identificar y analizar las diferentes restricciones que se presentan al querer llevar a cabo la implementación del proceso de estudio diseñado (Rojas & Sierra, 2021b).

1.3 Sobre el marco teórico

En coherencia con el diseño general de nuestra investigación, desarrollado en el marco de la TAD, a lo largo de las publicaciones que forman parte de esta memoria aparecen ya explicados en los capítulos 2, 3 y 4 los elementos teóricos y metodológicos que hemos utilizado tanto para la elaboración del MER como para el diseño, implementación y análisis del REI, en las dos ocasiones que lo hemos experimentado. Entre dichos elementos se encuentran los siguientes:

- La noción de praxeología matemática, que hemos usado para sustentar el MER que hemos diseñado (ver capítulo 2).

- La caracterización de los conocimientos espaciales y geométricos, propuesta desde el marco de la TSD que nos ha ayudado a orientar y a indagar una posible respuesta a nuestra problemática de investigación (ver capítulos 2, 3 y 4).
- El proceso de transposición didáctica (ver capítulo 2), que nos ha permitido considerar las diferentes instituciones por donde transcurre y se va transformando el saber considerado, en nuestro caso, la determinación y construcción de cuerpos geométricos.
- La elaboración de un MER, que permite escapar a las diferentes restricciones que se presentan en las diferentes instituciones por donde el saber objeto de estudio va sufriendo diferentes transformaciones. El análisis didáctico de los datos empíricos de dicho proceso de transposición didáctica nos ha permitido detectar algunos fenómenos didácticos como la separación entre las geometrías 2D y 3D y el debilitamiento de las actividades de modelización, en el estudio de la geometría en la ESO (ver capítulos 2, 3 y 4).
- El modelo de organización didáctica que propone la TAD, los REI, que hemos utilizado como dispositivo didáctico para el estudio del problema espacial propuesto y posteriormente para el análisis de la actividad matemática desarrollada por los alumnos.
- Los mapas de cuestiones y respuestas utilizados por los propios alumnos para desarrollar su proceso de estudio en las dos implementaciones del REI (ver capítulos 3 y 4). La cuestión generatriz y conjunto de cuestiones derivadas que han permitido dirigir y describir el proceso de elaboración del MER.
- Los indicadores del grado de completitud de una organización matemática local relativamente completa, que utilizamos para analizar la actividad matemática llevada a cabo por los estudiantes tras la primera implementación del REI (análisis del saber aprendido) (ver capítulo 3), y para determinar las restricciones y limitaciones institucionales que dificultan la actividad de modelización en la enseñanza secundaria (ver capítulo 4).
- La modelización espacio-geométrica tal como se propone desde la TSD y su inserción dentro de la problemática de modelización matemática que se plantea en el marco de la TAD, que nos permitió sacar a la luz el fenómeno de ausencia casi total de actividades de modelización en el estudio de los cuerpos geométricos en la ESO (ver capítulo 2 y 4. La noción de MEG también nos ayudó a perfilar

nuestro problema de investigación y nos orientó en el diseño de un tipo de tareas, basado en el problema espacial sobre el diseño y construcción de envases (ver capítulos 2, 3 y 4).

Por último, quisiéramos agregar que, en general, el enfoque teórico utilizado en una investigación, y la nuestra no es la excepción, responde a varios factores cruciales y nada ingenuos como los siguientes: a) la naturaleza misma del problema al que se quiere hacer frente que, como bien indica Gascón (2011), puede partir de un problema docente con todos los matices ligados a dicho problema; b) los aspectos que el investigador considere importantes para destacar de dicha problemática; c) la eficiencia de las herramientas que ofrezcan los enfoques teóricos a disposición del investigador; y d) sus conocimientos previos. En nuestro caso, todos estos elementos teóricos y metodológicos utilizados los encontramos principalmente en la TSD y en la TAD. Hasta aquí, esta breve presentación del marco teórico que hemos utilizado como herramienta para abordar nuestro problema de investigación. A continuación, describiremos la metodología que hemos puesto en marcha.

1.4 Sobre la metodología

La metodología que hemos usado en nuestra investigación, que describimos en los capítulos 2, 3 y 4, es coherente con los presupuestos teóricos de la TAD y, en particular, con la metodología de la *Ingeniería didáctica* (García et al., 2019) tal y como se entiende desde este marco teórico. Por tanto, el diseño, implementación y análisis de las dos versiones del REI, así como el MER que construimos, reflejan los principios de esta metodología en la que:

> La primera fase de análisis preliminar incluye el análisis epistemológico del contenido matemático, de su necesidad de ser incluido en una cierta institución escolar y de las condiciones y restricciones que podrían afectar su estudio en dicha institución. Esta fase es crucial ya que implica la construcción de un modelo epistemológico de referencia (MER) del saber en cuestión, así como la identificación de fenómenos didácticos hipotéticos. (Ibid., p. 81).

En nuestro caso, esta primera fase se realizó en varios momentos e incluyó: 1) el análisis de las actividades escolares propuestas en algunos manuales escolares de la ESO en torno a los conocimientos espaciales y geométricos (Rojas & Sierra, 2017); 2) el análisis de la actividad matemática en torno a la construcción de cuerpos geométricos que se propone en un manual escolar utilizado por alumnos de 3º de ESO (Rojas & Sierra, 2021b); y 3) la elaboración de un MER en torno a la determinación y construcción de sólidos (Rojas & Sierra, 2022).

> La segunda fase, de diseño y análisis *a priori*, corresponde al diseño. Se distingue una dimensión de *análisis matemático*, de caracterización de los objetos matemáticos y de la actividad que se realizará en torno a ellos (praxeologías matemáticas) en estrecha relación con el MER construido. (García et al., 2019, p. 81).

Esta fase se corresponde con el análisis a priori del REI sobre el diseño y construcción de envases. En ese caso, buscamos posibles soluciones que nos permitieran anticipar algunas de las respuestas a las que podrían llegar los estudiantes durante su implementación. De otra parte, este tipo de análisis también se refleja claramente en una de las tareas propuestas a los estudiantes, durante la segunda implementación del REI. Allí, fueron ellos quienes elaboraron un análisis a priori, que se tradujo en la construcción de un mapa de cuestiones y respuestas, que les guio en la búsqueda de una posible respuesta a la cuestión: *¿Cómo diseñar un envase atractivo y eficiente para un perfume?* (Rojas & Sierra, 2021b).

> La tercera fase, de análisis *in vivo* de la experimentación en condiciones escolares, incluye la implementación en el aula del proceso de estudio diseñado, su observación y la recolección de datos. Se trata de la fase experimental de la metodología, que sirve de puente entre la fase anterior y la siguiente. (García et al., 2019, p. 81).

En esta fase, que incluye las dos experimentaciones del REI, además de que perfilamos el MER, recabamos toda la información que sirvió de base para el análisis de los datos de nuestra investigación. Dicha información fue registrada en: (a) grabaciones audiovisuales de cada una de las sesiones durante la implementación de las dos versiones del REI, (b) el diario de campo del investigador en el que se recogen varias de las transcripciones de dichas grabaciones (ver anexos 3 y 8), y (c) los cuadernos de trabajo de los estudiantes (ver anexos 4, 9 y 10).

> Una cuarta fase, de análisis a posteriori, basada en las evidencias empíricas recolectadas en la fase anterior, pretende contrastar, validar y desarrollar las hipótesis sobre las que se fundamentó el diseño, y en particular las hipótesis formuladas sobre posibles fenómenos

> didácticos. Esta fase puede conducir a la formulación de nuevos problemas, y/o de nuevos fenómenos didácticos. (García et al., 2019., p. 81).

Un ejemplo del análisis a posteriori lo constituye la revisión y el ajuste del REI tras su primera implementación, teniendo en cuenta los fenómenos didácticos detectados. Además, el análisis a posteriori de cada una de estas implementaciones dio como resultado la publicación de dos artículos (Rojas & Sierra, 2021a, 2021b), nos ayudó a perfilar el MER (Rojas & Sierra, 2022) y, entre otros, nos sirvió para retroalimentar el trabajo elaborado por estudiantes como en el caso del examen que incluimos al final de la segunda experimentación del REI (ver anexos 11 y 12).

Antes de continuar, describiremos las características generales de cada una de las implementaciones del REI aportando, en algunos casos, datos que no incluimos por falta de espacio en los artículos que constituyen parte fundamental de los capítulos 2, 3 y 4.

1.4.1. Primera experimentación. Asignatura extraescolar: Semillero matemático

La primera experimentación del REI fue llevada en el Instituto de Enseñanza Secundaria (I.E.S.) Menéndez Pelayo, de Getafe (España). A dicha experimentación le llamamos *Semillero matemático*; de una parte, emulando al sembrador que prepara la tierra, la abona, deposita allí la semilla, la riega frecuentemente y luego espera a que esta germine, crezca y dé sus frutos; y, de otra parte, porque esta analogía del sembrador de semillas representa muy bien los principios metodológicos de la TAD que hemos adoptado en nuestra investigación en tanto que son los estudiantes quienes, durante el desarrollo de un REI, construyen los conocimientos en respuesta a una cuestión suficientemente viva y rica.

Para poder llevar a cabo dicha experimentación, seguimos un proceso que incluyó cuatro etapas:

a. Presentación del proyecto. Para ello, hablamos con la directora del instituto y, tras explicarle las líneas generales de nuestra investigación, solicitamos su autorización para hacer una convocatoria abierta a todos los estudiantes de secundaria que quisieran formar parte del Semillero matemático.
b. Convocatoria. Esta etapa consistió en la presentación, en el auditorio principal del instituto, de las características específicas del Semillero matemático a los estudiantes de secundaria. En dicha presentación, que se llevó a cabo el 18 y

19 de diciembre del 2017, aclaramos que para formar parte del Semillero no era necesario haber obtenido buenas notas en matemáticas porque lo que nos interesaba era el trabajo que efectivamente se llevase a cabo durante su desarrollo.

c. Inscripción. En enero del 2018, luego del receso con ocasión de las Navidades, se distribuyó un formulario de inscripción a los estudiantes de Secundaria para que se inscribiesen oficialmente en el Semillero matemático (ver anexo 1).
d. Implementación. La experimentación del REI tuvo lugar entre el 7 de febrero y el 16 de mayo del 2018, incluidas ambas fechas. En total tuvimos 12 sesiones extraescolares de hora y media cada una en las que participaron 14 estudiantes, 10 de cuarto de la ESO y 4 de primero de Bachillerato (ver anexo 3). Como ya lo hemos indicado, allí abordamos tres tipos de tareas: a) el análisis de la forma, dimensiones y capacidad de algunos envases comerciales; b) el diseño y construcción de un envase de litro; y c) el diseño y elaboración de un envase para un perfume. Cada una de las sesiones fue grabada en vídeo para luego transcribirlas en el diario de campo del investigador que, junto con el cuaderno de trabajo de los estudiantes, constituyó el compendio de datos que usamos en nuestro estudio para someter a prueba las hipótesis propuestas.
e. Presentación de informe. Luego de la experimentación del REI, presentamos a los profesores y a la directora del instituto un informe final en el que dimos a conocer los resultados obtenidos del trabajo llevado a cabo con los estudiantes (ver anexo 5).

1.4.2 Segunda experimentación. Asignatura optativa: Ampliación en matemáticas

La segunda experimentación del REI fue desarrollada en el I.E.S. Cardenal Cisneros, de Madrid (España). A diferencia de la primera implementación, en esta ocasión el REI fue llevado a cabo en el marco de una asignatura optativa denominada *Ampliación en matemáticas*, ofrecida a estudiantes de 3º de ESO.

En este caso, el proceso que seguimos fue:

a. Presentación del proyecto a la profesora titular de la asignatura.
b. Implementación. Esta segunda experimentación del REI tuvo lugar entre el 1 de noviembre del 2018 y el 27 de abril del 2019, incluidas ambas fechas (ver

anexo 8). En total tuvimos 27 sesiones escolares de 55 minutos cada una, en las que participaron 7 estudiantes de 3º de la ESO. Cabe recordar que, como a partir de la primera implementación del REI perfilamos y mejoramos las tareas propuestas, en este caso incluimos una cuarta tarea en la que propusimos una prueba de evaluación donde era necesario hallar las medidas de un envase con forma de pirámide recta de base hexagonal regular, de manera que su capacidad fuese de 175 ml. (ver anexos 11 y 12). En este caso, también las grabaciones de las sesiones, sus transcripciones en el diario de campo del investigador y el cuaderno de trabajo de ellos estudiantes, se constituyeron en información determinante en nuestra investigación (ver anexo 8).

c. Reporte de notas. Al finalizar la implementación del REI, la profesora titular nos solicitó que valorásemos numéricamente las tareas llevadas a cabo por los estudiantes y que entregásemos, en un registro digital, dichas notas porque las usaría para complementar el reporte de evaluación de ese grupo durante el tiempo que llevamos a cabo nuestra implementación.

A continuación, nos proponemos realizar una breve revisión del estado actual de nuestro tema de investigación.

1.5 Revisión del estado actual del tema de investigación

Nuestro objetivo es realizar una breve revisión del estado actual de nuestro tema de investigación, que pueda complementar la que ya hicimos en cada una de las publicaciones presentadas en los capítulos 2, 3 y 4 de esta memoria.

1.5.1 La enseñanza de geometría en la educación secundaria

El saber geométrico puede considerarse un objeto cultural, al igual que otros saberes matemáticos, como el álgebra, la aritmética, etc., y no matemáticos como la literatura, el arte, la química, la geología, etc., (Chevallard & Jullien, 1990). Tenemos entonces que la geometría, como parte importante del legado cultural de nuestra sociedad, es uno de los saberes que se propone en el currículo español para ser enseñados tanto en la Educación Primaria con en la Educación Secundaria. En el nuevo currículo español de la Educación Secundaria Obligatoria, la geometría aparece dentro del saber espacial:

> El sentido espacial aborda la comprensión de los aspectos geométricos de nuestro mundo. Registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas, describir sus movimientos, elaborar o descubrir imágenes de ellas, clasificarlas y razonar con ellas son elementos fundamentales de la enseñanza y aprendizaje de la geometría. (MEFP, 2022, p. 156)

Santaló (1985), consideró que en la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria había dos tendencias bien determinadas: la geometría experimental e intuitiva, y la geometría axiomática. Además, abogó por una enseñanza útil de la geometría, ya que cuando lo que se estudia en las clases difiere de lo que se aprende en la vida diaria, entonces surgen desequilibrios en el sistema escolar. Santaló señala que para la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria se debe considerar el postulado siguiente:

> **La Geometría (en secundaria) debe ser una ayuda para comprender el mundo exterior**
>
> En este sentido hay que proseguir con la clasificación de las formas de los objetos reales iniciada en la escuela primaria, e insistir en las medidas de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes. Algunas fórmulas deben demostrarse (como las de las áreas del triángulo y trapecio a partir de la del rectángulo) y otras justificarse de manera experimental e intuitiva (como el área del círculo). Hay que operar con figuras irregulares, dejando que el alumno decida sobre las medidas a tomar para poder calcular el área. Hay que dar medios aproximados para los cálculos de áreas y volúmenes de figuras y cuerpos irregulares, que son los más frecuentes en la vida real. Un plano de la ciudad y un mapa del país debe estar en el aula para medir distancias, ángulos y áreas y derivar problemas de significado real. (Ibid., pp. 15-16)

La Comisión francesa de Reflexión sobre la Enseñanza de las Matemáticas en su informe sobre la geometría y su enseñanza del año 2000 señala que:

> En cualquier caso, el hecho de haber construido, estudiado y diseccionado figuras, planas o no, es sin duda esencial para adquirir una visión del espacio y de sus representaciones, que sigue siendo una de las misiones fundamentales de la enseñanza de las matemáticas. (CREM, 2000, p. 5) (La traducción es nuestra)

Freudenthal (1983) propuso que el estudio del saber geométrico debería empezar por un trabajo en torno a la determinación y construcción de sólidos, porque el estudio de los sólidos resulta más concreto e intuitivo y posteriormente al querer describirlos y analizarlos permite acercarse más fácilmente al estudio las figuras planas.

En lo que se refiere a cómo se organiza la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria, tenemos que:

- Por un lado, Pérez y Guillén (2007) consultaron a 19 profesores de Educación Secundaria sobre sus concepciones sobre la enseñanza de la geometría en dicha institución y encontraron que la enseñanza de geometría en la ESO se dedica fundamentalmente al cálculo de áreas y volúmenes y apenas se realizan tareas de clasificación, reproducción, descripción, representación y construcción de figuras geométricas. También Guillén, González y García (2009), después de analizar el tipo de tareas que proponen los manuales escolares, llegaron a la conclusión siguiente: “El cálculo de áreas y volúmenes en secundaria se basa fundamentalmente en la aplicación de las fórmulas a partir de sus elementos” (p. 255). Ello parece confirmar que, en general, el estudio de los cuerpos geométricos suele limitarse a un uso aritmético de las fórmulas de cálculo de áreas y volúmenes.
- Por otro lado, Perrin-Glorian et al., (2013) señalan que la problemática de *modelización espacio-geométrica*, planteada por Berthelot y Salin dentro del marco de la Teoría de Situaciones Didácticas, va a permitir relacionar el espacio sensible y el espacio geométrico y, en consecuencia, consideran que es una propuesta didáctica muy interesante su implementación en la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria.

1.5.2 La pérdida de las razones de ser de la enseñanza de la geometria

Dentro de la TAD se ha estudiado el proceso de transposición didáctica (Bosch & Gascón, 2007; Chevallard, 1991), es decir, el proceso de la transformación necesaria de un saber que debe pasar por distintas instituciones para llegar a ser reconstruido por la comunidad de estudio (estudiantes y profesor) de un aula en una institución escolar determinada. Un postulado fundamental dentro de TAD es que si queremos enseñar un saber determinado en una institución es necesario analizar cuáles son sus posibles *razones* *de ser*, es decir, necesitamos determinar las cuestiones que dan sentido a dicho saber en dicha institución. Así, con las herramientas que proporciona la TAD se han elaborado diversas tesis doctorales que han indagado por la razón de ser de diferentes saberes en las instituciones de Enseñanza Secundaria, de Enseñanza Universitaria y de Formación del Profesorado. A continuación, pasamos a enumerar algunos casos:

- Fonseca (2004), estudió las características de la actividad matemática llevada a cabo en el paso de la Educación Secundaria a la Universidad, utilizando los indicadores del grado de completitud de una OM. Entre los resultados obtenidos destacan la falta de flexibilidad de la actividad matemática desarrollada y la atomización y desarticulación de las OM estudiadas. En definitiva, se constató la ausencia, tanto en Secundaria como en la Universidad, de organizaciones matemáticas locales relativamente completas.
- García (2005), tomó como objeto de estudio el aislamiento del estudio de la proporcionalidad con respecto a las demás relaciones funcionales en la Educación Secundaria y, en consecuencia, las dificultades para dar sentido al estudio de la proporcionalidad en dicha institución.
- Cirade (2006), explicó que la importancia de las dificultades que tienen los profesores en su labor docente está relacionada con la falta de cuestionamiento y de razones de ser de los saberes matemáticas que deben enseñar. Por ello, plantea la creación de las infraestructuras matemáticas necesarias para hacer frente a esas carencias en la Formación del Profesorado de Matemáticas.
- Sierra (2006), propuso una posible razón de ser de los sistemas de numeración y de la medida de magnitudes que, más allá de la designación de los números naturales, situaba la economía y la fiabilidad de los algoritmos de las operaciones aritméticas como parte esencial del sentido de la enseñanza de los sistemas de numeración posicional. Este trabajo incluyó la elaboración de un MER que redefinen ambos ámbitos de la matemática escolar.
- Barquero (2009), analizó la ecología de la modelización matemática en los primeros cursos de la Enseñanza Universitaria en los Grados de Ciencias Experimentales, detectando el fenómeno del *aplicacionismo* y proponiendo una razón de ser de la actividad de modelización matemática acorde con el desarrollo de la actividad científica.

- Ruiz-Munzón (2010), continuando con el trabajo ya desarrollado por Bolea (2002), elaboró un MER sobre el álgebra escolar considerándola como un instrumento de modelización para confrontarla con la interpretación del álgebra como una aritmética generalizada.
- Serrano (Serrano, 2013), llevó a cabo un análisis ecológico de la actividad matemática desarrollada en los Grados de Economía, elaborando una propuesta didáctica en tono a la modelización matemática para hacer frente al fenómeno del aplicacionismo en esta institución docente.
- Lucas (2015), propuso una razón de ser alternativa del cálculo diferencial elemental tanto en los últimos cursos de la Enseñanza Secundaria como en el primer curso de la Enseñanza Universitaria. Mostró que es en el ámbito de la modelización funcional, esto es, en la construcción y estudio de modelos funcionales, donde toma sentido la enseñanza del cálculo diferencial elemental.
- Ruíz-Olarría (2015), estudió la problemática en torno a la formación del profesorado de Secundaria en Matemáticas y propuso un nuevo tipo de organización didáctica para dicha formación, los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado (REI-FP), dispositivo que pretende favorecer que surjan las cuestiones a las que responde la matemática por enseñar en la Educación Secundaria.
- Licera (2017), analizó la razón de ser que se asigna a los números reales en las instituciones escolares y construyó un MER que toma en consideración, de manera nuclear, el problema de la medición de magnitudes continuas y su relación con los números reales, al tiempo que pretende resolver los problemas técnicos relacionados con la representación, comparación y cálculo con números reales y las inevitables *aproximaciones decimales*.
- Florensa (2018), estudió cómo los de mapas de cuestiones y respuestas dentro de los REI diseñados y experimentados, tanto en los Grados de Ingeniería como en la Formación de Profesores, favorecen que la razón o razones de ser del saber objeto de estudio se hagan más explícitas.
- Roa (2019), planteó el análisis de las restricciones transpositivas que afectan el estudio de la geometría construyendo un MER sobre la geometría en el primer ciclo de la Educación Secundaria y un REI cooperativo basado en dicho MER en torno a la cuestión: ¿*Cómo dividir una parcela del Colegio en partes iguales*?

Igualmente hay otros trabajos en los que se ha estudiado el fenómeno de la pérdida de las razones de ser de la enseñanza de la geometría como en Gascón (2002), donde muestra que las limitaciones que presentan las técnicas de la geometría sintéticas pueden convertirse en la razón de ser de las técnicas de la geometría analítica. Corica y Marín (2014) estudian el aislamiento que se produce en los ángulos inscritos en una circunferencia con respecto a las demás nociones que se deben estudiar de geometría en Educación Secundaria. Para hacer frente a dicho aislamiento elaboran un MER donde aparecen las cuestiones que son la razón de ser del estudio de los ángulos inscritos en una circunferencia. Asimismo, diseñan e implementan una *actividad de estudio e investigación* (AEI) basándose en dicho MER. Berenguel y Parra (2021) proponen una AEI para conseguir el estudio de cuerpos geométricos utilizando los mapas de cuestiones y respuestas, con el fin de que surjan sus posibles razones de ser, es decir, las cuestiones a las que responden. La cuestión generatriz de dicha AEI es: ¿*Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, para utilizar la menor cantidad de material posible, con un espesor despreciable, sabiendo que se vende por* cm^2? (Ibid., p. 12). Cuestión muy parecida a la que nosotros hemos propuesto en el REI que hemos implementado. Sin embargo, la indagación realizada por los alumnos ha sido diferente, aunque algunas de las cuestiones derivadas, como, por ejemplo: ¿*Cuáles son los cuerpos geométricos*? ¿Cómo *se clasifican*? ¿*Cómo se calcula el volumen de un cuerpo geométrico*?, hayan surgido en ambas investigaciones.

En nuestro caso, partimos del análisis de algunos manuales escolares (Rojas & Sierra, 2017), para encontrar evidencias del fenómeno de la pérdida de las razones de ser de la enseñanza de geometría en la Enseñanza Secundaria. En consecuencia, iniciamos un rastreo en la literatura actual, en la búsqueda de información que nos arrojara luces sobre cómo enfrentar dicho fenómeno. Fue así como encontramos algunos estudios que vinculaban, de manera razonada, algunos de los conocimientos geométricos propuestos en el currículo escolar (MECD, 2015) con un tipo especial de problemas conocido como problemas espaciales, mediante un proceso llamado *modelización espacio-geométrica* (Berthelot & Salin, 2001, 2005; Salin, 2004).

1.5.3 La modelización espacio-geométrica

La modelización espacio-geométrica (MEG) es un proceso en el que, durante la solución de un problema espacial, los conocimientos geométricos se constituyen en la mejor herramienta para su solución (Bloch & Salin, 2004). Así, la MEG es el proceso que vincula los conocimientos espaciales, que surgen de manera natural y que se desarrollan a través de las experiencias enmarcadas en situaciones del mundo sensible, y los geométricos, que sirven para modelar dicho espacio sensible y que suponen el estudio de los objetos propios del tipo de geometría que se ponga en juego durante la solución de un problema espacial. Por tanto, el valor de la MEG radica en que presenta el estudio de la geometría como una manera de modelar el espacio.

Es importante aclarar que, en la MEG, la noción de situación a-didáctica es fundamental puesto que ello implica la selección, adecuación y/o el diseño de problemas espaciales para los cuales su solución no se agote en los casos prácticos que no requieran del estudio de la geometría. Así, en nuestro caso, sabiendo que los problemas espaciales en torno a la determinación y realización de sólidos se constituyen en situaciones a-didácticas que favorecen la elaboración de conocimientos geométricos (Brousseau, citado en Berthelot & Salin, 2001), optamos por partir del problema espacial que supone el diseño y construcción de un envase: a) con una capacidad o volumen determinados, y b) para un perfume, en el que los estudiantes debieron elegir su capacidad o volumen.

Ese problema se constituyó en el corazón de un REI que implementamos en dos ocasiones y que puso en juego diversos tipos de conocimiento de las matemáticas en general y de la geometría en particular, y de otros propios de otras disciplinas. De hecho, este tipo de problema espacial sobre el diseño de envases ha favorecido, por ejemplo, la reconstrucción de OM en torno al estudio de algunos cuerpos geométricos, al cálculo de su volumen, al estudio de las unidades de medida y de capacidad, entre otros, en la Educación Secundaria en Argentina (Berenguel & Parra, 2021).

En resumen, la inclusión de la problemática de la MEG en la Enseñanza Secundaria se constituye en una potente herramienta para dotar de sentido a varios de los saberes geométricos que actualmente se proponen en el currículo escolar. De hecho, podría ofrecer una vía de solución a la problemática denunciada por Santaló (1985), que versa sobre el carácter axiomático de la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria, que aparece desvinculada de la geometría intuitiva que suele imperar en la Educación Primaria.

CAPITULO 2: UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA EN TORNO A LA DETERMINACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE SÓLIDOS

En este capítulo presentamos la publicación en la que hemos dado a conocer el MER que hemos diseñado en torno a la determinación y construcción de sólidos en la ESO. Para ello presentamos, la referencia, un breve resumen, una síntesis de las conclusiones reportadas y, finalmente, la publicación en sí misma.

2.1 Referencia completa de la publicación

Rojas, C., & Sierra, T. (2022). A Reference Epistemological Model Regarding the Determination and Construction of Solids for Compulsory Secondary Education. *Acta Scientiae*, *24*(8), 437-475. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7185

2.2 Resumen y síntesis de las conclusiones de la publicación

En el capítulo 1, ya indicamos que el MER que presentamos en esta publicación lo hemos ido elaborando y perfilando al mismo tiempo que hemos llevado a cabo las dos implementaciones del REI sobre la construcción de envases. El MER es el resultado de los diferentes trabajos que hemos llevado a cabo durante los últimos años. Y pretende ser fuente de inspiración para que el profesor, que quiere desarrollar un REI en torno a la construcción de envases, disponga de una referencia para diseñarlo, experimentarlo y analizarlo, partiendo de una problemática de modelización espacio-geométrica. Dicha problemática planteada en el desarrollo del MER muestra qué tipo de tareas pueden favorecer la articulación de las geometrías 2D y 3D.

La cuestión generatriz que hemos planteado para la construcción del MER, que gira en torno al problema espacial del diseño y elaboración de envases, ha sido:

Q_G = ¿*Cómo diseñar y construir un envase adecuado que tenga una capacidad o un volumen predeterminado*?

La búsqueda de posibles respuestas a esta cuestión nos condujo a la consideración de aspectos tales como, la función, el material, el impacto medioambiental, el transporte, etc., que forman parte de diferentes disciplinas y que emergen durante el diseño y construcción de un envase. Sin embargo, para potenciar el estudio de algunos de los saberes geométricos que forman parte del currículo y otros nuevos, nos enfocamos en los aspectos relacionados el estudio de las diferentes formas para dicho envase. Ello condujo al cuestionamiento de las formas posibles de los sólidos geométricos y a su caracterización en cuatro grandes clases. Dichas clases parten de uno o dos poliedros regulares y luego se van utilizando los dos criterios siguientes: a) el debilitamiento de la regularidad del cuerpo geométrico; y b) y el crecimiento indefinido del número de lados en alguna o algunas de sus caras.

Dentro de las principales conclusiones reportadas en esta publicación, se encuentran:

- El MER construido favorece; de una parte, el carácter experimental de la geometría, en el marco de la modelización espacio-geométrica, por lo que resulta una herramienta útil para la iniciación al estudio de este sector de las matemáticas; y de otra, el diseño e implementación de propuestas didácticas para el estudio de la geometría 3D, impulsando a los estudiantes a que hagan una interpretación de las fórmulas geométricas como modelos algebraico-funcionales, lo que se traduce en una verdadera actividad de modelización.
- Los tipos de tareas abiertas e inversas propuestas en el MER permiten el surgimiento de diferentes tipos de modelos matemáticos. El MER propone los programas de geometría dinámica, como GeoGebra, como instrumentos muy útiles para el estudio y resolución de dichos tipos de tareas.
- Este MER sirve de referencia para el diseño e implementación de futuros REI que permitan estudiar y articular de manera razonada las geometrías 2D y 3D, al tiempo que vinculan diversos ámbitos de las matemáticas, como el álgebra y las funciones.
- La construcción de este MER se ha convertido en un instrumento potente, para que el investigador cuestione el modelo epistemológico vigente de la enseñanza de la geometría en la ESO, permitiendo al didacta liberarse de los condicionamientos que comporta dicho modelo.

A continuación, anexamos el artículo publicado en la revista Acta Scientiae.

ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7185

A Reference Epistemological Model Regarding the Determination and Construction of Solids for Compulsory Secondary Education

Carlos Rojas Suárez [a]
Tomás Ángel Sierra Delgado [b]

[a] Universidad Complutense de Madrid (UCM), Facultad de Educación, Doctorado en Educación, Madrid, España.
[b] Universidad Complutense de Madrid (UCM), Facultad de Educación, Departamento de Didáctica de Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas, Madrid, España.

Received for publication 5 May 2022. Accepted after review 13 Dec. 2022
Designated editor: Thiago Pedro Pinto

RESUMEN

Contexto: En el análisis de los saberes geométricos propuestos en el currículo de Educación Secundaria se manifiestan fenómenos como la separación entre las geometrías 2D y 3D y el debilitamiento de la actividad de modelización en geometría. Brousseau considera que la construcción de figuras es un primer ejemplo de modelización geométrica. **Objetivos:** Construir un modelo epistemológico de referencia que explicita las condiciones que permiten determinar la forma y el tamaño de un sólido y buscar qué posibles técnicas permiten construirlo. **Metodología:** Investigación teórica en el marco de la Teoría Antropológica de lo-Didáctico. **Entorno y participantes:** El modelo construido es fruto de varios trabajos realizados en los tres últimos años: análisis de textos escolares y diseño, implementación y análisis de un recorrido de estudio e investigación en torno al diseño de un envase en dos Institutos de Educación Secundaria con alumnos de entre 14 y 17 años. **Recogida y análisis de datos:** El modelo está basado en el análisis de informaciones recogidas de textos científicos de Pólya y otros autores, de textos oficiales y manuales escolares de Educación Secundaria y de las experimentaciones realizadas. **Resultados**: El modelo sustenta el estudio articulado de las geometrías bidimensional y tridimensional y permite guiar procesos de estudio tendentes a abordar de manera coherente el problema de la determinación de un sólido y su construcción. **Conclusiones:** El modelo elaborado contiene cuestiones sobre la problemática de la modelización espacio-geométrica que consideramos como la problemática de iniciación a la geometría en la enseñanza secundaria.

Corresponding author: Carlos Rojas Suárez. Email: carlroja@ucm.es

Acta Sci. (Canoas), *24*(8), 437-475, Dec. 2022

Palabras clave: Modelo epistemológico de referencia; Determinación y construcción de sólidos; Problema espacial; Modelización espacio-geométrica; Técnicas algebraico-funcionales.

A reference epistemological model concerning the determination and construction of solids for compulsory secondary education

ABSTRACT

Background: The analysis of the geometric knowledge presented in the secondary education curriculum reveals phenomena such as the separation between 2D and 3D geometry and the weakening of the modelling activity in geometry. Brousseau considers that the construction of figures is a first example of geometrical modelling. **Objectives**: To build a reference epistemological model that clearly sets out the conditions that allow determining the shape and size of a solid and looking for possible techniques that enable constructing it. **Design**: theoretical research within the framework of the Anthropological Theory of the Didactic. **Setting and participants**: The model built is the result of several activities carried out in the last three years: an analysis of school texts, and the design, implementation, and analysis of a study and research path regarding the design of a container in two secondary schools with students aged between 14 and 17. **Data collection and analysis**: The model is based on the analysis of information collected from scientific texts by Pólya and other authors, from official texts and secondary education textbooks, and from the experiments carried out. **Results**: The model is based on the structured study of two- and three-dimensional geometry and allows guiding study processes aimed at consistently addressing the problem of determining a solid and its construction. **Conclusions**: The model developed includes questions regarding spatial-geometric modelling considered to be central in the introduction to geometry in secondary education.

Keywords: Reference epistemological model; Determination and construction of solids; Spatial problem; Spatial-geometric modelling; Algebraic-functional techniques

Um modelo epistemológico de referência em torno à determinação e construção de sólidos para o ensino secundário obrigatório

RESUMO

Contexto: Na análise dos conhecimentos geométricos propostos no currículo do Ensino secundário, fenômenos como a separação entre geometria 2D e 3D e o debilitamento da atividade de modelagem em geometria são evidentes. Brousseau considera que a construção de figuras é um primeiro exemplo de modelagem geométrica. **Objetivos**: Construir um modelo de referência epistemológico que explicite as condições que permitem determinar a forma e o tamanho de um sólido e descobrir que técnicas possíveis tornam possível a sua construção. **Metodologia**: Investigação teórica no âmbito da Teoria Antropológica da Didática. **Ambiente e participantes**: O modelo construído é o resultado de vários trabalhos realizados nos últimos três anos: análise de textos escolares e concepção, implementação e análise de um percurso de estudo e investigação em torno do desenho de uma embalagem em duas Escolas Secundárias com alunos entre os 14 e os 17 anos de idade. **Recolha e análise de dados**: O modelo é baseado na análise de informações coletadas de textos científicos de Pólya e outros autores, de textos oficiais e manuais escolares do Ensino Secundário e das experiências realizadas. **Resultados**: O modelo apoia o estudo articulado de geometrias bidimensionais e tridimensionais e permite orientar processos de estudo tendentes a abordar de forma coerente o problema da determinação de um sólido e da sua construção. **Conclusões**: O modelo desenvolvido contém questões sobre o problema da modelagem espacial-geométrica que consideramos ser o problema da iniciação à geometria no ensino secundário.

Palavras-chave: Modelo epistemológico de referência; Determinação e construção de sólidos; Problema espacial; Modelagem espaço-geométrica; Técnicas algébrico-funcionais.

INTRODUCTION AND BACKGROUND

The new official Spanish curriculum, which has just been promulgated, considers that one of the basic knowledge areas to be taught is *spatial sense*. The document published (MEFP, 2022, p. 156, our translation) clearly sets out that:

> Spatial sense addresses the understanding of the geometric aspects of our world. Registering and representing shapes and figures, recognising their properties, identifying relationships between them, locating them, describing their movements, making or discovering images of them, classifying them, and reasoning with them are key elements of teaching and learning geometry.

In the official French curriculum (Eduscol, 2020), in theme D on Space and Geometry, recognising, building, and representing solids is put forward as an objective by the end of cycle 4, which includes secondary education students aged between 12 and 15. The use of dynamic geometry software for said representation is also contemplated.

Guy Brousseau (2000) points out that the construction of figures is a first example of modelling a part of elementary geometry, and Perrin-Glorian and Godin (2014) consider that plane geometry consists in the study of flat shapes and figures. Perrin-Glorian, Mathé & Leclerc (2013) indicate that in order to achieve coherent and functional teaching of geometry in compulsory education, it is necessary to use what Berthelot & Salin (2005) call *space modelling problems or spatial-geometric problems*. Thus, if we consider geometry as a model of physical space, it turns out that the notion of model is inseparable from the study of geometry (Houdement, 2019). Salin (2014) states that geometric knowledge should be introduced as a tool for solving spatial problems, that is, within a spatial-geometric modelling problem.

We postulate that a possible raison d'être of the study of elementary geometry in the case of three-dimensional geometry basically consists in the study of *the determination and construction of solids*.

Furthermore, the search for possible answers to this spatial problem using algebraic-functional modelling techniques will be improved thanks to the use of GeoGebra. It will allow the study of 3D geometry to be connected with that of algebra and functions, as put forward by the Spanish Committee for Mathematics:

> More attention should be paid [in the curriculum] to: using dynamic geometry programmes to work on geometry, relating geometry to algebra and functions, and solving problems (CEMAT, 2021, p. 34).

Rojas and Sierra (2021a; 2021b) enquired about the raisons d'être the study of geometry in secondary education should respond to, particularly two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D) geometry and developed and implemented two *study and research paths* (SRPs) regarding the design and construction of a container. These SRPs enabled studying several geometric knowledge areas put forward in the curriculum of Compulsory Secondary Education (ESO in Spanish).

One of the most important tasks of the secondary education mathematics teacher consists in designing and implementing study processes in the classroom related to a certain mathematical organisation (MO) proposed in the curriculum (Chevallard, 2002). The *Anthropological Theory of the Didactic* (TAD) considers it is important for teachers to question themselves about the knowledge to be taught and to enquire about some of its possible raisons d'être. However, finding some of the questions to which geometrical knowledge responds constitutes a complex task that teachers alone can hardly address, since it appears as an open didactic research problem.

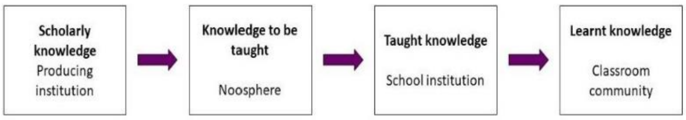
Sierra, Bosch and Gascón (2007) showed that the *didactic tasks* teachers should implement together with their students to reconstruct an MO, the *didactic techniques* used to develop those tasks, and the *technological-theoretical discourse* that allows them to interpret and justify those techniques, mainly depend on the structure of the "mathematical" components and on the raison d'être assigned to said MO.

One of the objectives of this study, apart from providing some of the raisons d'être for school geometry in compulsory secondary education offering a possible connection between 2D and 3D geometry and with other basic knowledge such as algebra and functions, is to set out and develop a proposal that clarifies what is understood by *determining and constructing solids*.

When researchers in didactics of mathematics intend to carry out the praxeological analysis of an MO, they should take into account the empirical data from the different stages of the didactic transposition process. To do this, they should develop their own "reference" epistemological model allowing them to avoid the restrictions that come from the different institutions in which this MO exists (Figure 1).

Figure 1

The different institutions of the didactic transposition process of an MO.



To build this reference epistemological model (REM), the researcher should develop a rational reconstruction of the MO in question. The didactic analysis of the didactic transposition process to which this MO is subjected will enable detecting some of the *didactic phenomena* present in the process (Bosch & Gascón, 2005).

In this study, we present a possible reconstruction of an MO regarding the *determination and construction of solids* for compulsory secondary education based on the search for possible solutions to a spatial problem related to designing and building a container. This reconstruction, which performs the function of an REM, will be elaborated through a spatial-geometric modelling process. An interpretation of the elementary geometry of solids that assigns a new raison d'être to its study will hence be obtained. It is an alternative to the one established by the dominant epistemological model in compulsory secondary education. On the one hand, this reconstruction helps us tackle the didactic phenomenon of the *separation between 2D and 3D geometry*. On the other hand, it guides the design, experiment and analysis of future SRPs to connect specific techniques of spatial-geometric modelling with algebraic-functional models in compulsory secondary education.

In what follows, using the perspective of the ATD: (1) the theoretical framework, in which the general characteristics of REMs are explained, will be described; (2) the general lines of our research problem will be presented; (3) an REM regarding the determination and construction of solids based on the search for possible solutions, through spatial-geometric modelling, to the spatial problem involved in the design and construction of a container will be presented; and (4) some conclusions about the epistemological and didactic functions of the REM built will be formulated.

THEORETICAL FRAMEWORK AND GENERAL CHARACTERISTICS OF REMs

According to the heuristic scheme presented by Gascón (2011), any didactic-mathematical problem defined using the ATD tools usually starts from a teaching problem considered incomplete, to which "it is necessary to at least add the *epistemological* dimension for it to be considered as a problem" (p. 206). Said dimension turns into an REM that constitutes a scientific hypothesis on which to define the MOs involved in the didactic problem being defined. It will thus be possible to establish:

> [...] the most appropriate *scope of the mathematical field* to pose the didactic problem in question. [...] The *didactic phenomena that will be visible* to the researcher. [...] The *types of research problems that may be posed* [...] [and] the *tentative explanations that may be proposed*. (Gascón, 2011, p. 209).

This REM may be formulated in terms of questions and answers that lead to the construction of a relatively complete MO (Fonseca, 2004), built from a series of additions and completions derived from a specific MO. In other words, through a process that starts from a specific type of task carried out using a specific technique, and that can give rise to successively broader and more complex (local, regional and global) mathematical praxeologies (Chevallard, 1999). Let us remember that mathematical organisations or praxeologies:

> [...] are made up of a practical block or "know-how" composed of the types of tasks and techniques [T/τ], and a theoretical block or "knowing" made up of the technological-theoretical discourse [θ/Θ] that describes, explains, and justifies the practice (Bosch et al., 2004, p. 211).

It should be noted that the components of a mathematical praxeology or MO (*types of tasks, techniques, technologies*, and *theories*) concern the reference institution, in our case the compulsory secondary education institution. Therefore, "what is considered a type of tasks (or a technique, technology, or theory) in one institution is not necessarily the case in another institution" (Bosch et al., 2004, p. 212).

This study is limited to studying and developing the *epistemological dimension* of the didactic problem or of didactic research we explain below. It consists of the construction of an REM considered as a provisional model or hypothesis we rely on to interpret and describe a certain field of mathematics and to "use it as a reference to analyse the didactic-mathematical facts" (Gascón, 2011, p. 208).

To build the REM, inspiration was drawn from: 1) the works on the MO already developed in the texts of scholarly knowledge, related to mathematics and other scientific disciplines; 2) the official curriculum documents related to the MO under study; 3) the proposals of didactic organisations (DOs) that appear in school textbooks with regard to this MO; 4) the possibilities offered by geometric modelling software such as GeoGebra; and 5) the conditions and restrictions that may arise in school institutions in which the MO in question is considered as an MO "to be taught".

It needs to be said that the REM explained here is, like all REMs:

- a *provisional* model, that is, a hypothesis subject to possible permanent changes to be contrasted with experimental data, and
- a *relative* model, developed by the researcher in didactics for specific and limited purposes.

RESEARCH PROBLEM

The first explorations that led us to define this research were based on the analysis of some of the textbooks proposed for teaching mathematics in compulsory secondary education (Rojas & Sierra, 2017). This analysis revealed the general didactic phenomenon of the disappearance of the raisons d'être of the geometric knowledge put forward in the curriculum. The ATD has dealt with facts related to this general phenomenon, such as the rigidity of the MOs studied in secondary school (Fonseca, 2004), or the lack of justifying the appearance of analytical geometry in upper secondary education, and its disconnection with the study of synthetic geometry presented in compulsory secondary education (Gascón, 2003).

The following are some specific facts that underline this general didactic phenomenon in the analysis performed:

- The fragmented view of school textbooks on the mathematical knowledge proposed, since, for example, the study of functions and the calculation of areas and volumes of solids, tend to appear disconnected.
- The almost exclusively numerical treatment of the formulas used to calculate areas and volumes of solids, as, in most cases, it is enough to substitute their elements for specific values provided to find the numerical value of a certain magnitude.
- The types of tasks proposed mainly consist of *direct* tasks (the quantities and unknowns of a problem are never interchanged to formulate *inverse* tasks), and *closed* tasks (there are no *open* tasks that require the student to decide which variables are relevant to solve the problem).
- A repetitive cyclical relationship is observed between types of tasks and associated techniques. For instance, to explain and justify the use of the Pythagorean theorem, problems involving right triangles are presented. Their resolution requires calculating the measure of one of the sides, where the tool, which has previously been explained to solve such situations, is precisely the use of the theorem.

The REM explained in this article allows characterising a certain MO used in compulsory secondary education geometry as well as the existence of didactic phenomena such as *the separation between 2D and 3D geometry*, and the *weakening of the modelling activity in the field of geometry* (Rojas & Sierra, 2021b).

In line with the above, the research problem addressed in this study consists of *clearly setting out the conditions that allow determining the shape and size of a solid and, once this solid is determined, looking for the possible techniques that can be used to build it.* This general problem, which we call *determination and construction of solids,* starts from the search for the solution to a type of *spatial problem* (Salin, 2004), which consists of designing and building a container, addressed within a *spatial-geometric modelling* approach.

The spatial-geometric modelling problem proposed by Berthelot and Salin (1992) starts from a *system* in which a type of spatial problem arises. To solve it, an appropriate *mathematical model* is developed that represents this system using any kind of (geometric, arithmetic, algebraic, functional, etc.) mathematical element. In this model, the answers obtained are validated in the physical space, according to Brousseau's proposal of considering the *study of geometry as a model of space* (Berthelot & Salin, 2001).

Carrying out this process in teaching is highly interesting, since it allows considering the relationship between physical space and geometric space, taking into account the *experimental dimension of geometry.* This approach enables conducting a consistent study of geometry throughout compulsory secondary education, where both types of spaces need to be considered and properly connected. Within the spatial sense in the first three years of compulsory secondary education the study of the following is considered:

> "1. Two- and three-dimensional geometric figures [...] Construction of geometric figures using manipulatives and digital tools (dynamic geometry programmes, augmented reality...)" (MEFP, 2022, p. 163).

The REM here described is the result of the contributions developed in several activities carried out in the past three years. First, we created and implemented an SRP for the design of a container on two different occasions in two secondary schools:

- firstly, with 4th year compulsory secondary education students (aged 15 to 16) and 1st year upper secondary education students (aged 16 to 17) during extra-curricular hours (Rojas & Sierra, 2021a), and

- secondly, with 3rd year compulsory secondary education students (aged 14 to 15) during an elective subject called "Mathematics extension".

As part of the research developed, the conditions required for this type of modelling to exists in compulsory secondary education have been analysed and studied in Rojas and Sierra (2021b).

AN REM REGARDING THE DETERMINATION AND CONSTRUCTION OF SOLIDS

To build the REM, a generating question, deemed sufficiently relevant and fruitful, was considered with regard to the spatial problem of *designing and building a container*. We believe this problem can be modelled geometrically, thus giving rise to a possible connection between 2D and 3D geometry and the use of algebraic and functional models.

The problem was previously considered in the two study processes implemented, and it was endorsed by the scientific community of experts in didactics of mathematics, as may be verified in Rojas and Sierra (2020, 2021a and 2021b). We will show that this spatial problem can lead to both spatial-geometric modelling and to the use of algebraic-functional models.

The generating question of the REM is the following:

Q_G = How to design and build a suitable container that has a predetermined capacity or volume?

Answering this question implies asking oneself, amongst other things, what the condition of being *suitable* means. It is related to the function the container has to fulfil and, presumably, to its shape. For instance, if the container is aimed to hold a liquid substance, surely it should respond to certain needs that are different to those of a container designed to contain a solid product. Actually, a broad classification within these two types of containers could be made, since the liquid to be packaged may or may not contain gas, or, if it is a solid product, it could consist of one or of numerous pieces, as is the case of grainy material.

The condition of being suitable is not absolute, and less so in the problem at hand, since the most suitable container could be, for example, the one that is the most visually attractive to the consumer, even if this means an increase in manufacturing costs, or a greater environmental impact. Therefore, designing and building a suitable container implies new questions about (a) its function, (b) the material it will be manufactured with and its optimisation, (c) the environmental impact its use can cause, and (d) the use of space, for instance, during stacking for storage and transport, amongst other aspects. In other words, designing and building a *suitable* container means taking into account several factors that have different levels of importance, which surely involve the use of knowledge from different sectors of mathematics such as geometry, arithmetic, algebra, etc., as well as knowledge from other disciplines such as chemistry, biology, marketing, etc.

With respect to the knowledge that could be useful to respond to Q_G, we decided to start from the review of some of the guides on the design of containers and packaging currently available on the Internet, such as Navarro et al. (2007), Bertomeu-Camós and Fortuny Cuadra (2016), and Ihobe S.A. and Ecoembes (2017), which can help us in the search for an answer to the generating question.

These guides present a wide range of conditions that should be taken into account when designing a container, such as the fact that the design should be doable, desirable, and sustainable. That is, it should be possible to manufacture and should be profitable, it should respond to consumer needs, and the use of resources should be optimised, while reducing its environmental impact. This certainly configures a complex spatial problem including multiple variables, amongst which the shape of the container, its size, and its composition need to be mentioned. However, for now, we will only include the variables that are related to the condition of being suitable, and those that may involve the implementation of several of the geometric knowledge areas proposed to be taught in the new compulsory secondary education curriculum (MEFP, 2022). Thus, when seeking an answer to Q_G, the issues mentioned below will not be addressed:

a. the type of material the container is made of

b. the type of product the container will hold

c. marketing related to the product to be packaged

Eco-design packaging considers a system of three types of packaging: primary or consumer packaging, secondary or grouped packaging, and tertiary or transit packaging. Our focus is on designing and building a primary type container, since the other two types usually have orthohedral shapes, and determining and constructing orthohedral solids is amongst the easiest, and therefore reduces the possibilities of developing the spatial-geometric modelling activity and its relationship with algebraic-functional models.

It is important to note that, although it is clear there is a difference between the container (packaging) and the content (the material the container holds), the problem of designing and building a container will be limited in our study to the case of a container holding liquid. Therefore, and considering the ideal case in which the liquid completely fills the container, we assume that calculating the capacity of the container is equivalent to calculating the volume of the solid associated with the shape its content adopts. On the other hand, the thickness of the *walls* of the container will not be taken into account, given the complexity of calculating the volume of the container (i.e., the material the container is made of) using algebraic techniques, since orthohedral shapes have been avoided. This leaves us with the ideal case of calculating the volume of the container, including its content.

After these initial considerations, we believe the search for a possible response to Q_G implies the approach of other derived questions[1], namely:

Q_1 = *What type of solids can be chosen to model this container?*

> Q_{11} = *What types of classes of geometric solids are there?*
>
> Q_{12} = *What elements allow us to describe a solid in geometry?*
>
> Q_{13} = *Which are the solids studied in geometry in compulsory secondary education?*

Q_2 = *Once the type of solid has been chosen, how to determine the shape and size of the solids that are part of that type?*

> Q_{21} = *Which and how many quantities do we need to determine the shape and size of a solid of a certain type?*

Q_3 = *How to design and build the container in such a way that it has a capacity of L (in ml), or a volume of V (in cm^3)?*

> Q_{31} = *How to design and build a container of a certain shape in such a way that it has a capacity of L (in ml), or a volume of V (in cm^3)?*

---

[1] The choice of these questions coincides with some of the questions the students brought up during the implementation of the SRP, the partial results of which were published in Rojas y Sierra (2021a, 2021b).

In what follows, each of the above questions, as well as the ones that inevitably arise throughout the study, are addressed in order to develop a reasoned response to Q_G. For example, starting from Q_{31}, several specific questions for a particular shape chosen could be derived, namely:

> Q_{311}= *How to design and build a container that has the shape of a regular tetrahedron in such a way that it has a capacity of L (in ml) or a volume of V (in cm^3)?*

The search for an answer to Q_1 implies dealing with Q_{11} and Q_{12}. To do this, the following should be established: a solid figure, unlike a plane figure, is a three-dimensional object that has a certain thickness and occupies a certain place in space (Castelnuovo, 1966). The kind of boundaries that delimits it –its shape and the characteristics of its surface– and their incidence–convexity and concavity–, define the class the solid belongs to (Guillén, 1991). As a result, solid figures may be convex or concave with boundaries consisting of flat surfaces, flat and curved surfaces, or only curved ones. Given the enormous complexity of possible solids, for now, only a reduced class of solids is studied.

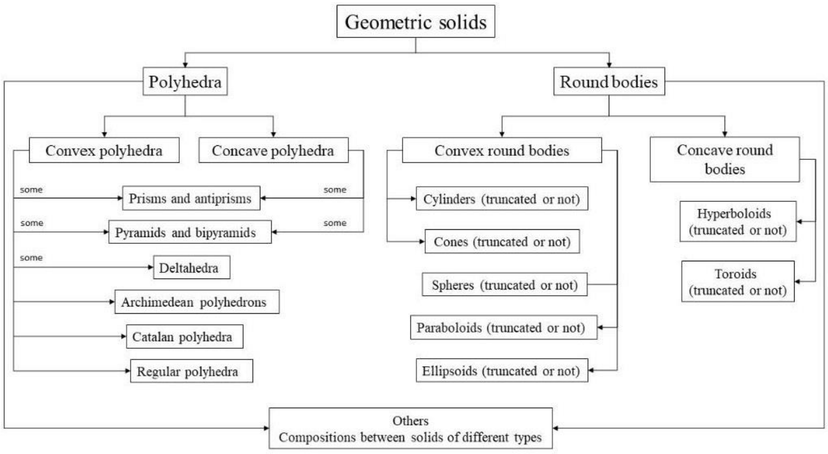
Therefore, a response R_{11} to Q_{11} implies somehow classifying some of the geometric solids. A classification was found (Figure 2), but we noticed that it does not differentiate cases that belong to more than one class of solid figures. For example, the case of the regular octahedron, which is also an antiprism and a deltahedron, or the case of the regular tetrahedron, which belongs to the class of pyramids.

Starting from this classification, in which the shape of the faces of the solids has been taken into account, a response R_{12}, to Q_{12} can be elaborated. Other elements that contribute to the description of the solids could be the number of vertices or diagonals. However, this does not define them, unless the relative position and the relationship between the diagonals, for instance, is established. A solid can also be described through its types of symmetries, or, in the case of solids of revolution, the way in which it has been generated from the revolution of a plane figure around a given axis. For example, in the case of the shape of the faces, the regular tetrahedron could be referred to as the solid delimited by four regular triangular faces.

So far, it may be confirmed that a very large number of geometric solids exists, since, only by considering the possible shapes of the faces delimiting them, it is clear that both the number of said shapes and their incidence is overwhelming. Therefore, and in order to elaborate a possible response R_{13} to Q_{13}, only some of the solids usually studied in compulsory secondary education will be used. In the school textbooks of 3rd year compulsory secondary mathematics education (Alcaide et al., 2016; Latasa & Ramos, 2022), the chapter on the study of geometric solids concerns the study of some polyhedrons such as regular polyhedrons, prisms, pyramids, and truncated pyramids, as well as some solids of revolution like the cylinder, the cone, the truncated cone, and the sphere. Calculating the surface area and volume of those solids, as well as some solids that can be formed from them, is addressed.

Figure 2

Classification of geometric solids elaborated from the approaches of Guillén (1991).



In unit 3 of the textbook by Bosch et al. (1996), aimed at the study of polyhedrons, the following is proposed: first, the study of the regular polyhedron; second, the transition from cubes to parallelepipeds and prisms; third, the transition from the regular tetrahedron to the pyramid; and, finally, from the regular polyhedron to the dual polyhedron.

Guided by the proposal of Bosch et al. (1996), we propound the study of three classes of solid figures, starting from three regular polyhedrons, taking into account two criteria: a) the number of sides grows indefinitely on one or more of its faces; and b) the regularity of the solid gradually weakens. Each class thus starts with a regular polyhedron, continues with polyhedrons that are less regular until reaching a round solid whose faces are no longer polygons:

- *First class*: regular tetrahedron – right pyramids of any kind of base – cones
- *Second class*: regular octahedron – regular base straight dipyramids – bicones
- *Third class*: cube – right prisms of any kind of base – cylinders

A *fourth class*, starting from the regular dodecahedron and the icosahedron polyhedron, duals of each other, may be considered. They are regarded as more spherical because their volume is similar to their circumscribed sphere, and by truncating their vertices, "soccer balls" (Carena, 2020) come next, to finish with the sphere.

It should be noted that we do not seek to address the entire universe of solids by using these classes, but rather, in a reasoned manner, the majority of the solid figures studied in secondary compulsory education. From these classes of solids, an answer may be elaborated to Q_2, which deals with the determination (shape and size) of a solid. To do so, it is necessary to explain what determining a solid means. This involves asking, first of all, about when two solids have the same shape, and how many quantities we need to provide for a person who does not see the solid to be able to build one that has the same shape. Once the shape of the solid has been determined, to finish determining it, we should ask ourselves about determining the size. Another strategy is to jointly determine shape and size.

Let us say that two solids have the same shape if there is a similarity that transforms one into the other. Therefore, if two solids have the same shape, they can only differ in size. What needs to be asked is how many quantities are needed to determine the shape of a particular solid. To determine the shape without considering the size, lengths, areas, or volumes of certain elements of the solid will not be used as measures (because they partly determine the size of the solid). However, relationships between different measures of magnitudes, and the measure of some angles of the solid can be used.

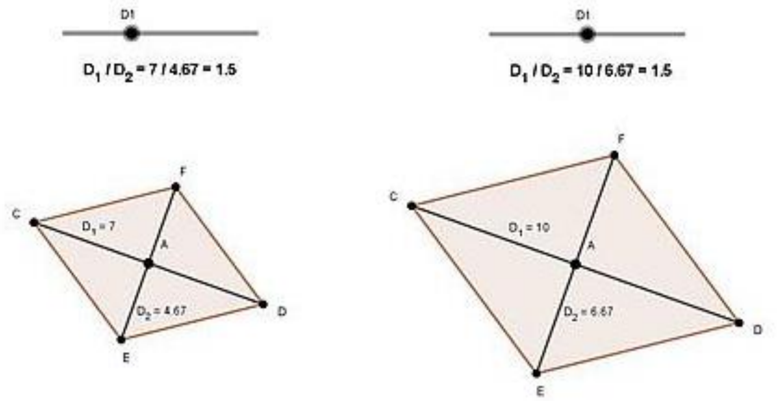
For instance, to determine the shape of a right cylinder without considering its size, it is enough to provide a single measure, the ratio between the diameter of the base, and the height of the cylinder. If we also provide the radius of the base, the cylinder is completely determined, and it will therefore be possible to build it.

Determining and constructing polygons

An analogous example can be found in two-dimensional geometry, in Gascón (2004). In the case of rhombuses, regarded as a type of polygon, to determine the shape of a specific rhombus, without considering its size, it is enough to provide a single parameter (for example, the relationship between the lengths of both diagonals, or the measure of one the angles). Thus, all rhombuses in which the ratio between their diagonals is, for example, $\frac{2}{3}$, have the same shape. That is, if $\boldsymbol{D_2 = \frac{2}{3}D_1}$, where $\boldsymbol{D_1}$ and $\boldsymbol{D_2}$ are the diagonals of the rhombus, Figure 3 shows that both rhombuses have the same shape regardless of lengths $\boldsymbol{D_1}$ y $\boldsymbol{D_2}$. In order to determine the size, the measure of a length (e.g., the length of the side, or the length of one of its diagonals) also needs to be provided.

Figure 3

Example of rhombuses with diagonals whose ratio is 2/3.



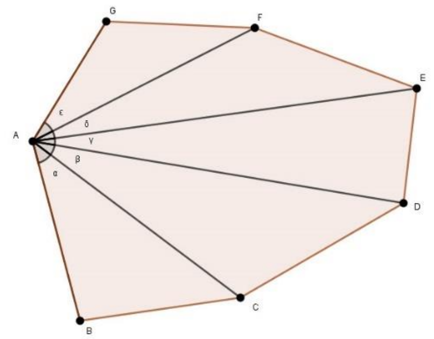
A more general question to ask within plane geometry is: *Which and how many quantities do we need to determine and construct any kind of polygon?*

For any $\boldsymbol{n}$-sided polygon, we will show that a maximum of $2\boldsymbol{n} - 3$ quantities are needed to determine and construct it. Following Pólya (1967), we propose three demonstrations of that fact, each of which suggests a strategy to construct the polygon.

- *First demonstration:* the measures required are the ones of $\boldsymbol{n} - 1$ line segments that start from a vertex where the first and the last lines are sides of the polygon, and the rest are the $\boldsymbol{n} - 3$ diagonals and $\boldsymbol{n} - 2$ angles that determine each pair of previous segments in such a way that the first angle is the one formed by the first side of the polygon and the first diagonal, the second angle is the one formed by the first diagonal and the second diagonal, and so on, up to the angle formed by the last diagonal and the last side. Therefore, $(\boldsymbol{n} - 1) + (\boldsymbol{n} - 2)$, that is, $2\boldsymbol{n} - 3$ quantities will be required. As shown, they allow the polygon to be constructed. (Figure 4).

Figure 4.

Heptagon ***ABCDEFG*** *determined by line segments* ***AB, AC, AD, AE, AF,*** *and* ***AG****, and by the angles between those segments (i.e.,* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}$*, respectively).*



- *Second demonstration*: The $\boldsymbol{n} - 3$ diagonals starting from a vertex of the polygon, and the $\boldsymbol{n}$ sides of the polygon, which, properly arranged, enable building it, will be required. Hence, in this case, $(\boldsymbol{n} - 3) + \boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{n} - 3$ quantities (Figure 5) will be necessary.

Figure 5.

*Hexagon **AEBCDF** determined by diagonals **AB**, **AC**, and **AD**, and by sides **AE**, **EB**, **BC**, **CD**, **DF** and **FA**.*

Figure 6.

*Pentagon **ABCDE** determined by triangle **ABC**, which is in turn determined by **AB**, **BC** and **CA**; by triangle **CAD**, determined by sides **CA** and **DA**, and by angle **α** between those sides; and by triangle **DAE**, which is determined by sides **DA** and **EA** and by angle **β** between those sides.*

- *Third demonstration:* any $\boldsymbol{n}$-sided polygon can be decomposed into $\boldsymbol{n} - 2$ triangles. We thus need 3 quantities to construct the first triangle. To build each of the remaining $\boldsymbol{n} - 3$ triangles, only 2 quantities are necessary, as they are constructed using one side that was already known to build the previous triangle. Therefore, $3 + 2 (\boldsymbol{n} - 3) = 2\boldsymbol{n} - 3$ quantities in total are necessary (Figure 6).

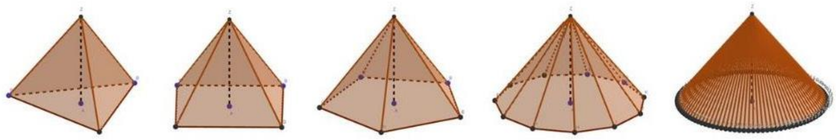
Another way of showing this same result, derived from the third demonstration, without considering the size, is as follows: to determine the shape of an $\boldsymbol{n}$-sided polygon, it suffices to determine the shape of each of the $\boldsymbol{n} - 2$ triangles into which it is decomposed. Since the shape of a triangle is determined by 2 measures (for example, 2 angles), $2 (\boldsymbol{n} - 2) = 2\boldsymbol{n} - 4$ quantities will be required to determine the shape of an $\boldsymbol{n}$-sided polygon. Once the shape is determined, it is enough to add one piece of information (e.g., the length of any side of the polygon) to determine the size. In total, $2\boldsymbol{n} - 4 + 1 = 2\boldsymbol{n} - 3$ quantities are required.

Determining and constructing solids

A possible response R_2 to Q_2 may be elaborated considering, for instance, the first class of solids. Possible responses R_{21} to Q_{21} will also need to be found. The measures necessary to determine the shape and size of these solids will need to be established. The first step is to select some of the kinds of shapes that appear in Figure 7: the regular tetrahedron, right pyramids with a regular hexagonal base, and right cones.

Figure 7.

Some figures of the first class. From the regular tetrahedron to the right cone.



Three new questions whose answers will help elaborate response R_{21} arise here:

Q_{211} = *What quantities are necessary to determine and construct the regular tetrahedron?*

Q_{212} = *What quantities are necessary to determine and construct a right pyramid with a regular hexagonal base?*

Q_{213} = *What quantities are necessary to determine and construct a right cone?*

The search for responses R_{211}, R_{212} and R_{212} to the corresponding previous questions leads us to solve the type of tasks T_{21} = *determining and constructing each of those solid figures using GeoGebra tools*[2]. Solving T_{21} will depend on the geometric properties of the solid to be determined and constructed, and on the tools GeoGebra provides, such as tracing 2D and 3D figures, and connecting dynamic objects like sliders (Dos Santos, 2012).

Determining and constructing a regular tetrahedron

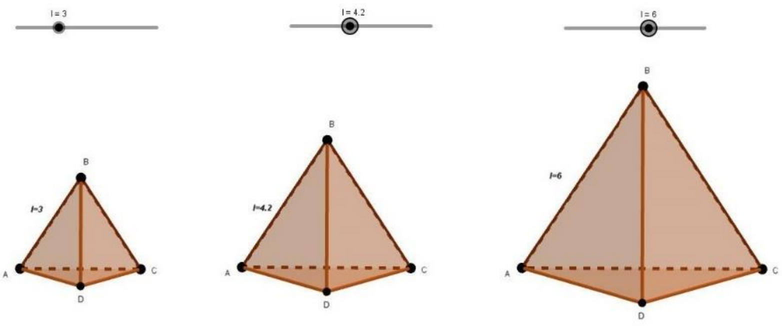
Task $t_{211} \in T_{21}$, which consists of determining and constructing a regular tetrahedron, is very simple and quite trivial because, to determine a regular tetrahedron, only one measure, which determines its size, is necessary, since all regular tetrahedrons have the same shape. To construct it using GeoGebra, it is enough to provide, for instance, the length of one of its edges. It is constructed in GeoGebra by using this information, and the length of the edge is given by providing the measures of its endpoints.

If we add a slider to our construction, and connect it to the edge of the tetrahedron, when modifying its values, all possible regular tetrahedrons that only differ in size are obtained (Figure 8).

[2] GeoGebra is a free dynamic geometry programme widely disseminated and used in several academic environments for the study, development, and research of synthetic and analytical geometric knowledge, analysis of functions, etc.

Figure 8.

Regular tetrahedron constructed in GeoGebra starting from the endpoints of an edge, connected to a slider that allows varying the distance between said points.

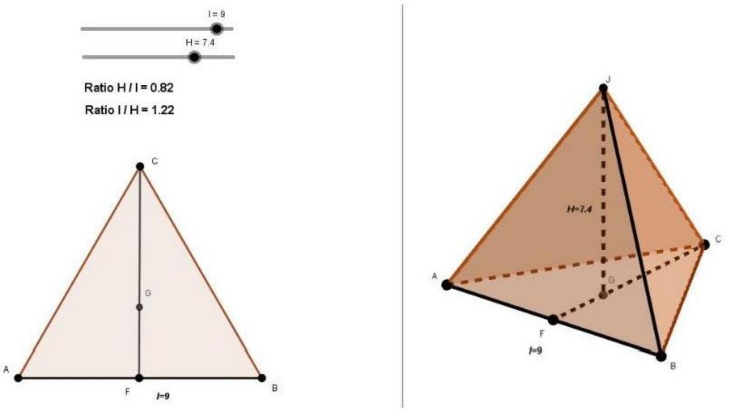


If we consider the regular tetrahedron within the set of right triangular pyramids, and call $\boldsymbol{l}$ the edge of the base, $\boldsymbol{L}$ the lateral edge (the side that joins the apex with a vertex of the base), $\boldsymbol{H}$ the height of the pyramid, and $\boldsymbol{a}$ the apothem of the pyramid (the slant height of the lateral faces), for a pyramid of this type to have the shape of a regular tetrahedron, one of the possible relations between the measures of $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{H}$ and $\boldsymbol{a}$ should be satisfied. The first relation to be satisfied is that $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{L}$. In a regular tetrahedron, the relation to be satisfied is that $\boldsymbol{H} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$ (to determine this relation, the Pythagorean theorem was applied to two right triangles).

This means that all right triangular pyramids whose ratio between the height and the side of the base is $\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.816$ are regular tetrahedrons (the converse theorem is also true). This can be verified using GeoGebra. We constructed a right pyramid with an equilateral triangle base, whose side $\boldsymbol{l} = 9$ units and $\boldsymbol{H} \approx 7.4$ units. In GeoGebra, we thus obtain the construction of a right pyramid with a regular triangular base connected to two sliders: one that enables modifying the measure of the side of the base, and another that enables modifying the height of the pyramid (Figure 9). It is here possible to verify that all the pyramids in which, when activating the sliders, the relation between the measure of $\boldsymbol{l}$ and $\boldsymbol{H}$ is $\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{l}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, or $\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{H}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$ (approximately 1.22), are regular tetrahedrons.

Figure 9.

Right pyramid with a regular triangular base, constructed in GeoGebra, connected to two sliders that allow modifying its height and edge.



Determining and constructing a right pyramid with a regular polygonal base

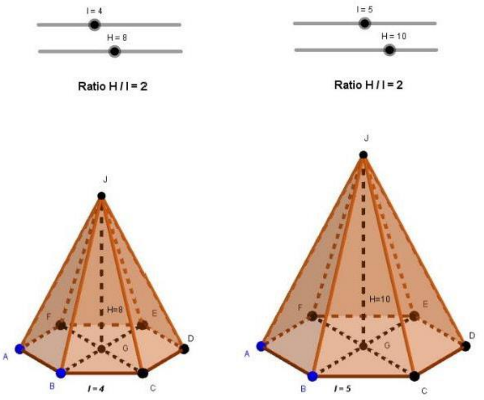
To give a response R_{212} to Q_{212}, the type of tasks T_{212} = *Determining and constructing a right pyramid with a regular polygonal base*, need to be solved. It is easy to verify that, to determine the shape of a right pyramid with a regular polygonal base (determining the type of regular polygon that forms the base), one measure is enough. Once the shape is established, other measures are required to determine the size of the pyramid.

We will here stick to the particular case of a right pyramid with a regular hexagonal base. The relation between some of the intra-figural elements such as height $\boldsymbol{H}$ of the pyramid, apothem $\boldsymbol{a}$, edge $\boldsymbol{l}$ of the base, and edge $\boldsymbol{L}$ of the lateral faces will be taken into account.

All the right pyramids with a regular hexagonal base in which the ratio between their height $\boldsymbol{H}$ and the edge of base $\boldsymbol{l}$ is $\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{l}} = 2$ are considered. Those pyramids hence have the same shape. This can be verified using GeoGebra by constructing a right pyramid with a regular hexagonal base connected to two sliders; the first one allows changing the size of side $\boldsymbol{l}$ of the regular hexagon that serves as the base of the pyramid; and the second allows modifying height $\boldsymbol{H}$ of the pyramid. Random use of these sliders enables obtaining an infinite set of regular hexagonal-based pyramid shapes. Connecting a dynamic text that evaluates the ratio between $\boldsymbol{H}$ and $\boldsymbol{l}$ enables verifying for which values of $\boldsymbol{H}$ and $\boldsymbol{l}$ pyramids with the same shape, that is, similar pyramids, are obtained (Figure 10). In this case, it is observed that, to build each of these pyramids, i.e., to determine their size, it is necessary to attribute values to $\boldsymbol{l}$ and $\boldsymbol{H}$.

Figure 10.

*Similar right pyramids with a regular hexagonal base whose ratio between **H** and **l** is 2.*



Determining and constructing a right cone

As in the case of the right pyramid with a regular hexagonal base, we can proceed in the same manner to elaborate a response $\boldsymbol{R}_{213}$ to $\boldsymbol{Q}_{213}$. The task to solve is $\boldsymbol{t}_{213}$ = *Determining and constructing a right cone.* Relations of the elements of the base of the solid, such as radius $\boldsymbol{r}$ of the base with height $\boldsymbol{H}$ of the cone or generatrix ***g***, are considered, since this allows us to determine the shape of the cone. For instance, all the right cones in which the ratio between their height ***H*** and the radius ***r*** of their base is $\frac{3}{2}$ have the same shape (Figure 11).

Figure 11.

*Right cones of the same shape whose ration between **H** and **r** is $\frac{3}{2}$.*

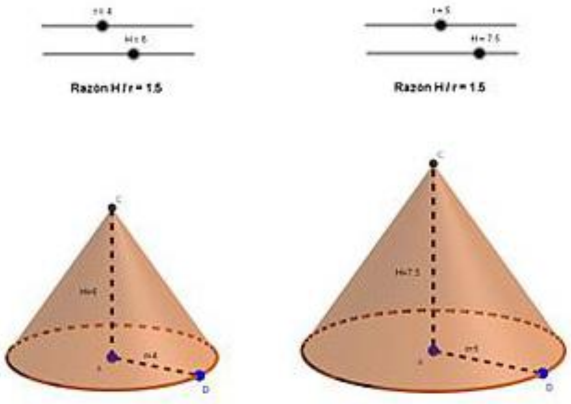
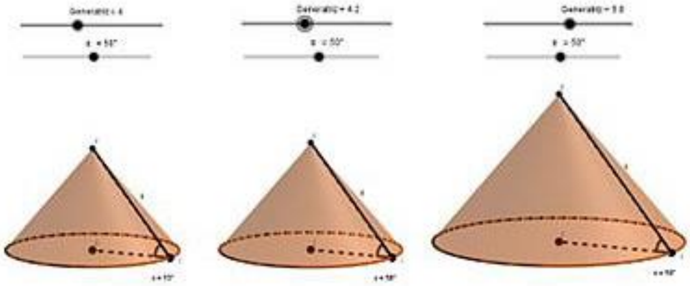


Figure 12.

*Right cones of the same shape whose angle between **g** and radius **r** is 50°.*



It could also be considered that all the right cones in which the angle between generatrix ***g*** and radius ***r*** of the base of the cone is, for example, 50º have the same shape (Figure 12).

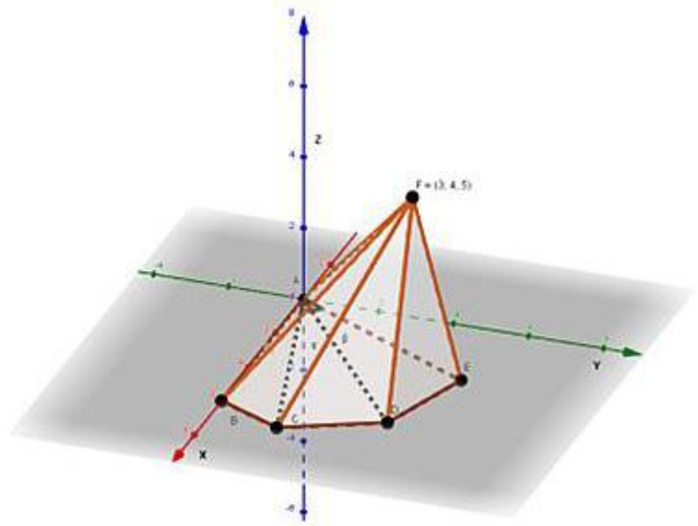
Determining and constructing a pyramid whose base is an *n*-sided polygon

The following more general question is considered: *How to determine and construct a pyramid whose base is an* ***n****-sided polygon?* To provide an answer to this question, it is first necessary to determine and build the ***n***-sided polygon of the base as mentioned in the section on determining and constructing polygons. To do this, we need 2***n*** – 3 measures. In addition, the 3 quantities necessary to determine and construct the vertex of the pyramid, which correspond to the three coordinates of this vertex, are required. To construct it, one vertex of the polygon of the base will be located at the coordinate of the origin (i.e., 0,0,0), and one side of the base at one of the coordinate axes. The rest of the measures[3] will also be put. Once the three coordinates of the apex or vertex of the pyramid are given, the pyramid is already determined and constructed. The required quantities to determine and construct a pyramid whose base is an ***n***-sided polygon are (2***n*** – 3) + 3 = 2***n*** (Figure 13).

[3] The new Spanish curriculum puts forward the following for first to third year compulsory secondary education (aged 12 to 15): Location and representation systems. – Spatial relations: location and description using geometric coordinates and other representation systems (MEFP, 2022, p. 163).

Figure 13.

*Pyramid with pentagon **ABCDE** base, determined and constructed by triangle **ABC**, with sides **AB**, **BC** and **CA**, with sides **CA** and **DA** and the angle forming **α**, and with sides **DA** and **EA** and the angle forming **β**; and point **F**, which is the apex of the pyramid, with coordinates (3,4,5).*

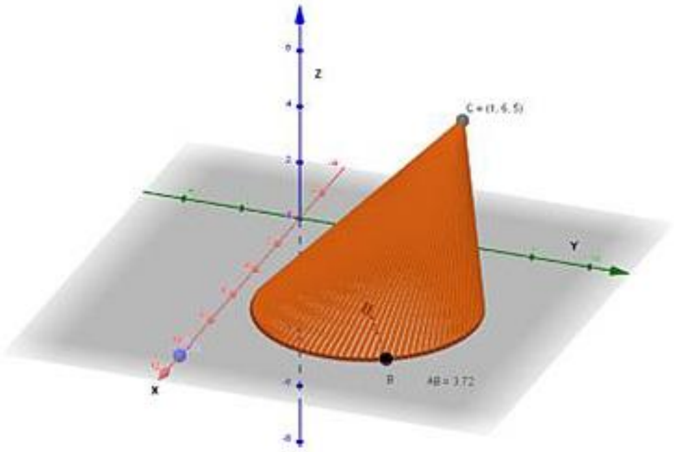


Determining and constructing a cone

The general question is: *How to determine and construct any cone?* The measures to determine the base of the cone, for example, radius ***r***; and the three coordinates of the vertex of the cone that must be located in a plane parallel to that of the base at a distance equal to the height of the cone are necessary. In total, 4 quantities are required (Figura 14).

Figure 14.

Circular-based cone with radio $\boldsymbol{AB} = 3{,}72$ *units and vertex* **C**, *with coordinates (1,6,5).*

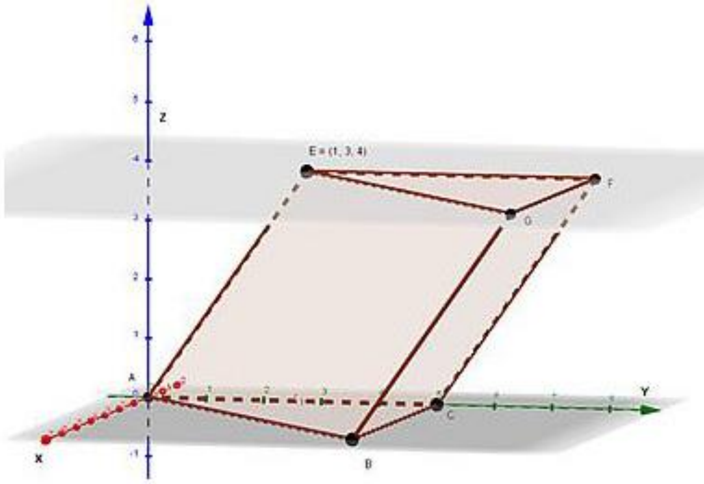


Determining and constructing a prism whose bases are formed by an *n*-sided polygon

The general question: *How to determine and construct a prism whose bases are formed by an **n**-sided polygon?* can also be considered. To provide an answer, we first construct the ***n***-sided polygon of one of the bases, for which $2n - 3$ measures are needed. To construct the base, the same procedure as the one in the case of the pyramid is used. Then, the three coordinates of one of the vertices of the other base are required. This vertex will be located in a plane parallel to the base built at a distance equal to the height of the prism. Next, the other base can be built by drawing the different sides in said parallel plane starting from the built vertex, knowing that these sides must have the same length and must be parallel to their corresponding sides in the first base. The measures required to construct a prism whose bases are formed by an ***n***-sided polygon are $(2n - 3) + 3 = 2n$ (Figure 15).

Figure 15.

Prism whose base is triangle ABC*, determined by sides* AB*,* BC *and* CA*; and then, by point* E *of the other base whose coordinates are (1,3,4), being* $AB \parallel EG$*,* $BC \parallel GF$*,* $CA \parallel FE$*, and* $AB \cong EG$*,* $BC \cong GF$*,* $CA \cong FE$*.*



Designing and building a pyramid-shaped container with a determined volume

In order to elaborate a possible response R_{311} to Q_{311}, an answer should be elaborated to the type of tasks T_{311} = *Designing and building a pyramid-shaped container in such a manner that it has a volume of V cm³.*

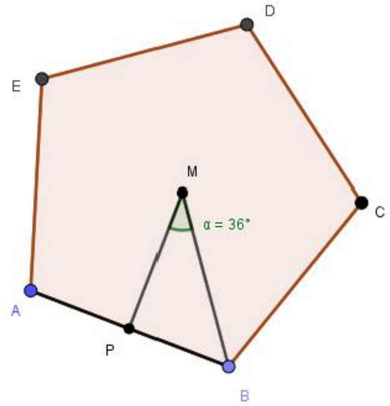
Within the type of tasks T_{311}, we chose the following particular task: t_{311} = *Determining and building a container that has the shape of a right pyramid with a regular pentagonal base in such a way that it has a volume of V cm³.* To search for an answer to t_{311}, we know that $V = \frac{BH}{3}$, where B is the area of the base of the pyramid and H is its height. The area of the base of a regular pentagon, in relation to edge l, is:

$$B = \frac{5l^2}{4\,Tan\,36º}$$

To obtain this result, the base of the pyramid is regular pentagon $\boldsymbol{ABCDE}$ (Figure 16), whose quantities are: edge $\boldsymbol{l}$, perimeter $\boldsymbol{p} = 6\boldsymbol{l}$, apothem $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{MP}$, $measure\ of\ the\ angle < \boldsymbol{PMB} = 36º$, $\boldsymbol{AB = l}$, $\boldsymbol{PB} = \frac{\boldsymbol{l}}{2}$, and with right triangle **MPB**, we know the area of the base[4] is:

Figure 16.

Regular pentagon base of the right pyramid.



$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{pa}}{2}$$

But,

$$Tan\ 36º = \frac{\boldsymbol{l}}{2\boldsymbol{a}}$$

[4] It is worthy of note that the formula for the area of a regular polygon $\boldsymbol{B}$ is always presented in school textbooks depending on perimeter $\boldsymbol{p}$ and apothem $\boldsymbol{a}$, thus suggesting that both measures are independent. When the polygon is a regular hexagon, the dependency relationship between $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{a}$ is obvious, and in other regular polygons it can be shown using trigonometric ratios, as we have just seen when calculating the area of a regular pentagon.

$$a = \frac{l}{2\,Tan\,36^{o}}$$

Substituting the value of ***a***, we obtain:

$$B = \frac{5l^2}{4\,Tan\,36^{o}}$$

By substituting ***B*** in the formula of volume ***V***, we obtain:

$$V = \frac{5l^2H}{12\,Tan\,36^{o}}$$

By separating ***l***, we obtain a first functional relationship between ***l*** and ***H*** for a given volume ***V***.

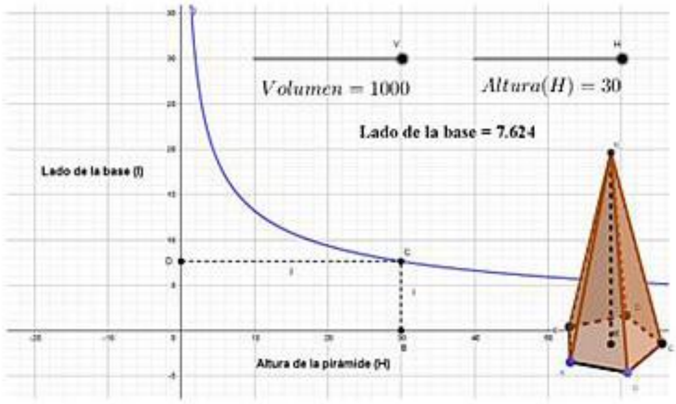
$$\sqrt{\frac{V\,12\,Tan\,36^{o}}{5H}} = l$$

However, if we separate ***H***, a second functional relationship between ***H*** and ***l*** is obtained for a given volume ***V***:

$$\frac{V\,12\,Tan\,36^{o}}{5l^2} = H$$

Figure 17.

Graph for the first case of the right pentagonal pyramid.

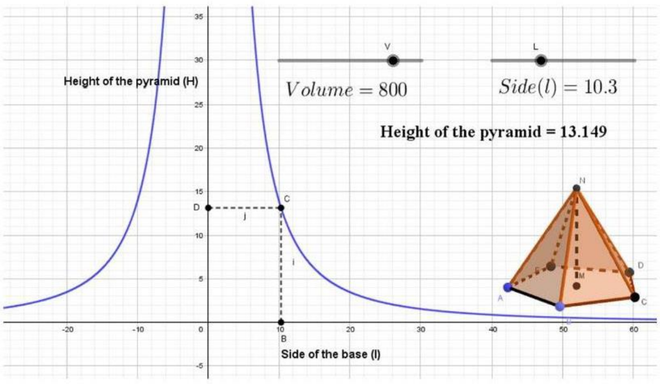


Using GeoGebra, these functional relationships can be represented. To do this, a value is attributed to V, using a slider with values between 0 and 1000 cm^3. We will thus see; in the first case, how $\boldsymbol{l}$ varies when we modify $\boldsymbol{H}$ and determine its volume; and in the second case, how $\boldsymbol{H}$ varies when we modify $\boldsymbol{l}$ and determine its volume. Thus, in the first case, for a volume $V = 1000$ cm^3, when $\boldsymbol{H}=30$, $\boldsymbol{l} \approx 7{,}624$ cm (Figure 17).

In the second case, for a volume $V = 800$ cm^3, when $\boldsymbol{l} = 10{,}3$ cm, $\boldsymbol{H} \approx 13{,}149$ cm (Figure 18).

Figure 18.

Graph for the second case of the right pentagonal pyramid.



It needs to be stressed that $\boldsymbol{t}_{311}$ is an inverse and open task, which means the formulas to calculate the volume are dealt with as algebraic or functional models. With the help of GeoGebra, this will facilitate considering the different solutions possible.

So far, an REM has been developed regarding the problems the determination and construction of solids presents. Like all REMs constructed, it is of a provisional nature, awaiting possible permanent modifications, as new questions may appear whose answer will allow extending and completing those problems.

The process followed is based on solving a spatial-geometric problem regarding the determination and construction of solids, starting from a system in which a spatial problem is presented related to designing and building a container with a predetermined volume. To solve this problem, a mathematical model is employed in which geometric, arithmetic, algebraic, and functional elements are used. We have proposed a study of elementary geometry as a model of space where, as Brousseau puts forward (cited in Berthelot and Salin, 2001), *a-didactic situations* regarding the *determination and construction of solids* will allow the development of geometric knowledge.

CONCLUSIONS: SOME EPISTEMOLOGICAL AND DIDACTIC FUNCTIONS OF THE REM CONSTRUCTED

The REM developed includes some of the questions (and associated tasks) related to the *problem of spatial-geometric modelling*, considered to be the problem of introducing geometry in secondary education. Therefore, the REM built stresses *the experimental nature* of geometry, and especially (but not only) of the introduction to the study of geometry.

Open and inverse tasks in the physical space are put forward, and their resolution facilitates the emergence of any kind of mathematical models, which, by using tools such as GeoGebra, help solve them. Therefore, the identification of the mathematical activity with the modelling activity proposed by the ATD, also in the case of geometry, is stressed, advocating that the study activity, in the case of geometry, inevitably involves a modelling activity.

The REM becomes a valuable tool for teachers in charge of study processes to be able to guide the design of their didactic proposals regarding 3D geometry to get students to build new geometric techniques, question their validity, interpret geometric formulas as algebraic-functional models and, consequently, carry out a genuine modelling activity. It will serve as a reference and basis to design, experiment, and analyse different SRPs in compulsory secondary education, and to study the possible conditions and restrictions that may arise during their implementation. In essence, the REM enables supporting study processes for predetermined educational purposes without assuming that the specific path the study community should follow to achieve those purposes is determined in advance.

As shown in the development of the REM, the problem studied with regard to the determination and construction of solids can help connect the study of 2D and 3D geometry, since the determination and subsequent construction of solid bodies is based on the previous determination of plane figures. Once agreed that "doing geometry" at the elementary level consists of determining and constructing figures from some of their elements, it is very difficult to try to determine and construct a solid body without basing it on the determination of the plane figures that determine it.

Furthermore, the development of the REM enables connecting several fields of mathematics, such as the study of geometry with that of algebra and functions. At this point, it is important to note that, from the perspective of the ATD, intra-mathematical modelling constitutes an essential part of mathematical modelling (Bosch et al., 2006; García et al., 2006). This means that, as shown earlier, in a modelling process, the system modelled can be of a mathematical nature, thus obtaining a mathematical model of a mathematical system. This extension of the usual notion of "mathematical modelling" highlights the potential reflective nature of mathematical modelling (a mathematical system can act as a model of its model, as happens, for example, in the case of the relationship between Euclidean and analytical geometry), as well as its *recursive nature* (it is possible to build a mathematical model of the model of a system). In our case, after carrying out the spatial-geometric modelling of a physical object, we built an algebraic model (using an "algebraic formula") and, to solve problems related to the variation of one variable with respect to others, we built and used a functional model.

The REM developed proposes the use of GeoGebra as a suitable tool to efficiently carry out graphic experiences that facilitate the study of the properties of solids from the elaboration of a predetermined container. The use of GeoGebra to respond to the problems raised also allows connecting the synthetic techniques with the analytical techniques of determination and construction of solids.

One of the epistemological-didactic functions of the REM consists of bringing to light characteristics of the dominant epistemological model in school institutions such as the disconnection between 2D and 3D geometry, the isolation of geometry from algebra and functional techniques, and the separation between synthetic and analytical techniques. They constitute indications of didactic phenomena we consider "undesirable" from the perspective provided by the ATD postulates and hence intend to ignore.

Developing this REM also provides the researcher with a tool to question the dominant epistemological model of geometry teaching in compulsory secondary education by means of the analysis of official curriculum documents and school textbooks. The REM thus constitutes a tool for the emancipation of the didactician with respect to the conditioning factors the dominant epistemological model entails (Gascón, 2014).

ACKNOWLEDGEMENTS

This research has been developed within the framework of the R+D+I project "Proposals for teaching based on the paradigm of questioning the world" (Q-world): RTI2018-101153-A-C22 of the State programme R+D+I aimed at Challenges of the Society. We are grateful to professor Josep Gascón for the comments and suggestions made after reading this work.

AUTHOR CONTRIBUTION

Both authors, CRS and TASD, have made substantial contributions to the conception and design of this manuscript. They have actively been involved in drafting this article.

DATA AVAILABILITY STATEMENT

Some of the data that support this study, such as those derived from the SRPs mentioned, are part of previously published works. However, if necessary, they will be made available by the corresponding author (CRS) upon reasonable request.

REFERENCES

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., & Pérez, A. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO*. SM Savia.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Tesis doctoral, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065

Berthelot, R. & Salin, M. H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive? *Petit x*, *56*, 5-34.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement elementaire de la geometrie. In M. H. Salin, P.

Clanché, & B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 125-142). La Pensée Sauvage.

Bertomeu-Camós, M. & Fortuny Cuadra, A. (2016). *El proyecto de desarrollo de packaging*. Ecoembes. https://www.ecoembes.com/sites/default/files/archivos_publicaciones_empresas/el-proyecto-de-desarrollo-de-packaging.pdf

Bosch, M., Compta, A., Gascón, J., Urbaneja, M.G. & Lamarca, J. M. (1996). *Matemáticas 2º ciclo de ESO/ 1er curso*. Almadraba.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 1-47.

Bosch, M., García, F.J., Gascón, J. & Ruiz Higueras, L. (2006) La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactiquedes mathématiques* (pp. 107-122). La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire; l'étude de l'espace et de la géométrie. *Actes du 2e colloque de didactique des mathématiques. Université de Crète*, 67-83. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/document

Carena, M. (2020). *La pelota siempre al 10: problemas del fútbol resueltos con matemática*. UNL. https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/bitstream/handle/11185/5538/lapelotasiempre10.pdf

Castelnuovo, E. (1966). *Geometría intuitiva* (R. Romero (trad.)). Labor.

CEMAT (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. https://fespm.es/wp-content/uploads/2021/06/Bases-Matematicas-CEMat-mayo-2021.pdf

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19(2)*, 221–266.

Chevallard, Y. (2002) Organiser l'étude. Structures & fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 3-22) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. La Pensée sauvage.

Dos Santos, J. M. (2012). Introducción al GeoGebra 3D. In España, F. J.; Sepúlveda, M. B. (Eds.), *Anales del XIV Congreso de Educación y Aprendizaje Matemático* (pp. 350-359). S.A.E.M. THALES. http://funes.uniandes.edu.co/21660/1/DosSantos2012Introduccion.pdf

Eduscol (2020). *Programme du cycle 4. Volet 3. Mathématiques*. D'après le BOEN nº31 juillet 2020. Direction générale de l'enseignement scolaire. https://eduscol.education.fr/document/621/download

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Vigo.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 226–246. https://doi.org/10.1007/BF02652807

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*, *44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA*, *45*, 41-52.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. el caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 203-231.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, (Special Issue: XXV years), 99-123.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Sintesis.

Houdement, C. (2019). Le spatial et le géométrique : le yin et le yang de l'enseignement de la géométrie. In S. Coppé, E. Roditi, et al. coord.. *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des* *apprentissages mathématiques - XIXe école d'été de didactique des mathématiques*, vol.1. La Pensée Sauvage.

Ihobe S. A. & Ecoembes. (2017). *Guía de ecodiseño de envases y embalajes*. Ecoembes. https://www.ecoembes.com/sites/default/files/archivos_publicaciones_empresas/10-guia-ecodiseno-envases-2018.pdf

Latasa, M. & Ramos, F. (2022). Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 3º A de ESO. Capítulo 9: Geometría en el espacio. Globo terráqueo. https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/LOMLOE/3A/09_GeometriaEspacio_3A.pdf

MEFP (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.* https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

Navarro, P., Garcia-Romeu, M., Alcaraz, J., de la Cruz, E., Ferreira, B., & Hortal, M. (2007). *Guía práctica de diseño de envases y embalajes para la distribución de productos*. Instituto tecnológico del embalaje, transporte y logística. http://www.itene.com/rs/810/d112d6ad-54ec-438b-9358-4483f9e98868/f8b/filename/guia-diseno-envases-embalajes.pdf

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A. C., y Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, *90*, 5-41.

Perrin-Glorian, M.-J., & Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école n°222*, 26-36.

Pólya, G. (1967). *La découverte des mathématiques. Tomo II. Une méthode générale* ; trad. par M. Didier. Traduction de Mathematical discovery. Dunod.

Rojas, C., & Sierra, T. (2017). Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria. *Comunicación presentada en el grupo DMDC en el XXI Simposio SEIEM*.

Rojas, C. & Sierra, T. A. (2020). Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la educación secundaria obligatoria. *Educação Matemática Pesquisa, 22*(4), pp. 593-602.

Rojas, C. & Sierra, T. (2021a). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. *Educación Matemática*, *33*(1), 208-239. https://doi.org/10.24844/EM3301.08

Rojas, C. & Sierra, T. Á. (2021b). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 41-63. https://doi.org/10.35763/aiem20.4031

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Ministerio de Educación y Ciencia.

Salin, M.H (2014) Quelques remarques autour des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. In *Enseignement de la Géométrie à l'École. Enjeux et perspectives*. Actes du 40ème colloque COPIRELEM (pp.32-43).

Sierra, T. A., Bosch, M. & Gascón, J. (2007) Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los sistemas de numeración. In *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 359-384). Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.

CAPITULO 3: PRIMERA IMPLEMENTACIÓN DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN SOBRE EL DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE ENVASES

En este capítulo presentamos la publicación que ha sido producto de la primera experimentación y análisis que hicimos del REI. Para ello presentamos, la referencia, un breve resumen, una síntesis de las conclusiones reportadas y, por último, la publicación.

3.1 Referencia completa de la publicación

Rojas, C., & Sierra, T. (2021a). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. *Educación Matemática, 33*(1), 208-239. https://doi.org/10.24844/EM3301.08

3.2 Resumen y síntesis de las conclusiones de la publicación

El trabajo de investigación tiene como objetivo hacer frente al fenómeno didáctico de la pérdida de las razones de ser de los saberes geométricos propuestos para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Para ello, hemos partido de la hipótesis de que los problemas espaciales pueden constituirse en una posible razón de ser de dichos saberes. Para la elaboración de dicha hipótesis nos hemos basado en investigaciones realizadas dentro del marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas que nos muestran que una vía para recuperar algunas de las razones de ser de algunos de los saberes geométricos propuestos en el currículo de la ESO, se encuentra en torno a la resolución de un tipo de problemas que dichos autores llaman problemas espaciales.

En el artículo nos hemos centrado concretamente en responder a las cuestiones siguientes:

- ¿Qué conocimientos de la geometría 2D y 3D requieren las cuestiones y las tareas que se plantean cuando se pretende diseñar y construir un envase de un litro? ¿Qué restricciones y limitaciones es previsible que surjan a lo largo del desarrollo de un recorrido de estudio e investigación (REI) generado por el problema espacial asociado a dicha construcción?

Para la búsqueda de respuestas a dichas cuestiones, la metodología utilizada ha consistido en implementar en un grupo de 14 estudiantes de Secundaria, de un Instituto de Secundaria de la ciudad de Getafe, un REI, cuya cuestión generatriz hace referencia al problema espacial de cómo diseñar y construir un envase con una capacidad de un litro.

Después de la recogida de los resultados obtenidos por los estudiantes, hemos analizado mediante los indicadores del grado de completitud de una organización matemática local, la actividad matemática llevada a cabo por los estudiantes en el proceso de estudio.

El análisis de los resultados nos ha permitido concluir que, durante la resolución de dicho problema espacial, pueden emerger algunos de los saberes geométricos propuestos en el currículo escolar para ser enseñados. Así, por ejemplo, al construir el desarrollo de los envases ha surgido la necesidad de representar y estudiar las características y propiedades de algunas figuras planas, y, por tanto, se ha presentado la necesidad de relacionar las geometrías 2D y 3D, lo que ha ayudado a articular ambos tipos de conocimientos geométricos. Asimismo, los resultados sugieren que con dicho proceso de estudio: (a) es posible abordar de modo funcional parte de los conocimientos geométricos propuestos en el currículo de Secundaria, y b) superar la rigidez de la actividad matemática escolar, habitual en las clases de Secundaria.

A continuación, anexamos el artículo publicado en la revista Educación Matemática.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3301.08

Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación

Geometric knowledge as an answer to a spatial problem via a study and research path

Carlos Rojas Suárez[1] y Tomás Ángel Sierra Delgado[2]

Resumen: Con este trabajo pretendemos hacer frente al fenómeno didáctico de *la pérdida de las razones de ser* de los saberes geométricos propuestos para la Educación Secundaria Obligatoria. Así postulamos que los problemas espaciales pueden constituirse en una posible *razón de ser* de dichos saberes. Para ello, hemos implementado, en un grupo de 14 estudiantes de Secundaria, un proceso de estudio conocido como *recorrido de estudio e investigación*, que se inicia con una cuestión en torno al problema espacial de diseño y construcción de un envase de litro. Analizamos mediante *los indicadores del grado de completitud de una organización matemática local*, la actividad matemática llevada a cabo por los estudiantes. Los resultados sugieren que con dicho proceso de estudio: a) es posible abordar de modo funcional parte de los conocimientos geométricos propuestos en el currículo de Secundaria, y b) superar la rigidez de la actividad matemática escolar, habitual en las clases de Secundaria, que, por un lado, limita la posibilidad de usar diferentes técnicas para resolver una misma tarea y construir nuevas técnicas y, por otro, no ayuda a cuestionar el dominio de validez de las técnicas utilizadas en clase.

Fecha de recepción: 30 de abril de 2020. **Fecha de aceptación:** 29 de octubre de 2020.

[1] Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), Madrid, España, carlroja@ucm.es, orcid.org/0000-0002-8689-8549

[2] Departamento de Didáctica de Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid (UCM), Madrid, España, tomass@ucm.es, orcid.org/0000-0003-2731-0028

Palabras clave: Enseñanza de la geometría. Conocimientos geométricos. Problemas espaciales. Recorrido de estudio e investigación. Teoría antropológica de lo didáctico.

Abstract: In this work we intend to tackle the didactic phenomenon of the *loss of the raisons d'être* of geometric knowledge proposed for Compulsory Secondary Education. Thus, we conjecture that spatial problems may become a possible *reason d'être* of such knowledge. In search of evidences for our conjecture, we have implemented, in a group of 14 secondary students, a kind of study process known as *study and research path*, which starts with a question about the spatial problem of designing and constructing a one-litre container. Then, by using the *degree of completeness indicators of a local mathematical organisation*, we analyse the mathematical activity carried out by the students. Our analysis suggests that: a) with this study process it is possible to address in a functional way part of the geometric knowledge proposed in the Secondary curriculum, and b) the rigidity of the school mathematical activity, usual in Secondary classes, on the one hand, limits the possibility of using different techniques to solve the same task and to construct new techniques; and, on the other hand, does not help to question the validity domain of the techniques used in class.

Keywords: Geometry teaching. Geometric knowledge. Spatial problems. Study and research path. Anthropological theory of the didactic.

INTRODUCCIÓN

Una de las funciones de la institución escolar –en particular de la escuela obligatoria– en la sociedad es conseguir que las nuevas generaciones de ciudadanos aprendan los conocimientos que forman parte de su legado cultural. En general, la enseñanza de esos conocimientos tiene como objetivo que los miembros de dicha sociedad puedan llegar a desenvolverse de modo eficaz en la vida cotidiana.

Habitualmente una de las disciplinas que forma parte del legado cultural incluido en el currículo son las matemáticas. De hecho, los conocimientos matemáticos son considerados como una parte importante de la enseñanza escolar, lo que lleva a pensar que debe haber una especial articulación entre lo que se propone para ser enseñado. Sin embargo, no es así ya que, por ejemplo, en la estructura del currículo español de matemáticas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2015) para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (alumnos de 12 a 16 años) aparece un listado de contenidos separados por bloques, cuyas temáticas se presentan de forma aislada. Ello se traduce en que en la enseñanza de las matemáticas existe una cierta desarticulación que sugiere, por ejemplo, que estudiar geometría y estudiar funciones son asuntos completamente separados, pues aparecen en bloques aislados.

De este modo, a pesar de que en el currículo diseñado se suele indicar que los contenidos propuestos para ser enseñados deben presentarse de manera integrada y articulada, finalmente esta responsabilidad termina dejándose, implícitamente, solo en manos de los profesores. Esto, por supuesto, constituye un encargo complejo que los profesores por sí solos difícilmente pueden abordar, ya que se trata de un problema de investigación didáctica que desborda su práctica profesional.

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se postula que para llevar a cabo la enseñanza de un saber es importante considerar cuáles son algunas de las cuestiones a las que responde dicho saber; es decir, cuáles son sus posibles *razones de ser*, en una institución determinada. La búsqueda de las razones a las que debería responder la enseñanza de la geometría en la enseñanza secundaria, en particular la geometría bidimensional (2D) y la geometría tridimensional (3D), nos llevó a diseñar e implementar un dispositivo didáctico, que, dentro de la TAD, se denomina *recorrido de estudio e investigación* (REI), en torno al diseño y construcción de envases. Pretendimos que dichas razones de ser de la enseñanza de la geometría ayudaran no solo a dar sentido a varios de los saberes propuestos en el currículo de la ESO, sino también a encontrar la conexión y la articulación, tanto entre las geometrías 2D y 3D, como con otros saberes matemáticos que propone este currículo.

En este artículo, analizamos la actividad matemática desarrollada por 14 estudiantes de secundaria al abordar uno de los tipos de tareas que formaron parte del REI propuesto. Con lo cual, pretendemos establecer si efectivamente las cuestiones que aparecen en dicho REI pueden constituirse en una posible razón de ser de algunos de los saberes geométricos propuestos para la ESO y qué conocimientos de la geometría 2D y 3D se ponen en juego durante su abordaje. Para ello, usamos los *indicadores del grado de completitud de una organización matemática local* (Bosch *et al.*, 2004), que nos permiten caracterizar la organización matemática (OM) realmente construida por los alumnos y dar cuenta de algunas de las restricciones que han dificultado la búsqueda de respuestas a cuestiones sobre el diseño y elaboración de un envase en cartulina, con capacidad para un litro.

El contraste entre estos indicadores y la actividad matemática desarrollada por los estudiantes nos va a permitir determinar hasta qué punto, en qué medida, las praxeologías matemáticas puestas en juego se han mostrado como relativamente completas y, en consecuencia, si ha sido posible llevar a cabo una actividad de modelización.

En lo que sigue, mostramos algunos antecedentes de la investigación de la que forma parte este trabajo. Explicamos el marco teórico que fundamenta nuestra investigación. Describimos el REI que hemos implementado, centrándonos en la actividad matemática desarrollada que queremos analizar. Presentamos algunos resultados obtenidos al aplicar el instrumento de análisis y algunas de las restricciones y limitaciones encontradas, y terminamos con nuestras conclusiones.

ALGUNOS ANTECEDENTES

Santaló (1985), trató la problemática en torno a la enseñanza de la geometría en el ciclo secundario en España (alumnos de 12 a 16 años), mostrando que tanto en el ciclo primario (alumnos hasta los 12 años) como al terminar la secundaria había dos tendencias claramente diferenciadas, la geometría experimental e intuitiva y, la geometría axiomática. El problema se encontraba pues en el ciclo de la enseñanza secundaria, específicamente en el ciclo básico de tres años (alumnos de 12 a 14 años) que correspondía a la etapa obligatoria, porque para ese momento primaban las presentaciones rigurosas y sistemáticas que habían abandonado el carácter práctico de la geometría, *elevándola* al mundo de las ideas. Así, Santaló afirmaba:

> La máxima preocupación debe ser para el ciclo básico. Si el Estado impone su obligatoriedad debe procurar que su enseñanza sea verdaderamente útil a los alumnos, tanto en su aspecto formativo, cosa no fácil de evaluar, como en su aspecto informativo, más fácil de decidir a través de los contenidos. Estos contenidos, que deben ser adaptados a las necesidades de la sociedad ambiente, deben revisarse periódicamente y son rápidamente cambiantes, de manera que un primer obstáculo a vencer es la inercia usual de los enseñantes, que quisieran enseñar siempre lo

> que ellos aprendieron, y de los responsables de la enseñanza, casi siempre misoneístas y temerosos de introducir cambios con demasiada frecuencia, sin tener en cuenta que la escuela no debe distanciarse demasiado del mundo exterior a ella. Cuando lo que se enseña en el aula es muy distinto de lo que se aprende en la calle, el sistema educativo se desequilibra. (Santaló, 1985, p. 14)

Dentro de las propuestas planteadas por Santaló (1985) para que la enseñanza de la geometría resulte útil a los estudiantes, destacan; primero, no pensar que se deba partir de cero en el aula, pues los estudiantes traen consigo varios conocimientos provenientes de la escuela, y de la vida familiar y social; segundo, "lo que sea intuitivamente evidente para el alumno debe aceptarse como tal, para poder seguir adelante en la adquisición de conocimientos menos evidentes" (p. 20); y tercero, mostrar cada vez que sea posible, la conexión entre las diferentes partes de las matemáticas.

Esta problemática sobre la diferenciación que existe entre la enseñanza de la geometría experimental y la geometría axiomática, que ha advertido Santaló, guarda relación con el trabajo de tesis doctoral llevado a cabo por René Berthelot y Marie-Hélène Salin (1992); quienes resaltan la importancia de un tipo de conocimiento que sirve para operar directamente sobre el espacio sensible –conocimiento espacial–, y de cómo los conocimientos geométricos aparecen diluyendo este conocimiento en la medida en que se avanza en la vida escolar; y porque proponen la necesidad de vincular estos dos tipos de conocimiento.

En un estudio exploratorio llevado a cabo por Pérez y Guillén (2007), en el que se indagó sobre las creencias y las concepciones en torno a la enseñanza de la geometría de un grupo de 19 profesores de secundaria, se encontró, entre otras cosas, que los bloques que se privilegian en la enseñanza de las matemáticas en la ESO son los de aritmética y de álgebra y también, aunque algo menos, el de análisis. Así, en el caso de que no hubiese tiempo suficiente para abordar todo el currículo, la geometría no se abordaría. Estos autores señalaron también que en el estudio que realizan los alumnos de la ESO, sobre la geometría, se presta mucha atención a los problemas de operar o calcular áreas y volúmenes, y se dedica mucho menos tiempo a los procesos de reproducción, descripción, clasificación, representación, construcción, etcétera.

En lo referente a los poliedros, en Pérez y Guillén (2008), se encontró que su estudio se limita a los prismas, pirámides, poliedros regulares, cilindros, conos y esferas. Y, en Guillén, González y García (2009), donde se analizó la propuesta que hacen los textos escolares sobre los cuerpos de revolución se afirma que:

"El cálculo de áreas y volúmenes en secundaria se basa fundamentalmente en la aplicación de las fórmulas a partir de sus elementos" (p. 255). Por ejemplo, el cálculo del área de una superficie rectangular dada la medida de sus lados, o el del volumen de un paralelepípedo dada la medida de sus aristas. Esto desvela el fenómeno didáctico de reducir la enseñanza de las figuras geométricas a su estudio aritmético y algorítmico, dejando de lado el análisis de su determinación y construcción. Lo que conlleva también un uso exclusivamente aritmético de las fórmulas en geometría. Dicho fenómeno forma parte de un problema más general de la situación actual de las matemáticas en la educación primaria y secundaria, tal como se señala en las conclusiones del *Libro Blanco de las Matemáticas*: "[...] es frecuente que la enseñanza de las matemáticas se reduzca a procedimientos y rutinas" (RSME, 2020, p. 544).

También en la Educación Secundaria, pero en el contexto costarricense, se ha estudiado la problemática que presenta la enseñanza de la geometría, porque los contenidos en la educación formal son mostrados como productos acabados (Gamboa y Ballestero, 2010). Es decir, como aquellos que no son susceptibles de cambios y que aparecen como cristalizados, de modo que su enseñanza no considera ninguna reflexión en torno a su construcción. Esta forma de concebir y presentar los contenidos de una disciplina se sitúa dentro de lo que Chevallard (2013, 2017) llama el *paradigma de la visita de las obras*.

Como alternativa al paradigma de la visita de las obras, Chevallard propone el *paradigma de cuestionamiento del mundo*, en el que la lógica lineal dominante del currículo se rompe mediante el estudio funcional de las matemáticas, donde los conocimientos matemáticos surgen a partir de las cuestiones a las que responden, proponiendo tipos de tareas o problemas en los que dichos conocimientos sean una buena herramienta para resolverlos. De este modo, los contenidos que son propuestos en el currículo aparecerán como necesarios para el abordaje de dicho problema, y no como un listado *a priori* de contenidos que apenas aparecen justificados.

Los estudios sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría realizados dentro de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Berthelot y Salin, 1992, 2001), permiten postular que una vía para recuperar algunas de las razones de ser de algunos de los saberes geométricos propuestos en el currículo de la ESO, se encuentra en torno a la resolución de un tipo de problemas que dichos autores llaman *problemas espaciales*. Estos tratan sobre situaciones que tienen lugar en el espacio sensible. Así, en el tipo de problema de diseño, que consideramos en este trabajo, los conocimientos geométricos sirven como herramienta eficaz para su solución.

En Perrin-Glorian *et al.*, (2013), se afirma también que la problemática de modelización o espacio-geométrica que proponen Berthelot y Salin, consistente en partir de un problema del espacio sensible o problema espacial, pasar a representarlo mediante un modelo geométrico, utlizar las propiedades geométricas correspondientes y terminar validándolo en el espacio sensible, resulta de gran interés para llevarla a cabo en la enseñanza. Lo que ha de permitir considerar la relación entre el espacio sensible y el espacio geométrico, y en particular realizar una enseñanza coherente de la geometría a lo largo de la escolaridad obligatoria, que necesita tener en cuenta ambos espacios y ligarlos con el desarrollo del alumno.

A continuación, describimos brevemente el marco teórico en el que nos situamos, que dispone a su vez de un modelo metodológico, y esbozamos en qué consisten los problemas espaciales y su relación con los conocimientos espaciales y geométricos, ya que estos se encuentran estrechamente ligados con nuestro postulado.

MARCO TEÓRICO

Para hacer frente al fenómeno didáctico general de *la pérdida de las razones de ser de la enseñanza de la geometría*, utilizamos las herramientas que propone la TAD y nos apoyamos en diferentes estudios realizados dentro de la TSD que han mostrado la interrelación entre algunos problemas espaciales y los conocimientos geométricos.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico y los recorridos de estudio e investigación

La TAD puede entenderse como una evolución de la TSD, propuesta por Guy Brousseau. Según Gascón (2013), la TSD constituye el germen del programa epistemológico que surge frente a la "insuficiencia manifiesta de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares para formular y abordar los problemas didáctico-matemáticos" (p. 79). Dicha insuficiencia proviene de cómo conciben la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y las matemáticas mismas, tales modelos. La diferencia con dichos modelos es que:

> En el caso particular de la TSD se postula que un *conocimiento matemático* está definido por las *situaciones* que lo determinan, esto es, por un conjunto de situaciones para las que dicho conocimiento es idóneo porque proporciona la solución óptima en el contexto de una institución determinada. Las situaciones contienen la "razón de ser" del conocimiento que definen, esto es, las cuestiones que le dan sentido, así como las restricciones que limitan su uso en una institución determinada y las aplicaciones potenciales del mismo. (Gascón 2013, p. 79)

Yves Chevallard propone, a principios de los ochenta, estudiar los fenómenos de trasposición didáctica siguiendo, al igual que la TSD, los principios del programa epistemológico. Es decir, cuestiona los diferentes modelos epistemológicos del saber matemático que viven en cada una de la instituciones que intervienen en la transposición didáctica y propone nuevos modelos alternativos que posibilitan; de una parte, poner de relieve los fenómenos didácticos que se presentan en dichas instituciones; y de otra, formular y abordar los problemas didácticos relacionados con esos fenómenos (Gascón, 2014). A partir de allí, surge la TAD, que, a diferencia de los otros enfoques en didáctica de las matemáticas, basados en modelos cognitivos, precisa de "un *modelo de las matemáticas institucionales* que incluya la *matemática escolar* como un caso particular y de un modelo de las *actividades matemáticas institucionales* que incluya la *enseñanza-aprendizaje escolar de las matemáticas*, como una actividad matemática institucional particular" (Gascón, 1998, p. 20). Con lo cual, la TAD propone concebir el conocimiento matemático en estructuras cuya unidad mínima es la organización o praxeología matemática (OM). Estas estructuras se componen de:

> [...] un bloque práctico o "saber-hacer" formado por los tipos de tareas y las técnicas [**T/τ**] y por un bloque teórico o "saber" formado por el discurso tecnológico-teórico [θ/Θ] que describe, explica y justifica la práctica. [...] Las OM surgen como producto de un *proceso de estudio* estructurado en seis dimensiones o *momentos didácticos*. La forma concreta de llevar a cabo un proceso de estudio en una institución determinada se describe a su vez en términos de *organizaciones o praxeologías didácticas [OD]*. (Bosch *et al.*, 2004, p. 7)

La TAD propone un modelo ideal de proceso de estudio para el aprendizaje de las matemáticas a través de la modelización, los REI (Barquero, 2009; Fonseca, Pereira, y Casas, 2011), caracterizado porque parte de una cuestión importante viva y rica, con fuerte poder generador. En ellos el objetivo del estudio no viene definido como un conjunto de saberes designados de antemano, sino como un conjunto de cuestiones cruciales –derivadas de dicha cuestión inicial– a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta. Se recupera así la relación natural entre cuestiones y respuestas de cualquier actividad de formación.

Los REI pueden describirse mediante una estructura arborescente de cuestiones y respuestas, que surgen con la movilización de los medios, saberes y respuestas disponibles. Son, por tanto, una herramienta muy apropiada tanto para describir los procesos de estudio existentes o posibles como para implementar en el aula secuencias de enseñanza basadas en la actividad matemática de modelización (Rodríquez-Quintana, 2005).

En suma, los REI son un dispositivo didáctico concreto que permite el estudio de las OM en la escuela e implican un cambio en la lógica tradicional que rige las formas de hacer en la enseñanza de las matemáticas. Primero, porque los conocimientos aparecen como necesarios para dar respuesta a las cuestiones que se abordan; y segundo, porque las respuestas a dichas cuestiones y las propias cuestiones no son responsabilidad exclusiva del profesor, sino también de los estudiantes, quienes las construyen como fruto del trabajo grupal.

LOS PROBLEMAS ESPACIALES Y LOS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS

En estudios que parten de la tesis de René Berthelot y Marie-Hélène Salin (Berthelot y Salin, 2001; Bloch y Salin, 2005), y en otros previos donde se cuestiona la geometría y su enseñanza (Brousseau, 2000), se afirma que existe una interrelación entre problemas espaciales y conocimientos geométricos. Dicha interrelación pone de relieve que, durante la resolución de un problema espacial pueden emerger –como necesarios– ciertos conocimientos geométricos. Esta resolución del problema implica una *relación de modelización espacio-geométrica* (Bloch y Salin, 2005), que viene caracterizada por "una relación con el espacio, [que aparece] inscrito en situaciones donde las nociones geométricas intervienen como medios de decisión, de acción o de previsión razonada sobre un espacio sensible"[3] (p. 130). Berthelot y Salin consideran que una problemática de modelización espacio-geométrica es aquella donde se trabaja con objetos físicos, la validación se lleva a cabo en el espacio sensible, y en el proceso de resolución se utilizan las propiedades geométricas.

En nuestra investigación tomamos la definición de *problemas espaciales* que ha presentado Salin (2004), debido al amplio espectro de situaciones que abarca. Estos, se caracterizan a nivel general porque:

> Su finalidad concierne al espacio sensible [y] pueden tratar sobre la realización de: acciones [como] fabricar, desplazarse, desplazar, dibujar, etc., [y sobre] comunicaciones a propósito de acciones o de constataciones [...] [Además, porque] el éxito o el fracaso viene determinado para el individuo por la comparación entre el resultado esperado y el resultado obtenido. (p. 39)

Esta definición de problema espacial nos lleva de manera implícita a la caracterización de los conocimientos espaciales. Según Berthelot y Salin (1992), dichos conocimientos; de una parte, pueden ser descritos mediante la geometría; y de otra, "permiten a cada uno controlar la anticipación de los efectos de sus acciones sobre el espacio [...], así como la comunicación de información espacial"[4] (p. 9).

Según Salin (2004), los conocimientos espaciales surgen de forma natural y no es necesario ir a la escuela para su utilización. Sin embargo, los conocimientos geométricos deben ser enseñados de manera explícita. Además, la geometría constituye una buena herramienta para actuar de manera efectiva sobre el espacio sensible, es decir, el espacio físico en el que todos nos encontramos. Ahora bien, ¿por qué esto es importante en la enseñanza de la geometría? Para responder a esta pregunta pensemos en un carpintero que debe construir un marco para una ventana. Si un día le pidiesen construir un marco para una ventana con forma de elipse, ¿qué estrategia debería de tomar? Una solución práctica podría ser copiar la forma de la ventana con un trozo de papel lo suficientemente grande. Otra, implicaría conocer qué elementos definen una forma elíptica y ello requeriría el estudio de la elipse. Así, en este ejemplo, algunos de los conocimientos espaciales necesarios para construir el marco de la ventana, copiando su forma, estarían vinculados con la orientación, con la estimación tanto del tamaño del trozo de papel necesario para copiar su forma como de la

---

[3] Traducción propia.

[4] Traducción propia.

cantidad de madera suficiente para construirla, con la manipulación de herramientas de carpintería, etc. Sin embrago, si el carpintero quisiera resolver cualquiera de las situaciones en las que tuviese que construir muchos marcos elípticos, le resultará más eficaz conocer las propiedades geométricas de la elipse y utilizar dicho modelo para resolverlas.

A continuación, presentamos el problema de investigación que estamos abordando y las hipótesis planteadas. Luego, explicamos la metodología empleada en la experimentación del dispositivo didáctico con el que hemos sometido a prueba dichas hipótesis.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Tras el análisis de algunos de los libros de texto propuestos para la ESO (Rojas y Sierra, 2017), encontramos que, en la enseñanza de la geometría se suelen proponer tipos de tareas asociadas con un listado de temas poco relacionados entre sí. Además, cuando se propone una tarea, por lo general se sugiere una única vía de solución para esta, bien sea a través de un ejemplo o de una secuencia de instrucciones. Dicho análisis nos condujo a concluir principalmente que: (a) los manuales escolares son una extensión del currículo de matemáticas porque reproducen las visiones segmentadas y segregadas que este refleja del conocimiento, y (b) los tipos de tareas y técnicas propuestos en los manuales escolares presentan una relación cíclica, es decir, que las tareas promueven la aplicación de las técnicas y estas se proponen para justificar la presencia de las tareas. Esto ratificó la existencia del fenómeno didáctico, que hemos explicitado así:

> *Actualmente, en el currículo de matemáticas para la ESO y en los manuales escolares correspondientes, se proponen una serie de saberes geométricos a enseñar, sin que aparezcan de modo explícito las cuestiones a las que responden, es decir, no se explicitan las razones de ser de dichos saberes.*

En correspondencia con este fenómeno, sumado al hecho de que tanto en el currículo de la ESO como en los manuales escolares se presenta una separación entre la geometría 2D y 3D, y permeados por los presupuestos epistemológicos de la TAD, la pregunta general de nuestra investigación puede formularse brevemente como sigue:

¿Qué tipo de organizaciones matemático-didácticas (OMD) permitirían sacar a la luz y situar en el centro del proceso de estudio las razones de ser de algunos de los contenidos geométricos de la ESO, permitiendo articular su relación dentro de la geometría en 2D y 3D?

Ahora bien, en este trabajo nos hemos centrado en la siguiente cuestión derivada de este problema didáctico general:

Los problemas espaciales tal como fueron caracterizados en (Salin, 2004), ¿pueden constituirse en una posible razón de ser de un ámbito significativo de los conocimientos de la geometría elemental de la ESO? Más concretamente, ¿qué conocimientos de la geometría 2D y 3D requieren *las cuestiones y las tareas que se plantean cuando se pretende diseñar y construir un envase de un litro? ¿Qué restricciones y limitaciones es previsible que surjan a lo largo del desarrollo de un REI generado por el problema espacial asociado a dicha construcción?*

METODOLOGÍA

La implementación de un REI supone tener en cuenta diferentes restricciones (Rodríquez-Quintana, 2005), tales como la limitación de los tiempos para abordar un problema en profundidad y poder indagar y discutir las posibles soluciones con todo el grupo de estudio. Para disponer de más tiempo del que brindan las clases de matemáticas, decidimos hacer una convocatoria abierta a estudiantes de cuarto de la ESO y de primero de bachillerato[5] de un instituto de Educación Secundaria de Getafe, para conformar un grupo de estudio al que llamamos *Semillero matemático*, que funcionaría una vez a la semana durante una hora y media, en horario extraescolar. Catorce estudiantes acudieron tras la convocatoria, 10 de cuarto de la ESO y cuatro de primero de bachillerato. En el grupo de alumnos, había 12 que obtenían buenos resultados en las evaluaciones de las asignaturas de Matemáticas y 2 que no, según nos informó la profesora titular

[5] La decisión de elegir dichos cursos obedeció a que el trabajo con estos estudiantes nos podía permitir analizar hasta qué punto ellos podrían ser capaces de utilizar los conocimientos geométricos, que han estudiando hasta entonces, en la resolucion de un problema espacial abierto. Es decir, hasta qué punto los estudiantes han percibido los conocimientos geométricos con un caracter funcional.

del área de matemáticas. Estos dos alumnos mostraron una especial motivación por el problema planteado a lo largo del estudio realizado.

En el REI, sobre el análisis, diseño y construcción de un envase, planteamos cuestiones en torno a tres tipos de tareas que fueron abordadas en grupos de 3 o 4 estudiantes. En el primer tipo de tareas, instamos a los estudiantes a realizar un primer análisis de la forma, dimensiones y capacidad, de algunos de los recipientes que actualmente se usan para envasar leche, zumo, vino y caldo de pollo. En el segundo, les pedimos que construyeran un envase en cartulina con capacidad para un litro. Y en el tercero, les propusimos diseñar el *mejor envase* para un perfume. Al final, los estudiantes debieron entregar un informe argumentando por qué el envase diseñado es el mejor. En el desarrollo del REI, se pretendió que la responsabilidad del planteamiento de las cuestiones fuera compartida por los alumnos y el profesor. El profesor asumió el papel de director del estudio más que el de un enseñante tradicional que muestra a los alumnos las respuestas a las cuestiones planteadas.

La estructura de trabajo seguida comportó tres fases: presentación de la cuestión inicial por el profesor, trabajo grupal y puesta en común. La segunda estuvo a cargo de los estudiantes y la tercera compartida por los estudiantes y el profesor. El profesor, que hizo la función de investigador, pasaba por cada grupo preguntando por las ideas, decisiones, procedimientos, etc., que emergían durante el abordaje de cada tarea. En la puesta en común, el profesor intervino planteando preguntas con el objetivo de intentar desvelar la mayor cantidad de elementos que pudieran emerger durante la búsqueda de respuestas a cada tarea. Como los alumnos necesitaron más de una sesión para responder a cada tarea, al inicio de cada sesión se hacía un breve recuerdo de lo realizado en la anterior.

Los datos empíricos recogidos del desarrollo del estudio provienen de la información proporcionada por tres fuentes: (a) registros audiovisuales, (b) el diario de campo del investigador, y (c) el cuaderno que usan los estudiantes para escribir los procedimientos empleados. En el trabajo que presentamos, los datos provienen de algunas de las trascripciones de los diálogos entre los estudiantes y el profesor de las sesiones tercera, cuarta y quinta de la experimentación del REI en las que se propuso Q_2 (Figura 1. Mapa de cuestiones que han aparecido durante la implementación del REI.). Las trascripciones se obtuvieron del registro audiovisual de dichas sesiones, donde hemos extraído y analizado las respuestas que dieron los estudiantes, utilizando para ello, lo indicadores del grado de completitud de una OM.

DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

Durante la implementación del REI emergieron varias cuestiones derivadas de la cuestión generatriz (Q_G). Dichas cuestiones, que hemos estructurado en un mapa (Figura 1. Mapa de cuestiones que han aparecido durante la implementación del REI.), se corresponden con los tres tipos de tareas mencionados en la sección de *metodología*.

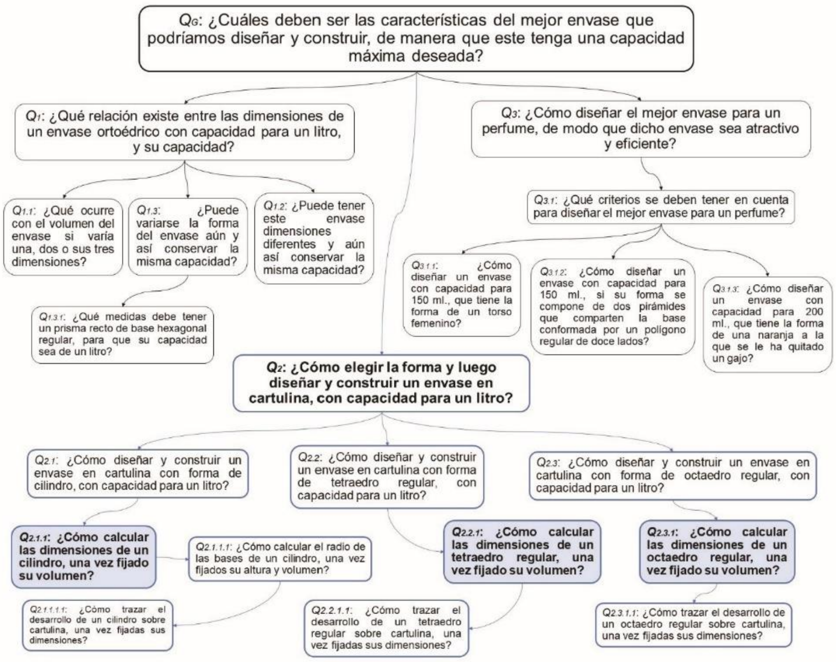


Figura 1. Mapa de cuestiones que han aparecido durante la implementación del REI.

En este artículo nos limitamos solo a los datos que hacen referencia al modo en que los alumnos intentaron buscar una respuesta a la cuestión Q_2 = *¿Cómo elegir la forma y luego diseñar y construir un envase en cartulina, con capacidad para un litro?* Específicamente, consideramos los que contienen información sobre la manera en que los estudiantes calcularon las dimensiones del envase que diseñaron.

Una vez propuesta Q_2, los estudiantes desarrollaron su trabajo en tres grupos:

- El grupo 1 (G_1), formado por los estudiantes E1, E2, E3 y E4, buscó responder a Q_{21} = *¿Cómo diseñar y construir un envase en cartulina con forma de cilindro, con capacidad para un litro?* Y después a Q_{211} = ***¿Cómo calcular las dimensiones de un cilindro, una vez fijado su volumen?*** (Figura 2. Cilindro construido por los integrantes del G_1.)

- El grupo 2 (G_2) (constituido por E5, E6, E7, y E8), trató de encontrar la respuesta a Q_{22} = *¿Cómo diseñar y construir un envase en cartulina con forma de tetraedro regular, con capacidad para un litro?* Y después a Q_{221} = ***¿Cómo calcular las dimensiones de un tetraedro regular, una vez fijado su volumen?*** (Figura 3. Tetraedro regular construido por los integrantes del G_2.)

- El grupo 3 (G_3) (integrado por E9, E10 y E11), se propuso responder a Q_{23} = *¿Cómo diseñar y construir un envase en cartulina con forma de octaedro regular, con capacidad para un litro?* Y después a Q_{231} = ***¿Cómo calcular las dimensiones de un octaedro regular, una vez fijado su volumen?*** (Figura 4. Octaedro regular construido por los integrantes del G_2.)

El tiempo dedicado a responder a Q_2 fue de tres semanas, a partir de la tercera sesión del semillero, con una sesión de hora y media por semana.

Durante la puesta en común, los estudiantes arguyeron en relación con el envase construido: (a) sobre la forma elegida, (b) sobre el porqué de dicha elección, y (c) sobre la manera en que calcularon las dimensiones del envase. Por tanto, hemos transcrito los diálogos en los que los estudiantes presentaron dichos argumentos al profesor (P) y a los demás compañeros, y los hemos tomado como objeto de análisis y de discusión para rastrear el tipo de conocimientos geométricos que han emergido en repuesta a Q_2.

Puesta en común de G_1

E1: [...] hemos optado por el cilindro (Figura 2. Cilindro construido por los integrantes del G_1), porque tiene una forma cómoda y porque nos supone menos trabajo realizar uno [...] la altura treinta centímetros, porque, más o menos, hemos semejado –creo– a una lata de Pringles...

E2: [...] también hemos optado por un cilindro... por la comodidad a la hora de cogerlo.

Figura 2. Cilindro construido por los integrantes del G_1.

Cuando les preguntamos qué debieron tener en cuenta para hacer los trazos del desarrollo del cilindro sobre la cartulina, respondieron:

E3: Las medidas del cilindro. La altura, el diámetro de las bases, y el ancho que va a tener el cilindro.

P: [...] el desarrollo de ese cilindro en particular, ¿qué figuras implicó trazar [sobre la cartulina]?

E3: Un círculo y un rectángulo. ¡Dos círculos!

E2: Dos círculos que eran las dos bases, y el rectángulo, que sería el cuerpo del cilindro.

P: ¿Qué medidas debieron tener esas figuras?

E2: Bueno, pues realmente la altura la hicimos un poco así a ojo. Treinta, pues por hacer una altura medianamente decente. Y luego, por la fórmula para hallar el área... averiguamos el radio [...].

E4: Pensamos que el volumen [del cilindro] que es la altura, por pi [π], por el radio al cuadrado, tenía que ser mil centímetros cúbicos. Entonces, sustituimos la altura por treinta, el pi por [...] la tecla de la calculadora, y luego tuvimos que calcular el radio, que nos salió 3,25. Y de ahí [...] el diámetro.

P: ¿Por qué es necesario calcular el diámetro de la circunferencia?

E4: Pues calculamos el diámetro, para poder calcular el perímetro [de la circunferencia], [...] esto es una medida del rectángulo.

Minutos después, preguntamos:

P: [...] para poder hacer los trazos [...] y poder construir ese recipiente, las medidas que tuvieron en cuenta sobre la cartulina, ¿fueron exactamente aquellas que calcularon [...] o tuvieron algunas tolerancias?

E2: [...] la verdad es que hubo muchos decimales, entonces, fuimos redondeándolo lo más posible [...].

Cuando sometieron a prueba la fórmula usada por ellos (i.e., $V = h\pi r^2$, siendo r el radio, h la altura del cilindro, y V el volumen buscado), encontraron que el cilindro diseñado tenía un volumen de *995,492* cm^3.

E2: [...] da así... porque hemos cogido aproximaciones. En realidad, no son 3,25 el radio, es 3,257... Si no, al coger más decimales, sí que nos da... no nos da el mil, pero nos da 999,9. Entonces... aquí ... lo hemos redondeado, lo hemos aproximado, pero realmente es por un milímetro [...].

Puesta en común de G_2

E5: [...] nosotros lo primero que hicimos fue decidir qué forma iba a tener nuestra figura, para poder después hacer todas las fórmulas [...] Hemos decidido hacer un tetraedro regular (Figura 3. Tetraedro regular construido por los integrantes del G_2), [...] y lo primero que hicimos fue la fórmula de volumen. Y a partir de allí, pues hicimos la fórmula de equis elevado a tres por raíz de dos...

E6: Bueno, al principio intentamos averiguar la medida de un lado,...

E5: ¡Exacto! Lo hicimos por estándar, o sea por tanteo de... a base de prueba y error de... Hicimos 21, vimos que nos pasamos mucho, luego hicimos 20,1, 20,2, hasta llegar más o menos. Y luego nos dimos cuenta de que obviamente se podría hacer con la equis, y lo hicimos ya por exactitud. Y cuando ya tuvimos el lado, pues decidimos [...] planificar en el papel cómo haríamos la forma para después empezar a doblarla [...] cuando quisimos plasmarlo en el papel, pues... nos costaba mucho, entonces decidimos [...] romper en triángulos rectángulos, cada uno de los triángulos que no eran rectángulos. Pues necesitábamos hallar la hipotenusa, y para eso hicimos el teorema de Pitágoras...

E6: Necesitábamos saber la altura [...] de un triángulo equilátero.

P: ¿Por qué surgió la necesidad de hallar esa altura?

E5: ¡Porque no teníamos compás!

P: ¿Para qué necesitaban el compás?

E5: Para poder hallar a partir de esta base [señalando la base de uno de los triángulos equiláteros que constituyen el desarrollo del tetraedro], directamente pincha aquí y hacer así, pinchar aquí y hacer así [haciendo un gesto con sus manos sobre la pizarra, para simular el trazado e intersección de dos arcos], y ya nos daba el punto exacto. Como no lo teníamos, pues...

Figura 3. Tetraedro regular construido por los integrantes del G_2.

Luego preguntamos por el proceso que siguieron para calcular el valor de *x* que aparece en la fórmula usada (i.e., $V = |(x^3\sqrt{2})/12|$, donde *x* es la longitud de la arista del tetraedro regular y *V* el volumen buscado).

P: [...] Han dicho al principio, que comenzaron a probar con varios números [...], pero después dijeron: entonces tomamos la decisión de trabajarlo con equis, porque es más preciso. Y, ¿cómo fue ese trabajo con equis?

E6: Pues, al tener la fórmula general de un tetraedro [...] la hemos igualado a mil. [...] Y nos da básicamente, [...] 23,9, y muchísimos decimales, por lo que optamos por el redondeo. Porque precisar tantos decimales en una regla, pues, no podemos.

Con relación a la elección de la forma tetraédrica, los estudiantes indicaron:

E5: No tuvimos en cuenta, ni la comodidad, ni la capacidad de... vacío de él [refiriéndose al orificio de entrada y salida del contenido].

E6: Por lo que hemos hecho esta figura, no es más para... un motivo comercial, sino para demostrar que hay muchísima variedad de figuras...

Puesta en común de G_3

E9: [...] Nosotros para este proyecto, quisimos innovar un poco, y pues pensamos en hacer un octaedro regular (Figura 4. Octaedro regular construido por los integrantes del G_3). Al principio pensamos en hacer... un cono o una pirámide, pero... quisimos probar otro. Es cierto que... nos ha costado bastante [...]. Como podéis ver aquí en esta fórmula [$V = [(l^3\sqrt{2})/3]$, donde l es la longitud de la arista del octaedro regular y V el volumen buscado] da exactamente... un litro, pero se pasa, a lo mejor unas centésimas o un poco más.

P: Si se trata de innovar [...], ¿por qué esa forma en particular?

E10: [...] porque es la que nos salían los cálculos mejor.

E9: [...] Justo los cálculos los hicimos así: primero pensamos en números enteros y cuando vimos que se nos aproximaba un poco, empezamos con decimales, y exactamente cada lado equilátero mide 12,85 centímetros [...].

Figura 4. Octaedro regular construido por los integrantes del G_3.

Cuando preguntamos por la manera como calcularon la medida del lado de los triángulos que constituyen el desarrollo del octaedro, los estudiantes respondieron:

E9: [...] Primero, para aproximarnos... a un litro, lo que pensamos en hacer es por tanteo, y primero pusimos 13 y vimos que se acercaba un poco, y luego bajamos a 12,5, y ya veíamos que se bajaba un poco. Entonces, ahí fuimos aproximando hasta que nos dio eso.

P: Y les dio en este caso 1000,23 centímetros cúbicos. Ciertamente un poco más que el litro...

E10: ¡Claro, un poquito! ¡Hombre, no se va a notar!, digo yo.

Sobre el proceso seguido para trazar el desarrollo del octaedro regular, los estudiantes indicaron:

> E9: Hicimos un triángulo [equilátero], y utilizamos ese triángulo y lo cortamos de base [como una plantilla], y de ahí hicimos cada uno.

PRESENTACIÓN DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS DE LA OM ELABORADA Y DE SUS RESULTADOS

Dentro de la TAD "toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización" (Fonseca, Gascón, y Lucas, 2014, p. 294). Queremos analizar hasta qué punto ha sido posible llevar a cabo una actividad de modelización espacio-geométrica en el REI experimentado. Uno de los instrumentos que nos proporciona la TAD para analizar las OMD, que tomaremos aquí como herramienta de análisis, lo constituye *los indicadores del grado de completitud de una OM local relativamente completa*. A propósito de ello:

> Parece evidente que una OM local que permita abordar –y, por tanto, integre en cierta medida– este tipo de cuestiones [de modelización matemática] también cumplirá los indicadores anteriores relativos a la flexibilidad de las técnicas, el desarrollo de los tipos de tareas y la existencia de un cuestionamiento tecnológico funcional. (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 219)

En Bosch *et al.*, (2004), se definen siete indicadores del "grado de completitud" de una OM, que nos van a servir para analizar la OM elaborada durante el REI implementado. A continuación, mostramos y analizamos hasta qué punto se cumplen cada uno de los indicadores, porque ello nos servirá; de una parte, para identificar las limitaciones y restricciones encontradas durante el desarrollo de la tarea propuesta; y de otra, para desvelar los conocimientos geométricos que se pusieron en juego durante la búsqueda de respuestas a Q_2.

– El primer indicador pretende analizar en qué medida se ha producido *una integración de los tipos de tareas*.

Todos los tipos de tareas tienen un nexo común que es responder a Q_2. Cada grupo de estudiantes debió llevar a cabo una tarea del tipo T_2: *Diseñar y construir un envase en cartulina, con capacidad para un litro*, que dentro de cada grupo se tradujo en una tarea:

- En G_1, t_{21}: *Diseñar y construir un envase con forma de cilindro con capacidad para un litro*; y una vez elegida la forma del envase resolvieron: t_{211} = ***Calcular las dimensiones de un cilindro, sabiendo que su volumen es de un litro***. Esta tarea requiere una técnica compleja de resolución que consiste en buscar la solución de una ecuación con dos incógnitas, por lo que la ecuación tiene infinitas soluciones. Los alumnos de este grupo simplificaron la tarea dando un valor concreto (30 cm) a la altura y la técnica utilizada se redujo a resolver una ecuación con una incógnita. Después construyeron un círculo con el radio obtenido y un rectángulo de lados la longitud del círculo y la altura del cilindro.

- En G_2, t_{22}: *Diseñar y construir un envase con forma de tetraedro, con capacidad para un litro*; y una vez elegida la forma del envase resolvieron: t_{221}: ***Calcular las dimensiones de un tetraedro regular, con un volumen de un litro***. Aquí la técnica se reduce a "resolver una ecuación con una incógnita", que es la utilizada por los alumnos del grupo. Después construyeron cuatro triángulos equiláteros iguales con la longitud de lado obtenida.

- En G_3: t_{23}: *Diseñar y construir un envase con forma de octaedro, con capacidad para un litro*; y una vez elegida la forma del envase resolvieron: t_{231}: ***Calcular las dimensiones de un tetraedro regular, con un volumen de un litro***. Aquí la técnica también consiste en resolver una ecuación con una incógnita. Sin embargo, aquí los alumnos utilizaron la técnica de ir probando valores en la fórmula hasta acercarse al valor del volumen. Luego construyeron 8 triángulos equiláteros iguales con la longitud del lado obtenida.

Para elegir las formas de los envases, buscaron en su libro de texto y eligieron la forma de dos poliedros regulares y del cilindro, porque allí tenían disponible la fórmula de su volumen. Tomaron dichas fórmulas sin ningún cuestionamiento sobre su validez. Así, podemos concluir que los tipos de tareas propuestos anteriormente aparecen integradas, porque todas pretenden responder a Q_2, pero apenas existe un cuestionamiento tecnológico de las técnicas utilizadas. Para existir dicho cuestionamiento debería haberlo provocado el profesor, pues los propios alumnos no tienen por costumbre hacerlo por propia iniciativa.

– Con el segundo indicador se pretende estudiar si existen *diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas*.

En el desarrollo de T_2, las técnicas empleadas en cada grupo para calcular las medidas del envase fueron:

– En G_1, han utilizado primero τ_{21}: *elegir una forma cómoda y fácil de manejar y que suponga poco trabajo realizarla*. Así han elegido el cilindro. Para resolver t_{211}, han utilizado:

  - τ_{211}: *Usar la fórmula* $V = h\pi r^2$ (donde V representa el volumen del cilindro, h, la altura del cilindro y r el radio de las circunferencias de las bases*) y asignar valores a* h *parecidos a algún objeto real conocido y después obtener* r *en la ecuación* $V = h\pi r^2$ *utilizando las propiedades de simplificación*.
  Han decidido asignar a la altura h el valor de 30, porque han encontrado que en el mercado hay un envase de parecida altura y han obtenido que r es 3,2576..., donde V viene dado en cm^3 y h y r en cm. Aquí se observa que los alumnos han hecho un uso de la fórmula del volumen del cilindro, primero aritmético y después algebraico, pero no han sido capaces de utilizarla como una función, donde h y r jueguen el papel intercambiable de variables dependiente e independiente.

– En G_2, han utilizado primero τ_{22}: *elegir una forma genérica cualquiera de la que dispongamos de la fórmula de su volumen*. Y han elegido un tetraedro. Para resolver t_{221}, han empleado las dos técnicas siguientes:

  - τ_{2211}: *Utilizar la fórmula* $V = [(x^3\sqrt{2})/12]$ (donde V representa el volumen del tetraedro regular y x representa la arista del tetraedro) *y hallar el valor de* x*, por tanteo, dando valores hasta acercarse lo más posible a* $V = 1000$.

  - τ_{2212}: *Utilizar la fórmula* $V = [(x^3\sqrt{2})/12]$ (donde V representa el volumen del tetraedro regular y x representa la arista del tetraedro) *y* *hallar el valor de x utilizando las propiedades de simplificación en la ecuación que proporciona la fórmula.*

En ambos casos, V viene dado en cm^3 y x en cm.

Posteriormente para la elaboración del desarrollo del envase utilizaron diversas técnicas para construir el triángulo equilátero que ya han sido explicadas y analizadas en Rojas y Sierra (2018).

- En G_3, han utilizado primero τ_{23}: *elegir una forma innovadora de la que se disponga de la fórmula de su volumen y para la que sea posible realizar los cálculos de forma más ajustada*. Y han elegido un octaedro. Luego, para resolver t_{231}, han usado la técnica:

  - τ_{23}: *Emplear la fórmula* $V = [(l^3\sqrt{2})/3]$ (donde V representa el volumen del octaedro regular y l, la arista del octaedro) *y hallar el valor de l, probando y dando valores hasta acercarse lo más posible a* $V = 1000$. Donde V viene dado en cm^3 y l en cm.

Por tanto, en la búsqueda de respuestas a T_2 se han utilizado diferentes técnicas. Los criterios empleados se basan principalmente en que exista un fácil acceso a una fórmula para calcular el volumen del sólido elegido y en que resulte fácil y cómodo tanto calcular las dimensiones del sólido como elaborar su desarrollo plano en cartulina. También se propusieron otros criterios menos claros como el de innovar y el de escoger un sólido cualquiera, para dar la idea de que hay muchos posibles. Las técnicas utilizadas muestran que los alumnos manejan las fórmulas, en primer lugar, como programas de cálculo aritmético y solo algunos, en segundo lugar, son capaces de usarlas como ecuaciones. En ningún caso, los alumnos son capaces de considerar las fórmulas como modelos funcionales. En general, los criterios tienden a intentar simplificar y cerrar la tarea a resolver.

- El tercer indicador, analizar si existe *independencia de los ostensivos que integran las técnicas*.

Hemos visto, en el indicador anterior, que los estudiantes han utilizado la notación que aparecía en el libro de texto o en el documento resumen donde venían las diferentes fórmulas del volumen de sólidos. Así, las fórmulas del volumen del tetraedro y del octaedro que venían en dichos textos eran $V = [(l^3\sqrt{2})/12]$ y $V = [(l^3\sqrt{2})/3]$ respectivamente. Pero en el caso del tetraedro, como los alumnos decidieron considerar la fórmula como una ecuación donde la incógnita era el valor del lado, cambiaron la l por la x, ya que para ellos la incógnita de una ecuación siempre debe venir representada por la letra x.

Por tanto, se observa que existe rigidez en el uso de ostensivos en la actividad matemática desarrollada por los alumnos.

– El cuarto indicador tiene como objetivo estudiar *si existen tareas y técnicas "inversas"*.

El tipo de tareas T_2 propuesto hace referencia a un tipo de tareas inversas de las que se suelen proponer en las clases de Secundaria que son del tipo T_2^{inv}: "*Elegir la forma de un envase y, conocidas sus dimensiones, calcular su volumen*". Además, T_2 resulta de una mayor dificultad, pues tiene un carácter abierto; los estudiantes primero, deben elegir la forma del envase que pretenden diseñar; y luego, decidir la manera en que calcularán sus medidas. Los alumnos de G_1 y G_3 al principio intentan resolver las tareas del tipo T_2, utilizando la técnica directa que consiste en asignar valores a las dimensiones del envase probando hasta conseguir que el volumen sea aproximadamente un litro. Sin embargo, G_1 y G_2 acaban usando la técnica inversa que consiste en considerar la fórmula como un modelo algebraico. En general, los alumnos tienden a forzar y modificar la tarea para evitar usar una técnica no habitual y así poder aplicar una técnica escolar estándar.

– El quinto indicador estudia si existe *interpretación del resultado de aplicar las técnicas*.

Los estudiantes no se cuestionaron sobre la validez de las fórmulas utilizadas y las aceptaron sin que anteriormente hubieran sido justificadas en clase o en el libro de texto.

Ninguno de los estudiantes se cuestionó sobre la relación existente entre la capacidad de un objeto y su volumen. Asimismo, ninguno consideró que el envase a elaborar debería tener un determinado grosor.

En general, no hubo interpretación del funcionamiento de las técnicas.

– Con el sexto indicador se analiza si ha habido *necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas inicialmente considerados*.

En este caso, hemos visto que la elección del tipo de tareas T_2 estuvo fuertemente condicionada por las ventajas que ofrecen las técnicas empleadas para calcular las medidas del envase. Esto se puede evidenciar en los argumentos presentados por los estudiantes, cuando indagamos por los motivos que les condujeron a la elección de la forma del envase diseñado y construido. Así, en G_1, fue la *comodidad a la hora de manipularlo* y la presunción de menos trabajo en la construcción. En G_2, dicen que hay *muchísimas figuras* con capacidad de un litro, pero eligen el tetraedro porque disponen de una fórmula sencilla para calcular el volumen. En G_3, primero pretenden innovar, pero después optan por el octaedro porque es el sólido para el que les resulta más fácil realizar los cálculos.

En la actividad matemática llevada a cabo, creemos que sí se construyó, por algunos alumnos, la técnica que consiste en utilizar la fórmula del volumen como un modelo algebraico. Además, pensamos que se puede crear la necesidad de construir otra técnica nueva donde se considere la fórmula del volumen del envase elegido como un modelo funcional. Así, en una etapa posterior del desarrollo del REI hemos propuesto el uso de GeoGebra para facilitar la elaboración de dicha técnica.

– El séptimo indicador propone estudiar la *existencia de tareas matemáticas "abiertas"*.

Este indicador contiene en cierta forma los otros seis indicadores, en la medida que estos caracterizan al tipo de tareas abiertas y, en particular, las tareas de modelización matemática. Para que estas existan con normalidad en una institución escolar se requiere que las OM con las que se trabaja sean relativamente completas, esto es, OM que cumplan en una medida apreciable los indicadores en cuestión. Dado que las OM escolares no cumplen en general estas condiciones, era previsible que, ante una tarea abierta como la propuesta, los estudiantes encontraran muchas dificultades. En efecto, las tareas propuestas son abiertas porque no se conoce de antemano qué técnica o técnicas permitirán resolverlas. Así, para llevar a cabo T_2, los alumnos necesitaron elegir la técnica de resolución, y esto les llevó a elegir de entre las disponibles, que aparecían en su libro de texto o en sus apuntes de clase, aquellas más fáciles de aplicar. Al final, hemos visto que los alumnos tienen tendencia a cerrar las tareas propuestas y apenas optan por crear técnicas nuevas.

RESTRICCIONES Y LIMITACIONES ENCONTRADAS

En la escuela secundaria existen ciertas restricciones, es decir, condiciones inmodificables por el profesor y, limitaciones, que se derivan de sus propias normas y estructura, para poder implementar nuevos dispositivos didácticos. De este modo,

> [...] para la TAD, no es posible modificar las praxeologías matemáticas y didácticas que viven en una institución determinada como consecuencia exclusiva de la *voluntad de los agentes de las instituciones* en cuestión, sean estos profesores, autores de cualquier tipo de materiales escolares o autoridades educativas. (Fonseca *et al.*, 2014, p. 314).

Así, los profesores y estudiantes están sujetos a un currículo —sobre el que no pueden intervenir— que supone la segmentación de la enseñanza en un conjunto de temas separados, que se deben tratar en un horario de clases de 50 a 55 minutos. Esto, aunque ha generado las condiciones necesarias para que el modelo de enseñanza actual se lleve a cabo, también genera importantes restricciones para abordar, en profundidad, cuestiones que podrían dar sentido a varios de los saberes propuestos en el currículo actual.

En nuestro caso, algunas de las restricciones y limitaciones encontradas, durante el desarrollo del tipo de tareas propuesto (i.e., T_2), están íntimamente relacionadas con los indicadores del grado de completitud discutidos anteriormente. Los cuales, recíprocamente, son condiciones necesarias para llevar a cabo una actividad abierta de modelización. Con lo cual, dichas restricciones y limitaciones se reflejaron, por ejemplo, en:

- la ausencia de una interpretación algebraico-funcional de T_2, ya que los estudiantes buscaron una solución particular para el cálculo de las medidas del envase, sin detenerse a cuestionarse sobre el hecho de que dicha solución forma parte de un conjunto infinito de soluciones que, está asociado a la posible variación del conjunto de dimensiones de dicho envase que, hacen que su volumen pudiera ser de 1000 cm^3;

- el uso casi excluido de las fórmulas empleadas como programas de cálculo aritmético, porque la tendencia fue a introducir valores en las fórmulas a fin de que el volumen de los envases se aproximase al solicitado;

– la dependencia de ostensivos empleados habitualmente en el cálculo de volúmenes, vinculada con el uso de un listado-resumen de fórmulas que habitualmente usan los estudiantes en la clase de geometría, y con la necesidad de incluir la letra x en el planteamiento y solución de ecuaciones, como fue el caso del grupo que diseñó el envase con forma de tetraedro regular;

– la falta de planteamiento de tareas inversas en el currículo habitual genera en los estudiantes la necesidad de transformar T_2, de naturaleza inversa, en un tipo de tarea directa. Muestra de ello es que los estudiantes tendieron al diseño de un envase cuyo volumen pudiese calcularse, preferiblemente, con una fórmula que incluyese una sola variable, incluso, reduciendo T_2 al cálculo del volumen de un sólido a partir de la medida de uno de sus elementos;

– la ausencia del cuestionamiento de la validez de las fórmulas empleadas y de la construcción de nuevas técnicas. Principalmente, porque los estudiantes están habituados a usar las fórmulas sin que previamente se discuta su significado y su validez, y porque no se acostumbra a proponer que sean ellos quienes construyan dichas fórmulas.

Esto significa que, tanto en el currículo como en la actividad matemática escolar que siguen habitualmente los estudiantes, las tareas abiertas de modelización no suelen estar presentes.

CONCLUSIONES

El análisis de los resultados obtenidos y las hipótesis que pretendíamos validar nos permiten concluir que, durante la resolución del problema espacial sobre el diseño y construcción de un envase con capacidad para un litro, pueden emerger algunos de los saberes geométricos propuestos en el currículo escolar para ser enseñados. Por ejemplo, los contenidos de *geometría tridimensional* en 3° ESO (alumnos de 14/15 años), y de *conocimientos geométricos para la resolución de problemas del mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes* en 4° ESO (alumnos de 15/16 años), tanto en enseñanzas académicas como en aplicadas (MECD, 2015). Al construir el desarrollo de los envases aparece la necesidad de representar y estudiar *las características y propiedades de las figuras planas*, por ejemplo, en nuestro caso, triángulos equiláteros, triángulos rectángulos, rectángulos, círculos. Aquí ha surgido la necesidad de relacionar las geometrías *2D* y *3D*, lo que ha ayudado a articular ambos tipos de conocimientos geométricos. Los tipos de conocimientos geométricos van a estar muy relacionados con el tipo de envase que deseen diseñar y construir cada grupo de alumnos. Por ello, será muy útil que el profesor haga una buena gestión de las sesiones de clase, con el objetivo de que sea necesario elaborar una variedad de tipos de envase, que permita abordar la mayor parte de los conocimientos geométricos que propone el currículo.

Las cuestiones que han surgido en el desarrollo del REI al resolver los problemas espaciales de diseño y construcción de un envase, se han constituido en algunas de las razones de ser de los saberes geométricos mencionados en el apartado anterior, que forman parte del currículo de la ESO. Por tanto, consideramos relevante incluir dichos problemas en las OMD para enseñar geometría. Llevar a cabo procesos de estudio parecidos al experimentado, implicaría cambios importantes en la lógica de enseñanza habitual, porque les otorgaría mayor responsabilidad a los estudiantes en su formación académica y obligaría a hacer frente a ciertas limitaciones y restricciones que el sistema escolar impone, superando la obligación de un horario escolar compartimentado en clases de 50 minutos. Se necesita al menos un tiempo de 90 minutos para poder realizar una actividad matemática que permita reflexionar, cuestionar y contrastar en equipo las posibles respuestas al tipo de tareas planteado.

Consideramos necesario proponer procesos de estudio en secundaria como el implementado, para que los estudiantes se vean abocados a elaborar técnicas para resolver las tareas propuestas. Es importante crear la necesidad de que describan, expliquen y justifiquen dichas técnicas. Se deben plantear tareas donde las técnicas, ya conocidas, fracasen y los alumnos sientan la necesidad de construir técnicas nuevas que permitan su resolución.

En la actividad matemática efectivamente desarrollada hemos podido constatar que los estudiantes intentan afrontar el tipo de problemas planteado con técnicas que proporciona el libro de texto o los apuntes y documentos aportados por los profesores. La tendencia de los alumnos es resolver las tareas propuestas con técnicas ya construidas o proporcionadas por otros sin cuestionarse si dichas técnicas son válidas o no. En general, renuncian a construir técnicas nuevas. Hemos constatado que durante el desarrollo del REI los propios estudiantes construyeron alguna de las técnicas necesarias para la resolución del tipo de tareas propuesto, como se documenta en (Rojas y Sierra, 2018).

En la búsqueda de respuestas al tipo de problema planteado, los alumnos han utilizado las propiedades geométricas de las figuras planas como el triángulo equilátero y rectángulo, el círculo y el rectángulo para construir los diferentes envases. Así, han utilizado la modelización espacio-geométrica (aunque no de manera explícita), y algunos han sido capaces de utilizar las fórmulas del volumen como modelos algebraicos, pero ninguno ha considerado las fórmulas como posibles modelos funcionales. Por todo ello, hemos pensado continuar este trabajo diseñando y experimentando, con la ayuda de GeoGebra, un proceso de estudio donde la necesidad de considerar las fórmulas geométricas como modelos algebraico-funcionales surja como respuesta a un problema espacial.

Finalmente, consideramos que el REI implementado se ha llevado a cabo de una forma abierta y libre, dejando que los estudiantes tomasen decisiones sin apenas influencia y dirección por parte del profesor. Sin embargo, pensamos que si nuestro objetivo es conseguir que los estudiantes construyan nuevas técnicas geométricas, sean capaces de cuestionar su validez, interpreten las fórmulas geométricas como modelos algebraico-funcionales y, en definitiva, lleven a cabo una genuina actividad de modelización, se necesita una gestión del REI donde el profesor oriente el estudio favoreciendo cuestiones fructíferas en la dirección de potenciar, provocar y posibilitar dichos resultados. Dicha estrategia didáctica vendrá justificada y fundamentada por la construcción de un modelo epistemológico de referencia de los conocimientos en juego al querer resolver el tipo de tareas de elaboración de un envase, que estamos desarrollando en estos momentos.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha desarrollado en el marco del proyecto I+D+i "Propuestas para una enseñanza basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo" (Q-mundo): RTI2018-101153-A-C22 del Programa Estatal de I+D+i Orientada a los Retos de la Sociedad. Agradecemos al profesor Josep Gascón los comentarios y sugerencias realizadas después de la lectura de este trabajo.

REFERENCIAS

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral no publicada), Universidad Autónoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/3110

Berthelot, R., y Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Tesis doctoral no publicada), Université Sciences et Technologies - Bordeaux I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065

Berthelot, R., y Salin, M. H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive? *Petit x*, *56*, 5-34.

Bloch, I., y Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement elementaire de la geometrie. En M. H. Salin, P. Clanché, y B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 125-142). La Pensée Sauvage.

Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 1-47.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie [Conferencia]. *Seminaire de Didactique des Mathématiques*, Rethymnon, Grèce. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, *20*(1), 159-169.

Fonseca, C., Gascón, J., y Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, *17*(3), 289-318. https://doi.org/10.12802/relime.13.1732

Fonseca, C., Pereira, A., y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

Gamboa, R., y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *XIV*(2), 125-142. http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/906

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7-34.

Gascón, J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *3*, 69-87.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, *26*(Especial), 99-123.

Guillén, G., Gonzalez, E., y García, M. A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M. J. Gonzáles, M. T. Gonzáles, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (Número 3, pp. 247-258). SEIEM.

Pérez, S., y Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En M. Camacho Machín, P. Flores Martínez, y P. Bolea Catalán (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 295-305). SEIEM.

Pérez, S., y Guillén, G. (2008). Estudio Exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria. En R. Luengo González, B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machín, y L. J. Blanco Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 295-305). SEIEM.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A. C., y Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, *90*, 5-41.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015). *Boletín Oficial del Estado*, núm. 3, del 3 de enero de 2015. https://www.boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-37-consolidado.pdf

Rodríquez-Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis de doctorado no publicada), Universidad Complutense de Madrid. https://eprints.ucm.es/7256/

Rojas, C., y Sierra, T. (2017). Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria [Ponencia]. *XXI Simposio de la SEIEM*, Zaragoza, España.

Rojas, C., y Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos concimientos geométricos durante las solución de un problema espacial. En L. Rodríquez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 485-494). Ediciones de la Universidad de Oviedo. https://www.seiem.es/docs/actas/22/ActasXXIIDefinitivas.pdf

RSME, (2020). *Libro Blanco de la Matemáticas*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.
Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Ministerio de Educación y Ciencia.
Santaló, L. (1985). La Enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario (alumnos de 12 a 16 años de edad). En Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. (Ed.), *La enseñanza de la metamática a debate* (pp. 11-23). http://hdl.handle.net/10256.2/10194

Carlos Rojas Suárez

Dirección: Calle Barranquilla n 53-108, Medellín, Colombia.
Facultad de Educación. Universidad de Antioquia.
Teléfono: +57 300 578 59 21

CAPITULO 4: SEGUNDA IMPLEMENTACIÓN DE UN REI SOBRE EL DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE ENVASES

En este capítulo presentamos la publicación que ha sido producto de la segunda experimentación que hicimos del REI. Para ello presentamos, la referencia, un breve resumen, una síntesis de las conclusiones reportadas y, por último, el artículo tal como aparece publicado.

4.1 Referencia completa de la publicación

Rojas, C., & Sierra, T. Á. (2021b). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 41-63. https://doi.org/10.35763/aiem20.4031

4.2 Resumen y síntesis de las conclusiones de la publicación

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) define la didáctica de las matemáticas como la ciencia de las condiciones y restricciones de la difusión social de las organizaciones matemáticas y didácticas. En este trabajo hemos pretendido dar una explicación de algunas de las restricciones institucionales que dificultan que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) desarrollen técnicas de modelización matemática y, en particular, de modelización espacio-geométrica.

Dentro del marco de la TAD, postulamos que el modelo epistemológico-didáctico vigente en la enseñanza de las matemáticas, que viene representado fundamentalmente por el currículo vigente, por los textos escolares utilizados y por las prácticas escolares realizadas en el aula, provoca fenómenos didácticos vinculados con la pérdida de las razones de ser de la geometría escolar de la ESO y dificulta la posibilidad de llevar a cabo procesos de modelización en dicha institución.

Basamos nuestra explicación en la comparación entre: (1) la actividad matemática que propone el texto escolar utilizado por los alumnos de 3º de ESO acerca de la construcción de cuerpos geométricos; y (2) la observación y estudio de las dificultades puestas de relieve por un pequeño grupo de estudiantes de 3º de ESO de un instituto de Secundaria de la Comunidad de Madrid, cuando se enfrentan a problemas sobre el diseño y construcción de sólidos en un recorrido de estudio e investigación llevado a cabo en una asignatura de Ampliación de Matemáticas.

En dicho proceso de estudio, introdujimos la problemática de modelización espacio-geométrica mediante una cuestión generatriz en torno al problema espacial de diseño y elaboración de envases para un perfume. El análisis realizado nos ha permitido postular que: a) el tipo de tareas planteado provoca la necesidad de construir inicialmente un modelo geométrico, estudiar sus propiedades y crear (o reformular) técnicas que deberán ser justificadas; b) la resolución de las tareas abiertas e inversas planteadas comporta considerar las fórmulas del cálculo de volúmenes y áreas no solo como algoritmos aritméticos, sino como modelos algebraicos o funcionales.

El análisis de la experimentación realizada y del texto escolar utilizado por los alumnos nos permite concluir que es necesario y posible crear las condiciones para que la problemática de modelización espacio-geométrica pueda vivir en la ESO. Para ello, proponemos incidir sobre los modelos didáctico y epistemológico vigentes en la enseñanza de la Geometría en la ESO.

En relación con el modelo didáctico creemos necesario cambiar el contrato didáctico habitual, de modo que el profesor pase a ser el director del proceso de estudio y el alumno asuma tareas relativamente ausentes como, por ejemplo, plantear cuestiones, elaborar informes, realizar presentaciones y evaluar el trabajo realizado, entre otras. El modelo que proponemos se materializa en el dispositivo de los REI, donde el saber geométrico debe surgir como respuesta a una cuestión generatriz de gran interés para la comunidad de estudio.

En relación con el modelo epistemológico, proponemos introducir la problemática de la modelización espacio-geométrica a partir de problemas espaciales sobre la determinación y construcción de sólidos, como un modelo alternativo al modelo vigente. Partiendo de tipos de tareas abiertas e inversas, planteados inicialmente en el espacio sensible, como los propuestos en el REI experimentado. Pretendemos superar así algunas de las restricciones institucionales que todavía siguen presentándose en relación con la problemática espacio-geométrica.

A continuación, adjuntamos el artículo tal como aparece en la revista AIEM.

AIEM -Avances de Investigación en Educación Matemática -2021, 20, 41-63

Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria

Carlos Rojas, Universidad de Antioquia (Colombia)

Tomás Ángel Sierra, Universidad Complutense de Madrid (España)

Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria

Resumen

Presentamos restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. Con el objetivo de explicarlas, describimos y analizamos tanto la actividad matemática propuesta sobre construcción de cuerpos geométricos en el manual utilizado por alumnos de 3.º de Educación Secundaria Obligatoria como la experimentada en un recorrido de estudio e investigación sobre un problema espacial acerca del diseño y construcción de envases. Utilizamos elementos basados en los indicadores del grado de completitud de una organización matemática local que caracterizan los tipos de tareas de modelización matemática. Los resultados indican, principalmente, que, aunque el tipo de problema propuesto posee potencial para provocar la necesidad de utilizar procesos de modelización y para dar sentido a saberes curriculares sobre la determinación y construcción de cuerpos geométricos, el impacto del currículo dominante al que se enfrentan diariamente los estudiantes dificulta dichos procesos.

Palabras clave. Modelización espacio-geométrica; construcción de sólidos; restricciones institucionales; educación secundaria; recorrido de estudio e investigación.

Institutional constraints that hinder spatial-geometric modelling in secondary school teaching

Abstract

We present institutional restrictions that hinder spatial-geometric modelling in secondary school teaching. With the aim to explain them, we describe and analyse the mathematical activity about the construction of geometric bodies in the textbook used by students in the 3rd year of Compulsory Secondary Education, and the activity experienced in a study and research path on a spatial problem about the design and construction of containers. We use elements based on the indicators of the degree of completeness of a local mathematical organisation that characterise the types of mathematical modelling tasks. The results mainly show that, although the type of problem proposed has the potential to provoke the need to use modelling processes and to make sense of curricular knowledge on the determination and construction of geometric bodies, the impact of the dominant curriculum that students daily face hinders such processes.

Keywords. Spatial-geometric modelling; construction of solids; institutional constraints; secondary education; study and research path.

1. Introducción y presentación de la problemática

El desarrollo y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje, donde se trata de implementar técnicas de modelización matemática, es un dominio de investigación de gran interés en didáctica de las matemáticas (Barquero, 2020; Schukajlow et al., 2018). En línea con dicho dominio, nuestro trabajo pretende mostrar, analizar y explicar las restricciones y limitaciones que se presentan en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), para que los alumnos utilicen técnicas de modelización matemática cuando se les proponen problemas en torno a la *determinación y construcción de sólidos*.

Postulamos que dichas restricciones configuran un fenómeno didáctico de origen institucional y que, en rigor, no deberían considerarse dificultades de los alumnos para utilizar adecuadamente dichas técnicas. Se trata de dificultades del propio sistema educativo para poner a disposición de los alumnos dichas técnicas. En definitiva, pretendemos abordar la dimensión ecológica del problema de investigación (Barquero et al., 2013) que surge a partir del problema docente siguiente: ¿Cómo enseñar geometría 3D utilizando para ello técnicas de modelización?

Según Perrin-Glorian et al. (2013), una manera de conseguir una enseñanza coherente y funcional de la geometría 3D es mediante lo que Berthelot y Salin (2005) llaman *problemática de modelización del espacio o problemática espacio-geométrica*. Se parte de un problema espacial o del espacio sensible que se pasa a representar mediante un modelo geométrico en el que, utilizando sus propiedades geométricas, se obtiene una solución, que termina validándose en el espacio sensible.

Además, la búsqueda de posibles respuestas al problema espacial puede enriquecerse utilizando tecnicas de modelización algebraico-funcionales mediante un programa de matemáticas dinámicas como Geogebra o de diseño de piezas en 3D como Tinkercad, lo que permitirá articular el estudio de la geometría 3D con el del álgebra y las funciones.

En el apartado 2, presentaremos, en primer lugar, en qué consiste la problemática de la modelización espacio-geométrica, como un tipo particular de modelización matemática (sección 2.1). En segundo lugar, abordaremos cómo es concebida la modelización matemática en la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD), enfoque didáctico que utilizaremos como modelo teórico, metodológico y analítico fundamental para nuestro estudio (sección 2.2). Luego, mostraremos las características del dispositivo didáctico que propone la TAD para hacer posible el desarrollo de técnicas de modelización (sección 2.3). En el apartado 3, presentaremos el problema de investigación y la metodología seguida. Posteriormente, describiremos y analizaremos los tipos de problemas y técnicas que aparecen en el libro de texto utilizado por los alumnos (apartado 4). Ello nos permitirá identificar y explicar restricciones institucionales que afectan a la actividad de modelización (apartado 5). En el apartado 6, explicaremos y analizaremos el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación (REI) propuesto a los estudiantes, centrado en la determinación y construcción de objetos y diseñado como una propuesta alternativa para hacer vivir un verdadero proceso de modelización espacio-geométrica en la educación secundaria. Terminaremos analizando hasta qué punto persisten algunas de las restricciones y limitaciones detectadas para abordar técnicas de modelización matemática, a pesar de haber implementado un proceso de estudio que favorece su desarrollo (apartado 7), y exponiendo algunas conclusiones (apartado 8).

2. Marco teórico y antecedentes

2.1. La modelización espacio-geométrica

La noción de modelización espacio-geométrica (Berthelot y Salin, 2005) describe una relación entre el espacio sensible y los saberes geométricos donde, al resolver un tipo de problemas, los *problemas espaciales*, dichos saberes aparecen como necesarios y se convierten en herramientas útiles para su resolución. Utilizamos la definición de *problemas espaciales* que propone Salin (2004), donde los caracteriza porque:

> Su finalidad concierne al espacio sensible [y] pueden tratar sobre la realización de: acciones [como] fabricar, desplazarse, desplazar, dibujar, etc., [y sobre] comunicaciones a propósito de acciones o de constataciones [...] [Además, porque] el éxito o el fracaso viene determinado para el individuo por la comparación entre el resultado esperado y el resultado obtenido. (p. 39)

La *problemática espacio-geométrica* que nosotros consideramos para el caso de la *determinación y construcción de sólidos* parte de un sistema donde se plantea un tipo de problemas espaciales. Para resolver dichos problemas se elabora un *modelo matemático* adecuado que representa dicho sistema, en el que se utilizan elementos matemáticos de todo tipo (geométricos, aritméticos, algebraicos, funcionales, etc.). Se trabaja y se construyen respuestas en dicho modelo a las cuestiones planteadas y se termina validando las respuestas obtenidas en el espacio sensible. Se trata de proponer el estudio de la *geometría* como *modelo del espacio,* tal como señala Brousseau (citado en Berthelot y Salin, 2001) cuando plantea una *situación fundamental para la geometría elemental* como modelo del espacio. Brousseau explica que, para generar situaciones a-didácticas cuyo objetivo sea la elaboración de conocimientos geométricos, se puede acudir a algunos ejemplos entre los que está la *determinación y realización de sólidos*.

En la problemática de la modelización espacio-geométrica se necesita que la búsqueda de posibles respuestas no se agote en las soluciones de un caso particular (Salin, 2004). Por ejemplo, si se quiere construir un cristal para una ventana con una forma particular de paralelogramo, ¿qué técnicas podrían utilizarse? Una técnica podría consistir en realizar una copia del cristal con un papel adecuado, utilizando conocimientos espaciales relativos a la orientación del papel y del cristal, a la manipulación de herramientas del cristalero para cortar el cristal, etc. Otra técnica más eficaz sería emplear las características que definen un paralelogramo como, por ejemplo, que sus diagonales se cortan en el punto medio de ambas. Esta última será la solución del problema por modelización, ya que se construye totalmente dentro del sistema simbólico del modelo.

2.2. La modelización matemática en la teoría antropológica de lo didáctico

La modelización espacio-geométrica se puede insertar en la problemática más amplia de los procesos de modelización y su relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta problemática ha sido ampliamente abordada desde la TAD. En esta teoría, la modelización se puede describir en cuatro estadios: 1) se parte del planteamiento de una situación y problemática inicial, que bien puede ser extra-matemática o intra-matemática. Este estadio se caracteriza por la construcción del sistema a modelizar y por el planteamiento de cuestiones amplias que surgen ante la imposibilidad de darles una respuesta inmediata; 2) se elabora un modelo matemático del sistema construido y se definen y relacionan las variables pertinentes; 3) se manipula y refina el modelo elaborado, y se interpretan sus resultados a la luz del sistema modelizado; y 4) se formulan cuestiones nuevas que aportan al estudio del sistema o que conducen a nuevos procesos de modelización (Florensa et al., 2020; Gascón, 1994). Así, la forma en que la TAD considera la modelización matemática tiene tres características diferenciales: a) incorpora la modelización intra-matemática como un caso importante de modelización matemática; b) los modelos que se construyen tienen estructura praxeológica y se consideran "máquinas" o herramientas que permiten aportar conocimientos y plantear cuestiones sobre el sistema objeto de estudio; y c) dicho proceso consiste en la elaboración de praxeologías de complejidad creciente que permitirá articular diferentes dominios de la actividad matemática escolar (Barquero et al., 2013).

En trabajos anteriores, realizados en el marco de la TAD, se han estudiado diferentes aspectos del fenómeno didáctico que consiste en el *debilitamiento de la actividad de modelización matemática,* tal como se manifiesta en diferentes instituciones escolares. Por ejemplo, Fonseca (2004) estudió la rigidez, desarticulación e incompletitud de las organizaciones matemáticas escolares en el paso de secundaria a la universidad. Barquero (2009) analizó la desarticulación entre las matemáticas enseñadas y las ciencias experimentales en el primer curso universitario que degenera en un mero *aplicacionismo,* y Serrano (2013) llevó a cabo un estudio similar en el caso de las ciencias empresariales. Otros trabajos han estudiado la manifestación de dicho fenómeno disciplinar en diferentes dominios específicos de la matemática escolar. Por ejemplo, García (2005) estudió la desarticulación de la relación de proporcionalidad y el resto de relaciones funcionales que se estudian en secundaria. Ruiz-Munzón (2010) analizó las consecuencias de considerar el álgebra elemental en secundaria como una *aritmética generalizada* y elaboró, siguiendo los trabajos de Bolea (2002), un modelo epistemológico alternativo del álgebra elemental interpretándola como un *instrumento de modelización* y su prolongación hacia la modelización algebraico-funcional. Y Lucas (2015) estudió el fenómeno de la pérdida de las razones de ser del cálculo diferencial en el paso de la secundaria a la universidad que se presenta ligado a la ausencia de una problemática de *modelización funcional.*

En nuestra investigación, centrada en la geometría, tras revisar y analizar en el currículo de la ESO algunos libros de texto (Rojas y Sierra, 2017), encontramos rasgos del fenómeno didáctico general descrito anteriormente. En concreto, hemos observado la *desarticulación* existente entre la geometría 2D y 3D, así como la *rigidez* e *incompletitud* de las organizaciones geométricas escolares. En Rojas y Sierra (2021) hemos mostrado que, para resolver problemas geométricos, se presentan las diferentes técnicas de forma *aislada* y se hace un uso casi exclusivamente *aritmético* de las fórmulas del cálculo de áreas y volúmenes, tratándolas como meros *algoritmos de cálculo*, porque los tipos de tareas propuestos escolarmente así lo demandan. De hecho, sucede que los tipos de tareas geométricas que se proponen en los manuales escolares vienen justificados por las técnicas que se desea sean empleadas para su resolución, y viceversa. En resumen, se pone de manifiesto un «*empobrecimiento*» *de las razones de ser de la enseñanza de la geometría en la educación secundaria* si la comparamos con una posible razón de ser basada en la modelización espacio-geométrica.

En este trabajo, pretendemos seguir analizando el fenómeno didáctico del *debilitamiento de la actividad de modelización en el ámbito de la geometría*, sabiendo que no debe considerarse como un fenómeno aislado. Además, queremos avanzar en el estudio del origen de las dificultades de los alumnos de la ESO cuando se enfrentan a problemas en torno a la *determinación y construcción de sólidos*, que proponemos como una *posible razón de ser de la geometría escolar*.

2.3. Los recorridos de estudio e investigación y la actividad de modelización

Dentro de la TAD se han desarrollado los recorridos de estudio e investigación (REI), como dispositivos especialmente diseñados para hacer posible la vida escolar de las actividades de modelización matemática (Barquero, 2009; Florensa et al., 2020). En un REI se parte de una cuestión viva y fértil, de interés para la comunidad de estudio que la abordará y para la que no tiene una respuesta inmediata. Durante la búsqueda de una respuesta plausible a dicha cuestión, surgirán algunas respuestas parciales y otras cuestiones derivadas, cuyo estudio ayudará a que la comunidad de la clase adquiera un conocimiento funcional en torno a un ámbito determinado de las matemáticas que servirá para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

En coherencia con el postulado de la TAD que identifica la actividad matemática con la actividad de modelización, hemos planteado un REI en torno a cuestiones sobre el *diseño y construcción de un envase con una determinada capacidad* con un objetivo doble: por un lado, analizar la habilidad de los alumnos para construir, partiendo de sus conocimientos escolares, técnicas de modelización espacio-geométrica útiles para resolver este tipo de problemas y, por otro, experimentar hasta qué punto la actividad matemática desarrollada en dicho proceso de estudio permite superar alguno de los efectos que producen sobre el aprendizaje de los alumnos las restricciones y limitaciones provocadas por el tipo de actividad matemática propuesta en el manual escolar.

3. Problema de investigación y metodología

La investigación que realizamos es de tipo cualitativo basada en el estudio de casos, donde se analiza, por un lado, el manual que utilizan habitualmente los estudiantes y, por otro, la actividad matemática que llevan a cabo dichos estudiantes en la experimentación de un REI. Nuestro problema de investigación puede desglosarse en tres aspectos:

a) Detectar y explicar las restricciones institucionales que dificultan y limitan la posibilidad de que los alumnos de educación secundaria puedan poner en práctica técnicas de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcionales.

b) Diseñar un REI para indagar en qué medida su implementación favorece que los alumnos de secundaria construyan técnicas de modelización espacio-geométrica y algebraico-funcionales.

c) Valorar hasta qué punto el REI experimentado puede facilitar la superación de algunas de las restricciones institucionales presentadas en el análisis del manual escolar, y detectar aquellas que son persistentes y las nuevas que puedan aparecer.

Basaremos la explicación y análisis de las diferentes restricciones institucionales que dificultan e incluso impiden que los alumnos de la ESO utilicen técnicas de modelización para abordar la construcción y determinación de sólidos, en el contraste entre:

a) La descripción y análisis breve de la actividad matemática en torno a la construcción de cuerpos geométricos que se propone en el manual escolar, utilizado por los alumnos en sus clases ordinarias de matemáticas. En concreto, nos centraremos en la unidad 9 del libro de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3.º de la ESO, de la editorial SM Savia, titulada *Cuerpos geométricos*.

b) La descripción, análisis y explicación del tipo de tareas y técnicas que utilizan los alumnos cuando se enfrentan a un problema espacial y, en particular, el análisis de las dificultades que encuentran para utilizar la modelización matemática cuando se enfrentan al problema de diseñar y construir envases.

4. Descripción y análisis del proceso de estudio propuesto en el libro de texto

4.1. Descripción del proceso de estudio

El texto escolar, utilizado por los alumnos, contiene 14 unidades y la novena es la titulada Cuerpos geométricos. Dicha unidad presenta 7 secciones; las que se refieren de modo más específico a la construcción de cuerpos geométricos son las siguientes:

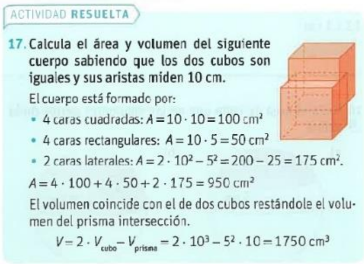
- En la sección 2, se define y muestra qué es un poliedro y se presenta la fórmula de Euler como una igualdad que cumplen todos (sic) los poliedros. Después se muestra y define qué es un prisma y qué es una pirámide con sus respectivos elementos. Se termina definiendo qué es un poliedro regular y mostrando los poliedros regulares que existen.
- En la sección 3, se define qué es un cuerpo de revolución y se muestran mediante una representación plana el cilindro, el cono, el tronco de cono y la esfera, indicando cómo se obtienen. La sección finaliza mostrando los elementos y partes de una esfera.

- En la sección 4, se definen área lateral, área total y volumen de un prisma, de una pirámide, de un cilindro, de un cono, de una esfera y de las partes de una esfera, mostrando una representación plana del sólido en cuestión y un desarrollo plano cuando es posible.
- En la sección 5, se muestra cómo calcular el volumen de otros cuerpos geométricos, formados por la unión de varios cuerpos simples (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Tipos de tareas presentes en la sección 5 (Alcaide et al., 2016, p. 200)*

Tipo de tarea	Técnica empleada
Calcular área y volumen de sólidos compuestos por otros sólidos simples.	Dividir el cuerpo compuesto en varios simples y sustituir los valores de cada cuerpo en sus fórmulas del área y del volumen y sumar los valores obtenidos, sin considerar las áreas de las caras de las uniones.

Ejemplo de actividad resuelta en p. 200


ACTIVIDAD RESUELTA

17. **Calcula el área y volumen del siguiente cuerpo sabiendo que los dos cubos son iguales y sus aristas miden 10 cm.**

El cuerpo está formado por:

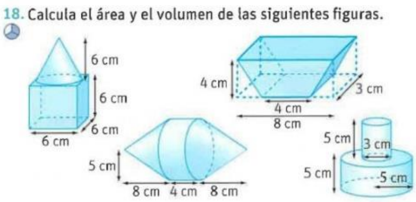
- 4 caras cuadradas: $A = 10 \cdot 10 = 100\ cm^2$
- 4 caras rectangulares: $A = 10 \cdot 5 = 50\ cm^2$
- 2 caras laterales: $A = 2 \cdot 10^2 - 5^2 = 200 - 25 = 175\ cm^2$.

$A = 4 \cdot 100 + 4 \cdot 50 + 2 \cdot 175 = 950\ cm^2$

El volumen coincide con el de dos cubos restándole el volumen del prisma intersección.

$$V = 2 \cdot V_{cubo} - V_{prisma} = 2 \cdot 10^3 - 5^2 \cdot 10 = 1750\ cm^3$$

Ejemplo de actividad propuesta en p. 200



Para terminar la unidad se proponen 44 actividades para resolver, de las que 22 tratan sobre el cálculo de áreas y volúmenes de un cuerpo geométrico. En todos los casos se proporcionan los datos necesarios que, al sustituirlos en la fórmula correspondiente, permiten mediante un cálculo aritmético obtener el resultado pedido. Los datos en algunos casos se dan directamente y otras veces se indican en una representación plana de la figura. En algunas ocasiones se pide realizar un desarrollo plano del cuerpo geométrico correspondiente. Sólo hay tres ejemplos en los que se plantea, de forma un poco anecdótica, una tarea inversa. En estos, o se proporciona el valor del área total del cuerpo geométrico y se pide calcular el volumen, o se proporciona el volumen y se pide calcular el área total, aunque, como en el caso de la *Figura 1,* los tres tienen solución única:

41. El volumen de un tetraedro regular es de 500 cm³. Calcula su área total.

Figura 1. Tarea inversa propuesta en el libro de texto (Alcaide et al., 2016, p. 207)

En general, los autores, siempre que proponen una actividad con más dificultad, optan por resolverla y, de este modo, los alumnos pueden imitar el proceso seguido para resolver las siguientes. El capítulo termina con una autoevaluación con 9 actividades y en 4 de ellas se pide calcular el área, el volumen o el desarrollo plano de un cuerpo geométrico.

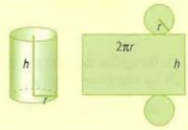
4.2. Análisis del proceso de estudio propuesto en el texto escolar

El tipo de tareas que aparecen en el libro de texto son, como las de las *Figuras 2* y *3*, de naturaleza *directa* y de *respuesta única*. Para resolverlas basta sustituir las medidas de las longitudes proporcionadas en las fórmulas correspondientes, lo que conlleva un uso eminentemente aritmético y algorítmico de las fórmulas.

Áreas y volúmenes de cilindros

$$A_T = \overbrace{2\cdot\pi\cdot r\cdot h}^{A_L} + \overbrace{2\cdot\pi\cdot r^2}^{A_B} = 2\pi\cdot r\cdot(h+r)$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$



Ejemplo ▸ Calcula la cantidad de chapa necesaria para construir una lata con forma de cilindro de 3,25 cm de radio de la base y 10 cm de altura y su volumen.

$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi\cdot 3{,}25\cdot 10 + 2\pi\cdot 3{,}25^2 = 270{,}57$ cm^2

El volumen que contendrá esta lata es: $V = \pi\cdot r^2\cdot h = \pi\cdot 3{,}25^2\cdot 10 = 331{,}83$ cm^3

Figura 2. Ejemplo de cálculo de áreas y volúmenes de cilindros (Alcaide et al., 2016, p. 198)

ACTIVIDADES

15. **Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos.**

a) Un cubo de 10 cm de arista.

b) Un prisma regular de 10 cm de altura, cuya base es un cuadrado de 20 cm de lado.

c) Un cilindro de 10 cm de radio de la base y altura igual al diámetro de la base.

d) Un cono de 8 cm de radio de la base y 16 cm de altura.

e) Una esfera de 10 m de diámetro.

Figura 3. Actividades de cálculo de áreas y volúmenes (Alcaide et al., 2016, p. 199)

Una posible tarea *inversa* a la propuesta en el ejemplo de la *Figura 2,* o en el apartado c) de la *Figura 3*, podría partir de fijar el volumen o el área total del cilindro y preguntarse por las medidas del radio de su base y de su altura. La búsqueda de solución a esta tarea: (1) trasciende el empleo netamente aritmético de las fórmulas, ya que requiere analizar la relación funcional entre su volumen o su área, y las medidas del radio de su base y su altura; y (2) admite un conjunto infinito de soluciones para dichas medidas, lo que la convierte en una tarea abierta, pues corresponde a quien la aborda decidir qué criterios utilizar para seleccionar una o más soluciones.

A lo largo del texto, la propuesta de un nuevo tipo de tareas siempre lleva consigo la explicación de la técnica que lo resuelve. Luego se plantean tareas del mismo tipo donde se espera que los alumnos utilicen la misma técnica ya mostrada. Los modelos geométricos, en este caso, los cuerpos geométricos, siempre vienen dados de antemano. La actividad siempre se desarrolla dentro del mundo de las matemáticas y, por tanto, los cuerpos geométricos nunca se presentan como modelos matemáticos. La mayor parte de los tipos de tareas que aparecen en el texto requieren realizar solo cálculos aritméticos. Los tipos de tareas que se proponen no solo tienen solución única, sino que además la técnica empleada para su resolución es única. No se proponen, en ningún caso, tipos de tareas abiertas. Los *ostensivos* utilizados son siempre del mismo tipo. De modo que se utilizan siempre los mismos símbolos para designar los mismos elementos, *V* se usa para designar el número de vértices y, posteriormente, para designar el volumen de un cuerpo, *A* se utiliza para designar el número de aristas y, posteriormente, A_l para designar el área lateral y A_t para designar el área total. Se emplean ***r*** y ***R*** para el radio dependiendo de cada caso, ***h*** para la altura, etc. Las técnicas utilizadas no aparecen justificadas. En general podemos afirmar que la actividad matemática desarrollada es muy poco flexible y las cuestiones a las que responden los saberes presentados son siempre internas al propio modelo geométrico mostrado. No aparecen tareas de modelización espacio-geométrica.

El tipo de actividad matemática en esta unidad cumple las cinco conjeturas con que Fonseca (2004) califica que la actividad matemática escolar en secundaria tiene carácter *rígido y atomizado*: a) las técnicas matemáticas utilizadas dependen fuertemente de los ostensivos utilizados; b) la aplicación de una técnica no requiere necesariamente de su justificación; c) para cada tarea siempre se privilegia el uso de una única técnica asociada; d) no se presenta la ocasión de utilizar técnicas inversas para resolver tareas matemáticas inversas; y e) no se presentan tipos de tareas abiertas de modelización.

5. Restricciones institucionales detectadas a partir del análisis del texto escolar

La TAD define la didáctica como la *ciencia de las condiciones y restricciones de la difusión social de las praxeologías*. Dentro de la TAD se suele hablar en general de condiciones, pero se consideran también restricciones a aquellas condiciones que son difícilmente modificables desde una posición institucional concreta. De este modo, se dice que una condición es una restricción para una persona, que ocupa un lugar en una institución, cuando dicha persona no tiene la capacidad de cambiarla (con ciertos límites) (Chevallard, 2010). Así, dentro de la institución de la ESO se presentan ciertas restricciones, ligadas a su propio funcionamiento, que los sujetos de dicha institución (profesores y alumnos) no pueden modificar, como el currículo o el tiempo de clase, etc.

En este caso, nos centraremos en el siguiente tipo de restricciones ligadas a lo que Bosch et al. (2004) denominan *indicadores del grado de completitud* de una organización matemática y que están muy relacionadas con la organización matemática propuesta al realizar la transposición didáctica de la geometría 3D en el texto escolar utilizado por los alumnos:

- La casi total ausencia de tareas inversas en el proceso de estudio que propone el libro de texto. La propuesta de tareas inversas favorece la necesidad de considerar las fórmulas como modelos algebraicos o modelos funcionales, tal como se puede comprobar en el proceso de estudio planteado en el desarrollo del REI.

- La ausencia de tareas abiertas en el estudio de la geometría que se propone en el libro de texto. Este hecho favorece que en el desarrollo del REI los alumnos tiendan a cerrar la tarea y que no consideren el conjunto de soluciones posibles cuando tienen una ecuación con dos incógnitas.

- La falta de cuestionamiento y de justificación tanto de las técnicas empleadas como de los resultados obtenidos. Esta ausencia viene motivada porque las técnicas siempre vienen dadas de antemano y no se da lugar a que las fórmulas sean construidas por los alumnos.

- El planteamiento casi exclusivo de tareas que requieren el uso de las fórmulas como programas aritméticos de cálculo y la ausencia de tipos de tareas que requieran una interpretación algebraico-funcional de las fórmulas.

- La insuficiencia de tareas que provoquen la necesidad de relacionar y articular la geometría 2D y 3D (Rojas y Sierra, 2021).

- La escasez de tareas que requieran utilizar técnicas que hagan necesario relacionar la geometría con el álgebra y las funciones.

Y, en general, se caracteriza por la ausencia de una problemática de modelización espacio-geométrica en el estudio de la geometría, donde los saberes geométricos surjan como modelos que dan una buena respuesta a los problemas espaciales.

A continuación, presentamos una breve descripción del diseño, experimentación y análisis de un REI en torno al problema espacial de construcción de envases, donde el tipo de tareas propuesto pretende facilitar el uso de técnicas de modelización.

6. Descripción y análisis del diseño y experimentación del REI

6.1. Descripción y análisis a priori del diseño del REI

Con el objetivo de hacer frente al fenómeno didáctico de la ausencia de técnicas de modelización espacio-geométrica en el estudio de la geometría, nos hemos propuesto llevar a cabo un REI que se ha desarrollado a lo largo de 27 sesiones de 55 minutos (dos sesiones semanales) en una asignatura optativa denominada *Ampliación en matemáticas*, ofrecida a estudiantes de 3.º de ESO, en un instituto de Madrid capital. Asistieron y participaron regularmente 7 alumnos. Siguiendo la metodología de trabajo característica de los REI, propusimos a los estudiantes la formación de dos grupos de trabajo, cuyos componentes fueron elegidos al azar. Los estudiantes (E_1, E_2, E_3) se asignaron al grupo A (G_A) y los estudiantes (E_4, E_5, E_6, E_7) al grupo B (G_B).

Tipos de tareas propuestas en el REI

Durante la implementación del REI propusimos cuatro actividades a los estudiantes. Las tres primeras ocuparon la mayor parte del tiempo y dieron origen a una serie de subtareas que emergieron, necesariamente, en el proceso de búsqueda de una respuesta a dichas actividades. La cuarta actividad consistió en un examen individual, donde se evaluaron los conocimientos elaborados en la resolución de las tareas anteriores.

El primer tipo de tarea pretendía el análisis y descripción de las formas de algunos de los envases comerciales que actualmente se usan para envasar, por ejemplo, líquidos como zumo, leche, etc., o sólidos como patatas fritas o chocolates. El segundo tipo consistió en el diseño y construcción de un envase con capacidad para un litro y, el tercero, en el diseño e informe de elaboración de un envase adecuado para un perfume.

En la *Figura 4* presentamos un mapa en el que hemos reunido algunas de las cuestiones surgidas durante la implementación de los tres primeros tipos de tareas del REI. En este estudio solo trataremos los tipos de tareas que se corresponden con Q_3 y Q_4.

Las tareas que hemos propuesto se caracterizan por su naturaleza progresivamente *abierta* e *inversa*. Es decir, por ser tareas en las que, en tanto que *abiertas*, no se presenta una técnica de solución preestablecida y no hay un listado de datos enunciados *a priori* que encajen perfectamente con las incógnitas del problema; y en tanto que *inversas*, los datos y las incógnitas, habitualmente tratados, se invierten. Son tareas en las que la búsqueda de posibles soluciones abre la puerta al uso de modelos algebraicos y/o funcionales. El planteamiento de este tipo de tareas pretende también analizar hasta qué punto es posible superar algunas de las restricciones institucionales para el uso de técnicas de modelización, debidas al tipo de actividad matemática propuesta en el libro de texto.

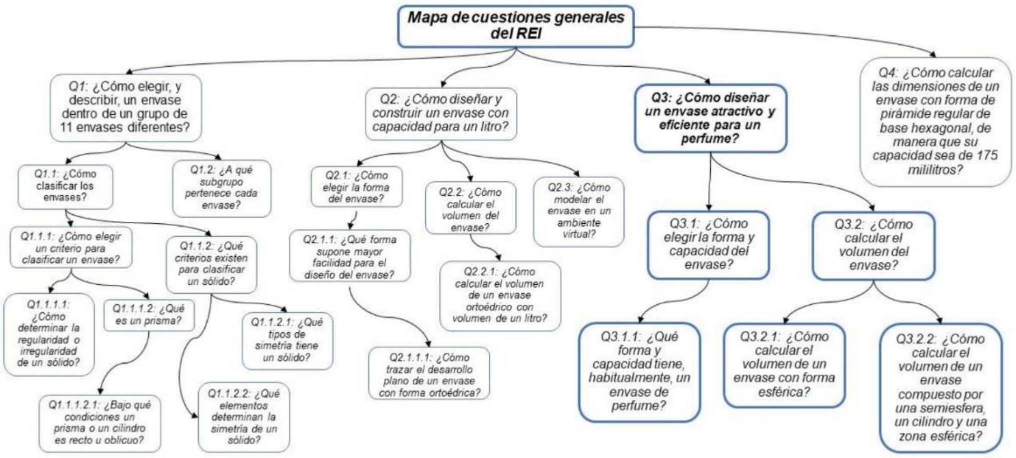
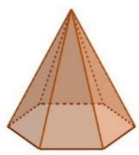


Figura 4. Mapa de cuestiones del REI implementado

Análisis a priori de la tarea de evaluación propuesta

Para evaluar los conocimientos adquiridos por los alumnos en el REI les propusimos la siguiente tarea:



Un equipo consultor ha diseñado un envase con forma de pirámide regular de base hexagonal, con capacidad para 150 mililitros (ml), como se muestra en la figura de la izquierda. Sin embargo, el jefe de producción de la empresa que solicitó el diseño necesitaba que dicho envase, con la misma forma, tuviese una capacidad de 175 ml. Por tanto, se nos ha encomendado la tarea de calcular las medidas que debería tener este envase para que su capacidad sí sea de 175 ml, y el área superficial para poder saber la cantidad de papel necesaria que permita trazar su desarrollo plano.

Figura 5. Tarea de evaluación propuesta

En esta actividad el modelo geométrico ya viene dado de antemano, porque nuestro objetivo era comprobar si los alumnos eran capaces de elaborar modelos algebraico-funcionales. La primera tarea propuesta era ***t**: **Calcular las dimensiones de una pirámide hexagonal regular con un volumen de** 175 **ml***. Esta tarea es de carácter inverso a la planteada en el texto escolar, donde se proporcionan las dimensiones y se pide calcular el volumen. Además, ***t*** es una tarea abierta, pues tiene infinitas soluciones y la estrategia para resolverla requiere plantear primero la ecuación con dos incógnitas siguiente: $\mathbf{175 = \frac{1}{3}BH}$, donde ***B*** es el área de la base y ***H*** la altura de la pirámide, y luego la ecuación $\mathbf{B = \frac{pa}{2}}$, siendo ***p*** el perímetro de la base y ***a*** la apotema de la base.

Una técnica posible para calcular las dimensiones del envase con un volumen de 175 cm^3 requiere usar dichas fórmulas como modelos funcionales. Así, una vez obtenido que $\mathbf{a = \frac{\sqrt{3}}{2}l}$ mediante el teorema de Pitágoras, y utilizando dichas fórmulas, llegamos a que: $\mathbf{175 = \frac{\sqrt{3}}{2}l^2H}$. En dicha ecuación podemos expresar ***l*** en función de ***H*** o ***H*** en función de ***l***, así:

$$\text{Caso 1: } \sqrt{\frac{350}{H\sqrt{3}}} = \boldsymbol{l} \qquad \text{Caso 2: } \frac{350}{l^2\sqrt{3}} = \boldsymbol{H}$$

Utilizando GeoGebra, podemos representar gráficamente estas funciones y algunos ejemplos de posibles pirámides con un volumen de 175 cm^3 (*Figura 6*).

Dichas gráficas permiten ver que existe un conjunto infinito de valores de la altura y del lado de la base de la pirámide que dan un volumen de 175 cm^3. Ambas gráficas permiten representar de dos maneras diferentes la relación entre $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{H}$. Se podrá analizar que dicha relación es inversamente proporcional y que hay algunos valores para los que el diseño del envase se torna poco práctico, como cuando $\boldsymbol{l}$ o $\boldsymbol{H}$ tienden a cero o a infinito, o que no tienen sentido, como los valores negativos en el caso 2.

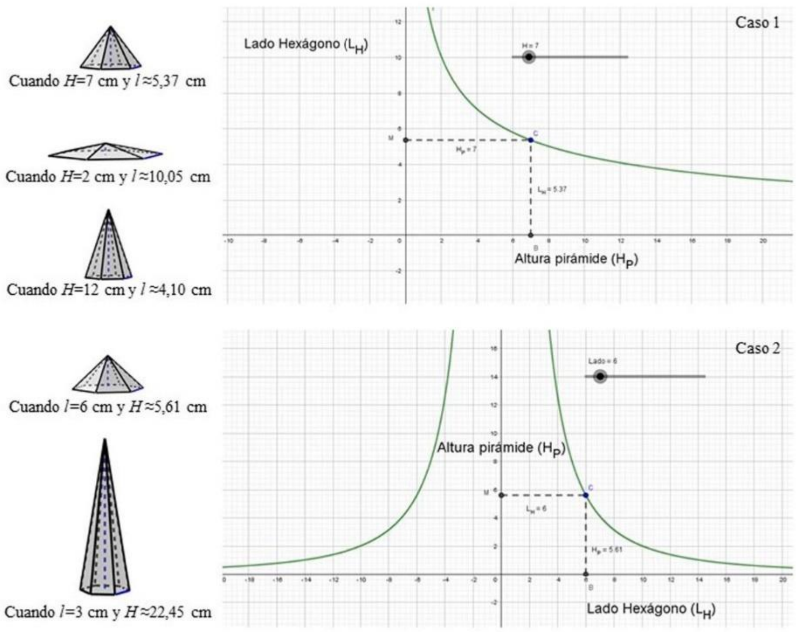


Figura 6. Gráficas del caso 1 y del caso 2 con posibles pirámides solución

El tipo de tarea planteado conduce a que sea necesario considerar las fórmulas del cálculo de volúmenes y de áreas como modelos algebraicos o funcionales, lo que facilita encontrar resultados como el anterior. Una vez consideradas las diferentes soluciones posibles y calculada previamente la apotema de la pirámide, se podrá calcular fácilmente su área total sustituyendo los valores obtenidos en la fórmula correspondiente.

En el siguiente apartado pretendemos describir y analizar la actividad matemática desarrollada por los alumnos durante el REI.

6.2. Descripción y análisis del proceso seguido para resolver el tercer tipo de tarea

Una vez que los estudiantes abordaron los dos primeros tipos de tareas del REI, y presentaron a sus compañeros las posibles soluciones a dichas tareas, en la sesión 13 sugerimos el tercer tipo de tarea a partir de la cuestión: Q_3: *¿Cómo diseñar un envase atractivo y eficiente para un perfume?* El primer tipo de tareas asociadas a Q_3 consiste en: T_3: *Diseñar y realizar un informe para construir un envase adecuado para un perfume con una determinada capacidad o volumen*. En este tipo de tareas, a diferencia del segundo, los estudiantes debían definir no solo la forma, sino también la capacidad, lo que la convierte en una tarea más abierta. Al finalizar, los estudiantes tuvieron que exponer a sus compañeros los resultados obtenidos.

El profesor inició su propuesta repartiendo a los alumnos el siguiente texto:

> *En la compañía de perfumes Afrodita se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase si es posible, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.*

Una vez leído el texto, se solicitó a cada grupo de trabajo que elaborase un mapa de cuestiones y posibles respuestas (*Figura 7*), que les ayudase a marcar un camino en la búsqueda de una posible solución. En dichos mapas, cada grupo estableció algunas subtareas que, a medida que avanzaba el estudio, fueron modificando.

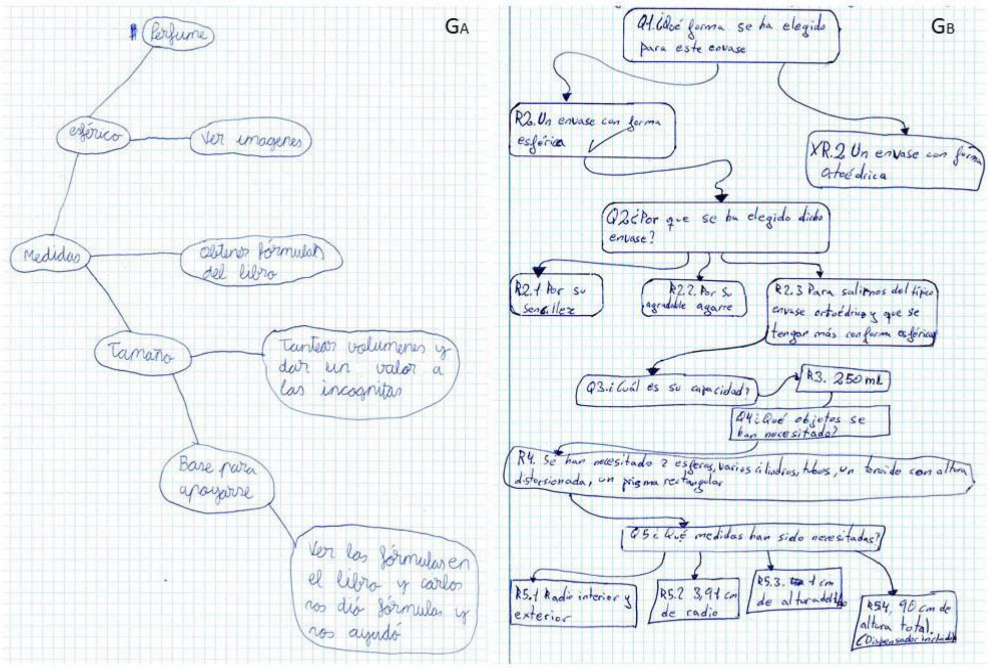


Figura 7. Mapas iniciales de cuestiones y respuestas de estudiantes

Solo describiremos cómo los estudiantes de G_A abordaron las subtareas propuestas. Para resolver T_3 los alumnos de G_A utilizaron la técnica τ_3: *Buscar información en internet y en el libro de texto*. Para decidir la forma del envase los alumnos eligieron qué modelo de cuerpos geométricos podían utilizar para elaborarlo y para decidir la capacidad utilizaron los prototipos habituales encontrados en internet. En concreto, una forma como la de la *Figura 8* y una capacidad de 100 ml.

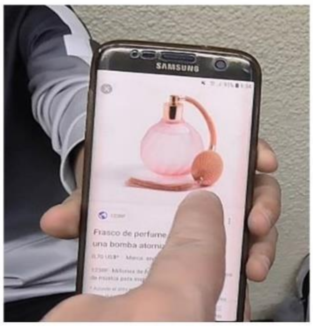


Figura 8. Tipo de envase elegido por los estudiantes

Una vez definida la capacidad del envase, para calcular sus dimensiones decidieron acudir al libro de texto donde aparecía cómo calcular el área de una zona y de un casquete esférico (*Figura 9*).

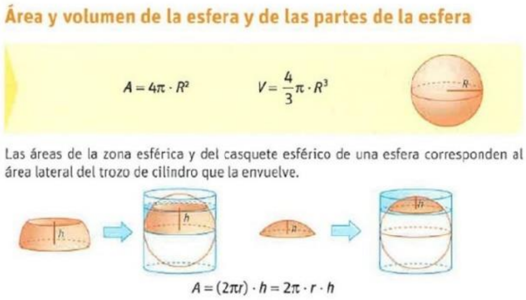


Figura 9. Información sobre el estudio de la esfera en el manual (Alcaide et al., 2016, p. 199)

Dado que los estudiantes ya habían definido la forma y la capacidad del envase, les pedimos que trazaran el boceto del envase y calculasen sus dimensiones. En este punto insistimos porque, inicialmente, pensaban buscar en internet un envase que tuviese la forma y capacidad elegida para así consultar sus medidas. Después, los estudiantes decidieron cambiar la capacidad del envase de 100 ml a 125 ml, porque pensaban que era más estético que el envase fuera un poco más alargado que la esfera.

La decisión de cambiar la capacidad del envase vino acompañada de un cambio en la forma. Decidieron que el envase estaría conformado por dos semiesferas, eliminando un casquete esférico a una de ellas, y un cilindro (*Figura 10*). Esto, les condujo a revisar en su libro de texto cómo calcular el volumen de un cilindro. Cuando preguntamos la razón de dicha elección, respondieron que repartían el volumen entre las tres piezas, 50 cm^3 a la primera semiesfera, 25 cm^3 al cilindro y 50 cm^3 a la otra semiesfera.

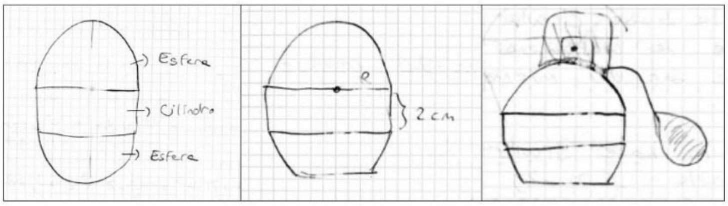


Figura 10. Boceto de izquierda a derecha, diseño inicial, diseño mejorado y diseño final

Tras realizar el diseño del envase, deciden de nuevo cambiar los volúmenes de cada pieza y atribuir 50 cm^3 a cada semiesfera y 50 cm^3 al cilindro, al pensar que era mejor idea que todas las piezas tuvieran 50 cm^3 de volumen. Entonces, deciden resolver la tarea $\boldsymbol{t_{31}}$: *Diseñar un envase para un perfume con una capacidad*[1] *o volumen de 150 ml con una forma compuesta por una semiesfera, un cilindro y una zona esférica*. Esta $\boldsymbol{t_{31}}$ es una tarea *abierta* (se desconocen la técnica que permite resolverla y algunos datos necesarios y suficientes para llevarla a cabo) *e inversa* respecto de las tareas propuestas en el libro. Para diseñar el envase deciden resolver $\boldsymbol{t_{311}}$: *Calcular las dimensiones de un envase con forma compuesta de semiesfera, cilindro y zona esférica (semiesfera a la que se le ha quitado un casquete esférico) y volumen de 150 cm^3, donde el radio de la semiesfera, el radio de la base del cilindro y el radio mayor de la zona esférica son iguales a* $\boldsymbol{R}$.

La resolución de $\boldsymbol{t_{311}}$ requiere construir una técnica nueva y compleja porque se deben calcular posibles valores de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{h}$ (donde $\boldsymbol{R}$ es el radio de la esfera, $\boldsymbol{H}$ es la altura del cilindro, $\boldsymbol{r}$ es el radio del casquete esférico o el radio menor de la zona esférica y $\boldsymbol{h}$ es la altura del casquete esférico) con las ecuaciones:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = 150$$

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

Al querer resolver $\boldsymbol{t_{311}}$, la primera dificultad de los alumnos fue no considerar que el radio $\boldsymbol{R}$ era igual para los tres componentes del envase. Entonces propusimos:

P [...] *¿Por qué no pensar en una fórmula para todo el envase? ¿Cómo lo haríamos?*

E_1 *Sumando* $\boldsymbol{4/3\pi R^3}$ *y* $\boldsymbol{\pi R^2 h}$. *Lo primero es descubrir el radio. Si descubrimos el radio ya podemos empezar a despejar. Y después de tener el radio, calculamos de cuánto queremos la altura* $\boldsymbol{h}$ *del cilindro*[2].

Las respuestas de E_1 apuntaban hacia la suma de las fórmulas para calcular el volumen de la esfera y del cilindro. Sin embargo, aunque insistimos en que tratasen de unificar dichas fórmulas, los alumnos optaron por resolver la tarea por trozos *simplificando e intentando cerrar la tarea*.

[1] Aunque en el proceso sí se discutió sobre la diferencia entre volumen y capacidad, los alumnos no lo tuvieron en cuenta en el momento de resolución, identificando el volumen con la capacidad.
[2] Aquí los estudiantes utilizan el símbolo $\boldsymbol{h}$ para designar la altura del cilindro, en lugar de H para luego poderla distinguir de la altura del casquete esférico.

P *¿Cómo haríamos para obtener el radio de la esfera y la altura del cilindro?*

E_1 [...] *Despejando equis y encontraríamos el radio* [señalando la expresión $\frac{4}{3}\pi \mathbf{x}^3 = 100$ escrita en su cuaderno]. *Y, después de encontrar el radio* R *ya podríamos hacer* $V = \pi R^2 h$ [señalándola en el manual], *y despejaríamos* h. *O sea, sería* π *por el radio* [conseguido de $\frac{4}{3}\pi \mathbf{x}^3 = 100$], *al cuadrado, y pondríamos* $50 = \pi R^2 h$. *Entonces pondríamos la altura como equis, y despejaríamos.*

Dicho esto, los alumnos han considerado las dos semiesferas juntas como si fuera una sola esfera y llamando x al radio R de la esfera han obtenido la ecuación $\frac{4}{3}\pi x^3 = 100$. Así, han obtenido $R = 2{,}88$, que luego aproximan a 3 cm (*Figura 11*), aunque, para el cálculo de la altura del cilindro, usan la medida de 2,88 cm del radio, obteniendo 1,92 cm (*Figura 12*), que aproximan a 2 cm. En los dos casos los alumnos se han visto obligados a considerar la fórmula correspondiente como una ecuación con una única incógnita.

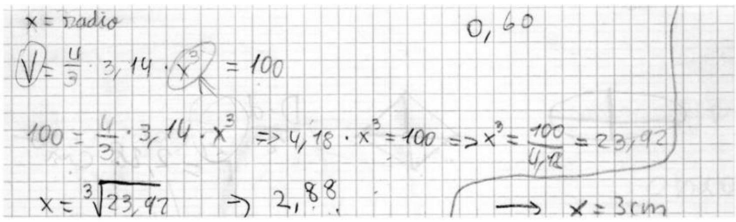


Figura 11. Procedimiento usado por los estudiantes para calcular el radio de la esfera

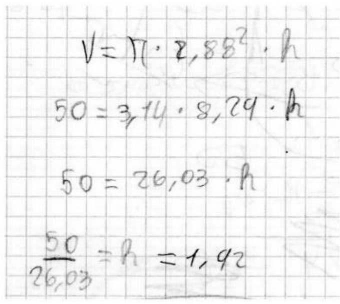


Figura 12. Procedimiento usado por los estudiantes para calcular la altura del cilindro

Luego, los estudiantes han calculado que el volumen de las dos semiesferas era 113,04 cm^3 y el del cilindro era 56,52 cm^3, con los datos obtenidos, aproximando el radio a 3 cm y la altura del cilindro a 2 cm. Así, el volumen del envase sin quitar el casquete esférico era 169,56 cm^3 (*Figura 13*).

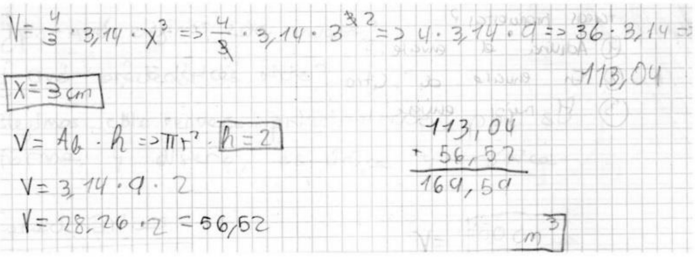


Figura 13. Procedimiento inicial usado por los estudiantes para calcular el volumen del envase

Como el volumen total del envase sobrepasaba los 150 cm^3, preguntamos qué volumen debería tener el casquete esférico para que el volumen del envase se ajustase al elegido. Los estudiantes revisaron la información que aparece en el libro sobre cómo calcular el volumen de un casquete esférico, pero, como no la hallaron y no sabían cómo hacerlo, consideramos pertinente cuestionarles sobre la relación que existe entre el radio de la esfera y el radio y la altura del casquete esférico. Fue así como, esbozamos un gráfico (*Figura 14*) en el que se podía percibir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa coincidía con el radio de la esfera $\boldsymbol{R}$, uno de sus catetos medía lo mismo que el radio del casquete esférico $\boldsymbol{r}$, y el otro, el radio de la esfera menos la altura del casquete $\boldsymbol{R}$-$\boldsymbol{h}$. Entonces surgió la idea de usar el teorema de Pitágoras para calcular $\boldsymbol{r}$ y así determinar si el tamaño de la base era adecuado para el envase (i. e., $\boldsymbol{R^2 = r^2 + (R - h)^2}$), y los estudiantes decidieron atribuir una altura[3] $\boldsymbol{h}$ de 1 cm para el casquete esférico y así calcularon $\boldsymbol{r}$. Por tanto, en lugar de indagar la relación entre los valores de $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{h}$ en la ecuación con *dos incógnitas* $\boldsymbol{2Rh - h^2 = r^2}$ donde $\boldsymbol{R = 3}$, los alumnos decidieron transformarla en una ecuación con *una incógnita* eligiendo de forma arbitraria $\boldsymbol{h = 1}$ y obtuvieron $\boldsymbol{r = 2{,}23}$.

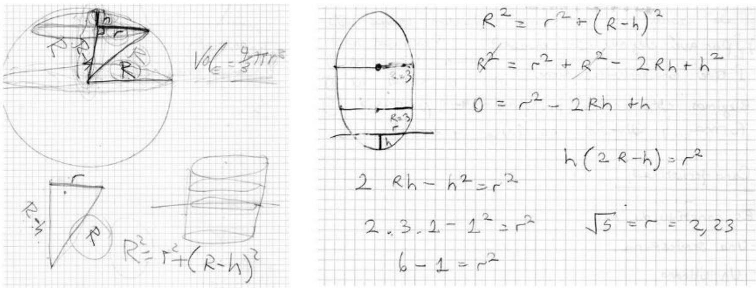


Figura 14. Izquierda, esbozo de la relación entre el radio de la esfera y el radio y la altura del casquete esférico. Derecha, procedimiento usado por los estudiantes para calcular $\boldsymbol{r}$.

Aún hacía falta calcular el volumen del casquete esférico, y como la construcción de una relación que permitiese hacerlo requería de conocimientos más avanzados por parte de los estudiantes, optamos por proporcionarles la fórmula correspondiente:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)}$$

[3] Aquí los alumnos vuelven a utilizar el mismo símbolo $\boldsymbol{h}$ para designar la altura del casquete esférico.

Una vez calculado el volumen del casquete esférico, obtuvieron el volumen del envase sumando los volúmenes de la esfera y del cilindro, y restando el del casquete esférico, es decir, 113,04 + 56,52 – 29,3 = 140,26 cm^3. Este volumen no coincidía con el previsto de 150 cm^3, pero los alumnos no lo cuestionaron. Esto refleja una cierta falta, habitual, de cuestionamiento de los resultados obtenidos por parte de los alumnos.

Al realizar los cálculos se observa una cierta rigidez en el uso de ostensivos, ya que, cuando quieren calcular el radio de la esfera, deciden cambiar la $\boldsymbol{R}$ por la $\boldsymbol{x}$, de modo que las incógnitas en álgebra siempre deben ser designadas por la letra $\boldsymbol{x}$. Igualmente usan siempre la letra $\boldsymbol{h}$ para la altura, ya que es así como siempre se designa en geometría.

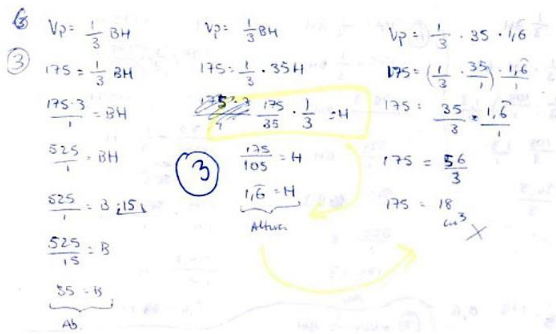
El tipo de tarea planteado ha provocado la necesidad de elaborar un modelo geométrico del que fue necesario estudiar sus propiedades. Los alumnos han tenido la necesidad de crear o reformular técnicas, utilizando las fórmulas como ecuaciones algebraicas con varias variables. Ante la dificultad de resolver dichas ecuaciones, han optado por introducir condiciones arbitrarias que simplifican su resolución, tales como, por ejemplo, repartir por igual el volumen total entre los tres componentes del envase y así solo tener que resolver dos ecuaciones con una incógnita cada una, en vez de una ecuación con dos incógnitas, o también, asignar de forma arbitraria un valor a una de las incógnitas cuando se quiere resolver una ecuación con dos incógnitas.

6.3. Descripción y análisis del proceso seguido para resolver el cuarto tipo de tarea

Como última actividad del REI propusimos un examen con la tarea de la *Figura 5*. Solicitamos especialmente que describieran todo el proceso seguido para resolverla. Y proporcionamos las dos fórmulas siguientes que aparecían en su libro: a) volumen de una pirámide $\boldsymbol{V_p = \frac{1}{3}BH}$, siendo $\boldsymbol{B}$ el área de la base y $\boldsymbol{H}$ la altura de la pirámide; y b) área de un polígono regular $\boldsymbol{B = \frac{1}{2}pa}$, siendo $\boldsymbol{p}$ el perímetro y $\boldsymbol{a}$ la apotema.

A continuación, presentamos las respuestas del examen que consideramos significativas, dadas por E_4 y E_1, pues creemos que nos ayudará a evaluar las dificultades presentadas por los estudiantes para realizar un proceso de modelización.

E_4 intentó 11 veces calcular las dimensiones de la pirámide y en todos los casos otorgó un valor arbitrario diferente para $\boldsymbol{H}$, a fin de calcular $\boldsymbol{B}$, lo que no le permitió avanzar en el cálculo del área de la pirámide. La *Figura 15* presenta su tercer intento.

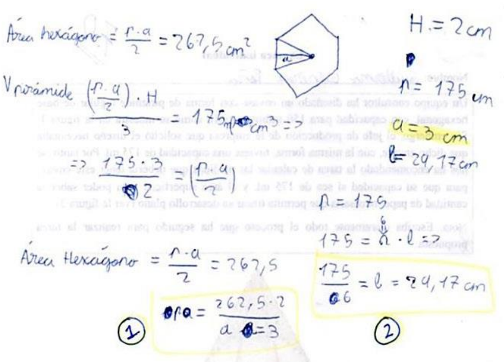


En la 1ª columna sustituye V_p por 175 y para calcular B decide arbitrariamente dar a H el valor de 15 y obtiene que B = 35. En la segunda columna decide calcular H y sustituye V_p por 175 y B por 35 y obtiene con un mal cálculo que H es $1,\hat{6}$. En la 3ª columna sustituye V_p por 175, B por 35 y H por 1,6 lo que le lleva al absurdo de que 175 = 18.

Figura 15. Cálculo de las dimensiones de la pirámide presentado por E_4

En la tarea $\boldsymbol{t}$ planteada, para hallar los posibles valores de $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$, debe considerarse que ambos están relacionados. El alumno opta por dar un valor arbitrario a $\boldsymbol{H}$ y así convierte $\mathbf{175} = \frac{1}{3}\boldsymbol{BH}$ en una ecuación con una única incógnita que sí sabe resolver. Luego, para calcular $\boldsymbol{H}$, sustituye el valor de $\boldsymbol{B}$ ya obtenido en la misma ecuación, sin percibir que el valor de $\boldsymbol{H}$ que obtendrá ha de ser el mismo que ya eligió antes.

También queremos mostrar cómo E_1 calcula el perímetro y la apotema del hexágono regular (*Figura 16*). Así, E_1 ha calculado las dimensiones de la pirámide, sin tener en cuenta que los valores de la apotema y del lado del polígono regular son interdependientes. Después con dicha información E_1 calcula el área total de la pirámide.



Primero sustituye en la fórmula $B = \frac{1}{2}pa$, B por 262,5. En la 2ª fila utiliza la fórmula $V_p = \frac{1}{3}BH$ sustituyendo B por $\frac{1}{2}pa$ y elige que H vale 2 de forma arbitraria. Así calcula que $\frac{1}{2}pa = 262{,}5$. Luego elige arbitrariamente que $a = 3$ y obtiene que el perímetro $p = 175$. Y termina obteniendo que el lado del hexágono es $l = 29{,}17$, después de dividir 175 entre 6.

Figura 16. Cálculo de las dimensiones de la pirámide por E_1

A diferencia del caso anterior, los valores de $\boldsymbol{p}$ y de $\boldsymbol{a}$ están ligados entre sí independientemente de la ecuación planteada, pues siempre $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{12}}\sqrt{\mathbf{3}}$. Aquí, se puede intentar construir la figura y comprobar que no es posible, ya que si $\boldsymbol{p} = \mathbf{175}$ entonces $\boldsymbol{a} \cong \mathbf{25{,}26}$. Este tipo de error puede venir provocado porque las fórmulas no son construidas por los alumnos, sino que vienen dadas de antemano.

Cabe señalar que la fórmula del área de un polígono regular siempre se presenta en los textos escolares en función del perímetro $\boldsymbol{p}$ y de la apotema $\boldsymbol{a}$, lo que sugiere que ambos datos son independientes. En el caso del hexágono regular la relación es evidente y en los demás polígonos regulares se puede demostrar mediante razones trigonométricas. En definitiva, la presentación escolar del problema del área de un polígono regular da a entender que esta depende de dos variables. Al plantear el problema inverso, determinar el lado dada el área, se pone de manifiesto que el área depende de una sola variable.

Para terminar el análisis del REI experimentado, podemos afirmar que el tipo de tareas propuesto ha permitido que los alumnos hayan llegado a considerar parcialmente las fórmulas como modelos algebraicos. Sin embargo, no ha sido posible que las interpreten y las utilicen como modelos funcionales, entre otros motivos, porque no han podido usar GeoGebra en el aula de clase.

7. Las restricciones institucionales después de la experimentación realizada

Después de implementar el REI siguen presentándose ciertas restricciones, ligadas al funcionamiento de la institución de educación secundaria, que profesores y alumnos no pueden modificar, como el tiempo de clase (55 minutos) o la prohibición de usar el móvil o el ordenador en clase. Dichas restricciones han limitado la posibilidad de proponer tipos de tareas que serían útiles para conseguir dar sentido a los saberes que se pretende enseñar. Plantear tareas *abiertas* requiere un tiempo de clase de al menos 90 minutos, que permita que los alumnos trabajen en grupo, discutan cómo abordar la tarea, la lleven a cabo y presenten a la clase su propuesta de resolución. También es necesario usar en el aula recursos disponibles en internet como GeoGebra y Tinkercad. El uso del software dinámico ayudará a dar sentido al uso de los modelos algebraico-funcionales para resolver problemas espaciales. El trabajo con el programa de diseño e impresión en 3D permitirá validar la solución del problema espacial del diseño y elaboración de un sólido.

En lo que se refiere a las restricciones ligadas al grado de completitud de la organización matemática desarrollada en el REI, el tipo de tareas propuesto ha favorecido que los alumnos hayan realizado esbozos de modelos geométricos y algebraicos con el fin de dar respuesta al problema espacial de diseñar un envase para un perfume. Las tareas propuestas en el REI se caracterizan por ser *abiertas* e *inversas* y, como se ha mostrado en la experimentación, han provocado la necesidad de considerar las fórmulas como modelos algebraicos que ha permitido relacionar la geometría con el álgebra.

Ha sido posible llevar a cabo la utilización de modelos geométricos y algebraicos debido a que la organización matemática propuesta tiene un mayor grado de completitud que la que ofrece el libro de texto, como se pone de manifiesto en el tipo de tareas propuestas en el REI y en la necesaria elaboración de técnicas de resolución por parte de los estudiantes. Sigue existiendo cierta rigidez en el uso de ostensivos en las actividades desarrolladas en el REI, pero hemos percibido una mayor flexibilidad en la respuesta de los estudiantes a la tarea de evaluación propuesta.

En el desarrollo del REI ha seguido habiendo una cierta dificultad para que los alumnos sean capaces de construir técnicas nuevas y el profesor ha debido insistir para evitar su tendencia a simplificar y cerrar las tareas propuestas, animándolos a elaborar sus propias respuestas. Esta dificultad está ligada a la costumbre que impone el modelo pedagógico dominante, donde las tareas que los alumnos están habituados a resolver requieren un tiempo reducido, pues suelen ser tareas aisladas y cerradas.

El REI implementado se ha realizado de una forma bastante abierta y libre, dejando que los estudiantes tomasen muchas decisiones sin apenas influencia y dirección por parte del profesor. Sin embargo, pensamos que, si nuestro objetivo es conseguir que los estudiantes utilicen técnicas de modelización para la resolución de problemas espaciales y sean capaces de cuestionarlas y justificarlas, es necesario que el profesor intervenga de manera más cercana en el desarrollo del proceso de estudio, favoreciendo que se traten aquellas cuestiones que permiten potenciar, provocar y posibilitar dicho objetivo. Postulamos que un instrumento de gran ayuda para orientar dicha estrategia didáctica será disponer de un modelo epistemológico de referencia en torno a la determinación y construcción de sólidos, que estamos elaborando en este momento.

8. Conclusiones

El análisis de la experimentación realizada y del texto escolar utilizado por los alumnos nos permite concluir que es necesario y posible crear las condiciones para que la problemática de modelización espacio-geométrica pueda vivir en la ESO. Para ello, proponemos incidir sobre los modelos didáctico y epistemológico dominantes y vigentes en la enseñanza de la geometría en la ESO, que viene representado por la propuesta que se hace visible tanto en el currículo oficial como en los libros de texto.

En lo relativo al modelo didáctico creemos necesario cambiar el contrato didáctico habitual, de modo que el profesor pase a ser el *director del proceso de estudio* y el alumno asuma tareas relativamente ausentes como, por ejemplo, plantear cuestiones, elaborar informes, realizar presentaciones y evaluar el trabajo realizado, entre otras. El modelo que proponemos se materializa en el dispositivo de los REI, donde el saber geométrico debe surgir como respuesta a una cuestión generatriz de gran interés para la comunidad de estudio. Para facilitar la puesta en práctica de este dispositivo será conveniente poder ampliar el tiempo de clase de 55 a 90 minutos con el objetivo de que los alumnos puedan llevar a cabo presentaciones del trabajo realizado en grupo.

En relación con el modelo epistemológico, nuestra propuesta consiste en elaborar un *modelo epistemológico de referencia* (MER) de la geometría en secundaria, alternativo al vigente. Se trata de un modelo capaz de caracterizar y dar sentido a la actividad geométrica interpretada como una actividad de determinación y construcción de todo tipo de figuras (en particular, de sólidos). Una parte de dicho MER, que hemos empezado a desarrollar, contendrá de manera relevante las cuestiones (y las tareas asociadas) relativas a la *problemática de la modelización espacio-geométrica* que consideramos como la problemática de iniciación a la geometría en la enseñanza secundaria. Partiendo de tipos de tareas abiertas e inversas, planteados primero en el espacio sensible, como los propuestos en el REI experimentado, el MER proporcionará diversos recorridos posibles, donde utilizando modelos matemáticos de todo tipo y con la ayuda de herramientas (incluyendo GeoGebra), se puedan resolver dichas tareas. El profesor, como director del proceso de estudio, dispondrá de una herramienta valiosa a utilizar en distintos momentos y de forma más o menos directiva, dependiendo de las decisiones de los alumnos a lo largo del REI. Pretendemos superar así algunas restricciones institucionales que siguen presentándose en relación con la problemática espacio-geométrica y, al mismo tiempo, facilitar que los alumnos asuman nuevas responsabilidades.

Agradecimientos

Proyecto RTI2018-101153-A-C22, Programa Estatal de I+D+i Orientada a los Retos de la Sociedad.

Referencias

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M. y Pérez, A. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO*. SM Savia.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Trabajo de Tesis doctoral sin publicar, Universitat Autónoma de Barcelona. https://www.tdx.cat/handle/10803/3110#page=1

Barquero, B. (2020). Introducción a "Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática: Aproximaciones a la problemática de su diseño, implementación y análisis". *AIEM, 17*, 1-4. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.326

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educaçao Matemática Pesquisa, 15*(1), 1-28.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive? *Petit x, 56*, 5-34.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement elementaire de la géométrie. En M. H. Salin, P. Clanché y B. Sarrazy (eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 125-142). La Pensée Sauvage.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* (Trabajo de Tesis doctoral). Editorial Prensas de la Universidad de Zaragoza

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 1-47.

Chevallard, Y. (2010). *Le sujet apprenant entre espace et dispositif. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique.* Communication présentée aux journées du Lisec Gérardmer. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/

Florensa, I., García, F. J. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática. Estudios de caso en distintos niveles educativos. *AIEM*, 17, 21-37. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Trabajo de Tesis Doctoral sin publicar. Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Trabajo de Tesis Doctoral sin publicar. Universidad de Jaén.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 6*(3), 37-51

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. Trabajo de Tesis Doctoral sin publicar. Universidade de Vigo. http://hdl.handle.net/11093/542

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A. C. y Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, *90*, 5-41.

Rojas, C. y Sierra, T. (2017). Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria. *Comunicación presentada en el grupo DMDC, XXI Simposio SEIEM.*

Rojas, C. y Sierra, T. (2021). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. *Educación Matemática*, *33*(1), 208-239. https://doi.org/10.24844/EM3301.08

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Trabajo de Tesis doctoral sin publicar. Universitat Autònoma de Barcelona.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Ministerio de Educación y Ciencia.

Schukajlow, S., Kaiser, G. y Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM Mathematics Education 50*, 5–18. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* Trabajo de Tesis Doctoral sin publicar. Universitat Ramon Llull. https://www.tdx.cat/handle/10803/101204#page=1

Referencias de los autores

Carlos Rojas Suárez, Universidad de Antioquia (Colombia). carlroja@ucm.es

Tomás Ángel Sierra Delgado, Universidad Complutense de Madrid (España). tomass@ucm.es

Institutional constraints that hinder spatial-geometric modelling in secondary school teaching

Carlos Rojas Suárez, Universidad Complutense de Madrid

Tomás Ángel Sierra Delgado, Universidad Complutense de Madrid

In this paper, we aim to explain institutional restrictions that hinder student mathematical modelling techniques in Compulsory Secondary Education focusing on spatial-geometric modelling. Within the frame of the Anthropological Theory of the Didactic, we postulate that the dominant epistemological-didactic model in the teaching of mathematics, fundamentally represented by the current curriculum, textbooks and classroom practices, gives rise to didactic phenomena linked to the loss of the raison d'être of compulsory secondary school geometry and hinders the possibility of carrying out modelling processes in this institution. We base our explanation on the comparison between: (1) the mathematical activity proposed in the textbook used by 3rd-year students of Secondary Compulsory Education about the determination and construction of solid figures, and (2) the observation and analysis of difficulties emerged when a small group of 3rd-year students faced tasks about the determination and construction of solid figures within a study and research path. In this study process, we introduced the spatial-geometric modelling problem by using a generating question around a spatial task: the design and construction of perfume bottles. From our analysis, we postulate that: (a) the type of tasks proposed provokes the building of geometric models, the study of its properties and the creation (or reformulation) of techniques that should be justified; (b) solving the open and inverse tasks that emerge along the study process leads to considering volume and area formulae as algebraic or functional models rather than arithmetic algorithms. We suggest the necessity of questioning the current dominant epistemological-didactic model in the teaching of geometry in the Compulsory Secondary Education. Regarding the epistemological model, we propose introducing the spatial-geometric modelling problem starting from spatial tasks that will lead to the determination and construction of solid figures. Regarding the didactic model, it will be necessary to change the usual didactic contract so that the teacher becomes the director of the study process, and the students take on new didactic responsibilities such as posing questions, preparing reports and making presentations that allow the assessment of their work.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES, PRINCIPALES APORTACIONES, Y PROBLEMAS ABIERTOS

En este capítulo presentamos algunas conclusiones a las que hemos llegado y explicamos de modo breve las principales aportaciones realizadas como fruto de nuestra investigación, que pueden observarse con más detalle con la lectura de los artículos publicados que forman parte de esta memoria. Adicionalmente, daremos a conocer algunas posibles líneas de trabajo que consideramos que han quedado abiertas y algunas tareas que podrían derivarse o ampliarse a partir del trabajo que hemos realizado. Para ello, tendremos en cuenta el proceso que hemos seguido, señalando los avances logrados en cada etapa de nuestra investigación.

5.1 Algunas conclusiones

1. A partir de la revisión del currículo español y de algunos manuales de matemáticas para la ESO, hemos constatado que hay una casi total ausencia de problemas espaciales que pueden convertirse en una posible razón de ser de los saberes geométricos propuestos para su estudio en la ESO. En definitiva, podemos concluir que "los problemas espaciales no se contemplan como una alternativa para justificar la presencia de los conocimientos geométricos que actualmente se proponen para la ESO" (Rojas & Sierra, 2020, p. 597).
2. Tal como hemos mostrado en Rojas & Sierra (2020), en los libros de texto de la ESO, los tipos de problemas, que se plantean para el estudio de los conocimientos geométricos, que se dicen relacionados con contextos reales, son más bien situaciones seudo reales, ya que están preparados para que se utilice la técnica explicada de antemano. Tampoco se plantean situaciones donde la mejor solución sea la utilización de dichos conocimientos geométricos. Además, los tipos de tareas y estrategias que aparecen en los libros de texto se justifican entre sí, por lo que aparentemente su aplicabilidad y sentido están limitadas a ellas mismas.
3. Tras la primera implementación del REI propuesto en torno al diseño y construcción de un envase podemos concluir que:
   - Varios de los saberes geométricos propuestos para ser enseñados en la ESO, como los relacionados con el cálculo de áreas y de volúmenes, con el estudio

de las características de algunas figuras planas como los polígonos y los círculos, aparecieron durante el trazado del desarrollo de los sólidos que modelaron los envases diseñados por los estudiantes.

- Existe una tendencia a usar las fórmulas de cálculo de áreas y volúmenes casi exclusivamente como programas de cálculo aritmético y, por tanto, está prácticamente ausente una interpretación algebraico-funcional de dichas fórmulas. Estrategia que resulta muy eficaz para determinar la relación entre las distintas dimensiones de un sólido geométrico sabiendo su volumen.

4. Una vez estudiado si la actividad matemática realizada por los alumnos durante desarrollo del REI satisface los indicadores del grado de completitud de una organización matemática local, podemos concluir que la actividad matemática de los estudiantes adolece de excesiva rigidez tanto en el uso de ostensivos como en la justificación de las fórmulas utilizadas y en la disposición a elaborar nuevas técnicas (Rojas & Sierra, 2021a).
5. La primera implementación también nos permite concluir que, para potenciar la flexibilidad de las técnicas, es necesario proponer a los estudiantes tipos de tareas abiertas e inversas donde las técnicas que conocen no sean suficientes, de modo que se vean abocados a desarrollar y justificar las técnicas ya utilizadas y a construir y justificar otras nuevas. En consecuencia, ello va a suponer una inversión de tiempo mayor al que habitualmente se destina para las clases de matemáticas.
6. Como conclusión de la segunda experimentación, creemos que es necesario realizar modificaciones importantes tanto en el modelo epistemológico como en el modelo didáctico dominantes en la institución de la ESO para la enseñanza de los saberes geométricos. Así, en lo que se refiere al modelo epistemológico se debe crear un hábitat adecuado para que sea posible desarrollar la problemática de la modelización espacio-geométrica. Será necesario proponer tareas abiertas e inversas para potenciar el uso sistemático de las fórmulas como modelos algebraico-funcionales. Y con respecto al modelo didáctico, los estudiantes deben jugar un papel importante en el proceso de estudio, responsabilizándose de la búsqueda de respuestas a las cuestiones planteadas, e incluso, de plantear nuevas cuestiones a estudiar y el profesor debe ejercer el papel de director del proceso de estudio y no el de mero transmisor de respuestas. Asimismo, es necesario que el aula de estudio favorezca el trabajo en grupo con un tiempo de al menos 90 minutos y el acceso a internet con el fin de que

se facilite el uso de algún software de geometría dinámica como GeoGebra. Software que permite la construcción de figuras 2D y 3D y la validación de los modelos algebraico-funcionales surgidos en la búsqueda de respuesta a los problemas espaciales planteados (Rojas & Sierra, 2021b). Estos cambios, que afectan tanto al modelo epistemológico como a los medios didácticos, comportan necesariamente cambios de los fines del estudio de la geometría en Secundaria y, en definitiva, de la modalidad de estudio de la geometría vigente en dicha institución.

5.2 Principales aportaciones de esta memoria

A continuación, exponemos de forma breve algunas de las aportaciones esenciales de nuestro trabajo de investigación:

5.2.1 Elaboración de un Modelo Epistemológico de Referencia en torno a la determinación y construcción de sólidos para la investigación en Didáctica

En el capítulo 2 presentamos la construcción de un MER en torno a la determinación y construcción de cuerpos geométricos en la Enseñanza Secundaria a partir de una nueva clasificación de los sólidos que, partiendo de los poliedros regulares, se estructura mediante dos criterios:

a) que el número de lados de las caras vaya creciendo indefinidamente en alguna o en varias de sus caras;

b) que la regularidad del sólido se vaya debilitando poco a poco.

De este modo, hemos propuesto cuatro clases de sólidos:

- La que parte del tetraedro, pasa por las pirámides y termina en los conos.
- La que parte del octaedro, pasa por las bipirámides y termina en los biconos.
- La que parte del cubo o exaedro, pasa por los paralelepípedos y termina en los cilindros.
- La que parte del dodecaedro y el icosaedro, pasa por los “balones” y termina en la esfera.

Además, planteamos el problema de cómo determinar y construir algunas figuras planas, lo que permite relacionar y articular el estudio de dicha problemática en las geometrías 2D y 3D. Así, el MER ayuda a explicar que la determinación y construcción de figuras 3D se basa en la determinación y construcción de figuras planas.

En el MER se plantean tareas abiertas e inversas, bastante ausentes en el estudio de la geometría en la Enseñanza Secundaria, que van a facilitar la utilización de diferentes técnicas de modelización. Se parte de la modelización espacio-geométrica de un objeto sensible, posteriormente se pasa a un modelo algebraico utilizando las fórmulas como programas de cálculo algebraico y, para analizar la variación de una variable con respecto a las otras, se llega construir y emplear un modelo funcional. Para facilitar la resolución de dicho tipo de tareas, el MER propone el uso de GeoGebra, lo que va a favorecer la posibilidad de relacionar las técnicas sintéticas y analíticas para el estudio de la determinación y construcción de figuras 2D y 3D.

El desarrollo de este MER proporcionará al investigador una herramienta valiosa para el análisis del modelo epistemológico dominante en torno a la construcción de sólidos en la institución de Educación Secundaria.

El MER ha sido diseñado, fundamentalmente, con el objetivo de mostrar que es posible, por un lado, articular el estudio de las geometrías 2D y 3D y, por otro, utilizar la actividad matemática de modelización como el medio didáctico principal para llevar a cabo el estudio de la geometría de la ESO. Así, a partir de la cuestión generatriz sobre cómo diseñar y construir un envase con una capacidad o volumen determinado, hemos logrado presentar una posible vía de estudio que reorganice y dote de sentido a varios de los saberes geométricos propuestos en el currículo de la ESO, al tiempo que incluye la determinación y construcción de figuras planas y sólidos como problema central del proceso de modelización.

5.2.2 Análisis de la modalidad de estudio de los cuerpos geométricos que proponen los textos escolares de la ESO

El uso de los indicadores del grado de completitud de una organización matemática, junto al MER y al modelo didáctico que se propone, como herramientas de análisis de la modalidad de estudio vigente en una institución, constituye una aportación importante de esta memoria. Se pretende así mostrar, al investigador en didáctica y al profesor de matemáticas, cómo llevar a cabo el análisis de un proceso de estudio. El objetivo que se quiere conseguir con dicho análisis es contrastar la actividad matemática escolar con la que sería posible desarrollar. De esta forma se detectan posibles carencias y limitaciones que existen en relación con los tipos de tareas propuestos, las técnicas empleadas y los elementos tecnológicos desarrollados. Así, hemos encontrado que existe gran falta de flexibilidad tanto en el uso de los ostensivos utilizados como en el uso de técnicas para resolver los tipos de problemas planteados. Apenas se proponen tareas inversas y abiertas. La justificación de las técnicas es inexistente y no se presentan actividades de modelización, sea de modelización espacio-geométrica o de modelización algebraico funcional.

5.2.3 Análisis del modelo epistemológico dominante y de algunos fenómenos didácticos que se presentan en la enseñanza de los cuerpos geométricos en la ESO

El MER nos ha permitido percibir fenómenos didácticos como la falta de articulación entre las geometrías 2D y 3D, la casi total ausencia actividades de modelización en el estudio de la geometría en la ESO, la rigidez e incompletitud de las praxeologías geométricas, las técnicas aparecen de forma aislada, el uso de las fórmulas del cálculo de áreas y volúmenes casi exclusivamente aritmético y, en general, una amplia carencia de razones de ser que justifiquen el estudio de los cuerpos geométricos en la ESO.

5.2.4 Diseño y análisis de un recorrido de estudio e investigación en torno a la determinación y construcción de sólidos en la Enseñanza Secundaria Obligatoria

Aunque el MER construido ha sido publicado posteriormente, siempre se ha tenido en cuenta como herramienta clave para el diseño, el análisis a priori y el análisis a posteriori del REI implementado en dos ocasiones sobre el esbozo y construcción de un envase con una capacidad o volumen dado de antemano. En ambos casos, el análisis del REI, a la luz del MER elaborado, nos ha permitido explicar que es posible desarrollar técnicas de modelización para el estudio de los sólidos en la ESO. Asimismo, hemos mostrado que dicho proceso didáctico ofrece la posibilidad de presentar en su desarrollo algunas de las cuestiones a las que responde, es decir, las razones de ser de la determinación y construcción de los cuerpos geométricos que se proponen para ser estudiados en la ESO. Podemos afirmar que el REI experimentado es un buen dispositivo didáctico para el estudio de muchos de los saberes geométricos sobre las figuras 2D y 3D, que se proponen en el currículo de la ESO. Por tanto, los resultados obtenidos después de haber analizado dicha propuesta didáctica nos permiten asegurar que esta es una aportación importante de la presente memoria, que debemos seguir profundizando en trabajos posteriores (Capítulos 3 y 4). El REI diseñado e implementado es una propuesta didáctica alternativa que creemos puede ayudar a hacer frente a los fenómenos didácticos detectados.

5.2.5 Análisis de la ecología de los REI sobre el diseño y construcción de envases

El MER elaborado podrá orientar a los profesores a crear las condiciones favorables para hacer frente a las restricciones detectadas. Será necesario plantear tipos de tareas abiertas e inversas con el objetivo de crear la necesidad de considerar las fórmulas como modelos algebraicos que ayudarán a relacionar la geometría con el álgebra. Dicho tipo de tareas más complejas que las cerradas y directas deben llevar a considerar la necesidad de trabajar en equipo, de ampliar el tiempo de clase a al menos 90 minutos y de proporcionar a los alumnos el acceso a programas como GeoGebra y Tinkercad. El uso de GeoGebra ayudará a dar sentido al uso de modelos algebraico-funcionales y la utilización Tinkercad, programa de impresión en 3D, servirá para validar la solución propuesta al problema espacial planteado de diseño y construcción de un envase. La propuesta de tipos de tareas abiertas podrá provocar que los alumnos necesiten construir nuevas técnicas y justificarlas.

5.3 Problemas abiertos para futuras líneas de investigación

Para terminar, proponemos algunas cuestiones abiertas que creemos pueden complementar y seguir el trabajo de investigación que hemos desarrollado en esta memoria:

1. Un análisis que permita comparar la propuesta desarrollada en el nuevo currículo de matemáticas y en los textos escolares sobre la construcción de cuerpos geométricos en España, y la desarrollada en el currículo y manuales escolares de Colombia a la luz del MER construido.
2. El diseño e implementación de un nuevo REI en torno a la determinación y construcción de sólidos, de manera que su análisis pueda seguir nutriendo y enriqueciendo el MER construido, que como ya hemos dicho es provisional y relativo.
3. Estudiar el problema de la relatividad institucional del MER sobre la determinación y construcción de figuras planas y cuerpos geométricos, es decir, analizar y comparar

cuál es tipo de actividad matemática que es posible realizar en diferentes instituciones como la Educación Primaria y la Educación Secundaria. Para realizar dicha labor será necesario elaborar un MER sobre la determinación y construcción de figuras 2D y 3D en las diferentes instituciones escolares.

4. Profundizar en el análisis del potencial y el enriquecimiento de la problemática de modelización espacio-geométrica que pueden aportar los softwares de geometría dinámica y los programas de impresión 3D actuales, en torno al estudio de la determinación y construcción de figuras planas y de cuerpos geométricos en la institución escolar en la que se quieran implementar.
5. Elaborar una propuesta didáctica tanto para la formación de profesores de Primaria como para la formación profesores de Secundaria en torno a la determinación y construcción de figuras planas y cuerpos geométricos. En definitiva, desarrollar un programa de formación del profesorado de Matemáticas donde sea posible difundir las praxeologías matemáticas y didácticas que hemos propuesto en esta memoria, como una propuesta alternativa al modelo epistemológico dominante en la institución de Educación de Secundaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., & Pérez, A. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO*. SM Savia.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. http://hdl.handle.net/10803/3110

Barquero, B. (2020). Introducción a 'Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática: Aproximaciones a la problemática de su diseño, implementación y análisis'. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *17*, 1-4. https://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/326

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 339-352.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educacion Matemática Pesquisa*, *14*(2), 1-28.

Berenguel, A., & Parra, V. (2021). Enseñanza de cuerpos geométricos en el nivel secundario argentino: implementación de una actividad de estudio e investigación. *Números*, *109*, 7-31.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Tesis doctoral, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065

Berthelot, R., & Salin, M. H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive? *Petit x*, *56*, 5-34.

Berthelot, R., & Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement elementaire de la geometrie. En M. H. Salin, P. Clanché, & B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 125-142). La Pensée Sauvage.

Bertomeu-Camós, M., & Fortuny Cuadra, A. (2016). *El proyecto de desarrollo de packaging*. ECOEMBES. https://www.ecoembes.com/sites/default/files/archivos_publicaciones_empresas/el

-proyecto-de-desarrollo-de-packaging.pdf

Bloch, I., & Salin, M. H. (2004). Espace et géométrie: géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. *Actes du 30e Colloque de la COPIRELEM Avignon 2000*, 293-306.

Bolea, P. (2002). *El proceso de alberización de organizaciones matemáticas escolares* [Tesis doctoral]. Universidad de Zaragoza.

Bosch, M., Compta, A., Gascón, J., Urbaneja, M. G., & Lamarca, J. M. (1996). *Matemáticas 2º ciclo ESO/1er curso*. Almadraba.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 1-47.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar . Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, *18*(2), 37-74.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactiquedes mathématiques* (pp. 107-122). La Pensée Sauvage.

Bosch, M., & Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica. En L. Ruiz, A. Estepa, & F. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. *Seminaire de Didactique des Mathématiques*, 67-83. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110

Carena, M. (2020). *La pelota siempre al 10: problemas del fútbol resueltos con matemática*. UNL. https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/bitstream/handle/11185/5538/lapelotasiempre10.pdf

Castelnuovo, E. (1966). *Geometría intuitiva* (R. Romero (trad.)). Editorial Labor, S.A.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* (3.ª ed.).

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-226.

Chevallard, Y. (2010). Le sujet apprenant entre espace et dispositif. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique. En *Communication présentée aux jour-nées du Lisec Gérardmer*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, *20*(1), 159-169.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Structures & fonctions. En J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., & Jullien, M. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie, première partie. *Petit x*, *27*, 41-76.

Chevallard, Y., & Jullien, M. (1991). La enseñanza de la geometría en secundaria (F. Villarroya, trad.). *Petit x*, *27,* 41-76.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathèmatiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* [Tesis doctoral, Université de Provence]. https://theses.hal.science/tel-00120709/document

Colombia-MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Colombia-MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Colombia-MEN. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*. https://drive.google.com/file/d/0BzWVeoODM2kBVFg4MGRaM0NWc3c/view

Corica, A. R., & Marin, E. A. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría Palabras clave. *Números*, *85*, 91-114.

CREM. (2000). *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/SurGeometrie/Rapport_geometrie.pdf

Dos Santos, J. M. (2012). Introducción al geogebra 3D. En F. España Pérez & M. B. Sepúlveda Lucena (Eds.), *Anales del XIV Congreso de Enseñanza Y Aprendizaje de las Matemáticas. Diversidad y Matemáticas* (pp. 350-359). SAEM THALES.

http://funes.uniandes.edu.co/21660/1/DosSantos2012Introduccion.pdf

Eduscol. (2020). Programme du cycle 4. Volet 3. Mathématiques. En *D'après le BOEN nº31 juillet 2020*. Direction générale de l'enseignement scolaire. https://eduscol.education.fr/document/621/download

Florensa, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and in teacher education* [Tesis doctoral]. Universitat Ramon Llull.

Florensa, I., García, F. J., & Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática. Estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2018*(17), 21-37. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria* [Tesis doctoral]. Universidad de Vigo.

Fonseca, C., Gascón, J., & Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, *17*(3), 289-318. https://doi.org/10.12802/relime.13.1732

Fonseca, C., Pereira, A., & Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme «milieu» dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques* [Thèse de doctorat]. Université Bordeaux I.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* [Tesis doctoral]. Centro de Investigaciones del IPN.

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *XIV*(2), 125-142. http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/906

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* [Tesis doctoral, Universidad de Jaén]. https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=19566

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 75-94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

García, F. J., Gascón, J., Ruíz-Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 226-246. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF02652807

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enselanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, *6*(3), 37-51.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7-34.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA*, *39*, 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*, *44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA*, *45*, 41-52.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. el caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 203-231.

Gascón, J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *3*, 69-87. http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4229851.pdf

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, *26*(Especial), 99-123.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Sintesis.

Guillén, G., Gonzalez, E., & García, M. A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M. J. Gonzáles, M. T. Gonzáles, & J.

Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (Número 3, pp. 247-258). SEIEM.

Houdement, C. (2019). Le spatial et le géométrique : le yin et le yang de l'enseignement de la géométrie. En S. Coppé & E. Roditi (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques - XIXe école d'été de didactique des mathématiques 2017: Vol. Vol 1* (pp. 19-45). La Pensée Sauvage.

IHOBE S. A., & ECOEMBES. (2017). *Guía de ecodiseño de envases y embalajes*. ECOEMBES. https://www.ecoembes.com/sites/default/files/archivos_publicaciones_empresas/10-guia-ecodiseno-envases-2018.pdf

Latasa, M., & Ramos, F. (2022). Capítulo 9: Geometría en el espacio. Globo terráqueo. En *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 3º A de ESO*. https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/LOMLOE/3A/09_GeometriaEspacio_3A.pdf

Licera, R. M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado* [Tesis doctoral]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* [Tesis doctoral, Universidade de Vigo]. http://www.investigo.biblioteca.uvigo.es/xmlui/handle/11093/542

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, 378. https://www.boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-37-consolidado.pdf

MECD (2022). Real Decreto 2017/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Navarro, P., Garcia-Romeu, M., Alcaraz, J., de la Cruz, E., Ferreira, B., & Hortal, M. (2007). *Guía práctica de diseño de envases y embalajes para la distribución de productos*. Instituto tecnológico del embalaje, transporte y logística. http://www.itene.com/rs/810/d112d6ad-54ec-438b-9358-4483f9e98868/f8b/filename/guia-diseno-envases-embalajes.pdf

Pérez, S., & Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En M.

Camacho Machín, P. Flores Martínez, & P. Bolea Catalán (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 295-305). SEIEM.

Pérez, S., & Guillén, G. (2008). Estudio Exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria. En R. Luengo González, B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machín, & L. J. Blanco Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 295-305). SEIEM.

Perrin-Glorian, M.-J., & Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école, 222*, 26-36.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A. C., & Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM, 90*, 5-41.

Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques. Tomo II. Une méthode générale* (M. Didier (trad.)). Dunod.

Roa, J. (2019). *Respuesta a las restricciones transpositivas de la sociedad de la información en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria* [Tesis doctoral]. Universidad Complitense de Madrid.

Rodríquez-Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid]. https://eprints.ucm.es/7256/

Rojas, C. (2015). *Relaciones que establecen algunos estudiantes de educación media entre las matemáticas escolares y su cotidianidad* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. http://bibliotecadigital.udea.edu.co/dspace/handle/10495/6573

Rojas, C., & Sierra, T. (2017). Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria. En *Comunicación presentada al XXI Simposio de la Sociedad de Investigación en Educación Matemática*.

Rojas, C., & Sierra, T. (2019). Analysis of the mathematical-didactic activity carried out during the experimentation of a SRC. En *Comunication presented in the Advanced Course on Dialogue between theories in Mathematics Education*.

Rojas, C., & Sierra, T. (2020). Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *22*(4), 593-602. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p593-602

Rojas, C., & Sierra, T. (2021a). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. *Educación Matemática*, *33*(1), 208-239. https://doi.org/10.24844/EM3301.08

Rojas, C., & Sierra, T. (2021b). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 41-63. https://doi.org/10.35763/aiem20.4031

Rojas, C., & Sierra, T. (2022). A Reference Epistemological Model Regarding the Determination and Construction of Solids for Compulsory Secondary Education. *Acta Scientiae*, *24*(8), 437-475. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7185

Rojas, C., & Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos concimientos geométricos durante la solución de un problema espacial. En L. Rodríquez-Muñiz, L. Muñis-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 485-494). Ediciones de la Universidad de Oviedo. https://www.seiem.es/docs/actas/22/ActasXXIIDefinitivas.pdf

RSME. (2020). *Libro Blanco de las Matemáticas*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. https://www.fundacionareces.es/recursos/doc/portal/2020/10/14/libro-blanco-de-las-matematicas.pdf

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Tesis doctoral]. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. https://fundacion-rama.com/wp-content/uploads/2022/05/01277.-La-introduccion-del-algebra-elemental-y-su-desarrollo-hacia-la-modelizacion-funcional.pdf

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Ministerio de Educación y Ciencia.

Salin, M. H. (2014). Quelques remarques autour des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Enseignement de la Géométrie à l'École. Enjeux et perspectives*, 32-43.

Santaló, L. (1985). La Enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario (alumnos de 12 a 16 años de edad). En Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. (Ed.), *La enseñanza de la metamática a debate* (pp. 11-23).

http://hdl.handle.net/10256.2/10194

Schukajlow, S., Schukajlow, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 5-18. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* [Tesis doctoral]. Universitat Ramon Llull.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* [Tesis doctoral]. Universidad Complutense de Madrid.

Sierra, T., Bosch, M., & Gascón, J. (2007). Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los sistemas de numeración. *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*, 359-384. http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Sierra_Bosch_Gascon.pdf

ANEXOS

En este último apartado de nuestro estudio, presentamos los anexos que consideramos pueden orientar mejor al lector sobre la evolución de nuestra investigación. Por tanto, incluimos, entre otros, los documentos que utilizamos para la implementación del REI, los diarios de campo, algunos apartados de los cuadernos de los estudiantes y las tareas que propusimos en el REI. Cabe anotar que, en algunos casos, los diarios de campo son más extensos que otros porque, en algunas sesiones, el trabajo fue más rico y productivo que en otras. El listado de anexos es el siguiente:

- Anexo 1: Documentos utilizados para la conformación del Semillero Matemático, que hemos usado para convocar a los estudiantes, para informar sobre las fechas y horarios en los que se desarrollaría, y para solicitar a los padres de los estudiantes su autorización para uso, con fines académicos, de los registros audiovisuales que necesitaríamos tomar en cada sesión del semillero (página 169).
- Anexo 2: Tareas propuestas durante la primera implementación del REI. La primera de ellas giró en torno al análisis de algunos envases comerciales, la segunda sobre el diseño de un envase con capacidad para un litro, y la tercera sobre el diseño para un perfume (página 171).
- Anexo 3: Diario de campo de la primera implementación del REI, en el que describimos lo que ha ocurrido en cada sesión, presentamos las transcripciones de algunos de los diálogos con los estudiantes y escribimos algunas observaciones (página 173).
- Anexo 4: Informe final presentado por el grupo 2, al finalizar la tercera tarea propuesta en el REI (página 223).
- Anexo 5: Informe del trabajo realizado en el Semillero Matemático, que hemos presentado a los profesores y a la directora del instituto en el que hicimos la primera implementación del REI (página 229).
- Anexo 6: Consentimiento informado para la segunda implementación del REI, en el que, como en el caso de la primera implementación, informamos de las fechas y horarios en que tendría lugar, y solicitamos permiso a los padres de los estudiantes para el uso, con fines académicos, de los registros

audiovisuales que necesitaríamos tomar de dicha implementación (página 231). En este caso la implementación se hizo en el marco de una asignatura optativa para estudiantes de 3º de ESO, demoniada *Ampliación en Matemáticas*.

- Anexo 7: tareas propuestas durante la segunda implementación del REI. La primera sobre el análisis de algunos envases comerciales, la segunda sobre el diseño de un envase con capacidad para un litro, y la tercera sobre el diseño para un perfume. Estas tareas fueron perfiladas a partir de la implementación del primer REI. (página 233).
- Anexo 8: Diario de campo de la segunda implementación del REI, en el que describimos lo que ha ocurrido en cada sesión, presentamos las transcripciones de algunos de los diálogos con los estudiantes y escribimos algunas observaciones (página 237).
- Anexo 9: Mapas de cuestiones y respuestas, elaborados por los estudiantes durante la segunda implementación del REI. Los estudiantes, organizados en dos grupos (A y B), construyeron un mapa por cada una de las tareas propuestas en el REI (página 393).
- Anexo 10: Informe final presentado por el grupo A, que responde a las consignas dadas para la tercera tarea del REI (página 399).
- Anexo 11: Revisión del examen realizado por el estudiante E1, del grupo A, al final de la segunda implementación del REI. Dicha revisión fue hecha por el investigador (página 403).
- Anexo 12: Revisión del examen realizado por el estudiante E4, del grupo B, al final de la segunda implementación del REI. Dicha revisión fue hecha por el investigador (página 411).

ANEXO 1: Documentos utilizados para la conformación del Semillero Matemático

I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO
Avda. de las ciudades s/n
28903 GETAFE (Madrid)
Cod.Centro:28074669
http://www.educa.madrid.org/web/ies.menendezpelayo.getafe/
e-mail:ies.menendezpelayo.getafe@educa.madrid.org
COMUNIDAD DE MADRID

UNIÓN EUROPEA
Fondo Social
Europeo

Departamento de MATEMÁTICAS

SEMILLERO MATEMÁTICO

Estimados alumnos del I.E.S. Menéndez Pelayo:

como recordarán, los días 18 y 19 de diciembre del 2017, Carlos Rojas Suárez estudiante de Doctorado en Educación en la Universidad Complutense de Madrid, les convocó para participar voluntariamente de un *SEMILLERO MATEMÁTICO*. Este proyecto está vinculado, en coordinación con el Departamento de Matemáticas de este centro, con la tesis que actualmente desarrolla.

El objetivo del semillero es abordar diferentes situaciones y problemas reales, de modo que, en su solución, emerjan las matemáticas, poniendo en juego y fortaleciendo varios de los conocimientos que actualmente propone el currículo de la ESO.

En esta oportunidad, les pedimos a aquellos alumnos interesados en participar del semillero, que cumplimenten el siguiente cuestionario, el cual pueden entregar a su respectivo profesor de matemáticas lo antes posible. Una vez tengamos la información del número de alumnos que conformará este grupo de estudio, les daremos a conocer, la fecha de inicio.

La información que proporcione es completamente confidencial y será usada estrictamente para efectos académicos.

Departamento de Matemáticas

I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO
DPTO. DE MATEMÁTICAS

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, JUVENTUD Y DEPORTE

Comunidad de Madrid

Unión Europea
Fondo Social Europeo
"El FSE invierte en tu futuro"

INSTITUTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA MENÉNDEZ PELAYO

DEPARTAMENTO de MATEMÁTICAS

Estimados padres y madres:

El Departamento de Matemáticas ha puesto en marcha un grupo de trabajo que hemos denominado "*SEMILLERO MATEMÁTICO*". Este proyecto estará liderado por Carlos Rojas Suárez, estudiante de Doctorado en Educación en la Universidad Complutense de Madrid y vinculado con la tesis que actualmente desarrolla. Participarán en el alumnos voluntarios de nuestro centro de 4°ESO y 1°BTO.

Como su hijo/a está entre los alumnos que se han animado a participar, nos gustaría darles a conocer las características generales de este grupo de trabajo:

1. La participación es voluntaria y gratuita.

2. Su objetivo principal es: "discutir, construir y validar algunos de los saberes matemáticos que actualmente se proponen en el currículo de secundaria. Para lograr este objetivo, se abordarán problemas o situaciones como los que suelen enfrentar habitualmente profesionales de oficios manuales (cristaleros, fontaneros, etc.), y se analizarán sus posibles vías de solución, así como la presencia de contenidos matemáticos en ellas". Como producto de este proceso, se espera que los conocimientos matemáticos de los alumnos se fortalezcan, así como su motivación e interés por el saber matemático.

3. El ***horario habitual*** en el que se desarrollará, será los ***MIÉRCOLES de 16H A 17H*** en las instalaciones de este instituto, iniciando el próximo ***7 de Febrero del 2018***. Se calcula que tendrá una duración máxima de 3 meses. Eventualmente, y dependiendo de la dinámica e implicación de los alumnos en el trabajo que se esté desarrollando, alguna sesión podría extenderse más allá de la hora prevista.

Dado que este proyecto se encuentra vinculado con el trabajo de la investigación que actualmente desarrolla el coordinador del semillero, resulta de vital importancia recabar y analizar la información que surja durante las sesiones con los alumnos, mediante registros audiovisuales. Por tanto, solicitamos su autorización para hacer uso -con fines estrictamente académicos- de aquellos registros en donde aparezca su hijo/a.

Agradecemos su atención y esperamos que esta experiencia académica aporte motivación y formación a todos los alumnos que participen en ella.

[redacted]
Directora del IES Menéndez Pelayo

I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO GETAFE (Madrid)

[redacted]
Jefa del Departamento de Matemáticas

SEMILLERO MATEMÁTICO

Yo, ________________________________, padre / madre del alumno ____________________

______________________ del curso _______ , manifiesto haber leído la información adjunta, y autorizo a mi hijo/a para que asista al Semillero Matemático y para que los registros audiovisuales en donde él intervenga sean tratados con fines académicos.

ANEXO 2: Tareas propuestas durante la primera implementación del REI

Envases de cartón

Análisis inverso

Hoy tenemos algunos de los envases que se usan comercialmente para contener jugo, leche y caldo de pollo. A partir de la observación, análisis y discusión, proponemos abordar y dar cuenta de los siguientes interrogantes:

1. ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre las cajas?
2. ¿Cuáles son las dimensiones de las cajas?
3. ¿Existe alguna relación entre las dimensiones de las cajas y su capacidad?
4. ¿Puede tener la caja dimensiones diferentes y aun así tener la misma capacidad? ¿Por qué?
5. ¿Qué otras preguntas podríamos formular sobre la relación entre las cajas y su contenido?

La caja de litro

Hoy, en equipos de máximo tres integrantes, vamos a diseñar y construir una caja que pueda contener exactamente un litro. Para ello, usaremos medio pliego de cartulina blanca.

Las condiciones para llevar a cabo esta tarea son:

a. Debemos usar solamente la cartulina suministrada, es decir, sin añadir trozos de otro pliego.
b. Las dimensiones de la caja no pueden ser exactamente iguales a las de aquellas que hemos analizado en las sesiones anteriores.

Cuando hayamos terminado, presentaremos la caja a nuestros compañeros, explicando el proceso que hemos seguido para su diseño y construcción, y argumentando porqué puede contener exactamente un litro.

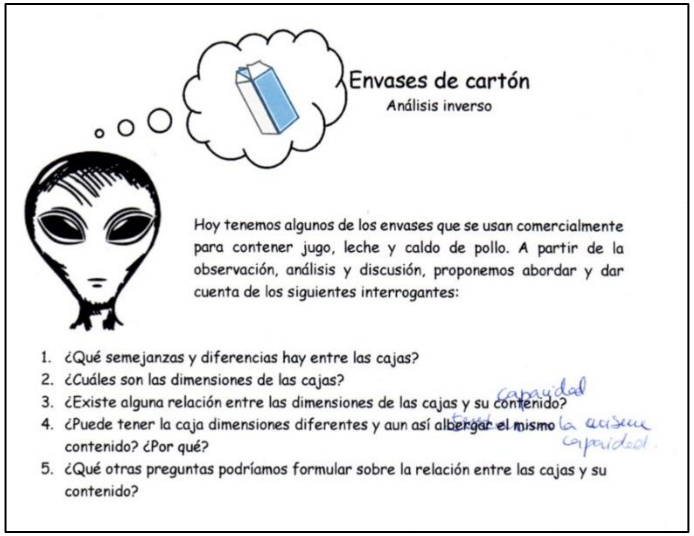
EL MEJOR ENVASE

La compañía de perfumes, *Afrodita*, ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros vamos a actuar como una empresa de consultoría, ya que la compañía *Afrodita* nos ha solicitado un informe donde respondamos de manera argumentada a la pregunta: ¿cuál es el mejor envase que se puede diseñar para dicho perfume? En consecuencia, al final del estudio deberemos redactar y entregar dicho informe como empresa consultora que somos.

ANEXO 3: Diario de campo de la primera implementación del REI

<table>
<tr><th colspan="10">DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Menéndez Pelayo</td><td>Fecha</td><td>Febrero 7 del 2018</td><td>Hora</td><td>16:00-17:15</td><td>Sesión</td><td>01</td><td>Investigador</td><td>Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="5">12 estudiantes, 2 profesoras del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.</td><td>Aula</td><td>1.8 Ed. Silverio Lanza</td><td>Videos</td><td>V1 Feb07 2018
V2 Feb07 2018
V3 Feb07 2018</td></tr>
<tr><th colspan="10">Contextualización</th></tr>
</table>

Tarea 1:



Notas:

- Las correcciones que aparecen con bolígrafo azul en esta tarea, las hicimos al tiempo que las leímos con los estudiantes, pues el término “contenido” no era el adecuado para el análisis que pretendía promover; en su lugar, se optó por el término “capacidad”.
- El papel del investigador (Carlos Rojas Suárez) en el semillero será, necesariamente, el de un observador participante. De una parte, porque tendré que registrar los hechos tal y como sucedieron; y de otra, porque instaré a los estudiantes a cuestionar y cuestionarse sobre las ideas, respuestas, vías de solución y demás, con relación a las tareas que inicialmente les proponga, y otras que vayan emergiendo en el semillero.
- El estilo de escritura que he adoptado en este diario es el de primera persona.

<table>
<tr><th>Descripciones y transcripciones</th><th>Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td>1. <u>Saludo de bienvenida al semillero:</u>
Como se trataba de la primera sesión, saludé y agradecí a los estudiantes por haber aceptado participar en el semillero; además, les pregunté sobre sus expectativas con relación a éste, pero solo una estudiante respondió con la frase: que me gusten las matemáticas.</td><td>1. Al inicio de la sesión los estudiantes se mostraron introvertidos y un tanto renuentes a manifestar sus expectativas, muestra de ello es que solo una estudiante se aventuró a expresar lo que esperaba del semillero. Debí haberle preguntado por qué no le gustan las matemáticas.</td></tr>
</table>

2. <u>Asuntos varios sobre el semillero:</u> Les recordé a los estudiantes que el semillero tendría lugar todos los miércoles de 16:00 a 17:00, y que eventualmente nos extenderemos hasta las 17:30, dependiendo de la tarea que estemos abordando y de cuán implicados estemos en ella. Luego, le entregué un cuaderno a cada estudiante, y les pedí a todos que en éste registraran las ideas, soluciones y propuestas que emergieran en la solución de las situaciones abordaremos. Solo una estudiante preguntó si era necesario usar este cuaderno en particular, pues ella prefería usar otro, ya que dijo no ser de su estilo. Le respondí que ella era libre de usar el cuaderno con el que se sintiera a gusto. 2.1. <u>Sobre las situaciones que abordaremos en el semillero:</u> Una vez entregados los cuadernos y con el objeto de propiciar el diálogo abierto con los estudiantes, les repetí (pues lo había mencionado en la convocatoria que hice en diciembre) que en el semillero abordaríamos situaciones de la vida diaria, con el objeto de que durante su solución emergieran las matemáticas. Con la intención de propiciar un diálogo que nos permitiera abrir las puertas a la tarea 1, les pedí a los estudiantes que mencionaran una situación en donde pudiesen estar vinculadas las matemáticas. Entonces, una de las estudiantes dijo que para aparcar un coche era necesario usar la inteligencia espacial, haciendo alusión explícita a las inteligencias múltiples referidas por Gardner, y afirmó que conocer los *ángulos* es necesario para ello. Le pregunté si conducía coche y contestó que no (entonces supe que en España las personas pueden obtener su licencia de conducción a partir de los 18 años). Le pregunté si creía que las personas en la práctica usan los conocimientos sobre los ángulos al momento de aparcar, o si por el contrario lo hacía de manera más *intuitiva*; entonces respondió que, aunque era un hecho intuitivo, requería de la inteligencia espacial y de la geometría. Ninguno de los otros estudiantes intervino, así que decidí presentar la tarea 01 para instarlos a participar. 3. <u>Sobre la tarea 01:</u> Para proponer la tarea 01, presenté a los estudiantes 7 envases de cartón que originalmente contenían: • Leche (2 cajas de litro) • Jugo (2 cajas de litro y 1 de 2 litros) • Caldo (2 cajas de litro) Luego, le entregué a cada uno el trozo de papel con las preguntas que proponía abordar, y distribuí entre el grupo 3 reglas impresas de 30 cm cada una. 3.1. <u>Acerca de las preguntas formuladas:</u> Habiendo aclarado que para analizar las semejanzas y diferencias entre las cajas no tendríamos en cuentas los asuntos estéticos -como el color-, emergieron las siguientes ideas: • La forma de las cajas, en donde intervinieron principalmente términos como *rectangular* y *ortoedro.* • El tamaño y capacidad de las cajas. Esto suscitó la discusión acerca de la relación entre el tamaño de la caja de jugo con capacidad para 2 litros, y la de 1 litro, lo que permitió formular el cuestionamiento ¿cuál	Posiblemente se hubiera puesto de relieve algo interesante. 2. Con relación al horario del semillero, es necesario optimizar el tiempo de trabajo y además acordar definitivamente con los estudiantes que las sesiones sean de 1h30m, pues en la primera de estas, siento que el tiempo de trabajo fue muy corto. De hecho, dos equipos no lograron exponer en detalle sus ideas sobre la tarea 01. 2.1. La idea sobre el uso de ángulos al momento de aparcar el coche tiene un tinte clásico del discurso docente, con relación al uso y presencia de las matemáticas en la vida diaria, ya que, aunque pueda ser válida, aparece un tanto forzada frente al hecho cotidiano de aparcar un coche. 3. En términos generales, las preguntas 1, 3 y 4 movilizaron el análisis por parte de los estudiantes. La pregunta 2 no propició ninguna discusión, y la 5 no se abordó. 3.1. Con base en las intervenciones de los estudiantes, infiero que: • Es necesario diseñar una pregunta que les inste a analizar profundamente la relación tamaño-forma-capacidad de los recipientes que se usan

<table>
<tr>
<td>
es la relación entre el tamaño de la caja que contiene 2 litros y el tamaño de la caja que contiene 1 litro? Para ello, les insté a comparar las longitudes de las aristas de las cajas. Esto llevó casi inmediatamente a los estudiantes a enunciar que la caja con capacidad para 2 litros no posee el doble de tamaño que aquella con capacidad para 1 litro.

A continuación, cuando les pregunté si la caja de 1 litro podría tener diferentes dimensiones (a la caja que llevé como ejemplo) y aun así tener la misma capacidad, varios respondieron que sí. Así que les insté a que presentasen un ejemplo de ello, entonces emergieron las siguientes soluciones:

Cortar la caja a la mitad (del lado más largo) y conformar así una nueva caja al unir las dos mitades resultantes. La respuesta se apoyaba en la idea de que, si la caja entera contenía 1 litro, cada mitad debería contener ½ litro, que sumados dan como resultado nuevamente 1 litro. Cabe anotar que en esta solución se propusieron dos alternativas, formar un recipiente en forma de ele (cóncava), o una que conservaba las características de la caja inicial (convexa). La nueva caja tenía dimensiones diferentes a la caja inicial.
Quitar la parte superior e inferior de la caja (la parte superior viene con una tapa de plástico) y convertirla en un cilindro. Para esta idea no se presentó ningún argumento y casi de inmediato se cambió a convertirla en un prisma de base hexagonal (término acuñado por otro de los estudiantes). La estudiante que propuso esta idea esbozó una cadena de argumentos para defenderla; primero, que la capacidad depende del área del hexágono; y segundo, que las figuras [planas] con el mismo perímetro tienen la misma área; por tanto, la capacidad de la caja va a ser igual (i.e., 1 litro)
Cortar la caja por la mitad (del lado más corto) y confirmar así una nueva caja, esta vez, poniendo consecutivamente los lados más largos. El razonamiento fue el mismo que se presentó en el primer caso.

Implícitamente, los estudiantes asumieron que se debía usar el mismo material que se usó en la caja inicial.

3.2. <u>Acerca de las tareas propuestas:</u>
Para continuar con el desarrollo de la tarea 01, les pedí a los estudiantes que, para la segunda sesión del semillero, desarrollaran su solución y demostraran que esta efectivamente hace que la nueva pueda contener 1 litro.

A partir de la solución que propuso construir un prisma de base hexagonal, le formulé a los estudiantes la pregunta:
¿Cuáles deberían ser las medidas de ese hexágono, para que el contenido de la caja sea un litro?
</td>
<td>
comercialmente para contener líquidos, ya que haberles cuestionado sobre las semejanzas y diferencias de estas, resultó muy ambiguo y se agotó rápidamente.

Haberles instado a comparar la longitud de las aristas de las cajas fue un error, ya que en ese momento condujo a una respuesta inmediata sobre la relación entre la duplicación del contenido y las medidas de las cajas, sin llevar a ningún análisis concienzudo. Afortunadamente esto no arruinó el trabajo que vino a continuación.
La posibilidad de manipular las cajas y alterarlas libremente resultó un ejercicio que implicó a todos los estudiantes, y dio lugar al momento más productivo de esta sesión.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>

Responder a las preguntas que emergieron durante la clase.

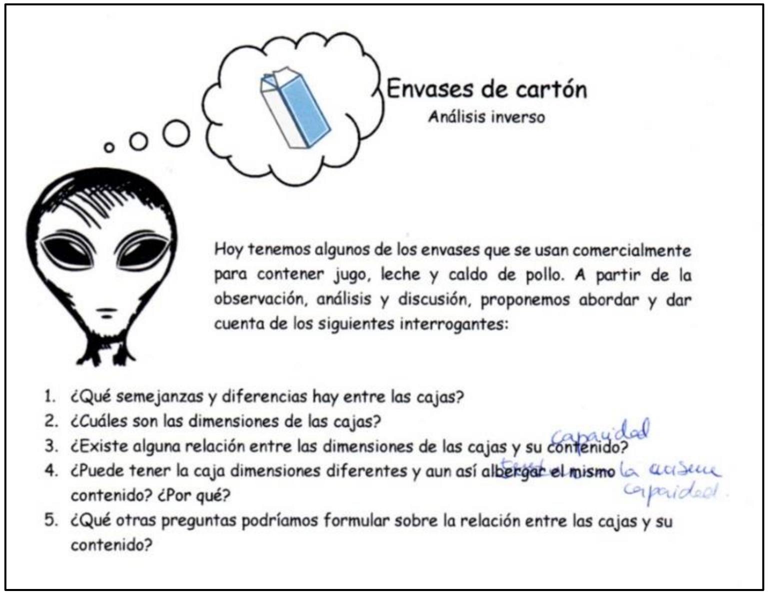
</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO

Institución	I.E.S. Menéndez Pelayo	**Fecha**	Febrero 14 del 2018	**Hora**	16:00-17:30	**Sesión**	02	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	10 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.					**Aula**	1.8 Ed. Silverio Lanza	**Videos**	V1 Feb14 2018 V2 Feb14 2018

Contextualización

Tarea 1:



Notas:

- A partir de esta sesión contamos con la cámara que nos prestaron en la UCM.
- En esta sesión se tomaron 2 videos.
- Continuamos con el desarrollo de la tarea 1.
- Desde este momento registraré las transcripciones de los diálogos que considere relevantes en el semillero, para ello, denominaré con la letra E a los estudiantes, con la letra P al profesor investigador y con la letra T a la profesora asistente, así:

- Desde E1 hasta E14 a los estudiantes (e.g., E1: Estudiante 1).
- T: Profesora asistente.
- P: Investigador.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo. Les di la bienvenida a los estudiantes y les pregunté por la tarea pendiente. A continuación, les comenté a los estudiantes que: • Probablemente las sesiones nos tomen más de una hora, pero que quienes tengan que salir a las 5 de la tarde, lo pueden hacer sin problema. • Usen los cuadernos para hacer un informe de las actividades que realicemos, cada vez que hagamos un cierre.	1. Los estudiantes estuvieron de acuerdo con el tiempo de trabajo propuesto y con la flexibilidad para salir antes de que terminase la sesión, si así lo necesitasen.

2. Recuento de la tarea 1. Recordé a los estudiantes la actividad propuesta en la primera sesión (punto 4 de la tarea 1). A propósito de ello, las propuestas que emergieron fueron: • Partir la caja a la mitad de la altura o a la mitad del ancho, y con las partes obtenidas formar una nueva caja. La consigna era pues, probar que las propuestas eran válidas.	2. Sin novedades.
3. Desarrollo de la sesión. E6 intervino y expuso una idea interesante en relación con las cajas de litro y de dos litros: E6: […] La grande no es el doble de grande que la pequeña. Es un poquito más grande, pero sí que contiene el doble de capacidad. Es como una pequeña duda. Dado que la idea expuesta por E6 me pareció interesante y con potencial para movilizar algunos conocimientos matemáticos, entonces le insté a que la expusiera con claridad. P: La duda entonces es… E6: Es aclarar cómo funciona el hecho de que la caja de dos litros no sea el doble de grande, pero que sea un poco más grande simplemente [y contiene el doble de capacidad que la caja de litro] P: ¿Qué opinan de esa duda [refiriéndose al resto de los estudiantes]? ¿Merece la pena abordar la inquietud? Luego, para precisar un poco más traduje la pregunta así: P: La pregunta es, si la entendí bien, ¿Por qué esa caja que contiene el doble de la de litro no es el doble en términos de sus dimensiones, o sea, no es el doble en todas sus dimensiones? E6: Sí. A continuación, escribí la pregunta en la pizarra: ¿Por qué la caja de dos litros NO tiene el doble de tamaño frente a la de un litro? Y formulé a los estudiantes otras preguntas. P: ¿Qué nos permite asegurar que esta caja [de dos litros] no es el doble de tamaño que la primera [de un litro]? E6: Esa es una pequeña duda. E8: Visualmente. E6: Visualmente parece el doble de grande, pero no es con certeza de que sea el doble. P: Pero… E6: Pero, para comprobarlo tendríamos que comprobar las dimensiones, tabularlas, ver si son el doble. En ese momento interviene E1 y propone tomar las medidas de la caja de litro, multiplicar por dos y comparar el resultado con las medidas de la caja de dos litros. A esto le llama hacerlo “matemáticamente”.	3. Sobre el desarrollo de la sesión: La duda expresada por E6 es muy interesante porque abre las puertas al cuestionamiento en torno a la relación entre el crecimiento lineal de las medidas del envase y cómo afecta este al crecimiento del volumen. Emerge una posible respuesta a la duda expresada por el estudiante E6.

P: ¿Alguna otra propuesta para empezar a despejar esta pregunta? Lo primero es, ¿Por qué podemos asegurar que la caja de litro no es el doble de grande que la caja de dos litros? Y aquí [señalando la pizarra] hay una estrategia. Dado que las propuestas de los estudiantes para comparar los tamaños de las cajas en relación con su capacidad apuntan a la necesidad de conocer sus dimensiones, entonces les propuse tomar dichas medidas y llevar a cabo la comprobación. Para ello suministré a los estudiantes una regla de papel por grupo. Luego de 20 minutos de trabajo grupal, le pedí a los estudiantes que cada grupo o un representante de este, explicara al resto el trabajo que realizaron para responder a la pregunta sobre el tamaño de las cajas en relación con su capacidad. (¿Por qué la caja de dos litros NO tiene el doble de tamaño frente a la de un litro?) • El primer grupo en exponer (G1) estuvo conformado por E1, E4 y E10. E1: Hemos empezado a comparar las diferentes dimensiones de las cajas. Hemos comparado la de un litro, de la uno coma cinco y la de dos. A continuación, E1 escribió en la pizarra las medidas que tomaron de las cajas, así: 1L → 1 Caja 20 * 9 * 6 = 1040 cm^3 1.5 L → 2 Caja 23 * 7* 9.5 = 1529.5 cm^3 2L → 3 Caja 24.5 * 11.5 * 7.5 = 2113.125 cm^3 El estudiante E1 expuso entonces a partir de estas dimensiones que no es necesario que se dupliquen para que también lo haga su capacidad. Entonces insté a los demás estudiantes para que interviniesen. P: ¿Qué opinan de lo que presentan los compañeros? E6: Yo quiero que me expliquen un poco el procedimiento porque no lo entiendo muy bien. Aunque E6 se refería a la notación que usaron los compañeros (i.e., 1 Caja, 2 Caja, 3 Caja), y el asunto se aclaró inmediatamente ya que ello hacía mención de la primera, segunda y tercera cajas, quise preguntar también por el procedimiento empleado. P: […] Esos números que están allá, por ejemplo, 20, 9 y 6. ¿A qué corresponden? E1: La altura, el ancho y el largo de las cajas. P: ¿y aplicaron el mismo principio para la medición de la otra caja? Es decir, ¿se corresponde la altura 20, con la altura 23 de la otra caja, con la altura 24.5 de la tercera? […] ¿Sería siempre largo, ancho y alto? E4: Aquí no [señalando las dimensiones de la caja de 1.5 litros]. P: ¿Lo que han dicho despeja la inquietud sobre el procedimiento [refiriéndose a E6]? E6: Pues yo creo que no del todo.	Emerge sobre el hecho de que la relación entre las dimensiones y la capacidad de la caja no es lineal.

P: ¿Qué faltaría? E6: Pues faltaría la relación. La relación entre… pues es evidente que no es el doble. […] Si es 20 de altura, pues no es el doble, porque el doble sería 40. P: Entonces hay una primera situación. Es evidente, si analizamos la primera caja y la tercera caja, […] que veinticuatro con cinco no es el doble… habría una explicación digamos numérica de lo que está pasando ahí. ¿Vale? Pero entonces, ¿Qué queda faltando, la relación de qué tipo? E10: De las dimensiones. E6: Yo creo que es la relación en… en la medida de cuanto tiene que aumentar cada dimensión para que… para que den exactamente dos litros, pero el problema es encontrar la explicación [sonriendo].	Necesidad de buscar una explicación.
En este momento consideré necesario conocer la opinión del resto de los estudiantes con relación a los planteamientos de E6. P: ¿Ustedes qué piensan […]? E6: ¡Claro! Pues, voy a explicar un poco mejor. Y es que si tenemos una caja no podemos, por ejemplo, aumentar de altura cinco centímetros y de ancho dos porque queramos. Tiene que haber una jerarquía entre cada relación, entre cada medida [sonriendo]. P: Esa idea me gusta. Esa idea me gusta. Es decir… pero, cuando hablas de jerarquía… a ver, yo entiendo, y todos podemos opinar. Yo entiendo por jerarquía, como que existen unas [dimensiones] de mayor importancia que otras. E6 ¡No! […] A lo mejor hay alguna fórmula, o es que hay alguna… alguna operación en específico para hacer esto.	La necesidad de buscar una fórmula y usarla como una “técnica” para resolver esta tarea.
En este momento intervino E4, integrante del grupo 1. E4: ¿Puedo decir algo? P: ¡Claro [todos rieron]! E4: Esta sería la fórmula que dices [mientras le enseñaba a E6 esta expresión $L_A^1 * L_L^1 * L_H^1 = \frac{L_A^1 * L_L^1 * L_H^1}{n}$ que había escrito en la pizarra]. La longitud de la altura cuando [la caja] tiene un litro, por la longitud de largo, por la de la altura [refiriéndose al ancho], tiene que ser igual a la longitud de las medidas entre el número de litros que tiene [todos rieron asombrados luego de un breve momento de silencio]. E6: ¿Puedes volver a explicarlo un poco más?	Esta idea sugiere el uso de la fórmula como un modelo algebraico.
En ese momento intervengo para hacer énfasis en la pregunta de E6 y en la respuesta de E4, quien ha concebido una fórmula para dar respuesta a dicha pregunta. P: ¿Cómo lo probamos? E4: Pues dividiendo esto [señalando las dimensiones de la caja de dos litros] entre dos litros que tiene, tiene dar un litro.	

E8: ¡Ah, sí, claro! E4: Dos mil entre dos, tiene que dar mil. P: ¿Y si yo quiero que la caja… tenga… cuatro litros? E4: Pues aquí sería un cuatro [señalando n en la fórmula] y aquí pones las medidas [señalando las variables que hay sobre n], siempre y cuando… E10: Pero ¿es la caja o hallar sus dimensiones? P: Entiendo que estamos hablando de cuáles dimensiones debe tener la caja. E6: Claro, pero si trabajamos en una [caja] que no tengamos la posibilidad de hallar las dimensiones. Porque, sí que podemos averiguar con la regla, o dividir las dimensiones. Siempre vamos a lograr de manera matemática el volumen o la capacidad. P: ¿Es claro lo que está pasando con esta fórmula? E6: sí. P: Si está claro, obviamos y seguimos. Entonces para invitar que los estudiantes comenzaran a analizar la formula, pregunté: P: ¿Por qué la longitud del ancho, largo y altura deben multiplicarse? Entonces E4 esbozó un ortoedro en la pizarra, indicando que se debían multiplicar sus lados. E6: Esa es la fórmula del volumen del ortoedro. P: ¿Todos de acuerdo? O sea que básicamente al multiplicar esas tres dimensiones es [calcular] un volumen. Si yo tengo el volumen […] y lo divido sobre una constante n. n en cualquier número… E4: el número de litros que quieras poner. Si por ejemplo estas dimensiones son de una caja de cuatro litros [señalando la fórmula], pues tienes que dividir entre cuatro. P: ¿Seguros? […] Tendríamos lo que está pasando allá con esas medidas. Por ejemplo, aplicarlo con la [caja] de uno punto cinco litros. Entonces E6 intervino preguntando: E6: Yo lo que consigo entender es que siempre que consigamos por ejemplo cuatro mil centímetros cúbicos, cuatro litros, si lo dividimos entre cuatro vamos de repente a conseguir la misma relación. Es decir, que, si nosotros multiplicamos las medidas para averiguar la capacidad de una caja de cuatro litros, que son cuatro mil centímetros cúbicos, entre cuatro, vamos a conseguir siempre que es uno. P: Entones, esta fórmula… ¿Qué me está diciendo? O sea, ¿para qué me sirve finalmente? E6: Yo lo que llego a entender es que siempre me dice que es cuatro veces más grande. Que es el doble. Que es el triple.	 La intervención de E6 es interesante porque abre la posibilidad de un trabajo donde no se cuenta con una caja físicamente, y por tanto es necesario evaluar las dimensiones que sirven para que la relación contenida en la fórmula se cumpla.

P: Pero, las medidas que aparecen… […] La fórmula me está diciendo cuán grande o cuantas veces es más larga esa dimensión frente a la de litro. O sea, ¿eso me está diciendo la fórmula? Lo pregunto porque yo también creo percibir que, si yo tengo, como aparece allá, 1529.5 cm^3, y pues lo divido en uno punto cinco. […] ¿Qué obtendría?
E6: Pues obtendríamos… mil. Es como dividir prácticamente lo que has aumentado, ya que no divides entre un número diferente, sino que por ejemplo si tienes las medidas de una caja… el volumen de una caja de uno con cinco litros y lo divides en uno con cinco, aumenta siempre.
P: El cociente que encuentro allí entonces es… ¿de qué tipo? ¿Qué le ocurre a ese cociente siempre?
E6: Siempre vuelve a mil. Siempre que aumente en ambas.
P: Entonces, ¿Qué me está diciendo esa fórmula finalmente chicos?
E4: Que hay muchas formas de crear un recipiente con dos litros o con el número de litros que quiero.
P: ¿Qué opinan ustedes [refiriéndose al resto de estudiantes]?
E6: Yo tengo el presentimiento que hay algo más de la fórmula […]

Retomando la última idea expuesta por E4, pregunté:
P: ¿La fórmula me dice cuáles con esas formas [de crear la caja]?
E4: No.
E10: Bueno, hay que saber las medias.
P: ¿Qué tendría…?
E4: Si sabes dos, puedes calcular la tercera.
P: ¿Y si conozca una?
E4: Las otras dos pueden variar.
P: ¿Pero es posible que ocurra? Si conozco solo una, aunque las otras dos varíen, ¿puedo encontrar el valor de esas otras dos?
E4: Sí, puede.
P: ¿Y si no conozco ninguna? ¿Puedo encontrar…?
E4: Puedes darle valores.
E10: ¡Ya eso, ya sería probar [Sonriendo]!
P: Pero, ese probar, implicaría que yo tenga que hacer, ¿cuántos intentos?

Con esta última pregunta presenté la idea de que en la práctica esos intentos implicarían el uso y posible pérdida de materiales en la construcción de una caja.

P: ¿En qué consiste ese probar?
E4: Matemáticas… hacer matemáticas, ¿no?

En este momento decidí retomar la pregunta inicial.
P: […] ¿Por qué no es cierto eso de que la caja que contiene el doble no mide el doble en términos del tamaño?

[…] E10: ¿El doble a la hora de altura o a la hora de altura y ancho a la vez? P: Me refiero al doble en términos de la capacidad y de las dimensiones de cualquier manera. ¿Qué ocurre en esa relación? Está claro […] que el doble en términos del contenido no implica, y lo vemos aquí numéricamente, el doble en términos de lo lineal, en términos de las dimensiones. En eso creo que podemos estar más o menos de acuerdo, pero hay una pregunta de fondo que posiblemente hoy no la respondamos: ¿[…] qué me permite garantizar que toda vez que yo duplique las medidas de la caja, el contenido, en términos de la capacidad, no se va a duplicar? ¡Es más, ahí va a pasar algo interesante! ¿Por qué eso no ocurre? A ver chicos, Esto [señalando la pizarra] es una forma de demostrar que no sucede, pero es un caso particular. Yo podría preguntarme, qué pasa con la de tres respecto a la de uno, o la de cinco respecto a la de uno, o la de cuatro respecto a la de dos, en términos de litros. Qué me permitiría decir, para todos los casos posibles en el universo [risas] de las cajas que contienen jugo o leche. Que me permitiría decir: ¡no, no hagamos eso, porque si suplicamos las dimensiones el contenido no se va a duplicar, sino que le va a pasar esto! P: La fórmula, ¡de donde la obtuviste [refiriéndose a E4]? E4: Pensándolo. A continuación, pedía a E4 que explicase un poco el significado de las letras usadas en la fórmula, porque vi la necesidad de aclarar que los superíndices usados no son exponentes. Antes de la siguiente exposición E11 intervino, peguntando: E11: Yo pienso que hacen los botes estos [refiriéndose a los recipientes que usamos en esta sesión] aproximando si da más o da menos. P: Vamos a ampliar la explicación, porque tengo varias dudas. Si da más o da menos… ¿cómo así? E11: A mí, por ejemplo, yo he calculado los estos [volúmenes] y no me dan igual que a ellos [los integrantes del grupo 1]. Y, si se hace la altura de un litro […] da más de… de lo que tendría que está dentro del bote. P: A ver si lo entendí. Al tomar las medidas de las dimensiones de la caja […] han corroborado que a esa caja le cabe más de lo que dice ahí. ¿Es eso? E12: A esta le cabe menos [señalando un envase octaédrico de litro, que ellos llevaron a esta sesión]. P: O sea que nos están robando [risas generalizadas]. Es decir que, al haber tomado las medidas, ustedes notaron que a una caja le cabe menos de lo que dice contener, y a la otra… E12: Más. P: Y, ¿esta es de un litro [señalando la caja que llevaron]? E12: Supuestamente. P: ¿Nos quieren mostrar [refiriéndose a los estudiantes del grupo 2?	Con esta última intervención quise dejar claro que la respuesta a la pregunta inicial requiere de un proceso continuado de trabajo.

- El segundo grupo en exponer (G2) estuvo conformado por E11, E12, E8 y E14.

El estudiante E11 escribió en la pizarra los cálculos que realizó con sus compañeros. En este equipo tomaron las dimensiones de dos cajas de litro, una de litro y medio, y una de dos litros. E11 hizo notar el hecho de que, aunque las dos cajas de litro decían tener la misma capacidad, sus medidas eran diferentes; además, que en todos los casos el volumen de las cajas superaba la capacidad que decían contener.

1L $\rightarrow$ 20.7 * 7.2 * 7.5 = 1117 [cm^3]
1L $\rightarrow$ 20 * 9.3 * 6 = 1116 [cm^3]
1.5 L $\rightarrow$ 23.2 * 9.7 * 7.2 = 1620 [cm^3]
2L $\rightarrow$ 24.5 * 11.8 * 7.5 = 2168 [cm^3]

P: ¿Qué opinan? [dirigiéndose a todo el grupo].
E10: Que puede ser los fabricantes no lo llenen hasta el tope [el recipiente], sino un poco menos.
P: ¿Por qué sucederá eso?
E12: Porque si no se riega [sonriendo].
E6: supongo que es para que no haya accidentes.

A partir de la intervención de E6 intenté dirigir el análisis hacia el hecho de que algunos líquidos pueden contener gas y otros no, ya que eso podría incidir sobre el hecho de que los recipientes no son llenados hasta el tope, pero de inmediato E6 volvió a intervenir:

E6: yo tengo una idea, y es que ahora que me estoy dando cuenta, y es que ellos [los integrantes del grupo 2] cuando han hecho los cálculos de las dimensiones y les daba un poco más de un litro. A lo mejor es que hasta dónde llega el líquido sí es un litro, pero a lo mejor la caja tiene un poco más.
E13: si ves una caja, pon de un litro, es más grande, aunque el líquido llegue a un litro y quede un hueco por llenarse hasta el final. Luego hay otra caja que es más pequeñita y la llenas hasta… es más pequeña que la otra caja, y la llenas a tope aun litro entero… pues no sé, creo que llama más la atención comprar el más grande que el más pequeño. Justamente crees que tiene más contenido el más grande, que el más pequeño.
P: aquí hay un asunto bien interesante, y que probablemente escape a los análisis matemáticos. […] Eso ya toca otros terrenos y es…
E12: ¡Marketing!
P: es marketing. O sea, yo voy al supermercado, y como usuario veo la caja de papitas… ¡gigantesca! Y veo la otra un poco más pequeña, y eventualmente si son al mismo precio uno opta por la grande.
E11: pero, cuando, por ejemplo, tú vas a un supermercado a comparar, tú no sabes el contenido que tienes dentro hasta que no la abres o abres ese… envase.
P: ¿Qué opinan? [dirigiéndose a todo el grupo]. Es posible conocer el contenido antes de destapar el…
E1: ¡no la llenan hasta arriba!
E12: lo dicen, pero tal vez no sea eso.

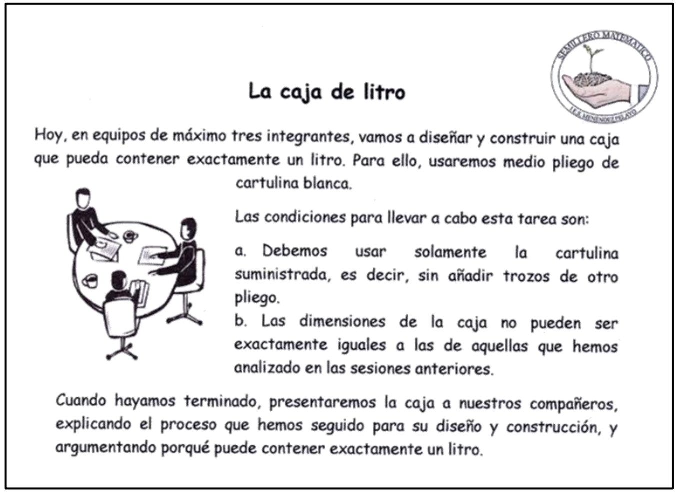
P: ¿lo dicen o no lo dicen? E12: sí, pero tal vez no sea el que es. P: por ejemplo, esa caja qué dice. E10: un litro. A manera de cierre, comenté que tanto el primero como el segundo grupo multiplicaron los valores de las medidas obtenidas para calcular el volumen de los envases analizados. Luego, me dirigí al tercer grupo y les pregunté por lo que habían hecho. E6: […] Estamos… con lo que dije el otro día [la sesión anterior], de inversamente proporcional… aunque ahora estoy viendo que a lo mejor es un poco diferente. Pues era que, si queríamos crear un bote de zumo que sea de doble capacidad, pero no doble tamaño, es porque a lo mejor tendía una relación entre el crecimiento o el aumento de una dimensión, pero la reducción de otra. P: pues que te parece que con esa idea nos vamos a ir hoy, pero vamos a empezar a trabajar más rigurosamente. Y es lo siguiente: todo lo que ustedes han venido haciendo hoy, creo yo que apunta hacia lo que estás diciendo. Al final le propuse a los estudiantes para el próximo encuentro: construir una caja que pueda contener exactamente un litro. Para ello, les proporcioné un trozo de cartulina a cada grupo. Las dimensiones, la forma y el aspecto estético de esta se elegirán libremente. La condición es que no tenga las mismas dimensiones que las cajas que hemos usado para el análisis. Al respecto de ello les insté a que se preguntaran por cuál es la mejor caja. Ya había entregado las piezas de cartulina, pero la profesora Nieves sugirió que como los estudiantes estaban en época de exámenes, era mejor que la caja la hicieran en el espacio del semillero y que ella podría guardar la cartulina hasta la próxima sesión. Además, se comprometió a llevar tijeras para dicha sesión y lo que hiciera falta para construir las cajas.	
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • La exposición del tercer grupo.	

DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO

Institución	I.E.S. Menéndez Pelayo	**Fecha**	Febrero 21 del 2018	**Hora**	16:00-17:30	**Sesión**	03	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	9 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.					**Aula**	Biblioteca	**Vídeo**	V1 Feb 21 2018 V2 Feb 21 2018

Contextualización

Tarea 2:



La caja de litro

Hoy, en equipos de máximo tres integrantes, vamos a diseñar y construir una caja que pueda contener exactamente un litro. Para ello, usaremos medio pliego de cartulina blanca.

Las condiciones para llevar a cabo esta tarea son:

a. Debemos usar solamente la cartulina suministrada, es decir, sin añadir trozos de otro pliego.

b. Las dimensiones de la caja no pueden ser exactamente iguales a las de aquellas que hemos analizado en las sesiones anteriores.

Cuando hayamos terminado, presentaremos la caja a nuestros compañeros, explicando el proceso que hemos seguido para su diseño y construcción, y argumentando porqué puede contener exactamente un litro.

Notas:

- En esta sesión se tomaron 2 videos.
- Iniciamos con la tarea 2.
- Antes de la llegada de los estudiantes, ya habíamos dispuesto en cada mesa un trozo de cartulina (formato A2, de 42 cm x 59.4 cm), una calculadora, unas tijeras, una escuadra y pegamento.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo. Les di la bienvenida a los estudiantes, chequeé la lista de asistencia e hicimos un breve recuento de lo que hemos realizado hasta ahora. Es decir: • Analizamos algunas “cajas” (envases), con capacidad para uno o dos litros, que se usan a nivel comercial para envasar líquidos. • Estudiamos la relación entre las dimensiones y la capacidad de los envases. • Realizamos algunos cálculos necesarios para que los envases con forma de paralelepípedo pudieran contener un litro. • Entregué a cada uno de los estudiantes una hoja con las consignas propuestas en la tarea 2.	Es importante tener en cuenta que esta tarea es abierta e inversa. Abierta en tanto que son los estudiantes quienes deben elegir la forma del envase, y luego calcular sus medidas teniendo en cuenta que puede haber un conjunto infinito de valores para dichas medidas; e inversa, puesto que habitualmente es a partir de las medidas que los estudiantes suelen calcular el volumen o capacidad de algunos cuerpos geométricos en la escuela.

2. Desarrollo de la actividad.

Una vez explicadas las condiciones dadas en las consignas de la segunda tarea, los alumnos, en grupos de tres integrantes, comenzaron a trabajar en el diseño y construcción de un envase con capacidad para un litro.

Importante: mientras explicaba las consignas de la tarea 2, noté que el estudiante E6 tenía una hoja en la aparecía un conjunto de fórmulas para el cálculo de áreas y de volúmenes de algunas figuras y cuerpos geométricos. Le pregunté cómo la había obtenido y me respondió que es la hoja que habitualmente usan para trabajar en la clase de geometría.

Luego de pasar por cada uno de los grupos, preguntando qué proceso seguirían para el diseño y construcción del envase, todos coincidieron en que era necesario, primero, elegir la forma y luego, calcular las medidas.

En el grupo 1, conformado por los estudiantes E2, E3 y E4:

P: ¿Ya tienen alguna forma para el envase?
Todos: Sí.
P: ¿Qué forma?
E3: cilíndrica.
E2: una forma cilíndrica, para que sea cómoda para cogerla y esas cosas. […] Imagínate un cilindro alto… en la mitad hacerlo para que sea cómodo para cogerlo, con unas abolladuras.
P: van a tener en cuentas esas…
E3: vamos a intentarlo porque ya es difícil…

Tras preguntar por el tipo de trazos que era necesario hacer sobre la cartulina, según la forma del envase elegido, los estudiantes respondieron:

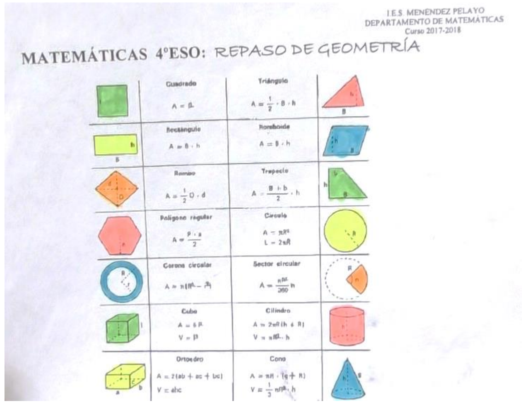
E3: un círculo para la base, de arriba y de abajo y luego pues la forma…
E2: y luego se corta un cuadrado para poder enrollarlo.

Entonces pedí a todos los estudiantes que escribiesen, en su cuaderno, todas la ideas y cálculos que utilizasen en el proceso de diseño y construcción del envase.

En el grupo 2, conformado por los estudiantes E5, E6 y E7, eligieron un envase con forma de tetraedro regular:

E6: nosotros ya hemos encontrado una buena longitud para el lado del triángulo, que sería 20.4 cm, que da exactamente 1000… 1000.5 centímetros cúbicos.
E5: el área total sería esto (señalando algunos cálculos sobre su cuaderno) y no creo que de…

Esto es muy muy interesante ya que este conjunto de "fórmulas" podría convertirse en una restricción institucional, para el estudiante, en el trabajo geométrico. De hecho, todos los estudiantes, porque están habituados a ello en las clases de geometría del instituto, llevaron consigo dicha hoja.



<table>
<tr>
<td>E6: claro, 720 centímetros cuadrados no se si…
P: esto está muy interesante. Ustedes necesitan 720 centímetros cuadrados para…
E6: para hacer el tetraedro.

En el grupo 3, conformado por los estudiantes E9, E10 y E11, eligieron un envase con forma de semiesfera. Así que les pedí que pensaran en los trazos que deben hacer sobre la cartulina para poder obtener dicha forma para el envase. Sin embargo, como ello lograban encontrar una solución, se presentó la oportunidad para decir a los estudiantes que, si así lo estimaban necesario, ellos podrían llevar al semillero los libros y cualquier otra fuente de información que considerasen necesario para consultar información que les ayudase a llevar a cabo las tareas propuestas.

Importante: en un momento, durante el desarrollo de la tarea, E4, de grupo 1 dijo:
E4: ¡Ah! No hemos tenido en cuenta los bordes de más para…
E2: para doblar, ¡es verdad!

Luego, se generó una situación muy interesante en el grupo 2, cuando los estudiantes estaban intentando trazar unos de los triángulos equiláteros que forman parte de las superficies del envase tetraédrico.
E5: ¡profe! Tenemos un pequeño problema. El compás solo se alarga 20 centímetros [refiriéndose a la distancia entre sus puntas] y nos falta 4…
E6: nos falta cuatro, cero con cuatro y no tenemos uno más grande [refiriéndose al compás].
P: ¿Por qué necesitan el compás?
E5: para hacer el triángulo.
E6: para trazar el punto donde se van a unir ambos lados que salen de la base del triángulo.
P: Entiendo. Loque necesitan es trazar un arco.
Todos: Sí.
P: ¿Qué otra herramienta podríamos usar para sustituir el compás para trazar el triángulo?
E5: un cordel.

En ese momento les hice notar que lo importante es que el cordel no fuese elástico. Sin embargo, tras revisar, comprobaron que los cordeles de los zapatos eran elásticos. Así que les propuse explorar otra solución. En ese momento E5 propuso calcular la medida del ángulo formado por los lados del triángulo, que se levantan sobre la base y que ya habían trazado de 20.4 cm.

P: ¿tenemos una forma de medir ángulos?
E5: ¿un medidor?
P: Sí.
E6: un transportador de ángulos.
E5: pero, tenemos que hallar el ángulo.</td>
<td>Este cuestionamiento de los estudiantes sobre si la cantidad de material sería suficiente para construir el envase es muy interesante, ya que estaban razonando sobre la forma de la plantilla que sería necesario trazar para poder construir el envase en relación con la forma del trozo de cartulina.

Esto es muy interesante, porque quiere decir que este tipo de cuestionamientos pueden surgir en una tarea de esta naturaleza, sin que les sean dadas a los estudiantes las plantillas, con pestañas prestablecidas, para que puedan ensamblar determinados modelos geométricos.</td>
</tr>
</table>

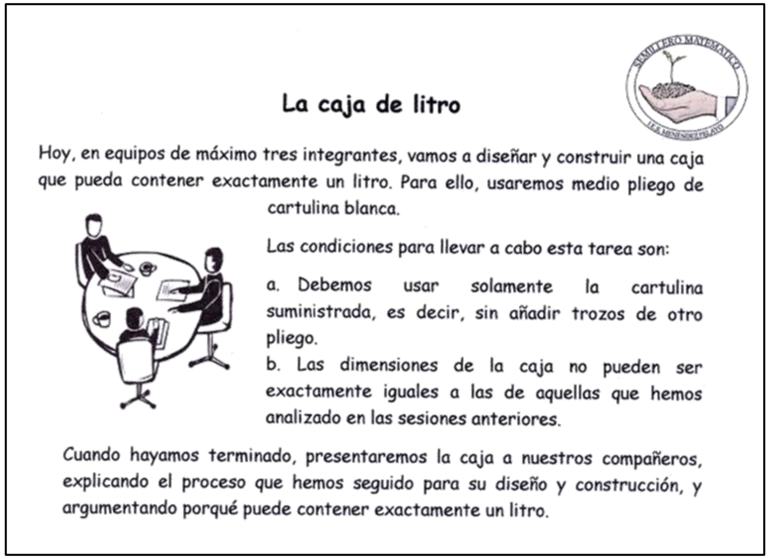
P: ese ángulo, ¿Qué media tiene? E6: 60º, todos deben tener 60º. Porque sesenta por tres es 180. En ese momento pregunté si podríamos conocer el valor del tercer ángulo de un triángulo, si conociéramos la medida de los otros dos ángulos. E6: ¿mediante una razón trigonométrica? E5: No. Las razones trigonométricas son para tangentes y senos… P: ¿pero, para qué sirven? E5: Para cuando tienes la arista, pero tienes que tener un ángulo de 90 grados y eso… En ese momento, razonando sobre el bosquejo de un triángulo equilátero, impulsé a los estudiantes a que se cuestionaran sobre las medidas de los ángulos del triángulo que se formaba al trazar una de las alturas de dicho triangulo. A partir de dichos cuestionamientos, los estudiantes consideraron utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo equilátero, puesto que dicha altura contiene el punto en el que convergen los otros dos lados.	
En el grupo 3, los estudiantes decidieron cambiar la forma del envase y se decantaron por un octaedro regular. Sin embargo, para calcular la medida de su arista y teniendo como punto de partida la fórmula para calcular su volumen, comenzaron a atribuir valores a dicha arista a fin de que el volumen se fuese acercando a 1000 centímetros cúbicos. En este caso, impulsé a los estudiantes que pensasen en el desarrollo plano de la forma del envase, a fin de que pudiesen avanzar. Al regresar al grupo 2, noté que los estudiantes no habían logrado trazar la altura del triángulo equilátero, por lo que estaban intentando trazar dos arcos con el cordel de uno de los zapatos. Cuando indagué por ello, encontré que el problema al que se enfrentaban ahora era la imposibilidad de trazar dicha altura de manera perpendicular a la base del triángulo. Cabe anotar que ellos ya habían calculado la medida de la altura. E5: hemos hecho el teorema de Pitágoras y nos has dado 17.666… P: ¿entonces, porque no trazaron esta perpendicular [la altura del triángulo] con esta longitud [la medida calculada]? E6: es porque no tenemos algo como [señalando la cuadricula de la hora de su cuaderno]… lo podemos hacer así o así. Por tanto, los insté a revisar si era posible trazar dicha perpendicular con alguna de las herramientas con las que contaban en la mesa.	Es muy interesante ver que, como los estudiantes no lograron definir el desarrollo plano de la semiesfera, que inicialmente habían elegido, decidieron partir de una de las formas preestablecidas en su hoja de fórmulas. De hecho, la elección de la forma, en todos los casos, estuvo influenciada por dicha información.

E6: la escuadra y el cartabón. En ese momento tomé la escuadra que tenían allí e indiqué que podríamos estar seguros de algunos de sus ángulos, por lo menos del ángulo de 90º. Por tanto, hice notar que no era necesario contar con una hoja cuadriculada para poder trazar una recta perpendicular. Cabe anotar que esta problemática se ha generado porque, además, los estudiantes no contaban con un transportados de ángulos. Mas adelante, cuando pasé por la mesa de trabajo del grupo 1, vi que ya tenían un modelo del envase con forma de cilindro, así que les pregunté: P: ¿qué nos permite asegurar que en este litro puede caber exactamente un litro? Entonces los estudiantes los estudiantes argumentaron que eligieron para la altura una medida de 30 centímetros, pues así sería más cómodo al momento de coger el envase. Entonces les pregunté cómo habían deducido que, al fijar esa medida para la altura, el “agarre” [diámetro del cilindro] sería “más” cómodo.	En ese momento la profesora titular del curso fue en búsqueda de un transportador de ángulos, por lo que indiqué a los estudiantes que también era posible usar dicha herramienta. Sin embargo, les insté a que considerasen la posibilidad de seguir adelante sin el uso de esta herramienta porque considero que esta condición puede propiciar un trabajo de modelización más rico.
E2: si tuviésemos una altura más pequeña, dedujimos que sería mucho más ancho. Entonces sería un poquito más incómodo. Entonces, una altura treinta, que es medianamente decente… P: ¿esa deducción tiene relación con este cálculo [señalando el cuaderno del estudiante E4] o fue algo más intuitivo? Todos: más intuitivo.	Está claro que la elección no obedeció a un análisis a priori que implicase la variación entre la altura del cilindro y su radio.
P: ¿de dónde obtuvieron esta ecuación? [señalando la ecuación $V=\pi r^2 h$ que estaba escrita en el cuaderno de E4] E4: pues del área del círculo por la altura. Como los integrantes de este equipo debían salir, les solicité que se preparasen para que presentaran su trabajo, ante el resto de los compañeros, en la próxima sesión.	Los estudiantes sustituyeron h por 30 y calcularon el valor del radio del cilindro. Para ello, aproximaron el valor de π a 3.141592
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • En la próxima sesión continuaremos con el diseño y construcción del envase y presentaremos a los compañeros nuestro trabajo.	

DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO									
Institución	I.E.S. Menéndez Pelayo	**Fecha**	Febrero 28 del 2018	**Hora**	16:00-17:30	**Sesión**	04	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	11 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.					**Aula**	1.8 Ed. Silverio Lanza	**Vídeo**	V1 Feb 28 2018 V2 Feb 28 2018

Contextualización

Tarea 2:


La caja de litro

Hoy, en equipos de máximo tres integrantes, vamos a diseñar y construir una caja que pueda contener exactamente un litro. Para ello, usaremos medio pliego de cartulina blanca.

Las condiciones para llevar a cabo esta tarea son:

a. Debemos usar solamente la cartulina suministrada, es decir, sin añadir trozos de otro pliego.
b. Las dimensiones de la caja no pueden ser exactamente iguales a las de aquellas que hemos analizado en las sesiones anteriores.

Cuando hayamos terminado, presentaremos la caja a nuestros compañeros, explicando el proceso que hemos seguido para su diseño y construcción, y argumentando porqué puede contener exactamente un litro.

Notas:

- En esta sesión se tomaron 2 videos.
- Continuamos con la tarea 2.
- Presentación de los envases diseñados.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Comencé la sesión saludando a los estudiantes y recordando las consignas del diseño y construcción del envase de litro. Indiqué, además, que para el desarrollo de esta tarea ha sido necesario definir la forma del envase y luego calcular sus medidas para poder trazarlo y construirlo en cartulina. 2. Desarrollo de la sesión. En los primeros 45 minutos los estudiantes trabajaron en la construcción del envase, ya que en la sesión anterior esta tarea no se había completado. Luego de ello, se hicieron las presentaciones de los envases indicando, en cada caso, el proceso seguido para su diseño y construcción.	

<table>
<tr>
<td>

<u>Exposiciones</u>

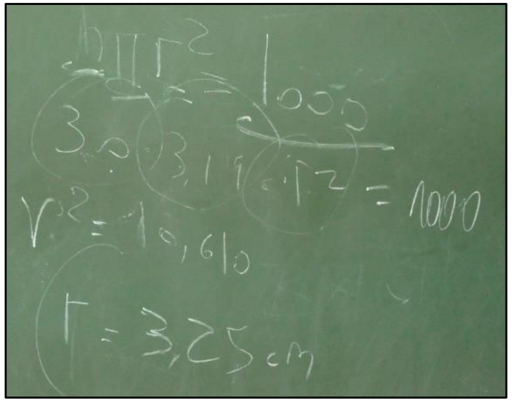
Dado que hubo algunos estudiantes que en la sesión pasada no asistieron, en esta ocasión se han unido a algunos de los grupos ya establecidos. Antes de iniciar con las presentaciones le recordé a los estudiantes que las grabaciones que se toman durante el semillero, para las cuales sus padres firmaron un consentimiento informado, se usarían solamente para el análisis de los datos de nuestra investigación y que no sería publicados en ninguna plataforma pública. Dicho esto, las consignas específicas para esta presentación fueron:
✓ Cuál forma eligieron.
✓ Porque eligieron esa forma.
✓ Demostrar que el envase diseñado y construido tiene una capacidad de un litro.

• Presentación del grupo 1, conformado por los estudiantes E1, E2, E3 y E4:
E1: hemos optado por el cilindro, por hacer una forma cómoda y porque no supone mucho trabajo realizar uno. […] lo hemos asemejado a una lata de Pringles, las patatas estas que…
E2: hemos optado por el cilindro más que nada por la comodidad a la hora de cogerlo, a la hora de utilizarlo, y porque justo hay que tener en cuenta el material que teníamos disponible para utilizar. No podíamos hacer una forma muy complicada ya que tampoco teníamos mucho material. Entonces un cilindro nos parecía la mejor opción.
P: ¿Qué debieron tener en cuenta para el trazado sobre la cartulina?
E3: la altura, el diámetro de las bases y el ancho que va a tener el cilindro.
P: ¿el desarrollo de ese cilindro, qué figuras implicó trazar?
E2: dos círculos que eran las dos bases y un rectángulo que sería el cuerpo.
P: ¿qué medidas debieron tener esas figuras?
E2: pues realmente la altura la hicimos un poco así a ojo. Como 30 pues por hacer una medida medianamente decente y luego, con la fórmula para hallar el área… el perímetro, averiguamos el diámetro, radio y todo eso.

</td>
<td>

El argumento sobre la forma por la que optaron en función de la cantidad de materia no resulta ser muy sólido puesto que, de hecho, usaron solo un poco más de la mitad de la cartulina.

</td>
</tr>
</table>

E4: lo que pensamos es que el volumen [del cilindro] que es la altura por pi por el radio al cuadrado, tenía que ser mil centímetros cúbicos. Entonces, sustituimos la altura por 30, el pi por la tecla de la calculadora y luego tuvimos que calcular el radio que nos salió 3.25 [centímetros].  Luego, indagué por el proceso seguido para calcular las medidas del rectángulo. E4: pues calculamos el diámetro [de la circunferencia] para calcular el perímetro [de esta]. Para ello, usaron la expresión $P=\pi D$, $P=6.5\pi\sim20.47$ cm. E4: entonces esto es una medida del rectángulo. P: ¿y la otra medida del rectángulo? E4: ah, esta es la altura [del cilindro].	En este caso los estudiantes han hecho un tratamiento; primero, aritmético en la medida que han atribuido un valor para la altura del cilindro; y luego, algebraico en la medida que han despejado el valor del radio, en la fórmula para calcular el volumen del cilindro.
Quise insistir en el cuestionamiento sobre la elección de la medida de la altura del cilindro, y los estudiantes dijeron: E2: Sí, porque tampoco queríamos hacerlos muy bajito, porque si no sería menos cómodo para cogerlo. E3: sería muy ancho. P: ¿se dieron a la tarea de calcular cuán ancho podría ser ese cilindro antes de construirlo o asumieron que era más ancho si la altura era menor? E3: sí, fue a ojo, la altura y vimos a ver qué tal quedaba y quedaba bien. Luego, dije que sería interesante preguntarnos cómo varía el diámetro del cilindro cuando su altura varía, sabiendo que tiene que contener un litro. De otra parte, cuando indagué por la relación entre la capacidad y el volumen del envase, lo estudiantes dijeron que un litro equivalía a mil centímetros cúbicos. Aproveché este momento para pedir a los estudiantes que tomáramos los valores obtenidos para verificar que efectivamente el envase podría contener un litro. Sin embargo, puede verificarse que $30\pi(3.25)2\sim995.4921$	Esto indica que los estudiantes tienen, de manera intuitiva, la idea de que existe una relación “funcional” entre la altura y el diámetro del cilindro. Puede ser que este tipo de tareas favorezcan el desarrollo de esa intuición para luego concretarla en una relación algebraico funcional.
E2: da así más que nada porque hemos cogido aproximaciones. E11: a simple vista no se ve. El consumidor no va a saber cuánto hay dentro del recipiente. • Presentación del grupo 2, conformado por los estudiantes E5, E6, E7 y E8: E5: nosotros lo primero que hicimos fue decidir qué forma iba a tener nuestra figura, para poder después hacer todas las fórmulas. Para ello hemos decidido hacer un tetraedro regular y por ello hemos investigado las	Aproveché la intervención de E11 para generar un pequeño debate sobre las variables matemáticas y no matemáticas que pueden intervenir en el diseño de un envase.

fórmulas que necesitábamos para ello, y lo primero que hicimos fue la fórmula del volumen. Y a partir de allí pues hicimos la fórmula de equis elevado a tres por raíz de dos sobre doce ($V=x^3\sqrt{2}/12$). E6: al principio intentamos averiguar la medida de un lado, porque… E5: exacto, lo hicimos por estándar. O sea, por tanteo, a base de prueba y error. Hicimos 21 y vimos que nos pasamos mucho, luego hicimos 20.1, 20.2… hasta llegar más o menos. Y luego nos dimos cuenta que se podía hacer con la equis y lo hicimos ya con exactitud. Y cuando ya tuvimos el lado, pues decidimos planificar en el papel cómo haríamos la forma para empezar a doblarla. A partir de allí, cuando quisimos plasmarlo en el papel [en la cartulina] pues nos costaba mucho, entonces decidimos romper en triángulos rectángulos cada uno de los triángulos que no eran rectángulos. después necesitábamos hallar la hipotenusa y para ello hicimos el teorema de Pitágoras. E6: necesitábamos hallar la altura de un triángulo [equilátero]. P: ¿Por qué fue que surgió la necesidad de hallar esa altura? E5: ¡Porque no teníamos compas! En ese momento E5 explicó que cuando quisieron construir el triángulo equilátero en la cartulina, pensaban hacerlo mediante la intersección de dos arcos a partir de uno de sus lados, pero que al principio no tenían compas y luego les prestaron uno que no era suficientemente grande. Por tanto, para efectos prácticos, no tenían compas. Cuando indagué por el valor que finalmente los estudiantes habían calculado para el lado del triángulo equilátero, dijeron: E6: nos da básicamente veinte con treinta y nueve (20.39) [centímetros] y muchísimos decimales, por lo que optamos por el redondeo porque tantos decimales en una regla precisar no podemos. P: ¿Cuál fue la aproximación que hicieron? E6: aproximadamente veinte con cuatro [centímetros] y es el que utilizamos para cada uno de los lados [del triángulo equilátero]. Cuando pregunté por aquello que debieron tener en cuenta durante el diseñado y ensamblado el envase, respondieron: E5: no tuvimos en cuenta ni la comodidad, ni la capacidad de vacío [refiriéndose a un orificio de entrada del contenido]. E6: por lo que hemos hecho esta figura no es más para un objetivo comercial, sino para demostrar que hay muchísima variedad de figuras en las que podemos demostrar que tienen capacidad de un litro. Cuando pregunté si hubo alguna complicación durante la realización de los cálculos matemáticos, los estudiantes dijeron: E6: No. Sabíamos que como es un triángulo equilátero, tenía los tres lados iguales. Para realizarle la atura, como es un triángulo equilátero, lo tiene más fácil trazar una recta por la mitad para hacer triángulos	Lo que hicieron los estudiantes; primero, fue utilizar la fórmula para calcular el volumen del tetraedro regular, como un programa de cálculo en la medida que fueron atribuyendo valores a equis para obtener un volumen cada vez más cercano a mil centímetros cúbicos; después; como en el grupo anterior, hicieron un tratamiento algebraico de dicha fórmula para obtener el valor de equis. Resulta interesante que, a pesar del argumento dado por E6, se decantaron por una de las formas que estaban incluidas en su listado de fórmulas para el cálculo de áreas y de volúmenes. De hecho, una en la que solo interviene una variable.

rectángulos. Como ya tendríamos la hipotenusa que sería la longitud del lado y el cateto menor que sería la mitad de ese lado, nos faltaría pues averiguar el cateto mayor. Hacer Pitágoras. Cuando pregunté, al resto de los estudiantes, si tenían alguna duda, justamente uno de los integrantes del grupo expositor dijo: E5: yo sí que tuve algunas dudas porque al ver el tamaño [del envase], no sé si mil centímetros cúbicos sería exactamente igual a un litro. P: ¿Qué debo hacer para conocer esa información? E10: internet (todos rieron). Entonces insté a os estudiantes a revisar si existe alguna manera de conocer y entender esa información, por tanto, insté a los estudiantes a buscar esa información en diferentes fuentes. En ese momento intervino la profesora titular y dijo que esas medidas están patronadas.	El objetivo era invitar a los estudiantes a que cuestionasen la información y, además, a que la buscasen y contrastasen.
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Preparar la exposición que está pendiente (grupo3). • Consultar la información sobre la relación entre un litro y mil centímetros cúbicos.	

DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO

Institución	I.E.S. Menéndez Pelayo	**Fecha**	Marzo 7 del 2018	**Hora**	16:00-17:30	**Sesión**	05	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	10 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.					**Aula**	1.8 Ed. Silverio Lanza	**Vídeo**	V1 Mar 07 2018 V2 Mar 07 2018

Contextualización

Tarea 2:

SEMILLERO MATEMATICO
I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO

La caja de litro

Hoy, en equipos de máximo tres integrantes, vamos a diseñar y construir una caja que pueda contener exactamente un litro. Para ello, usaremos medio pliego de cartulina blanca.

Las condiciones para llevar a cabo esta tarea son:

a. Debemos usar solamente la cartulina suministrada, es decir, sin añadir trozos de otro pliego.
b. Las dimensiones de la caja no pueden ser exactamente iguales a las de aquellas que hemos analizado en las sesiones anteriores.

Cuando hayamos terminado, presentaremos la caja a nuestros compañeros, explicando el proceso que hemos seguido para su diseño y construcción, y argumentando porqué puede contener exactamente un litro.

Instrucciones para la realización del primer informe:

Ahora que hemos abordado las dos primeras tareas propuesta en el semillero, vamos a escribir (en el cuaderno) un informe que responda a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles de los conocimientos matemáticos que has estudiado en la escuela crees que te han sido necesarios para resolver las dos primeras tareas? Explica, cómo y por qué los has utilizado.
- Describe alguno de los momentos en los que la búsqueda de la solución a las dos primeras tareas te haya parecido especialmente complejo. ¿Por qué te pareció complejo? ¿Qué estrategias utilizaste que te resultó difícil poner en práctica?
- ¿Qué tipo de estrategias, en general, consideras que has empleado recurrentemente durante el desarrollo de las dos primeras tareas? ¿Por qué?
- ¿Qué aprendizajes nuevos consideras que has adquirido en el semillero tras abordar las dos primeras tareas?

Notas:

- En esta sesión se tomaron 2 videos.
- Continuamos con la tarea 2.
- Presentación de los envases diseñados.
- Solicitamos la elaboración de un informe de las tareas 1 y 2.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Saludé a los estudiantes, les entregué las instrucciones para la realización del primer informe escrito sobre las tareas 1 y 2. Dado que los estudiantes del grupo 3 no habían terminado de construir su envase, propuse a los demás estudiantes avanzar en la elaboración del informe. 2. Desarrollo de la sesión. En la primera parte de la sesión, los estudiantes de los grupos 1 y 2 avanzaron en la elaboración del informe escrito. En la segunda parte, los estudiantes del grupo 3 presentaron su envase. • Presentación del grupo 3, conformado por los estudiantes E9, E10 y E11: E9: nosotros para este proyecto quisimos innovar un poco y por eso pensamos en hacer un octaedro regular. Nosotros pensamos en hacer también o un cono o una pirámide, pero como a lo mejor lo hacía gente… quisimos innivar un poco. Para hacer esto [señalando la construcción en cartulina] nos ha costado bastante, porque para unir esto hemos tardado bastante. Luego, señalando a la pizarra donde E11 estaba escribiendo la fórmula $V = \frac{l^3\sqrt{2}}{3}$, dijo que el envase no tendría exactamente un litro, sino que se pasaba unas centésimas o un poco más. Entonces, recordando que ellos, como el resto de los estudiantes, habían usado el listado de fórmulas que habitualmente en geometría, pregunté:	
P: si se trata de innovar, ¿Por qué en particular esa forma y no un tronco de pirámide, un prisma u otra? E10: porque es la que nos salían los cálculos mejor. E9: primero pensamos en números enteros y cuando vimos que se nos aproximaba un poco empezamos con decimales y, exactamente, cada lado del triángulo [equilátero] mide doce con ochenta y cinco centímetros (12.85 cm)	De nuevo, la fórmula es usada como un programa de cálculo al que se le van asignando valores aleatoriamente.
Cuando pregunté si habían intentado despejar el valor de equis en la fórmula, los estudiantes dijeron que no consideraron esa opción. De hecho, cuando enfaticé en el hecho de que el volumen del envase, según los cálculos escritos en la pizarra, fue de 1000.23 cm^3, respondieron: E9: ¡hombre, no se va a notar!	
En lo referente al proceso para la construcción del envase en cartulina, indicaron: E9: lo primero que hicimos, cuando teníamos el lado medido… yo me encargué de hacer los triángulos exactamente iguales, pero luego al unirlos vimos que no quedaba bien entonces hicimos unas bases suplementarias [refiriéndose a las pestañas para ensamblar en envase].	Los estudiantes trazaron y cortaron 8 triángulos equiláteros, congruentes, por separado. Fue por ello, por lo que al principio no consideraron las pestañas para el ensamble del envase.

<table>
<tr>
<td>Luego de ello se generó una discusión en torno al concepto de base y a las características de las formas que componen los envases que han construido los tres grupos. Entonces pregunté:

P: ¿un cuadrado es un rombo?
Todos: No.

En ese memento E5 indicó que, si se tiene un cuadrado, y este cambia de posición, entonces ahora sería un rombo. Entonces pregunté:

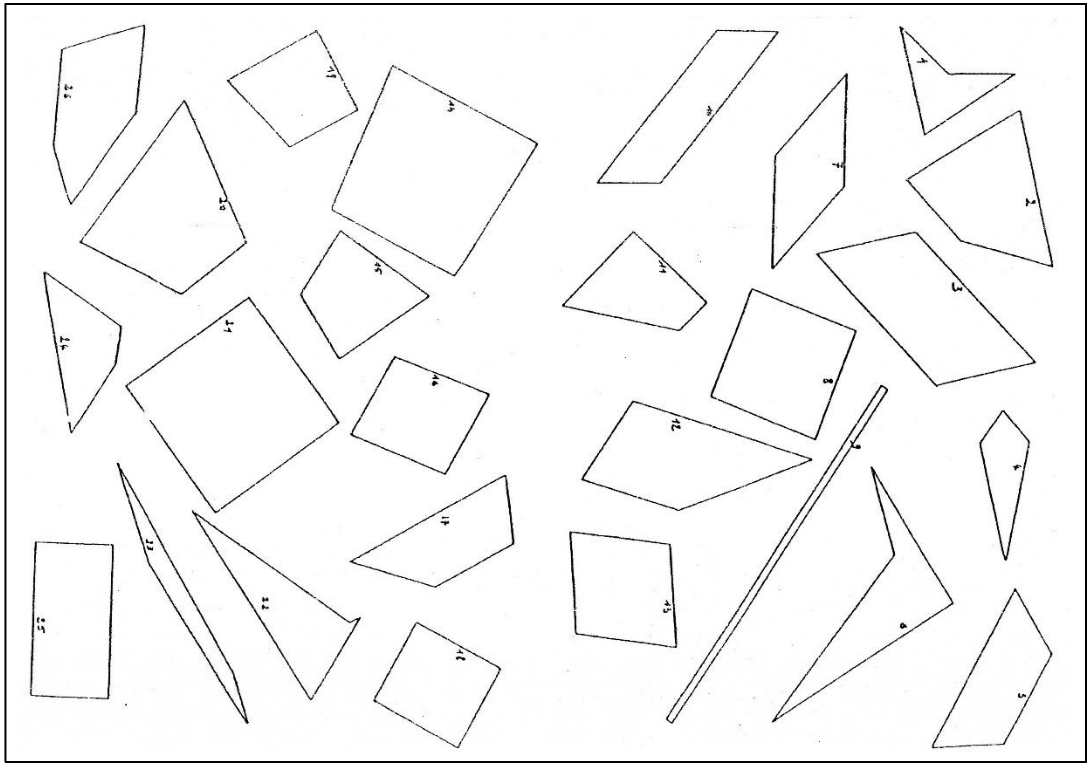
P: ¿eso quiere decir que una figura cambia su naturaleza si cambia su posición?
E6: No.
P: entonces esa afirmación tendría que ser revisada.

A partir de esto que ocurrió, he planteado a los estudiantes que consultasen las propiedades de algunas figuras geométricas.

3. Cierre.
Por último; primero, pregunté si alguien había consultado la información sobre el sistema internacional de medidas, pero solo E5 dijo haberlo hecho; y segundo, informé a los estudiantes que la próxima sesión será en dos semanas porque tengo un evento académico en la Universidad Complutense de Madrid.</td>
<td>Esta reflexión en torno a las propiedades de las caras de los envases es muy interesante porque abre las puertas al estudio de la geometría 2D a partir de la geometría 3D y, por supuesto, a la clasificación de figuras.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Consultar las propiedades de algunas figuras geométricas (a voluntad).
• Elaborar el informe escrito en el cuaderno.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="10">DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Menéndez Pelayo</td><td>Fecha</td><td>Marzo 21 del 2018</td><td>Hora</td><td>16:00-17:30</td><td>Sesión</td><td>06</td><td>Investigador</td><td>Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="5">6 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.</td><td>Aula</td><td>1.8 Ed. Silverio Lanza</td><td>Vídeo</td><td>V1 Mar 21 2018
V2 Mar 21 2018
V3 Mar 21 2018</td></tr>
<tr><th colspan="10">Contextualización</th></tr>
</table>

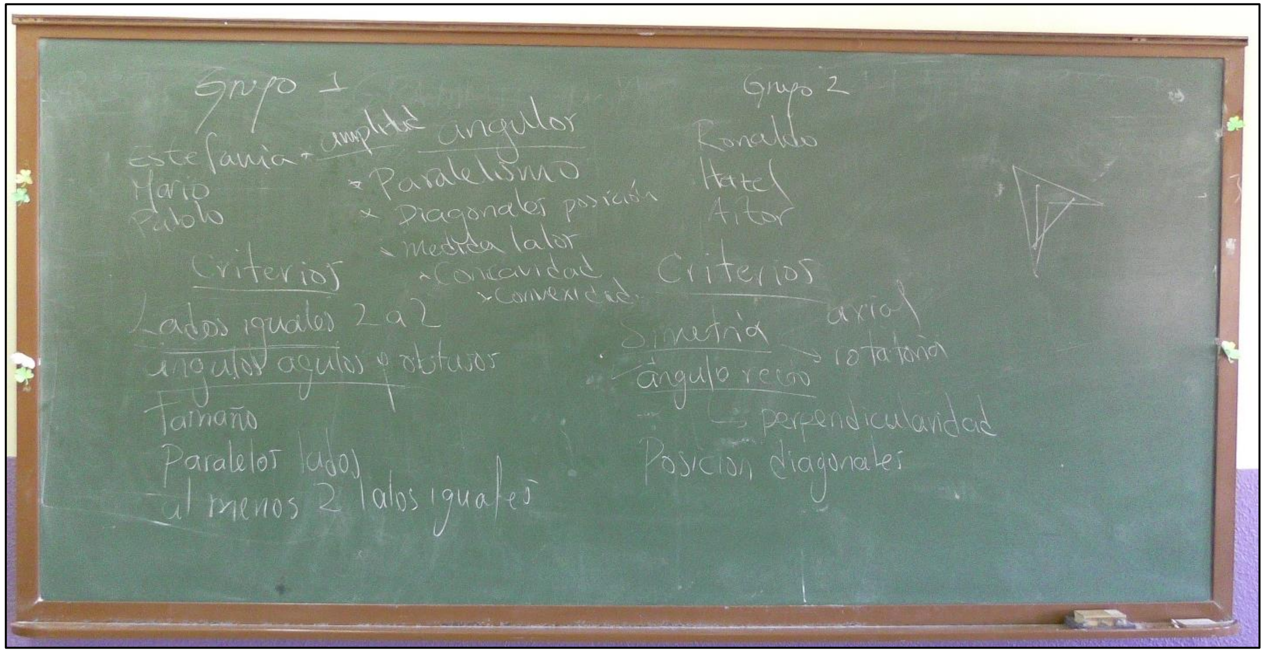
Actividad sobre cuadriláteros:



Consigna: he elegido uno de los cuadriláteros de la hoja (anexo 1). Deben intentar adivinar cuál es. Para ello, deben plantear por escrito preguntas (salvo preguntar el número) y yo responderé, sí o un no, a toda pregunta que tenga sentido. Cuando un equipo esté seguro de haberlo encontrado, deberá indicar el número de la figura. Intenten ser rápidos y plantear el mínimo número de preguntas.

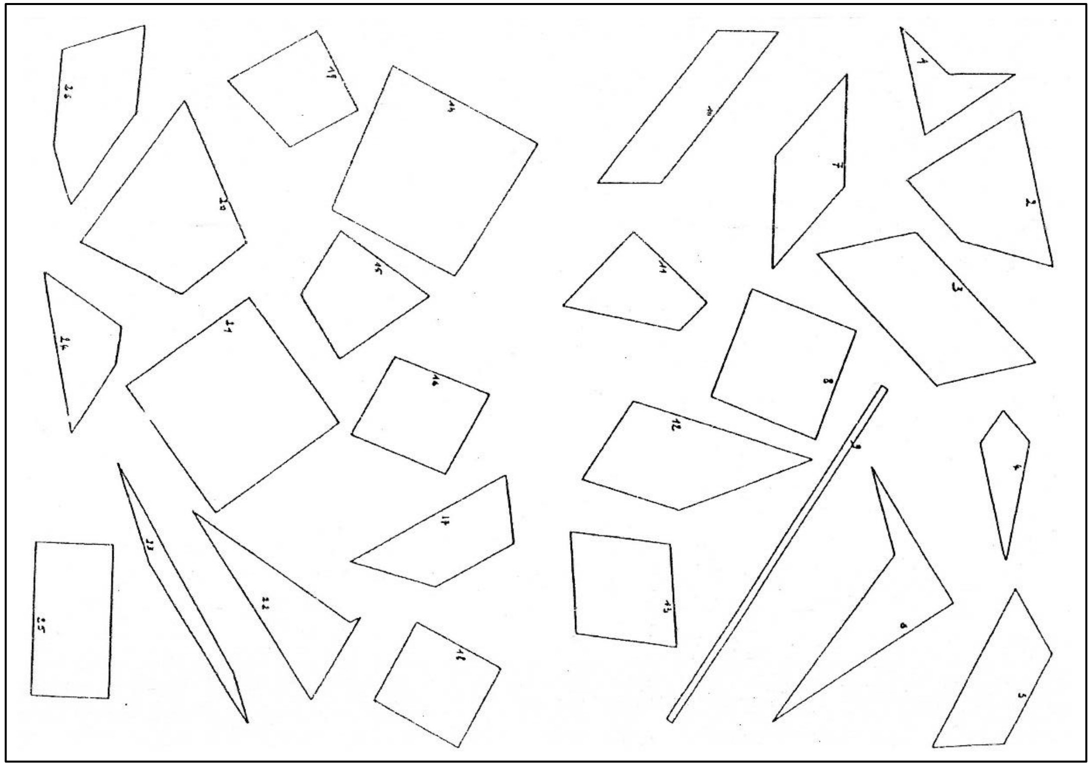
Notas:

- En esta sesión se tomaron 3 videos.
- Realizamos la actividad sobre los cuadriláteros.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Saludé a los estudiantes y les recordé que, en la sesión anterior, había surgido el cuestionamiento en torno a las formas de las caras de los envases que se habían diseñado. En concreto, sobre la idea en torno a que un rombo y un cuadrado son figuras completamente diferentes. Entonces, le dije que había preparado una actividad sobre el estudio de los cuadriláteros y expliqué la consigna de dicha actividad. 2. Desarrollo de la actividad. Los estudiantes siguieron las consignas propuestas y lograron adivinar la figura que yo había elegido. Luego de ello, recopilamos toda la información que aparecía en las preguntas formuladas por los estudiantes en la primera consigna y la escribimos en la pizarra.  Al final, le pedí a los estudiantes que dejasen sus cuadernos para revisar los informes escritos.	Esperaba un poco más de la actividad, pero creo que hay que reformularla para futuras implementaciones.
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Reflexionar sobre la actividad realizada.	

<table>
<tr><td colspan="10">DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO</td></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Menéndez Pelayo</td><td>Fecha</td><td>Abril 4 del 2018</td><td>Hora</td><td>16:00-17:30</td><td>Sesión</td><td>07</td><td>Investigador</td><td>Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="5">6 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.</td><td>Aula</td><td>1.8 Ed. Silverio Lanza</td><td>Vídeo</td><td>V1 Abr 04 2018
V2 Abr 04 2018</td></tr>
<tr><td colspan="10">Contextualización</td></tr>
</table>

Actividad sobre cuadriláteros:



Nueva consigna: ahora no se conserva más que los criterios de convexidad, paralelismo de lados, perpendicularidad de lados, igualdad de lados opuestos e igualdad de ángulos. Dicho esto:
1. Clasificar las figuras poniendo juntas aquellas que son indistinguibles ateniéndose a estos criterios.

2. Indicar para cada clase una o varias caracterizaciones suficientes con la ayuda de estos criterios. Atribuir los nombres genéricos, cuando son conocidos, a las clases o agrupamientos de clases.

Notas:
- En esta sesión se tomaron 2 videos.
- Llevamos a cabo una nueva consigna en la actividad sobre los cuadriláteros.

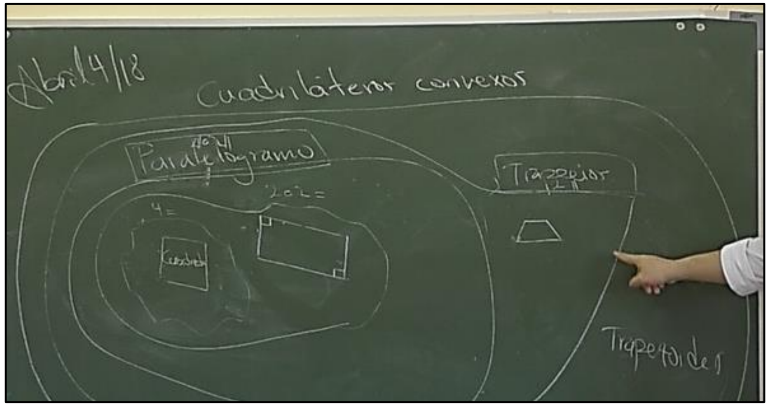
Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Saludé a los estudiantes, hice un resumen del trabajo realizado en la sesión anterior e indiqué que hoy abordaríamos una nueva consigna, teniendo en cuenta las conclusiones a las que llegamos en dicha sesión.	

<table>
<tr>
<td>2. Desarrollo de la actividad.
De los criterios establecidos en la consigna 1, pedí a los estudiantes que conservasen el paralelismo, la perpendicularidad y la igualdad de los lados, y la igualdad de los ángulos. Por tanto, dije:

P: vamos a intentar clasificar esos cuadriláteros que tenemos allí, en grupos, de tal manera que cumplan algunas o todas estas condiciones [criterios].

Antes de continuar, discutimos un poco sobre el significado de los criterios que serían aplicados para la clasificación de los cuadriláteros. Mencioné, además, que pensasen si la clasificación tendría que hacerse usando, o no, dichos criterios por separado o integrando algunos. Por último, pedí a los estudiantes que si conocían los nombres de las figuras que iban a clasificar, los escribiesen.

Luego de varios minutos, discutimos sobre el trabajo realizado y esbozamos un esquema que podría representar una manera de clasificar los cuadriláteros. Sin embargo, está claro que este es un trabajo muy amplio y que, por el momento, solo hicimos un pequeño avance.



Al final, le pedí a los estudiantes que no habían entregado el informe escrito, que lo hicieran en ese momento.</td>
<td>En esta ocasión aporté a los estudiantes algunas definiciones “institucionalizadas” sobre la definición de algunos cuadriláteros, porque consideré que ello podría guiarles, en contraste con los criterios establecidos, en la clasificación que llevarían a cabo.

Una de las ideas principales del trabajo de esta sesión, desde mi punto de vista, es que los estudiantes cuestionaron la validez de la información que suele aparecer en los libros de texto.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Reflexionar sobre la actividad realizada.</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO

<table>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Menéndez Pelayo</td><td>Fecha</td><td>Abril 11 del 2018</td><td>Hora</td><td>16:00-17:30</td><td>Sesión</td><td>08</td><td>Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.</td><td>Aula</td><td>1.8 Ed. Silverio Lanza</td><td>Vídeo</td><td>V1 Abr 11 2018
V2 Abr 11 2018</td></tr>
</table>

Contextualización

Tarea 3:

EL MEJOR ENVASE

La compañía de perfumes, *Afrodita*, ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros vamos a actuar como una empresa de consultoría, ya que la compañía *Afrodita* nos ha solicitado un informe donde respondamos de manera argumentada a la pregunta: ¿cuál es el mejor envase que se puede diseñar para dicho perfume? En consecuencia, al final del estudio deberemos redactar y entregar dicho informe como empresa consultora que somos.

Notas:

- En esta sesión se tomaron 2 videos.
- Iniciamos con la tarea 3.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Saludé a los estudiantes, hice un resumen de las conclusiones a las que habíamos llegado en la sesión anterior sobre la clasificación de los cuadriláteros; en particular, el cuestionamiento en torno a la clasificación que aparece en los libros de texto ya que suele ser confusa. Además, presenté un resumen de las dos primeras tareas llevadas a cabo en el semillero para, en esta sesión, proponer la tercera tarea que consiste en el diseño del mejor envase para un perfume. 2. Desarrollo de la actividad. Para llevar a cabo esta tarea dije a los estudiantes que tenían completa libertad para el diseño del envase. entonces surgió una pregunta interesante:	

E10: ¿Cuánta capacidad tiene que tener? P: no estamos limitados. Ustedes toman la decisión. E5: ¿Pero también cuenta estética, utilidad…? P: Ustedes son los consultores, ¿qué deben tener en cuenta? E5: ¡la estética cuenta mucho! P: cuando le demos el informe a la compañía Afrodita, debemos convencerles de que la decisión que tomamos es la mejor. Luego insté a los estudiantes a que discutiesen sobre los criterios que consideraban fundamentales para el diseño del mejor envase para un perfume, para que luego los escribiesen en la pizarra. • En el grupo 1, conformado por los estudiantes E3 y E4, los criterios elegidos fueron: - Volumen - Material - Color - Forma - Base (estabilidad) - Olor • En el grupo 2, conformado por los estudiantes E5, E6 y E7, los criterios elegidos fueron: - Estética - Tamaño - Envase - Logo - Para quién va dirigido - Color - Difusor - Olor - Forma - Precio - Tiempo - Publicidad - Material • En el grupo 3, conformado por los estudiantes E9 y E10, los criterios elegidos fueron: - Material - Estética	Estas preguntas son muy interesantes porque podrían indicar que los estudiantes no están habituados a abordar tareas de este tipo, es decir, abiertas e inversas. Con lo cual, es necesario comenzar a definir qué variable entran en juego en esta tarea.

<table>
<tr>
<td>

- Capacidad
- Forma
- Accesorios
- Apoyos (bases)
- Tamaño
- Gusto del consumidor

Una vez que los estudiantes escribieron estos criterios, les pedí que explicasen en qué consistían. El objetivo era tratar de identificar criterios comunes o determinantes para llevar a cabo esta tarea. Como producto de la discusión generada en esta etapa, hay consenso en que la **forma** y la **capacidad** resultan determinantes para poder avanzar.

Además, aproveché para mencionar que existe una guía práctica para el diseño de envases y embalajes para la unión europea que, tal vez, podría ser de utilidad para orientar el desarrollo de esta tarea. Con lo cual, revisamos algunos de los puntos que se incluyen en dicha guía ya que coincidían con varios de los criterios, que los estudiantes esgrimieron, para el diseño del envase para el perfume.

Por último, enfaticé en la importancia de la elaboración del informe que hay que redactar como empresa consultora.

</td>
<td>Esta etapa ha sido muy rica porque emergieron ideas que normalmente no se consideran en la escuela. Por ejemplo, la importancia del aspecto estético frente a los costes de producción.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>

- Pensar en un posible diseño para el envase y elaborar un primer boceto para la próxima sesión.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Menéndez Pelayo</td><td>Fecha</td><td>Abril 18 del 2018</td><td>Hora</td><td>16:00-17:30</td><td>Sesión</td><td>09</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.</td><td>Aula</td><td>1.8 Ed. Silverio Lanza</td><td>Vídeo</td><td>V1 Abr 18 2018
V2 Abr 18 2018</td></tr>
</table>

Contextualización

Tarea 3:

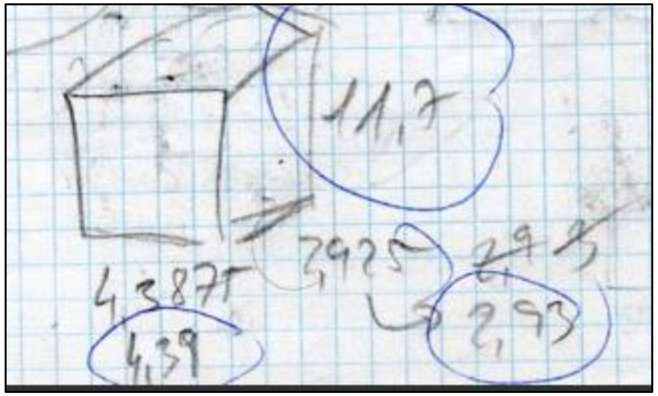
EL MEJOR ENVASE

La compañía de perfumes, *Afrodita*, ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros vamos a actuar como una empresa de consultoría, ya que la compañía *Afrodita* nos ha solicitado un informe donde respondamos de manera argumentada a la pregunta: ¿cuál es el mejor envase que se puede diseñar para dicho perfume? En consecuencia, al final del estudio deberemos redactar y entregar dicho informe como empresa consultora que somos.

Notas:

- En esta sesión se tomaron 2 videos.
- Continuamos con la tarea 3.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Salude a los estudiantes, recordamos las consignas de la tercera tarea y los criterios comunes, para el diseño del envase, que los estudiantes indicaron en la sesión anterior. 2. Desarrollo. Pregunté a los estudiantes por las ideas preliminares sobre el diseño del envase, ya que esa fue la tarea que se propuso al finalizar la sesión anterior. Por tanto, para enterarme mejor de dichas ideas, pasé por cada uno de los grupos. Así, en resumen: - Grupo 1: los estudiantes han pensado en un envase con forma de toroso femenino con una capacidad de 150 mililitros.	

- Grupo 2: los estudiantes quieren hacer un envase con forma de bipirámide, de modo que cada una de las pirámides es recta de base dodecagonal regular. Cada una de las pirámides con una capacidad de 75 ml. - Grupo 3: en esa sesión solo hubo un estudiante de este grupo, por tanto, dijo que quisiera que el envase tuviese la forma de una botella clásica, con una capacidad de entre 30 y 35 ml.	En el grupo 2 surgió la idea de hacer un modelo del envase en un programa de diseño gráfico.
Un cada caso indiqué a los estudiantes que, tras definir la forma y capacidad del envase, comenzasen en trabajar en el cálculo de sus medidas. Para ello, les indiqué que podrían buscar la información que considerasen necesaria; por ejemplo, en internet, en libros, etc.	
	
Importante: en el grupo 1, los estudiantes decidieron sortear el problema de la forma interna del envase, es decir, donde efectivamente va el contenido, optando por un prisma de base rectangular. Así, exteriormente el envase tendrá forma de torso femenino, pero dentro, será un prisma de 4.39 cm por 2.93 cm por 11.7 cm.	Esto es muy interesante, ya que los estudiantes notaron que, si internamente el envase conservase la forma externa, los cálculos a realizar serían muy complejos. Por tanto, cerraron el problema a uno conocido: el cálculo del volumen de un prisma de base rectangular.
En el grupo 2, como los estudiantes habían dicho que su envase estaba compuesto por dos pirámides, pregunté cómo calcular el volumen de una pirámide.	
E5: el volumen de una pirámide es igual a un tercio partido por el área de la base por hache [refiriéndose a la ecuación $V = \frac{1}{3}BH$]. La base es el perímetro por apotema dividido entre dos [refiriéndose a la ecuación $B = \frac{pa}{2}$].	Estas fórmulas forman parte del listado de fórmulas que usan los estudiantes en la clase de geometría y que llevaron voluntariamente al semillero
P: ¿Por qué? E5: porque lo ha dicho la profe [refiriéndose a la profesora titular del curso]	Es interesante ver cómo los estudiantes creen y aceptan la información dada por sus profesores, sin cuestionarla.
Decidí no cuestionar la validez de esa información e insté a los estudiantes a que, a partir de ese allí, calculasen las medidas del envase. Así, que pregunté:	
P: para calcular el área de la base, ¿qué es determinante allí? E5: la altura y el volumen [de la pirámide] P: y, ¿Qué altura quieren que tenga cada pirámide? E6: hemos supuesto que van, en la figura completa [la altura del envase], 15 centímetros de altura. Sin contar las bases [que sirven de apoyo al envase] quitaríamos 2 centímetros de cada base, de grosor. Nos	Es importante, en el futuro, diseñar un REI enfocado en el cuestionamiento de las fórmulas que habitualmente se usan para el cálculo de áreas y de volúmenes en la secundaria.

quedarían 11 centímetros y vamos a quitar 0.5 de la separación entre ambas figuras. Entonces tendríamos 10.5 en ambas pirámides. P: si ya tienen la manera de calcular el volumen y ya tiene la altura [de la pirámide], ¿qué les falta? E5: nos falta un lado, es lo que ha dicho… [señalando a la profesora titular del curso]. O apotema o lado [de la base de las pirámides], que tendríamos que tener. P: y, ¿cómo calculamos eso? E5: Ni idea. P: ¿es posible calcularlo con lo que tenemos? E6: creo que sí. E5: yo creo que no. Yo voy a preguntarle. E6: es que claro, la profe lo ha dicho, pero no se me ha mostrado eso. P: establezcamos, primero, qué variables intervienen ahí para el cálculo del volumen. El volumen ya lo definieron, la altura ya la tienen, un tercio es una constante. Luego, faltaría definir el área de la base, pero esta cuanta a su vez con otras variables. E6: en este caso sería el perímetro, la suma de todos los lados… doce por el lado. P: si son dos variables y no tenemos ninguna, ¿Qué hacemos? E6: haríamos un sistema de ecuaciones, ¿no? E5: pero tenemos cuánto mediría el área de la base.	Este es un buen ejemplo de que habitualmente los profesores terminan dando la respuesta a los estudiantes, sin dejar que ellos mismos exploren posibles soluciones.
Entonces, insté a los estudiantes que a que analizaran la relación entre el perímetro y la apotema de la base de las pirámides, una vez conocida su área y a que pensasen en cómo afecta esto al diseño del envase. Una idea que sugerí fue fijar o la medida de la apotema o la medida del lado de la base, para evaluar cómo varia la otra medida. Con ello, intenté conducir a los estudiantes al estudio algebraico-funcional de las relaciones entre las medidas y el volumen de la pirámide que representa el envase diseñado. Poco después surgió una idea que desafortunadamente no prosperó. Dicha idea fue: E5: también hay que tener en cuenta qué distancia va a haber entre el líquido y el exterior, ¿o no? P: entonces habría que determinar cuál es el grosor del envase. Entre la “tormenta de ideas”, surgió: E5: yo había pensado que… que pensemos en el diámetro de las bases. Como tenemos el diámetro y el radio, pues calcularíamos el lado a partir del radio y ya tendríamos para hacer el área y el volumen, porque ya tenemos el volumen, nos faltaría solo la altura [de la pirámide]. Entonces, insté a los estudiantes a que avanzaran, indicando que yo entendía que este tipo de problemas no son habituales. En ese momento intervino la profesora y dijo: T: es que ellos no han visto trigonometría.	Es un poco difícil hacer notar a los estudiantes que, aunque lo parezca, el área de un polígono regular no depende de dos variables, como pareciera ser en este caso, sino de una sola ya que tanto el lado como la apotema de este tipo de polígonos están íntimamente relacionados.

E6: nosotros sí hemos visto trigonometría. Para no entrar en terrenos que pudiesen poner en jaque a la profesora y afectar el ambiente de trabajo, insté a los estudiantes a continuar con su razonamiento y a avanzar en el diseño del envase. **Importante**: en el grupo 3, el estudiante no logró avanzar significativamente, puede ser que esto haya sido porque sus compañeros de equipo no asistieron, así que no quise presionarlo. Mas adelante, los estudiantes del grupo 2, tras calcular el diámetro de la circunferencia circunscrita al dodecágono regular, que es la base común de la bipirámide, dijeron: E5: con la medida que hemos pensado, nos saldría el bote [envase] de ancho [diámetro de la base de las pirámides], nos saldría de 4.5 cm, y sería como una cosa ¡enana! E6: mu antiestético. E5: y lo otro que hemos pensado en el diámetro de 8 [cm] y así sí quedaría estético con la altura, pero el perímetro nos sale, yo qué sé, 96 cm… un metro. Luego de preguntarles cómo podría superarse esta dificultad, respondieron: E6: a lo mejor si aumentamos el volumen… Aproveche este momento para insistir en que, este es un tipo de tarea, la solución puede no ser única por lo que cabría cuestionarse si hay alguna forma de analizar la variación de los elementos que están involucrados en el cálculo de las dimensiones del envase, en relación con su volumen. Por tanto, agregué: P: este tipo de problemas ponen en marcha no solo los conocimientos que se han adquirido, sino, la necesidad de adquirir otros. Por último, insistí en que era importante analizar cómo se verían afectadas las medidas del envase si fijamos, por ejemplo, su altura o el diámetro de la base, o su volumen.	Incluso si los estudiantes no hubiesen estudiado trigonometría, este tipo de tareas podrían dar lugar a su estudio de manera razonada. Además de que había errores en los cálculos, los estudiantes no reconocen aun la implicación de las relaciones funcionales presentes en esta tarea. Aproveché para instar a los estudiantes a que continuasen y a que no se desmotivasen si no encontraban la solución de manera instantánea.
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Continuar con la tarea 3.	

<table>
<tr><td colspan="12">DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO</td></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Menéndez Pelayo</td><td>Fecha</td><td>Abril 25 del 2018</td><td>Hora</td><td>16:00-17:30</td><td>Sesión</td><td>10</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.</td><td>Aula</td><td>1.8 Ed. Silverio Lanza</td><td>Vídeo</td><td>V1 Abr 25 2018
V2 Abr 25 2018</td></tr>
<tr><td colspan="12">Contextualización</td></tr>
<tr><td colspan="12">Tarea 3:

EL MEJOR ENVASE

La compañía de perfumes, Afrodita, ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros vamos a actuar como una empresa de consultoría, ya que la compañía Afrodita nos ha solicitado un informe donde respondamos de manera argumentada a la pregunta: ¿cuál es el mejor envase que se puede diseñar para dicho perfume? En consecuencia, al final del estudio deberemos redactar y entregar dicho informe como empresa consultora que somos.

Notas:
• En esta sesión se tomaron 2 videos.
• Continuamos con la tarea 3.</td></tr>
<tr><td colspan="8">Descripciones y transcripciones</td><td colspan="4">Análisis, valoraciones e interpretaciones</td></tr>
<tr><td colspan="8">1. Saludo.
Di la bienvenida a los estudiantes, les dije que en la primera parte de esta sesión continuaríamos con el desarrollo de la tercera tarea y luego, en la segunda parte, haríamos una puesta en común del trabajo realizado hasta el momento.

2. Desarrollo de la actividad.
Pase por cada uno de los grupos para indagar por los avances en el desarrollo de la tercera tarea.

En el grupo 1, los avances han sido:
- Definición de la forma y capacidad del envase (torso femenino de 150 ml).
- Cálculo de las medidas del envase (prisma de base rectangular en el interior).</td><td colspan="4">Solo asistió 1 estudiantes del grupo 3, diferente al que asistió la sesión anterior.</td></tr>
</table>

En el grupo 2, los avances han sido:

- Definición de la forma y capacidad del envase (bipirámide de 150 ml).
- Cálculo de las medidas del envase.

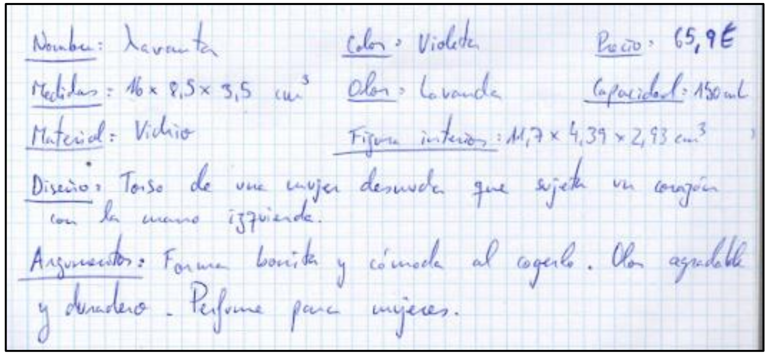
En el grupo 3, no ha habido avance significativo porque el estudiante que asistió, que es diferente al que asistió en la sesión pasada, no estaba enterado del avance de su compañero.

- Presentación del grupo 1, conformado por los estudiantes E2, E3 y E4:

Los estudiantes comenzaron por describir la forma del envase.
E2: es una figura de una mujer, el torso de una mujer, desnuda que sujeta en su mano un corazón. El corazón representa que es afrodita, que era la diosa del amor. El perfume no va por dentro del brazo, sino que adentro tiene un prisma, con unas medidas que son estas:

- altura. 11.7 cm
- ancho 2.93 cm
- largo 4.39 cm
- capacidad 150 ml

E4: hemos pensado que el mejor material sería el cristal, porque así se ve el color del perfume que sería violeta.
E3: el perfume se llamaría lavanda y costaría 65.90 euros. Es el mejor porque deja un olor agradable y duradero, y además tiene una forma bonita y es para mujeres.



Nombre: Lavanta   Color: Violeta   Precio: 65,9€
Medidas: 16 × 8,5 × 3,5 cm³   Olor: Lavanda   Capacidad: 150 mL
Material: Vidrio   Figura interior: 11,7 × 4,39 × 2,93 cm³
Diseño: Torso de una mujer desnuda que sujeta un corazón con la mano izquierda.
Argumentos: Forma bonita y cómoda al cogerlo. Olor agradable y duradero. Perfume para mujeres.

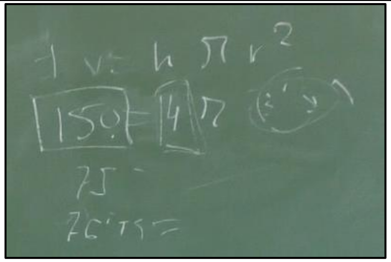
En ese momento surgió la idea de hacer un modelo del envase en arcilla. Los estudiantes estuvieron de acuerdo. Así que les dije que les proporcionaría dicha arcilla.

P: ¿Por qué 65.90 euros?

En esta sesión surgió la idea en torno al uso de una impresora 3D, para que los estudiantes pudiesen imprimir un modelo de sus envases. Esto, ya que; de una parte, algunos de ellos tienen conocimientos de un programa de modelado 3D llamado Tinkercad, que es de uso libre; y de otra, en el instituto se cuenta con una impresora de este tipo para la clase de tecnología. La profesora titular del curso se comprometió a hablar con la persona encargada de la impresora 3D.

Por el momento, los estudiantes se han enfocado en asuntos de naturaleza estética. Además, ya que hablaron del precio, no explicaron cómo definieron ese valor.

E2: a ver, eso fue más o menos a ojo porque al estar hecho de cristal es un material bastante carillo… entonces, tampoco muy caro y tampoco muy barato. P: yo creo que hay que considerar unos costes de producción para ponerlos en el informe final. • Presentación del grupo 2, conformado por los estudiantes E6, E7 y E8: Los estudiantes comenzaron por decir: E7: nuestro perfume es unisex. Las medidas del perfume son: - Altura total: 10.5 cm - Tamaño difusor: 2 cm - Altura pirámide: 4 cm - Diámetro: 7 cm - Línea separadora: 0.5 cm	Como en el caso anterior, no explicaron como obtuvieron esos valores.
Los estudiantes explicaron que, para el diseño del envase, han partido de la construcción de un círculo de 7 cm de diámetro sobre el que han construido, con regla y compas, un dodecágono regular. Luego, como en el grupo anterior, mencionaron el precio del envase. E5: el precio total sería de 72 euros. El 10% para los diseñadores y productores, 15% para transporte, 65% en materiales, el 7% para publicidad y el 3% para trabajadores. Cuando pregunté por qué es el mejor envase, los estudiantes dijeron que este diseño era innovador. En relación con los cálculos de las dimensiones, dijeron: E5: nos empezamos a liar la cabeza, no encontrábamos la manera. Pues al final fui a un sitio y me dijeron… pues lo que puedes hacer es básicamente un cilindro y el volumen es la altura por pi por el radio al cuadrado ($V=h\pi r^2$). Pues a partir de allí lo que hemos hecho es que el volumen sería 150, la altura pues es 4, y por 3.5 [al cuadrado] y pues, esto dividido entre dos es el volumen. Y pues obviamente daría como 75. E2: tú dices que 150 es lo que querías poner ¿Cómo habéis sabido que queríais poner 4 y luego 3.5 de radio? E5: pusimos datos inamovibles, el volumen, y también en este caso la altura. Al principio la altura iba a ser de 5 cm, pero el problema era que nos quedaba muy desproporcionada. Entonces lo que hicimos fue reducir un poco la altura y nos salió fácilmente el radio. Y a partir de la circunferencia, en un viendo de YouTube, buscamos cómo sería buscar el lado [del dodecágono regular].	E5 ha asumido que, al calcular el volumen del cilindro, y dividirlo entre dos, obtendría el volumen de cada pirámide del envase.

<table>
<tr>
<td>

Luego de ello, E4 hizo notar que los cálculos estaban equivocados, y que, con las medidas dadas mencionadas por los estudiantes del grupo 2, el volumen del envase no podría ser de 150 ml. Esa fue una buena oportunidad para instar a los estudiantes a revisar sus cálculos para la presentación y para el informe final.

E5: el problema de partida que nosotros no teníamos ni la apotema, ni el perímetro, ni el área, ni nada. ¿Tu sabrías otra forma de que de 150 ml sin cambiar las medidas? [refiriéndose a E4]
E4: bueno, tenéis que cambiar las medidas. Podríais cambiar la altura, o en vez de hacer doce lados, hacerlo de seis o hacer u cono.
E6: es que el cono le quita toda la belleza que habíamos puesto.

Entonces agregué que solucionar que corregir el trabajo matemático llevado a cabo en esta tarea, aprovechando que la próxima sesión es en dos semanas.</td>
<td>La observación hecha por E4 fue muy valiosa ya que; de una parte, hizo ver a sus compañeros que había un error; y de otra, porque demostró que es importante verificar la información que nos dan.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
Revisar los cálculos realizados, avanzar con el informe escrito y hacer los modelos de los envases en arcilla (que yo les proporcionaré esta semana).</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Menéndez Pelayo</td><td>Fecha</td><td>Mayo 9 del 2018</td><td>Hora</td><td>16:00-17:30</td><td>Sesión</td><td>11</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.</td><td>Aula</td><td>1.8 Ed. Silverio Lanza</td><td>Vídeo</td><td>V1 May 9 2018
V2 May 9 2018</td></tr>
<tr><th colspan="12">Contextualización</th></tr>
<tr><td colspan="12">Tarea 3:

EL MEJOR ENVASE

La compañía de perfumes, Afrodita, ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros vamos a actuar como una empresa de consultoría, ya que la compañía Afrodita nos ha solicitado un informe donde respondamos de manera argumentada a la pregunta: ¿cuál es el mejor envase que se puede diseñar para dicho perfume? En consecuencia, al final del estudio deberemos redactar y entregar dicho informe como empresa consultora que somos.

Notas:
• En esta sesión se tomaron 2 videos.
• Continuamos con la tarea 3.</td></tr>
<tr><th colspan="8">Descripciones y transcripciones</th><th colspan="4">Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Saludo.
Saludé a los estudiantes e hice un resumen de lo realizado en la sesión anterior. Además, les dije que en esta sesión trabajarían en el informe final de la tarea 3.

2. Desarrollo de la sesión.
Pasé por cada uno de los grupos revisando el trabajo realizado e insistiendo en que:
- El informe debe ser lo más detallado posible.
- Es necesario escribir todos los cálculos matemáticos que han tenido que hacer para llevar a cabo esta tarea.
- Hay que preparar una presentación final del trabajo realizado en la tarea 3, para la próxima sesión.</td><td colspan="4">

Se ha confirmado que la profesora de tecnología puede imprimir los modelos de los envases, pero es necesario que los estudiantes le lleven el archivo de dicho modelo en formato “.stl”, que puede generarse en Tinkercad.</td></tr>
</table>

 Los estudiantes del grupo 2 ya habían hecho la impresión del modelo del perfume. Cuando pase por el grupo 3, que hasta el momento no habían presentado su modelo, me dijeron que habían elegido una forma de una esfera a la que se le había quitado cuña, de manera que la capacidad sea de 175 ml, semejando una naranja a la que se le había quitado un gajo. Sin embargo, por el momento solo habían avanzado con el bosquejo del envase. Por tanto, les insté a que elaborasen los cálculos matemáticos que permitiesen calcular las dimensiones del envase. Les hice saber que a estas alturas tendrían que apurar el trabajo, porque ya solo nos quedaba una sesión para terminar, e intenté guiarles sobre el trabajo que deberían seguir para llevar a cabo esta tarea.	
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Preparar la presentación final de la tarea 3 y terminar el informe escrito.	

<table>
<tr><th colspan="10">DIARIO DE CAMPO DEL SEMILLERO MATEMATICO DESARROLLADO EN EL I.E.S. MENÉNDEZ PELAYO</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Menéndez Pelayo</td><td>Fecha</td><td>Mayo 16 del 2018</td><td>Hora</td><td>16:00-17:30</td><td>Sesión</td><td>12</td><td>Investigador</td><td>Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="5">9 estudiantes, 1 profesora del instituto, 1 secretaria del semillero y 1 investigador.</td><td>Aula</td><td>1.8 Ed. Silverio Lanza</td><td>Vídeo</td><td>V1 May16 2018
V2 May16 2018
V3 May16 2018</td></tr>
</table>

Contextualización

Tarea 3:

EL MEJOR ENVASE

La compañía de perfumes, *Afrodita*, ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros vamos a actuar como una empresa de consultoría, ya que la compañía *Afrodita* nos ha solicitado un informe donde respondamos de manera argumentada a la pregunta: ¿cuál es el mejor envase que se puede diseñar para dicho perfume? En consecuencia, al final del estudio deberemos redactar y entregar dicho informe como empresa consultora que somos.

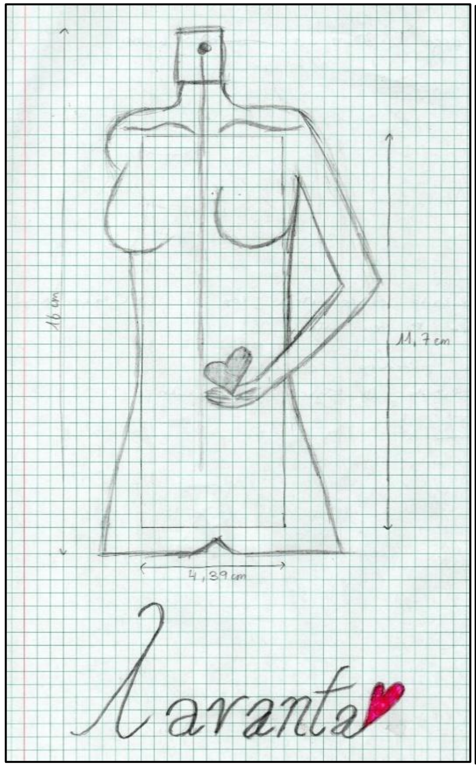
Notas:

- En esta sesión se tomaron 3 videos.
- Presentación final de la tarea 3.

<table>
<tr><th>Descripciones y transcripciones</th><th>Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td>1. Saludo.
Le di la bienvenida a los estudiantes a la última sesión del Semillero Matemático. Además, les dije que en este día presentarían los envases diseñados durante la tercera tarea y explicarían el proceso seguido para llevar a cabo dicho diseño.

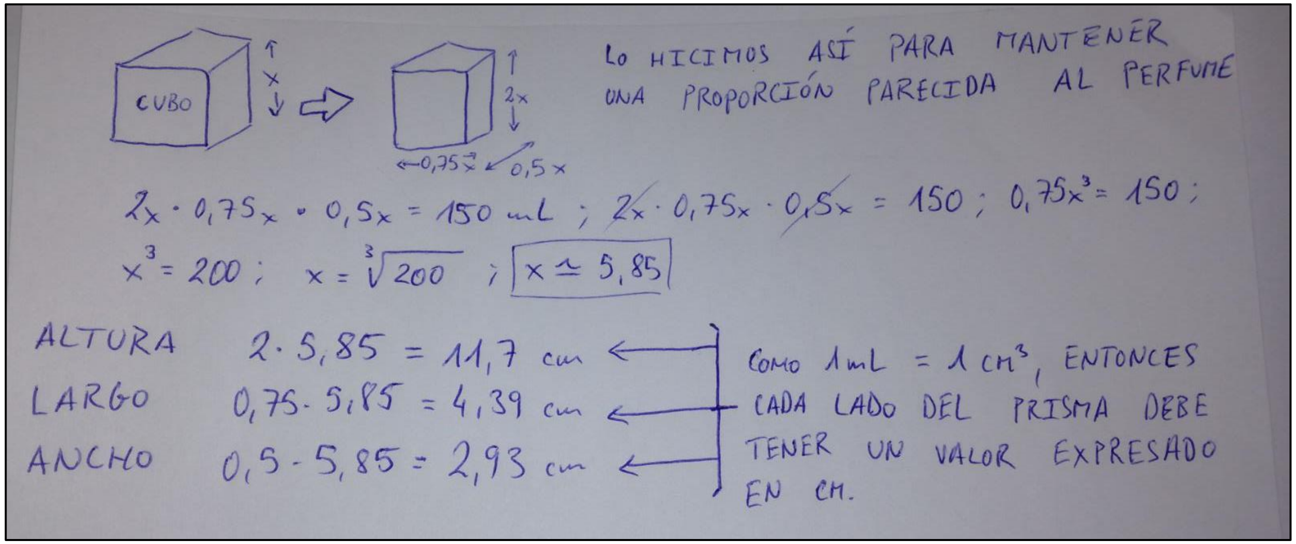
2. Desarrollo de la actividad.

• Presentación del grupo 1, conformado por los estudiantes E2, E3 y E4:
Los estudiantes iniciaron explicando las características generales del envase diseñado, entre ellas, el nombre del perfume, olor, color, etc. Indicaron que tiene la forma de un torso femenino con un prisma interior, que contendría el líquido, con capacidad para 150 ml.</td><td></td></tr>
</table>



P: ¿por qué esa capacidad?
E2: porque es la capacidad estándar de todos los perfumes.

Las medidas del prisma interior son:



Con estas medidas el prisma interior tendría un volumen de, aproximadamente, 150.49 cm^3.

Puede verse que los estudiantes logran interpretar las fórmulas como modelos algebraicos, pero no como modelos funcionales.

P: ¿Por qué decidieron poner un prisma dentro del envase?
E3: así es más fácil calcularlo.
E2: nos parecía más cómodo calcular la capacidad del recipiente, porque es que tenía muchas curvas y hay muchos cálculos que incluso no conocemos aun, pero un prisma sí que los conocemos.
P: ¿Consultaron qué herramientas matemáticas necesitarían para hacer el cálculo del volumen del envase con curvas?
E4: integrales, yo creo.
E2: hemos intentado hacer, por ejemplo, unas elipses, pero es que era muy difícil… pero es que no hemos dado con ello.

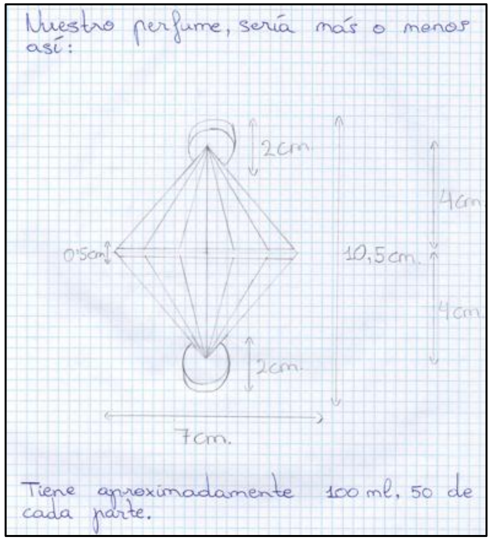
Esto confirma que los estudiantes tienden a cerrar una tarea abierta.

- Presentación del grupo 2, conformado por los estudiantes E6, E7 y E8:

Como en el caso anterior, los estudiantes hablaron de las características generales del envase; entre ellas, el nombre, material, que es unisex, etc. Indicaron que se decantaron por una forma bipiramidal, con capacidad para 100 ml. Cuando pregunté por los criterios que guiaron el diseño, dijeron:

E6: nosotros queríamos más que nada, destacar la estética, el orden y para quien va dirigido, hombres y mujeres.

<table>
<tr>
<td>
P: ¿Cuál es la capacidad del envase?
E5: 50 mililitros en cada lado [cada pirámide].





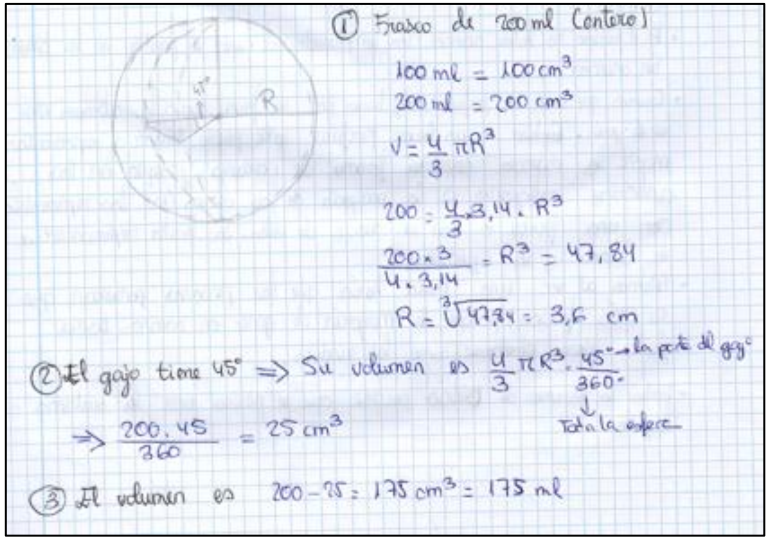
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
P: ¿Cómo hicieron los cálculos para que ese diseño tuviese los 50 ml en cada lado [pirámide]?
E5: pues básicamente lo que nos explicó E4 comenzamos a tenerlo en cuenta… nos liamos un montón. A partir de ahí descubrimos que tenía razón él, que no eran 150 ml, que eran 100 ml.
P: Finalmente, en lugar de cambiar las dimensiones del recipiente, ¿se ajustaron al cálculo con las medidas que ya tenían?
E5: Sí, exacto. Con las medidas que ya teníamos decidimos… o sea, que el volumen ya no nos importase cuánto es y, con las medidas que ya teníamos prefijadas, pues hallamos el volumen.
</td>
<td>Esto indica que los estudiantes prefirieron varias el volumen con base en las medidas seleccionadas, lo que suele ocurrir en una tarea directa y cerrada.</td>
</tr>
<tr>
<td>
P: cuando ya habían definido que el envase se conformaba por pirámides rectas, cuya base común era un dodecágono regular, ¿Qué hicieron luego?
E5: definimos la altura de la pirámide y, con eso, pues proporcional, hicimos el ancho [diámetro de la circunferencia que contiene al dodecágono regular].
P: ¿Por qué mejor ajustarse a los cálculos que les hizo notar E4, y no empezar a cambiar la altura de la pirámide o el diámetro de la circunferencia que contiene al polígono regular de 12 lados o su apotema?
E5: Porque cuando ya hicimos las medidas… nos perece muy estético. Y pensamos por qué cambiar si nos gusta este estereotipo. Según nosotros está bien proporcionado.
</td>
<td>Los estudiantes comprender muy bien que hay un tipo de relaciona que gobierna este diseño, pero no lograron expresarla matemáticamente.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
E6: porque si queríamos un poco más de altura a lo mejor se hacía demasiado delgado, o si aumentábamos la anchura podría quedar demasiado achatado.
E10: y no habéis pensado hacer un cono.
E5: perdería toda la estética.
E10: pero sería más sencillo hacer un cono.
P: ¿Por qué creen que es el mejor envase?
E5: es novedoso… sirve para todo tipo de público.

• Presentación del grupo 3, conformado por los estudiantes E9 y E10:
Los estudiantes iniciaron diciendo:

E10: lo nuestro es lo más sencillo del mundo. Es una naranja por la cual está partida en un gajo, que se le quita.

También, como en los otros grupos, aludieron a asuntos estéticos. Sin embargo, como en este grupo hubo varios cambios en el diseño, pedí a los estudiantes que narrasen su experiencia en esta tarea.



E10: desde el principio queríamos una esfera normal y corriente, luego pensamos en una naranja, pero ya decíamos que era muy sencillo como para que lo comprasen, y se me ocurrió lo del gajo… quitárselo.
E2: ¿en qué se apoyaría?
E10: al principio pensamos en un frutero, pero es que ya era un coste muy grande. Así que nos decidimos ponerle una base plana y por último pensamos en el difusor.
E5: ¿Por qué una manzana y no otro tipo de fruta?
E10: eso sería más complicado.
P: ¿por qué?
E10: Es que no sé qué cálculos había que hacer, porque la parte de abajo y la de arriba son una especie de conos o algo que hace una forma diferente.
P: ¿Cuál es la capacidad del envase?
</td>
<td>
Esto podría indicar que los estudiantes no abordan formas complejas porque no están habituados a trabajar con ellas.

Esto indica que no hubo un trabajo algebraico para determinar las medidas del envase, de tal manera que su capacidad fuese la que inicialmente se había pensado (200 ml.)
</td>
</tr>
</table>

E10: empezamos por una capacidad de 200 ml y luego hicimos los cálculos y con lo del gajo se nos quedó en 175 ml. Cuando retomé la idea de haber usado una manzana como modelo para el envase dijeron: E10: Pues es que no sabemos qué forma es. No tenemos ninguna fórmula combinada para avanzar. En ese momento, E10 dijo que le había preguntado a su profesor de matemáticas cómo calcular el volumen de una manzana, y que la respuesta había sido: E10: Pues nada, que era un cálculo muy complicado y que no sabía qué hacer. Es que era, como un cálculo compuesto o algo. P: ¿ustedes consultaron en internet o en un libro? E10: Sí, pero es que no salía nada. E9: yo busqué en un libro que tengo de figuras geométricas e intenté buscar algo parecido, pero no encontré nada. Entonces, E6 pregunto a la profesora titular del curso si en bachillerato se daban cálculos geométricos así. T: No. E6: ¿es muy complicado? T: no sé cómo se trabaja. El cálculo de volumen con integrales, de hecho, entraba en selectividad, pero con figuras más sencillas… cilindros, conos, con curvas conocidas. Y, actualmente, ya ni siquiera entra en selectividad. Y en segundo de bachillerato no se da. Volviendo sobre la capacidad del envase, pregunté: P: ¿pensaron en la posibilidad de conservar los 200 ml aun quitando el gajo? E10: como ya han dicho las compañeras, 200 ml ya era un poquito exagerado. Cuando pregunté sobre los beneficios del modelo elegido, los estudiantes dijeron que esta forma facilita el aprovechamiento del contenido porque se concentra en un mismo punto cuando se va vaciando. Además, los estudiantes arguyeron que la fabricación era más sencilla. Luego, pregunte si alguien más quisiera formular alguna cuestión: E6: cuando habéis hecho los cálculos a nivel geométrico, ¿habéis trabajado con la esfera y el huso esférico? E10: primero, hemos calculado la esfera, y luego, le hemos dado al gajo 45 grados y hemos hecho el cálculo de cuando se le quita [a la esfera] el gajo; que venía en una ficha que nos dieron en matemáticas. Lo que se le ha quitado al gajo, se lo hemos restado al volumen de la esfera.	Esto confirma que las decisiones estuvieron influenciadas por las fórmulas que conocen los estudiantes. En este caso puede verse la influencia de los niveles de determinación superiores, sobre el currículo escolar. Claramente ello implicaba un trabajo algebraico para poder conservar esta capacidad.

<table>
<tr>
<td>Luego, pregunté a los estudiantes si habían puesto todos los cálculos necesarios para llevar a cabo esta tarea, en el informe escrito. Respondieron que sí.

Al final, entregamos a todos los estudiantes un diploma de participación en se Semillero Matemático, que estaba firmado por la directora del instituto, por la profesora titular del curso y por el profesor investigador.</td>
<td>Esta es una fotografía de los cuadernos usados por los estudiantes durante el semillero.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Importante:</u>
• Es necesario perfilar el REI, hacer una segunda implementación para provocar una mayor riqueza en la modelización espacio-geométrica.</td>
</tr>
</table>

ANEXO 4: Informe final presentado por el grupo 2

Informe

Para la creación de nuestro perfume, hemos seguido varios criterios como el tamaño, el color, la forma, o el precio. Pero, los más importantes, a la hora de idear este perfume, fueron:

- La estética: Este es por casi el más importante de todos, porque es este criterio junto con el siguiente, los que basan el perfume. Atrae la atención del consumidor y le otorga más confianza en el producto.
- El olor: Es el más importante de todos. Es la gran parte del perfume, porque conlleva la función de este; que es dar al portador una fragancia determinada. Este es el elemento clave para la compra del producto.
- Para quien va dirigido: Un criterio a tomar en cuenta a la hora de fabricar un perfume. Puesto que no se debe hacer un producto con figura de hombre o de mujer para un público infantil.

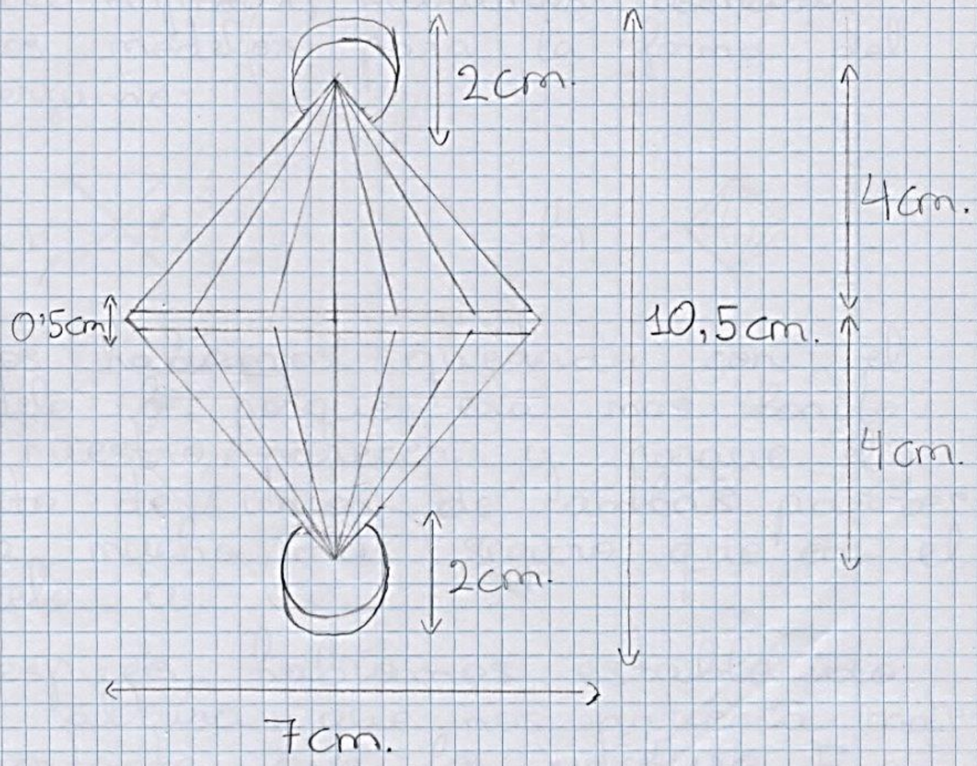
La idea de nuestro perfume, surgió de la compactación de los ideales masculinos y femeninos en cuanto a perfumes, y de la creación de algo innovador, que resalte a la vista tanto de hombres como de mujeres.

Hemos originado un perfume que se divida a su vez en dos, que comparta dos partes o que tenga dos compartimentos. Cada uno de ellos, con una aportación diferente. Uno que aporte una fragancia suave correspondiéndose al día, y otro que aporte una fragancia más fuerte correspondiéndose a la noche. Pero ambos para los dos géneros.

A lo largo de varias ideas y cálculos matemáticos geométricos, hemos concluido con la forma y el tamaño del perfume, así como su gama de colores.

Con esto, podemos decir que nuestro perfume es el mejor, porque es un equilibrio entre los gustos populares, un apartado de los estereotipos de, perfumes para mujeres y perfumes para hombres y una novedad para la actualidad.

Nuestro perfume, sería más o menos así:



Tiene aproximadamente 100 ml, 50 de cada parte.

Nuestro proceso de ideación del perfume, fue más o menos el siguiente:

- Para empezar, habíamos diseñado dos modelos para la forma del perfume:

a)  b) 

Nos habíamos quedado con el modelo b, porque era más bonito a nuestro parecer y porque el punto de unión de ambas partes era mucho más seguro que en el modelo a.

- Después, habíamos establecido la altura, que nos parecía más importante que la anchura. Fue más de 10,5 cm; nos habíamos propuesto que fuera de 12 cm, alrededor de esa cifra.

Pero no habíamos tenido en cuenta como variaba el volumen; que lo pusimos de 150 ml, 75 en cada parte.

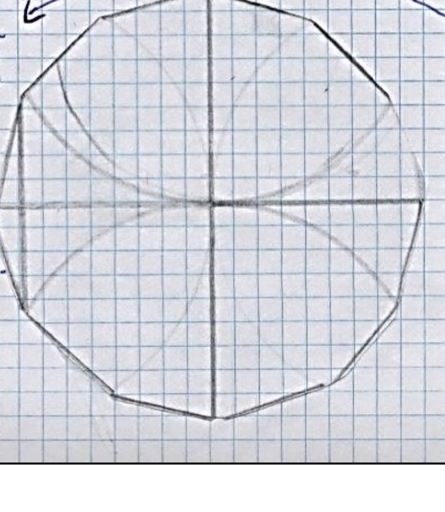
Nos dimos cuenta que el volumen de 150 ml. correspondía con una altura y anchura determinados. Entonces pensamos que era mejor empezar a proyectar nuestro perfume desde el volumen.

- Más tarde decidimos disminuir la cantidad de ml. de nuestro perfume que se nos hacía excesiva.
La cambiamos a 100 ml; 50 por cada parte.

- Para averiguar la altura y la anchura (diámetro de la base de la pirámide) tuvimos que pasar por varios procesos complicados en los que quizá para conseguir el área de la base (necesario para averiguar el volumen) nos faltaba una medida que no nos cuadraba en absoluto.
Tal como pudo ser el apotema
Esto es debido a que nuestro perfume estaba formado por dos pirámides de doce lados (una figura complicada para nosotros)

- Para averiguar la medida de uno de los lados (que nos serviría para hacer otros cálculos) utilizamos la siguiente técnica.

-Pero en vez del lado, nos dió más el diámetro y el radio.



- Esto nos daría a su vez la anchura

- Para finalizar, la altura acabó saliendo utilizando el volumen de un cono e intentanto sacar el margen de error al ser nuestra figura una pirámide.

* Realmente hemos sacado las medidas y dimensiones, apañandonoslas como hemos podido, pero aún así creemos que hemos sido exitosos.

ANEXO 5: Informe del trabajo realizado en el Semillero Matemático

SEMILLERO MATEMÁTICO

Informe

Carlos Rojas Suárez

En el presente documento presentamos un informe de las actividades realizadas en el semillero matemático desarrollado entre el 7 de febrero y el 16 de mayo del 2018, incluidas ambas fechas, en el Instituto de Educación Secundaria Menéndez Pelayo. En dicho semillero, implementamos un dispositivo didáctico elaborado dentro de la Teoría Antropológica de los Didáctico (TAD) como el Recorrido de Estudio e Investigación (REI), para someter a prueba algunas de las hipótesis de la investigación que actualmente estamos llevando a cabo en el marco del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Complutense de Madrid.

Sobre el semillero

El semillero matemático forma parte de una de las fases propuestas dentro del proceso investigativo en el que estamos trabajando, donde, en términos generales, exploramos posibles organizaciones didácticos-matemáticas alternativas para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

La conformación del semillero se inició con una convocatoria abierta a estudiantes de cuarto de la ESO y de primero de bachillerato del instituto. Así logramos conformar un grupo de estudio con 14 estudiantes (10 de la ESO y 4 de bachillerato), que funcionó una vez a la semana durante una hora y media, en horario extraescolar. Cabe anotar que, a lo largo de las 12 sesiones de trabajo (Tabla 1), contamos con la presencia de dos de las profesoras de departamento de Matemáticas que alternaron para apoyarnos en lo que fuese necesario.

Fecha	Sesión
7 de febrero del 2018	Primera
14 de febrero del 2018	Segunda
21 de febrero del 2018	Tercera
28 de febrero del 2018	Cuarta
7 de marzo del 2018	Quinta
21 de marzo del 2018	Sexta
4 de abril del 2018	Séptima
11 de abril del 2018	Octava
18 de abril del 2018	Novena
25 de abril del 2018	Decima
9 de mayo del 2018	Décimo primera
16 de mayo del 2018	Décimo segunda

Tabla 1. Cronograma de las sesiones de trabajo del semillero.

Sobre el trabajo propuesto a los estudiantes

Desde la primera sesión del semillero, propusimos a los estudiantes un REI que giró en torno al análisis, diseño y construcción de un envase. Dicho REI, se compuso de dos partes donde planteamos cuestiones en torno a tres tipos de tareas –dos de ellas en la primera parte– para que fuesen abordadas en grupos de entre 3 o 4 estudiantes. En el primer tipo de tareas, instamos a los estudiantes a realizar un primer análisis de la forma, dimensiones y capacidad, de algunos de los recipientes que actualmente se usan comercialmente para envasar leche, zumo, vino y caldo de pollo. En el segundo, les pedimos que diseñasen y construyesen un envase en cartulina con capacidad para un litro. Y en el tercero, les propusimos que diseñasen el *mejor envase* para un perfume. Al final, los estudiantes debieron entregar un informe donde argumentaron por qué el envase que diseñaron era el mejor.

En el desarrollo del REI, pretendimos que la responsabilidad del planteamiento de las cuestiones fuese compartida por los alumnos y el profesor. Además, el profesor apareció más como un director del estudio que como un enseñante que muestra a los alumnos las respuestas a las cuestiones planteadas.

Durante la implementación del REI, recabamos información mediante registros audiovisuales[1], el diario de campo del investigador y los cuadernos que los estudiantes usaron en el semillero.

Sobre algunos resultados de la investigación obtenidos del semillero

Parte de la información obtenida durante la implementación del REI, que ya hemos comenzado a analizar, nos ha permitido hacer algunos aportes a la comunidad académica traducidos concretamente en dos comunicaciones; la primera de ellas, presentada en el PhDay Educación 2018 y IV Jornada de Investigación del Programa de Doctorado en Educación de la UCM, celebrada el 30 de mayo del 2018 que pretendemos culminar con el envío de un artículo a una revista internacional; y la segunda, en el XXII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)[2], celebrado del 5 al 8 de septiembre del 2018.

Por ahora nos encontramos realizando el análisis de la información recabada durante la implementación del REI. Consideramos que ello nos permitirá replicar el mismo REI con otros alumnos o experimentar uno nuevo, también en torno a los problemas espaciales. De este modo, pretendemos superar las dificultades que identifiquemos tras el análisis en cuestión.

En consecuencia, queremos solicitarles que nos permitan realizar una nueva convocatoria entre los alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato para la implementación del nuevo REI durante el mes de septiembre en las mismas condiciones que el ya realizado el curso pasado, en aras de la futura consolidación de una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría.

[1] Previo consentimiento escrito, firmado por parte de los padres o representantes legales de los estudiantes.
[2] Este trabajo puede encontrarse en las preactas del evento (pp. 485-494), a las que se accede en el enlace: https://www.unioviedo.es/XXIISeiem/wp-content/uploads/2018/09/ACTAS_Provisionales_20180830.pdf

ANEXO 6: Consentimiento informado para la segunda implementación del REI

I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Estimados padres y madres:

El Departamento de Matemáticas les comunica que, a partir del próximo martes 13 de noviembre, Carlos Rojas Suárez, estudiante de Doctorado en Educación en la Universidad Complutense de Madrid, implementará un trabajo con los estudiantes del curso 3 en la asignatura de “Ampliación de Matemáticas”, vinculado con la tesis que actualmente desarrolla. Este trabajo, se llevará a cabo con la presencia de María Isabel Rodríguez Cartagena, profesora titular de esta asignatura.

Como su hijo/a forma parte del grupo de alumnos que va a cursar la asignatura antes mencionada, nos gustaría darles a conocer las características generales del trabajo a realizar:

1. El objetivo principal será discutir, construir y validar algunos de los saberes matemáticos que actualmente se proponen en el currículo de secundaria. Para lograr dicho objetivo, se abordarán problemas o situaciones que impliquen poner en práctica varios de los conocimientos matemáticos que han debido ser estudiados durante los tres primeros cursos de la ESO. Como producto de este proceso, se espera que los conocimientos matemáticos de los alumnos se fortalezcan, así como su motivación e interés por el saber matemático. Así, con el trabajo que realizarán los alumnos se pretende que haya una buena articulación con los objetivos de la asignatura en la que se implementará.

2. El horario en el que se desarrollará será los ***MARTES de 10:05H A 11H*** y los ***VIERNES de 9:10H A 10:05H***. es decir, en el ***horario –y lugar– habitual*** de la asignatura.

3. Se evaluará el trabajo realizado, lo que quiere decir que las notas obtenidas por los estudiantes se entregarán a la profesora titular de la asignatura.

Dado que este trabajo se encuentra vinculado con la investigación que actualmente desarrollamos, resulta de vital importancia recabar y analizar la información que surja durante las clases con los alumnos, mediante registros audiovisuales. Por tanto, solicitamos su autorización para hacer uso, solo con fines estrictamente académicos, de aquellos registros en donde aparezca su hijo/a.

Agradecemos su colaboración y esperamos que esta experiencia académica contribuya a una mejor formación de todos los alumnos que participen en ella.

Directora del IES Cardenal Cisneros *Profesora titular de la asignatura*

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo, ____, padre/madre del alumno

____ del curso 3C, manifiesto haber leído la información adjunta, y autorizo que se puedan realizar registros audiovisuales de mi hijo, siempre que sea con el compromiso de utilizarlos solo con fines académicos.

ANEXO 7: Tareas propuestas durante la segunda implementación del REI

Adivina cuál es el envase

Consigna: Vamos a conformar grupos de máximo cuatro integrantes. De común acuerdo, y teniendo cuidado para que los integrantes del otro grupo no lo descubran antes de tiempo, elegiremos uno de los envases que el profesor nos ha dado, que son iguales a los del otro grupo y que aparecen numerados en la figura 1. Luego escribiremos en el cuaderno la **descripción** de este envase. Esto nos servirá para apoyar las respuestas que daremos más adelante. Después, vamos a escribir las preguntas que consideremos necesarias para tratar de adivinar qué envase han elegido en el otro grupo, siguiendo los mismos criterios que hemos usado para describir nuestro envase.

Cuando el profesor lo indique, los integrantes de uno de los grupos iniciaran la formulación de las preguntas –una cada vez–, para tratar de adivinar cuál ha sido el envase elegido en el otro grupo. La respuesta a cada pregunta formulada solo podrá ser mediante un **Sí** o un **No**. Cuando el grupo considere que con las respuestas obtenidas es posible adivinar el envase, entonces indicará cuál es este, mediante el número que lo designa. Después la actividad continua con la formulación de las preguntas por el siguiente grupo. Así, los estudiantes que inicialmente han formulado las preguntas ahora deberán responder a las que les sean formuladas.

Figura 1. Envases numerados.

El envase de litro

Consigna:

En la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, se nos ha pedido un tipo nuevo de envase con capacidad para un litro, porque quieren renovar su forma de envasar. Por tanto, el departamento de producción nos ha propuesto que diseñemos y construyamos un prototipo de dicho envase. Nosotros como empresa consultora, debemos entregar junto con el prototipo del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se sugiera su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase puede contener un litro de zumo.

Para realizar esta tarea, entonces, en cada grupo de trabajo que hemos conformado:

- Debemos discutir y definir qué tipo de envase deseamos diseñar y construir, y qué criterios debemos tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, debemos esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, vamos a escribir un plan de trabajo en el que pondremos, entre otros, el proceso que consideremos necesario seguir para diseñar y construir nuestro envase, además de las herramientas que usaremos para ello (ejemplo: tijeras, regla, etc.).
- Dibujaremos los planos del envase.
- Construiremos un prototipo del envase en tamaño real. Para ello, podremos usar la cartulina que nos han proporcionado (65 cm x 50 cm). En caso de no utilizar la cartulina, debemos conseguir el material que necesitemos.
- Escribiremos en el cuaderno de grupo el informe para la compañía de zumos.
- Cuando hayamos terminado, deberemos exponer nuestros resultados a la compañía Zumoluna, donde presentaremos el prototipo del envase que hemos diseñado, incluyendo las explicaciones que hemos puesto en el informe escrito.

A tener en cuenta:

Dado que todos los estudiantes manejan el programa Tinkercad, que se usa para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y que existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

ANEXO 8: Diario de campo de la segunda implementación del REI

<table>
<tr><th colspan="10">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Nov. 20 del 2018</td><td>Hora</td><td>10:05-11:00</td><td>Clase</td><td>01</td><td>Investigador</td><td>Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="5">7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Video</td><td>V1_Nov20_2018</td></tr>
<tr><th colspan="10">Contextualización</th></tr>
</table>

Para la primera clase hemos propuesto a los estudiantes una situación de comunicación, que forma parte de la primera tarea del REI. Esta es:

Adivina cuál es el envase

Figura 1. Envases numerados.

Consigna: Vamos a conformar grupos de máximo cuatro integrantes. De común acuerdo, y teniendo cuidado para que los integrantes del otro grupo no lo descubran antes de tiempo, elegiremos uno de los envases que el profesor nos ha dado, que son iguales a los del otro grupo y que aparecen numerados en la figura 1. Luego escribiremos en el cuaderno la **descripción** de este envase. Esto nos servirá para apoyar las respuestas que daremos más adelante. Después, vamos a escribir las preguntas que consideremos necesarias para tratar de adivinar qué envase han elegido en el otro grupo, siguiendo los mismos criterios que hemos usado para describir nuestro envase.
Cuando el profesor lo indique, los integrantes de uno de los grupos iniciaran la formulación de las preguntas –una cada vez–, para tratar de adivinar cuál ha sido el envase elegido en el otro grupo. La respuesta a cada pregunta formulada solo podrá ser mediante un **Sí** o un **No**. Cuando el grupo considere que con las respuestas obtenidas es posible adivinar el envase, entonces indicará cuál es este, mediante el número que lo designa. Después la actividad continua con la formulación de las preguntas por el siguiente grupo. Así, los estudiantes que inicialmente han formulado las preguntas ahora deberán responder a las que les sean formuladas.

<table>
<tr><th>Descripciones y transcripciones</th><th>Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td>1. Saludo y presentación de la primera actividad.
Como previamente T de la asignatura en la que estamos haciendo la experimentación de este REI, me había permitido un primer contacto con los estudiantes, entonces tras el saludo habitual, iniciamos con la presentación de la propuesta que hemos titulado Adivina cuál es el envase.
Luego, expliqué a los estudiantes que desarrollaremos varias tareas que servirán para responder a un problema gordo. Dicho problema será tratar de determinar cuáles deben ser las características que debe tener el mejor envase que se nos pida diseñar, de tal manera que ese envase pueda tener la capacidad que queramos que tenga.

2. Adivina cuál es el envase – trabajo grupal.
Leí y expliqué la consigna propuesta. Una de las estudiantes intervino preguntando: ¿Esto es como un quién es quién, pero con envases?, a lo que respondí afirmativamente.</td><td>Uno de los estudiantes no llevó el consentimiento informado para poder aparecer en el registro audiovisual. Por tanto, aunque sí participó de la actividad propuesta, no fue filmado.</td></tr>
</table>

Seguidamente, los estudiantes conformaron dos grupos. Para ello, T aportó la idea de que los estudiantes seleccionasen aleatoriamente un trozo de papel, de entre ocho que puso en una bolsa. En cada trozo había una letra, A o B. Así quedaron 3 estudiantes en el grupo A y 4 en el grupo B. El trozo que sobró se le asignó al estudiante que no asistió a esta clase. Una vez conformados los grupos, los estudiantes tuvieron aproximadamente 15 minutos para elegir un envase, describirlo, y escribir las preguntas que consideraron necesarias para adivinar el envase elegido en el otro grupo. 3. Adivina cuál es el envase – puesta en común. Inicié recordando a los estudiantes cómo sería la dinámica de preguntas y respuestas, e indicando que iniciarían los integrantes del grupo A. No obstante, cuando se inició con ello, los estudiantes vieron mejor que se formularan las preguntas y respuestas por turnos, y así lo hicimos. Grupo A (E1): ¿Es un objeto grande? Grupo B (todos): ¡No! Con base en esta respuesta, los estudiantes del grupo A quitaron algunos de los envases, dejando solo los numerados con 3, 4, 5, 7, 8 y 11. Grupo B (E4): ¿Tiene tapa? Grupo A (E1) No. P: ¡Perdón! No escuché la pregunta. Grupo B (E4): Que si tiene tapa. Grupo A (E1) ¿Cómo decís que es tapa? Grupo B (E4): ¿Tiene tapa o no? Entonces se generó una pequeña discusión en torno a los conceptos de *tapa* y *tapón*. Esto, porque los envases numerados con 2 y 4, no traían sus tapas. Una vez superado esto, continuó la actividad. Grupo A (E1) Vale, tiene tapa. Grupo A (E1) ¿Tiene forma cilíndrica? Grupo B (E4): ¡No! Con base en esta respuesta, los estudiantes del grupo A quitaron algunos de los envases 4, 7 y 8, dejando solo los numerados con 3, 5 y 11. Grupo B (E4): ¿Es un envase alargado? Grupo A (E1) No. Grupo A (E1) ¿Tiene forma de estrella? Grupo B (E4): Sí [risas generalizadas].	En las transcripciones denominaré con la letra E a los estudiantes, con la letra P al profesor investigador y con la letra T a la profesora titular del curso, así: E1: Estudiante 1 E2: Estudiante 2 E3: Estudiante 3 E4: Estudiante 4 E5: Estudiante 5 E6: Estudiante 6 E7: Estudiante 7 E8: Estudiante 8 T: Profesora titular del curso P: Investigador La discusión generada en torno a los conceptos de tapa y tapón apunta a que los estudiantes entienden por tapón a las tapas. Según la RAE en línea: Tapón: pieza con que se tapan las vasijas, introduciéndola en el orificio por donde sale el líquido. Tapa: pieza que cierra por la parte superior cajas o recipientes.

Luego, los integrantes del grupo B, continuaron con las preguntas para tratar de adivinar el envase elegido en el grupo A. Grupo B (E4): ¿Crea una forma cilíndrica? Grupo A (E1) No. Grupo B (E5): ¡Pues esta [Levantando el envase conforma de prisma recto de base hexagonal regular]! 4. Adivina cuál es el envase – sobre las descripciones de los envases elegidos. Ya que los estudiantes adivinaron qué envase elegido el otro grupo. Les pedí que leyesen las descripciones que habían escrito del envase que ellos eligieron. Así, inició el grupo B: P: ¿Cómo han descrito el envase que han elegido ustedes [refiriéndose al grupo B]? Grupo B (E4): Tiene forma geométrica, está curvada, es pequeña y tiene tapa. Entonces pregunté a todos los estudiantes si podrían adivinar el envase con esa descripción. P: Con esas cuatro indicaciones, ¿sería suficiente para poder determinar cuál fue el envase que yo elegí? Ante el silencio que se hizo en el aula, insistí con la pregunta, esta vez, deteniéndome en cada una de las características enunciadas en la descripción dada por los estudiantes del grupo B. P: ¿Cuáles de estos envases tienen forma geométrica? Nuevamente el aula se quedó en silencio. Entonces T intervino preguntando por el envase que no tiene forma geométrica. Entonces intervine nuevamente: P: Chicos, si yo digo *forma geométrica*. ¿A qué me estoy refiriendo con forma geométrica? Eso hay que tenerlo en cuenta. Y, enseguida vamos a discutirlo un poco más. Luego pedí a los integrantes del grupo A que leyeses su descripción del envase. Grupo A (E2): Tiene forma hexagonal, es pequeño, está cubierto por un papel blanco. P: También tendríamos que pensar. […] De estas características que se ponen en la descripción, […] cuál puede ser la característica determinante para poder saber cuál es o cuál no es el envase. Por ejemplo, al decir hexagonal, ¿podríamos identificarlo directamente? [Los estudiantes estuvieron de acuerdo en que sí]. Luego, dirigiéndome a los estudiantes del grupo B, pregunté: P: ¿Habrá alguna de estas características que pudiera ser clave para decir que [como en el grupo A, el envase] es o no es hexagonal? Grupo B (E4): Eh… no.	

Grupo B (E5): Redondeada. Grupo B (E4): Bueno, curvada. P: ¿Cuántos de esos envases no tendrían forma curvada? Grupo B (E5): Tres [Dudando]. Cuando les pedí que hicieran concienzudamente el conteo de los envases que no tienen forma curvada, concluyeron que estos eran cinco. Por lo que hice notar que *tener forma curvada*, no reduce mucho las posibilidades. Entonces retomé la primera característica enunciada en este grupo para describir el envase elegido, e insistí en la pregunta. P: Cuando yo hablo de tener forma geométrica, a qué me estaré refiriendo. O más bien, ¿a qué se refirieron [dirigiéndome al grupo B]? ¿Qué entienden por forma geométrica? Grupo B (E5): Que puede ser un cuadrado, una circunferencia, o una forma… como una. ¡Una estrella! P: Entonces, […] ¿Cuáles de esos envases no tienen forma geométrica? En ese momento intervino T e instó a los estudiantes en pensar en la pregunta que acababa de plantear, y a separar los envases que no tuviesen forma geométrica. Luego de un par de minutos, los estudiantes del grupo A, que eligieron los envases 4, 8 y 10, iniciaron explicando por qué esos tres envases no tienen forma geométrica. Grupo A (E1): Porque no tienen ninguna… no sé. No es ni un cilindro ni nada. […] No tiene una forma definida [refiriéndose al envase número 10]. Entonces le pedí al estudiante que eligiese otro envase, y eligió el número 4. Entonces pregunté de nuevo: P: ¿Este por qué no tiene forma geométrica? E1: Porque esto está más curvado. Como que, tiene una curva aquí. Entonces no es un cilindro… como este [tomando el envase número 9]. Con respecto al tercer envase, el número 8, los estudiantes respondieron: Grupo A (E1): Este lo hemos puesto… no sé. No, ¡este sí que tiene [forma geométrica]. P: […] ¿Qué forma geométrica tiene? Grupo A (E1): Es un cilindro, pero solo que si… es un poco más grande por arriba. Es un poco más ancho por arriba. Entonces intervine para decir a los estudiantes que formularía algunas preguntas que poco a poco iríamos respondiendo. Así, aprovechando lo que este estudiante había dicho en relación con el envase con forma de cilindro, pregunté:	Al parecer, los estudiantes solo aceptan como formas geométricas a las figuras geométricas habitualmente estudiadas en la escuela.

P: Dentro de lo que hemos aprendido. ¿Hay cilindros que tengan una base más grande que la otra? Nuevamente el aula permaneció en silencio, e instantes después uno de los estudiantes del grupo B mencionó la forma de un trapecio. Por lo que indiqué: P: Tendríamos que pensar si el trapecio es un cuerpo tridimensional o no lo es. Es decir, tendríamos que pensar, a cuál de los cuerpos geométricos que hemos conocido se parece más [el envase en cuestión]. Luego, insistí en que las cuestiones que vayan emergiendo, y que no podamos responder inmediatamente, fueran anotadas para que las consultáramos para la clase siguiente. Por ejemplo: P: […] ¿Cómo se llaman esos cilindros que tienen una base más grande que la otra? […] si no se conocen como cilindros, entonces, ¿Cómo se conocen? ¿Cómo se llaman? Luego me dirigí a los estudiantes del grupo B, y pregunté por los envases que no tiene forma geométrica. Coincidieron con dos de los que también fueron elegido en el grupo A (i.e., 4 y 10). Por tanto, pregunté por los argumentos para esa selección. P: ¿Por qué, por ejemplo, este que tienes en tu mano izquierda (envase 4), no tiene una forma geométrica? Grupo B (E7): Porque no tiene una forma definida. Entonces refiriéndome a todos los estudiantes, les insté a discutir qué significa tener o no una forma definida. P: Cuando yo [poniéndome como ejemplo] hablo de algo que tiene una forma definida, ¿a qué me estoy refiriendo? Grupo B (E5): Que no es exactamente igual a las figuras geométricas que estudiamos. P: A eso parece que nos estamos refiriendo, ¿cierto? Grupo B (E8): No es simétrico. Grupo B (E6): En plan que no son polígonos. Luego pregunté por los argumentos que apoyan la idea de que el envase número 10 no tiene una forma definida. Grupo B (E7): Porque aquí tiene una forma curva muy rara [señalando el envase] […] Grupo B (E6): O sea, que no está en proporción. […] No está proporcionado. P: ¿A qué te refieres con: no está proporcionado? Grupo B (E6): Porque… un hexágono es simétrico y está como que en proporción. Pero, si tenemos una cara ovada y otra cara plana, eso no está… en plan en proporción. Eso está irregular. Eso no está…	

Grupo B (E8): Un hexágono no siempre es regular. Un hexágono puede ser… la base y la parte de arriba puede ser…cortita y luego el resto puede ser largo [Haciendo una señal con sus manos para indicar que no necesariamente los hexágonos que son caras de un sólido, como en el caso del envase número 5, tienen que ser iguales o regulares] En ese momento intervino T para interpretar la idea que estaba enunciando E8 y dijo: […]se refiere, creo, a que está mezclado, curva con línea. A lo que el estudiante asintió. Entonces intervine diciendo a los estudiantes: P: […] si nosotros estamos acostumbrados a ciertos cuerpos que tienen forma geométrica […], como aquellos que normalmente siempre estudiamos. Entonces, habría una pregunta que sería interesante que discutiéramos en el siguiente encuentro. […] Es una tarea que les corresponde. Así, que partiendo de los envases que han sido seleccionados como aquellos que no tiene forma geométrica, pedí a los estudiantes que consultasen en internet, libros o cualquier otra fuente: P: […] si no son formas geométricas, ¿qué formas son? Y, si tiene nombre, ¿Qué nombre deberían tener esos cuerpos que tienen esas formas? ¿será que tienen un nombre? ¿Cómo se llaman? ¿qué características tienen? Para poder nosotros, con propiedad, con seguridad decir: ¡es que esto tiene forma geométrica, y esto no tiene forma geométrica! Y decir por qué. T intervino de nuevo para saber si la tarea solicitada a los estudiantes había quedado clara. Además, agregó que esta tarea debía traerse por escrito. Luego una estudiante intervino preguntando: Grupo B (E5): ¿Cada uno busca información o es grupal? A esto, T contestó que sí, y que en la siguiente clase ellos tendrían cinco minutos al iniciar para juntar en grupo la información consultada. Además, T indicó que recogería la tarea individual porque ello cuenta para nota. 5. Cierre. Al finalizar, pedía a los estudiantes que me ayudasen a recoger los envases y a ordenar las sillas.	Los estudiantes suelen referirse alternativamente a figuras planas y a sólidos de manera indiscriminada, mezclándolos. Creo que luego de que los estudiantes compartan y unifiquen la información que consultará para la siguiente clase, podremos iniciar con la clasificación de los envases. Para ello, será necesario establecer categorías.
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Responder a las preguntas que emergieron durante la clase.	

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Nov. 20 del 2018</td><td>Hora</td><td>09:10-11:05</td><td>Clase</td><td>02</td><td>Investigador</td><td colspan="3">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Video</td><td>V1_Nov23_2018</td></tr>
<tr><th colspan="12">Contextualización</th></tr>
<tr><td colspan="12">Para la segunda clase hemos abordado algunas de las preguntas que surgieron durante la situación de comunicación, en relación con las respuestas dadas por los estudiantes en la primera clase, sobre las formas de los envases. Estas son:
• Si no son formas geométricas, ¿qué son?
• ¿Por qué no son cuerpos geométricos?


Figura 2. Envases numerados.</td></tr>
<tr><th colspan="8">Descripciones y transcripciones</th><th colspan="4">Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Saludo.
Inicié la clase pidiendo a los estudiantes que se ubicaran en los grupos que conformaron en la clase pasada, para que compartiesen y discutiesen las respuestas a las preguntas que habían quedado como tarea. Pasé por los grupos entregando a cada uno un cuaderno para que allí, en adelante, escriban las respuestas a las preguntas que formulamos en clase. Allí también se escribirán los informes y demás tareas que se propongan.

2. Puesta en común de las respuestas.
Antes de que diera inicio la puesta en común, pedí a los estudiantes que dijesen su nombre mirando a la cámara. Esto, porque creí necesario aprenderme sus nombres para la próxima clase.

A continuación, pregunté a los estudiantes quién podría hacer un resumen de las preguntas que emergieron en la clase pasada, e iniciaron los integrantes del grupo B.

E4: si no son formas geométricas [las de los envases], ¿qué son? ¿Por qué no son cuerpos geométricos?
P: Eso, porque cuando estábamos trabajando con los envases, surgió la idea de formas geométricas, ¿cierto? Y, algunos envases no tenían forma geométrica.</td><td colspan="4">Hoy faltaron dos estudiantes, entre ellos, el que aún no lleva el consentimiento informado para poder aparecer en el registro audiovisual. Temo que haya faltado por causa de ese documento.

El conocer los nombres de los estudiantes me permitirá, en adelante, usarlos para las transcripciones de los diálogos. Para efectos de futuras publicaciones, usaré pseudónimos o los designaré con las letras E1, E2, … E8.</td></tr>
</table>

Luego, pregunté qué habían discutido en cada grupo sobre dichas preguntas: E4: O sea que. ¡No es que no fueran cuerpos geométricos! Que es que sí lo son, pero están deformados porque, por ejemplo, la figura 10, que era el envase de H&S, para mí era una mezcla de un prisma rectangular y un cilindro, al tener curvas y formas planas. Entonces le entregué el envase numero 10 a E4 para que, apoyándose en este, ilustrase las ideas que acababa de enunciar. Entonces pregunté a los integres la opinión a los integrantes del A. E1: Nosotros habíamos dicho un poco lo mismo, que no es que no fuera un cuerpo geométrico. Es que estaba deformado por la parte de [no se entiende la palabra, pero con la mano hizo un gesto refiriéndose a la superficie curva del envase] P: O sea que podríamos pensar que el cuerpo que inicialmente estaba allí, ¿cuál sería? E4: como un prisma rectangular. P: Merecería preguntarnos entonces, ¿Cómo fue esa deformación? ¿En qué sentido fue esa deformación? ¿Cuánto se deformó? Luego, recordé que en la clase pasada varios estudiantes habían mencionado que algunos de los envases no tenían una forma definida, por lo que les pregunté que, si después de lo que habían consultados para la clase de hoy, seguían pensando que si dichos envases tenían o no una forma definida. E4: Es que, es como definida [la forma del envase], pero no tienen un nombre en concreto. P: Ah, bueno. Eso podría ser diferente. No tiene un nombre en concreto dentro de lo que nosotros hemos conocido. E4: Sí. P: Pero, su forma [la del envase], ¿está o no está definida? Entonces los estudiantes permanecieron en silencio. Por tanto, quise profundizar un poco en aquello de la idea de que los envases tienen o no una forma definida. Para ello, tomé el otro envase de H&S –ya que tenemos dos de cada clase– y pregunté si su forma, independientemente de que conociésemos o no su nombre, cambiaba cuando lo movía de un lugar a otro. Algunos de los estudiantes respondieron instintivamente que sí, pero luego, tras insistir en la pregunta, todos estuvieron de acuerdo en que el envase no cambió de forma. Luego intervine nuevamente, tras haber cambiado varias veces la posición y la manera de apoyarlo (i.e., parado, acostado), y pregunté: P: ¿Cambió de forma [el envase]?	 Aunque inicialmente lo habíamos considerado, pero lo quitamos del enunciado de la situación de comunicación, sí que es cierto que los estudiantes asocian la forma de los envases con su uso. Prueba de ello es la referencia que hizo E4 al envase de shampoo de marca H&S. Ha surgido una idea interesante: los estudiantes asocian *tener una forma definida*, con tener un nombre para dicha forma.

Todos: ¡No! P: […] ¿Qué nombre le ponemos por ahora [al envase]? E5: Bote. Entonces, con el objeto de invitar a los estudiantes a reflexionar sobre la idea de llamar *bote* al envase, planteé la situación hipotética en la que llegásemos a un almacén a pedir que no vendan un bote. Entonces pregunté a los estudiantes: P: ¿Yo podría esperar que todos los botes sean como ese [señalando el envase número 10]? Todos: ¡No! P: Entonces, tendría que empezar a especificar… ¿cómo tendría que especificar esa forma para…? E7: ¡Bote de H&S! [Risas generalizadas] P: supongamos que todos [los envases] que están en la estantería, están así blancos del todo. Entonces, ¿cómo haría la persona que está allí asesorándome para ir a tomar exactamente ese? […] ¿Sería esa una indicación apropiada? E7: No. P: Entonces, tendríamos que pensar, cuál sería esa indicación que yo debo dar, esas instrucciones, para que el bote que el bote que me entreguen sea ese [el numero 10]. E5: También le puede enseñar una imagen. Sobre esta última idea no quise profundizar, porque ello constituiría una solución práctica que evitaría el problema de nombrar el envase. Después, tomé algunos de los envases y pregunté a los estudiantes si estos tienen forma definida, a lo que los estudiantes respondieron en todos los casos afirmativamente. Por tanto, pregunté: P: Entonces, ¿habrá alguno de ellos [de los envases] que no tenga una forma definida? Nuevamente los estudiantes se mostraron indecisos. Por lo que les insté a pensar en que, si moviésemos los envases, alguno de ellos cambiaría su forma. Y luego pregunté: P: ¿La forma de los envases que hemos traído aquí, […] está o no está definida? Todos: Sí. P: Otra cosa, es que no sepamos qué nombres atribuirles [a los envases]. […] Merecería la pena, aunque tal vez pensemos que eso no forme parte de la clase de matemáticas, preguntarse, qué cosas en la naturaleza no tienen forma definida. E5: El agua. P: ¿Cuál?	En el momento de la clasificación de los envases, veremos si los estudiantes logran establecer si es o no útil incluir criterios como la función o la imagen del envase, para llevar a cabo esta tarea.

E5: Un líquido, el agua. P: ¿Por qué? E5: Porque puede cambiar de forma. Si lo pones por ejemplo en un cilindro, pues toma la forma del cilindro. Si lo pones en un tetrabrik, que tiene una forma… pues toma la forma cuadrada. Un líquido… cambia de forma. Entonces, a partir de la última idea expuesta por E5, y de manera un poco ingenua pregunté si los envases que teníamos eran líquidos, a lo que los estudiantes respondieron que no, que eran sólidos. Ello lo pregunté para poder argumentar porqué estos envases no cambian de forma, aun cuando los cambiemos de posición. P: Tendríamos que empezar a pensar ahora, qué nombre tiene, o qué nombre le atribuimos a esa forma. Retomando la respuesta dada por E4, en relación con la deformación que podrían haber sufrido algunos cuerpos geométricos, hasta llegar a tomar la forma de los envases, pregunté: P: ¿A partir de qué cuerpo es que se obtiene este [señalando el envase 10]? […] ¿A partir de cuál cuerpo de los que yo conozco se puede obtener el envase número 10?, y ¿qué debe transformase?, ¿qué debe deformarse? Lo mismo podríamos preguntarnos por este envase [señalando el envase número 4]. En concreto, establecimos la tarea así: • Dado que en clase hemos dicho que algunos de esos envases se obtienen a partir de la deformación de otros sólidos, entonces: 1. ¿Cuáles son los sólidos de los que parte cada uno de estos envases? 2. ¿qué deformación ha sufrido cada uno de estos [envases]? Luego, retomando la idea, también presentada por E4, sobre que el envase número 10, era una mezcla entre un prisma rectangular y un cilindro, indiqué: P: Tal vez, cuando pensemos en las deformaciones [de los sólidos], podríamos también preguntarnos, que no necesariamente es una deformación. Probablemente sea, como acabas de decir [E4]: una mezcla de otros sólidos. Y si eso fuese así: ¿cuáles son esos sólidos? Invité a los estudiantes a que se cuestionasen sobre esta idea, en el caso de cada uno de los envases. Luego me dirigí a los estudiantes del grupo A, y pregunté si tenían algo para agregar.	

E1: Nosotros hemos puesto la definición de cuerpo geométrico. Un cuerpo geométrico, es un elemento que dispone de tres dimensiones: alto, ancho y largo. Son figuras geométricas que delimitan o describen volúmenes. Todos los objetos son geométricos porque tienen largo, ancho y alto.

A partir de la primera parte de la definición leída por E1, invité a los estudiantes a que se cuestionasen si las sillas del aula podrían ser consideradas como cuerpos geométricos. A lo que los estudiantes respondieron que sí. Luego, centrado en la segunda parte de la definición pregunté:

P: ¿Qué es una figura geométrica?
E3: Es plana.
P: Ser plana, qué significa.
E3: que no tienen volumen.

Luego, invité a los estudiantes que cada vez que encontremos o elaboremos una definición, tratemos de comprenderla, indagando por los términos, ideas, y demás elementos que contenga. Después, y dado que con las respuestas que habían llevado los estudiantes, al parecer todos los cuerpos que existen son geométricos, les planteé una pregunta, más para que reflexionases que para responderla allí mismo. Esta fue:

P: […] si a la luz de estas consultas que hemos hecho, prácticamente todo puede ser considerado objeto geométrico, ¿Por qué todo no cabe dentro de las explicaciones de la geometría como objetos geométricos? Es decir, ¿Por qué cuando me enseñan geometría, […] o por qué cuando los libros proponen la enseñanza de la geometría, […] no está que un objeto geométrico sea una silla? ¿Qué piensan?
E1: Que los [objetos geométricos] que te enseñan, son los regulares.
P: y, ¿Cuáles son los regulares?
E3: Los que tienen nombre.
P: […] ¿Como cuál?
E1: Prisma.
P: ¿Todos los prismas son regulares?
E1 y E3: No.
P: ¿Qué significa ser regular?
E5: Que es simétrico.
P: Y. ¿Qué significa ser simétrico?
E5: Que si tú partes eso [la figura] por la mitad, es igual a un lago que al otro.

Entonces, dibujé a mano alzada un hexágono “regular” en una hoja de papel, y pedí a E5 que con ayuda de esta no enseñase la idea de simetría que acababa de enunciar.

E5: Yo lo que haría es doblarlo así [haciendo que los dobleces coincidieran con los vértices opuestos del hexágono] P: Y, ¿será la única forma de simetría que existe? E5: […] Puede ser de distintas formas, pero si no lo haces por la mitad, no te da igual. Entonces, en relación con el ejemplo de simetría presentado por E5, pregunté: P: […] la forma de partirlo [el hexágono] siempre ha sido a la mitad. ¿Habrá una forma de partirlo, que no sea a la mitad, y que también indique alguna forma de simetría? Entonces, dije a los estudiantes que como habían mencionado en el discurso ideas como la de figura geométrica, figura plana, figura regular, simetría; entonces les proponía la pregunta: Si yo tengo un polígono regular, ¿qué tipo de simetrías tiene un polígono regular? Luego, propuse a los estudiantes que, además de basarnos en lo que ya habíamos consultado y discutido, para el próximo encuentro, incluyendo las ideas de simetría y regularidad, clasificaremos los envases con los que hemos trabajado desde nuestra primera clase. Otras preguntas que propuse, basado en las discusiones que tuvieron lugar en la clase, fueron: • ¿Habrá algo que no sea geométrico? • ¿Qué es la geometría? Planté entonces una situación hipotética, donde uno de sus compañeros les diría que iba para clase de geometría, y pregunté: P: ¿Ustedes qué se imaginan que [su compañero] va a ir a aprender allá? E5: figuras. Puede estar calculando, también áreas. Puede hacer vistas. Puede hacer… varias cosas. Cuando pregunté si me había hecho entender, T intervino diciendo que tal vez los estudiantes no tienen claro qué es lo que deben responder para el otro día. Por lo que pregunté si era así. Entonces E4 respondió leyendo en su cuaderno: E4: **¿Cuáles son los sólidos de los que parten cada uno de estos envases? ¿Qué deformación ha sufrido cada uno de estos? Si la idea es de la mezcla de otros, ¿de cuáles vienen? ¿Habrá otra forma de simetría sin partir por la mitad?**	Convendría en algún momento hacer una actividad para analizar que es la simetría y que tipos de simetría existen en las figuras planas y en los sólidos.

<table>
<tr>
<td>Estas preguntas las van a responder individualmente. Al iniciar la clase, daremos a los estudiantes unos minutos para que junten las respuestas en el cuaderno que les entregué al iniciar la clase.

3. Cierre.
Al finalizar, pregunté a los estudiantes si tenían alguna duda en relación con lo que habíamos propuesto, y respondieron que no. Insistí en que las preguntas que se formulen deben ser respondidas, para que cuando se discutan las respuestas, todos puedan aportar. T intervino diciendo que los estudiantes suelen responder a los estímulos de la calificación positiva o negativa.
Finalmente, pregunté a los estudiantes por el libro que suelen usar en la clase de matemáticas, que además llevan a esta clase, y me dijeron que es la editorial SM. Entonces les dije que allí también podrían consultar las respuestas a las preguntas que van emergiendo en la clase.</td>
<td>Para la discusión en la próxima clase, me basaré principalmente en estas preguntas. Aun cuando han emergido otras durante el desarrollo de la clase. Esto, porque creo que quienes no hayan copiado todas las preguntas, recurrieran a E4 para saber cuál es la tarea.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Aunque creí que hoy podríamos iniciar con la clasificación de los envases. No fue posible, porque el tiempo se invirtió en la discusión que surgió a partir de las respuestas que trajeron los estudiantes.
• Responder a las preguntas formuladas en clase.</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

<table>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Nov. 27 del 2018</td><td>Hora</td><td>10:05-11:00</td><td>Clase</td><td>03</td><td>Investigador</td><td colspan="3">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Video</td><td>V1_Nov27_2018</td></tr>
</table>

Contextualización

Para la tercera clase hemos abordado algunas de las preguntas que surgieron durante la segunda clase. Luego de esto, hemos iniciado con la segunda fase de la primera tarea; es decir, con la situación de **situación de *observación y análisis***. Para ello, **hemos pedido a los estudiantes que clasifiquen los envases** teniendo en cuenta sus conocimientos previos y las discusiones que han tenido lugar en las dos primeras clases, y en la primera parte de esta tercera clase. Así, las preguntas con las que iniciamos hoy fueron:

- **¿Cuáles son los sólidos de los que parten cada uno de estos envases?**
- **¿Qué deformación ha sufrido cada uno de estos?**
- **Si la idea es de la mezcla de otros, ¿de cuáles vienen?**
- **¿Habrá otra forma de simetría sin partir por la mitad?**

Figura 3. Envases numerados.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Inicié la clase pidiendo a los estudiantes que se ubicaran en los grupos que conformaron en la primera clase, para que compartiesen y discutiesen las respuestas a las preguntas que habían quedado como tarea. Para ello, los estudiantes invirtieron cerca de 9 minutos. 2. Puesta en común de las respuestas. Para la puesta en común, con la que iniciaron los estudiantes del grupo B, pedí que se le leyesen las preguntas que habían quedado como tarea. E5 y E4 colaboraron con ello. En relación con la primera pregunta, E4, refiriéndose al envase número 1, dijo:	Aunque hoy regresó E6, el estudiante que había faltado las dos últimas clases, de nuevo olvidó traer el consentimiento informado. Por tanto, tampoco en esta ocasión lo filmé, aunque sí participó de las actividades desarrolladas en clase. Por otro lado, E8, el octavo estudiante de la clase no ha asistido a ninguna de las clases que hemos tenido.
E4: Yo he puesto que [el envase número 1] viene de un cilindro que se ha pulido la parte de arriba, que parece como media esfera, y se ha presionado aquí [señalando la altura media del envase] un poco por el centro. Y… pues eso, que es una mezcla de una esfera y un cilindro. Luego me dirigí a los estudiantes del grupo A, y pregunté si tenían algo para decir con respecto a la primera pregunta.	Creo que avancé muy pronto y no permití que E4 continuara explicando qué cuerpos conformaban el resto de los envases. **Debo propiciar un espacio para profundizar en ello**, porque claramente podría mencionar varios de los sólidos que se estudian en la escuela.

E1: Nosotros hemos puesto que, en general, todos [los envases] viene de prismas, cilindros, y hay una estrella. Una con forma de estrella. P: Eso indicaría que todos los envases que hemos traído acá podrían ser construidos a partir de la combinación de primas y… E1: Y cilindros. Entonces, tomando como ejemplo nuevamente el envase número 1, pregunté a los estudiantes del grupo A, basado en la respuesta que acababan de dar, que, si dicho envase podría ser construido a partir de prismas y de cilindros, cómo explicaban la forma curva que este tiene en la parte superior (i.e., junto a la tapa). E1: ¡No, pero!, […] nosotros hemos puesto que todos, la figura principal, por así decirlo, son prismas o cilindros. Y luego, esos prismas y cilindros, hemos dichos que… casi todos en alguno de sus lados sufren alguna variación de forma curvada. Por ejemplo, aquí [señalando con el dedo la forma curvada en la parte superior del envase nº1]. P: O sea que ese [el envase nº1] partiría de… E1: De un cilindro. P: ¿Y, aplicaría para todos? E1: Para todos no, para algunos. P: ¿Para cuáles no? Entonces, E1 tomó el envase nº6 y dijo: E1: Para este. Este es un prisma. No tiene ninguna variación. P: ¿Solamente prisma, y ya está? E1: Sí. P: Entonces, ¿cómo explicaríamos lo que ocurrió acá en la parte de arriba? [Risas] E1: Está doblado, parece. P: Tendríamos que preguntarnos, entonces, si sería necesaria otra pieza arriba… E5: Un prisma triangular, ¿no? P: Probablemente. Luego, basado en lo que E1 había dicho, pregunté: P: Podría ser entonces abajo un prisma, ¿de qué tipo? E1: No lo sé. P: […] allí habría una pregunta interesante […], ¿Qué tipos de prismas hay? E3: ¡Yo lo sé! P: Dinos, por favor.	 La referencia que he hecho de *arriba* en los envases ha sido en relación con la manera en que habitualmente se apoyan.

E3: Puede ser recto u oblicuo. Y según su base, triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal. Aproveché la respuesta dada por E3, para hablar –no explícitamente– de una manera de clasificar los prismas. P: […] Podríamos decir que hay un grupo de prismas. Puede haber los que sean rectos y los que sean oblicuos. Y después, tendríamos que ver… E3: Según sus bases. P: ¿Las bases deben ser regulares? E3: ¡No! P: ¿Pueden ser irregulares? E3: Si. Luego, pedí a los estudiantes que analizásemos otro de los envases. Entonces los integrantes del grupo B, tomaron el envase nº2. P: […] ¿a partir de qué cuerpos de podría construir? E4: Prisma rectangular. Y no tiene ninguna deformación. Bueno, sin contar donde está la tapa o tapón. Es un prisma rectangular sin más. P: ¿Y, porqué se llama prisma rectangular? E4: Porque sus bases son rectángulos. P: Si yo dijera: prisma rectangular. Y entiendo que su base es un rectángulo. ¿No podría haber la posibilidad de que haya prismas rectangulares oblicuos? Entonces los estudiantes permanecieron en silencio, por lo que insistí con la pregunta: P: ¿existirá un prisma oblicuo de base rectangular? Con lo cual, decir prisma rectangular, ¿sería suficiente para referirnos a esta pieza [envase]? Ante el silencio de los estudiantes, decidí tomar el envase nº3 y preguntar por los cuerpos de los que puede haber partido. Es decir, de los que lo conforman y que, además, podrían haber sufrido alguna transformación hasta dar como resultado dicho envase. P: [El envase nº3], ¿A partir de qué cuerpos puede construirse? E4 y E6: Estrella. E5: De un pentágono.	Viendo el vídeo, noto que los estudiantes parecen sentirse algo desconcertados cuando les formulo preguntas que tal vez antes no habían tenido que responder.

La idea de E5 hizo referencia a que se podría partir de un prisma pentagonal al que se le irían quitando trozos, hasta que tendría una forma de estrella. En relación con la idea de *forma de estrella*, pregunté si ello era suficiente para referirnos al envase nº3. Con lo cual, formulé una pregunta para instar a la reflexión, más que para esperar una respuesta. P: […] ¿Será que cada vez que hablo de estrella, [esta] siempre tiene cinco puntas? En este punto de la clase, quise hacer un resumen de lo dicho, y verificar qué preguntas habíamos abordado hasta el momento. Luego, pregunté por los cuerpos de los que podría partir el envase nº10. P: […] ¿Qué cuerpos estaríamos mezclando acá? E4: Prisma rectangular y cilindro. Entonces aproveché para preguntar a los estudiantes si alguna vez habían trabajado con algún programa de geometría dinámica como GeoGebra o Cabri. Ellos respondieron que no. Expliqué que ello nos serviría para simular estas composiciones y transformaciones de las que parten de las que hemos venido hablando a lo largo de la clase. Es decir, que, con la ayuda de este tipo de programas, resultaría más sencillo ilustrar la composición de la que hemos estado hablando en repetidas ocasiones. Finalmente, dije a los estudiantes que más adelante veríamos como componer sólidos en uno de estos programas, y de paso, aprenderíamos un poco sobre su funcionamiento. Luego de esto, pregunté por la última cuestión, la que indagaba por otra forma de simetría que no implicase partir a la mitad. E4: ¿Habrá otra forma de dar simetría sin partir por la mitad? P: Esa pregunta partió de la idea del hexágono regular y del trabajo que E5 nos estaba mostrando cuando doblaba la hoja. ¿qué respondieron a esta pregunta? E1: Esta no la copiamos. E3: Es que tu dijiste unas [preguntas] y yo copie otras. O sea, la tres y la cuatro… E4: Cada uno tenemos las preguntas que nos dijiste. En ese momento intervino T, para hacer notar que al terminar la clase era necesario poner en común las preguntas, de modo que todos los alumnos lleven las mismas. Entonces, pregunté a los integrantes del grupo A, qué preguntas habían escrito. E1: ¿Qué es regular? P: ¿A qué nos referimos cuando hablamos de regularidad, de regular?	A pesar de que desde el inicio dije a todos los estudiantes que las preguntas que fuesen surgiendo deberían escribirse, ya que formaban parte de las tareas que en cada clase estableceríamos, al parecer esto aún no había quedado claro. Sin embargo, en la clase pasada, E4 leyó en voz alta las preguntas que debían responderse para esta clase.

E1: nosotros hemos puesto que, los poliedros regulares cuyas caras son polígonos regulares iguales, del mismo tamaño, con vértices en los que concurren el mismo número de caras, y con ángulos idénticos. P: A la luz de esta definición, […] ¿alguno de estos envases tiene forma de poliedro regular? Cómo E1 eligió inmediatamente el envase número 2, le pedí que leyera nuevamente, parte por parte, la definición, para analizar si dicho envase, y de paso todos los demás, encajaban en la definición que acababa de leer. Concluimos que ninguno de ellos es un poliedro regular. P: ¿Qué otra pregunta? E1: Y, qué es la geometría. P: ¿Qué es la geometría? E1: La geometría es una parte de la matemática, que se encarga de estudiar las propiedades y las medidas de una figura, en un plano o en un espacio. Aproveché la respuesta que dio E1 para invitar a los estudiantes a que reflexionases sobre la geometría. P: ¿Alguna vez nos hemos preguntado si la geometría siempre fue igual? […] ¿Toda vez que estudiamos geometría, estaremos siempre pensado en propiedades de figuras y cuerpos? […] Parece que siempre se reduce a eso. Entonces hice una breve mención a la situación práctica que históricamente parece haber dado origen a la geometría, en la que por las inundaciones del Nilo generaba la necesidad de la delimitación de los terrenos. Con lo cual, medir la tierra era una necesidad vinculada para establecer proporcionalmente los impuestos que se debía pagar. Pregunté si había alguna pregunta, pero nadie respondió. Entonces T intervino preguntando a E1 de donde había sacado la definición que acababa de leer. E1: De Google. Entonces, para retomar la pregunta que no había sido respondida, pregunté a E5 si había abordado el tema de las simetrías. P: […] ¿E5, respondiste esa? E5: No. P: Bueno, pues queda esa [pregunta]. Qué otro tipo de simetrías puede haber en las figuras, por ahora, en las figuras planas […].	

3. Clasificación de los envases.

P: Con esto que hemos hecho hasta ahora, yo creería que ya tenemos suficiente información, o por lo menos una información básica interesante, para poder clasificar estos envases. Así que lo que ahora vamos a hacer es intentar clasificarlos. La primera forma de clasificarlos, pues es que empecemos a separarlos en base a los criterios que ustedes mismos vana elegir.

Para realizar esta clasificación, dije a los estudiantes que tendrían 10 minutos.

4. Puesta en común de la clasificación de los envases.

Faltando aproximadamente faltando 10 minutos para que terminase la clase, iniciamos la puesta en común de las clasificaciones hechas en cada grupo. Para ello, E2, integrante del grupo A, pasó al frente a escribir en la pizarra la clasificación (figura 2) que había hecho junto con sus compañeros. Mientras ello sucedía, aproveché para decir a todos los estudiantes cuál sería la tarea para la siguiente clase.

P: […] La única tarea que tendríamos para el siguiente día […], es completar [individualmente] la clasificación que hemos hecho acá. […] La única condición es que esta clasificación que vamos a traer para el siguiente día, la puedan hacer apoyados en un gráfico […]

Tanto los estudiantes como T manifestaron no entender a qué me refería yo con lo de hacer la clasificación con un gráfico. Por tanto, debí dedicar un par de minutos para explicar que lo que pedía era que organizaran en conjuntos la clasificación. Así, todos los elementos del mismo tipo estarán en el mismo conjunto.

Del grupo B, fue E5 quien pasó a la pizarra a escribir la clasificación (figura 3) que habían hecho.

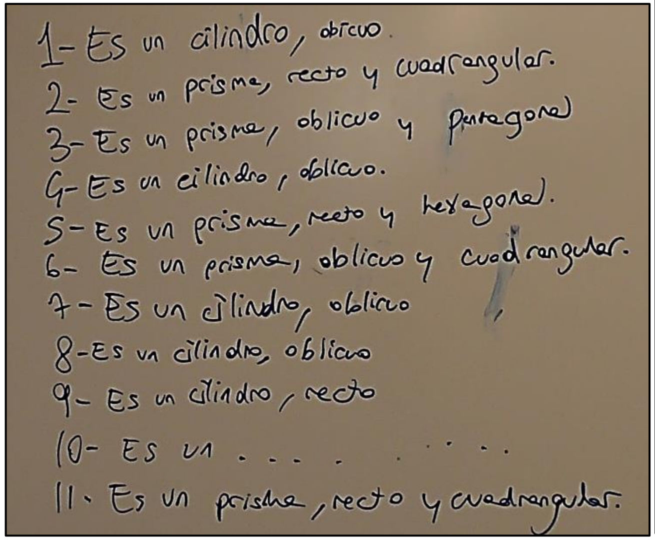


Figura 2. Clasificación de los envases – Grupo A.

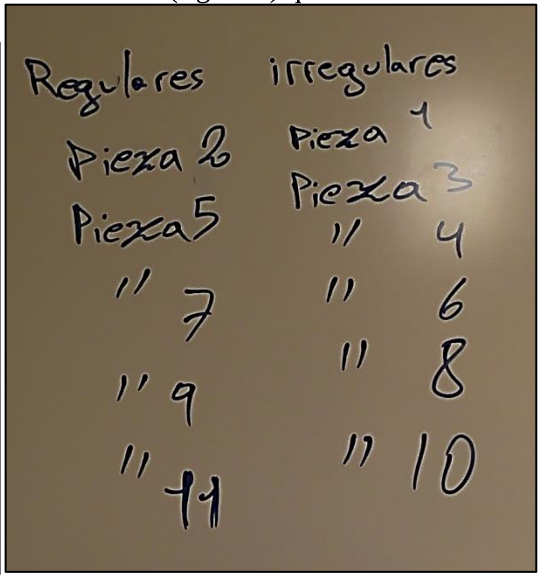


Figura 3. Clasificación de los envases – Grupo B.

Insistí en la tarea, a fin de que quedase claro en qué consistía. P: La tarea es esta. Si en este grupo se ha hecho esta clasificación, pues vamos a poner todos los [envases] que sean del mismo tipo, en un conjunto. Y, lo que sean de otro tipo, en otro conjunto. Cómo van a representar ese conjunto, como quieran: a través de un dibujo, a través de una tabla, […] como quieran. T intervino para indicar que puede haber varios conjuntos. 5. Cierre. Como el timbre para ir al descanso sonó, tomé un par de minutos para indicar a los estudiantes que, en la próxima clase tendrían unos minutos para discutir la tarea al interior de cada grupo, para luego hacer la puesta en común.	
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Revisar la clasificación hecha en clase y ponerla en conjuntos.	

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Nov. 30 del 2018	**Hora**	09:10-10:05	**Clase**	04	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Nov30_2018 V2_Nov30_2018

Contextualización

Para la cuarta clase hemos revisado la **clasificación de los envases** que han completado loes estudiantes, con base en el trabajo realizado en la segunda parte de la clase pasada.

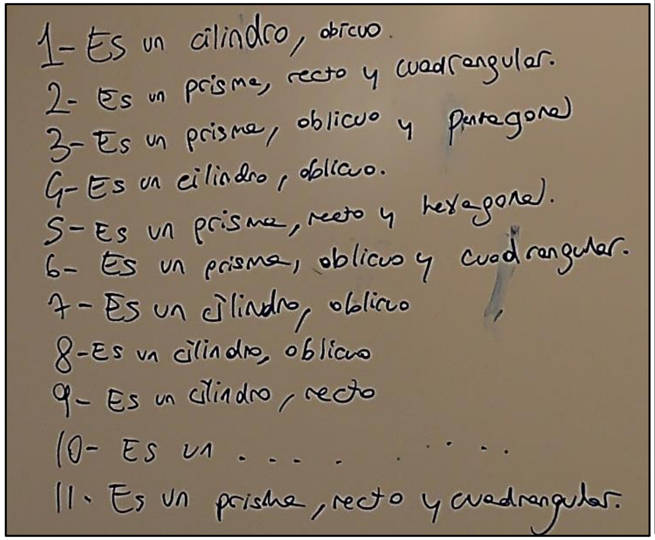


Figura 2. Clasificación de los envases – Grupo A.

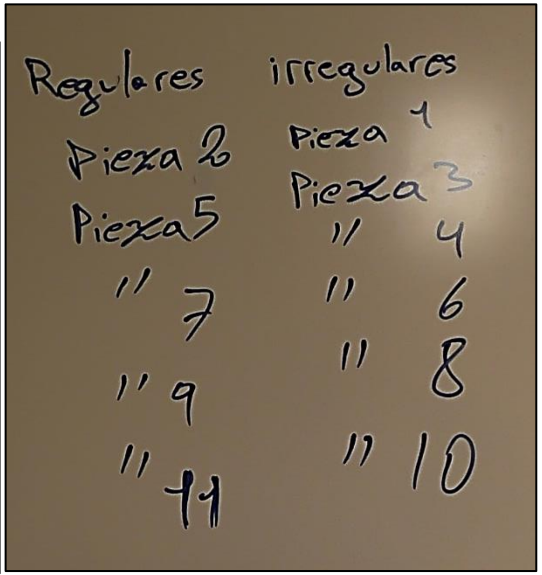


Figura 3. Clasificación de los envases – Grupo B.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo. Inicié la clase pidiendo a los estudiantes que se ubicaran en los grupos habituales, para que discutiesen la clasificación que había completado cada uno de ellos en casa. Para ello, los estudiantes invirtieron cerca de 5 minutos. Dije a los estudiantes que, dado que el trabajo que hemos realizado ha implicado la manipulación de los envases y que las sillas que hay en el aula no son cómodas para ello, si se sentían más cómodos trabajando en el piso, lo podrían hacen sin ningún problema.	Hoy E6 trajo el consentimiento informado. Por tanto, a partir de esta clase aparecerá en las videograbaciones.

2. Puesta en común de la clasificación completada en casa. Para iniciar con la puesta en común, pregunté a los estudiantes, qué había cambiado en la clasificación que habían discutido, en relación con la que hicieron en la clase pasada. Los primeros en responder fueron los chicos del grupo A. E1: Solo hemos puesto en algunos [envases] regular y en otros irregular. Entonces, E3 pasó a la pizarra a escribir la nueva clasificación. Entre tanto, les dije a los estudiantes que analizaríamos dicha clasificación. Por otra parte, los estudiantes del grupo B, indicaron que la clasificación que hicieron la clase pasada, no había cambiado. Aproveché para preguntar a los estudiantes si antes habían tenido que hacer clasificaciones en alguna asignatura. Ante el silencio de los estudiantes, consideré necesario precisar la diferencia entre hacer una clasificación una vez dado el criterio para ello, y hacerlo teniendo que elegir dicho criterio. Solo E1 dijo que sí había hecho antes clasificaciones. P: […] ¿Nos han pedido clasificar alguna vez? E1: El año pasado sí que tuvimos… por lo menos mi grupo sí que clasificamos algo. P: ¿Qué clasificaron, E1? E1: Como estos objetos [señalando los envases]. Bueno, otros objetos. P: ¿El criterio que usaron en ese momento, lo recordaste para este trabajo que estamos haciendo? E1: ¡Sí! P: ¿Cuáles de esos criterios usaste aquí, y propusiste alguno? E1: Pues, clasificarlo en prismas, cilindros y como sea el objeto; y en oblicuo y recto. Es lo que me acuerdo. Luego me dirigí a los estudiantes del grupo B y pregunté si el criterio usado, en su caso el de regularidad, lo habían aprendido antes o solo se habían basado en las discusiones que han tenido lugar en nuestras clases. Ellos respondieron que lo hicieron basándose en conocimientos previos. 3. Analizando las clasificaciones Antes de iniciar, les compartí a los estudiantes un segmento del texto *El mundo de los poliedros*, donde se sugiere el proceso a seguir para llevar a cabo una clasificación. Les dije que más adelante lo usaríamos.	Al parecer, los estudiantes sí han hecho antes clasificaciones, pero con criterios previamente establecidos.

Como la clasificación que los chichos del grupo A pusieron en la pizarra, seguía apareciendo a manera de lista, recordé a los estudiantes que la tarea era, además de completar la clasificación, ponerla en conjuntos de manera que los envases que compartían las mismas características debían quedar juntos. No obstante, no lo hicieron así. Por tanto, quise propiciar una discusión que diera lugar a la conformación de dichos conjuntos.

P: […] ¿Cuáles de estos [envases] estarían en el mismo grupo?
E1: Los prismas y los cilindros… en diferentes grupos. En uno los prismas y en otro los cilindros.

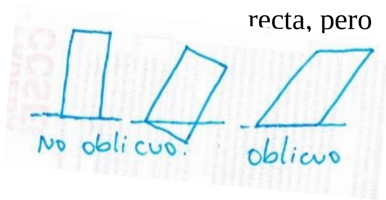
Decidí entonces tomar cada uno de los elementos de la lista que pusieron los estudiantes, y analizarla punto por punto.

P: Según esta clasificación, el [envase] número 1 […] parte de un cilindro, y es oblicuo, y es irregular. […] ¿Es oblicuo?
E5: Oblicuo es que esté inclinado.
P: ¿Este está inclinado?
E1: No, yo creía que era estas curvas [señalando con el dedo la parte superior del envase, junto a la tapa].
P: ¡Ah, ya te entiendo! Entonces vamos a empezar a definir unos parámetros para hablar el mismo idioma. […] Lo que plantea E5, me parece que es una información que ya ha estado institucionalizada, O sea es algo convencional.

Pedí a E5 que explicara el concepto de inclinación al que se estaba refiriendo. Entonces, explicó:

E5: [Oblicuo] es que no está recto, que no está… Es básicamente como la torre de Pisa. Está un poco inclinada.

Vi necesario aclarar que, en el caso de la torre de Pisa, en sus inicios estaba recta, pero luego se inclinó, con lo cual su base también lo hizo. Por tanto, ilustré en la pizarra la situación, para establecer la diferencia, y para indicar a que no referiríamos con el término *oblicuo*.



Una vez aclarado esto, pregunté:

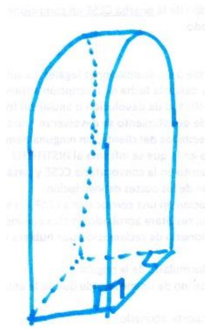
P: ¿El [envase] número 1 entraría dentro de los oblicuos o no?
E1: No.
P: El [envase] número 2, ¿cuál es?

Luego de leer lo que los estudiantes pusieron en la pizarra para el envase nº2, es decir, **prisma recto, cuadrangular, regular**, pregunté:

Los estudiantes utilizaron la misma numeración que propusimos para los envases desde el inicio.

P: ¿Por qué es un prisma?
E1: Porque tiene todos los lados rectos. O sea, no tiene ninguna circunferencia por ningún lado, o ninguna curva.
P: […] cuando te refieres a la característica de *recto*, y por la señal que haces con tus manos, entendería que es por la manera en que inciden las caras. Una cara con otra, se encuentran formando ángulos…
E5: Caras paralelas dos a dos, también.

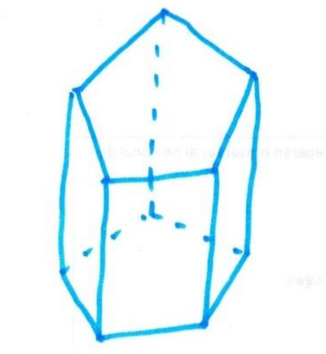
A pesar de que el aporte de E5 fue interesante, quise recalcar en la idea planteada por E1, porque consideré que allí podría haber errores conceptuales importantes. Por tanto, insistí:



P: […] si bien este puede ser un prisma recto, cuadrangular, regular. No quiere decir que todos los cuerpos que sean rectos, en esa característica [de la incidencia de sus caras], sean prismas.

Entonces, esbocé el gráfico de un sólido que tendría algunas caras que inciden formando ángulos rectos, para ejemplificar que no necesariamente este es un prisma.

P: […] Otra cosa diferente, es que puede haber prismas rectos.



En ese momento E5 pidió la palabra:
E5: Pues sus caras [las de un prisma], son rectas, y sus caras sus paralelogramos. Para que sea un prisma, tiene que ser: sus caras rectas, me refiero… planas, y sus bases paralelogramos.
P: […] Supongamos que yo tengo una base pentagonal. ¡Que no es un paralelogramo! Y tengo otra base por acá arriba, que es exactamente igual a esta que tenemos abajo. Es decir, son congruentes. Son paralelas […]. ¿Sería un prisma? ¿Sus bases son paralelogramos?
E5: No.
P: Por tanto, no podríamos decir que, en todos los prismas, las bases son paralelogramos, porque puede haber un prisma de base pentagonal.

Entonces propuse la pregunta **qué es un prisma**, como parte de la tarea para la próxima clase.

Luego, continué con el análisis de la clasificación del envase nº2.

P: […] ¿Qué significa cuadrangular?
E1: Que sus bases son… cuadrados, no son rectángulos.

Pregunté a los demás estudiantes sobre la referencia que hizo E1 sobre lo cuadrangular en tanto cuadrado. Pero ante el silencio, y un gesto de E5 que con su mano indicaba que no estaba del todo de acuerdo con lo dicho por E1. Decidí proponer un análisis ingenuo de la palabra cuadrangular. Con lo cual, estuvimos de acuerdo en que dicha palabra parece referirse a *cuatro ángulos*. P: ¿Qué una figura tenga cuatro ángulos, implica que siempre sea u cuadrado? E1: No. P: ¿Por qué E1? E1: Porque también están los rectángulos. P: ¿Los cuadrados son rectángulos? E1 y E5: No [los demás estudiantes negaron con la cabeza]. P: ¿Por qué? E5: Porque un cuadrado tiene los cuatro lados iguales, y un rectángulo tiene lados iguales dos a dos. Entonces insté a los estudiantes a analizar con detenimiento esta última idea. Para ello, esbocé un cuadrado y un rectángulo, basado en la definición dada por E5, y pregunté: P: […] ¿Qué tiene en común el rectángulo y el cuadrado? E5: Que tienen cuatro lados. Hice notar que la característica de tener cuatro lados, podría ser un criterio para clasificar figuras, con lo cual, todas aquellas que cumpliesen con dicho criterio, serían cuadriláteros. A partir de allí, de la familia de los cuadriláteros, planteé: P: […] Por lo que hemos dicho aquí, al parecer el cuadrado es de la familia de los cuadriláteros, porque tiene cuatro lados iguales. E5 agregó que, en los cuadriláteros, la suma de sus ángulos internos es 360º, por lo que pregunté: P: […] ¿Ese sería un criterio para distinguir el rectángulo del cuadrado? E5: Pero los dos tienen 90º. El cuadrado y el rectángulo. Entonces, indiqué que si tanto en el cuadrado como en el rectángulo, la suma de los ángulos internos es 360º, ello no sería un criterio útil para diferenciarlos, precisamente porque desde dicho punto de vista, no hay diferencia entre estos cuadriláteros.	Considero necesario instar a los alumnos a que analicen la clasificación que se hace de los cuadriláteros en los libros de texto.

Con el objeto de hacer énfasis en que resulta determinante la elección de un criterio para clasificar, y de cómo dicho criterio incide a su vez en el proceso de clasificación, propuse el ejemplo de la clasificación de este grupo de estudiantes. Esto, para hacer notar que, según el criterio usado, se definirían diferentes conjuntos. El criterio altura surgió como un posible criterio de clasificación, así como la idea de establecer intervalos, para que no resultasen tantos conjuntos como estudiantes, dado que al parecer no todos tienen la misma altura. En ese momento, consideré que ya deberíamos acudir a la definición de clasificación que minutos antes les había compartido los estudiantes. 4. Definición del proceso de clasificación. Para propiciar una discusión en torno a la clasificación que habían hecho los estudiantes, leí en voz alta el segmento del texto *El mundo de los poliedros*, donde se sugiere el proceso a seguir para llevar a cabo una clasificación. No sin antes explicar que, esta es una manera para clasificar, por tanto, no es ni la mejor ni la única. **Sobre el proceso de clasificación** Tomado del libro: Poliedros [Guillén, G. (1991). El mundo de los poliedros. Síntesis.] Al abordar el problema de la clasificación se insiste especialmente en lo siguiente: 1. Una clasificación depende del criterio utilizado para dividir en clases todo el universo objeto de la clasificación. Lo que importa no es tanto utilizar uno u otro criterio, sino que, una vez elegido el mismo, se mantenga a lo largo de todo el proceso y al finalizar se sea capaz de enumerar cada una de las clases. 2. Cuando se clasifica, una vez determinado el conjunto universo y el criterio de demarcación, cada uno de los elementos del conjunto de partida debe pertenecer a una y sólo una clase. Las clases deben ser disjuntas. 3. Las distintas clases de un mismo universo deben dar cuenta de la totalidad de este. Con esta forma de clasificar en la mayoría de los casos se llegan a establecer solamente dos clases: la que contiene a los objetos que tenemos en la cabeza que cumplen un atributo y la otra. A este tipo de división se le llama dicotomía. Pero tanto si sólo se establecen dos clases como si se establecen varias, este tipo de clasificación siempre conduce a clases excluyentes. (p. 23).	

Al tiempo que leía, iba ejemplificando y explicando el texto, con base en la clasificación que habían hecho los estudiantes. Así, en relación con el primer punto, indiqué: P: […] De lo que han puesto aquí, yo podría decir que… […] De hecho hay varios criterios. Está el criterio de ser cilindro, […] prisma, […] ser regular, […] ser pentagonal. […] Pareciera que lo que no es prisma es cilindro, y lo que no es cilindro es prisma. Entonces, para enfatizar en no se trata de establecer si la clasificación estuvo bien o no, agregué: P: […] N o estoy diciendo que esto esté mal. Estoy diciendo que de momento han elegido varios criterios. Y, por lo que hemos leído, ¿qué se sugiere? E1: Que sigas con ese mismo criterio todo el rato. P: ¿Por qué creen que se sugiere seo? E1: Porque no puedes clasificar cada objeto como a ti te convenga. P: Yo cambiaria *como a ti te convenga* por *cómo te sea más sencillo*. E3: Porque sino no habría grupos. Si cada uno es diferente, pues no habría grupos. P: […] Más que: no habría grupos. Lo que habría sería, demasiados grupos. E3: Digo de la altura, o sea, ahora mismo habría… P: Un grupo por cada uno. E3: ¡Claro! En relación con el segundo punto, indiqué la importancia de seguir el mismo criterio de clasificación, porque si no, pueden comenzar a traslaparse las clases que se generen. Entonces aproveché para decir a los estudiantes que era necesario que intentasen construir los grupos con las clasificaciones hechas, para intentar determinar si el criterio que se ha usad ha sido el adecuado. En relación con el tercer punto, planteé la clasificación de los cilindros en términos de los que son rectos u oblicuos. Así, si nos fijásemos en uno de estos grupos, no cabría la menor duda de que hemos clasificado cilindros. Entonces, pregunté, refiriéndome a la colección de envases con los que hemos venido trabajando desde nuestra primera clase: P: […] Si solamente el criterio fuese: vamos a ver cuáles [de estos envases] son los cilindros. Pues estarían lo que lo cumplen y los que no lo cumplen. […] ¿Este criterio que elegí sería el más adecuado para poder hablar de toda esta familia de envases? […] Tal vez no lo sea.	

Entonces aproveche para instar a los estudiantes a que mejorasen la clasificación que han hecho. P: […] **Debemos elegir un mismo criterio de clasificación, para […] clasificar estos envases […] con lo cual, creo yo, que la tarea sigue vigente. Es decir, debemos formar grupos. Pero ahora tenemos algo nuevo, y es que sabemos que debemos elegir un criterio**. Luego, me dirigí a los estudiantes de grupo B, y recordando que ellos habían clasificado los envases en regulares e irregulares, les invité a que reflexionases sobre la pertinencia del criterio usado. Para ello, pedí a E3 que leyese la definición de *regular* que antes había consultado, y que nos había compartido. E3: Son aquellos, con al menos una cara poligonal distinta a las demás. P: ¿Esos serían los irregulares? E3: ¡Ah, sí! P: ¿Y los regulares? E3: Son aquellos cuyas caras con polígonos regulares iguales, del mismo tamaño, con vértices en los que concurren el mismo número de caras, y con ángulos idénticos. Entonces, con base en la definición leída por E3, pregunté: P: Si miramos esta definición, y vemos los envases, ¿Cuáles de ellos son regulares? ¿Qué todas sus caras sean polígonos regulares? […] E5: Esta [tomando el envase nº2]. Entonces, invité a los chicos a que se fijasen en la forma de las caras del envase que acababa de enseñarnos E5, e indagué por sus características. Entonces E5 intervino nuevamente indicando: E5: Los regulares son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. P: Eso, en el caso de los sólidos regulares. E5: Sí. Pregunté entonces si el envase al que se había referido E5 tenía la forma de algunos de dichos sólidos mencionados regulares, pero la respuesta fue negativa. Entonces pregunté: P: […] ¿alguno de los envases [que tenemos] tiene forma de solido regular? Que una de sus caras, aparentemente sea regular, pero las otras no, automáticamente lo pone en su condición de irregular [repetí la pregunta]. E5: ¡No!	

<table>
<tr>
<td>P: ¿Sería un criterio entonces adecuado hablar de regular e irregular?
E5: No.
P: No, porque entonces automáticamente todo el grupo queda dentro de los irregulares […], por eso chicos, tienen que revisar la clasificación.

Propuse, con el consentimiento de T, a los estudiantes que repitiesen la clasificación. Esta vez, de modo más riguroso, concienzudo y organizado. Esto lo harán de manera individual, y lo entregarán al finalizar la siguiente clase. Se hará así, porque al principio usaran dicha clasificación para la discusión y unificación de la clasificación de los envases. Trabajo que, a su vez, escribirán en el cuaderno de grupo. Este trabajo será evaluado y calificado.

5. Cierre.
Para finalizar, me refería a la idea que E5 había mencionado anteriormente, sobre la simetría. Así, les pedí que revisasen la página 201, pues allí se trata el tema de la simetría en cuerpos geométricos. De hecho, les dije que la simetría podría ser un criterio para hacer la clasificación de los envases.

P: ¿Será posible clasificar estos envases teniendo en cuenta el criterio de simetría que aparece allí en la página 201?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• ¿Qué es un prisma?
• Realizar de nuevo la clasificación, y entregarla de manera individual en la siguiente clase.</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS									
Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Dic. 4 del 2018	**Hora**	10:05-11:00	**Clase**	05	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Dic4_2018

Contextualización

Para la quinta clase hemos revisado la nueva **clasificación de los envases** que han hecho los estudiantes, esta vez, siguiendo un único criterio.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Inicié la clase pidiendo a los estudiantes que se ubicaran en los grupos habituales, para que discutiesen la nueva clasificación que habían hecho de manera individual. Para esta clasificación debieron haber seguido un único criterio, que ellos mismos elegirían. En esto, los estudiantes invirtieron cerca de 10 minutos. E3 preguntó me qué nota final aparecería en el boletín, a lo que respondí que seguramente esta se calcularía teniendo en cuenta el trabajo que hubiesen hecho con T antes de que iniciásemos nuestro trabajo, junto con la nota que se obtendrían de la clasificación que hoy debían entregar. A propósito de la tarea, dije: P: Supongo que hicieron la tarea, ¿o no? E4 y E3: Sí. 2. Puesta en común de la clasificación hecha siguiendo un único criterio. Comencé preguntando por el criterio que cada estudiante había elegido para hacer la clasificación de los envases. P: ¿Cuál fue el criterio individual que elegiste, para la clasificación individual que va a entregar hoy E1?	Asistieron a esta clase: E1, E3, E2, E5, E4, E7 y E6. Resulta curioso que, como T debió ir a su despacho a traer un rotulador justo cuando respondí a E3 su pregunta en relación con la nota final y cuando pregunté si habían hecho la tarea, fuese precisamente esta misma estudiante quien arguyera que no había hecho la tarea porque no tenía claro en qué consistía. Esto podría indicar que el contrato didáctico en torno a la calificación ejerce tal influencia,

E1: Yo los he diferenciado en prismas rectos, prismas oblicuos, cilindros rectos y cilindros oblicuos. Los he agrupado en esos grupos. P: ¿Y, esa es la que han decidido pasar a allí a nivel grupal? E1: Sí. Insistí entonces, preguntando a todos los estudiantes por el criterio que habían usado los estudiantes del grupo A. Pero como no hubo respuesta alguna, quise explicar que, con esta clasificación, aparecen claramente dos familias de envases diferenciadas. P: […] Lo que quiere decir, es que aquí hay claramente dos familias diferenciadas, en tanto prismas, y en tanto cilindros. Pero, luego hubo una separación interna en cada familia, que es, que fuesen rectos o que fuesen oblicuos. ¿Eso qué quiere decir? Que una vez que se ha elegido el criterio y se ha hecho la clasificación, pues de lo que se trata es de empezar a ver qué es lo que varía en esa familia, […] que sea recto o que sea oblicuo. Luego pregunté a E3 por la tarea, pero arguyó que no había entendido en qué consistía esta, y que solo había respondido a la pregunta: qué es un prisma. En ese momento intervino T, haciendo notar que efectivamente había quedado suficientemente claro en la clase pasada en qué consistía la tarea. Seguidamente, indagué en el grupo B por la tarea individual. P: E5, ¿cuál fue el criterio que elegiste? E5: Yo cogí el de qué tipos de simetría tenía cada uno. E5 se basó en la información sobre simetrías en los sólidos, que aparece en su libro de matemáticas. P: ¿qué tipos de simetría refieren allí [en el libro]? E5: simetría axial, especular, y simetría central. P: […] ¿comprendiste a qué se refería cada una de ellas? E5: Más o menos. P: ¿Podrías esbozarnos la idea de lo que sería la simetría axial, la especular y la central? E5: Pues la simetría central es una simetría que, de todos los lados, de todas las caras que hay, es igual a todos los lados. En ese momento intervino T, para indicarle a E5 que su explicación debería ser clara para los demás compañeros, no solo para ella o para mí. E5: Por ejemplo, un cubo. Si ponemos un punto en el centro, ese centro tiene que está equidistante a todas las caras, y ser… igual.	que los estudiantes prefieren esgrimir cualquier justificación, aun cuando se contradigan, antes que enfrentar una mala calificación. Tras la intervención de E3, me enteré de que hoy solo tres de los siete estudiantes hicieron la tarea, por lo que T les indicó que tendrían solo hasta mañana para entregarla. De hecho, quienes sí hicieron la tarea, también tendrán esa oportunidad para mejorarla.

En ese momento, para apoyar a E5 con su explicación, esbocé la imagen de un cubo en la pizarra para hacer notar que la equidistancia de la que hablaba, no solo se cumple con las caras, sino también con los vértices del cubo. Hice notar que, de hecho, este tipo de simetría la cumplen muy pocos sólidos.

P: […] aquellos [sólidos] que cumplen esa propiedad [la de tener simetría central] son tan pocos, tan pocos, que estaría por ejemplo el cubo…
E5: Los regulares, los poliedros regulares.

Quise complementar, en términos generales, la idea de la simetría, presentando una analogía con lo que ocurre cuando nos miramos en un espejo. Así, el espejo hace las veces de plano de simetría.

E5: La axial es la que, hay una línea en el centro, que pasa eh… en el centro. Y es que, son las caras de arriba y de abajo, por ejemplo, que son iguales una a otra.
P: […] ¿En los sólidos se habla de simetría axial en relación con una línea o con un plano?
E5: Con una línea y con un plano. Con una recta y con un plano.

Luego, aprovechando el cubo que previamente había esbozado en la pizarra, traté de ilustrar el hecho de que la simetría axial puede dar lugar a los sólidos por revolución. No obstante, ello no aparece en el libro que usó E5. También discutimos el concepto de simetría especular. Ello, porque también intenté esbozar un plano que contaba el cubo. Al respecto E5 dijo:

E5: Pero es que, esa, la que acabas de decir, es la especular.

Después de haber discutido sobre los tipos de simetría que había usado E5, pregunté:

P: […] De acuerdo con eso, entonces supongo que, la separación que hiciste fue: Aquellos [envases] que entran dentro de la simetría central…
E5: O también de los que no entran en ninguna de ellas.
P: ¿Cuáles envases no entran en ninguna de ellas?
E5: Por ejemplo, este envase [el nº10] no entra en ninguna de ellas, porque si lo pones en un plano esta parte no es igual que esta (figura 1). Si lo cortas así (figura 2), puede ser, pero por lo de… debido al tapón que se abre solo hacia un lado. Si fuera, por ejemplo, como una ventana que se abre hacia los dos lados, sí sería simetría si lo partes por la mitad. Y luego la central, no es equidistante a ninguno de los lados.

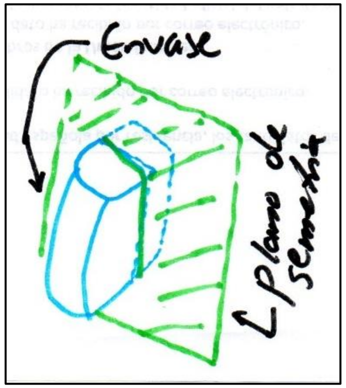


Figura 1. No hay simetría especular.

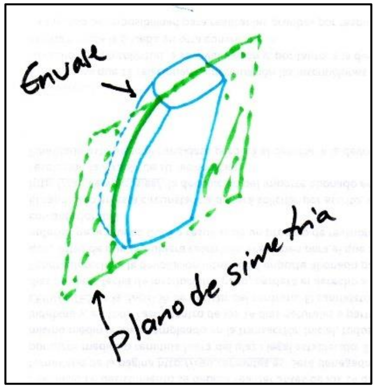


Figura 2. Habría simetría especular, si no fuese por el tapón.

Insté a los estudiantes a que, dado que no es posible saber en qué sentido se abre la tapa del envase, bien pudiera haberse considerado la geometría especular como se propone en la figura 2.

P: En el caso tuyo E7, ¿cuál fue el criterio que usaste?
E7: Yo no la tengo.
P: E6, ¿Cuál criterio usaste?
E6: Yo lo clasifiqué en irregular y regular.
P: O sea, continuaste con la idea de regular e irregular.
E6: Sí, en plan puse: cilindro irregular, cilindro irregular.

En ese momento, consideré importante iniciar una discusión en relación con lo que E6 acababa de decir. Es decir, sobre el criterio usado para clasificar los envases, y sobre que exista un cilindro irregular.

P: […] Creo yo que habíamos discutido en la clase pasada, la clasificación que habían hecho en relación con los [sólidos] regulares e irregulares. […] todos quedaba en los irregulares, y ya está. No quiere decir que esto sea equivocado, porque el criterio es ser regular o irregular. Pues todos [envases] quedaban dentro de los irregulares.

Entonces insistí, una vez que sabemos que todos los envases son irregulares, pregunté:

P: ¿Qué varía ahí?

Específicamente, en relación con el concepto de cilindro irregular, pregunté:

P: ¿Qué entiendes por cilindro irregular?

Dije a E6 que ahora le daría un espacio para que nos explicase aquello de los cilindros irregulares.

P: E4, ¿tú qué criterio usaste?
E4: Yo lo hice según las bases. O sea, bases circulares, pero en los que no eran circulares he metido los rectangulares, cuadrangulares, y los…Me refiero a figuras regulares, cuadrangulares y rectangulares, según la base.
P: […] ¿a qué te refieres con [la palabra] base?
E4: Pues, la cara donde se apoya la figura.

En ese momento intervino T, pidiendo a E4 que cogiese el envase que tiene dos de sus caras con forma de hexágono (figura 3), para que nos dijese cuál es su base.

E4: Es que tiene varias bases, creo. O sea, puede ser esta una base [una de sus caras laterales rectangulares], y esta también, [una de sus caras hexagonales]. Todas son caras que pueden ser bases.
P: Entonces, aquí, ¿cómo lo determinaste?
E4: Es que en esta [en el envase nº5], dije que esta era la base… el hexágono, pero no me di cuenta de que este también [una de sus caras laterales] también podría ser una base.

En ese momento E5 pidió la palabra para intervenir, y tomando como ejemplo el mismo envase al que se refirió E4 (figura 3), dijo:

E5: En el hexágono, normalmente tu no haces un prisma o una figura con ángulos de [más de] noventa grados, o ciento ochenta, sesenta, [entre la base y sus caras laterales], o algo así por el estilo. Y, normalmente pones una figura plana. Este, por ejemplo, sería un prisma hexagonal, si lo miraras desde esta perspectiva [teniendo por base una de sus caras hexagonales]. Y, sin embargo, no sabríamos decir cómo se mira esta figura, si fuera un hexágono somo caras laterales.

Figura3: envase número 5.

Cometí un error. Debí haber permitido que E6 se explicase sobre la idea que tiene de cilindro irregular. En su lugar di paso a la intervención de E4. Es necesario poder discutir con E6 la idea que tiene de cilindro irregular.

Creo que un momento ideal para volver a tratar el tema de la base de un sólido, aparecerá cuando los estudiantes estén tratando de calcular el volumen del envase que diseñarán y construirán. Esto, porque cobrará sentido definir una base en términos de la comodidad para realizar dichos cálculos.

La intervención de E5 indica que, en el proceso de estudio que ha tenido de los sólidos, la posición relativa de estos se encuentra íntimamente vinculada con su naturaleza. De allí, que, al *acostar* un prisma recto de base hexagonal regular, ya no sabríamos cómo catalogarla.

Luego de la intervención de E5, quise hacer notar que, una cosa es que la clasificación que ha hecho E4 este determinada por las bases de los envases, y que otra cosa diferente, es determinar cuáles son las bases de los prismas. Además, indiqué que, si entendemos por base, la cara donde se apoya el envase, entonces algunos de estos podrán tener varias bases. Entonces, quise agregar, en relación con el concepto de base, y con el de prisma, que: P: […] Creo que tiene que ver, […] habitualmente con la definición que tenemos de prisma. En ese momento abrí la discusión sobre la pregunta qué es un prisma, que habíamos propuesto en la clase pasada. 3. ¿Qué es un prisma? E1: Es un cuerpo geométrico con dos caras llamadas bases, y tantos lados como aristas tenga la base. P: ¿Dice alguna característica de las posiciones relativas de las bases? E1: No. Entonces, me dirigí al resto de los estudiantes y pregunté si alguien tenía alguna definición que complementase la que había leído E1, o que fuese radicalmente opuesta a esta. Pero negaron con la cabeza. Entonces E5 intervino: E5: ¿Cómo se categorizaría entonces el cubo? P: Tu pregunta es, si [el cubo], ¿es un prisma o no? E5: Sí. Si el cubo se podría denominar prisma o no. Este, por ejemplo [el envase nº11], puede ser un prisma, pero ¿qué sería el cubo, si tiene todas las caras iguales? ¿Cuál sería su base? […] P: Es una pregunta muy interesante, y creo yo que tiene que ver con la definición de prisma. Es decir, si nos hablan de dos bases iguales, pues desde ya estamos implícitamente leyendo que, aquellas que no son iguales, pues no son las bases […]. Entonces, radiodirigí la pregunta de E5 a los demás estudiantes. P: ¿Qué pasa con el cubo si todas [sus caras son iguales? Entonces, ¿Cuáles son las bases? Decidí entonces acudir a un fragmento de la página 17 del libro *Los poliedros*, que consideré podría aportarnos en esta discusión. P: “Llamaremos prismas rectos a los poliedros que se forman cuando se juntan con rectángulos los lados correspondientes de dos polígonos iguales. Las dos caras que son polígonos iguales y que están unidas por rectángulos son las bases del prisma y las caras que juntan estas bases son las caras laterales del prisma”. Implícitamente aquí también hay una idea, […] hay unas bases, y las [caras] que no son iguales no son bases.	La pregunta de E5 ratifica una fuerte vinculación conceptual entre la posición de una sólido y su naturaleza.

Dije entonces, que el concepto de prisma que acababa de leer también tendría que revisarse con detenimiento, porque no considera la existencia de un prisma con todas sus caras iguales. Además, agregue que otra condición en relación con los prismas, aunque no aparece ni en las definiciones leídas por los estudiantes ni en la que está en el libro, es que dichas caras iguales, a las que se les suelen llamar bases, deben ser paralelas.

E5: Luego también dice... Hay una parte donde dice que sus caras laterales son rectángulos.
P: […] En el caso del prisma recto.
E5: Si, por ejemplo, en el [envase con una cara con forma de] hexágono [las caras laterales] son rectángulos, que de base son hexágonos. Las bases serían los hexágonos, si te dicen ya que las caras laterales son rectángulos.
P: […] ¿cómo encaja allí la pregunta que has hecho del cubo? […] El cubo por donde lo mires es igual. […] tiene simetría central. Bueno, tiene las tres [simetrías].
E5: Sí, tiene las tres.
P: Central, axial y especular. Entonces, ¿Qué pasaría allí? [silencio generalizado] Pues casi que podría decir: elijo como bases las que yo quiera. Consecuentemente, las demás [caras] van a cumplir la condición de la definición del libro. Si lo giro noventa grados, […] también cumpliría la definición de prisma. En este caso, de prisma recto.

Entonces, haciendo alusión a la clasificación hecha por E1, agregué:
P: […] sabemos, por la clasificación que hizo E1, que [los prismas] pueden estar oblicuos o no. Con lo cual, en esta definición que se ha puesto aquí [en el libro], […] si [el prisma está oblicuo] esas caras laterales no serían rectángulos, sino que podrían ser, por ejemplo, paralelogramos, tal vez. O estaría delimitado por otra figura.

Insté entonces a los estudiantes a que cruzasen la información que encuentren en los libros, o en internet, con lo que sabemos, para determinar qué es lo que implícitamente nos dicen o no, y qué es lo que estamos asumiendo en relación con dicha información.

P: […] A veces, no causa tanto conflicto lo que nos dicen, como lo que no nos dicen. Cuando a mí me dicen que hay unas bases que son iguales y que las [caras] laterales son rectángulos, pues allí [esto] queda claro. Pero, lo que no me dicen es lo que me conduce a preguntas como la que ha hecho E5.

Finalmente, cuando pregunté cuál de las clasificaciones, y, por tanto, cual criterio, se había elegido en el grupo B, los estudiantes respondieron:
E4: No hemos elegido una en particular.

Les recordé a los estudiantes que lo importante en esta tarea, es tratar de elegir el criterio que consideren más adecuado para realizar la clasificación, bien sea porque este incluya a todos los envases, o porque nos permita establecer familias diferenciadas entre estos.

E5: Podría ser […], decir: tiene simetría tal, tiene de base un cuadrado, un hexágono o tal. Y luego, si es regular su base o si es regular la forma que tiene. P: Entonces, eso quiere decir que habría unos diferentes momentos o procesos de la clasificación. Por ejemplo, si te basas en la simetría […]. Entonces, en ese momento me percaté de que ya faltaban menos de diez minutos para que se acabase la clase, por lo que T intervino sugiriendo que mañana los estudiantes entregasen el trabajo a E5, y que él a su vez, se lo entregase a T. A quienes sí hicieron la tarea, se les propuso que pudiesen entregarlo ahora mismo o mejorarlo para mañana. Finalmente, todos acordaron en entregarlo mañana. T se comprometió a escanear los trabajos y a enviármelos al correo electrónico. 4. Cierre. Para terminar, pedí a los estudiantes que fueran muy claros con la clasificación. Así, tomando como ejemplo el criterio que eligió E5 para clasificar los envases, indiqué que explicase cuales de estos cumplen con cada una de las simetrías tres simetrías para los sólidos, que consultó en su libro de matemáticas. Además de que explicase, por qué es así. Con lo cual, en el caso de la simetría especular, por lo menos que explicase por donde pasa el plano de simetría en cada envase.	
Aproveché además para recordar a los estudiantes que no habían hecho la tarea, que es importante cumplir con ello. Entonces T intervino agregando que, quienes no cumplan con las tareas suspenderán la asignatura, y dejo claro a todos los estudiantes cuál es la tarea que deben hacer: proponer una clasificación, y ubicar cada envase en el grupo que le corresponda de acuerdo a dicha clasificación. T: […] Primero, explicáis el tipo de clasificación que os parece mejor. Segundo, hacéis un cuadro, y ponéis cada cuerpo donde va […] P: […] O incluso como lo ha hecho E1, que en este caso lo ha separado en conjuntos. T: Pero, con una explicación de la clasificación.	Considero que, tras la intervención de T, en el futuro los estudiantes trataran de cumplir con las tareas que se propongan durante la experimentación de nuestro REI.
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Entregar mañana la clasificación individual, siguiendo un único criterio.	

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS									
Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Dic. 11 del 2018	**Hora**	10:05-11:00	**Clase**	06	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Dic11_2018

Contextualización

Para la sexta clase hemos iniciado con la **segunda tarea del REI**, que llamamos *el envase de litro.*

El envase de litro

<u>Consigna</u>: En los grupos que previamente hemos conformado, vamos a diseñar y construir un envase con capacidad para un litro. Para ello, usaremos un trozo rectangular de cartulina blanca de 65 cm x 50 cm.

Las condiciones para llevar a cabo esta tarea son:

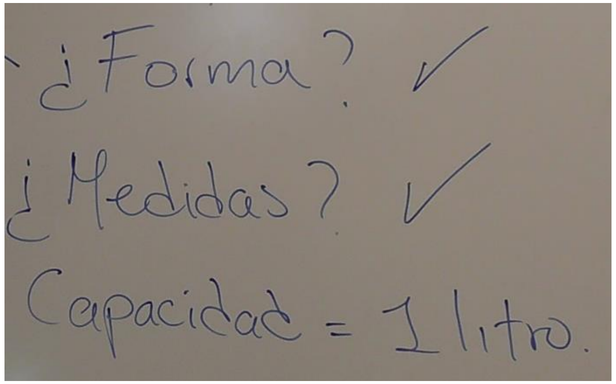
- Antes de hacer cualquier trazo o corte en la cartulina, debemos discutir y definir con nuestros compañeros de grupo, qué tipo de envase deseamos diseñar y construir, y qué criterios debemos tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, vamos a esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, vamos a escribir un plan de trabajo en el que pondremos, entre otros, el proceso que consideramos necesario seguir para diseñar y construir nuestro envase, además de las herramientas que usaremos para ello (ejemplo: tijeras, regla, etc.).
- Debemos usar solamente el trozo de cartulina que nos ha dado el profesor, es decir, que no debemos añadir más cartulina.

Cuando hayamos terminado, presentaremos el envase a nuestros compañeros, explicando el proceso que hemos seguido para su diseño y construcción, y argumentando por qué dicho envase puede contener un litro.

La consigna la recorté y entregué a los estudiantes las condiciones. Esto, porque minutos antes de la clase mi tutor me llamó al móvil para sugerirme que presentase la situación enmarcada en una suposición donde cada grupo de estudiantes haría las veces de una empresa de consultoría. A dicha empresa se le había pedido diseñar y construir un envase de litro para una compañía que envasa zumo.

Además, mi tutor sugirió que les dijera a los estudiantes que podían usar otro material, no necesariamente la cartulina, así lo deseaban.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Inicié la clase diciendo a los estudiantes que ya habíamos tenido tiempo suficiente para analizar varios de los asuntos en relación con los envases que llevamos desde nuestra primera clase. Agregué que, aquello que no hubiésemos cubierto en relación con este tema, lo trataríamos a medida que vaya emergiendo. Luego, les hablé de la segunda tarea que abordaríamos.	

P: […] Vamos a suponer que en cada equipo [ustedes] van a hacer las veces de una empresa consultora, que […] suele ofrecer asesorías a otras empresas. […] Van a ser una empresa consultora de otra empresa que envasa zumos de diferente clase. Específicamente, indiqué: P: […] Hay una empresa que envasa zumos y nos ha pedido que diseñemos un envase con capacidad para un litro […] de zumo. Enfaticé en que, cada grupo sería una empresa de consultoría. P: […] Cada empresa de consultoría va a diseñar un envase para envasar un litro de zumo. Luego entregué el trozo de papel donde aparecían las condiciones para llevar a cabo la tarea, y leí cada una de estas. Además, expliqué a los estudiantes que les entregaría un trozo de cartulina a cada grupo, que les serviría para construir el envase que diseñen. No obstante, siguiendo la sugerencia de mi tutor, les dije que, si querían construir su diseño en otro material, lo podrían hacer. Es sí, con la condición de que ellos deberían hacerse con dicho material. Aproveché para explicar que, con la tercera condición, sobre que no se use más de la cartulina que les daría, buscamos que se invierta tiempo en el diseño y planeación de la construcción, para que no se quedasen sin material a mitad del proceso. Por último, dije a los estudiantes que, además de presentar el trabajo final a sus compañeros, debían entregar un informe que estaría dirigido a la empresa que nos contrata, para explicar, entre otras cosas, el proceso que hemos seguido durante el diseño y construcción del envase. P: […] El próximo día les digo cómo se haría ese informe. Antes de que los estudiantes se reunieran para iniciar con su trabajo, quise propiciar la discusión en torno a lo que se debe definir para ello. P: […] si vamos a diseñar un envase, ¿cuál es la primera pregunta que deberíamos hacernos? E5: ¿Qué forma debe de tener? P: ¿Qué más debemos preguntarnos? E5: Medidas. P: ¿Qué otra cosa creen que debemos preguntarnos para empezar a pensar en el diseño? E5: La capacidad que tenga. P: A bueno, pero la capacidad nos la han dado. […] Debe ser igual a… Todos: ¡Un litro! P: O sea que aquí tenemos ya parte de la información.	Mientras estaba explicando en qué consistía la tarea, T llamó la atención a E7, porque al parecer él no estaba atento a lo que yo decía. Así que le pidió que repitiese en qué consistía la tarea, pero E7 no supo hacerlo. Esto, por supuesto creó un momento de tensión que considero no es positivo para la experimentación del REI. De una parte, porque E7 se sintió mal, y de otra, porque considero que consolida la figura monumentalita del profesor ante los estudiantes. Creo que tendré que hablar con T para que trate estos asuntos con mayor sutileza durante la experimentación del REI. Por la experiencia obtenida en la primera experimentación, sabemos que el trozo de cartulina que damos a los estudiantes es suficiente para construir el envase de litro. 

Con base en el diálogo que acabábamos de tener, dije entonces a los estudiantes que, en la primera fase de esta tarea, deberían definir, de común acuerdo, la forma y las medidas del envase que construirían. Indiqué, además, que a eso me refería con "el proceso necesario" para diseñar y construir el envase. Con lo cual, la selección de la forma y de las medidas, forma parte de dicho proceso.	
En relación con las herramientas que necesitaría para llevar a cabo la tarea, pregunté: P: ¿qué otros instrumentos creen que necesitemos para esto, [para diseñar y construir un envase con capacidad para un litro]? E4: Celo, para pegar las piezas.	No sabía que a la cinta adhesiva le llamaban celo.
En relación con las herramientas a usar, T dijo que podría llevar cinta adhesiva, barras de pegamento y tijeras. Entonces, E5 intervino: E5: Depende también de la forma, porque […] si el envase en cilíndrico, puedes necesitar un compás.	
T intervino diciendo que, en general, se necesitarían los instrumentos de dibujo la regla, el compás, el cartabón, etc. Entonces dije que, dado que el trabajo se hará en grupos, cada estudiante podría aportar el instrumento que tenga en casa. Así seguramente completarían lo que necesiten para el diseño y construcción del envase.	
Insistí en que es necesario planear lo que se piensa hacer, para que el trabajo no sea improvisado. Entonces E4, intervino:	
E4: Que es que no me ha quedado claro qué hay que hacer en el informe. P: […] al final de todo este trabajo, como somos una empresa consultora, […] le vamos a escribir [contando] a la empresa que nos contrata, cuál es el envase que hemos diseñado, por qué hemos diseñado ese envase, […] [por ejemplo], porque nos parece el más adecuado, porque nos parece el más atractivo […], porque nos parece el más eficiente. Eso tenemos que contarlo en el informe.	Dije a E4 que el próximo día les diré cómo podría ser el formato del informe.
Agregué, además que, dentro de la planeación que se debe hacer del trabajo a realizar, posiblemente necesitarán hacer planos antes de llevar el diseño sobre la cartulina. Finalmente, pedí a los estudiantes que limitasen su creatividad al momento de realizar el diseño, y que tuviesen en cuenta que dicho diseño, debía ser consensuado por todos los integrantes del grupo.	Acordamos con los estudiantes que el trozo de cartulina se los daríamos el siguiente día.

2. Trabajo grupal. Una vez que dimos las indicaciones de esta tarea a los estudiantes, lo que nos tomó cerca de 20 minutos, ellos iniciaron con el trabajo grupal. Luego de que pasaran cerca de 7 minutos, T se sentó con los estudiantes del grupo A, y yo con los del grupo B. Esto, para enterarnos de lo que hasta el momento habían discutido en cada grupo. En el grupo B: E5: Vamos a hacerlo en forma rectangular, como si fuera un brik de leche, pero lo que no sabemos es cómo medir las medidas, o sea cómo hacerlo. En ese momento, en el grupo A se escuchaba a la profesora decir: T: […] O sea que vais a coger el típico tetrabrik […] E1: Pero lo que no sabemos es… […]. E3: No sabemos el largo que tiene…o sea, qué medida tiene. En el grupo B, E5 dijo que en el caso del cubo el volumen se calcula multiplicando las medidas de sus dimensiones (i.e., alto, ancho y profundidad), y que, si dichas medidas fuesen de 10 cm cada una, entonces el cubo tendría un decímetro cúbico (1 dm^3), lo cual equivale a un litro. Por tanto, les insté a que partieran de la misma equivalencia, y que se preguntaran cómo deberían variar las medidas del envase para que este tuviera una capacidad de un decímetro cúbico.	Está claro que en los dos grupos se optó por el envase con forma ortoédrica, como en el que se envasa la leche. También, que, una vez elegida esta forma, en ninguno de los grupos se tiene claro qué medidas otorgar al envase, para que cumpla con la condición de que su capacidad sea de un litro. Debo pensar en la posibilidad de grabar los audios en cada grupo cuando los estudiantes estén trabajando, porque con la videocámara no es suficiente, porque no se puede distinguir claramente lo que habla en los grupos simultáneamente. Solo en algunos momentos.
En medio de la conversación con los estudiantes del grupo B, les dije que si consideraban necesario hacer uso del ordenador o cualquier otra herramienta llevar a cabo esta tarea, que lo podían hacer. Entonces E5 mencionó que había aprendido a manejar el programa Tinkercad en la clase de tecnología. Así que pregunté a los demás estudiantes si también lo sabían, y dado que respondieron que sí, entonces propuse que el diseño del envase se modelara en dicho programa. Aproveché y pregunté a T: P: […] ¿Crees que nos permitirían imprimir un modelo acá [en el instituto]? T Sí. Hablo con la profesora. También me enteré de que este año, en la clase de tecnología los estudiantes están aprendiendo a trabajar con planos y medidas. Con lo cual, les dije a todos que, si en algún momento necesitasen hacer un plano del envase, podrían usar esos conocimientos. Además, aunque solo lo mencioné a los estudiantes del grupo B, propuse que, de ser necesario, podrían escalar el prototipo del envase a imprimir en 3D, qué escala habrían utilizado.	Debo mencionar a los estudiantes del grupo A, la posibilidad de escalar el prototipo del envase. Pare tener en cuenta: - En el video se alcanza a notar que T recuerda a los chicos cómo calcular el área de un cuadrado y de un círculo. No sé hasta qué punto esto es conveniente. Además, propone como nombrar la altura en el envase. (i.e. hache mayúscula “H”)

3. Sobre la calificación de la clasificación de los envases. Como ya solo faltaban cinco minutos para que se acabase la clase, propuse a T que entregásemos las rúbricas que había usado para revisar y calificar los trabajos de los estudiantes sobre la clasificaron los envases. Ella estuvo de acuerdo, así que expliqué en qué consistía dicha rúbrica y la entregué a los estudiantes. Por iniciativa de T, acordamos que los estudiantes se quedarían con estas. 4. Cierre. Para terminar, pedí a los estudiantes que para la próxima clase pensaran en la relación que puede existir entre la forma del envase que han elegido, y las medidas que este debe tener para que cumpla con la condición dada. Esto, con el objeto de que puedan encontrar un camino que les conduzca a establecer las medidas del envase. Además, quise saber la opinión que tienen los estudiantes de esta nueva tarea que hemos propuesto. No obstante, aunque yo esperaba algunas apreciaciones verbales, T dijo que los estudiantes que lo escribieran en el cuaderno.	Antes de salir del instituto, T preguntó a la profesora de inglés, si podría cedernos el espacio de su clase el próximo viernes, y ella estuvo de acuerdo. Esto se lo solicité a T, pues considero que necesitamos más tiempo del habitual para que los estudiantes puedan avanzar con el diseño y construcción del envase.
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Avanzar con la búsqueda de las medidas que debe tener el envase.	

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Dic. 14 del 2018	**Hora**	09:10-11:00	**Clase**	07	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	8 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Dic14_2018

Contextualización

Para la séptima clase hemos continuado con la **segunda tarea del REI**, que llamamos *el envase de litro.*

El envase de litro

Consigna:

En la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, se nos ha pedido un tipo nuevo de envase con capacidad para un litro, porque quieren renovar su forma de envasar. Por tanto, el departamento de producción nos ha propuesto que diseñemos y construyamos un prototipo de dicho envase. Nosotros como empresa consultora, debemos entregar junto con el prototipo del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se sugiera su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase puede contener un litro de zumo.

Para realizar esta tarea, entonces, en cada grupo de trabajo que hemos conformado:

- Debemos discutir y definir qué tipo de envase deseamos diseñar y construir, y qué criterios debemos tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, debemos esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, vamos a escribir un plan de trabajo en el que pondremos, entre otros, el proceso que consideremos necesario seguir para diseñar y construir nuestro envase, además de las herramientas que usaremos para ello (ejemplo: tijeras, regla, etc.).
- Dibujaremos los planos del envase.
- Construiremos un prototipo del envase en tamaño real. Para ello, podremos usar la cartulina que nos han proporcionado (65 cm x 50 cm). En caso de no utilizar la cartulina, debemos conseguir el material que necesitemos.
- Escribiremos en el cuaderno de grupo el informe para la compañía de zumos.
- Cuando hayamos terminado, deberemos exponer nuestros resultados a la compañía Zumoluna, donde presentaremos el prototipo del envase que hemos diseñado, incluyendo las explicaciones que hemos puesto en el informe escrito.

A tener en cuenta:

Dado que todos los estudiantes manejan el programa Tinkercad, que se usa para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y que existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Esta fue la tarea que les entregué nuevamente a los estudiantes. La revisamos junto con mi tutor.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Inicié la clase diciendo a los estudiantes que ya había puesto por escrito la situación donde se explicaba que harían las veces de empresa consultora para una compañía envasadora de zumos, y que había agregado algunas instrucciones que complementaban dicha tarea, por lo que podían reemplazar la hoja que les había dado en la clase anterior por la que les daría en ese momento. Luego, pedí a los estudiantes que leyesen detenidamente dicha hoja. A continuación, entregué un trozo de cartulina a cada grupo, y propuse a los estudiantes que trabajasen en el suelo porque seguramente sería más cómodo para realizar la tarea de construcción del envase.	Hoy asistieron: E1, E3, E2, E4, E7, E6, E5 y E8. Cabe anotar que, como esta clase fue de dos horas, E8 llegó al iniciar la segunda hora. Puede ser que ello ocurriera porque ninguno de los estudiantes sabía que habíamos pedido la hora de su clase a la profesora de inglés. Cómo E8 no llevó el consentimiento informado, no lo registré con la cámara, pero sí le pedí que participase del trabajo con sus

2. Trabajo grupal. Una vez que los estudiantes se habían ubicado en el suelo, y que habían comenzado a trabajar, me acerqué a cada grupo para preguntar por la manera en que habían definido las medidas de los envases, ya que esta era la tarea que había quedado de la clase anterior. **En el grupo B:** P: […] ¿cómo definieron las medidas [del envase]? E5: […] Las caras rectangulares, que están en vertical, dieciséis de alto, por nueve con cinco de… de una base, de ancho, y luego cinco con cuatro… seis con cuatro de grosor. P: ¿Cómo obtuvieron esas medidas? ¿Cómo hicieron para saber que esas eran las medidas que necesitaban? E5: Pues, yo lo que hice fue… buscar más o menos cómo son los ortoedros. Qué medidas tienen más o menos. Y… lo que hice fue medir un tetrabrik [sonrió]. P: ¿Mediste un tetrabrik? E5: Aja. P: ¿De casa? E5: Sí. Ante la explicación de E5 sobre cómo había obtenido las medidas del envase, sus compañeros, y él mismo, sonrieron. Entonces quise profundizar un poco en el motivo que le había llevado a medir un tetrabrik que tenía en casa. P: Continúa con la explicación [E5]. E5: […] Esto sería básicamente el brik [mientras esbozaba un dibujo sobre la una hoja de papel]. Pues este mide nueve con cinco, este mide seis con cuatro, todos centímetros, y este mide dieciséis con cinco. P: ¿Esas fueron las medidas reales que tomaste de brik? E5: Sí. P: ¿Y luego comprobaste, o comprobaron, si esas medidas daban lo que necesitábamos? E5: Sí. Lo he comprobado y me daba… porque normalmente en un brik no cabe un litro, cabe más. Cabe por lo menos cero coma un litro más. Entonces, pregunté a los estudiantes si tenían una calculadora para que verificasen que efectivamente con las medidas que tenían, su envase podría contener un litro. P: Compruébalo por favor [E5]. Entonces E5 multiplicó los números de las medidas que había tomado del brik de su casa.	compañeros. Incluso les expliqué brevemente en qué consistía esta tarea. En esta ocasión puse mi móvil junto al grupo A para grabar las conversaciones que tuvieron lugar durante el desarrollo de esta tarea. Luego de que transcriba la información del registro audiovisual, pasaré a tomar la del registro de audio. Dado que noté que E7 se mostraba un poco renuente al trabajo, tal vez por el llamado de atención que la profesora le había hecho en la clase pasada, entonces decidí atribuirle una responsabilidad adicional para que notara la importancia de su participación en lo que estábamos haciendo. Por tanto, le pedí que mientras yo preguntaba al grupo, el fuese el camarógrafo. Esto funcionó, porque cuando E7 me regresó la cámara para, porque yo iría a hablar con el otro grupo, su actitud mejoró notablemente. De hecho, participó del trazado de las piezas necesarias para construir el envase en su grupo.

E5: Mil con cero cero tres… mil tres básicamente, con dos. P: ¿Esas medidas nos sirven? [Dirigiéndome a todo el grupo] E4: sí. E5: Sí, porque está en centímetros y… mil centímetros cúbicos es igual a un decímetro cubico. Un decímetro cubico es un litro. P: ¿Hay algún problema con que estas medidas sean un poco más de lo que necesitamos? Todos: No. P: ¿Qué hubiese sido problemático? E4: Que faltara. E5: ¡Claro! Por eso supongo que se hará también lo de los tetrabriks, que se hace un poco más grande porque si solo ocupa un litro es que está muy… E4: Justo. E5: Justo, y tiene demasiada presión. Entonces, con base en lo que se había dicho hasta el momento, pregunté: P: […] Si finalmente […] llegaron a la conclusión de que una de las formas [para obtener las medidas del envase] era medir directamente el tetrabrik. ¿Antes habían probado de otra manera calcular esas medidas? E5. Sí, pero […] normalmente cuando yo, por ejemplo, lo calculaba, era…mil cien […] centímetros cúbicos, que es un litro con cero con uno. Es un litro coma uno. Pues siempre me daban medidas […] de esto que medía cinco centímetros, esto tenía que medir cuatro [Refiriéndose a los lados de la cara rectangular que hace las veces de base del tetrabrik], y esto tenía que medir ¡cincuenta! [Refiriéndose a la altura en relación con la base antes mencionada]. Y esto [la altura], claro, era muy grande, era muy largo, y esto [la base] era muy pequeñito. P: ¿Y cómo encontraste estas medidas? O sea, ¿tu ibas probando? O ¿con qué método encontrabas esto [las medidas]? E5: […] Lo que hacía era, mil dividido entre números y decía: si esto mide veinticinco, por ejemplo, lo divino mil entre veinticinco y me da tal número. Y luego eso, puedo dividir, puedo hacer que sea rectangular [Refiriéndose a que el número resultante era la medida del área de la base del envase]. Dos números, por ejemplo, me dio cuarenta. La base me daba cuarenta a veces, y era ocho por cinco […] centímetros […]. Y me daba cuarenta, y luego de cuarenta hay que llegar a mil, pero también me daba una altura muy grande. P: Y si veías que te daba una altura muy grande, ¿Por qué no seguiste probando con ese método para ir haciendo que la altura fuese más pequeña? E5: Porque […] cada vez que hacía la… altura más pequeña, la base me daba mucho más grande y… me quedaba la base muy grande […]. P: ¿Hay un sitio en el que hayas hecho esas pruebas, que podamos ver, donde escribiste, borraste, volviste a hacer…? E5: […] En la calculadora, así que…	Cuando dije que haría otra pregunta, E6 se mostró tensionado, por lo que le dije que no se preocupara ya que, aunque no tuviésemos las respuestas a todas las preguntas, lo importante es que dichas preguntas nos generen inquietudes que, a su vez, nos lleven a realizar consultas.

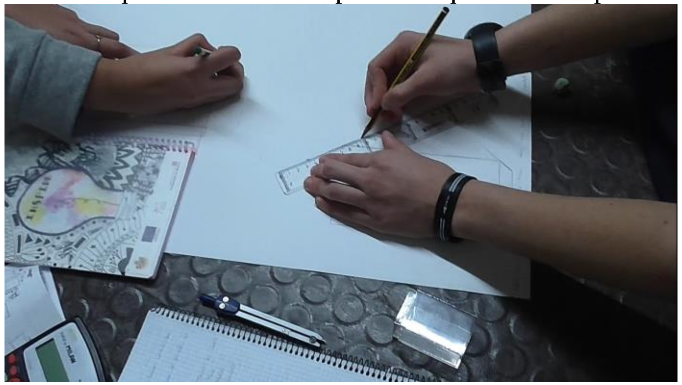
Entonces, indagué por el motivo que condujo a E5 a abandonar el método que había intentado usar para calcular las medidas del envase. P: […] ¿Decidiste abandonarlo [el método] porque siempre te daba muy alto o por qué? E5: Siempre me daba muy alto o me daba una base muy grande. Luego me dirigí al resto del grupo y pregunté por el aporte que habían hecho para solucionar el problema que suponía la búsqueda de las medidas el envase. E4: Es que el encargado es… E5 que sacara las medidas, porque nosotros hicimos las vistas [superior, frontal y lateral del envase]. Y como a él se le daba mejor las operaciones matemáticas, pues le dejamos […]. Dado que aquí, como en la primera experimentación, emergió la idea de la relación entre las medidas del envase, entonces quise profundizar un poco más en ello. P: […] Eso que estaba pasando allí, que empezaron a darse cuenta de que, o bien, era muy alto el envase sucedía que la base era muy pequeña. O bien, si empezaba a volverse más chica la altura, la base era más […] grande… E5: Digamos que me daba esto, porque acabo de leer en el papel que [la cartulina] mide sesenta y cinco por cincuenta (65 x 50), pues esto [Señalando el ancho de la cartulina] era básicamente lo que me daba normalmente de altura. La cartulina, decía, no va a ser de cincuenta centímetros (50 cm), o sea, que no ser que lo haga así [señalando el largo de la cartulina] y me va a ocupar mucho. Finalicé diciendo a los estudiantes que la alternativa que habían elegido para calcular las medidas del envase era válida, por lo que les insté a continuar con el desarrollo de la tarea y pasé a ver el trabajo que estaban haciendo los chicos del grupo A. **En el grupo A:** P: […] ¿cómo van? E1: Vale, ya hemos cogido medidas, que son, están aquí [enseñándome lo que habían escrito en el cuaderno de grupo]. Son… la base. […] Lo redondeado [que estaba señalado con lápiz] es el área de la base. Entonces, un lado es diez [centímetros], la altura de la base va a ser cinco [centímetros], y la altura de ese Brik lo hacemos veinte, de veinte centímetros. Entonces todo esto nos da mil. P: ¿Tu ibas a decir algo E2? E2: ¡No! Lo mismo. P: […] ¿De dónde sacaron esas medidas?, o sea, ¿cómo supieron que esas les servían?	Desde el principio les había solicitado a los estudiantes que todos participasen para llevar a cabo esta tarea, por tanto, resulta interesante ver que la predisposición a realizar las tareas de manera fragmentada es muy habitual entre los estudiantes.

E1: Porque estuvimos calculando a ver si, con la calculadora a ver si… que cálculos nos daban y que tampoco fuera muy grande [haciendo un gesto con sus manos para referirse al tamaño del envase], y, pues estas medidas creo que son, que son correctas para que no se nos vaya tampoco muy alto ni muy grande. Luego, usando como ejemplo el envase ortoédrico que estaba dentro de la colección de los once envases que previamente los estudiantes ya habían manipulado en la primera tarea, le pedí a E1 que me mostrase sobre este envase la correspondencia de las medidas que en su grupo habían definido. P: […] Sobre este modelo muéstrame aquí cuáles serían estas medidas… E1: Sería diez aquí [largo], cinco aquí [ancho], y aquí veinte [alto]. E3: ¡Es que es igual que…! E1: Sí, más o menos por centímetros. Luego indagué por el método usado para encontrar dichas medidas. P: El método para encontrar las medidas fue… ¿empezaros a buscar los números que se ajustaran…? E1: Sí. P: ¿… o hubo algún otro método matemático diferente? E1: No. Cogimos la fórmula para ver el volumen y empezamos con la calculadora a encajar esos números. P: Y ahora que tenemos definidas las medidas, […] y la forma. Sobre la cartulina, ¿ya saben cuáles son los trazos que deben hacer? E1: Sí. P: Pues, a ello. **En el grupo B:** Luego dejé que los estudiantes continuases con su trabajo. No obstante, minutos después, noté que en el grupo B los estudiantes no estaban avanzando y pregunté por qué, entonces supe que no tenía regla, por lo que pedí a los estudiantes del otro grupo que les facilitasen una. Aproveché entonces para preguntar a los estudiantes del grupo B por el desarrollo del envase, y, como E4 me explico que trazarían cuatro caras rectangulares y dos bases, entonces pregunté: P: […] ¿Qué forma tienen esas caras? E4: Esta… rectangular… E5: ¡Todas tienen forma rectangular! P: […] ¿Cómo vamos a trazar los rectángulos [solo] con regla? O sea, ¿se puede o no se puede? E4 y E5: Sí.	Cabe recordar que en este grupo también se optó por un envase con forma ortoédrica. En este grupo, fue a E2 a quien le pedí que nos filmase mientras hablábamos. Esto, porque he notado que ella se suele mostrar un tanto dispersa en las clases. No sé si esto se deba al trabajo que estamos desarrollando o a que simplemente la asignatura le aburre.

P: ¿Cómo lo hacemos? E5 explicó que la reglas tienen siempre en la punta una marca que forma junto con su largo, un ángulo de noventa grados. Luego de algunos minutos, me acerqué nuevamente a este grupo y vi que E6 estaba manipulando unos dados que habitualmente se usan en el juego *mazmorras y dragones*, dentro de los que se podían ver piezas con formas de poliedros regulares. Entonces, aunque tuve deseos de pedirle a este estudiante que no se distrajera con otros asuntos, aproveché esta coyuntura e hice una breve mención a la obra *Timeo* de Platón, en la que se comparan dichas formas con algunos de los elementos de la naturaleza. Aproveché también para preguntar a los estudiantes qué estaban viendo en la clase de geometría, pero me respondieron que ese tema, así como el de estadística, se vería al final. Me acerqué nuevamente al grupo B, porque noté que los trazos que estaban haciendo iban desviados, y por tanto los estaban borrando. Es decir, que estaban teniendo dificultad para trazar los rectángulos. Entonces pregunté: P: […] ¿Habrá otra forma de garantizar esos noventa grados, que no sea con esa regla [y sus señales]? ¿Cómo lo hacemos? Entonces tomaron como herramienta el estuche ortoédrico donde venían los dados que estaba manipulando E6, por lo que pregunté nuevamente: P: ¿Además de esta herramienta […] cuál otra podría servirnos? E4: ¿El compás? P: ¿Cómo lo usarías el compás para…? E4: Es que nos falta el medidor de ángulos, para sacar el… E5: El transportador de ángulos. E4: Eso. P: ¿Alguna vez han trabajado con el compás haciendo construcciones, con regla y compás? E5: Sí. P: ¿Y qué construcciones han hecho? E5: El pentágono regular, el cuadrado regular, el triángulo regular, hasta… heptágono. P: ¿Han hecho un cuadrado con regla y compás? E5: Sí [asintiendo con la cabeza]. P: ¿Cómo son los ángulos internos del cuadrado? E5: Pero utilizamos […] escuadra y cartabón. No con regla. P: ¿O sea que con esas herramientas [regla y compás] por ahora no sería posible trazar ese ángulo de noventa [grados]?	Aunque mi reacción frente a lo que estaba haciendo E6 se basó principalmente en la idea de no repetir lo que había hecho la profesora con E7 en la clase anterior, para no afectar negativamente el ambiente de la experimentación, sí que me dio mucho en qué pensar, porque como profesores deberíamos habituarnos a reflexionar antes de actuar *instintivamente*. Confío en que tanto E7 como E6 participen más en lo que resta de esta tarea, así como de la que vendrá después. Lo que ha dicho E5 es muy interesante, porque muestra que en la escuela existe una especie de correspondencia univoca entre las herramientas que se usan para hacer matemáticas, y el tipo de matemáticas que se

E5: Sí podría, pero…

No quise presionar a los estudiantes, así que les insté a que empleasen el método que ellos considerasen más adecuado para realizar los trazos sobre la cartulina. Minutos después, vi que E4 estaba usando la portada de su cuaderno como regla y como herramienta para garantizar la perpendicularidad entre los lados de los rectángulos, mientras que E5 trazaba las pestañas que servirán para ensamblar el envase.



En el grupo A:

Cuando me acerqué de nuevo a este grupo, vi que estaban trazando el desarrollo de su envase, que también eran rectángulos como en el grupo B, con la ayuda de un cartabón. No obstante, estos estudiantes no estaban dejando pestañas para el momento del ensamble. En relación con el trazado de los ángulos rectos, pregunté:

P: ¿Habrá otra manera de garantizar esos ángulos rectos [de los rectángulos] que no sea con ese instrumento [con el cartabón]?
E2: No sé [sonriendo].
P: ¿E1, sabes si hay alguna otra forma de trazar esos ángulos rectos?
E1: Debe ser con escuadra y cartabón.
P: Pero solo tienen en este caso la…
E3: ¡No, yo sí tengo! [todos sonríen]

Entonces E3 sacó de su morral una carpeta que contenía varios instrumentos de medición, entre los que se encontraban regla, escuadra, cartabón y transportador de ángulos. No obstante, advirtió que las puntas de la escuadra y del cartabón estaban rotas, por lo que pregunté:

P: ¿Habrá algún problema con hacer los trazos si las puntas [de la escuadra y del cartabón] están rotas?

puede hacer con dichas herramientas. Por tanto, considero que aquí aparece una nueva modalidad de relación cíclica entre técnicas y tareas que previamente hemos identificado al revisar el currículo y los manuales escolares.

E3: ¡No!... ¡Ah, sí claro, no se puede! P: ¿Si las puntas están rotas no se puede? E3: ¡Si no, no queda recto! P: ¿Ese transportador de ángulos podría servir? [Silencio] P: ¿Saben cómo trazar el ángulo de noventa grados con el transportador de ángulos? E1 y E2: ¡No! P: ¿No saben utilizar esto? E3: ¡Sí! P: Explícanos por favor. E3: Creo. A ver. En ese momento E3 mostró, mientras medía con el transportador de ángulos, que uno de los ángulos del rectángulo que habían trazado medía noventa grados. E3: Ahí se ve que [el ángulo] está bien. P: ¿[…] servirá [el uso del transportador de ángulos] para trazarlos [los ángulos de noventa grados], no solo para confirmarlos si no para trazarlos? E3: Sí, acá marcamos [señalando la medida de noventa grados sobre el transportador] y luego lo unimos. P: Entonces sigan el proceso. **En el grupo B:** Luego regresé al grupo B y pregunté por el avance en su proceso. Noté que estudiantes ya estaban recortando las primeras caras del envase y doblando las solapas que servirían para su posterior ensamble. Además, vi que en este grupo se habían distribuido el trabajo, de modo que a cada uno de los integrantes le correspondió el trazado de por lo menos una cara del envase.	
En ese momento, como ya había sonado el timbre que indicaba el cambio de clase, entró E8, el octavo estudiante que no había asistido a ninguna de las clases desde que estamos experimentando este REI. No obstante, le dije que, aunque no hubiese asistido antes, ello no indicaba que no pudiese unirse a su grupo y aportar en el desarrollo de esta tarea. Es decir, que su inasistencia no implicaba que se hubiese retrasado en el proceso que realizábamos, si no que podría aportar de allí en adelante. En esta clase E5 trajo una memoria USB con una captura de pantalla del modelo del envase elaborado en el programa Tinkercat, pero no logramos verlo en el ordenador del aula porque el archivo no abrió. Le dije a E5 que	Es curioso, pero sospecho, por la sorpresa que mostró E8 en su rostro, que su inasistencia hasta el momento había sido intencional. Esto es muy interesante y considero que debe ser tratado al analizar la ecología del REI, porque puede indicar que (a) la inasistencia del estudiante es una práctica habitual en varias asignaturas; (b) la propuesta que presenté

preguntaría a la profesora T, para saber si sería posible que él se lo enviara a ella por correo electrónico, para que ella luego me lo enviase a mí. Además, que trajera de nuevo el archivo el próximo día. **En el grupo A:** Vi que ya los estudiantes estaban recortando las piezas que habían trazado previamente, así que pregunté: P: ¿Pudieron trazar los ángulos rectos? E3: Sí. P: ¿Al fin, qué herramienta utilizaron? E1: El transportado. P: ¿Así como lo sugeriste E3? ¿Así cómo tu dijiste para trazar ángulos rectos? E3: Sí. **A todos:** Mientras los estudiantes estaban trabajando en sus prototipos de envase, les recordé a todos que una vez terminasen con ello, deberían iniciar con la escritura del informe en el cuaderno de grupo, donde, entre otras cosas, debía aparecer especificado: por qué han elegido dicho envase, sus características, sus planos, sugerir un proceso de construcción, y argumentar por qué dicho envase puede contener un litro de zumo. P: ¿[…] Cuál es la mejor manera de argumentar por qué [el envase] puede contener un litro de zumo? E1 mencionó que una manera podría ser poner la multiplicación de las medidas referentes a las dimensiones del envase.	antes de iniciar con la implementación del REI, que E8 sí presenció, no le pareció atractiva, por lo que decidió no asistir; y, ligado a lo anterior, (c) como esta asignatura es optativa, tal vez los estudiantes pueden faltar si quieren sin que esto afecte su promedio académico.
Pedí a los estudiantes que para el próximo día tuviesen un primer borrador del informe, para que lo complementasen en clase, de modo que yo pudieran entregármelo al finalizar la clase. Por ello, insistí en que sería importante que hoy pudiesen terminar de construir el prototipo en cartulina del envase. En ese momento entró la profesora T, así que aproveché para preguntar a los estudiantes por el material que les hacía falta para construir el envase. Esto, porque la profesora había prometido aportar pegamento, cinta adhesiva y tijeras. Entonces, E1 fue a traer dicho material.	Es interesante ver que, cuando entró la profesora al aula, los estudiantes que en ese momento no estaban participando del proceso de construcción del envase, saltaron de inmediato para ponerse junto al resto de sus compañeros de grupo. Este comportamiento merece discutirse en la ecología del REI, porque definitivamente forma parte de las condiciones y restricciones propios de la institución secundaria.

<table>
<tr>
<td>
En el grupo B:

Como a cada estudiante le correspondió el trazado de una de las caras del envase, y dado que previamente E4 había comparado dos de dichas caras que deberían ser iguales, notando que no lo eran. Entonces pregunté a E6, quien había trazado una de estas caras, y que ahora debía trazar las solapas (o pestañas) de otras de ellas:

P: ¿[…] Pusiste las pestañas E6?
E6: Eh… tengo que esperar a ella [a E4] para que lo mida.
P: ¿[…] Quine va a trazar las pestañas?
E4: Yo hago [recorto] las pestañas, pero ellos tienen que medir. ¿Qué has hecho [refiriéndose a E6]? ¡Da igual!
P: […] E4, tienes que explicarles [a tus compañeros]. Si tú ves que hay algo que no va bien, o que puede mejorar, tienes que explicarlo para que quede claro.

Finalmente, E4 se ocupó del trazado de las pestañas (solapas) del envase y E6 las recortó.

3. Cierre.
Para terminar, pedía a los estudiantes que recogieren los trozos de cartulina que hubieran sobrado y que ordenasen el aula. Además, dado que no lograron ensamblar el envase porque el tiempo de la clase se terminó, les pedí que me entregasen las piezas que habían recortado para guardarlas y entregárselas de nuevo al iniciar la siguiente clase. Les dije que, al iniciar la próxima clase, podrían continuarían con este trabajo y luego escribirían el informe.
Recordé que en la clase pasada habíamos quedado en que los estudiantes escribirían una opinión sobre el trabajo que estábamos realizado, así que pregunté si lo tenían, pero solo E4 lo había hecho.
</td>
<td>
En el grupo B, E4 lideró el trabajo de trazado y revisión de las medidas.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Pedí a los estudiantes que fuesen avanzando con la escritura del informe.
</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Dic. 18 del 2018	**Hora**	10:05-11:00	**Clase**	08	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	8 estudiantes de 3º de la ESO y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Dic18_2018

Contextualización

Para la octava clase hemos continuado con la **segunda tarea del REI**, que llamamos *el envase de litro.*

El envase de litro

Consigna:

En la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, se nos ha pedido un tipo nuevo de envase con capacidad para un litro, porque quieren renovar su forma de envasar. Por tanto, el departamento de producción nos ha propuesto que diseñemos y construyamos un prototipo de dicho envase. Nosotros como empresa consultora, debemos entregar junto con el prototipo del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se sugiera su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase puede contener un litro de zumo.

Para realizar esta tarea, entonces, en cada grupo de trabajo que hemos conformado:

- Debemos discutir y definir qué tipo de envase deseamos diseñar y construir, y qué criterios debemos tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, debemos esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, vamos a escribir un plan de trabajo en el que pondremos, entre otros, el proceso que consideremos necesario seguir para diseñar y construir nuestro envase, además de las herramientas que usaremos para ello (ejemplo: tijeras, regla, etc.).
- Dibujaremos los planos del envase.
- Construiremos un prototipo del envase en tamaño real. Para ello, podremos usar la cartulina que nos han proporcionado (65 cm x 50 cm). En caso de no utilizar la cartulina, debemos conseguir el material que necesitemos.
- Escribiremos en el cuaderno de grupo el informe para la compañía de zumos.
- Cuando hayamos terminado, deberemos exponer nuestros resultados a la compañía Zumoluna, donde presentaremos el prototipo del envase que hemos diseñado, incluyendo las explicaciones que hemos puesto en el informe escrito.

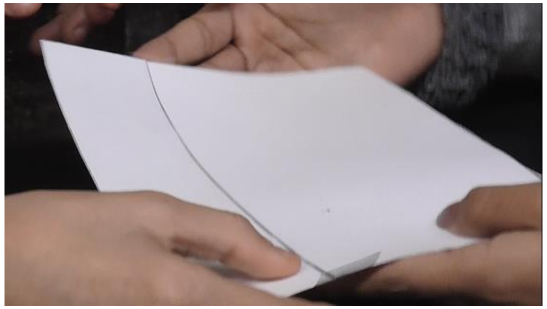
A tener en cuenta:

Dado que todos los estudiantes manejan el programa Tinkercad, que se usa para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y que existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Esta fue la tarea que les entregué nuevamente a los estudiantes. La revisamos junto con mi tutor.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo. Inicié la clase entregando a los estudiantes, en cada grupo, los trozos de cartulina que habían trazado y recortado en la clase pasada para que construyeran el prototipo del envase.	Hoy asistieron: E1, E3, E2, E4, E7, E6, E5 y E8.
2. Trabajo grupal. Los estudiantes comenzaron de inmediato con la construcción de los prototipos de los envases, así que pasé alternativamente por los grupos viendo cómo llevaban a cabo esta fase de la tarea, y preguntando sobre el proceso que estaban siguiendo para ello.	E8 no trajo el consentimiento informado arguyendo que sus padres estaban de viaje y que no se lo habían entregado. Por ello, no pude registrarlo en el vídeo de esta clase. No obstante, aunque él sabía que esto no era impedimento para participar del trabajo que estaban realizando sus compañeros, en la

<table>
<tr>
<td>
En el grupo A:

P: ¿[…] Cuál es el proceso que van a seguir para ensamblar el envase?
E1: Así, [señalando el límite de una de las piezas rectangulares] pegarlo con el celo y luego unir [esta pieza] a la otra. Y luego unir a la otra y…
 

En el grupo B:

P: ¿Aquí finalmente están usando el pegamento o la cinta adhesiva?
E4: El pegamento y la cinta.
E5: Las dos cosas.

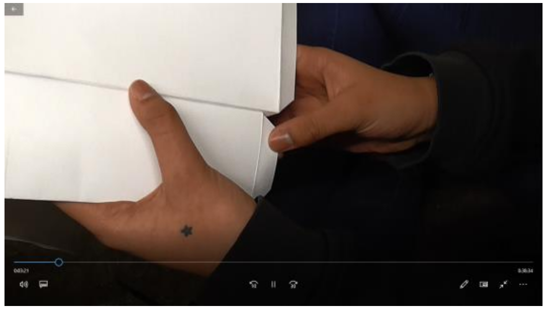
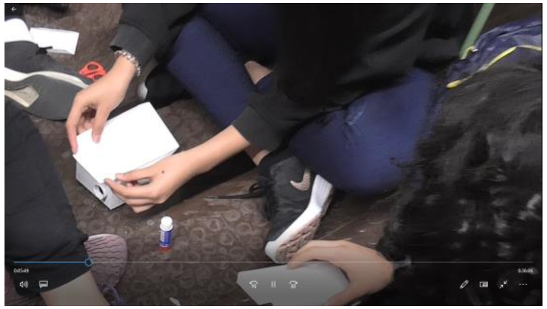
Mientras E4 estaba pegando las piezas del envase uniéndolas por las solapas, E5 le iba pasando los materiales y las piezas que ella le pedía. En ese momento E4 se percató de que dos de las piezas no encajaban, entonces tuvo lugar este diálogo:

E4: ¡Oye esto está mal medido [dirigiéndose a E5]!
E5: Esta la hizo E6 [señalando una de las piezas]
E4: ¿Qué ha pasado [mientras intentaba que las piezas encajasen]? ¡No pasa nada!

Entonces E4 comenzó a hacer nuevos dobleces en las piezas que ya había pegado para que estas se igualasen al tamaño de aquella que era de menor tamaño.

P: ¿Qué ha pasado E4? ¿Qué encontraste allí?
E4: Es que ha habido fallos técnicos.
P: Fallos… ¿Como cuál?
E4: Pues como que ha cortado un centímetro… y esta [pieza] la tenemos mal.
P: ¿Por qué ha pasado eso?
</td>
<td>mayor parte del tiempo adoptó el papel de espectador.</td>
</tr>
</table>

E4: Porque alguien lo ha medido mal… y lo ha cortado mal.
P: ¿[…] Tenían claro cuáles debían que ser las medidas?
E5: Sí, teníamos claro cuáles iban a ser las medidas. De hecho, esto [señalando una de las piezas que ya había sido pegada] tenía que medir exactamente lo mismo que esto [señalando la pieza que tenía en su mano]
E4: La hacemos más pequeña, y ya está. Porque este no…
E5: Es que son dos trozos grandes, y eso… sería mejor coger estas piezas [señalando las piezas pegadas que tenía E4] que son pequeñitas y ocupan menos espacio.
P: ¿Entonces, qué solución van a dar allí?
E4: Pues vamos a cortarlo y ya está.
E5: ¡Tenemos más cartulina!
E4: ¡Sí, pero no nos da tiempo!

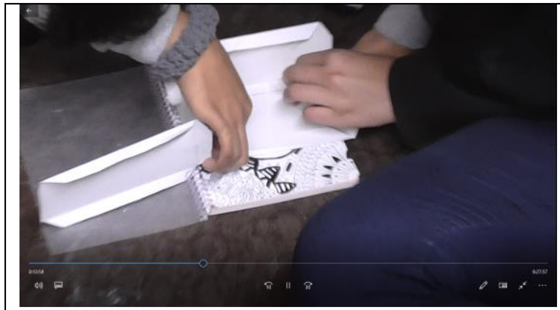



Minutos después, E6 de acercó a E4 y se ofreció a ayudar con el proceso de construcción, pero ella le contestó:

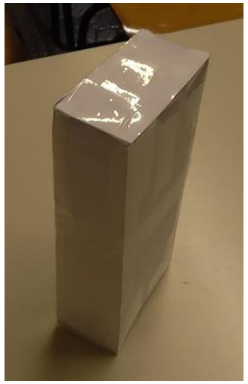
E6: ¿Queréis que siga […]?
E4: ¡No!, es que luego sale mal […], porque he hecho casi todo y luego sale mal.

De hecho, instantes después, era E3, integrante del otro grupo, quien estaba ayudando a E4 a pegar las piezas de cartulina.

E6 y E7, integrantes del grupo B, adoptaron el papel de espectadores mientras E4 y E5 trabajaban en la construcción del envase. Pero ello puede explicarse con la respuesta que E4 le dio a E6 cuando ofreció su ayuda.
Esta situación debe discutirse en la ecología del REI, porque está claro que la actitud de alguno de los integrantes del grupo afecta la manera en que los demás viven dicho REI.
Los momentos didácticos propuestos para el desarrollo de un REI no contemplan ni sugieren cómo proceder ante una situación como esta, por tanto, considero que en el análisis de la ecología del REI podríamos abordar teóricamente este asunto.
En el grupo A, lideraron el trabajo E1 y E3, sin mostrar una actitud excluyente hacia sus compañeros.



En el grupo A:



Como vi que en este grupo ya habían terminado de construir el envase, entonces pregunté:

P: ¿E1, ya han terminado de ensamblarlo [el envase]?
E1: Ya terminamos.
P: Entonces, el paso que sigue es comenzar con el informe, ¿vale?
E1: Ah, vale.
P: Entonces aquí ya pueden reunirse los cuatro y comenzar con el informe.

Minutos después, escuché que E3 preguntaba a sus compañeros por lo que debía poner en el informe, entonces intervine.

E3: ¿Qué escribo?
P: ¿Recuerdas la hoja que les di en la clase pasada?
E3: ¡No!
P: ¿No lo recuerdas?
E3: Es que no la tengo.

Aunque previamente había indicado que debía ponerse en el informe, la pregunta de E3 parece indicar que no ha leído la hoja donde aparece, además de la tarea sobre la construcción del envase de litro, lo que debe escribirse en el informe.

<table>
<tr>
<td>
En el grupo B:

Mas tarde, vi que cuando solo faltaba por pegar una de las caras del envase en el grupo B, la del lado apuesto en la que pusieron el orificio de entrada del líquido, una de las caras laterales era más larga que las demás, por lo que E4 estaba doblándola. Entonces pregunté:

P: ¿Han tenido que doblar nuevamente otra de las caras? […] ¿Esta es otra cara diferente, cierto? [No hubo respuesta].

E5: ¡E6, tu tenías que escribir el informe!
E6: Voy a escribirlo.

Ante esto que estaba sucediendo, es decir, ante el que solo a uno de os estudiantes le correspondiese escribir el informe, y dado que loes estudiantes del grupo A no estaban escribiendo su informe, decidí intervenir y me dirigí a todos los estudiantes.

P: Hay que recordar que el informe es un trabajo grupal […]. Es muy importante que para el informe estén los cuatro de acuerdo sobre lo que van a poner allí.

Aproveché para decirles a los estudiantes que eligiesen un nombre para su empresa, y sugerí que el informe se escribiera iniciando con una frase como: “Nosotros, la compañía consultora tal, presentamos el siguiente informe a la compañía Zumoluna, en relación con el envase que hemos diseñado”. Seguidamente, leí de nuevo los puntos que debe contener el informe, como son: por qué se ha elegido este envase, cuáles son sus características, los planos, sugerir un proceso de construcción y argumentar por qué dicho envase puede contener un litro. Además, dije a los estudiantes que el informe no tiene un límite de extensión, por lo que podrían emplear el espacio que necesitasen para escribirlo en el cuaderno del grupo.
Dado que ya solo quedaban diez minutos para que acabase la clase, dije a los estudiantes iniciaran con la escritura del informe para que la próxima clase pudieran terminarlo.

En relación con la selección del nombre de la empresa, creí escuchar el nombre don Simón.
P: ¿Don Simón no existe ya?
E4: ¡Don Zumón! [risas]
P: Está muy interesante.
[…]
E1: ¿Guille y los otros! [risas]
[…]
E6: ¡Ah, no, no, no, mira… la vida en litros!
E1: ¡Sí, de uno! [risas]
</td>
<td>
La idea de elegir el nombre para su empresa fue algo que resultó de especial interés para los estudiantes. Considero que allí hay algo que merece la pena analizar, porque al parecer una tarea en la que los estudiantes identifiquen que tienen capacidad de decisión, se torna relevante para ellos.
</td>
</tr>
</table>

[…] E2: ¡No, sin Guille o E1! […] E6: ¡Ay, ya lo sé! ¡Limón con leche! E1: ¡Naranja con leche! [risas] […] E4: ¡Algo pegadito! ¡Taki Taki Zumos! E1: ¡No! ¡Entre naranjos y limones se ve la punta de…! [risas] […] E6: ¡Y el eslogan! ¡Que no te quiten los litros! […] E4: Vamos por votaciones. ¿Quién vota: don Zumón? La iniciativa de E4 obtuvo tres votos en su grupo. 3. Cierre. Para terminar, como posiblemente el viernes 21 de diciembre no se dará la clase por un festival que tendrá lugar en el instituto, dije a los estudiantes que de ser así tuviesen listo el informe y la presentación para el regreso de las fiestas de final de año. Es decir, para el 8 de enero.	
Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta: • En caso de que no haya clase el 21 de diciembre, escribir el informe y preparar la exposición para el regreso de las fiestas.	

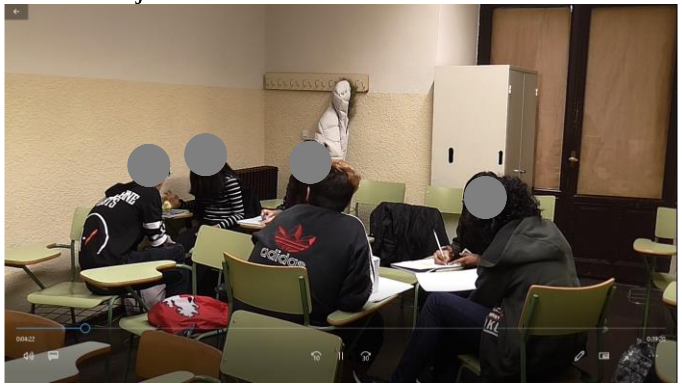
<table>
<tr><td colspan="10">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</td></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Dic. 21 del 2018</td><td>Hora</td><td>9:10-10:05</td><td>Clase</td><td>09</td><td>Investigador</td><td>Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="5">6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Dic21_2018</td></tr>
<tr><td colspan="10">Contextualización</td></tr>
<tr><td colspan="10">Para la novena clase los estudiantes se centraron en la escritura del informe que formaba parte de la última fase de la segunda tarea del REI, que llamamos el envase de litro.

El envase de litro
<u>Consigna</u>:
En la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, se nos ha pedido un tipo nuevo de envase con capacidad para un litro, porque quieren renovar su forma de envasar. Por tanto, el departamento de producción nos ha propuesto que diseñemos y construyamos un prototipo de dicho envase. Nosotros como empresa consultora, debemos entregar junto con el prototipo del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se sugiera su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase puede contener un litro de zumo.
Para realizar esta tarea, entonces, en cada grupo de trabajo que hemos conformado:
• Debemos discutir y definir qué tipo de envase deseamos diseñar y construir, y qué criterios debemos tener en cuenta para ello.
• Una vez definido el tipo de envase, debemos esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, vamos a escribir un plan de trabajo en el que pondremos, entre otros, el proceso que consideremos necesario seguir para diseñar y construir nuestro envase, además de las herramientas que usaremos para ello (ejemplo: tijeras, regla, etc.).
• Dibujaremos los planos del envase.
• Construiremos un prototipo del envase en tamaño real. Para ello, podremos usar la cartulina que nos han proporcionado (65 cm x 50 cm). En caso de no utilizar la cartulina, debemos conseguir el material que necesitemos.
• Escribiremos en el cuaderno de grupo el informe para la compañía de zumos.
• Cuando hayamos terminado, deberemos exponer nuestros resultados a la compañía Zumoluna, donde presentaremos el prototipo del envase que hemos diseñado, incluyendo las explicaciones que hemos puesto en el informe escrito.

<u>A tener en cuenta:</u>
Dado que todos los estudiantes manejan el programa Tinkercad, que se usa para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y que existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Esta fue la tarea que les entregué nuevamente a los estudiantes. La revisamos junto con mi tutor.</td></tr>
<tr><td colspan="7">Descripciones y transcripciones</td><td colspan="3">Análisis, valoraciones e interpretaciones</td></tr>
<tr><td colspan="7">1. Saludo.
Inicié la clase con un saludo y diciendo a los estudiantes que escribiesen el informe sobre la construcción del envase de litro. Además, entregué a cada grupo el prototipo del envase que construyeron en la clase pasada, pues al final de la clase acordamos que yo los guardaría.

P: ¿[…] Está claro lo que debemos hacer?
E4: Sí, o sea, describir cómo hemos hecho el Brik y…</td><td colspan="3">Hoy asistieron: E1, E3, E2, E4, E7 y E5.</td></tr>
</table>

Para estar seguro, leí nuevamente los puntos que debía contener el informe: por qué se ha elegido este envase, cuáles son sus características, los planos, sugerir un proceso de construcción y argumentar por qué dicho envase puede contener un litro. 2. Trabajo grupal. Como semanas antes había emergido la posibilidad de que se imprimiesen los prototipos de los envases, previo diseño en el programa Tinkercad, pregunte qué grupo tenía listo el diseño. No obstante, solo E5, en el grupo B, había trabajado en ello, pero no llevó el archivo. Por tanto, les dije a todos los estudiantes que no abandonasen la idea de usar Tinkercad, porque seguramente lo haríamos en la tercera tarea. El resto de la clase, los estudiantes trabajaron en la escritura del informe. Entre tanto, presté atención a los diálogos que tuvieron lugar en torno a dicho trabajo.  **En los grupos, que en esta ocasión se ubicaron muy cerca, como si fuese uno solo.** A pocos minutos de haber iniciado la clase vi que los estudiantes del grupo A parecía que ya hubiesen terminado con la escritura del informe, así que para estar seguro pregunté: P: ¿Chicos, ya terminaron el informe? Todos: Sí. P: Vale, entonces, lo quiero ver. ¿Ya tienen los planos allí también? E1: ¿Qué planos? P: E1, me parece conveniente que lean estas instrucciones donde aparece lo que debe ponerse en el informe. Son cuatro elementos que hay que poner allí. E1: Los planos del envase, ¿qué son? P: Entiendo que están viendo en clase de tecnología cómo hacer planos. E3: No sé hacerlos. P: ¿Todos están en la misma clase de tecnología?	En el grupo A, la persona encargada de escribir en el cuaderno fue E2. En el grupo B, fue E4.

Todos: Sí. E3: Pero no lo entiendo. Ante la respuesta de E3 quise indagar para saber si el resto de los integrantes del grupo tampoco sabía cómo hacer los planos, porque ello implicaba que tendríamos que destinar un tiempo para indagar en ello. P: ¿Pero, tú tampoco lo entiendes cómo hacer un plano, E2? E1: ¡Ah vale! ¡Sí, sí, sí! Dado que E1 parece que sí sabía cómo hacer los planos, dejé que continuasen con su trabajo y observé qué ocurría. E1: ¿De cuánto es? [dirigiendo se a los integrantes de su grupo] E3: ¿De cuánto qué? E1: Medidas. E2: Eh… diez centímetros, cinco, y veinte. Entonces E7, que estaba junto a E1 intervino: E7: ¿Deben ser reales? E1: ¡No, porque ponemos una escala de uno partido de dos, y sería la mitad! ¡viste qué cálculos matemáticos! E4: ¿Pero eso es reducción o aumenta…? E7 y E1: ¡Reducción! Basado en diálogo que acababa de tener lugar, intervine pidiéndole a E1 que en los planos escribiese la escala que habían usado.	La decisión de dejar que los estudiantes se las arreglasen con el trabajo de los planos, la tomé basado en las ideas de Santaló, quien afirma que no hay que partir de cero en la escuela, sino aceptar lo que los estudiantes ya saben. Y, dado que ya habían manifestado antes que en la clase de tecnología habían trabajado el tema de planos y medidas, pues opté por aceptar y usar dicho conocimiento.
Poco después tuvo lugar un diálogo en torno a la escritura de las medidas en el plano. E7: Tienes que ponerlo que son centímetros [dirigiéndose a E1] E1: ¡No, aquí no! E3: ¡No se ponen! E7: ¿Son milímetros, cierto? E3: Sí. E7: Pues ya está. E1: Pero que no se tiene que poner. E7: ¡Sí se tiene que poner! E3 y E1: ¡No se ponen! E7: ¡Que sí! ¡Cuando son milímetros! E3 y E1: ¡No! E3: A ver, ¿son milímetros o no son milímetros? [dirigiéndose a E1]	Convendría saber cuáles con las normas de acotado que enseñaron a los estudiantes en la clase de tecnología.

<table>
<tr>
<td>E1: Son centímetros.
E7: ¡Por eso!
E3: Pon centímetros [dirigiéndose a E1]. Cuando son milímetros no. Cuando son centímetros sí.

Minutos después, me acerqué a los estudiantes y le pedí que para la próxima clase tuviesen preparada la exposición de este trabajo que estaban terminando. Para ello, acordamos que apoyarían su exposición con una presentación elaborada en PowerPoint. Dije, además, que T y yo haríamos las veces de la compañía Zumoluna, a quienes ellos harían su presentación, y que, de ser posible, invitaríamos a otros profesores que estuviesen disponibles para que asistiesen también. Sugerí que la presentación no tomase más de quince minutos para que los dos grupos pudieran exponer en la misma clase.

Mientras hablaba a los estudiantes sobre la exposición, regresó T de la asignatura y permaneció en el aula hasta que terminó la clase. Aproveché para decirle que había solicitado a los estudiantes que tuviesen lista la presentación para el 8 de enero. No obstante, dado que E1 tiene una excursión en la semana del 8 al 11 de enero, acordamos que, aunque los estudiantes tendrán lista la presentación para el 8 de enero, y la traerán en un pendrive, la exposición se hará el martes 15 de enero.

3. Cierre.
Para terminar, pedí a los estudiantes que me entregaran el informe que habían escrito y el prototipo del envase que habían construido en cada grupo.</td>
<td>Aproximadamente quince minutos antes de que acabase la clase, T de esta asignatura, quien me había confiado el grupo de estudiantes, entró momentáneamente al aula. De inmediato los estudiantes pasaron de una actitud distendida a una propia de las clases regladas, donde se sabe que se es observado por el profesor. No es la primera vez que sucede esto.
Aunque sé que debo discutirlo ampliamente en el análisis de la ecología del REI, de momento considero que la actitud de los estudiantes muestra algo muy positivo, porque quiere decir que ellos no se sienten cohibidos ante mi presencia. Eso es bueno en términos de nuestra investigación, porque las actitudes de los estudiantes durante la implementación del REI, alcanza cierto grado de “naturalidad”, aun en un ambiente restrictivo como lo es el de una clase de matemáticas en el instituto.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Preparar la exposición y traerla lista en un pendrive para revisarla el 8 de enero.</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Ene. 8 del 2019	**Hora**	10:05-11:00	**Clase**	10	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura, y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Ene8_2019

Contextualización

Para la décima clase está programada la revisión de las presentaciones que los estudiantes harán con base en la segunda **tarea del REI**, que llamamos *el envase de litro*, y el inicio de la tercera y última tarea del REI.: *el mejor envase*.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo. Inicié la clase con un saludo y diciendo a los estudiantes que hoy revisaríamos las presentaciones en PowerPoint con que apoyarán sus exposiciones el próximo martes. Además, les dije que entregaría las rúbricas con la que evalué el primer informe de lectura.	Hoy asistieron: E3, E2, E4, E7, E5 y E6.

2. Sobre la presentación en PowerPoint. Los estudiantes no hicieron la presentación, por lo que les pedí que la llevasen el próximo viernes 11 enero para su revisión. No obstante, insistí en que la fecha de la exposición continuaba en pie, es decir, que esta se llevará a cabo el martes 15 de enero. Acordamos que el archivo de la presentación se llevaría en un pendrive. 3. Sobre la tercera tarea del REI. Hice un recuento de las dos primeras tareas que hemos realizado hasta el momento, y luego indiqué: P: […] Como empresa consultora, en la que ya tienen experiencia, vamos a diseñar un envase […] y este diseño lo vamos a llevar a Tinkercad, […] y de ser posible lo vamos a imprimir […]. En esta ocasión vamos a diseñar un envase para un perfume. […] ¡Vamos a ser desbordantes de creatividad! A continuación, entregué a cada estudiante una hoja donde aparecía la consigna de la tercera tarea, junto las indicaciones para la elaboración del segundo informe escrito. Luego, leí en voz alta dicha tarea. P: […] ¿Qué preguntas creen que tenemos que hacernos para diseñar este envase? E4: Cómo de grande tienen que ser. E5: Capacidad. P: […] ¿Habrá alguna relación entre el tamaño y la capacidad? E3 y E5: Sí. P: ¿Por qué? E5: Porque según el tamaño puede caber más o menos. P: […] ¿Qué otra cosa hay que definir? E5: Volumen. P: Bueno, ¿qué relación hay entre el volumen y la capacidad? [E5 sonrió] P: ¿Qué relación hay entre capacidad y volumen? ¿Será lo mismo? E5: el volumen te dice lo que puede caber. El volumen es… Depende también de cada forma, porque si es un cuadrado, un cubo más bien, tienes que calcular su volumen según lo que cabría en cada forma. Con base en el diálogo que acababa de tener lugar, dije a los estudiantes que tendríamos que revisar en libros, internet o con expertos, cuál es la diferencia entre volumen y la capacidad. P: Ya que definamos el tamaño y la capacidad [del envase], ¿qué otra cosa tenemos que definir? Quiero diseñar un envase, ¿qué otra cosa creen [ustedes] que debamos definir? E5: Que forma. P: ¡Qué forma va a tener! […] ¿Por qué será importante la forma?	Decidí no prestar mucha atención al hecho de que los estudiantes no hicieron la tarea, porque no quise generar un ambiente tenso que pudiese afectar el desarrollo de la investigación. Esto también hay que discutirlo en la ecología del REI. Creo que debo tener una conversación con E3 para motivarla a que vaya un poco más allá de lo estrictamente necesario, porque mientras yo repartía las hojas con la consigna de la tercera tarea, ella dijo a E2 a E4 que llevaría su perfume “y ya está”. Un nuevo asunto para discutir en la ecología del REI, la relación entre el deber hacer y el querer hacer.

E5: Porque quieren algo atractivo, de hecho. P: […] Pero, además, eficiente. En tanto atractivo tenemos que fijarnos en asuntos como la forma. Tú lo has dicho [refiriéndose a E5]. Pero, en tanto eficiente, ¿en qué asuntos tenemos que fijarnos? ¿Para que un envase sea eficiente, en qué creen que debemos fijarnos? E4: Pues que se pueda como echar el perfume. P: Explícate un poco. E4: Eh, que no sea como un tapón, sino que tenga el típico del perfume, para que eches. P: ¡Ah, ya!, ¿cómo un difusor? E4: ¡Sí! E3: Como un espray. P: Si, como un espray. En ese caso es más eficiente, porque supongo que, si tú tienes una tapa y lo abres, por la naturaleza del perfume y por el costo que suele tener, pues más fácil se te puede derramar […]. Eso tiene que ver con la eficiencia. Para dar otro ejemplo sobre el concepto de eficiencia, propuse el caso del hipotético diseño y construcción de una de las sillas del aula, en la que, si hiciéramos el espaldar muy grande o muy pequeño, o bien desperdiciaríamos material o no cumpliría su propósito. P: […] Cuando hablamos de eficiencia, ¿en qué elementos también tendríamos que pensar en el caso del perfume? E5: Dimensiones. P: […] ¿Quiénes [de ustedes] han visto un envase de perfume de cinco litros? E4: ¿Cinco…? Entonces, reflexioné en torno a que posiblemente no se envasen perfumen en envases de cinco litros por su costo final. E3: Pero también, es mejor uno pequeño porque… yo creo, al ser muy grande, si no te gusta qué haces con él. Bueno, aunque lo puedes probar antes, pero… Regresé al ejemplo del diseño de la silla del aula, haciendo ver que hay otras variables que podrían intervenir en ello, como son la cantidad de dinero con que se cuenta para comprar los materiales para la construcción de dicha silla. P: […] Podemos pensar en que la eficiencia tiene que ver con ese tipo de cosas. Pensar en, ¿yo con cuánto cuento y cuánto necesito? Fui de nuevo al caso del diseño del perfume y pregunté:	

<table>
<tr>
<td>P: […] supongamos que decido diseñar un envase para un perfume […] en madera. ¿qué creen que sucede si yo vierto…?
E5: […] La madera se mojaría y [el perfume] se va.
P: Es muy probable que se filtre a través de la madera, entonces no sería muy eficiente en esos términos, porque habría pérdida de líquido. Entonces, eficiencia tendría que ver con muchas cosas. No voy a decir que tiene que ver con esto o aquello. Pero tiene que ver con esos elementos que nos llevan a pensar: ¿qué sería lo más adecuado?

Luego, para instar a los estudiantes a que reflexionaran un poco más en relación con el concepto de eficacia, indiqué:

P: […] ¿Será que el olor se afecta cuando se vierte el líquido del perfume en madera? ¿En qué materiales no se afectaría? ¿cómo se conservaría mejor? ¿Será que la temperatura afecta? […] el próximo viernes yo voy a hacerles una presentación a ustedes […] donde voy a dar algunas pautas generales para el diseño de envases […] de acuerdo con la normativa europea. […] simplemente voy a transmitir esa información para tener algunas pistas que nos puedan ayudar para el diseño del envase. Pero por ahora, eso no quiere decir que no podamos ir pensando en el tamaño, en la forma, etc., [del envase] […].

4. Sobre la rúbrica de la evaluación del informe de lectura.
Entregué a cada grupo una rúbrica con la evaluación del informe de lectura, diciendo que las observaciones que aparecen allí servirán para mejorar la presentación del próximo martes, y como referente para el segundo informe que se debe hacer con ocasión de la tercera tarea.
Expliqué a los estudiantes que los ítems que aparecen en la rúbrica son los mismos que se establecieron en la segunda tarea para la construcción del informe de lectura.

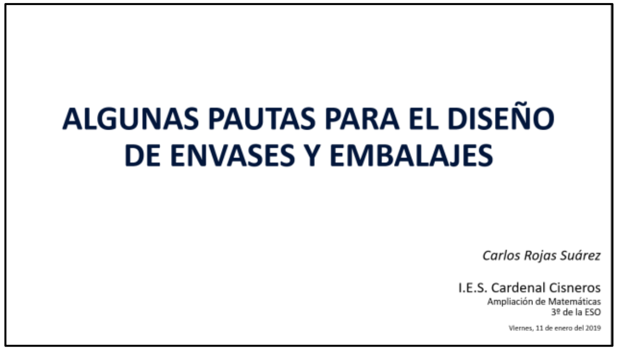
5. Cierre.
Por último, dije a los estudiantes que los minutos que faltaban para que terminase la clase, los invirtieran para ir pensando en las características del diseño del envase para el perfume.</td>
<td>Tras entregar la rúbrica se suscitó un episodio muy interesante. E3 escribió en el cuaderno del grupo –en consenso con E2 según se ve en el vídeo– una de las respuestas que habían omitido en su momento, razón por la cual dicho ítem fue evaluado como no entregado. Luego, me llamaron para decir: “la pregunta cinco sí la tenemos”. Así que les propuse que comparásemos el cuaderno con la imagen escaneada que yo previamente había hecho del informe. Ante ello, E3 indicó que la nueva información la acababan de agregar, por lo que expliqué que la evaluación se había hecho con base en lo que entregaron antes. Las estudiantes sonrieron y estuvieron de acuerdo con mi explicación.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Preparar la exposición y traerla lista en un pendrive para revisarla el 11 de enero.
• Ir pensando en el diseño del envase: forma, capacidad, etc.</td>
</tr>
</table>

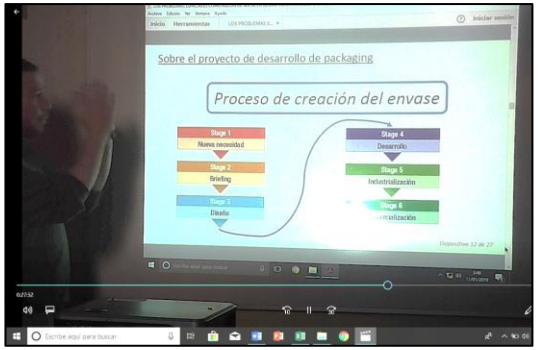
DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Ene. 8 del 2019	**Hora**	9:10-10:05	**Clase**	11	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	6 estudiantes de 3º de la ESO y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Ene11_2019

Contextualización

Para la décimo primera clase revisé la presentación en PowerPoint que hicieron los estudiantes para apoyar la exposición que harán el próximo martes 15 de enero, e hice una exposición a los estudiantes en la que presenté las características generales sobre el diseño de envases. Para ello, me basé e la información recabada en dos textos, El proyecto de desarrollo de packaging, y Guía de ecodiseño de envases y embalajes. Esto, con el objeto de que los estudiantes conocieran algunas pautas en relación con el diseño de envases en España, para que puedan usarlo en el desarrollo de la tercera y última tarea del REI: ***el mejor envase***.



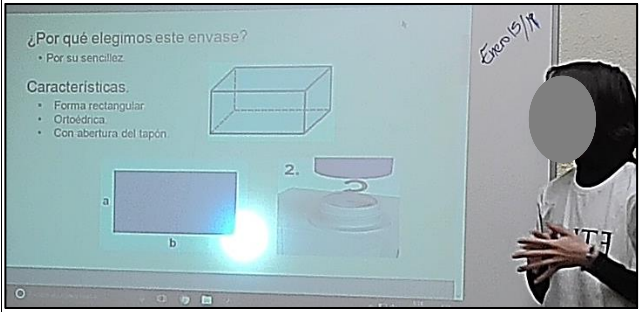


Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Inicié la clase con la revisión de las presentaciones en PowerPoint con que los estudiantes apoyarán sus exposiciones el próximo martes. Como los estudiantes del grupo A no trajeron la presentación, les recordé que el objetivo de esta revisión era poder hacer algunas sugerencias que podrían serles útiles para complementar dicha presentación y, por tanto, su exposición. Así, las sugerencias que día al grupo B, fueron: • Explicar a qué refieren con "sencillez" en tanto argumento para explicar la elección del envase de litro diseñado. P: […] ¿Sencillez para calcular sus medidas, sencillez para construirlo, sencillez para trazarlo? Tal vez sencillez para todo ello. • Ampliar la explicación en relación con las características del envase, en tanto rectangular. P: […] forma rectangular, ¿rectangular de qué? Por ejemplo, en este caso, si hablas de las formas de las caras, [entonces diremos que] las formas de las caras son rectangulares. • Aclarar un poco la imagen que han puesto en la diapositiva donde se muestran los planos del envase.	Hoy asistieron: E3, E2, E4, E7, E5 y E6.

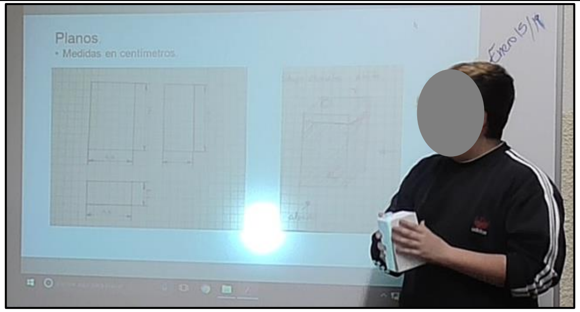
• Verificar los cálculos realizados para calcular la capacidad del envase, y preparar bien dicha explicación para el momento de la exposición. • Incluir la explicación del proceso de construcción en la presentación, porque no hay una diapositiva que trate dicho tema. P: […] ¿Si han visto en algunos libros de origami como explican cómo se van haciendo los dobleces […]? ¿Han visto esos libros donde aparecen esas instrucciones? Grupo B: Sí. P: Traten de hacer algo parecido. Por ejemplo: primero, recortar […]; segundo, unir esta [cara] con esta […] Para recrear el proceso que han seguido. E4: ¿Se puede usar la pizarra y una hoja? P: ¡También, por supuesto! Por demás, [la presentación] me parece que está bien. Y la idea es que todos puedan aportar en el discurso. Ya se organizarán [para ello]. 2. Sobre la presentación de las pautas para el diseño de envases. Luego, expuse a los estudiantes la presentación que preparé en relación con la información sobre el diseño de envases y las características del diseño de ecoenvases. Pero antes, recordé a los estudiantes que esta presentación solo nos permitiría informarnos sobre las características generales en relación con el diseño de envases. Por lo que agregué: P: Ustedes, con base en esta información, van a complementar las ideas que ya tienen. Es decir, esto no les va a decir qué envase hacer. No les va a decir qué forma. No les va a decir qué tamaño. Lo que sí les va a decir es qué características se deberían tener en cuenta para el diseño, y que tal vez les puedan servir […]. Por eso he denominado esta presentación: algunas pautas para el diseño de envases y embalajes. Al finalizar, destiné un espacio de tiempo para responder a las preguntas que tuviesen los estudiantes. E3: ¿El diseño que vamos a hacer… a ver, como de cartón, o no? P: No […] ustedes pueden tomar la decisión. Yo quiero que mi perfume sea… de cristal, por ejemplo. Está claro que no lo vamos a construir en cristal, porque necesitaríamos como fundir el cristal. Pero, sí podemos diseñarlo y decir: el grosor de las paredes del cristal va a ser de tanto, el tamaño […] eso lo podemos planear porque como vamos a imprimir el prototipo en 3D, pues que va a ser en plástico, pero no importa. Pero vamos a tener la idea de que [el envase] es en cristal. […] Voy a hacer todo lo posible para que T no ayude hablando con la profe o el profe de tecnología, para que podamos imprimirlo. Pero es necesario que tengan esos modelos en Tinkercad después de que ya tengan los planos. Finalmente, obsequié a cada grupo de estudiantes un ejemplar del apartado de la guía de envases, donde se aborda la etapa del briefing.	Aunque a mitad de la exposición desconecté accidentalmente el ordenador y el videobeam del aula, y no tenía la contraseña para iniciar de nuevo el ordenador, ello no supuso ningún problema para continuar con la presentación, porque lo hice directamente desde la pantalla de mi ordenador portátil.

3. Cierre. Por último, pedía a los estudiantes que pensaran sobre las características del envase que desean diseñar. P: […] Piénsense muy bien la forma, el tamaño, la capacidad, el material, el grosor [del envase, etc.], y [luego] tenemos que empezar a diseñarlo. Por ejemplo, yo podría preguntarme, ya que definí la forma y el tamaño [del envase], ¿cómo hago para calcular su capacidad? Eso tendríamos que preguntárnoslo, y tendríamos que definirlo. Y allí habría un momento […] [que implica] detenerse a calcular.	Invité a los estudiantes a que, con base en el título del apartado del documento que les compartí, consultaran en internet más información en relación con el diseño de envases.
Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta: • Preparar la exposición para el 15 de enero.	

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Ene. 15 del 2019</td><td>Hora</td><td>10:05-11:00</td><td>Clase</td><td>12</td><td>Investigador</td><td colspan="3">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Ene15_2019</td></tr>
<tr><th colspan="12">Contextualización</th></tr>
<tr><td colspan="12">Para la décimo segunda clase los estudiantes hicieron las presentaciones de la segunda tarea del REI, que llamamos el envase de litro, en las que informaron en relación con el envase diseñado: (a) del por qué han elegido dicho envase y de las características de su diseño, (b) de los planos del envase, (c) del proceso de construcción, y (d) de los argumentos para demostrar por qué dicho envase puede contener un litro de zumo.</td></tr>
</table>

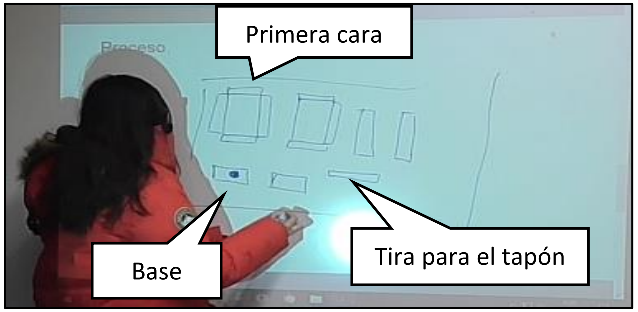
Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Inicié la clase con un saludo y preguntando qué grupo quería iniciar con su exposición. Los estudiantes del grupo B indicaron que ellos iniciarían. Pero antes, recordé a todos los estudiantes que en la presentación se debía informar de los mismos aspectos a los que respondieron en el informe escrito, en relación con el diseño del envase de litro. P: […] Recuerden que en la exposición tenemos que contar todo lo que debimos haber puesto también en el informe. Luego dije a los estudiantes que trataran de hacer su exposición en máximo 15 minutos para que; de una parte, hubiese tiempo para formular algunas preguntas; y de otra, para que el otro grupo también tuviese tiempo para exponer. Además, les pedí que hablasen fuerte y claro. 2. Sobre la exposición del grupo B.  E6: Por qué hemos elegido este envase. Pues lo hemos elegido por su sencillez, forma rectangular y ortoedrica, y buena abertura del tapón. Por eso lo hemos elegido.	Hoy asistieron: E5, E4, E7, E6, E1, E3 y E2. Las lecturas de las medidas del envase que corresponden a 9.5 y 9.6, que ha hecho E7,

<table>
<tr>
<td>
E7: Pues los planos los hemos hecho en isométrica. Primero hemos hecho la figura. Esta es la cara, perfil, y planta. Las medidas son dieciséis con cinco centímetros (16.5 cm), nueve con cinco (9.5), y nueve con seis (9.6), seis con cuatro (6.4) [señalando la proyección de la presentación en la pizarra]

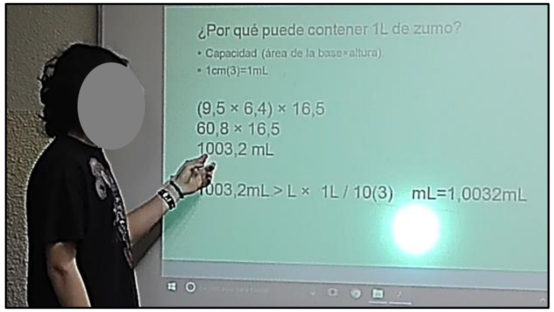


E4: Los materiales para elaborar el envase. La cartulina, las tijeras, el celo, la regla, el lápiz y pegamento.

Luego, E4 explicó el proceso que habían seguido para trazar, cortar y ensamblar el envase.



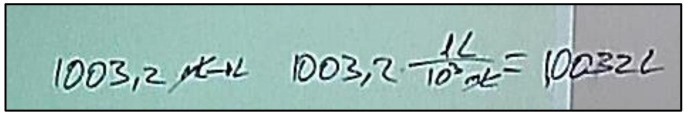
E4: […] Qué hemos hecho. La primera cara dos veces. Hemos hecho una especie de pliegues para poder unirlas, en todos lados. Lo mismo con la base […] Básicamente en esta base hemos hecho una circunferencia de dos centímetros. Y qui es donde hemos hecho la abertura donde está el tapón. Y para poder como hacer la parte de plástico, hemos cortado una tira y la hemos pegado con celo, para que se quede como una especie de círculo.
</td>
<td>
corresponden a la misma dimensión, pero en diferente vista en los planos del envase. Fue un error de lectura porque la imagen estaba algo oscura. No obstante, esto es interesante, porque podría indicar que E7 no tiene claro que dichas medidas corresponden a la misma dimensión en el envase.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
E5: Luego las medidas. Por qué [el envase] contiene un litro de zumo. Básicamente es… para medir un… prima ortoédrico lo que hemos hecho es base por altura. Área de la base por altura. Que es, la base es nueve con cinco (9,5) por seis con cuatro (6,4). y luego la altura que es dieciséis con cinco (16,5). y nos da todo esto en centímetros… en centímetros. Y nos acaba dando mil tres con dos mililitros (1003,2 ml), que básicamente un centímetro cúbico es un mililitro. Y normalmente en una… en un prisma ortoédrico. Bueno, en un Brik donde normalmente se pone zumo, ¡cabe más de un litro! Porque es que, si no, estaría muy acongojado. Y, pues ya está. Mil tres (1003), es uno coma cero, cero, tres litros (1,003 l). Ya está.



Luego de la intervención de E5, T de la asignatura intervino preguntándole por la explicación de la última línea de información de la diapositiva que acababa de presentar.

T: No entiendo qué pones ahí en la última línea, ¿me lo puedes explicar?
</td>
<td>
La expresión *acongojado* usada por E5, hace referencia a que no habría espacio alguno entre el contenido del Brik y el Brik.
</td>
</tr>
</table>

E5: Lo que hace es pasarlo de mililitros a litros y hace… cómo se llama…
E4: Conversión de unidades.
T: Pero es que no entiendo lo que pone ahí. […] O sea que no entiendo la fórmula.
E5: Lo que hacemos es, mil tres, coma dos, que está en mililitros (1003,2 ml), y queremos pasarlos a litros. Y lo que hemos hecho es: mil tres por dos (1003 x 2), por… un litro, que se quedaría arriba, entre diez, a la tres, mililitros (10^3 ml). Tachamos mililitros con mililitros y se quedan litros. Y se queda, uno coma cero, cero, treinta y dos, mililitros.



T: Vale, lo digo porque es que eso que pone ahí bajo no lo entiendo. O sea, eso que me acabas de explicar lo entiendo, y lo que no entiendo es la última línea. Esto que pone: mayor (>), ele (L), por un litro (1 L) […] diez (10), paréntesis tres (3). ¿Sabes lo que te digo?
E5: Sí. Paréntesis tres, es elevado a tres. Luego, esto que parece un mayor, es una flecha.
T: […] Pues, ¿tu entiendes que no se entiende?
E5: sí.

Luego, en el marco de este mismo diálogo se suscitó otro episodio que dejó ver la incidencia de la nomenclatura en la enseñanza:

P: […] Lo que han puesto allí en la última línea, podría entenderse de manera diferente a lo que has explicado allí.
T: Y luego, mililitros, la ele no es con mayúscula.
[…]
E5: Es que […] en química, cuando nosotros utilizamos la ele, puede ser, ele [minúscula] que significa longitud, con lo cual [en este caso] lo escribimos con ele mayúscula en vez de ele minúscula.

A continuación, formulé algunas preguntas a los estudiantes del grupo B. Para ello, les pedí que volviesen a la primera transparencia.

P: Cuando dicen que han elegido este envase por su sencillez, podrían explicar un poco mejor. Sencillez, en relación con qué. Sencillez…
E6: Pues en plan… habíamos dicho, uno con forma así, con rectángulo que sea fácil así… o sea, no nos queríamos complicar mucho. Uno sencillo.
P: Pero, perdona. ¿Es fácil para armar? ¿Es fácil para trazar su desarrollo? ¿Es fácil para hacer sus cálculos? ¿Para qué es fácil?

Este episodio sobre la notación con la que E5 explica la equivalencia entre mililitros y litros merece ser analizado, porque ello podría constituirse en evidencia de que los estudiantes se encuentran atados tanto a nomenclaturas como a algoritmos, al momento de realizar cálculos matemáticos.

E5: Es fácil para hacer los cálculos y también para la forma, porque es que, si fuera también, por ejemplo, una forma cilíndrica, tendríamos que… traer más materiales también, como un compás. Cosas por el estilo. Y… nos podría haber llevado más tiempo. Por eso hemos hecho… Entonces, basado en la respuesta que acababa de dar E5, pregunté: P: ¿Será que […] se hubiese empleado más material haciendo un envase de forma cilíndrica, que el envase que han…? Bueno, para eso habría que hacer un estudio más profundo, pero ¿qué creen, que se hubiera usado más material, menos material o igual cantidad de material? E5: Pues yo creo que se habría utilizado… para hacer una figura cilíndrica tendríamos que cortar dos trozos [circulares] así, y uno en forma rectangular [mientras esbozaba en la pizarra el desarrollo de un cilindro]. Lo que hemos hecho nosotros es, esta figura [esbozando el desarrollo clásico de un sólido ortoédrico]. Estas con las bases, y con los pliegues más grandes hemos juntado todo esto. P: […] Pero en la plantilla que nos han explicado no fue esa, sino que la hicieron por separado. E5: Sí. Luego, pedí que enseñasen la siguiente transparencia, en la que aparecían los planos y las medidas del envase. P: ¿De dónde han obtenido esas medias? ¿Cómo hicieron para saber que esas medidas eran las que necesitaban para ese envase? E5: Pues, en internet. P: ¿Cómo hicieron la búsqueda? Cuéntennos cómo… E5: Un ortoedro que contenga más de un litro. P: Y apareció esto. E5: Y apareció eso. P: Y luego verificaron. E5: Sí. Luego, claro, verificamos. Y nos daba, mil tres con dos, mililitros (1003,2 ml). Entonces, quise profundizar en la manera en que los estudiantes habían hecho esta verificación. P: […] ¿Verificaron, una vez que habían construido el envase, que esas medidas que habían planeado se cumplieron, una vez construido el envase? Es decir, ¿el envase tiene esas medidas? E4: Exactamente no, porque como le pusimos mal medido. Cada uno [de los estudiantes] hizo unas medidas, y no coincidían todas. [Por tanto] teníamos que hacer las [caras del envase] un poco más pequeñas, para que todas fueran iguales. P: Es decir que, en la práctica, o sea, en el momento de recortar y ensamblar las piezas… E5: Hubo un error de medidas. P: ¿Por qué hubo un error de medidas?	

E5: Porque… seguramente habían medido mal, y esto [señalando la altura del envase en los planos], lo más probable es que hubieran puesto un catorce (14) o algo por el estilo.

Para instar a los estudiantes a que reflexionasen sobre la capacidad del envase, indiqué:

P: ¿Saben qué significa eso en la práctica?
E5: Que no contiene un litro.
E4: que no le cabe un litro.

Después, pedí a los estudiantes que avanzasen a la transparencia donde indicaban los materiales usados para diseñar y construir el envase.

P: […] ¿Nos podrían explicar con prototipo en mano cómo fue que lo ensamblaron […]?
E4: […] Empezamos con las caras grandes, le pusimos pegamento, mantuvimos, y luego ya para reforzar le pusimos celo, porque antes se separaban. Y también pusimos celo dentro, porque el pegamento no se secaba del todo y necesitábamos acabarlo rápido.
P: ¿Recuerdas cuál fue la última pieza que pegaron?
E4: Sí, la parte del tapón.
[…]
T: […] Esas caras tienen pestañas por dentro?
E5 y E4: Sí.
T: ¿Todas o algunas sí y algunas no?
E4: Todas.

Entonces, aproveché unos de los episodios que había tenido lugar cuando los estudiantes se encontraban en la etapa del diseño, en el que E5 había mencionado la dificultad que suponía el cálculo de las medidas del envase, por lo que, señalando sobre el prototipo del envase indiqué:

P: […] Sabían que la multiplicación de esta dimensión, por esta dimensión y por esta dimensión, debería dar lo que necesitábamos, que era…
E5: ¡Sí!, eso era lo que ya sabíamos, que era, área de la base por la altura, pero no hallábamos un valor que nos diera más o menos para que la altura no fuera muy alta.
P: Pero yo recuerdo que tú me habías dicho en ese momento, […] que primero definiste una altura, o sea que cogiste mil centímetros cúbicos (1000 cm^3) y lo dividiste en la altura. […] La altura, aproximada, de cuánto, me habías dicho.

E5: Sí. Decía que era cincuenta centímetros (50 cm). […] Esto medía cinco centímetros (5 cm), cuatro centímetros (4 cm), y esto de altura, medía cincuenta (50) [mientras esbozaba el diseño del envase en la pizarra]. Pero es que, la altura era demasiado grande. Le recordé entonces a E5 que, en su momento, le había preguntado por qué no cambiar la altura del envase, a lo que él había respondido que, al cambiar dicha altura, la base se hacía muy grande. Razón por la cual, yo les había invitado a preguntarse por la relación que podría haber entre la altura y la base del envase. Finalmente, abandonaron la idea de explorar dicha relación, por lo que indiqué: P: […] Quiero mencionar esto, es porque, estamos ya entrando en el tercer proyecto, y es el diseño de un envase de perfume. Y entonces, este tipo de problemáticas van a aparecer nuevamente. Quisiera invitarles a que, en esta ocasión, tal vez, pudiéramos preguntarnos, por esas medidas, y… T: Y que no las miren de no las miren de internet. P: Y no mirar la respuesta ya dada. T: ¡Que no pasa nada! Pero, si lo pensáis, ¡estaría guay! P: […] El trabajo que han hecho es un trabajo fenomenal, pero puede ser todavía muchísimo mejor cuando invierten un poco más de esfuerzo […]. Por último, pregunté a los estudiantes del grupo A si tenían alguna pregunta para sus compañeros. Respondieron que no. Así que pedí un aplauso para los expositores.	Pregunté por la participación de E8, dado que su asistencia no ha sido regular.
3. Sobre la exposición del grupo A. Antes de que los estudiantes comenzasen con su exposición, pregunté si E8 formaría parte de esta etapa del trabajo, a lo que respondieron que parecía ser que no. Al inicio, los estudiantes de este grupo tuvieron complicaciones técnicas porque los textos que habían puesto en su presentación no se veían. No obstante, luego de algunos minutos se superó esta situación, dado que ellos optaron por repasar con el rotulador dichos textos sobre la pizarra.	Al inicio se la exposición, E2 estaba muy nerviosa. Sumado a esto, la situación se tornó un poco más incómoda para ella, porque T le instó a que nos mirase mientras hablaba, arguyendo que era de mala educación no mirar a la cara. Considero que esto hay que analizarlo con mucho tacto, porque, si bien, dirigirse al público es una competencia que en el mundo académico es necesaria, también lo es que no se adquiere de la noche a la mañana. Es más, los nervios al hablar en público, creo, siempre estarán presentes en el expositor. Yo mismo he sido presa de los nervios en estas situaciones.

E2: […] Es un envase rectangular, y tiene seis (6) caras…
T: ¿Te da miedo mirarnos? ¡No nos miras!
E2: Ahora… ¿yo sigo? [dirigiéndose a sus dos compañeros].

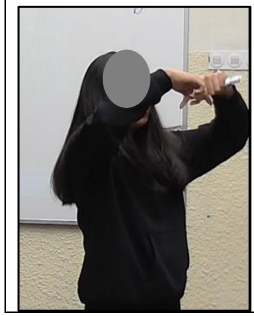
Cuando E2 cambió de lugar, para ceder el turno de la palabra a E3, accidentalmente desconectó el cable de poder del ordenador y del proyector, por lo que estos se apagaron.

P: No pasa nada, a mí me pasó lo mismo. Tranquilos, vamos a superar esto. […] Tenemos tiempo, no se preocupen […].

Mientras el ordenador arrancaba de nuevo, aproveché para formular las primeras preguntas a los estudiantes del grupo A.

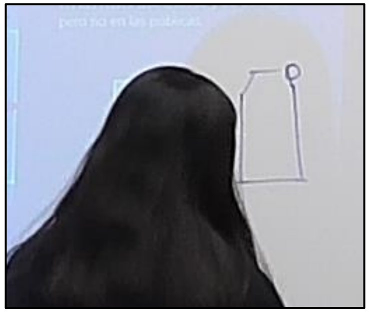
P: […] ¿Por qué eligieron este envase?
E3: Porque era fácil de hacer, además de que… es el típico Brik. […] Y de construir, de montar.
E2: Y medir.
P: ¿Y de medir también?
E3: Bueno, de hacer.
E1: Si, porque también la fórmula era fácil de hacer y… no tuvimos que mirar tampoco para elegir las medidas.
P: ¿De dónde las sacaron?
E3: Del libro, de mates, la fórmula…
E1: Cogimos la fórmula y luego empezamos a probar números hasta que nos diera una cantidad que no fuera ni muy grande, o sea, que se pudiera montar bien, y que fueron: veinte centímetros (20 cm), diez centímetros (10), y aquí cinco centímetros (5 cm) [señalando sobre el prototipo del envase construido]

Quise indagar un poco más a fondo por la fórmula que habían usado, así que insistí:



P: […] La fórmula, ¿de dónde la obtuvieron?
E3 y E1: Del libro de mates.
P: […] ¿en qué parte del libro aparece? ¿Cuándo se refieren a qué tema?

E3: Cuerpos geométricos, creo. Además de que hay muchos envases que son rectangulares y luego son así [haciendo una señal con sus manos indicando que terminan en punta]: la tapa así, y luego una tapa. Entonces, si elegíamos ese, la parte esta de… así, pues no íbamos a poder hacerla, porque no hay como una fórmula de estas.
P: Eso está muy interesante […], ahora nos podría hacer, más o menos un…
E3: Mira, es así [esbozando un diseño en la pizarra]. Hay como una tapa aquí. Algo así.



Intervine haciendo notar que el motivo que había llevado a estos estudiantes a elegir este tipo de envase era muy similar al del otro grupo. Es decir, que en ambos casos contaban con una fórmula para hacer los cálculos con facilidad. Agregué:

P: […] Efectivamente, en los libros no aparecen ese tipo de sólidos. O por lo menos, no aparecen ese tipo de fórmulas para todo el envase completo. Entonces aquí aparece algo interesante que tendríamos que preguntarnos: si la fórmula no está, entonces por qué no la inventamos […].
E5: Se puede obtener la fórmula, pero es que… eso tardaría más tiempo. Sin embargo, en una… se tendría que calcular el área de… de la parte de arriba, por separado al área de la base.
P: Entonces, aquí viene un reto para la tercera tarea. […] Me parece que en los libros de geometría no va a haber fórmulas, seguramente, para esos envases tan bonitos que van a diseñar. Entonces, ¿cómo lo van a solucionar?
E3: Creándolas. Creando fórmulas, porque si no…

Luego de esta intervención, los estudiantes continuaron con su exposición, apoyados en la presentación que traían en PowerPoint.

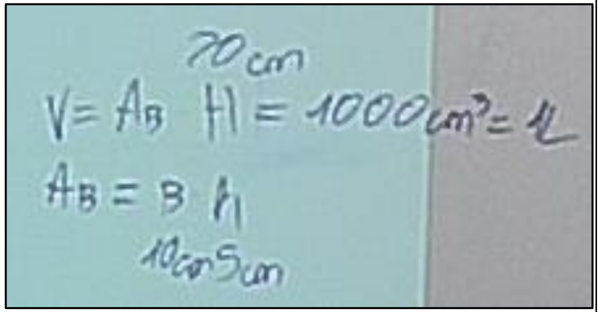
E3: Para hacer nuestro envase utilizamos cartulina, tijeras, set de reglas. La regla, la escuadra, el cartabón, el transportados de ángulos.

Entonces, E1 instó a E3 a que explicase cómo habían usado estos instrumentos.

E3: Pues la regla, para que esté recto…
T: El transportados de ángulos lo has usado para…
E3: Para…
E1: Para que el ángulo fuera de noventa grados (90º), para controlar que estaba bien.
T: […] Para que tuviera un ángulo de noventa, no has usado la escuadra o el cartabón. Has usado el transportador de ángulos.
E3: Sí, porque nos pareció más sencillo de hacerlo. O sea, y de utilizar.
[…]

E3: el celo, para pegar. En relación con el proceso de construcción: E1: […] Hemos utilizado las reglas y todo para sacar todas las piezas. Las hemos recortado de la cartulina. Y luego, hemos utilizado el celo para ir uniendo los… las aristas. T: O sea, que no tiene pestañas. E1: ¡No!, no hemos utilizado pestañas. Hemos preferido utilizar el celo por dentro y por fuera, para que se sostenga bien. Y ya está. Y luego esto lo hemos puesto para [refiriéndose a una tapa de plástico de un envase comercial]… P: ¿Eso lo han puesto ahora mismo, cierto? [risas generalizadas] E1: Para que se pudiera ver por donde se bebería. P: Pero, no forma parte de diseño original, ¿cierto? E1: No. Aproveché para instar a los estudiantes en que, para la tercera tarea, pensaran es ese tipo de asuntos desde el inicio. Después, pedí a E1 que nos explicara de nuevo cómo fue que dieron con las medidas del envase. E1: Nosotros cogimos del libro la fórmula del volumen, que es el área de la base y por la altura. P: ¿El volumen de qué? E1: Del envase. P: ¿En el libro cómo aparece esa forma? ¿Recuerdas cómo se llama esa forma en el libro? E1: No. Solo ponía el volumen. P: Pero ¿aparecía esa forma, cierto? E1, E3 y E2: ¡Sí! E1: Y [el área de la base] es la base por la altura la base. P: Aja. E1: Y entonces, hemos ido cogiendo números para ver si… si... Porque todo esto tiene que ser igual a mil (1000).	

E3: Que es igual a un litro.
E1: A mil centímetros cúbicos (1000 cm^3) que es igual a un litro. Entonces, nosotros, para que no fuera ni muy grande ni muy pequeño, hemos ido obteniendo números, y probando, para que estuviera bien. Y hemos dicho que la altura grande sea veinte (20), la altura de la base cinco centímetros (5 cm), y la base diez centímetros (10 cm). Y así tampoco es muy grande, muy desproporcionado, y está bien… está bien.
E3: O sea, que esto es cinco, esto es diez, y esto veinte [señalando sobre el prototipo del envase construido].



P: ¿Recuerdan con qué otros números habían probado inicialmente?
E1: No, los borramos.

Dada la alusión que había hecho E1 a la idea de un envase desproporcionado, pregunté:

P: […] ¿Qué entenderían ustedes por un envase desproporcionado?
E1: Pues, que no fuera, en vez de veinte, fuera mucho más, que estuviera por aquí [indicando con sus manos una altura mucho mayor sobre el envase], y la base fuera muy chiquitita. Entonces, se cogería más difícilmente, y… se cogería más difícilmente para llevarlo, o algo así.

T intervino para hacer notar que un envase mucho más alto no supondría un problema para cogerlo, porque sería muy delgado. Por lo que concluyó que, básicamente, este diseño no gustaba a los estudiantes. A esto, E1 añadió:

E1: Preferíamos el tradicional.
T: Porque queríais que se pereciera al Brik que conocéis.
E1: ¡Sí!
P: […] Sumado a esto, podemos empezar a reflexionar sobre algunos asuntos que nos sirven para la tercera tarea. […] Pensemos en el material clásico que sería ese cartón para construir el Brik. Imagínense una caja donde se pone leche, que fuese así de alta, pues la base sería muy pequeña […]. ¿qué problemas creen que traería esto en la vida real?
E3: Pues que en la nevera no cabe.
P: ¿Cuál otro? ¿Yo podría cogerlo, tomarlo por la mitad como si fuese...?
E3: ¡No, muy grande! Aparte que es incómodo.
E5: […] Se podría romper fácilmente.
P: […] todo eso hay que pensarlo para el siguiente diseño […]. Pero, aquí hay otro asunto de fondo que quiero que tengan en cuenta para el otro diseño, y es que, está claro, que cuanto más aumenta una medida, otra tiene que cambiar. En este caso, pareciera que cuanto más aumentaba una, la otra disminuía. Esta manera en que aumenta una y la otra disminuye, me indica que, parece que existe una relación en este tipo de diseños. Entonces hay que

empezar a preguntarnos por cuál es esa relación. Será que existe alguna forma de escribir esa relación, para que yo diga, en el futuro, es que, cada vez que yo quiera que mi altura sea esta, automáticamente esta va a ser mi base o mi área de la base. ¿Si me estoy haciendo entender? E1: ¡Sí! P: […] ¿Cuál es esa relación? Por último, pregunté por los planos del envase, porque no aparecían en la presentación. Así que los estudiantes dijeron que no los habían incluido allí. No obstante, sí los habían puesto en el cuaderno de grupo. Terminé pidiendo un aplauso para los expositores. 4. Cierre. Pedí a los estudiantes que fueran pensando en el diseño del envase del perfume.	
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Pensar en el diseño del envase del perfume.	

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Ene. 18 del 2019	**Hora**	9:10-10:05	**Clase**	13	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	8 estudiantes de 3º de la ESO y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Ene18_2019

Contextualización

Para la décimo tercera clase los estudiantes comenzaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI**.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo. Inicié la clase con un saludo y diciendo a los estudiantes que se ubicasen en los grupos habituales, para que iniciaran con el diseño del envase para el perfume. Luego, me acerqué al grupo A, y entregué a E1 y a E8 la hoja donde aparece la tercera tarea del REI, porque no asistieron el día que las di a los estudiantes, y les dije:	Hoy asistieron: E1, E3, E2, E8, E4, E5, E7 y E6. Hoy E6 trajo firmado el consentimiento informado, para poder aparecer en los registros audiovisuales.

P: […] hoy vamos a tratar de definir cuál va a ser la forma del envase, […] todo el diseño, y, ojalá, si alcanzamos a tener un boceto a mano alzada, sería excelente. […] si vamos a diseñar un envase, ¿qué tenemos que definir? E1: Qué tipo de envase se desea diseñar y construir. P: Cuando hablamos de qué tipo, ¿a qué nos estamos refiriendo? E3: Al tamaño. E1: La forma. Como E3 intervino, aproveché para recordar algo de lo que habíamos tratado anteriormente. P: […] ¿Qué otro elemento habíamos dicho también? ¿Recuerdan? E2: No. P: Pues, las medidas. […] y tenemos que ver cómo se relaciona todo ello, y empezar a trabajar. Habrá un momento para hacer cálculos […]. Además, pedí a los estudiantes que no restringiesen su creatividad para el diseño del envase. 2. Sobre el diseño del envase. Para esta clase traje la colección de envases con la que iniciamos a trabajar en la primera tarea, porque consideré que tal vez podría servir de inspiración a los estudiantes. Por tanto, me acerqué primero a los estudiantes del grupo A, e indiqué: P: Chicos, yo he traído nuevamente esto, por si quieren tomar algunos ejemplos. E2: ¡Vale! P: […] Uno podría pensar en este [enseñando uno de los envases], y pensar cómo es que estas formas se podrían unir para generar una nueva. ¡Yo qué sé! Si quieren tomarlo como ejemplo. Si consideran que les sirve, bien. Si no, pues no pasa nada. Luego, pregunté a los estudiantes del grupo B, si querían usar estos envases para tomarlos como ejemplo, pero respondieron que primero verían una propuesta de diseño que E5 había elaborado. A propósito, como dicha propuesta estaba elaborada en Tinkercad, ofrecí a E5 la posibilidad de que la revisase en mi ordenador, porque lo estaba intentando hacer desde su móvil. El resto de la clase fui pasando alternativamente a cada grupo, para enterarme sobre el trabajo que estaban llevando a cabo, y fui formulando algunas cuestiones que iban emergiendo a medida que veía lo que hacían los estudiantes.	

El trabajo de diseño en el Grupo A

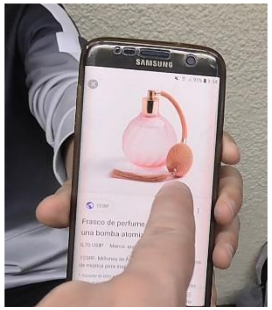
E2: ¿Carlos, podemos usar internet?
E3: O sea, el móvil.
P: ¿Para este trabajo?
E2 y E3: ¡Sí!
P: Por supuesto, para eso son las nuevas tecnologías.
E2: ¡Gracias!

El trabajo de diseño en el Grupo B

Mientras E5 accedía a su cuenta en Tinkercad, para enseñó a sus compañeros la propuesta de diseño de envase que había elaborado, ellos también accedían a internet a través de sus móviles para buscar ejemplos de envases de perfume.

P: Recuerden que a partir de lo que consulten en internet […] pueden tomar una decisión. Por ejemplo, este envase nos gusta, pero podemos cambiarle esto, o qué tal si unimos estas dos formas, qué pasaría. […] La decisión es completamente libre.

El trabajo de diseño en el Grupo A



P: Perdón chicos, ¿Cómo vamos? ¿Qué envase les han parecido atractivos?
E2: No sé.
E3: Muy pocos.
E2: Circular, pero no sé [risas].
P: ¿Les llama la atención los envases que tengan curvas […], o que sean esféricos completamente? ¿Podrías enseñarme alguno de los que han consultado allí? Déjame ver [dirigiéndose a E1].

Al ver la imagen que me enseño E1, pregunté:

P: ¿Qué función cumplirá este aparatito?
E1: Para echarlo. Tú te lo pones así y con esto te lo echas. No tiene un dispersador.

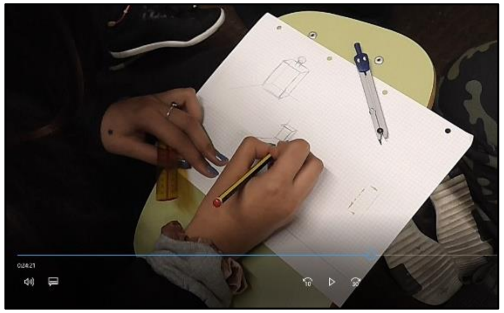
Aunque el uso del móvil está prohibido en el aula, consideré que en este caso era necesario que los estudiantes pudiesen acudir a diferentes fuentes en las que buscar información en relación con el diseño del envase.

P: […] y van a tomar una forma más o menos así, habría que pensar [si el envase] será completamente liso. Porque allí parece ser que esta forma tiene como una especie de […] relieve, […] la superficie tiene unos surcos. […] Una que vez que hayan definido la forma, entonces empiecen a definir qué tan grande va a ser, y sus medidas, etc. Y a medida que tomen decisiones, vayan escribiendo en el cuaderno esto.

Luego, me acerqué al grupo B para saber si habían podido acceder a la sesión de Tinkercad, pero en vista de que aún no lo lograban, regresé al grupo A.

P: ¿Ya tienen, más o menos, una idea?
E1: Sí.
P: ¿[…] Cuál es la forma que quisieran que tuviera?
E1: Circular, con el botoncito este para echarlo, y bueno, y luego unos relieves por aquí encima para decoración.
P: […] Lo importante es que todos estén de acuerdo. Presentan las ideas, toman la decisión y…
E1: Por eso, hemos…
E2: Un momento. Una mezcla del negro y de otro.
E1: ¡Sí, sí, el color lo ponemos, no te preocupes!

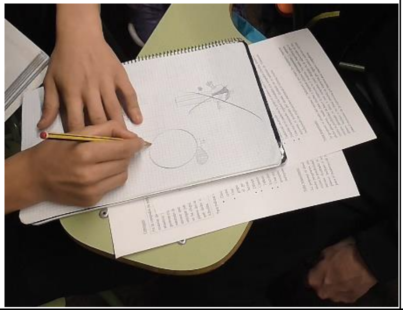
<u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u>



El tiempo avanzaba y E5 no lograban acceder a su cuenta en Tinkercad, así que me acerqué a E4 porque vi que estaba esbozando un diseño del envase en su cuaderno.

Luego, me acerqué al grupo A, y vi que E1 también tenía un boceto del envase.

<u>El trabajo de diseño en el Grupo A</u>



P: […] ¿Este sería el diseño?
E1: Sí.
P: […] Imagínense que [el envase] está construido, y que soy un usuario que va y compra el perfume. […] Lo voy a poner sobre una mesa. ¿Qué va a pasar si lo pongo…?
E8: Aquí va una…
E1: ¡Sí!, tenemos que poner aquí algo plano […] para sujetarlo.

Mientras la preocupación de E1 estaba centrada en la selección de la forma del envase, la de E2 giraba en torno al color de este.

Dado que la selección de un nombre para la empresa consultora, en la segunda tarea del REI, resultó motivante para los estudiantes, se me ocurrió que podría ser interesante sugerirles que pusiesen un nombre al perfume que estaban diseñando. Así que propuse esta idea.

P: […] Hay que considerar al usuario, […] o sea, cómo va a ser usado el perfume […]. Y claro, eso también afecta la forma, y afecta las medidas, y afecta todo lo demás.

Luego, indagué por otras de las características del envase.

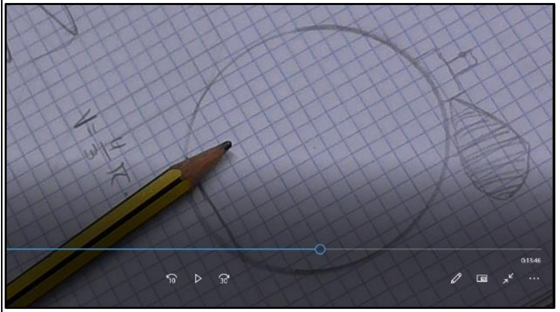
P: ¿Ya en pensado en […] qué tamaño va a tener?
E1, Si, bueno, lo vamos a mirar.
P: ok.

<u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u>

E5 me llamó para pedirme permiso para iniciar sesión en Gmail, porque no lograba acceder a su diseño en Tinkercad. Además de concederle dicho permiso, aproveché para preguntarle a E4 por el diseño que había esbozado en su cuaderno.

P: […] ¿Esto que estabas poniendo allí, E4, es […] el diseño que habían considerado o es algo nuevo?
E4: Es que estamos… estoy planteando nuevas ideas, en caso de que no nos guste los que haya hecho E5.
P: Ok.
E4: Y luego ya votamos por la que nos parezca mejor.
P: Claro.

<u>El trabajo de diseño en el Grupo A</u>

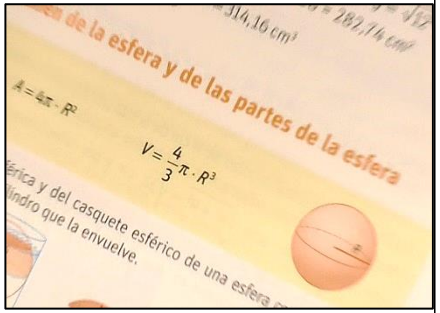


Me acerqué de nuevo y escuché este diálogo:

E2: Todos esos son cien mililitros (100 ml).
E3: De cien está bien.
E1: Sí. […] ¿Ahora cómo hacemos de cien mililitros el…? [risas]. Ya se nos plantean dudas.

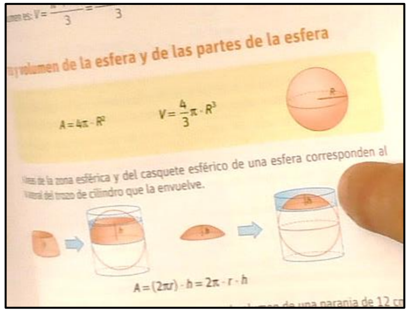
Entonces pregunté:
P: ¿Ya han tomado una decisión sobre la capacidad?
Todos: ¡Sí!
E1: Cien mililitros.
P: […] ¿Por qué cien mililitros?
E1: Porque…

E2: Porque todos son como este [mientras enseñaba, sonriendo, el móvil con el que estaba consultando en internet].
E1: ¡Casi todos!
P: […] Es decir, que a partir de la consulta que han hecho en internet, han notado que los perfumes suelen tener esa capacidad.
Todos: ¡Sí!
P: […] Merecería cuestionarse por qué suelen tener esa capacidad. No quiere decir que tengan que responder a ello ahora […]. Debe haber algún motivo.



Después pregunté por las medidas del envase.

P: […] Ya que han definido la capacidad, ¿cómo van a encontrar esas medidas?
E1: Con esto [señalando una sección en su libro de matemáticas].
P: ¿Qué es eso?
E1: El volumen de la esfera.
E8: El problema es, la esfera entera, porque hay que poner la base.
E1: Ya, por eso. Mira, esto se quita [señalando el libro en donde se explica cómo el área de una zona y de un casquete esférico].

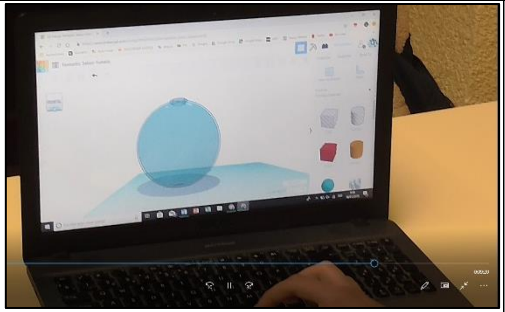


P: O sea que aquí el problema se reduce a, si partimos de la esfera, hay que quitar entonces un trozo.
E1: Vale.
P: La observación que ha hecho E8 me parece muy interesante, porque no es toda la esfera completa. Ahora la pregunta es: ¿cómo hacerlo?
E1: Sí, por eso estamos…
P: Y cómo hacerlo para que contenga los…
E1: Cien mililitros.
P: Analícenlo y ahí vamos hablando.

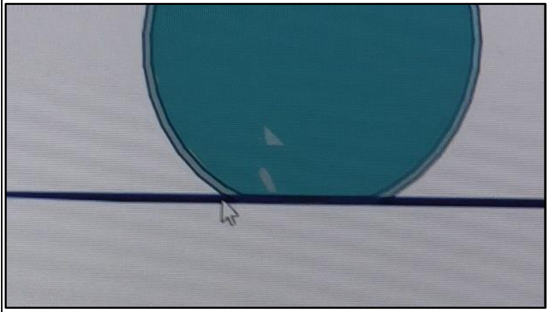
<u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u>

Finalmente, E5 logró acceder a su cuenta en Tinkercad, y con ello, presentar el diseño del envase a sus compañeros.

Considero que este momento es coyuntural para el desarrollo del REI. Es aquí donde los estudiantes deben poner en juego la relación entre la capacidad del envase y sus medidas. Por tanto, es necesario discutir con mi tutor sobre una manera adecuada para intervenir en esta etapa, de modo que los estudiantes logren identificar y comprender dicha relación.



E5: No está terminado. ¡Claro!, pero tiene hueco… está hueco por dentro. ¿Os gusta? Este es el logo que le he puesto Afrodita […]
P: […] Dado este diseño, yo me preguntaría, cómo lo usaría el cliente […] en su vida habitual. […] Por la forma que tiene [el envase], ¿se puede sostener?
E5: Si, se puede sostener, porque lo que he hecho es ponerle…
E7: Una base plana.
E5: He cogido un rectángulo, y lo que es hecho es dejarlo hueco, para que tenga la base plana y que no haya ningún problema en que, si lo apoyas en cualquier sitio, pues, se vaya rodando.

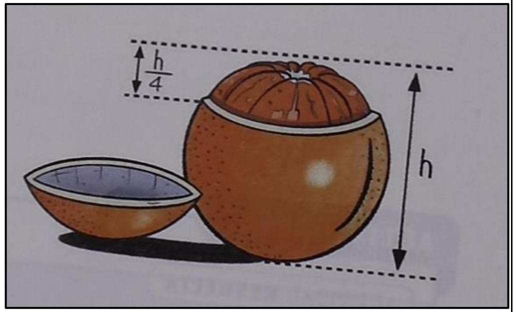


P: Entonces, esa base también habría que diseñarla en Tinkercad.
E5: ¡No, si ya está diseñada! De hecho, la esfera está así.
P: Ya entiendo.
E5: se ve que le falta el trocito de aquí, que es para apoyo. Si quieres se puede hacer más grande, porque no hay ingún problema, tampoco.
P: Bueno, ya tendrían que, ya como grupo, tomar una decisión sobre esa propuesta.
E5: Tengo otra, pero todavía no está ni terminada. Igual que esta. He hecho solo, como un boceto.
P: […] a partir de la decisión que tomen […] tendrían que pensar en el tamaño, que tiene que ver con la capacidad, […] con otras tantas características.

Luego, E5 agregó:
E5: […] Lo que pensaba hacer era, hacer que tuviera relieve por encima, para que tuviera tacto. Básicamente que fuera peculiar. Ya que pide algo peculiar. Pues que, por ejemplo, tuviera huequecitos, para… cosas para coger, para tocar […] ¡Algo peculiar!

En relación con los requerimientos de la empresa Afrodita, y con la propuesta de E5, sugerí:
P: […] Habría que preguntarse, por ejemplo, si llegasen a decidirse por esta forma, […] ¿Por qué esta forma es mejor que otras formas? O ¿Por qué este envase es mejor que otros envases? […] Lo importante es poder argumentar, porque finalmente, somos una empresa consultora. Así que, dejo que discutan eso de manera intima en el grupo. […] E4 también tenía otra propuesta […].

<u>El trabajo de diseño en el Grupo A</u>



P: […] ¿Con qué otro asunto se han encontrado?
E1: Que tenemos que ver qué altura poner.
P: […] Basado en esto que pones acá. […] O sea, necesitan definir esta altura.
E1: Claro. Tenemos que encontrar… ver qué altura ponemos entera, y quitarle un cuarto (1/4), para que se pueda sostener.
P: […] ¿Le van a quitar un cuarto?
E1: ¡Sí!
P: […] Si ya sabemos que la decisión es que el envase tenga cien mililitros de capacidad, entonces la pregunta es: ¿Qué tiene que ver esos cien mililitros con esa información que está aquí?
E1: si, es lo que estoy buscando. Estamos buscando perfumes de cien mililitros (100 ml), y a ver si ponen la altura.
P: ¿Estás buscando perfumes de cien mililitros, pero que, además, tengan esa forma? ¿O cualquiera de cien mililitros?
E1: […] Que tenga más o menos la misma forma para…

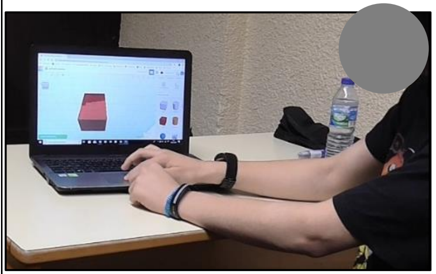
Luego me dirigí a E3 y a E2:

P: […] ¿Cómo van?
E3: estamos viendo diseños.
P: Eso qué quiere decir, que todavía no han definido del todo esa…
E3: No, sí, pero…
E2: Es que es muy feo [risas].
E3: No le gusta.
P: […] Todas las opiniones son válidas. Pueden ponerlo sobre la mesa y lo discuten.

Este episodio es muy interesante, porque muestra que los estudiantes intentan hallar una solución práctica al problema al que se enfrentan. Para ello, buscan una solución que se comparta las características del problema en cuestión.

<table>
<tr>
<td>

<u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u>



P: A ver, ¿ese es otro diseño?
E5: Sí, básicamente esto que hay aquí, son huequecitos que tiene [el envase]. Y es como si se hubiera caído y se hubiera roto. Como si tuviera grietas en la superficie.
P: ¿Ese lo puedes mover así en el espacio, para ver cómo es?
E5: Sí, voy a hacer eso. No he hecho todavía el logo de este.

3. Cierre.

Para terminar, dije a los estudiantes que el trabajo no paraba aquí, y les sugerí que aprovechasen los espacios de tiempo que tuvieran comunes, como los del recreo, para que discutieran sobre el diseño del envase para que continuaran avanzando.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>

- Continuar con el diseño del envase.

</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Ene. 22 del 2019	**Hora**	10:05-11:00	**Clase**	14	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	8 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Ene22_2019

Contextualización

Para la décimo cuarta clase los estudiantes continuaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI**.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

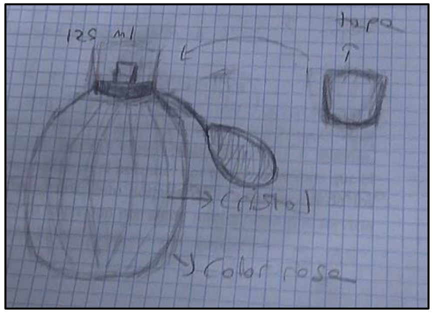
Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo. Inicié la clase con un saludo y diciendo a los estudiantes que se ubicasen en los grupos habituales, para que continuases con el diseño del envase para el perfume. Al poco tiempo, escuché que los estudiantes del grupo B estaban preguntando a los del grupo A por la forma que habían elegido para su envase, por tanto, me acerqué al grupo B y les dije:	Hoy asistieron: E1, E3, E2, E8, E4, E5, E7 y E6.

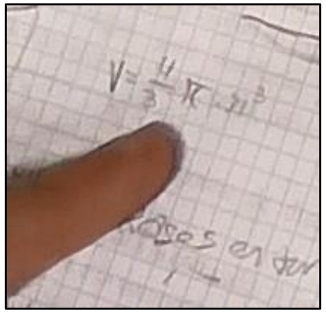
<u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u> P: Chicos, por lo que acabo de escuchar, quiero decirles que, no importa si la forma [de los envases] coincide, porque los argumentos [para haber elegido dicha forma] pueden ser diferentes. De hecho, no importa si es la misma o diferente forma, lo que importa son los argumentos. Luego agregué: P: ¿Ya han elegido la forma [del envase]? E5: Sí. P: ¿Cuál es? E5 y E4: La esfera. P: ¿El diseño que E5 nos mostró aquel día? [E5 asintió con la cabeza]. Entonces continué indagando. P: ¿Ya han definido cuál es la capacidad? E4: Lo vamos a buscar, a ver. Vamos a buscar las medidas para hacer los cálculos. P: ¿Dónde van a buscar la información sobre la capacidad? E4: en el móvil de E5 o de alguien que tenga datos. P: Bueno, pues, busquen entonces esa información para que tomen una decisión. Entonces E5 intervino, para exponer sus ideas en relación con el diseño del envase. E5: Yo lo que lo quería hacer en el otro, era que fuera un cuadrado. Un cubo. Porque es una forma muy simple, pero como es una esfera, podemos hacer ya, que sea… las mismas medidas, para que tenga forma esférica. P: Cuando dices: las mismas medidas. Eso hay que escribirlo. ¿A qué te refieres? E5: Mismo lado, mismo ancho, mismo alto. P: Pues, defínanlo y ahora me cuentan cómo lo hacen. Hay que tener en cuenta chicos, que en el diseño que E5 nos había enseñado, la esfera no era completa. Yo recuerdo que la esfera tenía una basecilla. E5: Sí. Le faltaba un caso. P: Y entonces, habría que pensar, cómo eso afecta todo lo demás que van a definir. Después, insté a los estudiantes a que, en esta clase, tratasen de definir, además de la forma, la capacidad del envase, a fin de que comenzaran a buscar cómo calcular las medidas de dicho envase. P: En esta tarea en particular, me gustaría chicos, que esas dudas que vayan teniendo en el proceso, las escriban […] Luego hay que ver cómo se abordan esas cuestiones.	En la clase pasada, E5 enseñó a sus compañeros el diseño que había elaborado en Tinkercad. Dicho diseño era esférico.

2. Sobre el diseño del envase.

El trabajo de diseño en el Grupo A



P: […] ¿Ya tienen el diseño?
E1: Sí.
P: A ver […] ¿Qué tienen para contarme sobre este diseño?
E1: Pues que estuvimos mirando en una página web de perfumes. Estuvimos viendo modelos de perfumes, y elegimos este.
P: ¿Por qué lo eligieron?
E1: Porque no es… o sea, es antiguo. O sea, no se ve mucho en esta época.
T: Por estética.
E1: Y, además, queríamos implementar esto [refiriéndose al vaporizador externo], porque ahora, yo creo, que ningún perfume lo tiene.
T: Está guay.
P: […] ¿Qué capacidad va a tener?
E8: Eran cien mililitros [mirando a E1].
E1: Ciento veinticinco mililitros.
P: Porque yo recuerdo que en la clase pasada habían hablado de algo así como cien, pero ya veo que cambiaron la decisión. ¿Por qué ciento veinticinco? ¿Hay alguna razón en particular?
E2: Porque…
E1: Sobre todo la estética. Para que no sea ni muy pequeño, que no contenga nada, y ciento veinticinco creemos que es lo normal.
P: […] ¿Tiende [el envase] a ser un poco más alargado, como se ve acá [señalando el boceto en él cuaderno] o es completamente esférico?
E1: ¡No! Más alargado.
P: ¿Ya han pensado cómo obtener las medidas para ese envase?
E1: Estamos ahora hablando de cómo obtener las medidas.
P: ¿Qué ideas tienen preliminares, para poder encontrar esas medidas?
E1: Pues buscar en el libro de matemáticas o…
E2: Pero no tenemos el libro.

Dado que ninguno de los integrantes del grupo A había traído su libro de matemáticas, pregunté a los estudiantes del otro grupo si tenían uno para que lo prestasen a sus compañeros. No obstante, ellos tampoco habían traído su libro. Por lo que propuse la búsqueda de la información en fuentes alternativas. P: ¿Qué otra fuente de información podemos tener hoy acá? E1: El móvil. P: bueno, entonces, el móvil. T: Está prohibido sacarlo en clase. P: Que tal, no sé qué opines, si el objetivo fuese específicamente una consulta académica […] [dirigiéndose a T]. (T negó con la cabeza). Antes la situación en la que nos encontrábamos, propuse otra alternativa.  P: […] Tenemos los conocimientos previos. ¿Recuerdan cómo podríamos hacer este trabajo? E1: Pues, pusimos que el volumen de una esfera es cuatro tercios del radio por… No, cuatro tercios por pi, por radio al cubo ($4/3 * \pi * r^3$). P: […] ¿Esa información de dónde la han obtenido? E1: Del libro. P: […] Entonces, podemos empezar a preguntarnos […] qué diferencia habría entre esta forma [señalando el boceto esférico del envase] y esta fórmula para calcular el volumen, y esta [señalando el boceto ovalado], y cómo podríamos calcular su volumen. Por tanto, propuse a los estudiantes una tarea adicional.	Aproveché este episodio, para pedir a los estudiantes que, en adelante, trajeran el libro de matemáticas a esta clase. De hecho, en clases pasadas lo han hecho. Al finalizar esta clase informé a T de que, en la clase anterior, permití a los estudiantes que buscasen modelos de perfumes accediendo a internet desde sus móviles. Resulta interesante que la restricción del uso del móvil en el aula de clases, por lo menos en este caso, parece contradecir las propuestas curriculares en relación con la promoción del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas. Esto hay que discutirlo en la ecología del REI.
P: […] si no conocemos la fórmula, ¿qué tal si intentamos construirla? ¿Cómo funcionará? Entonces, insistí en que sería necesario hacer un análisis de la forma esférica en relación con la fórmula que se usa para calcular el volumen de cuerpos esféricos, con el objeto de que, a partir de la forma ovalada del envase diseñado, se pudiese construir una fórmula para calcular su volumen. En ese momento T de esta asignatura intervino para ofrecernos la posibilidad de conseguir un par de libros, para que los estudiantes pudiesen buscar allí la información que necesitaban. Así que antes de ir a por ellos, indicó: T: No pueden sacar móviles. No pueden salir de clase. Pero, yo voy a ir a por un par de libros.	El propósito que perseguía con esta propuesta fue que, si los estudiantes lograran construir la fórmula para calcular el volumen de su envase, entonces podrían calcular las medidas que necesitarían para que este tuviese la capacidad deseada.

Entre tanto, dije a los estudiantes: P: […] ahora con el libro vamos a mirar si existe una forma parecida a esta [señalando el boceto ovalado del envase], y si existe una fórmula para esa forma. Y si no, pensemos: ¿cómo podría funcionar? […] Luego, pedía a los estudiantes que tratasen de interpretar la fórmula que conocen para calcular el volumen de una esfera. P: […] ¿Qué me está diciendo esa fórmula? […]	
Entonces opté por proponer a los estudiantes una situación hipotética, al tiempo que esbozaba algunos diseños en el cuaderno del grupo. Les pedí que imaginasen que un plano parte en dos a la esfera. El plano pasa por el centro de la esfera. Luego, esbocé un círculo, que representa la huella que deja dicha semiesfera justo por donde ha sido cortada. Por el centro de este círculo pasamos una recta que haría las veces de eje de simetría, y la hacemos girar. Entonces tendríamos la ilusión de haber generado una esfera. Con esta situación, quise plantear a los estudiantes un camino en el que, teniendo como base a la esfera y a la circunferencia, y las fórmulas para calcular su volumen y área –respectivamente–, tratasen de analizar qué relación podría haber entre dichas fórmulas y estos objetos geométricos. Así, si llegasen a encontrar esta relación, tal vez esta vía podría servir como ejemplo para construir la fórmula para calcular el volumen del envase que habían diseñado, a partir de la huella que dejaría la figura que resulta al partirlo a la mitad por un plano. En ese momento regresó T de la asignatura con dos libros de texto de la ESO, uno de segundo y el otro de tercer. Un para para cada grupo de estudiantes. T: […] He traído dos libros. Mirad, en el de segundo también viene de varias fórmulas. […] Este, que vienen todos los cuerpos geométricos y tienen todas las fórmulas. […] De hecho, viene más en segundo que en tercero […]. Como ya los estudiantes contaban con el libro para consultar la información que estaban buscado, indiqué, en relación con la idea que acababa de plantearles. P: […] Parece ser que puede ser un camino. A menos que directamente en el libro, que puede ser una opción, encontremos cómo calcular esos volúmenes para esas piezas que son como esferas que se han achatado un poco […]	Este camino lo propuse, porque consideré que posiblemente la huella que dejaría la figura generada por plano que corta al envase, podría ser una huella elíptica. Y claro, para el cálculo del área de la elipse sí que hay una fórmula en los libros de texto de la ESO. Importante: En relación la huella que deja el envase diseñado por los estudiantes, hice un tratamiento de los conceptos de ovalo y de elipse, que podría haber hecho que los estudiantes pensaran que son el mismo objeto geométrico. Debo precisar esta idea con los estudiantes para no generarles errores conceptuales.

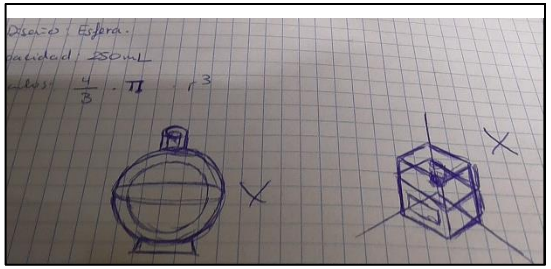
Antes de ir a indagar por los avances del grupo B, insté a los estudiantes a que no desistieran de su diseño, aunque ello por ahora implicase un trabajo más complejo que cuando habían optado por una forma esférica. Por la dificultad que supone la construcción de la fórmula para calcular su volumen.

P: […] Si se sienten un poco estancados después de mirar en los libros […], T y yo podemos ir aportando ideas […].

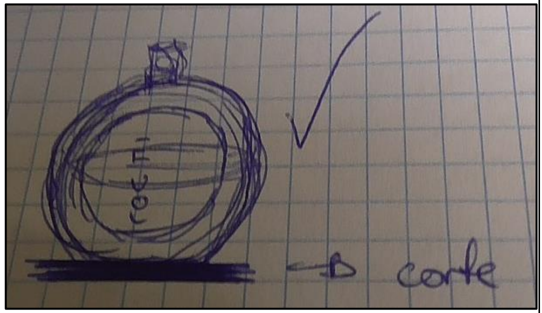
Finalicé diciéndoles que la idea que les había planteado era solo eso, una idea, por lo que no tenían que seguirla si no lo deseaban.

El trabajo de diseño en el Grupo B

P: […] ¿Ya hay una decisión en relación con la forma [del envase]?
E4: Sí.
P: ¿Sería este el diseño? [Señalando el boceto que tenía E4].
E4: Sí, […] sería una esfera, pero abajo plano.



P: O sea que, inicialmente habían pensado en esto. Con una base.
E4: Sí.
P: Pero veo que la idea evolucionó, y ahora lo que van a tener es una esfera a la que le falta una parte abajo.
E5: Sí, pero lo que hemos pensado es: dentro, que sea una esfera completamente, y así no nos tenemos por qué preocupar por si está cortado o no, para buscar una fórmula.
P: Es decir que, a pesar de que fuera, va a estar con una base…



E5: Por dentro es entera, la esfera. Y así, no tenemos por qué calcular… eh, restarle masa.
P: ¿Y eso qué implicaría en términos del…?
E5: Más material.
P: Puede ser. Entonces, habría que tener en cuenta cuánto material… Es decir, pareciera ser que […] en la parte de abajo va a haber un poco más de material, para poder que exista esa parte cortada, y así dentro quede la esfera, ¿cierto?

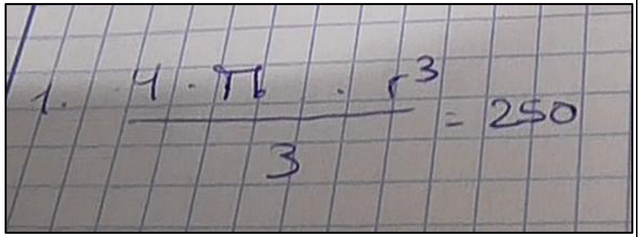
Con base en lo expuesto por los estudiantes, indiqué:

P: […] En los planos […] también puedan considerar el grosor de las paredes del envase, […] y ponerlo allí en los planos.

E4: Vale.

Luego, me fijé en que los estudiantes habían usado la formula habitual para calcular el volumen de la esfera, así que les pregunté:

P: […] ¿De dónde la han obtenido?
E4: Del libro. Bueno, de los libros. Hemos sacado la…
E5: Cuánto queremos que tenga de capacidad [completando la frase de E4], y básicamente, hemos hecho una ecuación para saber cuánto…
P: ¿Cuánto quieren que tenga de capacidad?
E4: Doscientos cincuenta mililitros (250ml).
P: Y entonces […] han planteado esta ecuación que veo acá.



E4: Sí.
P: […] ¿Para qué se plantea esa ecuación? ¿Qué es lo que persiguen con ella?
E5: Pues lo que queremos es averiguar cuánto tenga el radio, y así, pues… de momento, que todavía no lo he hecho yo. […] Básicamente, ere tres, ere al cubo, es como equis a la tres (x^3). Tenemos que despejar equis a la tres, para obtener cuánto es el radio.
P: ¿Eso que me estás diciendo lo estás escribiendo, el proceso?
E5: Sí. Lo vamos a copiar. Esto es en la hoja de soluciones [sonriendo].

Aproveché para pedir a los estudiantes que, aquellas hojas que suelen usar para esbozar ideas, hacer cálculos y demás, las adjuntasen a los informes que van a entregar, para conocer el proceso que han seguido durante esta tarea. Además, les pedí que fuesen discutiendo de sobre los cálculos matemáticos que vayan realizando. Y agregué:

P: […] ¿Cuándo sepan cuál es el radio que necesitan, me cuentan cómo lo encontraron?
E5: Sí.

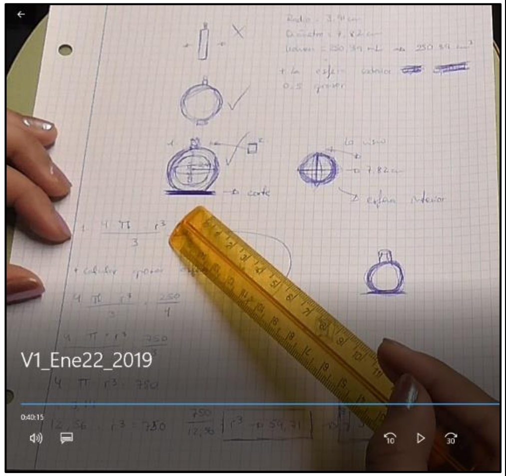
Luego de esto, E5 explicó a sus compañeros el proceso que siguió para calcular la medida del radio de la esfera interna del envase.

La idea de pedir a los estudiantes de discutir sobre los cálculos matemáticos, la propuse porque vi que de esta labor parecía que solo E5 se estaba ocupando.

<u>El trabajo de diseño en el Grupo A</u> P: ¿Cómo vamos? ¿Alguna idea? Todos: No. P: […] Lo importante es discutirlo chicos […]. En ese momento consideré necesario decir a los estudiantes que este tipo de problemas no suelen tener soluciones inmediatas, por lo que probablemente haría falta de varios días para encontrar una solución que nos parezca adecuada. P: […] a veces, ni siquiera hay soluciones precisas, […] tenemos que acercarnos lo más que podamos o tenemos que mirar cuál sería la mejor solución que consideremos. E1: […] Si hacemos una fórmula […], ¿cómo sabemos que va a ser cierta? P: […] Aquí tendría que haber una etapa de experimentación. Tendríamos empezar a ver cómo poner en juego una fórmula para saber si eso es verdad. Reflexioné un poco en torno a la pregunta de E1, y propuse que, tal vez, una manera para comprobar si la fórmula era correcta, podría ser construir diferentes cuerpos tridimensionales. No obstante, dado que ello representa una labor que toma mucho tiempo, propuse la posibilidad de experimentar en un simulador virtual. P: […] ¿Qué tal con un simulador virtual? ¿Qué tal si buscamos un programa en el que podamos…? ¿El mismo Tinkercad no calcula volúmenes? E1: Sí, creo que sí. Si pones tú el volumen… si tú haces la medida, te puede salir. P: ¿En Tinkercad puedo hacer este tipo de cuerpos, que sean más alargados? [refiriéndome a la forma del perfume diseñado por los estudiantes]. E1: Sí. P: […] Primero diseñamos la fórmula, y luego vamos a Tinkercad y hacemos el cuerpo con esas medidas, a ver si es cierto que cuando el programa me diga cuál es el volumen, efectivamente la fórmula que nosotros hemos hecho sí me dice que es cierto. Dado que el problema de base sigue siendo la construcción de una fórmula que sirva para calcular el volumen del envase, y por ende para encontrar sus medidas, entonces propuse: P: […] Para poder diseñar una fórmula para el volumen acá [señalando el boceto del diseño del envase], podríamos preguntarnos qué significa esta y cómo se llegó a esta fórmula [señalando las fórmulas del área del círculo y del volumen de la esfera, respectivamente].	

Entonces agregué: P: […] En medio de la solución de un problema, eventualmente surgen otras cuestiones a las que tenemos que responder, para finalmente llegar a la solución del problema. E1: Yo creo que lo del radio al cuadrado, es porque este [el circulo], solo tiene dos dimensiones, y cuando se pasa a tres dimensiones se pone radio al cubo; pero, el cuatro tercios, no sé por qué. P: […] Qué tal si consultamos […] en internet, […] en libros… por qué el volumen de una esfera cuatro tercios de pi, ere, tres ($4/3 * \pi * r^3$) […]. Porque si encontramos un proceso. Una manera que nos explique […] por qué es esto, tal vez nosotros podamos empezar a preguntarnos, ¿[…] aplico el mismo proceso para este [envase]? […]. Por otra parte, propuse a los estudiantes que pensasen en otro camino para solucionar el problema. P: […] ¿Recuerdan cuando hablábamos en relación con los envases, que algunas formas estaban mezcladas o constituidas por otras formas? E1: Sí. P: Imagínate que tuvieras, por ejemplo, media esfera […] y la unes con un cilindro, y generas una nueva forma. Si pensamos en eso, ¿será posible que esta forma [del envase] pueda partir de la unión de otras formas? Tal vez unas formas más sencillas, a las que sí les sabemos calcular, por ejemplo, el volumen. Y después simplemente las unimos. ¡Ese podría ser un camino! Pensar en la unión de diferentes formas […]. Terminé haciendo hincapié en que, la importancia de construir una fórmula para calcular el volumen del envase radica en que con base en ella podremos conocer sus medidas.	En este momento, discutimos un poco sobre lo que representa –y significa– cada una de las letras que conforman la fórmula del área del círculo, y reflexionamos sobre cómo podría expresarse el área de una elipse.

El trabajo de diseño en el Grupo B



P: […] ¿Cuéntame qué han hecho acá?
E4: Aquí despejamos la ecuación, y finalmente nos dio, el radio, tres coma noventa y uno (3,91). Y el diámetro, pues al ser el doble, siete coma con ochenta y dos (7,82). Y esto sería la esfera del interior [del envase]. O sea, lo que ocuparía. Y luego, ya hemos pensado en que, la esfera exterior tendría un cero con cinco (0,5) más de grosor.
E5: Y no…
E4: Y no tanto.
P: […] Para calcular pi (π) dentro de esa expresión, ¿cómo lo han hecho en la calculadora? ¿Han escrito los números aproximados de pi (π), o han tecleado…?
E4: Tes coma catorce (3,14), ¿no?
E5: He puesto pi (π) en la calculadora [la tecla pi (π)]

3. Cierre.

Para terminar, dije a los estudiantes que continuaríamos con el trabajo en la siguiente clase.

Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:

- En general, continuar con el diseño del envase. Explícitamente, para el grupo A, consultar cómo se obtiene, y qué significa, la fórmula del volumen de una esfera.

<table>
<tr><td colspan="10">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</td></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Ene. 25 del 2019</td><td>Hora</td><td>9:10-10:05</td><td>Clase</td><td>15</td><td>Investigador</td><td>Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="5">6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Ene25_2019</td></tr>
</table>

Contextualización

Para la décimo quinta clase los estudiantes continuaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI**.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

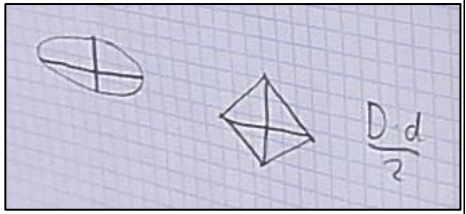
Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Inicié la clase con un saludo y diciendo a los estudiantes que se ubicasen en los grupos habituales, para que continuases con el diseño del envase para el perfume. Luego, me dirigí primero a los estudiantes del grupo A para preguntar por los avances de su trabajo, porque en la clase pasada vieron que era necesario construir una fórmula para calcular el volumen del envase que estaban diseñando. Situación que suponía mayor complejidad que usar una fórmula preestablecida.	Hoy asistieron: E1, E3, E2, E4, E5 y E6.

<table>
<tr>
<td>
<u>El trabajo de diseño en el Grupo A</u>

P: […] ¿cómo vamos con el trabajo?
E1: Es que es muy complicado hallar una fórmula y todo eso.
P: ¿Qué han intentado hacer?
E2: Nada.
E1: Pues estuvimos modificando… el otro día sobre… ver de esta fórmula sacar esto, y del área también, y todo [mientras señalaba los bocetos que tenía en su cuaderno].
P: ¿Y tuvieron alguna idea? ¿Lo lograron?
E2: No.
E3: No, no lo sabe.
E1: No.
E2: Queremos hacer algo más fácil.
P: ¿Cómo qué?
E2: Eso no lo sé. Algo [con forma de] rectángulo o circulo.
E1: Yo también estuve mirando, y creo que se parece más esa forma al rombo. Que es diámetro por diámetro, partido de dos.

Entonces, le pedí a E1 que me explicase mejor esa idea que acababa de exponer, apoyándose con un dibujo en el cuaderno del grupo.



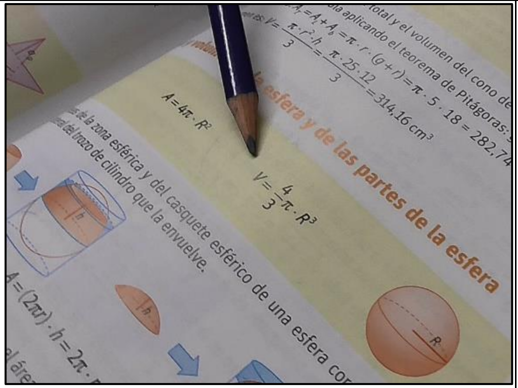
E1: La figura que queremos es más o menos así, y el rombo es así. Bueno, esto [refiriéndose a una de las diagonales del rombo] es más estirado. El rombo es, diámetro por diámetro. Diámetro mayor por diámetro menor, partido por dos. Y esto, nos pasa lo mismo que aquí, hay un diámetro más corto y otro más largo. Entonces, podría ser que tuviera algo de similar… esas dos fórmulas.
P: ¿Has intentado consultar la información en otras fuentes, como internet […] o solamente…?
E1: Yo lo miré en el libro. Estuve mirando las fórmulas y todo, para ver qué se podía parecer, y vi esta que como tiene… le pasa lo mismo, que tiene dos diámetros diferentes; entonces, diámetro mayor por diámetro menor, entonces…
P: ¿En el libro aparece la forma de calcular el área de este tipo de figuras? [refiriéndose a la figura curva].
E1: ¡No!
P: […] Tendríamos que empezar a tomar decisiones. Para solucionar un problema puede haber diferentes vías. Una vía es preguntarnos por cómo llegar de la fórmula del área del rombo, a esta [refiriéndose a la figura curva], y luego a lo tridimensional […]. No sé hasta qué punto quieran avanzar en ese camino o buscar otro camino […] Otro camino podría ser el que planteó E2, sobre cambiar la forma [del envase]. Es decir, para solucionar un problema, a veces tendríamos que replantearnos, incluso, el diseño inicial […]
</td>
<td>
E1 hacía referencia al camino que les había sugerido en la clase pasada, en el que a partir del análisis de las fórmulas para calcular el área del círculo y de la esfera, se pudiera encontrar una relación entre estas, a fin de poder intentar, a partir de la fórmula para calcular el área de esa figura ovalada que resultaba al cortar longitudinalmente el envase, deducir la fórmula para calcular el volumen de este.

La idea sobre que el rombo sea más “estirado” es muy importante, porque parece indicar que E1 no incluye al cuadrado dentro de los rombos.
</td>
</tr>
</table>

Insistí en que podrían explorarse caminos alternativos para solucionar el problema que supone el diseño del envase. P: […] una es explorar estas fórmulas y ver qué sucede […], con la idea de construir una fórmula propia. Otra, es, por qué no, cambiar la forma del envase. Lo que tenemos que hacer es evitar estancarnos. En ese momento consideré necesario proponer otra vía para que los estudiantes pudiesen buscar una fórmula para relacionar el volumen del envase con sus medidas, y así, determinar estas últimas. P: […] ¿Se acuerdan de que les había propuesto preguntarse por cómo esa forma [del envase] podría estar compuesta por otras formas? En suma, ¿cómo el envase, la forma del envase, podría estar compuesta por otros de sólidos? Antes de explicar esta idea a los estudiantes, insistí en que esta era solo otra posibilidad, por lo que no tendrían que adoptarla. De donde, la idea de cambiar la forma del envase, que había planteado E2, era perfectamente válida. P: […] Mirando el envase que tiene acá [refiriéndose al boceto], […] ni es completamente esférico ni es tan alargado. Qué tal si hiciéramos algo así: […] imagínense que tengo una semicircunferencia, […] un rectángulo, y otra semicircunferencia […] cuando pienso en tres dimensiones, ¿esto [señalando una de las semicircunferencias] es qué se convierte? E3: En una esfera. P: Pero no en la esfera completa, sino en… E3: En media esfera. Luego, indiqué lo mismo en relación con la otra semicircunferencia, y pregunté por la zona rectangular. P: […] ¿Y esto en qué se convertiría? E3: Un cubo. P: Pero si tenemos un rectángulo y lo pienso en [haciendo un gesto con la mano para indicar que rota en torno a un eje de simetría axial]… E1: Un prisma. Retomé el ejemplo de la semicircunferencia que gira en torno a un eje de simetría axial, de modo que genera una semiesfera, para trasladarlo a lo que ocurriría con el rectángulo, de modo que los estudiantes reflexionasen sobre ello.	Obtén por proponer esta otra vía, para que los estudiantes pudiesen partir de lo que ya conocen. Es decir, de la esfera y del cilindro. La alusión que estaba haciendo al paso de lo plano a lo tridimensional, se basaba en la generación de solidos por revolución en la que, tanto las semicircunferencias como el rectángulo, giraban en torno a un eje de simetría axial.

P: […] Piensen en qué se convertiría […]. E1: ¡Ah, no! ¡Un cilindro! P: […] Aquí tendríamos media esfera, [dos veces] […], y aquí tendríamos un cilindro. Esta podría ser una opción [refiriéndose a la composición de envase]. […] Se parece un poco más al diseño, pero no es exactamente como el diseño […]. Así que, habría que tomar una decisión: o continúo por un camino en la búsqueda de una forma de calcular este volumen [del envase], […] o tomo una decisión como esta. Esto [refiriéndose a la altura del cilindro que compone el envase], no necesariamente tiene que ser tan largo. Puede ser un poco más cortito para que se parezca un poco más a esto [refiriéndose al diseño del envase]. Entonces, tendríamos que pensar en qué proporciones puede tener. Qué tan largo o qué tan corto [refiriéndose a la composición general del envase]. Luego, expliqué a los estudiantes el motivo de esta propuesta. P: […] Si está claro que una vía [para calcular el volumen del envase] es partir de la información que tiene […] el libro, entonces para calcular este volumen [refiriéndose a las semiesferas al cilindro] sí hay información. Que sería, ¿cómo? E1: Aquí está [señalando en el libro la fórmula para calcular el volumen de la esfera]. P: ¿Pero, sería todo esto completo? E1: No. Todo eso partido por dos. P: […] Si son dos mitades [de esfera]… E1: Sería esto [refiriéndose a la fórmula para calcular el volumen de la esfera]. P: […] Más, esto de acá [refiriéndose al cilindro]. […] ¿Y para esto, sí hay información también? E1: Sí, aquí está [señalando en el libro la fórmula para calcular el volumen del cilindro]. P: […] ¿Entonces, qué información necesitaríamos utilizar de acá y de acá? [refiriéndose a las fórmulas para calcular el volumen de la esfera y del cilindro]. E1: Cuatro tercios… P: Sí, pero qué información necesitaríamos que no… E1: El volumen. P: […] ¿Ya lo han definido? E1: No, todavía no, porque como estábamos mirando…	Consideré importante explicar el motivo de esta propuesta dado que los estudiantes, en este caso, han mostrado que la fuente principal de información es su libro de texto.

Luego insté a los estudiantes a que se cuestionasen por lo que estarían calculando con cada una estas fórmulas, una vez definido el volumen o el radio, tanto de la esfera como del cilindro.



P: […] Si definen el volumen, entonces tendrían que ir en la búsqueda del radio […]. Y si definen el radio, pues van en la búsqueda del volumen.

Luego, en relación con las fórmulas para calcular los volúmenes de la esfera y el cilindro, pregunté:

P: […] ¿Este radio [en la fórmula $V=\pi r^2 h$] y este radio [en la fórmula $V=3/4 \pi r^3$], se refieren al mismo radio?
E1: Mmmm… sí, tiene que ser.

P: ¿Por qué?
E1: Porque, para que sea más… uniforme, yo creo que tendría que ser la misma medida.
[…]
P: […] O sea que estos radios son…
E1: Iguales.
P: Con lo cual, uno de los caminos sería usar el mismo radio, y aquí ya podríamos encontrar el volumen de todo el cuerpo. Ese podría ser un camino, pero no debe ser el que yo proponga. Esa podría ser una vía. Y la otra, […] creo que es una sensación que hay en todo el grupo. Es, cambiar de forma el diseño.

E insistí:

P: Lo que intento es invitarlos a que reflexionen sobre el hecho de que hay muchas formas de solucionar el mismo problema. Y el problema fundamental, ¿Cuál es?
E1: Sacar el volumen.
P: Sí, pero, sacar el volumen por qué. Porque estamos diseñando un envase. Y necesitamos…
E1: Que sea en tres dimensiones.
P: […] Y en algún momento tenemos que saber qué tan grande es.
E1: ¡Sí!

Con estas preguntas quise instar a los estudiantes a que, dado que la forma del envase se componía de tres solidos ideales, reflexionasen sobre los elementos comunes entre dichos sólidos, que, a su vez, tienen su representación en las fórmulas que se usan para calcular sus volúmenes.

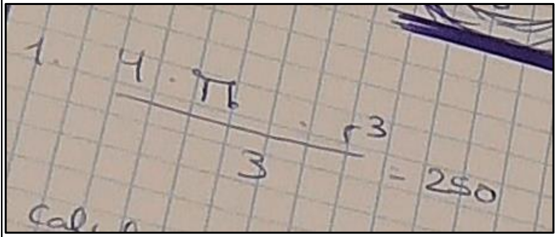
P: Y saber qué tan grande es, implica, conocer su volumen o también su capacidad. Entonces, el problema gordo es: un diseño. […] Y vemos que en el camino estamos encontrando ciertas situaciones, pues, una de dos: o vemos cómo solucionamos esas situaciones o vamos a la raíz del problema y… Como a mí no me están diciendo que el diseño tenga que ser uno en particular, sino el que queramos, pues esa otra vía es cambiar el diseño. ¿Vale?
Todos: Sí.

Entonces, pedí a los estudiantes que discutiesen sobre el camino que tomarían para continuar con su trabajo, mientras yo pasaba visitaba al otro grupo.

<u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u>

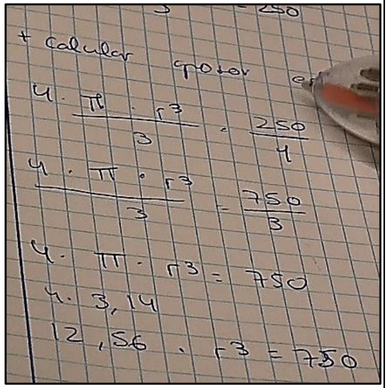
Al acercarme a este grupo, E5 me recordó que, al finalizar la clase anterior, estábamos ellos estaban explicando cómo habían hecho los cálculos de las medidas del envase.

P: […] ¿podrías repetir lo que sucedió, por favor?
E5: Pues básicamente lo que quería obtener era el radio, y es… la fórmula es cuatro por pi por ere a la tres, partido de tres [$(4 \pi r^3) / 3$]. Pues, lo que no sabemos es el radio. Y con el radio podemos saber qué masa… sí, qué volumen debe de tener. Y es que hice fue la ecuación: cuatro por *pi* por ere tres, partido de tres, igual a doscientos cincuenta […] mililitros [$(4 \pi r^3) / 3 = 250$ ml].

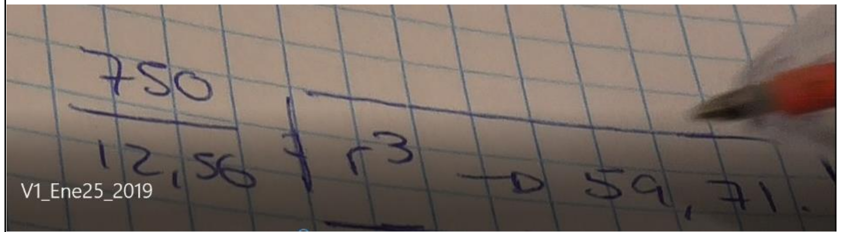


P: ¿Esa sería la capacidad del…?
E5: De la esfera interior.
P: […] Esa unidad que está utilizando acá, de doscientos cincuenta mililitros…
E5: Es igual a centímetros cúbicos.
P: ¿En ese caso, doscientos cincuenta mililitros es igual a centímetros cúbicos?
E4 y E5: ¡Sí!
P: Lo digo porque la unidad de medida en la que finalmente se va a expresar el radio, no es el mililitro, el radio se va a expresar en centímetros, ¿cierto?
E4: Sí.
E5: En centímetros.
P: Entonces, habría que tener claro cuál es esa diferencia. […] ¿Por qué si tomamos la decisión de que nuestro envase tuviese una capacidad de doscientos cincuenta mililitros…? ¿Qué tiene que ver eso con haber dicho que doscientos cincuenta mililitros equivalen a doscientos cincuenta centímetros cúbicos? Eso también hay que tenerlo claro.

Luego, E5 continuó con la explicación del procedimiento que usaron para calcular la medida del radio.



E5: Lo que tenemos que hacer es… pasarlo a fracción el doscientos cincuenta. Entonces, doscientos cincuenta es, doscientos cincuenta, partido por uno. Y lo del cuatro por pi por ere tres. Cuatro por pi, por… esto queda igual, lo del cuatro por pi por ere tres. Y el doscientos cincuenta, pasa a ser setecientos cincuenta, partido de tres. Luego, anulamos este con este [refiriéndose al paso en el que desaparece el tres como denominador], y llega a ser cuatro por pi, por ere a la tres, igual a setecientos cincuenta. Pues lo que tengo que hacer es despejar ere a la tres, y es… ere a la tres, igual a setecientos cincuenta, partido de doce con cincuenta y seis. Que es, cuatro por *pi*.



Luego pregunté cómo habían considerado el valor de pi, a lo que E5 contestó:

E5: […] Tecleé el pi (π). Y luego, lo que hice fue que, el resultado que me dio, lo aproximé, y me dio doce con cincuenta y seis. Entonces, tengo que dividir setecientos cincuenta entre doce con cincuenta y seis. Que es igual a cincuenta y nueve con setenta y uno. Y ahora, tengo que dejar ere (r) sola, con lo cual, ere a la tres (r^3) al otro lado pasa a raíz cúbica. Y la raíz cúbica de cincuenta y nueve con setenta y uno, es igual a tres con noventa y uno. Que es el radio.

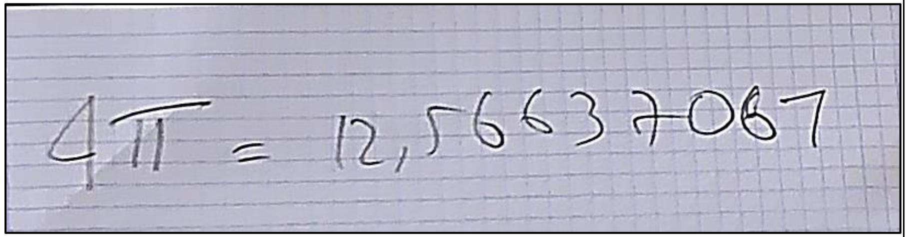
Después, E5 explicó cómo verificaron que el proceso realizado estuviere correcto.

E5: Pues luego, lo que hacíamos era, para comprobar que nos diera doscientos cincuenta, que nos daba con decimales. No nos daba exacto, porque lo habíamos aproximado. Cuatro por pi (π), por tres con noventa y uno a la tres, entre tres, nos daba doscientos cincuenta con…
P: […] Con punto treinta y nueve, aparece allí […].

Aproveché para pedir a los estudiantes que explicasen cómo habían hecho la aproximación antes mencionada, y para que no perdieran estas hojas en las que habían escrito el proceso seguido para calcular el radio de la esfera.

Esta parte es muy importante, porque se describe la técnica usada para calcular el valor del radio de una esfera, una vez que se ha definido su volumen.

P: Vuelve a teclear eso mismo que pusiste allí [dirigiéndose a E5], y me enseñas el número que te dio [el resultado], para saber…



E5: Cuatro por pi (π), es igual a doce con cincuenta y seis, seis, tres, siete, cero, seis, uno.
P: […]Y la aproximación que hicieron…
E5: ¡No!, lo que hice yo, fue… es que estaba, aproximación, y luego el otro que, simplemente cortabas aquí, y ya está. Lo dejabas con doce con cincuenta y seis.
P: […] Pero, técnicamente, no hiciste aproximación. Solo cortaste.
E5: ¡No!
P: […] cuando se habla de aproximaciones […], si el número que seguía era mayor o igual a cinco, entonces…
E5: Si, entonces sería doce con cincuenta y siete. Pero, luego en el siguiente, que creo que era… en el cincuenta y nueve con setenta y uno, sí que lo aproximé, y era, cincuenta y nueve con setenta, con […] seiscientos nueve. Y lo aproximé.

Luego, E5 continuó con su explicación.

E5: Entonces dejé doce con cincuenta y seis… entonces, está multiplicando, con lo cual al otro lado pasa dividiendo. Setecientos cincuenta entre doce con cincuenta y seis, es igual a cincuenta y nueve con… ¡Ah no! Cincuenta y nueve con setenta y uno…. Tres, tres, siete, cinco, ocho.
P: Y le pusiste…

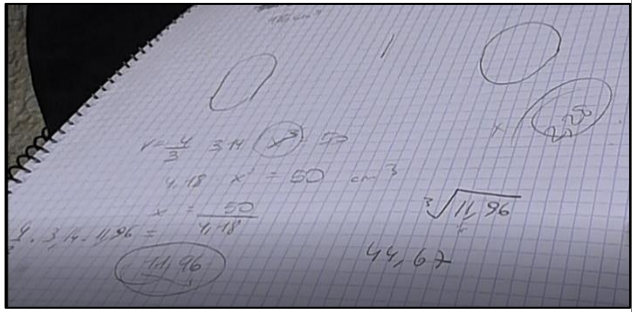
E5: Y lo aproxime ahí, y es… como es menor que cinco…
P: Dejaste con cincuenta y nueve con setenta y uno.
E5: Y luego, lo que tenía que hacer era, cincuenta y nueve con setenta y uno. Raíz cúbica… Es igual a tres con… nueve, cero, ocho, cinco, cero, uno, seis, cinco. Pues, lo que hice fue aproximarlo a tres con noventa y uno.
P: Que sería el radio de la esfera, ¿cierto? ¿Cuál es el paso que sigue?
E5: Pues, lo que hice fue. Como es tres con noventa y uno […], cuatro, por pi, por tres con noventa y uno a la tres, entre tres, es igual a doscientos cincuenta con treinta y nueve.
P: Estaría un pelín por encima.
E5: Sí.

A continuación, pregunté a los estudiantes por la hoja en la que aparece la tercera tarea del REI, para que verificasen en qué etapa del trabajo se encontraban. Por lo que les insté a que dibujaran los planos del envase. P: […] Sugiero que se hagan unos planos en escala uno a uno, porque allí se van a dar cuenta […] de qué tamaño les va a quedar [el envase] y empiezan a tomar decisiones, porque ya han definido su capacidad […]. Y en los planos, también hay que poner aquello que habíamos dicho del grosor del… E4: Sí, del exterior. P: Entonces, […] ahora hay que hablar de los planos. Después, sugerí a los estudiantes que pusieran las medidas que consideraran necesarias en los planos, y agregué: P: Lo que sigue de los planos, sería, montar con esas medidas que tengan allí, [el modelo del envase] en Tinkercad. ¿Tienen alguna pregunta? Todos: No. P: ¿Se van a quedar con ese diseño finalmente? Todos: Sí. E4: Pero vamos a ver si cambia ... E5: […] Tenemos que mirar eso, y es que, por ejemplo, en Tinkercad se ve mucho más grande, porque está… P: ¡Claro! Tu acercas [Haciendo un gesto con sus manos al acercamiento que se puede hacer en un ambiente virtual]. E5: Se ve todo a milímetros. […] Debajo aparece la cuadrícula que pone en milímetros. Y es que, claro, parece mucho más grande el diseño. P: Claro. Da la sensación de que [el diseño] es más grande. Y luego les propuse: P: […] Lo que yo propongo ahora es que hagan esos planos y me digan si va a ser necesario hacerlo un poco más grande [refiriéndose a las medidas del envase] […] Quiero invitarlos a que reflexionen sobre esto: si tuviésemos que tomar la decisión de que el envase fuese más grande, automáticamente qué cambiaría. E5: Pues básicamente el radio. Tendríamos que… E4: Y el volumen. E5: El volumen depende del radio. P: Entonces ya me dirán cómo cambia eso. Si es necesario cambiarlo.	

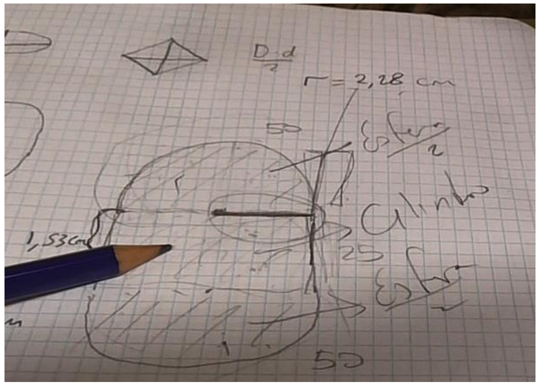
El trabajo de diseño en el Grupo A Me dirigí de nuevo a los estudiantes del grupo A, y vi que E3 y E2 estaban calculando el volumen del envase. De hecho, el volumen de una parte del envase, como me lo hicieron saber en ese momento. E1: Nos hemos quedado con el que nos has dicho tú. P: Es decir, se han quedado con la idea de componerlo a partir de diferentes trozos. E1: Sí. Entre tanto, E3 y E2 continuaban con sus cálculos. E2: El radio es… el radio es dos con veintiocho. P: ¿Con qué capacidad [del envase] están trabajando? E1: Ciento veinticinco mililitros. P: Ciento veinticinco mililitros. E1: Serían ciento veinticinco centímetros cuadrados. P: ¿Centímetros…? E1: ¡Digo, cúbicos! Quise aprovechar esta conversación para preguntar por la equivalencia entre centímetros y mililitros. P: ¿Por qué ciento veinticinco mililitros es igual a ciento veinticinco centímetros cúbicos? E1: Un mililitro es igual a un centímetro cúbico, ¿no? P: […] Es decir, estás usando una equivalencia que ya conoces […]. Entonces, para instar a los estudiantes a que reflexionasen sobre los conceptos de volumen y de capacidad, les dije: P: […] En este momento estamos partiendo de la idea de que dentro del envase van a caber ciento veinticinco centímetros cúbicos del líquido […] Entonces, lo que están calculando en este momento es [el volumen de] la parte de adentro. ¿Vale? E2: Sí. P: Lo digo porque en algún momento, en los planos, hay que tener en cuenta que ese radio que están encontrando allí, es el radio de lo que queda por dentro [del envase]. A eso, me imagino que habrá que sumarle, […] para los planos […], el grosor del envase. ¿Sí me hago entender? E1, E2 y E3: Sí. Luego, continúe indagando por la etapa del proceso en la que se encontraban los estudiantes. P: ¿Qué están haciendo en este momento entonces?	

E3: Acabamos de calcular el radio.
P: ¿Cuánto es el radio?
E3: 2,28.
E2: Sí.
P: ¿2,28…?
E3: Centímetros cúbicos.

En ese momento debí aclarar que la medida del radio que acababan de calcular los estudiantes se trataba de una medida lineal, por lo que lo correcto sería referirse a centímetros y no a centímetros cúbicos.

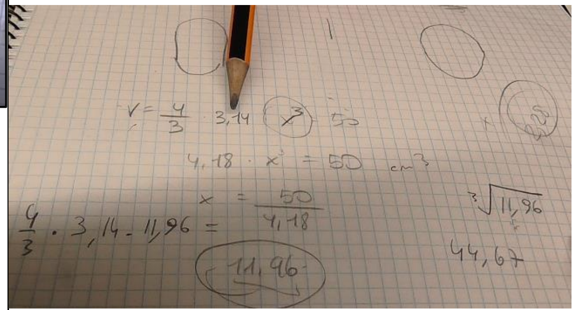


P: […] La pregunta que sigue es, […] ¿con ese radio ya pueden hacer el resto del trabajo?
E1: Sí.
P: ¿Cómo calcularon ese radio?
E2: Pues la fórmula que está aquí [señalando en su libro de texto la expresión $V = 4/3\ \pi\ r^3$], y… […] no d1 11, 96…
P: ¿Y, luego la raíz cúbica?
E2: Sí, sí. Y nos da esto [señalando los cálculos realizados en el cuaderno de grupo].
E3: Y como queríamos que nos dé en plan… esto [Señalando otra sección de la misma página señalada por E2]. Esto mide 50 [refiriéndose a 50 cm^3, que es el volumen elegido por los estudiantes para ese trozo del envase con forma de semiesfera] y lo igualamos a 50…

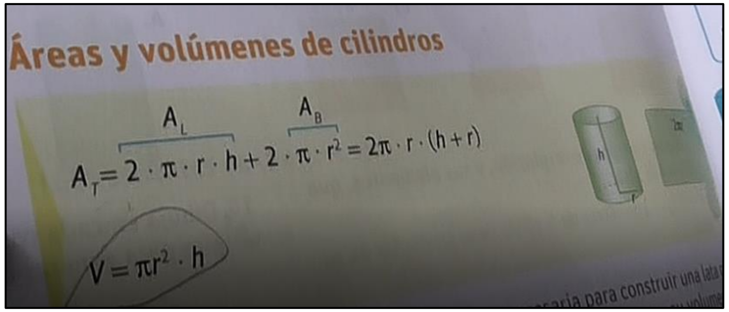


P: ¿Por qué 50?
E3: Porque es lo que elegimos, o sea, lo que mide.
P: ¿50…?
E3: O sea, 50, 25 y 50 [señalando las tres piezas que conforman el envase diseñado. Dos semiesferas y un cilindro]
P: ¡Ah! Es decir, [que] estamos hablando de la capacidad. ¿De que aquí le queda 50, aquí 50 y aquí 25? [señalando el diseño del envase].
E2: Sí.
P: ¿Esa decisión, en qué se basó? ¿Les pareció adecuada o…?
E1: ¡Sí!

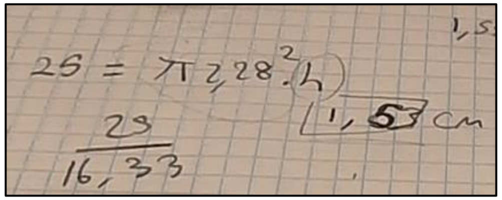
Entonces, aproveche este momento para instar a los estudiantes a que pensasen sobre lo que podría implicar el haber tomado la decisión en torno a la definición de la capacidad del envase.



Los estudiantes habían elegido una capacidad de 50 ml para cada semiesfera, y 25 ml para el cilindro. Y equipararon las unidades de capacidad con las unidades de volumen, de modo que cada semiesfera tenía 50 cm^3, y el cilindro, 25 cm^3.

P: […] Lo que hay que tener en cuenta es cómo a partir de esa decisión yo pongo en juego esos valores dentro de las fórmulas, y empiezo a trabajar con ellas. Han puesto 50 para encontrar este radio [de la semiesfera], ¿cierto? E2: sí. P: supongo que funcionara aquí lo mismo para esta parte [refiriéndose al hecho de que el radio de las dos semiesferas y el del cilindro que conforman el envase, es igual]. E2: Sí, sí. P: Entonces, aquí ¿qué tendríamos que calcular? E2: Um… P: En el cilindro. E2: Aquí dice… P: […] En el cilindro, ¿tendríamos que calcular el radio? E3: No. E1: No. Ya lo tenemos. P: Entonces, ¿qué tenemos que calcular en el cilindro? E1: El… Dado que los estudiantes se habían basado en la fórmula para calcular el volumen de la esfera, que aparece en el libro de texto que usan, y que a partir del diálogo que estábamos teniendo estaba claro que el radio de las tres piezas que conformaban el envase era constante, entonces les pedí que revisaran la fórmula para calcular el volumen de un cilindro (i.e., $V = \pi r^2 h$), que también aparece en el libro de texto.  P: […] Si esta es la fórmula para calcular el volumen del cilindro […] E1: ¡La altura! […] P: ¿Qué valores sabemos que tenemos que incluir en esta fórmula? ¿El volumen ya lo tenemos? E3: Sí, 125. P: Pero, estamos hablando solo del cilindro. E2: Eh, 25, igual a… [mientras hacía cálculos en el cuaderno de grupo]. P: El radio, ya lo tenemos. Y, solamente nos haría falta… La altura.	Esta equivalencia que han aplicado los estudiantes, según lo indicaron ellos mismos, provienen de la información recibida en la escuela donde se les ha dicho que un decímetro cúbico ($1\ dm^3$) equivale a un litro (1 l), y que un litro son mil centímetros cúbicos ($1\ l = 1000\ cm^3$).
E1: La altura sería como equis (i.e., *x*). P: […] Entonces, les voy a proponer algo: una vez que tengan esas medidas me cuentan, entonces, con qué paso continuarían.	El comentario de E1 parece reflejar lo anclados que están los estudiantes al uso de la letra *x*, para referirse a un valor desconocido en una ecuación.

Aproveché para solicitar a los estudiantes que tratasen de ser lo más organizados que se pudieran al escribir las ideas, y el proceso en general, para que después esta información se entienda bien. Por otra parte, y como el trabajo que estaban llevando a cabo los estudiantes de este grupo se estaba basando en el uso de las fórmulas que aparecen en el libro de texto, vi oportuno preguntarles a los estudiantes: P: ¿Tú te acuerdas de la pregunta que hiciste en la clase pasada?, en donde dijiste algo así como: si construimos la fórmula [para calcular el volumen del envase], ¿cómo nos damos cuenta de que es verdad, de que es cierta? E1: Sí. P: Entonces, yo quiero plantearte una pregunta a partir de lo que estamos haciendo hoy: ¿Cómo hacemos para saber que esas fórmulas que nos muestra el libro son ciertas? [E1 sonrió]. E2: Pues P: Porque lo diga el libro, ¿es verdad? [Risas] P: ¿Si me hago entender? E1: Sí, es verdad. O sea, lo que ponen en el libro, nosotros decimos: ¡Si lo pone en el libro será verdad! Pero nadie se ha parado a comprobar. P: Y, qué tal si aprovechamos esta oportunidad, ya que estamos usando unas fórmulas, ¿te acuerdas de que yo había planteado que una posibilidad sería experimentar a través de Tinkercad para darnos cuenta si esos volúmenes son ciertos? E1: Sí. P: Pues, qué tal si, una vez que tengan las medidas y los planos, lo hacen en Tinkercad y calculan ese volumen. ¿Tinkercad te da el volumen? E1: Sí. P: […] Para ver si es verdad lo que esas fórmulas nos dicen, porque allí nos empezaríamos a dar cuenta si lo que dice el libro es cierto o no. Creo que todos al principio hacemos eso. Lo que un libro diga… E1: Sí. Es verdad y ya está. P: Entonces, esta es una buena oportunidad para comprobar si esa información es cierta. Después, pregunté sobre la manera en que estaban usando el valor de la constante *pi* (π). P: ¿[…] En estas fórmulas el valor de *pi* lo están poniendo aproximado como 3,14 o…? E3: 3,14. P: […] ¿O en algunas fórmulas lo están haciendo, oprimiendo la tecla que corresponde al valor de *pi* [en la calculadora]? E1: ¡No! 3,14.	Esta propuesta está enfocada en la prueba mediante la simulación virtual, por lo que el problema de la confianza en las fórmulas se trasladaría entonces al problema de la confianza en un programa de diseño. Es necesario impulsar la verificación de la validez de las técnicas usadas, mediante la compresión de las fórmulas usadas. Un camino podría ser la reconstrucción de dichas fórmulas. Por ahora no sé cómo exactamente, pero lo averiguaré.

P: […] Cuando se tengan las medidas y se hagan los planos, habría que ver qué tan grande queda [el envase]. […] dado que es un envase chico, sugiero que hagamos los planos en escala uno a uno, para que tengamos una primera impresión de qué tan grande nos va a quedar, y allí tomamos decisiones. Si efectivamente ese es [el envase] que queremos o lo queremos más grande o chico.  Luego, les pedí a los estudiantes que explicasen como habían calculado el valor del radio de las semiesferas, y de la altura del cilindro. Esto, para registrar en detalle el desarrollo del trabajo de la técnica. Cabe anotar que, como E2 manifestó, mientras explicaba el proceso que habían seguido, que la altura del cilindro que acababan de calcular con E3 era muy chica, insistí en que elaborasen los planos para que se hicieran una idea del tamaño total del envase. P: […] Al hacer lo planos […] nos daremos cuenta de qué tan grande nos queda [el envase]. Y allí empezaremos a tomar decisiones [sobre] si se quedan con ese envase. Si les parece que es un tamaño adecuado o si cambian su tamaño. Pero, si cambiamos el tamaño, ¿qué significaría eso? ¿Qué cambiaría también? E1: Eh… la forma y todo… E2: El volumen. E3: La capacidad. P: Eso habría que pensarlo bien y toman la decisión. Por último, les recordé a los estudiantes que revisasen la hoja en la que se propuso la tarea del diseño del mejor envase, para que tuviesen en cuenta cada una de las sugerencias que allí aparecen, y les pregunté: P: ¿Están seguros de que esa es la forma que desean para el envase? E1: Sí. P: […] Era una idea que planteaba adicional. No quiere decir que tenía que ser esa idea. E1: ¡No! Pero, nos pareció bien y eso, porque nos gustaba la forma y ante todo queríamos que fuera esa forma porque nos gustaba [refiriéndose al diseño inicial]. Y nos has propuesto eso que es más fácil, entonces nos ha parecido mejor. P: […] ¿Y por qué te ha parecido más fácil? E1: Porque, o sea, viendo las fotos dijimos que ese era el que queríamos, y… ante todo, nosotros decíamos que queríamos ese, y que, estuvimos un día buscando la fórmula si hacía falta, y nos pusiste el otro, y dijimos que era más fácil. Y era como el que queríamos. Y, ya lo teníamos resuelto. <u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u>	Entre tanto, E3 y E2 ya habían calculado la altura del cilindro en 1.53 cm. Recordemos que la idea de que el envase pudiese estar conformado por tres trozos de solidos ideales, la propuse porque a los estudiantes se les dificultó mucho construir una fórmula para calcular el volumen de un envase que tuviese la forma inicialmente elegida.

Antes de terminar, pasé al grupo B y les pedí a los estudiantes que me permitieran hacer una toma de lo que habían escrito en el cuaderno de grupo. E4: Hemos dibujado [los planos del envase] a escala [uno a uno]. P: ¿y, están satisfechos con el tamaño [del envase]? E5: Sí, así está bien. E4: Es que pensábamos que era más pequeño, pero está bien. E5: Sí, pensaba que era de este tamaño más o menos [haciendo un gesto con su mano]. P: ¿Qué otra cosa han escrito hoy? E4: Le pedí a E6 que hiciera el informe, pero dudo que lo haya hecho [E5 sonrió]. P: Pero el informe lo podemos construir al final, una vez que tengamos todo eso. 2. Cierre. Para terminar, agradecí a los estudiantes por su trabajo, y les dije que continuaríamos con este en la siguiente clase. Específicamente, con la elaboración de los planos del envase.	
Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta: • Para el grupo A, ir construyendo los planos del envase. Para el grupo B, revisar los planos elaborados.	

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Ene. 29 del 2019</td><td>Hora</td><td>10:05-11:00</td><td>Clase</td><td>16</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">8 estudiantes de 3º de la ESO y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Ene29_2019
V2_Ene29_2019</td></tr>
</table>

Contextualización

Para la décimo sexta clase los estudiantes continuaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI**.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por Mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

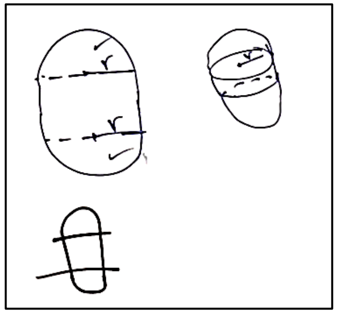
Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Inicié la clase con un saludo y diciendo a los estudiantes que se ubicasen en los grupos habituales, para que continuases con el diseño del envase para el perfume. Luego, me dirigí primero a los estudiantes del grupo A para preguntar por los planos del envase, pero como no habían avanzado con ello, les pedí que comenzaran a construirlos.	Hoy asistieron: E1, E3, E2, E8, E4, E5, E7 y E6.

<u>El trabajo de diseño en el Grupo A</u>

Como los estudiantes ya habían calculado las medidas del envase, pregunté:

P: […] ¿Están satisfechos con esas medidas?
E1: Sí.
P: Lo digo es porque cuando hagamos los planos, es que nos vamos a dar cuenta de la proporción [del envase]

Entonces, invité a los estudiantes a que me acompañasen a la pizarra para explicarles la importancia de la elaboración de los planos en esta etapa del trabajo.



P: […] Como tienen medidas. Es haciendo esos planos que nos vamos a dar cuenta si efectivamente tienen, más o menos, una proporción así, […] o algo así [señalando en la pizarra representación en la que se esbozaban: una representación tridimensional del envase y dos vistas frontales. Una más alargada que la otra]. Y uno dice: ¡No! Es que, no era como yo quería. No era tan largo acá, era más chico. Pero, es haciendo los planos que nos damos cuenta de ello.

Luego, les pedí a los estudiantes que me enseñasen el cuaderno del grupo, para ver las medidas que habían calculado para el envase, e indiqué:

P: Ponle las medidas que tiene aquí, por favor [refiriéndose a E1].
E1: Eh… el radio este, dos con veintiocho centímetros. Y esto [refiriéndose a la altura del cilindro] es de uno con cincuenta y tres. Pero es que yo creo hicimos otras [medidas], porque esto [refiriéndose de nuevo a la altura del cilindro] se nos quedaba un poco más… un poco pequeño.
P: […] Entonces, traten de organizar esta información y de ponerla en los planos. Y, al ver los planos ya no damos cuenta de ello. ¿Vale?
E1: Vale.
P: […] Tratemos de organizar esos planos hoy para poder tomar decisiones […].

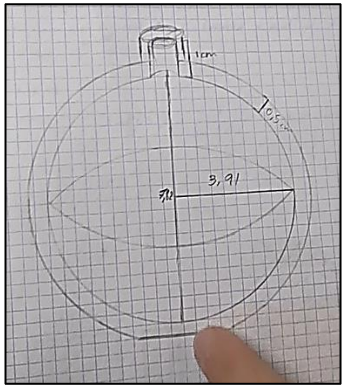
Luego, me dirigí al grupo B.

<u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u>

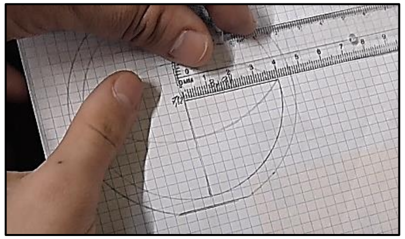
P: […] ¿Cómo vamos con el trabajo?
E4: Pues, ahora…
P: ¿Ya tenemos los planos?

Recordemos que para que los estudiantes se hicieran una idea del tamaño del envase, les había pedido que los planos se construyeran en escala 1 a 1.

E4: Sí.
P: A ver.
E4: Tu háblales del tapón [refiriéndose a E5 y entregándole el cuaderno del grupo, ya que es él quien está llevando el diseño del envase al ambiente virtual de Tinkercad].



E5: Pues, básicamente lo que he hecho yo es… la esfera con la base ya está hecha [señalando un boceto del plano en el que aparecía la vista frontal del envase]. Este espacio [refiriéndose al grosor del envase en su base] es de tres, quiero decir de dos… milímetros. Quiero decir cero con dos. ¡Veinte milímetros! Perdón. Y…
P: […] O sea, dos centímetros.
E5: ¡No, no, no! Me he equivocado. Dos milímetros. Sí.
P: Dos milímetros.
E5: […] Básicamente está ya toda la esfera. Le falta hacer el hueco. Este hueco de aquí [señalando el orificio por donde se vertería el líquido]. […] Y también he hecho el tapón dispensador.
P: […] ¿Este boceto que está aquí [en el cuaderno] está a escala uno a uno?
E5: Sí.
P: O sea que de acá a acá [señalando el radio de la esfera interior del envase], ¿hay tres con noventa y un centímetros?
E5: sí.
P: ¿Me permites?
E5: Sí, claro.
P: Sí, tienes razón. Perdona, no es que desconfíe. Es para que aparezca registrado [en el vídeo].



Aproveché para recordar la conversación que habíamos tenido en la clase pasada, en la que E5 había expresado que, cuando se hace el diseño virtual del envase, la sensación del tamaño real resulta engañosa porque se puede ampliar y reducir de manera dinámica dicho diseño. Por lo que, insistí en que, en este caso, resulta valioso tener los planos en escala real para hacerse una idea de dicho tamaño. Así que, centrándome de nuevo en boceto del plano, pregunté:

P: […] Antes me has dicho que aquí [en la base del envase] iba otra medida, ¿cierto?, o sea, que quedará más delgado.
E5: Sí, esto es [señalando el grosor del envase]… cero con cinco… centímetros más grueso.
P: Entonces, hay que poner aquí [señalando la base del envase] de cuánto es [el grosor] […]. Y, en Tinkercad esto debería aparecer también [refiriéndose a la diferencia de grosor en la pared del envase en la base, en relación con el resto].
E5: Sí. Está todo. Básicamente a escala… en centímetros.

En ese momento E5 explicó brevemente cómo es la plantilla tridimensional sobre la que se trabaja en el ambiente virtual de Tinkercad. E5: En Tinkercad, lo cuadraditos. Porque es como una base cuadrada. Te aparecen en milímetros. Con lo cual, tengo que poner, por ejemplo, treinta y nueve con uno (39,1). Pues en este, setenta y ocho con dos (78,2), porque las medidas serían setenta y ocho con dos, por setenta y ocho con dos, por setenta y ocho con dos de altura (78,2 x 78,2 x 78,2). P: […] Cuando tengas el archivo lo traes para hacer una copia. Luego de esto, pregunté a los estudiantes que revisaran lo que estaba pendiente por hacer de esta tarea. Es decir, del diseño del mejor envase. P: De acuerdo con la información que tenemos acá. Con las instrucciones [de la tercera tarea]. ¿Qué nos falta? E4: El informe. P: ¿Y ya está? E5: El informe y seguir con lo de Tinkercad. […] P: Entonces, si ya tenemos los planos, y los planos tienen toda la información necesaria, entonces tendríamos que ir a construir el informe. Traten de ser muy específicos en el informe. […] Vamos a contar en detalle todo el asunto. ¿Alguna pregunta? Ante el silencio de los estudiantes, pregunté: P: ¿Recuerdan los procesos que han escrito allí [en el cuaderno de grupo] para poder encontrar las medidas [del envase]? Todos: Sí. E4: La fórmula. P: Sí. Las fórmulas, etc. Eso me gustaría que pudiera parecer también allí en el informe. Es decir, en esta etapa donde hablamos del proceso de diseño. Eso también pónganlo allí. En relación con las inquietudes que pudieran tener los estudiantes, pregunté: P: ¿Qué dudas han tenido en el desarrollo de este trabajo? Algo que, de pronto, haya quedado inconcluso. Que digan: No, esto no fue posible, o ¿cómo lo hacemos? E5: De momento nada. E4: Creo que lo hemos desarrollado bien y no hemos tenido ninguna duda.	La explicación de E5 indica que, en este programa de diseño, parece ser necesario definir el espacio tridimensional en el que se va a poner el objeto a construir. Con lo cual, dicho espacio debe poder contener completamente al objeto.

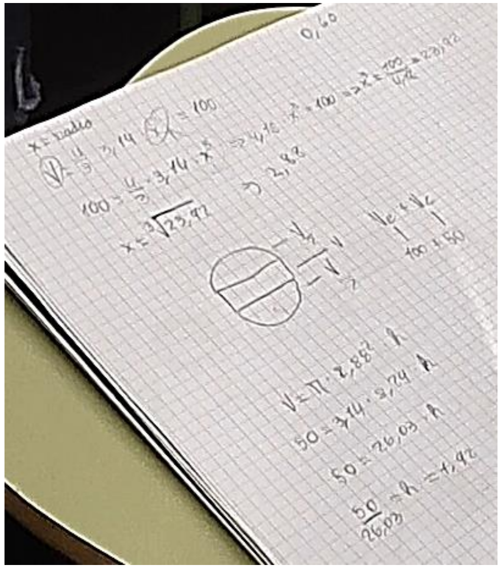
P: Entonces, inviertan el tiempo en la construcción del informe. […] Hagan un primer borrador del informe y vayan añadiendo o quitando cosas. […] discutan los cuatro y se ponen de acuerdo en cada uno de los puntos del informe. Luego, regresé al grupo A. <u>El trabajo de diseño en el Grupo A</u> P: ¿Allí qué estás haciendo, E1? [señalando lo que escribía en el cuaderno]. E1: Estamos volviendo a hacer la fórmula y planteando otras medidas, porque esto [señalando el radio de una de las semiesferas y la altura del cilindro] se nos ha quedado pequeño. O sea, [el envase] sería muy pequeño, entonces vamos a proponer otras medidas para ver si lo podemos aumentar. P: […] ¿Qué es lo que van a proponer cambiar? ¿Simplemente van a proponer una medida diferente? […] ¿O la capacidad [del envase]? ¿Qué creen que va a cambiar? E1: Eh… La medida y la capacidad. P: Vale. Escríbelo y ahora me explican de qué se trata esos cambios que han hecho. Insistí en la importancia de hacer los planos del envase. P: Recuerden que, una vez que tengamos esto bien definido, hemos de hacer los planos y luego llevarlos a Tinkercad.	
Instantes después, E1 estaba calculando el radio de la esfera que forma parte del diseño del envase que en su grupo se eligió. Para ello, está utilizando la fórmula $V = 4/3\ \pi\ r^3$. Ahora bien, como en la clase anterior estos estudiantes habían decidido que cada semiesfera tendría un volumen de 50 cm^3 y que el volumen del cilindro sería de 25 cm^3, entonces E1 estaba trabajando a partir de la expresión $100 = 4/3 * 3{,}14 * x^3$, entonces pregunté: P: […] Estamos pensando en el envase, como un envase que se forma por otras piezas. Por trozos de otros cuerpos. […] Pero, esa fórmula que tienes aquí (i.e., $V = 4/3\ \pi\ r^3$) está incluyendo solamente estos dos trozos [refiriéndose a las dos semiesferas], ¿cierto? E1: Sí. P: ¿No habrá alguna fórmula para que me incluya de una vez todo el envase? […] Para poner de una vez el volumen de todo el envase. […] ¿Creen que se pueda? E1: Sumando este volumen [refiriéndose a la esfera] con este [refiriéndose al cilindro], entonces ya daría todo. P: […] ¿Cuál sería la fórmula? […] ¿Qué haríamos para que fuera para todo? E1: Sumarlo. P: ¿Cómo se sumaría? E1: Pues el… Te lo pongo aquí. […] Volumen de la esfera, más volumen del cilindro.	Ya antes he mencionado que el uso que hace este estudiante de la letra equis (*x*), indica el anclaje a los ostensivos empleados para calcular el valor de una incógnita en una ecuación.

P: […] ¿cómo lo harías? E1: Pues, sacando el volumen de la esfera… P: ¿Cuál sería el volumen de la esfera? E1: Sería 100 [cm^3] más… Y ahora yo creo que, en vez de hacerlo para 125, lo vamos a hacer para 150. P: y, ¿qué pasa entonces? E1: Que aumenta el tamaño [del envase]. Con base en las respuestas de E1, pregunté: P: Si con esto [señalando la fórmula $V = 4/3\ \pi\ r^3$] calculas el volumen de la esfera, ¿con cuál [fórmula] calculas el volumen del cilindro? […] E1: Pues sería… el volumen de la… ¿tienes el libro de mates? [dirigiéndose a E2]. P: […] A lo que yo voy es a lo siguiente… E1: Altura por radio al cuadrado. Puede ser… algo así. P: ¿Alguien tiene el libro de matemáticas? E1: Yo no. Instantes después, los estudiantes del grupo A consiguieron un libro prestado con los estudiantes del otro grupo. Así que, mientras E1 buscaba la información sobre cómo calcular el volumen de un cilindro, planteé a los estudiantes: P: […] Si tenemos una fórmula para calcular esos trozos de la esfera, y tenemos una fórmula el volumen del cilindro, entonces, ¿Por qué no pensar en una fórmula para todo el envase? Que a su vez está constituido de estos trozos de esfera más el cilindro. Entonces, ¿Cómo lo haríamos? E1: Pues sumando esto, cuatro tercios por pi, por radio al cubo ($4/3\ \pi\ r^3$), más pi por radio al cuadrado, por altura ($\pi\ r^2 h$). P: Bueno… E1: Entonces tendría… Lo primero es descubrir el radio. Si descubrimos el radio ya podemos empezar a despejar. Y después de tener el radio, calculamos de cuanto queremos la altura. Aunque las respuestas de E1 apuntaban hacia la suma de las fórmulas para calcular el volumen de la esfera y del cilindro, su última idea parecía seguir apuntando hacia el tratamiento separado de estas, por lo que insistí en que tratasen de unificar dichas fórmulas. P: […] Por lo que has dicho, pues sería básicamente, sumar esas otras fórmulas. E1: Sí. P: ¿Cómo lo haríamos?	Los alumnos decidieron que cada trozo del envase debería tener un volumen de 50 cm^3. Con esta pregunta quise instar a los estudiantes a que relacionaran funcionalmente el volumen de todo el envase, con el radio de las semiesferas y del cilindro, y la altura del cilindro.

E1: […] Despejando equis y encontraríamos el radio [señalando la expresión $100 = 4/3\ \pi\ r^3$]. Y, después de encontrar el radio ya podríamos hacer esta fórmula [señalando la expresión $V = \pi\ r^2 h$], y despejaríamos h. O sea, ería *pi* por el radio que conseguimos aquí [en la primera fórmula], al cuadrado, y aquí [en la segunda fórmula] pondríamos cincuenta en el volumen [del cilindro]. Entonces pondríamos altura como equis, y despejaríamos. P: […] Lo hacen y me van contando como va […]. Si tienen alguna inquietud. Si se sienten atascados. Lo podemos discutir. […] De lo que se trata esto, chicos, es de que podamos reflexionar e irnos dando cuenta de cuál sería la solución adecuada. Luego de esto, volví al grupo B para preguntar a los estudiantes por el avance en la construcción del informe, y para decir que este era un primer borrador. Con lo cual, probablemente habrá algunos apartados de dicho informe, que más adelante se modificarán, agregarán o eliminarán. Además, aproveché para solicitar a los estudiantes que, en esta ocasión, el informe fuese un poco más detallado que el realizado anteriormente en la segunda tarea. <u>El trabajo de diseño en el Grupo B</u> P: […] Recuerden que en el informe pasado […] uno de los argumentos para elegir la forma del envase era por su sencillez. […] Pero, si fuese el caso, habría que explicarse en qué consiste dicha sencillez. E4: […] Nos referíamos más a la construcción. Que se elaboraba mejor de esa forma. P: […] En esta ocasión se trata de profundizar un poco más […]. Por ejemplo, en la primera parte. ¿Qué han puesto aquí? E6: Hemos puesto. Por qué hemos elegido este envase […], para salirnos del típico frasco de perfume estereotipado. P: […] Podría anexarse algo que diga: porque es que los frascos típicos estereotipados son así, y así, y así […]. E5: Es que te pide algo… llamativo. Te pide que crees algo nuevo [refiriéndose a las instrucciones dadas para esta tarea]. P: Entonces eso se puede poner en el informe. La empresa Afrodita quiere algo atractivo y eficiente, entonces nuestro perfume es atractivo y eficiente porque… pero ese es uno de los motivos. […] Insistí en que, como primer borrador, el informe que se está construyendo tiene ideas clave interesantes. Así que les sugerí que avanzaran con ello, y que luego se detuvieran en cada apartado para profundizar en dichas ideas. Además, en relación con la explicación del proceso de construcción, que debe hacer en el informe, indiqué: P: […] Cuando hablamos de que se explique el proceso de construcción, nos estamos refiriendo a que cuenten todo ello que ha sido necesario para el diseño del envase. […] Hay un momento en el que el diseño se va a llevar a Tinkercad. Eso también forma parte de la explicación. E5: ¿Con esto tendremos que preparar otra exposición? P: Sí.	El volumen de toda la esfera es 100 cm^3, y el volumen del cilindro es de 50 cm^3. La respuesta de E1 indicó un uso de las fórmulas de manera separada. Es decir que, no está unificando los volúmenes de los trozos que conforman el envase mediante una sola expresión, sino que calcula de manera independiente dichos volúmenes y luego los suma. Considero que esta forma de proceder limita la posibilidad de relacionar funcionalmente el volumen del envase son sus dimensiones.

Antes de terminar la clase, pase de nuevo al grupo A.

<u>El trabajo de diseño en el Grupo A</u>
P: ¿Me he hecho entender con lo que proponía?
E1: Sí. Nos ha salido de dos centímetros de altura [refiriéndose al cilindro].
P: […] Déjenme ver cómo lo han hecho. Explícame rápidamente [refiriéndose a E1].
E1: Pues hemos buscado el radio con la fórmula. con el volumen de la esfera. Que no ha dado dos con ochenta y ocho. Y ese dos con ochenta y ocho lo hemos pasado aquí al volumen del cilindro. Qu es *pi* por radio al cuadrado por altura.
P: y han encontrado la… altura.
E1: Y hemos encontrado la altura. Que da uno con nueve dos.
P: Les propongo algo. Porque no con esas medidas intentan hacer los primeros planos, y solamente tras hacerlos toman otra decisión. Antes de ir cambiando y cambiando medidas. […] Planos escala uno a uno […] a ver qué tan grande lo ven [el envase].
E1: Bueno.



Aproveché para recordar a los estudiantes que las dudas que vayan emergiendo, bien podrían consultarlas en los libros, en internet, o también trasmitirlas a T o a mí.

2. Cierre.

Para terminar, dado que el próximo viernes no hay clase porque los estudiantes van de excursión, les pedí que fuesen avanzando de manera individual con la tarea que están llevando a cabo, para que, al regreso, el trabajo en grupo pudiera ser más productivo.

<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>

- Avanzar de manera individual con la tarea que están llevando a cabo.

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Feb. 8 del 2019</td><td>Hora</td><td>09:10-10:05</td><td>Clase</td><td>17</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Feb8_2019
V2_Feb8_2019</td></tr>
<tr><th colspan="12">Contextualización</th></tr>
<tr><td colspan="12">Para la décimo séptima clase decidimos presentar a los estudiantes las herramientas básicas de GeoGebra. Un programa de geometría dinámica. Esto, para que los estudiantes vieran que las variables que intervienen en las fórmulas que están empleando para el cálculo del volumen del envase que están diseñando en la tercera tarea del REI, pueden representarse gráficamente. Así, posiblemente los estudiantes podrán aproximarse a una visión funcional de dichas variables.
Esta decisión la tomamos en la asesoría doctoral que tuvo lugar el martes 29 de enero, porque consideramos que el uso de GeoGebra podría ayudar a los estudiantes a simular de manera virtual la relación entre las dimensiones y el volumen del envase que están diseñando.</td></tr>
<tr><th colspan="8">Descripciones y transcripciones</th><th colspan="4">Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Saludo.
Inicié la clase con un saludo y diciendo a los estudiantes que les mostraría el uso de las herramientas básicas de GeoGebra.

P: […] Esta decisión de presentar GeoGebra, tiene que ver con aquello que ha venido pasando, en términos del trabajo del cálculo de las medidas del envase. […] Porque en algún momento, en cada grupo, me di cuenta de que cuando empezaban a hacer esos cálculos, a veces o encontraban que las medidas que encontraban eran demasiado chicas […] o no cumplían las expectativas, o hacían que tuviésemos una idea de que el envase no iba a quedar como quisiéramos. Entonces estuve pensando, a través de qué mecanismo pudiéramos ver qué otras opciones hay. […] Esas otras opciones nos la puede ofrecer GeoGebra. Así, en el día de hoy voy a presentar brevemente como poder hacer una graficas acá, que nos relacionarían, por ejemplo, en este caso, el volumen del envase con sus medidas, y nos permitirían tomar decisiones.

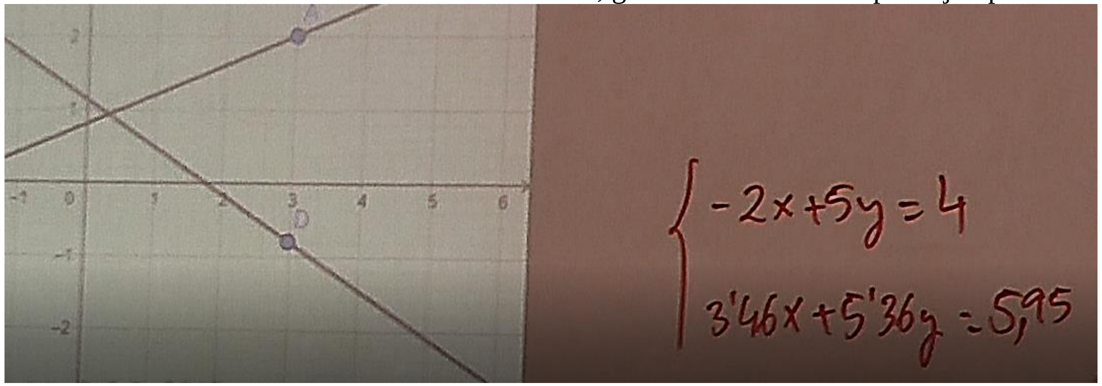
E insistí…

P: Si bien, sé que va muy avanzado el trabajo, esto no quiere decir que […] esta información no pueda servir para, o bien tomar decisiones sobre o hecho o para analizar hasta qué punto lo que hemos hecho se ajusta a lo que queremos. Por qué es importante eso, porque en algún momento vamos a llevar el diseño a 3D. Y dado que ello implica un gasto de material en la impresora 3D, si vamos muy seguros de lo que queremos, pues el primer prototipo que se imprima –y tal vez el único– pues va a ser el que queremos.

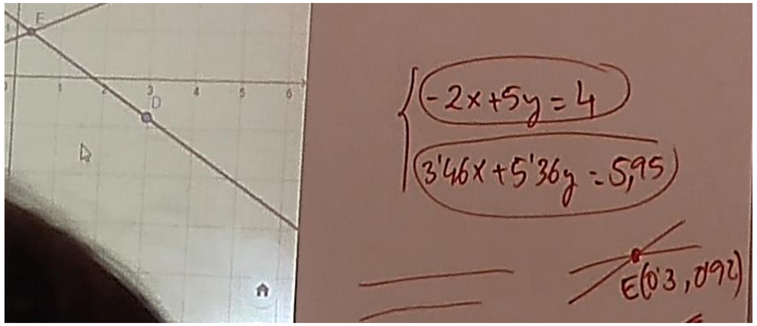
Luego de esto, expliqué brevemente en qué consiste y qué herramientas podemos encontrar en GeoGebra, al tiempo que iba mostrando algunas construcciones básicas y sus correspondientes estructuras en la ventana algebraica. Por ejemplo, un punto y sus coordenadas rectangulares, una recta y su ecuación, etc.</td><td colspan="4">Hoy asistieron: E1, E3, E2, E8, E4, E5 y E7.

Mientras explicaba en qué consistía, y el porqué de esta presentación, T indicó que podría una tarea sobre GeoGebra en el aula virtual, para que los estudiantes la entregasen el próximo lunes. Por tanto, dijo que era necesario atender a esta presentación porque les serviría para llevar a cabo dicha tarea. Considero que esta propuesta, que no estaba planeada, refleja una restricción que describe muy bien el contrato didáctico al que están habituados los estudiantes, en relación con la correspondencia entre la información dada y tarea solicitada. Es decir, que los estudiantes están habituados a que cada información que se les proporciona debe estar asociada a una tarea, porque de lo contrario dicha información no será objeto de su interés.</td></tr>
</table>

En ese momento intervino T, para recordar a los estudiantes el tema sobre la resolución analítica y gráfica de un sistema de ecuaciones con dos variables. Por tanto, graficamos dos rectas para ejemplificar dicha situación.



Profesora titular: […] Estos ejercicios los hemos hecho en clase un montón. Te dicen: resuelve este sistema. […] Analíticamente lo podéis hacer por sustitución, igualación o reducción. […] Gráficamente, dibujas esta recta, dibujas esta otra recta [señalando las ecuaciones de las rectas]. Y […] puede ocurrir tres cosas: o son paralelas, o son secantes en un punto, o son coincidentes. […] Con este programa [...] si nosotros quisiéramos ahora resolver este sistema…
P: […] Le pones acá en punto de intersección [señalando el icono en GeoGebra], y seleccionas una recta y luego la otra, y te da el punto de intersección.



Profesora titular: Fijaos, el punto E, que es este de aquí [señalando el área de trabajo gráfico en GeoGebra] sería el punto de corete. […] Tiene de coordenadas, cero coma tres y cero noventa y dos (0,3 , 0,92). Luego este programa no solo sirve para lo que estáis haciendo con el profesor, sino, también sirve para cosas que estéis dando en la clase de matemáticas normal […].

P: […] Esto nos dice otra cosa bien interesante de las matemáticas. Y es que […], por la forma que están estructuradas en la escuela. En una clase veamos una partecilla de las matemáticas, y en otra clase otra, eso no quiere decir que sean mundos separados […].

<table>
<tr>
<td>
Nuevamente intervino T para indicar, en relación con la estructura de una recta y con la resolución de un sistema de ecuaciones:

Profesora titular: […] Yo solo quería haceros ver que lo que está diciendo el profesor, lo hemos dado […]. El profesor está hablando de cosas que ya sabéis […].

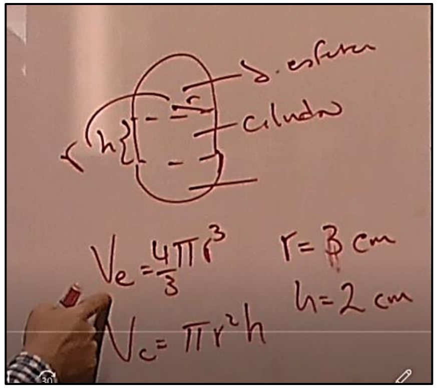
Luego de esto, comencé a vincular la presentación con el trabajo que vienen haciendo los estudiantes.

P: […] Lo que estoy intentando mostrar es que, con estas herramientas, podemos hacer unas construcciones que bien nos sirven, para solucionar sistemas de ecuaciones, en este caso, o […] para representar la relación entre por lo menos dos variables. […] Vamos a tomar uno de los ejemplos del trabajo que han venido haciendo […].

<u>En relación con el trabajo de diseño del Grupo A</u>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
Recordé las condiciones generales del diseño del envase que vienen desarrollando estos estudiantes. Es decir, que está compuesto por dos semiesferas y por un cilindro.

P: […] Por lo que acabamos de hablar [veo que] han tomado otra decisión. Otorgar otras medidas, tanto para el radio como para la altura, y ver lo que salga de volumen […] ¿Qué formulas han usado para calcular el volumen de la esfera?

Entonces, escribí en la pizarra las fórmulas que E1 indicó. Y luego pregunté:



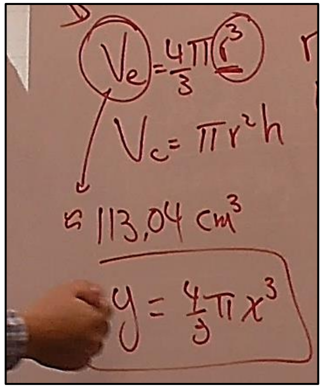
P: […] ¿Qué medidas han decidido atribuirle al radio y a la altura? […]
E1: La altura, hemos puesto dos…
P: […] ¿Medidas en centímetros?
E1: Sí. Y al radio… tres.
P: […] ¿Cuál fue el volumen de la esfera […]?
E1: Um…
Profesora titular: Lo tienen hecho, porque lo hicieron delante de mí […].
E1: Ciento trece coma cero cuatro (113,04).
P: Estos son… centímetros cúbicos. ¿Cierto?
E1: Sí.
P: Pero, lo que quiero mostrar es lo siguiente. Bien hubiésemos podido intentar con muchos valores. Es decir, […] qué pasa si son tres centímetros de radio. Qué pasa si son cuatro, […] si son cinco, […] si son seis, etc. Yo podría empezar a preguntarme, por ello, cómo va cambiando este volumen [de la esfera] cuando este radio cambia […].
</td>
<td>
En la última clase* que estuve los estudiantes, ellos habían decidido otorgar un volumen de 50 cm3 a cada uno de los cuerpos que compone el envase, pero hoy me han dicho que decidieron otorgarle un valor al radio y a la altura, que son las variables que intervienen en el volumen del envase, y luego ver qué volumen resulta al final.

*Luego de esta clase, yo no pude estar presente el martes 5 de febrero por motivos de salud, así que los estudiantes avanzaron con la sucesoria de T. Fue en dicha clase que los estudiantes tomaron la decisión de otorgar valores al radio y a la altura, antes mencionados.
</td>
</tr>
</table>

Dicho esto, indiqué entonces, que hacer cada cálculo del volumen por separado nos tomaría más tiempo. Es decir, para cada valor del radio. Por tanto, este proceso tendría que continuar hasta que estuviésemos satisfechos con las dimensiones y la capacidad del envase. Por lo que sugerí analizar la relación entre dichas dimensiones y capacidad, comenzando por la esfera que compone el envase que se está diseñando.

<u>Relación entre el radio y el volumen de una esfera</u>

Comencé indicando la manera en que se debe ingresar en GeoGebra la relación que deseamos graficar. En este caso, la relación dada en la expresión $V = 4/3\ \pi\ r^3$, se debería ingresar comparándola con la estructura $y = 4/3\ \pi\ x^{3.}$



P: […] En este caso, lo que yo voy a obtener en el eje de las *y* es […] el volumen de la esfera. Y lo que va a variar, en este caso, es el radio. Con lo cual, el radio [de la esfera] voy a compararlo con esta variable. Con *x*.

[…]

P: Por qué hago esto. Porque es la manera en que GeoGebra, por defecto, admite la estructura que voy a graficar. […] No quiere decir que yo no lo pueda cambiar.

A continuación, tecleé la expresión $y = 4/3\ \pi\ x^3$ en la barra de entrada de GeoGebra, para obtener la gráfica de la relación allí contenida.

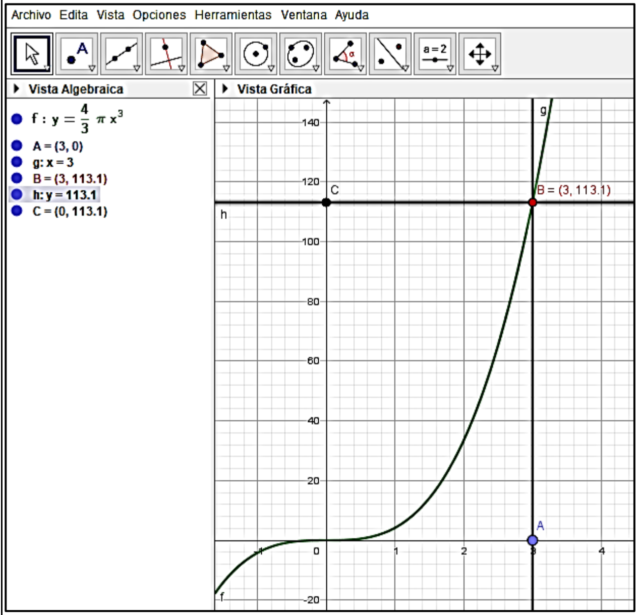
P: […] Esta gráfica me está diciendo […] que, a medida que yo me mueva en el eje de la *x*, o sea, a medida que cambia el radio, qué va cambiando: el volumen de la esfera.

Así, valiéndome del valor que los estudiantes habían establecido para el radio de la esfera, indiqué:

P: […] Ustedes han dicho que han decidido que su radio…
Profesora titular: Que la equis valga tres.
P: […] En ese caso, cuando la equis vale tres, aproximadamente encontramos que por aquí [señalando la gráfica en la pizarra] está el volumen de la esfera […], entre cien y ciento veinte [unidades cúbicas]. Vamos a ver exactamente dónde está […].

Esta comparación entre el volumen de la esfera y su radio, y los valores que aparecen en los ejes *x* e *y*, en relación con la fórmula para calcular el volumen de dicha esfera, la presenté porque es la forma básica en que se ingresan las expresiones a graficar en GeoGebra.

<table>
<tr>
<td>
Luego, sirviéndome de una construcción auxiliar en la que ubiqué un punto A en la coordenada tres con cero [i.e. A (3,0)], y una recta perpendicular al eje de las abscisas, que pasa por dicho punto, ubiqué el punto de intersección entre esta recta y la gráfica inicial. Luego tracé otra recta perpendicular, esta vez al eje las ordenadas, que pasaba por el punto de intersección antes obtenido. Esto, para indicar el valor del volumen de la esfera, cuando su radio equivale a tres unidades.



P: […] Si miras los puntos [en la gráfica], sabes que en este caso te dio 113,1 […]

Al comparar este valor del volumen, con el obtenido por los estudiantes, que fue de 113,04 unidades cubicas, T intervino diciendo:

Profesora titular: Eso es porque ellos han puesto 3,14 y tú has puesto pi (π).

Luego de ello, indagué de manera enfática sobre esta relación representada mediante la gráfica.

P: […] Lo que está pasando, ¿sí lo vemos todos? […] cuando yo decido cuál es el radio, para esa construcción que tienen allí, que se compone de tres piezas, entonces [la gráfica] me dice cuál es el volumen de la esfera.

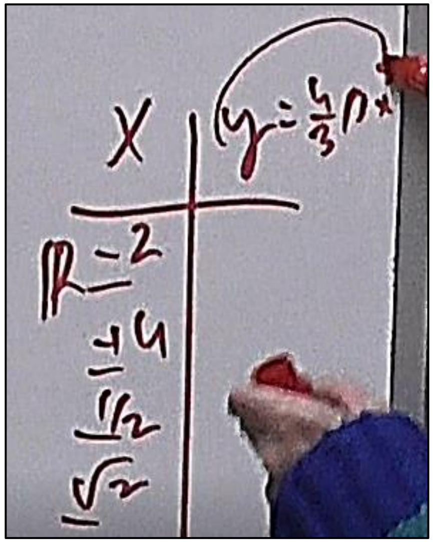
E insistí…

P: ¿De quién depende la interpretación que hay allí?
[silencio]
P: ¡De nosotros! Porque hemos sino nosotros quienes hemos decidido que sobre este eje [señalando el eje de las abscisas] va a ir el valor del radio, y sobre este eje [señalando el eje de las ordenadas] el volumen de la esfera. […] Por tanto, de nosotros depende lo que ponemos [en el gráfico] y lo que interpretamos.

Luego, indiqué:
P: […] aquí es donde viene el asunto interesante, porque podríamos plantearnos: […] no quiero que sean tres centímetros de radio. Quiero que sean cuatro. Automáticamente el volumen cambia a 268,08 [moviendo el punto A hasta la abscisa 4]
</td>
<td>
Esta no es la única manera de conocer el valor del volumen de la esfera cuando su radio es tres unidades, pero sí ilustra muy bien de donde proviene los componentes de la coordenada del punto de intersección entre las rectas perpendiculares y la gráfica del volumen de la esfera en función de su radio.
</td>
</tr>
</table>

Y, seguidamente, expliqué: P: […] Desde un principio también podríamos empezar a tomar decisiones partiendo de esta información [señalando el gráfico proyectado en la pizarra]. Qué pasa si el radio cambia […]. Una vez presentada la gráfica en la que se relacionaba el volumen de la esfera y su radio. Propuse hacer lo mismo con la expresión usada para calcular el volumen del cilindro, haciendo notar que para ello necesitaríamos incluir una nueva variable, es decir la altura del cilindro. Para ello, expliqué el uso de los deslizadores en GeoGebra.	Este fue el momento en el que vi la oportunidad de plantear la visión hacia una relación funcional entre el radio de la esfera y su volumen.
P: […] Como por defecto solamente hay dos variables aquí [señalando el área de trabajo de GeoGebra en el que habíamos relacionado el radio de la esfera y su volumen], yo puedo establecer una tercera a través de un deslizador. Ya veremos cómo se hace. Antes de continuar, y dado que la gráfica en la que se relacionaba el volumen de la esfera con su radio indicaba que existen valores negativos para el radio, insté a los alumnos a reflexionar sobre si dichos valores nos servirían en el contexto de nuestra situación. P: […] Tomar estos valores [negativos], ¿para nosotros tiene algún sentido? E1: No… P: ¿Por qué? E1: Porque sería por debajo. Profesora titular: Porque son radios, ¿no? E1: Claro. Profesora titular: No puede ser negativo. O sea, ¡radio, menos 3! E1: Claro. P: […] Si bien, en términos matemáticos, existe una gráfica que, tanto tiene valores positivos como negativos; en el contexto de nuestro trabajo pues, solamente nos sirven los valores positivos. En ese momento intervino T para hacer referencia a uno de los temas que se estudia en la escuela.	La necesidad de usar deslizadores de debió a que el gráfico de la relación entre el volumen, el radio y la altura del cilindro, lo haríamos en el mismo archivo en el que acabábamos de trazar la gráfica anterior. Esto, porque el radio, tanto para la esfera como para el cilindro, es el mismo.
Profesora titular: Está hablando el profesor, del dominio de la función. Que esto lo habéis dado en el segundo de la ESO […].	Debo revisar nuevamente, pero no recuerdo que en el currículo de segundo de la ESO se proponga el estudio de las funciones. Por lo menos en lo referente al estudio de su dominio.

<table>
<tr>
<td>
En ese momento la profesora pasó a la pizarra para ilustrar, a partir de una tabla de valores de x e y, qué es el dominio de una función.



Profesora titular: […] El dominio es: qué números puedo poner aquí [señalando la columna de la tabla que se corresponde con los valores de x]. Entonces aquí puedo poner cualquier número real. Puedo poner negativo, positivo. Puedo poner fracciones. Puedo poner raíz de dos. ¿Es que hay alguna forma de función [en la que] halla aquí un número que no puedo poner? Pues sí. Y yo lo expliqué el año pasado […]. Si yo ponga esta función: uno partido por equis. Yo no puedo poner aquí [en x] el número cero. Porque si tus pones en la calculadora uno partido con cero, te pone ¡error! Qué significa eso, que no puedo calcular la pareja de cero. La imagen. Entonces, sí que es cierto que en algunas funciones hay números que yo no puedo poner aquí [en x] […]. En este caso, yo puedo poner aquí [en x] cualquier número real […], con lo cual aquí [señalando la gráfica de la relación entre el volumen y el radio de la esfera] no hay ningún impedimento para calcular la imagen de cualquier número. Lo que único que pasa, es que como estamos en un experimento de geometría, no tiene sentido los radios negativos […].

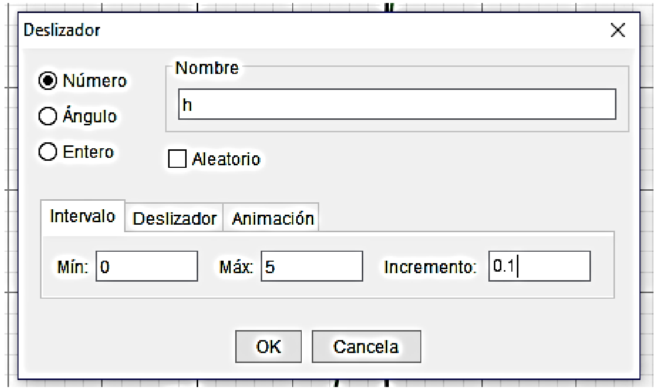
Luego de esto, quise retomar la primera opción que habían elegido los estudiantes, en la que definieron primero el volumen de los trozos del envase, y luego se cuestionaron por sus dimensiones. Así que, aproveché la gráfica que relacionaba el volumen de la esfera y su radio, para indicar que, si el volumen de dicha esfera fuese de 100 centímetros cúbicos, entonces bastaría con ubicar un punto en la ordenada 100 y analizar qué abscisa le corresponde. Así, conoceríamos el radio de la esfera cuando su volumen es de 100 centímetros cúbicos.

<u>El uso de un deslizador para graficar la relación entre el volumen, el radio, y la altura de un cilindro.</u>

Expliqué que el deslizador nos serviría para añadir una variable adicional al trabajo que hemos venido desarrollando.

P: […] Cuál sería la variable adicional para nosotros […], pues la altura del cilindro.
</td>
<td>
Aunque el aporte de la profesora buscó ilustrar el concepto de dominio de una función, considero que el ejemplo de la tabla de valores podría resultar ambiguo, porque no es posible poner un número infinito de valores, aun en un intervalo cerrado, para determinar el dominio de una función.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Entonces, que a partir de la expresión $V = \pi r^2 h$, usada para calcular el volumen de un cilindro, en la cual los estudian habían definido valores tanto para r como para h. Siendo estos 3 cm y 2 cm, respectivamente. Propuse que la variable que añadiríamos mediante el deslizador seria la que corresponde a la altura del cilindro. Esto, porque en la gráfica ya estaba relacionado el radio, que es igual en ambos casos, y el volumen del cuerpo que estamos evaluando.
</td>
<td>
A dicho deslizador le otorgamos valores entre 0 y 5, con un incremento de 0.1 unidades.
</td>
</tr>
</table>

A continuación, expliqué como añadir dicho deslizador, al que nombramos como *h*.

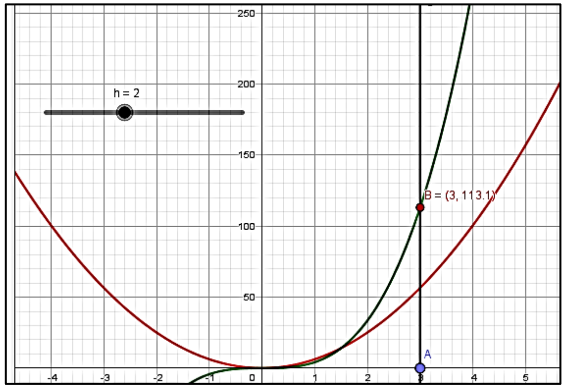


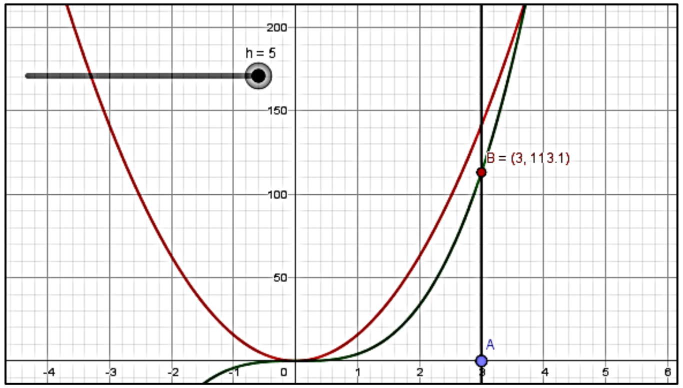
P: […] Por ahora tengo el deslizador, pero no lo he vinculado [a una gráfica]. Cómo lo vinculamos […].

Entonces, tomé la expresión $V = \pi\, r^2 h$, y la escribí como $y = \pi\, x^2 h$ para ingresarla en GeoGebra, dado que, como indiqué antes, la variable *radio* la hemos ubicado en el eje de las abscisas, y que dicha variable es la misma en ambos casos.

P: […] Esta gráfica me está diciendo cómo varía el volumen del cilindro, cuando; por un lado, varia…
E1: El radio.
P: Y por otro, cuando varía la altura.

Luego, comencé a mover el deslizador, para que los estudiantes vieran cómo variaba la gráfica antes mencionada.





P: […] Entonces, aquí tengo una gráfica que me está relacionado tres elementos. El volumen, la variación del radio, y la variación de la altura [del cilindro]. Y puedo relacionar más [variables] dependiendo de la estructura y del problema que yo esté trabajando.

Dado que las gráficas que hemos trabajado, aunque presentan la relación funcional entre el volumen y las dimensiones, tanto de la esfera como del cilindro, lo hacen de manera separada. Es decir que, para conocer el volumen total del envase, tendríamos que sumar el volumen del cilindro y de la esfera, conocidos el radio y la altura. Que en este caso los estudiantes habían definido en 3 cm y 2 cm, respectivamente. Por lo que pregunté: P: […] ¿Habrá una manera de que, yo no tenga que hacer dos gráficas sino solo una [para conocer el volumen del envase]? Con lo cual, ¿habrá una manera de convertir estas dos expresiones [refiriéndose a las que se ingresan en GeoGebra para trazar dichas gráficas] en solo una? Y si es así, ¿cómo lo harían? Entonces, insistí… P: […] Es decir, ¿habrá una manera de representar la relación entre el volumen de todo el envase, y el radio de la semiesfera y del cilindro, cuando cambia ese radio y cuando cambia la altura del cilindro? […] ¿Será posible? E1: Sí. Profesora titular: A ver, ¿qué harías? E1: Pues, sumar… Profesora titular: Sumar las dos fórmulas.	
Aproveché para preguntar a los estudiantes si habían realizado dicha suma, ya que antes, cuando surgió la idea de considerar el envase como compuesto por dos semiesferas y un cilindro, les había preguntado por una sola expresión para calcular el volumen completo. P: ¿No lo han intentado […]? E1: No, lo hicimos… Profesora titular: Lo estuvieron sumando por separado. E1: Sumamos… Profesora titular: Iban haciendo… iban calculando el radio de la esfera como les conviniera, y luego arreglando la altura del cilindro, fijado el radio. ¿Me entiendes? [Refiriéndose al profesor]. En ese momento, dije a los estudiantes que en GeoGebra también era posible hacer el gráfico tridimensional del envase. Por lo que podrían, a medida que hacen variar alguna de las dimensiones, ver cómo cambia en conjunto todo el envase. P: […] Ya vamos a ver, cuando yo mueva estos deslizadores, cómo cambia todo el objeto. […] Para que nos dé una idea de cómo va a quedar el envase. Que también lo hace… E4: Tinkercad. P: […] Y, en Tinkercad hay que hacer el trabajo, porque finalmente, el prototipo va a imprimir.	Es importante instar a los estudiantes a que relacionen funcionalmente todo el volumen del envase, con sus dimensiones.

<table>
<tr><td>Por último, invité a los estudiantes a que explorasen este programa, ya que es una buena manera de conocerlo y darse cuenta de sus potencialidades. Y agregué:

P: […] Y traten de poner allí [en GeoGebra] el trabajo que han hecho, para que empiecen a buscar esas relaciones […].

2. Cierre
Antes de finalizar, T solicitó que salidera del programa porque ella explicaría a los estudiantes cómo ingresar al aula virtual para descargar la tarea que podría allí sobre GeoGebra. Sin embargo, como el ordenador se bloqueó, ella debió explicar esto en la pizarra.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
Preparar una construcción tridimensional en GeoGebra, en la que los estudiantes puedan ver como se relaciona funcionalmente el volumen de un cuerpo, con sus dimensiones.
A los estudiantes, explorar el programa GeoGebra y llevar allí las expresiones que han usado para calcular el volumen del envase que están diseñando.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="10">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Feb. 22 del 2019</td><td>Hora</td><td>09:10-10:05</td><td>Clase</td><td>18</td><td>Investigador</td><td>Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="5">6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Feb22_2019</td></tr>
<tr><th colspan="10">Contextualización</th></tr>
</table>

Para la décimo octava clase los estudiantes continuaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI**.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

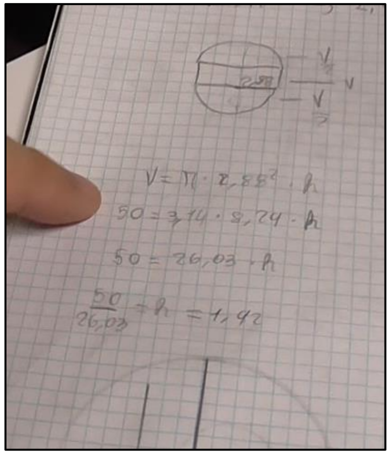
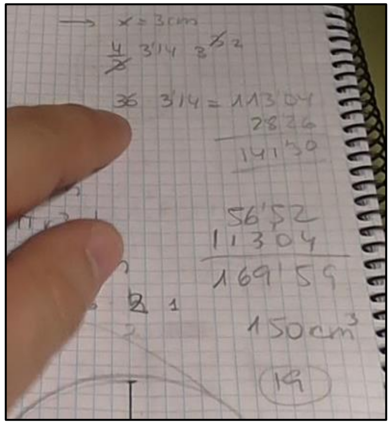
Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

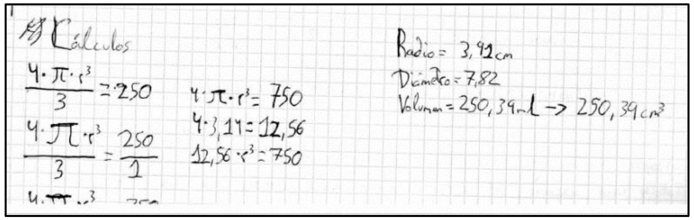
Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Luego de saludar a los estudiantes, les pedí que continuasen con el diseño del envase.	Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5 y E6.

2. El trabajo en los grupos A y B. <u>En el grupo A (E1, E2 y E3)</u> Me acerqué al grupo A para revisar el avance del diseño del envase. Entonces, recordamos que, al principio, los estudiantes habían fijado un volumen para su envase, pero después decidieron otorgar medidas he dicho envase y calcular su volumen.	
E1: primero pusimos el volumen y luego intentamos descubrir el radio, y luego vino T y nos dijo que primero… T: ¡Yo no dije nada! E1: Sí, te viniste con nosotros… dijo que primero cogiéramos el radio para que fuera todo más fácil. Para evitar que se generase una situación tensa entre los estudiantes y T, indiqué que la propuesta de la profesora era interesante y que aquí lo importante es encontrar un camino para poder avanzar. Así que pregunté:	Espero que la idea que T sembró en los estudiantes no vaya a constituirse en una restricción para la modelización espacio-geométrica.
P: ¿de qué volumen ha quedado el sólido? E1: cincuenta centímetros cúbicos (50 cm^3) Dado que los estudiantes estaban un poco confundidos, decidí formular algunas preguntas que sirviesen para dilucidar el proceso que han seguido para llegar a que su envase tiene el volumen que antes han indicado. Para ello, fuimos repasando los calculo que habían elaborado en su cuaderno.  P: veo que hay una mezcla de dos procesos. Aquí es donde han fijado primero el volumen [imagen de la izquierda]. E1: Sí. P: pero, aquí es donde han optado por otorgarle un valor al radio [imagen de la derecha]. Todos: Sí. 	Recordemos que el envase diseñado por los estudiantes se compone por dos semiesferas y un cilindro.

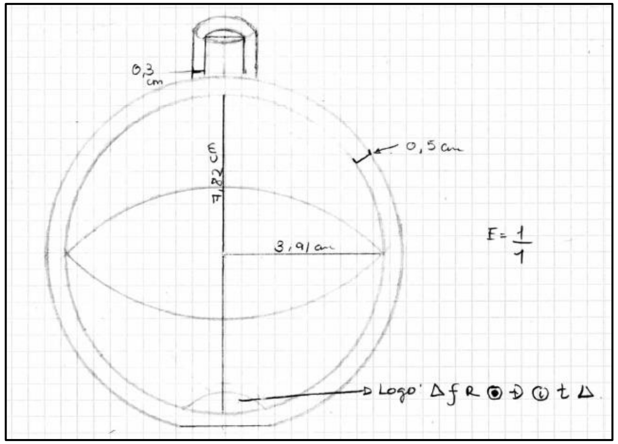
Es importante tener en cuenta que, al haber elegido un radio de 3 cm, el volumen de las semiesferas (o sea de la esfera) es de 113.04 cm^3. Y eso, sumado al volumen del cilindro que está entre las dos semiesferas, que es de 56.52 cm^3 ya que otorgaron una altura de 2 cm a dicho cilindro, hace que el volumen total del envase sea de 169.56 cm^3. Sin embargo, arguyeron que su envase contendría solo 150 ml porque, a veces, en los envases suele quedarse un espacio vacío. Entonces, les pedí que organizasen un poco el proceso seguido, ya que en la misma hora tenían, un poco entremezclada, la información de las dos opciones que habían considerado. Luego, pregunté cómo apoyarían el envase, por lo que los insté a que diseñasen una base.

<u>En el grupo B (E4, E5 y E6)</u>

Los estudiantes del grupo B, donde los estudiantes optaron por un envase con forma esférica con capacidad para 250 ml, pregunté cuál fue el proceso seguido hasta el momento e indicaron que primero habían elegido el volumen y luego habían calculado el radio de la esfera.



P: ¿cuál es el radio?
E5: tres con noventa y uno (3.91 cm).

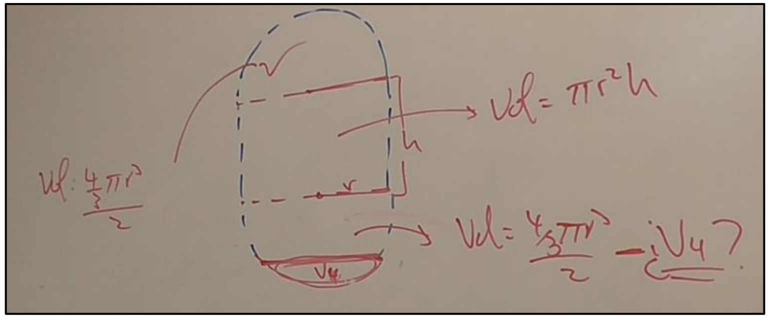


En ese momento recordamos que era necesario hablar con la profesora de tecnología para que ayudase a los estudiantes a hacer la impresión del envase, en una impresora 3D.

Entonces pedí a los estudiantes que elaborasen los planos del envase, indicando claramente sus medidas. Sin embargo, como ya habían avanzado con ello, les pedí que fuesen avanzando con el modelo en Tinkercad.

Además, le pedí a los estudiantes que fuesen avanzando con la elaboración del informa escrito. Enfaticé en que tratasen de describir lo mejor posible todo el proceso llevado a cabo durante el diseño del envase.
Dado que en el informe escrito los estudiantes deben argumentar por qué su envase es el mejor, surgieron algunas ideas que podrían servir para ello; entre ellas, buscar un contraejemplo con otra forma y comparar, por ejemplo, la cantidad de material que se usaría.

En este momento surgió la posibilidad de reservar la sala de tecnología para estudiar las características básicas del funcionamiento de GeoGebra. Posiblemente lo hagamos en la próxima clase.

<u>En el grupo A</u> Los estudiantes plantearon quitar un trozo a una de las semiesferas para, así, generar una base dónde apoyar su envase. Entonces, haciendo un bosquejo en la pizarra, los insté a que pensasen (y consultasen) cómo se puede calcular el volumen del envase, quitando un trozo a una de las semiesferas. O, mejor dicho, a una esfera.  **Importante**: pregunté a los alumnos cómo harían para, a partir del volumen que ya habían calculado, que su envase no bajase su capacidad por debajo de 150 ml al quitar ese trozo de esfera. El resto de la clase, los estudiantes continuaron con el trabajo grupal.	La idea con estos cuestionamientos es provocar en los estudiantes la necesidad de analizar las situaciones desde un punto de vista funcional.
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u> • Avanzar con la elaboración del informe escrito.	

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Feb. 26 del 2019	**Hora**	09:10-10:05	**Clase**	19	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.			**Aula**	19	**Videos**	V1_Feb26_2019 V2_Feb26_2019		

Contextualización

Para la décimo novena clase los estudiantes continuaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI**.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

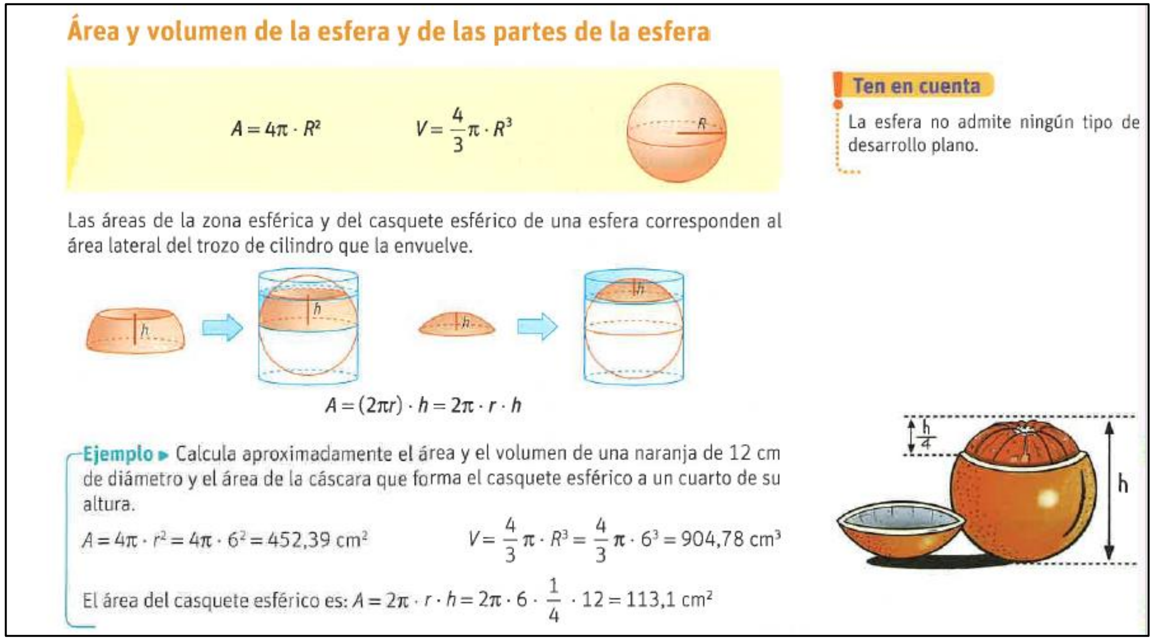
Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Saludé a los estudiantes y le pedía a T que, mientras yo revisaba el trabajo del grupo A, acompañase e los estudiantes del grupo B, ya que ellos deberían estar trabajando en la elaboración del informo final.	Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5 y E6.

2. El trabajo en los grupos A y B.

En el grupo A (E1, E2 y E3)
Recordemos que los estudiantes han decidido quitar una sección a su envase, para así general una base en la que apoyarlo. Ello implicó tener que averiguar cómo calcular el volumen de un casquete esférico.

P: ¿Han consultado cómo calcular este volumen?
E1: cuatro tercios pi por radio al cubo.
P: pero eso sería para calcular el volumen de toda la esfera.
E1: divido entre cuatro.
P: ¿Por qué?
E1: porque yo he visto en el libro que ponía altura partido de cuatro.
P: ¿tienes el libro allí?
E3: no.


Área y volumen de la esfera y de las partes de la esfera

$A = 4\pi \cdot R^2$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$

Ten en cuenta
La esfera no admite ningún tipo de desarrollo plano.

Las áreas de la zona esférica y del casquete esférico de una esfera corresponden al área lateral del trozo de cilindro que la envuelve.

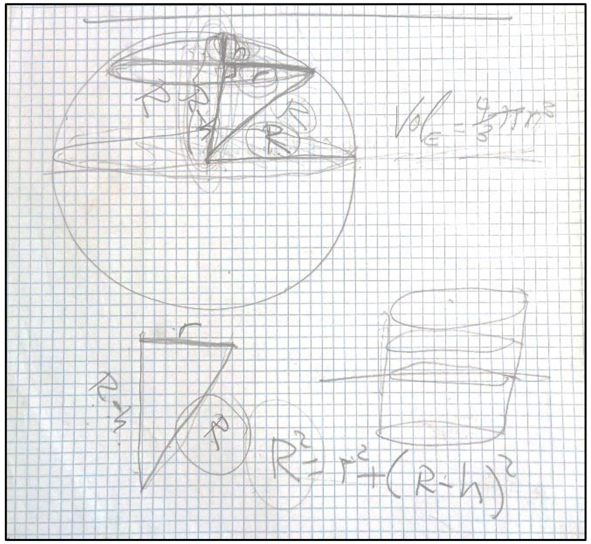
$A = (2\pi r) \cdot h = 2\pi \cdot r \cdot h$

Ejemplo ▸ Calcula aproximadamente el área y el volumen de una naranja de 12 cm de diámetro y el área de la cáscara que forma el casquete esférico a un cuarto de su altura.

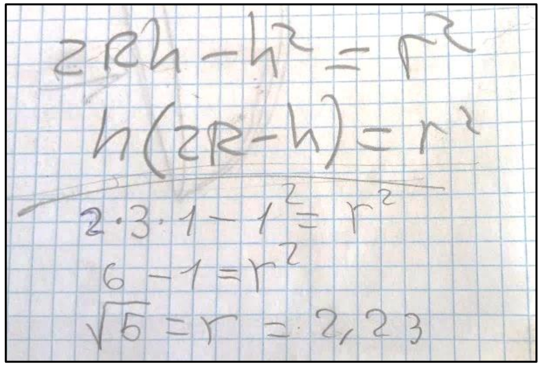
$A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 452{,}39\ \text{cm}^2$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 904{,}78\ \text{cm}^3$

El área del casquete esférico es: $A = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 12 = 113{,}1\ \text{cm}^2$

E1 se refería a este ejemplo que aparecía en el libro. Por tanto, dedujo que si la altura del casquete esférico fuese un cuarto de la altura [diámetro] de la esfera, entonces su volumen tendría que ser de un cuarto del de la esfera.

Entonces, insté a los estudiantes, mientras hacía un bosquejo de una esfera a la que se quitaba un “trozo” [casquete esférico], a que analizasen qué elementos estaban allí implicados. P: imaginemos que tenemos un plano que corta a la esfera y que es paralelo a su diámetro [a uno de ellos]. Hacia arriba o hacia abajo, por donde corta a la esfera, genera casquetes. De hecho, cuando pasa por la mitad genera dos casquetes, solo que cada casquete es la semiesfera. Entonces, indiqué que este no era un cuerpo en el que el plano, del que había hablado, generaría secciones de la misma área al moverse a través de este, como sí ocurre con el cilindro cuando dicho plano es paralelo a sus bases. Por tanto, en la esfera, el plano genera círculos cada vez más pequeños. Dicho esto, les propuso analizar el casquete esférico así:	Con esto lo que perseguí es que los estudiantes reflexionasen sobre el hecho que, dada la curvatura de la esfera, el volumen del casquete no variaría de la manera en que ellos los estaban pensando.
P: si llamamos h a la altura del casquete esférico, r a su radio y R al radio de la esfera, lo primero que tenemos que hacer es intentar relacionar esas variables. Entonces ahora, lo que nos interesa es saber cuándo mide h o cuánto mide r, puesto que el doble de r es la medida de la base del envase. Pero este cálculo necesitamos hacerlo en función de lo que conocemos, es decir, del radio de la esfera. Luego, señalando el bosquejo que iba construyendo, pregunté: P: ¿qué tipo de triangulo es este que tenemos acá? E1: rectángulo. E2: podríamos hacer el cálculo con Pitágoras. P: conocemos este cateto, que es r, pero ¿conocemos el otro? E1: sería R menos h [r-h] P: o sea que ya tenemos una forma de relacionar, el radio mayor [R], el radio menor [r] y h. Entonces, enfaticé en que es importante esta relación porque, en el envase, es importante calcular el volumen del casquete o conociendo r o conociendo h, puesto que ya tienen el valor de R. P: si aplicamos el teorema de Pitágoras, entonces, ¿Qué seria R? 	Recordemos que el valor del radio de la esfera ya había sido definido por los estudiantes.

Entonces, en conjunto, fuimos estableciendo la ecuación $R^2 = r^2 + (R-h)^2$. Luego, insté a los estudiantes a que despejasen el valor de r o de h en dicha ecuación. Para ello, fui preguntando y escribiendo las respuestas de los estudiantes, hasta que obtuvimos la ecuación $h(2R-h) = r^2$. De otra parte, como los estudiantes habían definido el valor de R en 3 centímetros, y dijeron que querían otorgar un valor de 1 centímetro para h, entonces les invité a calcular el valor de h. Sin embargo, también los insté a que pensasen en los posibles valores que h podría asumir.



P: ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar h?
E1: no puede llegar a 3.
P: la máxima incluso seria 3.
E1: porque es el radio.

De otra parte, les hice notar a los estudiantes que, calcular el volumen del casquete no era el final del problema, porque habría que calcular el valor del resto de la semiesfera. Por tanto, les pedí que avanzasen. Con lo cual, otorgaron un valor a h, para calcular r.

<u>En el grupo B (E4, E5 y E6)</u>
Recordemos que T estaba acompañando al grupo B mientras yo hablaba con los estudiantes del grupo A. Así que, cuando pregunté por el trabajo que venían llevando a cabo, T indicó que, como en este grupo ya habían avanzado un poco con la elaboración del informe escrito, pero de modo un poco segmentado, pues distribuyó el trabajo para que cada uno de ellos se ocupase de apartados diferentes de dicho informe. Así, por ejemplo:

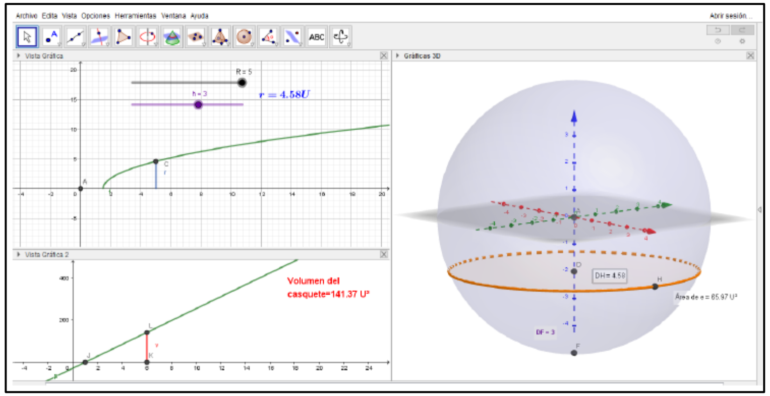
- E4: se estaba ocupando de la elaboración de los planos del envase.
- E5: estaba describiendo el proceso de construcción, ya que él había hecho el diseño en Tinkercad.
- E6: estaba escribiendo la argumentación sobre porqué el envase diseñado era el mejor. Dentro de dichos argumentos, se encontraban, la elegancia, el atractivo, la comodidad y que casi no se ven envases con esta forma en el mercado.

Aproveché este momento para plantear a los estudiantes, con base en las discusiones que tuve con el grupo A, el cuestionamiento en torno a la validez de las fórmulas; en concreto, a la fórmula para calcular el volumen de la esfera. Entonces les mencioné el principio de Cavalieri y les entregué, a ellos también, una copia de la información que le proporcioné al grupo A y les pedí que leyesen y analizasen dicha información para la próxima clase.

Los estudiantes decidieron otorgar un valor de 1 cm a h, para calcular r. Así, r=2.23 cm. Con lo cual, la base del envase sería de 4.46 cm.

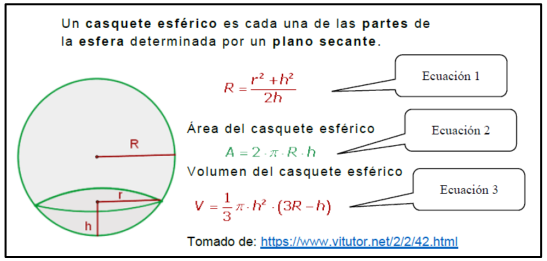
Este día entregue a los estudiantes de este grupo una copia de la sesión del libro de Emma Castelnuovo, en el que se explica cómo calcular el volumen de una esfera usando el principio de Cavalieri. Lo estimé necesario para que ellos tuviesen acceso a una técnica que les permitiese analizar el problema desde otra perspectiva.

E5 se comprometió a hablar con la profesora de tecnología, para ponerse de acuerdo sobre la impresión del modelo del envase.

<table>
<tr>
<td>
<u>En el grupo A (E1, E2 y E3)</u>

Con la ayuda de mi ordenador, presenté a los estudiantes una construcción en GeoGebra, que había preparado previamente, en la que aparecía el volumen de un casquete esférico en función de su altura [h], una vez fijado el radio [R] de la esfera.

Esto lo hice para mostrar las relaciones funcionales desde un punto de vista dinámico. Esta construcción la compartiré con T, para que la ponga en el aula virtual, de manera que los estudiantes tengas acceso a ella.

Luego, también enseñé esta construcción a los estudiantes del grupo B.
</td>
<td>
Como puede verse, en esta implementación del REI resaltamos el uso de GeoGebra para ilustrar las relaciones funcionales implicadas en el diseño del envase. Junto con esta construcción, también compartí con los estudiantes las ecuaciones que usé para el cálculo del volumen del casquete esférico.



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>

T pondrá la construcción en GeoGebra en el aula virtual.
Continuar con el diseño del envase y con el informe.

</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS									
Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Mar. 5 del 2019	**Hora**	09:10-10:05	**Clase**	20	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Mar05_2019

Contextualización

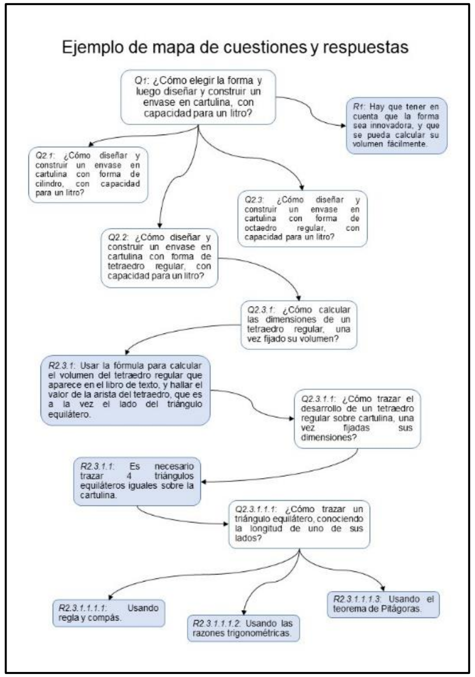
Para la vigésima clase los estudiantes continuaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI**. Además, les presenté un ejemplo de mapa de cuestiones y respuesta, para que pudiesen elaborar sus propios mapas a propósito de las tareas abordadas.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.



Mapa de cuestiones y respuestas elaborado a partir de la segunda tarea que los estudiantes abordaron en la primera implementación del REI.

Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Saludé a los estudiantes y les propuse que, antes de continuar con la revisión del trabajo realizado, recordasen las preguntas más importantes que han surgido durante cada una de las tareas que hemos abordado, porque con dichas preguntas iban a elaborar un mapa de cuestiones y respuestas. Para ello, les presenté un ejemplo de un mapa de cuestiones y respuestas, construido a partir de la segunda tarea propuesta en la primera experimentación del REI, sobre el diseño de un envase que pudiera contener un litro. Luego, les pedí que fuesen construyendo dichos mapas en casa, como una tarea complementaria.	Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7.

En ese momento T dijo: T: no, no. Es más, el mapa este se entrega el viernes. E7: el vienes no hay jornada, estamos en huelga. T: Pues para el martes. ¡El mapa se entrega el martes! 2. El trabajo en los grupos A y B.	Como profesor, comprendo la postura de T. Sin embargo, confío en que el trabajo que se ha desarrollado hasta el momento provoque en los estudiantes un deseo genuino de elaborar las tareas propuestas.
<u>En el grupo B (E4, E5, E6 y E7)</u> Pregunté a los estudiantes por el avance el informe escrito y si tenían alguna duda. Dijeron que de momento no tenían dudas y que continuaban con la elaboración de dicho informe. Insistí en que era necesario que en el informe se diera cuenta de todas las consignas propuestas en la tercera tarea. Luego de ello, pedí a T que los acompañase mientras yo revisaba el trabajo del grupo A. <u>En el grupo A (E1, E2 y E3)</u> Antes de revisar el avance de este grupo, por solicitud de ellos mismos, hablamos con E5, del grupo B, para que les diese unas clases del manejo de Tinkercad, para que así ellos también elaborasen e imprimieses su diseño. E5 estuvo de acuerdo. De otra parte, los estudiantes integraron la información que les compartí en la clase pasada, sobre el cálculo del volumen del casquete esférico, al trabajo que ya venían llenado a cabo. Entonces, pregunté por el volumen del envase: P: ¿ya saben de qué volumen les queda todo el envase? E1: todavía no lo hemos calculado.	
Entonces, les insté a que sumasen los volúmenes de cada una de las partes que componen su envase. Para ello, les dije que usaran las fórmulas, que ya conocen. En resumen, los volúmenes hallados fueron: - Volumen de la semiesfera, 56.52 cm^3. - Volumen del cilindro, 28.26 cm^3. - Volumen del casquete esférico, 8.37 cm^3.	Para calcular el volumen del casquete esférico, los estudiantes usaron la ecuación: $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$. Con R=3 y h=1.
Luego de ello, sumaron los tres volúmenes, sin notar que el volumen del casquete debía ser restado del volumen de la semiesfera que estará en la base del envase. Por tanto, el volumen que obtuvieron fue de 93.15 cm^3. Sin embargo, este volumen no es correcto.	
Con la intención de que los estudiantes lograsen identificar el error cometido, les insté a plantearse la posibilidad de retomar la idea del volumen que inicialmente habían propuesto, y a calcular las medidas para dicho envase. Finalmente, ya cuentas con las "fórmulas" para ello. Sin embargo, los estudiantes dijeron que preferían otorgar las medidas al envase y calcular el volumen resultante.	Esto es característico de las tareas cerradas y directas que suelen plantearse en los libros de texto.

<table>
<tr>
<td>P: ¿Por qué prefieren este método [calcular el volumen a partir de las medidas del envase] y no el otro [calcular las medidas a partir del volumen del envase]?
E1: porque en el otro método tendríamos que desplazar muchas más incógnitas y es mucho más difícil. […] dado medidas a las incógnitas sacamos el volumen.

Entonces, insistí en que era necesario hacer os planos y, además, verificar que las medidas y los cálculos estén bien.

<u>En el grupo B (E4, E5, E6 y E7)</u>
Cuando me acerqué de nuevo a este grupo, vi que estaban trabajando en el mapa de cuestiones y respuestas, al mismo tiempo que avanzaban con el informe escrito.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
Elaborar los mapas de cuestiones y de respuestas.
Continuar con el informe escrito.</td>
</tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Mar. 12 del 2019	**Hora**	09:10-10:05	**Clase**	21	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	8 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Mar12_2019

Contextualización

Para la vigésima primera clase los estudiantes continuaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI**.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.

Para realizar esta tarea, cada grupo de trabajo debe:

- Discutir y definir qué tipo de envase desea diseñar y construir, y qué criterios va a tener en cuenta para ello.
- Una vez definido el tipo de envase, esbozar su diseño en el cuaderno del grupo. Luego, escribir un plan de trabajo en el que se explique, entre otros, el proceso que es necesario seguir para diseñarlo, además de las herramientas utilizadas para ello (ejemplo: lápiz, regla, ordenador, etc.).
- Dibujar los planos del envase.
- Construir un prototipo del envase en el programa de diseño llamado Tinkercad, en escala 1:1.
- Escribir en el cuaderno de grupo el informe para la compañía Afrodita.
- Una vez terminado, exponer los resultados a la compañía Afrodita, donde se presente el prototipo del envase diseñado en el ambiente de Tinkercad, incluyendo las explicaciones puestas en el informe escrito.

Nota importante:

Se propone el diseño del envase en Tinkercad ya que todos los estudiantes manejan dicho programa, usado para diseñar e imprimir objetos tridimensionales, y, además, existe la posibilidad de hacer la impresión en el instituto. Por tanto, sugerimos que el envase diseñado se lleve a este programa justo después de la elaboración de los planos. Incluso si no fuese posible su impresión por algún motivo, esto nos serviría para el momento de la exposición que haremos ante nuestros compañeros.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo. Saludé a los estudiantes y les pedí que entregasen los mapas de cuestiones y de respuestas; además, pregunté por el avanza del informe escrito.	Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 y E8.

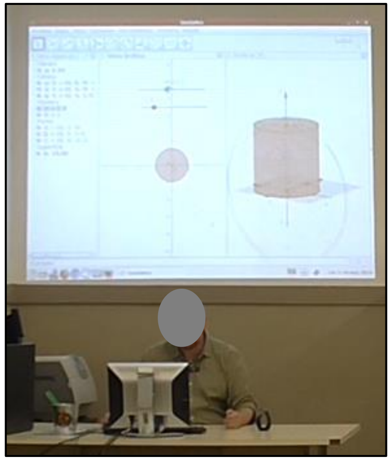
<table>
<tr>
<td>
2. El trabajo en los grupos A y B.

Dado que, especialmente en el grupo A, los estudiantes han invertido bastante tiempo en el cálculo de las medidas del envase, decidí que la mayoría del tiempo de esta clase se destinase a la elaboración de dicho informe.

<u>En el grupo A (E1, E2, E3 y E8)</u>
Los estudiantes dijeron que no estaban satisfechos con las medidas del envase, porque les quedaba muy chico. Entonces, los insté a que revisásemos el proceso que han seguido y les propuse:
- Buscar otras medidas para el radio de la esfera, la altura del cilindro y la altura del casquete.
- Fijar el volumen del envase y calcular sus dimensiones.

En el segundo caso, propuse sumar las ecuaciones que representan los volúmenes de cada una de las partes que componen el envase, e igualarlo 150 (volumen inicialmente pensado), y determinar qué valores deberían de asumir el radio de la esfera (R) y la altura del casquete (h) o su radio (r). Sin embargo, este fue el camino que los estudiantes evitaron desde el inicio. Sin embargo, les invité a intentarlo para ver si ello podría ayudarles a superar su insatisfacción sobre el tamaño del envase.
</td>
<td>
En esta clase los alumnos notaron el error al calcular el volumen del envase, pues dijeron que debían restar el volumen del casquete esférico a una de las semiesferas.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Continuar con la elaboración del informe.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Mar. 15 del 2019</td><td>Hora</td><td>09:10-10:05</td><td>Clase</td><td>22</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>Sala de ordenadores</td><td>Videos</td><td>V1_Mar15_2019</td></tr>
<tr><th colspan="12">Contextualización</th></tr>
<tr><td colspan="12">Para la vigésimo segunda clase trabajamos en la sala de ordenadores. Así, tuve la oportunidad de presentar a los estudiantes, un ejemplo de la manera en que varían las medidas de un sólido, en este caso un cilindro, cuando varia su volumen. Esto fue posible gracias a que, después de la última clase, T habló con la profesora te tecnología y consiguió prestada la sala de ordenadores para este día.</td></tr>
<tr><th colspan="8">Descripciones y transcripciones</th><th colspan="4">Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Saludo.
Saludé a los estudiantes y esperé a que la profesora de tecnología les diese las instrucciones de rigor sobre el uso y el cuidado de los ordenadores.


2. Sobre el trabajo en GeoGebra.
En esencia, expliqué el funcionamiento de algunas de las herramientas de GeoGebra 3D y del funcionamiento de los deslizadores. Luego, graficamos un cilindro, anclamos su radio y altura a dos deslizadores, uno para cada variable, y les insté a explorar lo que ocurría cuando se manipulan los deslizadores. Luego, con la ayuda de este software geométrico, calculamos el volumen del cilindro y vimos qué ocurría cuando su radio y/o su altura variaban.

Luego, repetimos la experiencia, esta vez, combinando varios algunos sólidos. Por ejemplo, un cilindro al que acoplamos dos esferas, una en cada base de mono que sus radios coincidían.

3. Cierre.
Pedí a los estudiantes que guardasen la construcción que habían hecho y que la enviasen a sus correos para que continuasen explorándolas en casa.</td><td colspan="4">Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5 y E7.

De esta experiencia destaco que los estudiantes conocieron las herramientas básicas de GeoGebra, porque ello les permitirá explorar otras tantas herramientas por su cuenta.</td></tr>
<tr><td colspan="12"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Dado que GeoGebra es de uso libre, insté a los estudiantes a descargarlo, instalarlo y explorar sus herramientas en casa.</td></tr>
</table>

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS									
Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Mar. 19 del 2019	**Hora**	09:10-10:05	**Clase**	23	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez
Asistentes	7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.					**Aula**	19	**Videos**	V1_Mar19_2019 V2_Mar19_2019

Contextualización

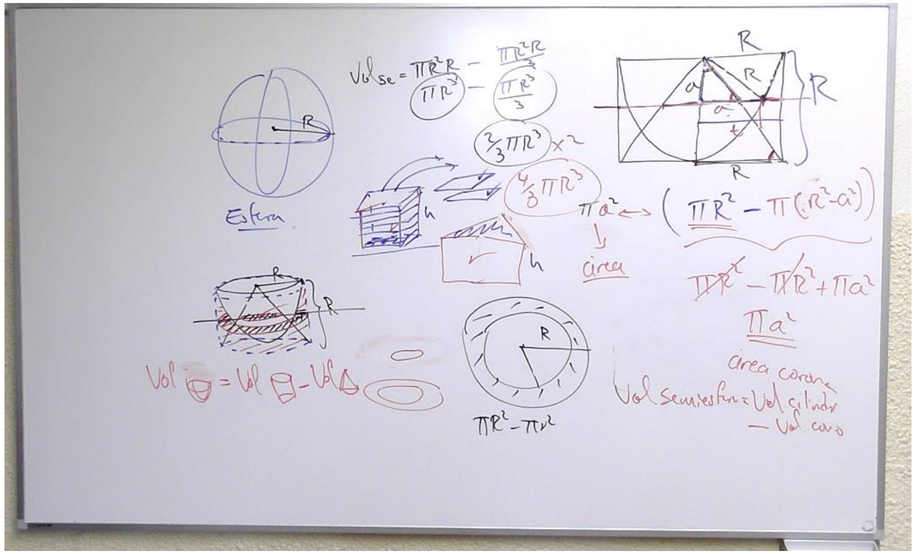
Para la vigésimo tercera clase los estudiantes continuaron con el diseño del envase para el perfume, que forma parte de la tercera **tarea del REI** y abordamos el estudio del volumen de una esfera a partir del principio de Cavalieri.

Esta fue la tarea fue previamente revisada y corregida por mi tutor.

El mejor envase

Consigna:

En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se explique su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes Afrodita.



Descripciones y transcripciones	Análisis, valoraciones e interpretaciones
1. Saludo. Saludé a los estudiantes, pregunté en qué punto estaba la elaboración del informe y les pedí que, además, preparasen una presentación en diapositivas, para exponer a sus compañeros el trabajo realizado durante la tercera tarea.	Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7.

<table>
<tr>
<td>
2. El trabajo en los grupos A y B.

<u>En el grupo B (E4, E5, E6 y E7)</u>
A propósito de la elaboración del informe, sobre los argumentos en torno a porqué es el mejor envase, les pedí que tuvieran en cuenta todos los argumentos que considerasen importantes y que presentasen, toda vez que fuera posible, los cálculos matemáticos que apoyen sus argumentos.

<u>En el grupo A (E1, E2, y E3)</u>
Les pregunté si habían hecho los cálculos matemáticos para calcular el volumen de su envase, teniendo en cuenta el error que notaron en la clase antepasada. Dijeron que sí, pero que el trabajo con el casquete esférico fue muy difícil.

P: ¿finalmente cuál es el volumen del envase?
E1: noventa coma ocho [90,8 cm^3].

Les pedí que pusiesen, de manera clara, todos los cálculos realizados en el informe escrito.

Dado en ambos equipos la esfera jugó un papel importante, aproveché para preguntar a todos los estudiantes si habían leído sobre el principio de Cavalieri. Información que les proporcioné ya hace varios días. Como no lo habían hecho, en la segunda mitad de esta clase estudiamos el volumen de una esfera usando dicho principio. Luego, hicimos un listado de los conocimientos que estuvieron involucrados en dicho estudio, entre ellos:
- Principio de Cavalieri.
- Teorema de Pitágoras.
- Fórmulas para calcular el volumen del cilindro y del cono.
- Triángulos isósceles y sus elementos.
- Teorema de Thales.
Destacamos la riqueza de este estudio, ya que vincula varios saberes que los estudiantes ya conocían.

3. Cierre.
Al final, quise plantear una pregunta para que los estudiantes reflexionasen:
P: ¿será que a través del principio de cava yo puedo demostrar el volumen del cilindro y el volumen del cono? Ya que aquí hubo cierta información que aceptamos como válida.
</td>
<td>
Cuando revisé los cálculos, noté que los estudiantes no simplificaron las ecuaciones, como lo habíamos mencionado antes. Esto puede deberse a que el trabajo algebraico suele ser poco cuestionado y muy mecanizado en la secundaria.

Esto lo hice para demostrar a los estudiantes que con los elementos matemáticos que conocen hasta este punto, según el currículo de secundaria, era posible demostrar que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
<u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Preparar las exposiciones finales, traer el informe escrito completo y hacer un listado de los elementos matemáticos y no matemáticos usados durante el desarrollo de las tres tareas que hemos abordado.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Mar. 24 del 2019</td><td>Hora</td><td>09:10-10:05</td><td>Clase</td><td>24</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Mar24_2019</td></tr>
<tr><th colspan="12">Contextualización</th></tr>
<tr><td colspan="12">Para la vigésimo cuarta clase revisamos el avance de los informes escritos y nos centramos en la respuesta de la pregunta:
¿Qué elementos matemáticos y no matemáticos usados en la solución de las tareas propuestas?</td></tr>
<tr><th colspan="8">Descripciones y transcripciones</th><th colspan="4">Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Saludo.
Saludé a los estudiantes, revisé las diapositivas de las presentaciones preliminares e hice algunas observaciones sobre el uso de los colores, del tamaño de los textos y de algunas imágenes, para que fuesen lo más claro posible para el resto de los estudiantes. Además, solicité a los estudiantes que incluyesen los cálculos matemáticos en las diapositivas, para que no tuviesen que escribirlos en la pizarra durante las exposiciones. También revisé el avance de los informes escritos e indiqué que ampliasen las descripciones de los procesos seguidos para dar cuenta del trabajo realizado.

2. Sobre los elementos matemáticos y no matemáticos usados en la solución de las tareas propuestas.
Para esta sección, utilicé los mapas de cuestiones y respuestas, que antes los estudiantes habían elaborado. Con lo cual, de dichos mapas he destacado:

De la primera tarea:
- La necesidad de clasificar algunos sólidos, para ello se definieron y aplicaron criterios de clasificación.
- Estudio de la simetría de algunos sólidos.
- Composición de sólidos mediante otros sólidos.

De la segunda tarea:
- Determinar la forma del envase.
- Calcular las medidas de un prisma recto si conocemos su volumen.
- Modelar el envase en un ambiente virtual.

De la tercera tarea:
- Revisar las formas de los envases habituales.
- Calcular el valor de una incógnita en una ecuación.
- relación entre capacidad y volumen.</td><td colspan="4">Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E8.

En esta clase enfaticé en la importancia de describir, en el informe escrito, el proceso de construcción, los argumentos y los cálculos matemáticos llevados a cabo en la tarea sobre el diseño del envase para un perfume.</td></tr>
<tr><td colspan="12"><u>Tareas propuestas y situaciones tener en cuenta:</u>
• Prepararse para las presentaciones finales y mejorar los informa escritos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Mar. 26 del 2019</td><td>Hora</td><td>09:10-10:05</td><td>Clase</td><td>25</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Mar26_2019</td></tr>
<tr><th colspan="12">Contextualización</th></tr>
<tr><td colspan="12">Para la vigésimo quinta clase los estudiantes del grupo B presentaron el trabajo final sobre el diseño del envase para el perfume.</td></tr>
<tr><th colspan="8">Descripciones y transcripciones</th><th colspan="4">Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Saludo.
Saludé a los estudiantes y le pedí a los integrantes del grupo B que iniciasen con la exposición.

2. La exposición.
Las consignas para las exposiciones son:
- Explicar por qué se ha elegido el envase.
- Mencionar sus características.
- Describir el proceso de construcción.
- Presentar los cálculos matemáticos empleados.
- Argumenta por qué es el mejor envase.

<u>La exposición del grupo B (E4, E5, E6 y E7)</u>
Los estudiantes de este grupo han dicho:

E7: hemos elegido este envase por su estética, porque no es común, porque es muy fácil de agarrar.
E4: tiene la forma esférica, tiene una base plana [que no fue incluida en los cálculos matemáticos], además de un difusor en la parte superior.
E5: el proceso de construcción ha durado unas tres o cuatro horas en Tinkercad y lo que se ha necesitado ha sido dos esferas, una que fuera un centímetro más grande que la otra. Luego, he necesitado varios cilindros, uno para el palito del difusor, el difusor.

Sobre los cálculos matemáticos, dijeron:
E5: queríamos una esfera que fuera de 250 ml, y se ha necesitado para ello la fórmula de la esfera. Y lo que había que hacer era poner que era igual a 250 y al hacer eso me daba de radio 3.91 cm, y de diámetro 7.82 cm. Y luego el volumen era, siempre en todos los recipientes se deja un poco de espacio, porque sino no cabría casi y lo abres y se derrama. Con lo cual, no es doscientos cincuenta (250) sino doscientos cincuenta con treinta y nueve (250.39)</td><td colspan="4">Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7.

Cuando verifiqué los cálculos noté que, al despejar el radio en la ecuación del volumen de la esfera, dado un volumen de 250 cm^3, el valor hallado es aproximadamente 3.907963 cm. Con lo cual, cuando los estudiantes aproximaron dicho valor a 3.91 y sustituirlo de nuevo en la ecuación, obtenían 250.39 cm^3. Claramente, no se cuestionaron sobre este asunto, sino que decidieron presentar el argumento del espacio de más.</td></tr>
</table>

Sobre por qué es el mejor envase, dijeron: E4: hemos planteado hacerlo con distintas formas, y eso lo explicaré un poco más adelante, pero, principalmente, por el agarre, por su estética, por el manejo de cálculo y por la capacidad. Lo hemos comparado con el cilindro, el cono y el cubo. Resumen de la comparación con las otras formas: - Cilindro: 220.33; Cubo: 139.017; Cono: 143.13 E4: la nuestra da muchísimo más material, pero al mantener un planteamiento ya no matemático, eso lo explicamos mejor en el informe, pues el cilindro era… E5: resbala más, es más difícil agarrar. E4: y en el cono hay una punta allí que no… Entonces pregunté: P: ¿Cuánto material se necesita para construir la esfera? E5: doscientos cuarenta y cinco con ochenta y cuatro centímetros cúbicos (245.84 cm^3) T: ¿no entiendo muy bien lo que es esa medida? E5: es el de fuera menos el de dentro. Entonces, pregunté si habían hecho lo mismo con las otras formas. Dijeron que: - En el caso del cilindro, al que atribuyeron un volumen de 250 cm^3, atribuyeron un valor para el radio (que fue el mismo que obtuvieron en la esfera, 3.91 cm) y calcularon la medida de la altura. Luego aumentaron un centímetro a dicho radio, calcularon el nuevo el volumen. Luego calcularon la diferencia entre esos dos volúmenes. De ahí los 220 cm^3 de material que se emplea en este envase. Luego, cuando E3 preguntó por la manera en que el envase se apoyaría, los expositores dijeron que a la esfera exterior de habían recortado una pequeña parte para general dicha base. Entonces les pregunté si habían tenido en cuenta dicho corte en el cálculo del material del envase, dado que habían dicho que restaron el volumen de la esfera interior de la exterior. Respondieron que no. E1: ¿Cómo habéis calculado para quitarle la base? E5: pues no se ha tenido cálculo. Si le quitas cero con dos centímetros [a la base], pues es muy poco [puesto que el grosor del envase en de 0.5 cm]. Terminamos esta exposición agradeciendo a los estudiantes por su trabajo.	Está claro que el manejo del cálculo se refiere a la facilidad de trabajar con una sola incógnita. Los estudiantes se estaban refiriendo, efectivamente, a la cantidad del material que se usaría para construir el envase. Hay que revisar muy bien esos informes escritos.
<u>Tareas propuestas y situaciones para tener en cuenta:</u> • La próxima clase tendrá la exposición del grupo A.	

<table>
<tr><th colspan="12">DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS</th></tr>
<tr><td>Institución</td><td>I.E.S. Cardenal Cisneros</td><td>Fecha</td><td>Abr. 2 del 2019</td><td>Hora</td><td>09:10-10:05</td><td>Clase</td><td>26</td><td colspan="2">Investigador</td><td colspan="2">Carlos Rojas Suárez</td></tr>
<tr><td>Asistentes</td><td colspan="7">7 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.</td><td>Aula</td><td>19</td><td>Videos</td><td>V1_Abr02_2019</td></tr>
<tr><th colspan="12">Contextualización</th></tr>
<tr><td colspan="12">Para la vigésimo sexta clase los estudiantes del grupo A presentaron el trabajo final sobre el diseño del envase para el perfume.</td></tr>
<tr><th colspan="8">Descripciones y transcripciones</th><th colspan="4">Análisis, valoraciones e interpretaciones</th></tr>
<tr><td colspan="8">1. Saludo.
Saludé a los estudiantes y le pedí a los integrantes del grupo A que iniciasen con la exposición.

2. La exposición.
Las consignas para las exposiciones son:
- Explicar por qué se ha elegido el envase.
- Mencionar sus características.
- Describir el proceso de construcción.
- Presentar los cálculos matemáticos empleados.
- Argumenta por qué es el mejor envase.

<u>La exposición del grupo A (E1, E2 y E3)</u>
Los estudiantes de este grupo han dicho:

E3: nuestro envase está formado por un cilindro, una semiesfera y un casquete esférico.
E1: para calcular el volumen de la semiesfera hemos utilizado el volumen de la esfera y lo hemos dividido entre dos. Y para que el envase tenga una base, hemos quitado un casquete esférico para poder apoyarlo. El cilindro lo hemos utilizado para que no fuera una esfera completa. Hemos dicho que la altura [del cilindro] sea de 3 y el radio sea de 2.
E3: algunas de las características de nuestro envase son, que no es muy grande, es un diseño que no se ha visto en el mercado…

Dado que la exposición no reflejaba el trabajo tan rico que se llevó a cabo a lo largo de estas últimas semanas en este grupo, comencé a formular algunas preguntas.

P: ¿Cómo decidieron las medidas del envase?
E1: al principio empezamos a poner medidas a los volúmenes para poder el volumen que queríamos, pero nos ponían muchos decimales el radio y al final iba a ser muy pequeño. Y preferimos coger las medidas para el radio y para la altura [del cilindro]. Preferimos coger valores enteros y que los decimales nos salgan con el volumen.</td><td colspan="4">Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7.

En realidad, los estudiantes quitaron, a una de las semiesferas, un casquete esférico.</td></tr>
</table>

P: ¿Creen que han adquirido algo nuevo en este proceso? E1: al principio comenzamos a hacer lo que ya sabíamos para no complicarnos tanto, pero nos comenzamos a complicar cuando quitamos el casquete esférico. Sí que hemos aprendido más cosas, la fórmula del casquete esférico. En resumen: Una vez calculado el volumen del casquete esférico, los estudiantes obtuvieron el volumen del envase sumando los volúmenes de la esfera y del cilindro, y restando el del casquete esférico, es decir, 113,04 + 56,52 – 29,3 = 140,26 cm^3. Este volumen no coincidía con el previsto de 150 cm^3, pero los alumnos no lo cuestionaron. Al finalizar, dije a los estudiantes que la próxima clase tendríamos el examen final. Además, que podrán usar sus apuntes y el libro se texto como apoyo para resolverlo.	Esto refleja una cierta falta, habitual, de cuestionamiento de los resultados obtenidos por parte de los alumnos.
<u>Tareas propuestas y situaciones para tener en cuenta:</u> • La próxima clase tendrá lugar el examen final.	

DIARIO DE CAMPO DE LA EXPERIMENTACIÓN REDARROLLADA EN EL I.E.S. CARDENAL CISNEROS

Institución	I.E.S. Cardenal Cisneros	**Fecha**	Abr. 23 del 2019	**Hora**	09:10-10:05	**Clase**	27	**Investigador**	Carlos Rojas Suárez	
Asistentes	6 estudiantes de 3º de la ESO, la profesora titular de la asignatura y el investigador.							**Aula**	19	**Videos** V1_Abr23_2019

Contextualización

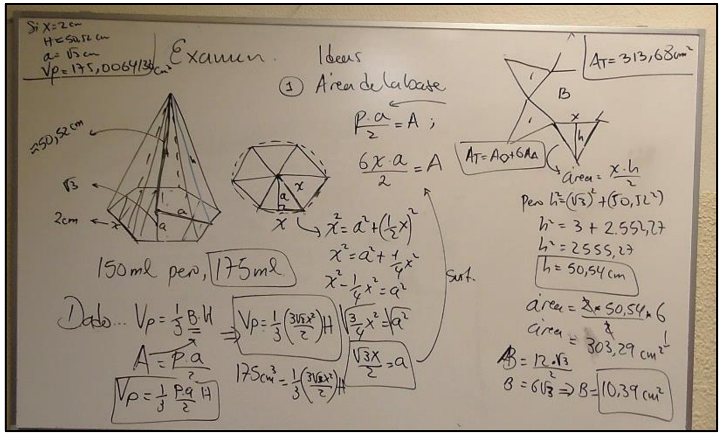
Para la vigésimo séptima clase, los estudiantes presentaron el examen final, que recoge, principalmente, los razonamientos tratados en la tercera tarea.

Descripciones y transcripciones	**Análisis, valoraciones e interpretaciones**
1. Saludo.	Hoy asistieron: E1, E2, E3, E4, E5 y E7.

Saludé a los estudiantes y les expliqué en qué consistía el examen. Les recordé que podrían hacer uso de sus apuntes y su libro de texto, si así lo deseaban.

2. Luego del examen.

Una vez que los estudiantes terminaron el examen, presenté una posible solución. Y digo una posible solución porque la tarea propuesta, que consistió en calcular las medidas de una pirámide recta de base hexagonal regular, es tanto abierta como inversa. Con lo cual, no hay una única solución.



Por último, me despedí de los estudiantes y les agradecí por su disposición para participar de este trabajo que hemos llevado a cabo a lo largo de 27 clases.

<u>Tareas propuestas y situaciones a tener en cuenta:</u>

- En esta ocasión la tarea es para mí, puesto que revisaré, evaluaré y propondré una calificación a los exámenes presentados por los estudiantes.

ANEXO 9: Mapas de cuestiones y respuestas

Mapa de cuestiones y respuestas: Adivina cuál es el envase.

[redacted]

Q1: ¿Cuántos enveses tenemos en la foto?:

R1: Tenemos 11 envases

Q2: ¿Cuántos tipos de envases hay, y qué son?

R 2.1: Regulares

R2.2: Irregulares

Q3: Escribe a que grupo pertenece cada envase:

R3.1: Regular: 2, 5, 11

R.3.2: Irregular: 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10

Q4.1: ¿Porque son regulares?

Q4.2: ¿Porque son irregulares?

R4.1: Porque son prismas rectas.

R4.2: Porque no son prismas rectas.

Q5: Clasifica estos enveses irregulares en:

R5.1: Cilindro oblicuo: 1, 4, 7, 8

R5.2: Cilindro recto: 9

R5.3: prisma oblicuo: 3

Mapa de cuestiones y respuestas. [redacted]

Q1: ¿Cómo elegiremos la forma?

Q2.1: ¿De qué material será?

Q2.2: ¿Que capacidad tendrá

R1: La forma debe de ser sencilla y práctica. Sencilla para la hora de construirla y práctica para los consumidores.

R.2.1.1 Utilitaremos cartulina y celo

R.2.2.1: Nosotros elegimos ~~que~~ contenga un litro

R.1.3: Nuestro envase esta compuesto por 2 caras planas poligonales, paralelas e iguales. Con tantas caras rectangulares como lados tiene cada Base

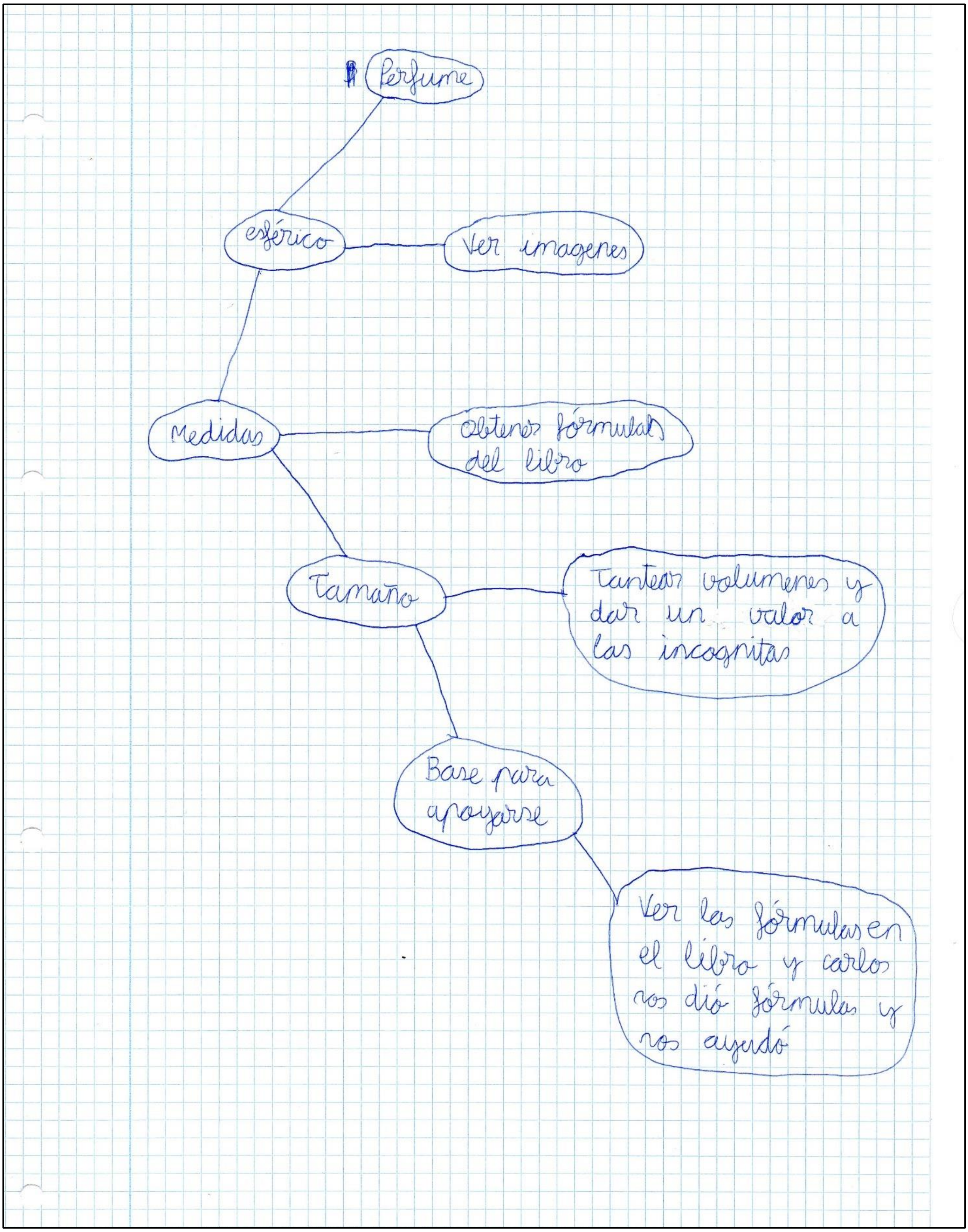
PROCESO DE CONSTRUCCIÓN

1. • Medimos las partes del brick
2. • Recortamos todas las partes
3. • Y finalmente pegamos todas las aristas con celo.

R. 2.2.2: Para que contenga un litro cogimos del libro la fórmula del volumen de un rectángulo que nos tenía que dar 1000cm^3

Q.3: ¿Que medidas utilitamos?

R.3.1: Para dos piezas 5x5 (las bases) para otras dos piezas 20 x 5 y para las otras dos restantes 20 x 10.


Perfume
esférico
Ver imagenes
Medidas
Obtener fórmulas del libro
Tamaño
Tantear volumenes y dar un valor a las incognitas
Base para apoyarse
Ver las fórmulas en el libro y carlos nos dió fórmulas y nos ayudó

Mapa de cuestiones.
Tarea 1.

[redacted]

Q1.1) Debemos elegir un envase de entre 11 propuestos por el profesor. ¿Cómo lo elegimos?

R1.1: Por estética elegimos el 3 porque era el que más nos gustaba

Q1.2) ¿Cuáles son los sólidos de los que parten cada uno de ellos?

R.1.2: La mayoría parte de cilindros, prismas o esferas

Q.2.1) ¿Qué deformación ha sufrido cada una de las piezas?

R.2.1: Se han doblado, plegado y estrujado.

Q.2.2) ¿En cuáles hay simetría?

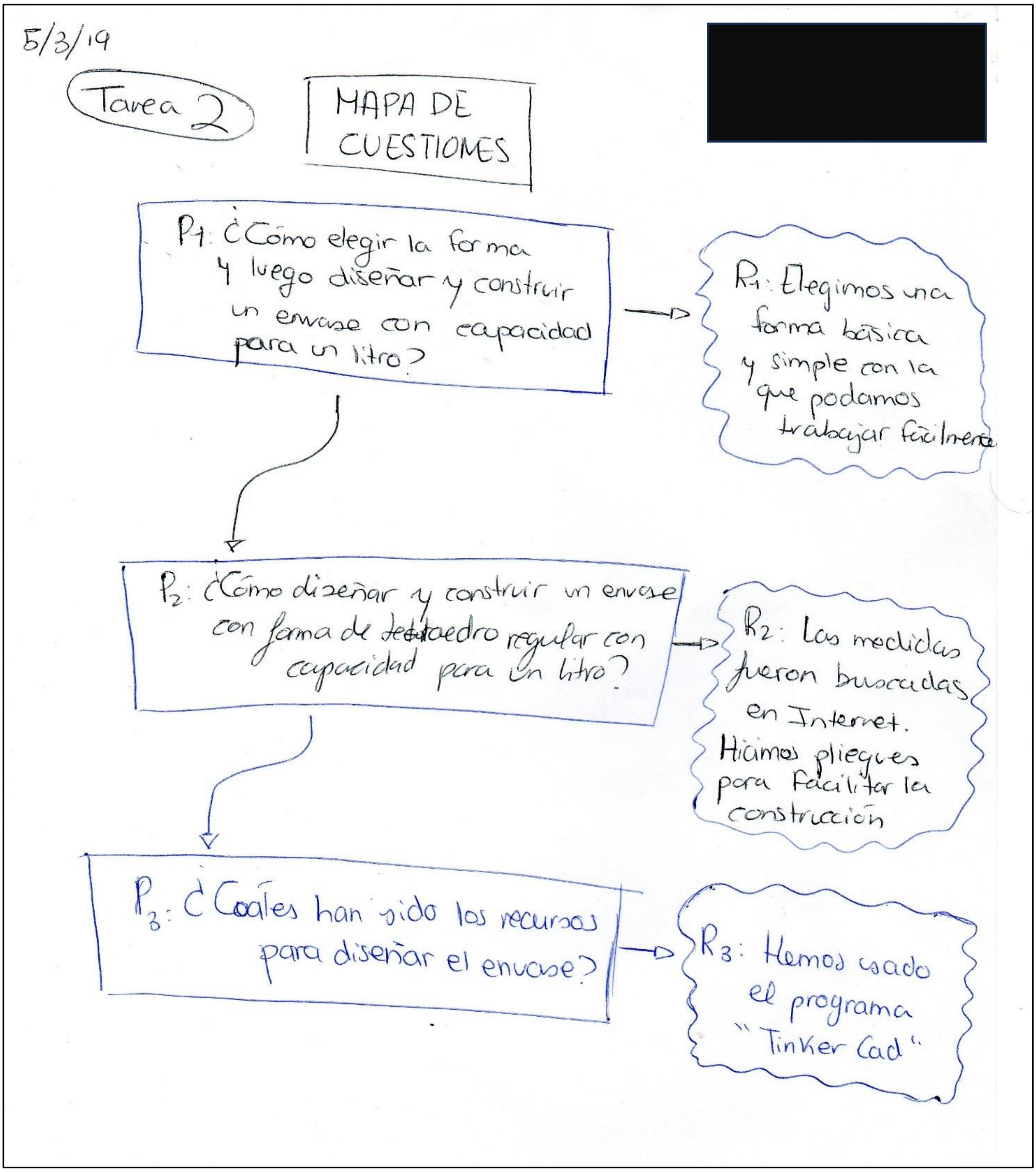
R.2.2: En las piezas 1, 3, 4, 5... todas salvo 10, 2 y 6.

Q.2.2.1) ¿Habrá otra forma de dar simetría sin partir por la mitad?

R.2.2.1: No se puede sacar geometría porque debe tener un eje.

Q.3.1) Si la mezcla es entre envases, ¿de cuáles vienen?

R3.1: Algunos vienen de una esfera (pieza 11), pero otras son el cuerpo geométrico general a diferente escala


5/3/19
[redacted]
Tarea 2
MAPA DE CUESTIONES
P1: ¿Cómo elegir la forma y luego diseñar y construir un envase con capacidad para un litro?
R1: Elegimos una forma básica y simple con la que podamos trabajar fácilmente
P2: ¿Cómo diseñar y construir un envase con forma de ~~tetra~~ octaedro regular con capacidad para un litro?
R2: Las medidas fueron buscadas en Internet. Hicimos pliegues para facilitar la construcción
P3: ¿Cuáles han sido los recursos para diseñar el envase?
R3: Hemos usado el programa "Tinker Cad"

La empresa Afrodita nos plantea que hagamos la forma de un perfume.

Q1.¿Qué forma se ha elegido para este envase

R2. Un envase con forma esférica

XR.2 Un envase con forma ortoédrica

Q2¿Por que se ha elegido dicho envase?

R2.1 Por su sencillez

R2.2. Por su agradable agarre

R2.3 Para salirnos del típico envase ortoédrico y que se tengan más con forma esférica

Q3.¿Cuál es su capacidad?

R3. 250 mL

Q4¿Qué objetos se han necesitado?

R4. Se han necesitado 2 esferas, varios cilindros, tubos, un toroide con altura distorsionada, un prisma rectangular

Q5¿Qué medidas han sido necesitadas?

R5.1 Radio interior y exterior

R5.2 3,91 cm de radio

R5.3. 1 cm de altura del to

R54, 90 cm de altura total. (Dispensador incluido)

ANEXO 10: Informe final presentado por el grupo A

~~INFORME~~ informe

A) ¿Porqué elegimos este envase?
¿Qué características tiene?

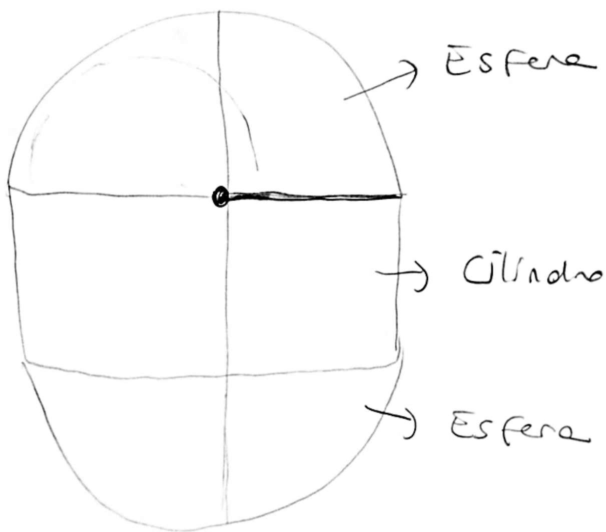
Elegimos este envase principalmente por su forma y diseño, es única y exótica.

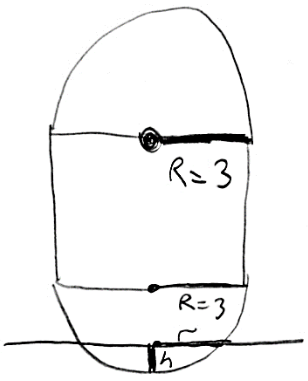
Características

Es constituido por:
- Una semiesfera,
- un cilindro,
- y un casquete esférico.

B) Los planos y cálculos del envase

Los planos: (y los cálculos)





$$R^2 = r^2 + (R-h)^2$$

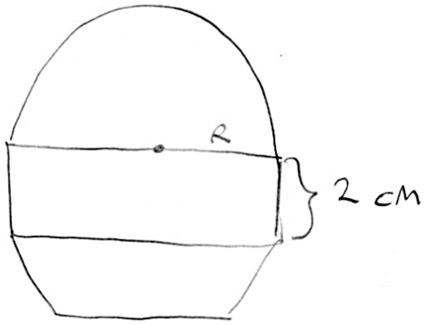
$$\cancel{R^2} = r^2 + \cancel{R^2} - 2Rh + h^2$$

$$0 = r^2 - 2Rh + h$$

$$2Rh - h^2 = r^2 \qquad h(2R-h) = r^2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 1 - 1^2 = r^2$$

$$6 - 1 = r^2 \qquad \sqrt{5} = r = 2,23$$



$R = 3\ cm$

$r = 2,23\ cm$

$h = 2\ cm$

$$V_T = 90,8\ cm^3$$

$$V_T = V_{semiesfera} + V_{cilindro} + V_{casquete\ esférico}$$

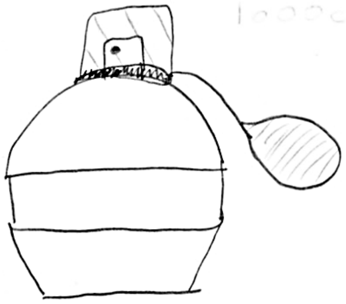
$$V_{esfera} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 3^3 = 63,58\ cm^3$$

$$V_{casquete} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot (3 \cdot 3 - 2)}{3} = \frac{12,56 \cdot 7}{3} = \frac{87,97}{3} =$$

$$29,3\ cm^3$$

$\therefore V_{perfume} = 63{,}58\ cm^3 - 29{,}3\ cm^3 = 34{,}28\ cm^3 + 56{,}52 = 90{,}8\ cm^3$

$3V_T = 90{,}8\ cm^3$



* Cristal
* color rosa

"UBAXYO"

C) Su proceso de construcción

* Al principio nosotros elegimos dos semiesferas y un cilindro pero decidimos cambiar una semiesfera en un casquete esférico ya que sin él no teníamos dónde apoyarlo.

* primero hallamos el radio
* Después elevamos el radio al cubo
* Multiplicamos el radio elevado al cubo por 3/4.
* Finalmente multiplicamos la ecuación por π.

Como nosotros queríamos que la las semiesferas fueran iguales decidimos dividirlo entre dos aunque como ya dicho antes convertimos una de ellas en un casquete esférico.

Para calcular el volumen del cilindro utilizamos la fórmula = ($\pi R^2 h$)

* Hallamos el radio de la base circular. podemos utilizar la base de cualquiera de los dos círculos ya que son del mismo tamaño.

* Calculamos el área de la base circular. Para hacerlo utilizamos su fórmula = (πr^2)

* Hallamos la altura del cilindro

* Multiplicamos el área de la base por su altura.

D) ¿Porqué nuestro envase es el mejor?

Este envase nos pareció perfecto ya que no es ni muy grande, ni muy pequeño, y por lo que hemos buscado en Google y en el mercado no hay otro igual.

ANEXO 11: Revisión del examen realizado por el estudiante E1 al final de la segunda implementación del REI

Examen individual

Nombre: [redacted]

Un equipo consultor ha diseñado un envase con forma de pirámide regular de base hexagonal, con capacidad para 150 mililitros (ml), como se muestra en la figura 1. Sin embargo, el jefe de producción de la empresa que solicitó el diseño necesitaba que dicho envase, con la misma forma, tuviese una capacidad de 175 ml. Por tanto, se nos ha encomendado la tarea de calcular las medidas que debería tener este envase para que su capacidad sí sea de 175 ml, y el área superficial para poder saber la cantidad de papel necesaria que permita trazar su desarrollo plano (ver la figura 2).

Nota: Escriba claramente todo el proceso que ha seguido para realizar la tarea propuesta.

Figura 1. Pirámide regular de base hexagonal

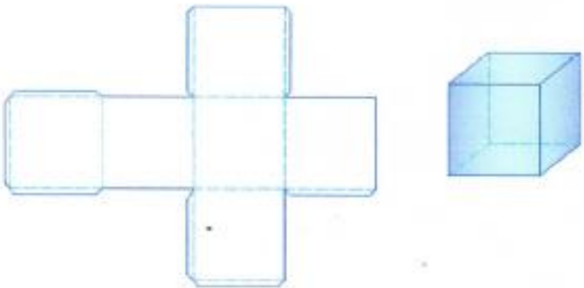


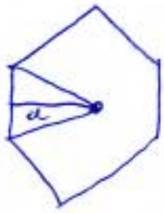
Figura 2. Ejemplo del desarrollo plano de un cubo

Ten en cuenta:

- El volumen de una pirámide (Vp) se puede calcular con la fórmula $Vp = \frac{1}{3}BH$, siendo B el área de la base, y H la altura de la pirámide.
- El área (B) de cualquier polígono regular se puede calcular con la fórmula $B = \frac{1}{2}pa$, siendo p el perímetro, y a la apotema de dicho polígono.

[redacted]

Área hexágono $= \frac{p \cdot a}{2} = 267,5\ cm^2$



$H = 2cm$

$p = 175\ cm$

$a = 3\ cm$

$l = 29,17\ cm$

V pirámide $\frac{\left(\frac{p \cdot a}{2}\right) \cdot H}{3} = 175\ cm^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{175 \cdot 3}{2} = \left(\frac{p \cdot a}{2}\right)$

$p = 175$

$175 = \overset{6}{n} \cdot l \Rightarrow$

$\frac{175}{6} = l = 29,17\ cm$

Área Hexágono $= \frac{p \cdot a}{2} = 267,5$

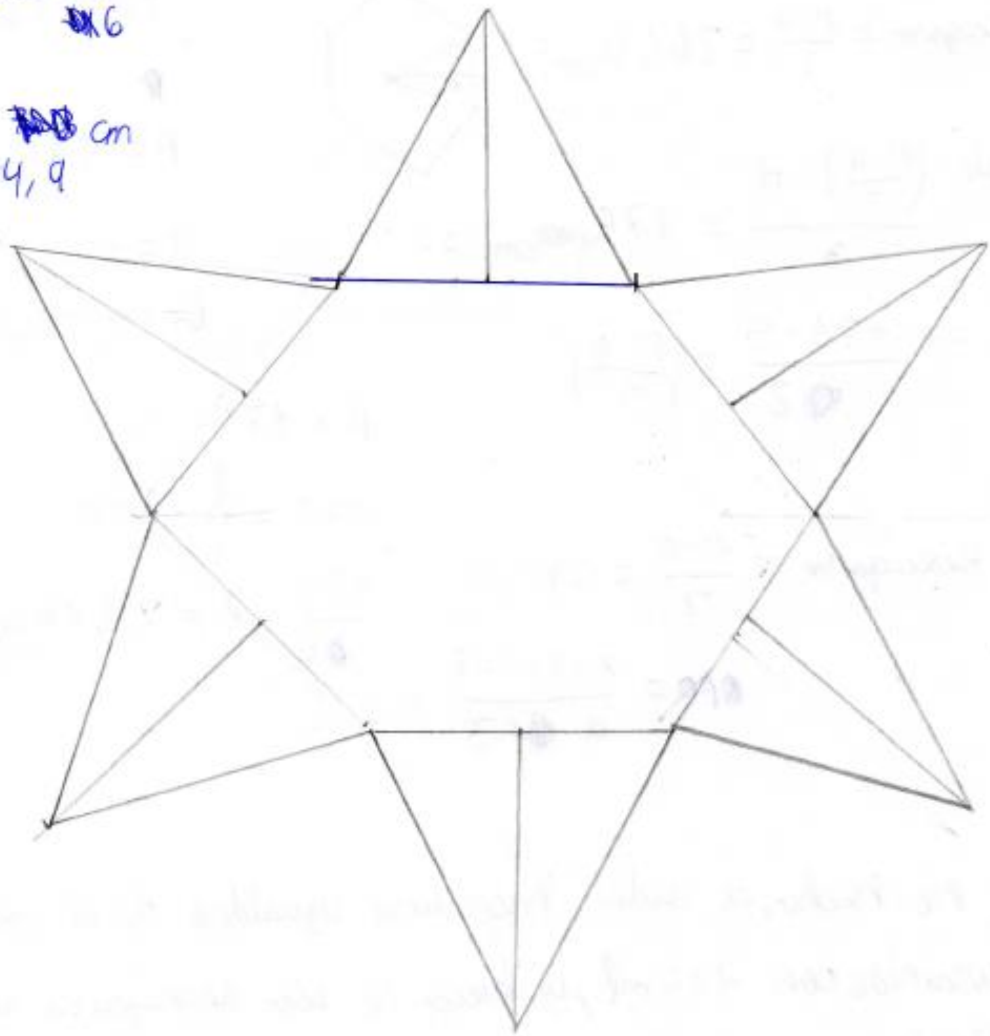
$p = \frac{262,5 \cdot 2}{a}$ $a = 3$

Lo que he hecho, a sido, hacer una igualdad de el volumen de la piramide con 175 ml, y luego he ido despejando el Área del hexágono poniendo un valor de 2cm a la altura y para descubrir también la medida de el ~~Área del hexágono~~ perímetro y el apotema, he tenido que hacer una igualdad con 262,5 que es lo que me ha dado con despejarlo en el volumen, entonces, he puesto valor a el apotema y me ha dado el valor del perímetro.

n = nº lados $\qquad$ l = medida del lado

$E = \frac{1}{6}$

$l = 4,9$ cm



se me olvidó ponerlo en la otra cara

$A_{pirámide} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_p + a_b)$

$a_p^2 = 2^2 + 3^2$

$a_p = \sqrt{13} = 3,6$

$\frac{1}{2} \cdot 175 (a_p + 3)$

$\frac{175}{2} \cdot (3,6 + 3)$

$87,5 \cdot 6,6 = 577,5 \text{ cm}^2$

Revisión y evaluación del examen

[redacted] aquí encontrarás las observaciones que he hecho del examen que resolviste el pasado 5 de abril. En la copia adjunta de dicho examen verás estas observaciones numeradas y resaltadas en color amarillo.

Observaciones:

1. Aunque la idea de atribuir un valor de 2 cm a la medida de la altura de la pirámide para calcular el área de su base ha sido adecuada, erraste al atribuirle también un valor a la medida de la apotema de dicha base. Esto, porque existe una relación especial entre la apotema y el lado de un polígono regular. En este caso, en un hexágono regular, cuya relación es:

$$\frac{2a}{\sqrt{3}} = l$$

Fórmula 1

Esta relación significa que, si atribuimos un valor a la apotema del hexágono, entonces su lado medirá el doble de dicho valor partido entre raíz de tres. Por tanto, para que un hexágono regular tenga un área de 262,5 cm^2, su apotema debe medir aproximadamente 8,705 cm. Para calcular dicha medida, debemos sustituir la fórmula 1 en la relación que planteaste y despejar a, así:

$$p = \frac{262{,}5\ cm^2}{a}$$

$$a = \frac{262{,}5\ cm^2}{p}$$

$$a = \frac{262{,}5\ cm^2}{6l}$$

$$a = \frac{262{,}5\ cm^2}{6\frac{2a}{\sqrt{3}}}$$

$$a = \frac{262{,}5\ cm^2}{\frac{12a}{\sqrt{3}}}$$

$$a = \frac{262{,}5\ cm^2\sqrt{3}}{12a}$$

$$a^2 = \frac{262{,}5\ cm^2\sqrt{3}}{12}$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{262{,}5\ cm^2\sqrt{3}}{12}}$$

$$a \approx 8{,}705\ cm$$

Es por ello, por lo que la medida que otorgaste a la apotema (3 cm), no cumple con la relación planteada en la fórmula 1, ya que no es posible que un hexágono regular tenga simultáneamente una apotema de 3 cm y un área de 262,5 cm^2 (ver figura 1).

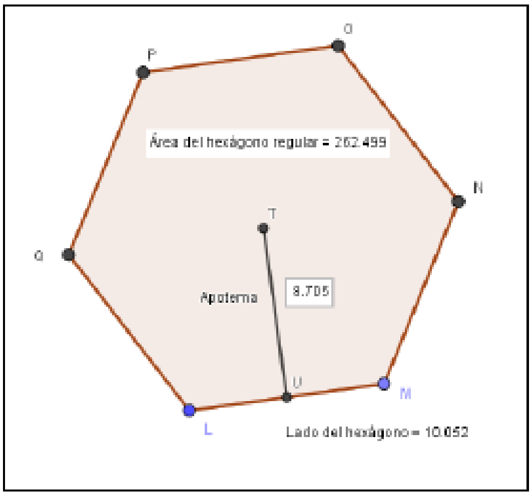


Figura 1. Hexágono regular de aproximadamente 262,5 cm^2.

2. Con base en la observación anterior, entenderás que ni el perímetro que has calculado (175 cm) ni la medida del lado (29.17 cm), se ajustan al hexágono regular de 262,5 cm^2 de área. No obstante, podríamos retomar la relación planteada en la fórmula 1 y calcular el valor del lado del hexágono a partir de la apotema que ya conocemos.

$$\frac{2(8{,}705\ cm)}{\sqrt{3}} = l$$

$$10{,}052\ cm \approx l$$

Luego, como sabemos que la base de la pirámide es un hexágono, podríamos calcular el perímetro multiplicando por seis el valor calculado, así:

$$p = 6l$$

$$p = 6(10{,}052\ cm)$$

$$p = 60{,}312\ cm$$

3. Por el procedimiento que has seguido para calcular el área total de la pirámide regular de base hexagonal, entiendo que has usado la información que aparece en tu libro de matemáticas (ver figura 2). No obstante, a pesar de que has interpretado correctamente dicho procedimiento y de que has calculado de manera adecuada la altura de los triángulos que conforman las caras laterales de la pirámide, el área total no se corresponde con las medidas de una pirámide de 2 cm de altura y de 262,5 cm^2 de área en su base.

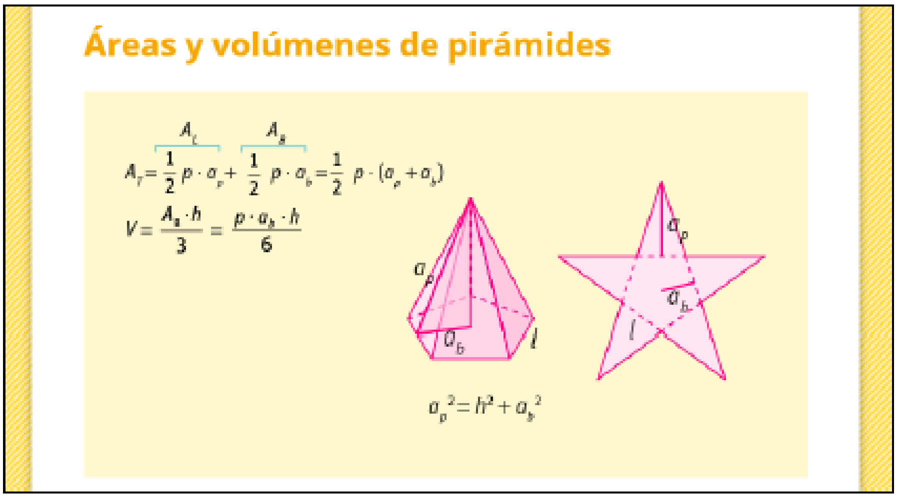


Figura 2. Técnica para calcular el área total de una pirámide. Tomado del libro: 3° ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Savia.

Por tanto, al usar la información que aparece en las observaciones 1 y 2, y al sustituirla en la fórmula empleaste para calcular el área total de la pirámide, tendríamos que:

$$a_p{}^2 = (2\ cm)^2 + (8{,}705\ cm)^2$$

$$a_p \approx 8{,}932\ cm$$

En este caso, a_p representa la altura de cada una de las caras laterales de la pirámide, a_b representa a la apotema de su base, y p representa el perímetro de dicha base. Ahora, tendríamos que:

$$A\ pirámide = \frac{1}{2} p(a_p + a_b)$$

$$A\ pirámide = \frac{1}{2} 60{,}312\ cm\ (8{,}932\ cm + 8{,}705\ cm)$$

$$A\ pirámide = 531{,}861\ cm^2$$

Como puedes ver, el área de la pirámide debería ser de 531, 861 cm^2.

Con base en las observaciones anteriores, considero que tu nota en este examen debe ser 7.0, porque:

1. El examen tiene dos partes: una enfocada al cálculo de las dimensiones del envase y la otra enfocada al cálculo de su área superficial. Cada una de estas partes vale la mitad del examen.
2. Aunque cometiste un error importante en la primera parte del examen, al desconocer la relación que existe entre la apotema y el lado de un hexágono regular, usaste adecuadamente el procedimiento que consultaste en el libro para calcular el área de la pirámide.
3. El error que cometiste en la primera parte del examen hizo que ni la medida de la apotema ni la medida del lado del hexágono regular, y por ende se su perímetro, fuesen correctas. Sin embargo, definiste un valor para la altura de la pirámide y calculaste bien el área de la base a partir de dicho valor. Aun cuando el área calculada no se corresponde con el de una pirámide de 175 cm^3, cuya altura es de 3 cm.

Por último, además de agradecerte por tu participación en este proyecto, confío en que tras leer la revisión que he hecho de tu examen, comprendas en qué te equivocaste, y más aún, en que dedicarás un tiempo para pensar en otras posibles soluciones al problema planteado.

Pronto recibirás por parte de tu profesora la dirección de una página web en la que podrás evaluar las clases que hemos tenido.

¡Muchos éxitos para el resto del curso [redacted]!

Cordialmente,

Carlos Rojas Suárez

ANEXO 12: Revisión del examen realizado por el estudiante E4 al final de la segunda implementación del REI

Examen individual

Nombre: [redacted]

Un equipo consultor ha diseñado un envase con forma de pirámide regular de base hexagonal, con capacidad para 150 mililitros (ml), como se muestra en la figura 1. Sin embargo, el jefe de producción de la empresa que solicitó el diseño necesitaba que dicho envase, con la misma forma, tuviese una capacidad de 175 ml. Por tanto, se nos ha encomendado la tarea de calcular las medidas que debería tener este envase para que su capacidad sí sea de 175 ml, y el área superficial para poder saber la cantidad de papel necesaria que permita trazar su desarrollo plano (ver la figura 2).

Nota: Escriba claramente todo el proceso que ha seguido para realizar la tarea propuesta.

Figura 1. Pirámide regular de base hexagonal

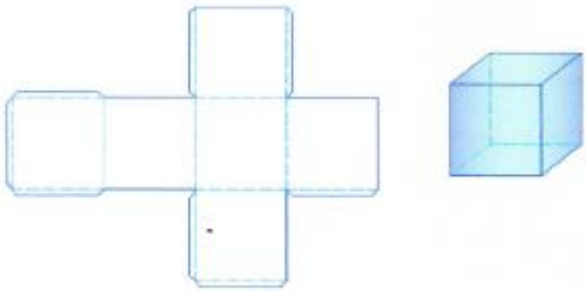


Figura 2. Ejemplo del desarrollo plano de un cubo

Ten en cuenta:

- El volumen de una pirámide (Vp) se puede calcular con la fórmula $Vp = \frac{1}{3} BH$, siendo B el área de la base, y H la altura de la pirámide.
- El área (B) de cualquier polígono regular se puede calcular con la fórmula $B = \frac{1}{2} pa$, siendo p el perímetro, y a la apotema de dicho polígono.

[redacted]

Desarrollo.

$V_p = \frac{1}{3} BH$

(2) $175 = \frac{1}{3} \cdot 52{,}5 \cdot 3$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{52{,}5}{1}\right) \cdot \frac{3}{1}$

$175 = \frac{52{,}5}{3} \cdot \frac{3}{1}$

$175 = \frac{157{,}5}{3}$

$175 = 52{,}5$ X

(1) $V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} \cdot 105 \cdot 1{,}\overline{3}$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{105}{1}\right) \cdot \frac{1{,}\overline{3}}{1}$

$175 = \frac{105}{3} \cdot \frac{1{,}\overline{3}}{1}$

$175 = \frac{136{,}5}{3}$

$175 = \underbrace{45{,}5}_{x}$ X

$\cancel{V_p = \frac{1}{3} \cdot 52{,}5 \cdot 3}$

$\cancel{V_p = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{52{,}5}{1}\right) \cdot \frac{3}{1}}$

$\cancel{V_p = \frac{52{,}5}{3} \cdot \frac{3}{1}}$

$\cancel{V_p = \frac{157{,}5}{3}}$

¿Volumen?

$\cancel{A_{base} = \frac{b \cdot h}{3} \cdot \frac{P \cdot ab \cdot h}{6}}$

(1) $V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B$ (5)

$\frac{525}{5} = B$

$\underbrace{105 = B}_{\text{Área de la base}}$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 105 \cdot H$

$175 = \frac{1}{3} \cdot 105 H$

$\frac{175}{105} - \frac{1}{3} = H$

35

$\frac{175}{105} - \frac{35}{105} = H$

$\frac{140}{105} = H$

$\underbrace{1{,}\overline{3} = H}_{\text{altura}}$

$\cancel{175 \cdot \frac{1}{3} \cdot 105 \cdot 1{,}\overline{3}}$

$\cancel{\left(\frac{175}{1} \cdot \frac{1}{3}\right)\left(\frac{105}{1} \cdot \frac{1{,}\overline{3}}{1}\right)}$

$\cancel{\frac{175}{1} \cdot \frac{136{,}5}{1}}$

$\cancel{23.887{,}5 \text{ cm}^3}$

~~volumen.~~

(2) $V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 10$

$\frac{525}{10} = B$

$\underbrace{52{,}5 = B}_{A_{base}}$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 52{,}5 H$

$175 \cdot \frac{1}{3} \cdot 52{,}5 H$

$\frac{175}{52{,}5} - \frac{1}{3} = H$

$17{,}5$

$\frac{175}{52{,}5} - \frac{17{,}5}{52{,}5} = H$

$\frac{157{,}5}{52{,}5} = H$

$\underbrace{3 = H}_{H}$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 105 \cdot 1{,}\overline{3}$

$V_p = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{105}{1}\right) \cdot \frac{1{,}3}{1}$

$V_p = \frac{105}{3} \cdot \frac{1{,}3}{1}$

$V_p = \frac{136{,}5}{3} = 45{,}5$?

(?)

③

$V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 15$

$\frac{525}{15} = B$

$\underbrace{35 = B}_{Ab.}$

$V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} \cdot 35 H$

$\frac{175}{35} \cdot \frac{1}{3} = H$

$\frac{175}{105} = H$

$\underbrace{1,\overline{6} = H}_{Altura}$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 35 \cdot 1,\overline{6}$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{35}{1}\right) \cdot \frac{1,\overline{6}}{1}$

$175 = \frac{35}{3} \cdot \frac{1,\overline{6}}{1}$

$175 = \frac{56}{3}$

$175 = 18$ cm^3 X

---

④

$V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 2$

$\frac{525}{2} = B$

$\underbrace{262,5 = B}_{A_b}$

$V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 \cdot \frac{1}{3} \cdot 262,5 H$

$\frac{175}{262,5} \cdot \frac{1}{3} = H$

$\frac{175}{787,5} = H$

$\underbrace{0,\overline{2} = H}_{H}$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 262,5 \cdot 0,2$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{262}{1}\right) \cdot \frac{0,2}{1}$

$175 = \frac{262}{3} \cdot \frac{0,2}{1}$

$175 = \frac{52,4}{3}$

$175 = 17,46$ X

---

⑤

$V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 20$

$\frac{525}{20} = B$

$\underbrace{26,25 = B}_{A_b}$

$175 : 2$

$87,5$

$V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 \frac{1}{3} \cdot 26,25 H$

$\frac{175}{26,25} \cdot \frac{1}{3} = H$

$\frac{175}{78,75} = H$

$\underbrace{2,22 = H}_{H}$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 26,25 \cdot 2,22$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{26,25}{1}\right) \cdot \frac{2,22}{1}$

$175 = \frac{26,25}{3} \cdot \frac{2,22}{1}$

$175 = \frac{58,275}{3}$

$175 = 19,495$

$V_p = \frac{1}{3} BH$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 105 \cdot 1{,}3$

$V_p = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{105}{1}\right) \cdot \frac{1{,}3}{1}$

$V_p = \frac{105}{3} \cdot \frac{1{,}3}{1}$

$V_p = \frac{136{,}5}{3}$

(6) $V_P = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = \cancel{B} B \cdot 3$

$\frac{525}{3} = B$

$175 = B$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 175 \cdot H$

$\cancel{175 = \frac{1}{3} \cdot \frac{175}{1}}$

$175 = \frac{1}{3} \cdot 175\, H$

$\frac{175}{175} - \frac{1}{3} = H$

$58{,}3$

$\frac{175}{175} - \frac{58{,}3}{1} = H$

$\frac{116{,}7}{175} = H$

$0{,}6 = \cancel{B}\, H$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 175 \cdot 0{,}6$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{175}{1}\right) \cdot \frac{0{,}6}{1}$

$175 = \frac{175}{3} \cdot \frac{0{,}6}{1}$

$175 = \frac{105}{3}$

$175 = \cancel{24}\, 102$

(7) $V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 4$

$\frac{525}{4} = B$

$131{,}25 = B$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 131{,}25\, H$

$175 = \frac{1}{3} \cdot 131{,}25\, H$

$\frac{175}{131{,}25} - \frac{1}{3} = H$

$43{,}75$

$\frac{175}{131{,}25} - \frac{43{,}75}{131{,}25} = H$

$\frac{131{,}25}{131{,}25} = H$

$1 = H$

~~[illegible] que se salen los cálculos [illegible] a 7 [illegible] no se sale el valor que debe salir, [illegible] que aplicar [illegible] el área se hace [illegible] la fórmula para averiguar el volumen del piramide.~~

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 131{,}25 \cdot 1$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{131{,}25}{1}\right) \cdot \frac{1}{1}$

$175 = \frac{131{,}25}{3} \cdot \frac{1}{1}$

$175 = \frac{131{,}25}{3}$

$175 = 43{,}75.$

~~... los cálculos~~ [redacted]

8

$150 = \frac{1}{3} BH$

$150 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{150 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 5$

$\frac{525}{5} = B$

$105 = B$

$V_p \; 150 = \frac{1}{3} BH$

$150 = \frac{1}{3} \cdot 105 H$

$\cancel{150 = \frac{1}{3} \cdot 105}$

$\frac{150}{105} \cdot \frac{1}{3} = H$

$\frac{150}{35} = H$

$4,28 = H$

$150 = \frac{1}{3} \cdot 105 \cdot 4,28$

$150 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{105}{1}\right) \cdot \frac{4,28}{1}$

$150 = \frac{105}{3} \cdot \frac{4,28}{1}$

$150 = \frac{450}{3}$

$150 = 150$

$175 : 3 = 35$

9

$V_p = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 3$

$\frac{525}{3} = B$

$175 = B$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 175 H$

V_p

$175 = \frac{1}{3} \cdot 175 H$

$\frac{175}{175} - \frac{1}{3} = H$

58,3

$\frac{175}{175} - \frac{58,3}{175} = H$

$\frac{116,66}{175} = \cancel{0,6}$

$0,6 = H$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 175 \cdot 0,6$

$175 = \frac{1}{3} \cdot 175 \cdot 0,6$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{175}{1}\right) \cdot \frac{0,6}{1}$

$\cancel{175 = \frac{175}{3}}$

$175 = \frac{175}{3} \cdot \frac{0,6}{1}$

$175 = \frac{105}{3}$

$175 = 35$

10

$175 = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{175 \cdot 3}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 35$

$\frac{525}{35} = B H$

$15 = B$

$V_p = \frac{1}{3} \cdot 15 H$

$175 = \frac{1}{3} \cdot 15 H$

$\frac{175}{15} - \frac{1}{3} = H$

$\frac{175}{15} - \frac{5}{15}$

$\frac{170}{15} = H$

$11,3 = H$

2

[redacted]

$Vp = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 11{,}3$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{1}\right) \cdot \frac{11{,}3}{1}$

$175 = \frac{15}{3} \cdot \frac{11{,}3}{1}$

$175 = \frac{170}{3}$

$175 \neq 56{,}67$

$Vp = \frac{1}{3} BH$

$175 = \frac{1}{3} BH$

$\frac{525}{1} = BH$

$\frac{525}{1} = B \cdot 262{,}5$

$\frac{525}{262{,}5} = B$

$2 = B$

$Up = \frac{1}{3} 2H$

$175 = \frac{1}{3} \cdot 2H$

$\frac{175}{2} - \frac{1}{3} = H$

(11) $\frac{525}{6} - \frac{2}{6} = H$

$\frac{523}{6} = H$

$87{,}16 = H$

$Vp = \frac{1}{3}\ 2 \cdot 87{,}16$

$175 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1}\right) \frac{87{,}16}{1}$

$175 = \cancel{1}\frac{2}{3}\cancel{1} \cdot \frac{87{,}16}{1}$

$175 = \frac{87{,}16}{3}$

$175 = 29{,}05$.

Lamento informar que los cálculos no me salen. Lo he intentado ya 11 veces y no llego a ninguna solución correcta. Lo que sí puedo hacer, es explicar cómo hacerlo.

1. Se emplea la fórmula para calcular el volumen de la pirámide

$Vp = \frac{1}{3} BH$.

2. El volumen definido es 175, se sustituye por Vp y despejamos a B u H probando diferentes nº

3. Una vez despejado B o H, se despeja la otra incógnita

4. Sustituimos todas las incógnitas con los datos que hemos sacado y nos tendría que dar el valor ya definido (cosa que no me sale), es decir.

$Vp = \frac{1}{3} BH$

$175 = 175$

mL o cm3.

(3)

Revisión y evaluación del examen

[redacted], aquí encontrarás las observaciones que he hecho del examen que resolviste el pasado 5 de abril. En la copia adjunta de dicho examen verás estas observaciones numeradas y resaltadas en color amarillo, las cuales se corresponden con los intentos que hiciste para calcular las dimensiones del envase, así como con la descripción final en la que sugieres un proceso de solución.

Observaciones:

1. La idea de atribuir un valor de 5 unidades a la altura de la pirámide (H), para así calcular el área de su base (B), es adecuada. Si embargo, debido al error operativo que cometiste en prácticamente todos los intentos, no lograste determinar un par de valores para estas variables, de modo que cumplieran con la relación establecida en la fórmula para calcular el volumen de una pirámide y que, además, hicieran que dicho volumen fuese de 175 cm^3.

   $$V_p = \frac{1}{3}BH$$ Fórmula 1

   El error al que me refiero apareció cuando despejaste equivocadamente la variable H, así:

   $$175 = \frac{1}{3}(105)H$$
   $$\frac{175}{105} - \frac{1}{3} = H$$
   $$\ldots$$
   $$1,\hat{3} = H$$

   Cuando lo correcto hubiese sido, por ejemplo:

   $$175 = \frac{1}{3}(105)H$$
   $$\frac{175(3)}{105} = H$$
   $$5 = H$$

   Lo que confirmaría la selección que has hecho de la altura.
2. En el segundo intento atribuiste un valor de 10 unidades a la altura de la pirámide, pero cometiste el mismo error que en el primer intento.

   $$175 = \frac{1}{3}(52{,}5)H$$

$$\frac{175}{52{,}5} - \frac{1}{3} = H$$

$$\ldots$$

$$3 = H$$

Cuando lo correcto hubiese sido, por ejemplo:

$$175 = \frac{1}{3}(52{,}5)H$$

$$\frac{175(3)}{52{,}5} = H$$

$$10 = H$$

Lo que, de nuevo, confirmaría la selección que has hecho de la altura.

3. En el tercer intento, a diferencia de los dos primeros, no restaste un tercio, sino que decidiste multiplicarlo. Pero igualmente, cometiste un error. Ya que tras atribuir un valor de 15 unidades a la altura de la pirámide y de calcular el área de la base en 35 unidades, erraste al despejar H:

$$175 = \frac{1}{3}(35)H$$

$$\frac{175}{52{,}5}\left(\frac{1}{3}\right) = H$$

$$\ldots$$

$$1{,}\hat{6} = H$$

Cuando lo correcto hubiese sido, por ejemplo:

$$175 = \frac{1}{3}(35)H$$

$$\frac{175(3)}{35} = H$$

$$15 = H$$

Por lo que, confirmaríamos, una vez más, que la altura seleccionada es coherente con la relación planteada en la fórmula 1.

4. Este error en la manera de despejar H, cometido en el tercer intento, lo repetiste también en el cuarto, quinto y octavo intento. En el sexto, séptimo, noveno, décimo y decimoprimer intento volviste a restar un tercio al despejar H, igual que en el primer y segundo intento. Es por ello, por lo que, en ninguno de los casos tras otorgar un valor a la altura de la pirámide y calcular el área de su base, lograste que al aplicar la

fórmula 1 obtuvieses un volumen de 175 cm^3. No obstante, más allá del error cometido, considero que sería interesante que te preguntases: ¿cómo se relacionan la altura de la pirámide y el área de su base? Posiblemente, ello te podría presentar otra vía de solución a esta parte del problema.

Para acercarte un poco a la respuesta a esta pregunta, he graficado en Geogebra la relación establecida en la fórmula 1, tras despejar *H* y sustituir el volumen por 175 (ver figura 1). De este modo, podremos ver cómo varía la altura de una pirámide de 175 cm^3, cuando varía el área de su base, así:

$$\frac{175(3)}{B} = H$$

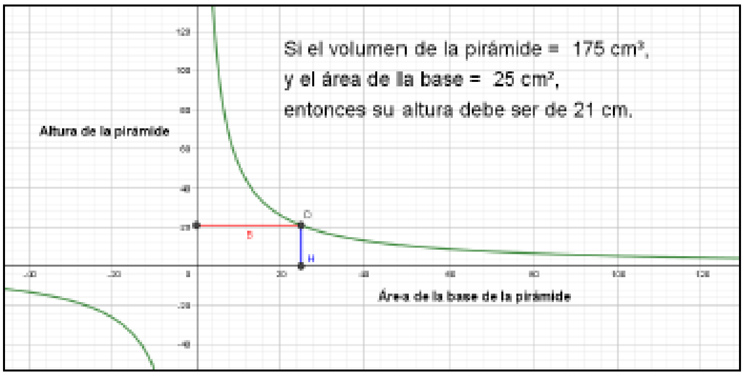


Figura 2. Gráfica de la elación entre el área de la base y la altura una pirámide de 175 cm^3.

Una primera idea que se obtiene al ver esta gráfica es que, cuanto más aumenta *B*, más disminuye *H* y viceversa. Pero, aún no sabemos cómo es ese cambio. La figura 3, en la que he duplicado el área de la base que aparece en la figura 2, te proporcionará una idea más clara al respecto.

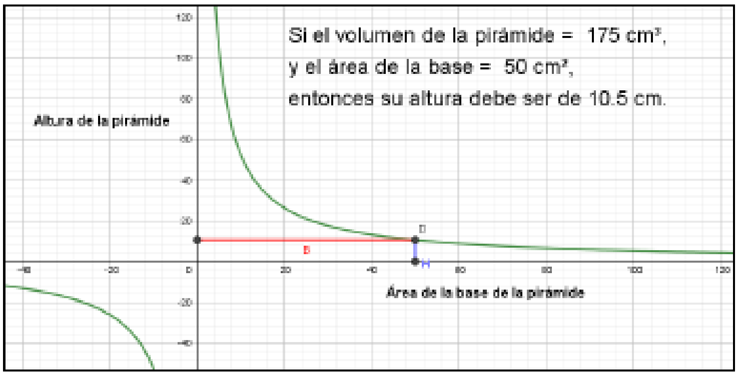


Figura 3. Gráfica de la elación entre el área de la base y la altura una pirámide de 175 cm^3.

Como puedes ver, al duplicarse el área de la base de la pirámide, su altura se redujo a la mitad. Ello nos conduce a pensar que, si el aérea se triplicase, entonces la altura se reduciría a su cuarta parte, y así sucesivamente. Pues bien, cuando ello ocurre en una relación como la que estamos estudiando, se dice que dicha relación es de proporcionalidad inversa. En este caso, podríamos decir que la altura de la pirámide es inversamente proporcional al área de su base. Ello significa que debe existir un producto constante que vincule dichas variables. En este caso, ese producto es 525, ya que, si tomamos los datos de la figura 1, tenemos que:

$$175(3) = HB$$

$$525 = (21)(25)$$

$$525 = 525$$

Y si tomamos los datos de la figura 2, tenemos que:

$$175(3) = HB$$

$$525 = (10{,}5)(50)$$

$$525 = 525$$

Puedes probar con otros valores para verificar el producto constante entre las variables B y H. Naturalmente, como dije antes, esta es solo una idea que te puede acercar a la relación que hay entre dichas variables, y, por tanto, constituye la punta del iceberg de lo que son las relaciones inversamente proporcionales. Confío en que te animes a profundizar en ello.

Por otra parte, y retomando el proceso que has seguido, aun cuando hubieses despejado correctamente la variable H para calcular el área de la base de la pirámide, te hubiese hecho falta definir qué medidas debería tener el lado y la apotema de dicha base, y cómo se relacionan estos elementos, ya que ello resultaría necesario para calcular el área superficial del envase. Lo cual, desde mi punto de vista, es la columna vertebral de este problema. Es decir que, no te cuestionaste ni por los elementos que intervienen en el área del hexágono regular ni por su relación. Dicha relación, se puede obtener al estudiar cualquiera de los seis triángulos equiláteros en que se puede dividir el hexágono regular, con la ayuda del teorema de Pitágoras, como aparece de manera resumida en la figura 3.

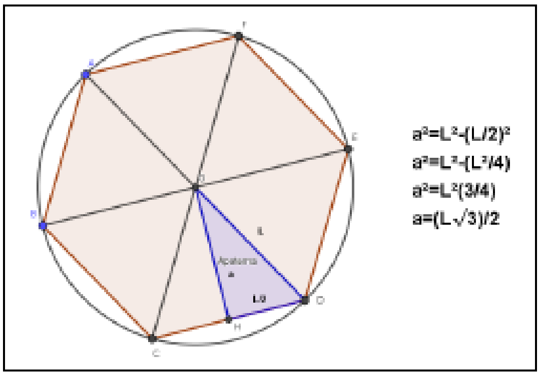


Figura 3. Relación entre la apotema y el lado en un hexágono regular.

Llamaré a esta relación, fórmula 2, así:

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$ Fórmula 2

Esta relación significa que, si atribuimos un valor al lado del hexágono, entonces su apotema medirá un tercio del producto entre dicho lado y raíz de tres. Por tanto, si retomamos y desarrollamos, por ejemplo, el primer intento que hiciste, en el que la altura de la pirámide era 5 cm, entonces una posible solución al problema sería:

$$V_p = \frac{1}{3}BH$$

$$175\ cm^3 = \frac{1}{3}B(5\ cm)$$

$$\frac{175\ cm^3(3)}{5\ cm} = B$$

$$105\ cm^2 = B$$

Ahora, usamos la fórmula para calcular del área de un polígono regular, y la equiparamos con 150 cm^2:

$$B = \frac{p * a}{2}$$ Fórmula 3

$$105\ cm^2 = \frac{p * a}{2}$$

Ahora, teniendo en cuenta que el perímetro de un hexágono regular es seis veces su lado, y sustituyendo la fórmula 2 en la fórmula 3, para que el área de la base nos quede en términos del lado, tendríamos que:

$$B = \frac{p * a}{2}$$

$$105\ cm^2 = \frac{6l * \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$105\ cm^2(2) = 3l^2\sqrt{3}$$

$$\frac{210\ cm^2}{3\sqrt{3}} = l^2$$

$$\sqrt{\frac{210\ cm^2}{3\sqrt{3}}} = l$$

$$6{,}36\ cm \approx l$$

Podríamos multiplicar por seis el valor del lado, con lo cual conoceríamos el perímetro del hexágono regular:

$$p = 6l$$

$$p = 6(6{,}36\ cm)$$

$$p = 38{,}16\ cm$$

Además, podríamos sustituir la medida del lado en la fórmula 2, para calcular la apotema, así:

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{(6{,}36\ cm)\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{(6{,}36\ cm)\sqrt{3}}{2}$$

$$a \approx 5{,}51\ cm$$

Ahora, además de que ya tendríamos el área de la base y la altura de una pirámide de 175 cm^3, también tendríamos parte de la información necesaria para calcular su área superficial. Solo nos faltaría calcular la altura de sus caras laterales. Para ello, vamos a emplear el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo determinado por la altura de la pirámide, la apotema de su base, y la altura de una de sus caras laterales (ver figura 4, derecha), cuya hipotenusa (h) está demarcada con color azul.

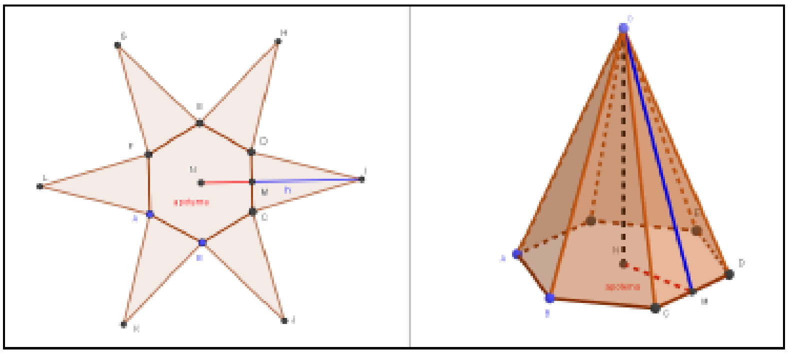


Figura 4. Desarrollo de una pirámide regular de base hexagonal (izquierda) y triangulo rectángulo delimitado por la altura, la apotema de la base, y una de las caras laterales de dicha pirámide.

$$h^2 = a^2 + H^2$$

Fórmula 4

Recordemos que la altura de la pirámide la hemos establecido 5 cm, y que la apotema de la base la hemos calculado en aproximadamente 5,51 cm. Por tanto, en la fórmula 4 tendríamos que:

$$h^2 = (5{,}51\ cm)^2 + (5)^2$$

$$h = \sqrt{(5{,}51\ cm)^2 + (5)^2}$$

$$h \approx 7{,}44\ cm$$

Para calcular el área superficial del envase piramidal, usaremos la información que aparece en tu libro de matemáticas (ver figura 5), a la cual tuviste acceso durante el examen, pero la pondremos en términos de las letras que hemos venido usando en la solución del problema para enunciar la fórmula 5, así:

$$A_T = \frac{1}{2}p(a + h)$$

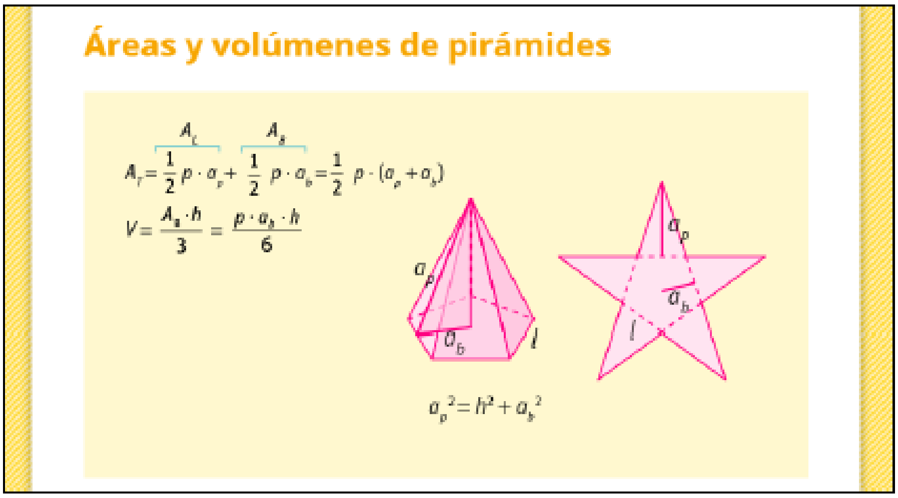


Figura 5. Técnica para calcular el área total de una pirámide. Tomado del libro: 3° ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Savia.

Por tanto, con los valores que ya hemos calculado previamente:

$$A_T = \frac{1}{2} p(a + h)$$

$$A_T = \frac{1}{2}(38{,}16\ cm)(5{,}51\ cm + 7{,}44\ cm)$$

$$A_T \approx 247{,}086\ cm^2$$

5. Como puedes ver, en el proceso que has descrito para calcular el volumen de la pirámide, no has tenido en cuenta la relación planteada en la fórmula 2. Por tanto, aunque es cierto que, una vez atribuido un valor para una de las variables B o H se puede conocer el valor de la otra variable, no es posible continuar con el cálculo del resto de las dimensiones del envase, las cuales resultan necesarias para poder conocer el área total del envase, si se desconoce la relación entre la apotema de la base de la pirámide y su lado.

Con base en las observaciones anteriores, considero que tu nota en este examen debe ser **5.0**, porque:

1. El examen tiene dos partes: una enfocada al cálculo de las dimensiones del envase y la otra enfocada al cálculo de su área superficial. Cada una de estas partes vale la mitad del examen.

2. Aunque lo intentaste 11 veces, no lograste establecer correctamente un par de medidas –una para el área de la base y otra para la altura– que aplicadas a la fórmula 1 indicasen que el volumen del envase pudiera ser de 175 cm^3 y que, por ende, su capacidad fuese de 175 ml. Esto ocurrió; primero, porque cometiste errores operativos que me conducen a pensar que puedes tener errores conceptuales en relación, por ejemplo, con la propiedad uniforme de la igualdad; y segundo, porque no te cuestionaste por el tipo de relación que hay entre la altura de la pirámide y el área de su base. Cuando tengas oportunidad de estudiarlo en profundidad, veras que esta relación es de proporcionalidad inversa, por lo que H y B están vinculadas a través de un producto constante.
3. Desafortunadamente no intentaste calcular el área superficial del envase, pero entiendo que ello se pudo deber a que no tuviste herramientas para hacerlo dado que desconociste la relación entre la apotema de la base de la pirámide y su lado.

Por último, además de agradecerte por tu participación en este proyecto, confío en que tras leer la revisión que he hecho de tu examen, comprendas en qué te equivocaste, y más aún, en que dedicarás un tiempo para pensar en otras posibles soluciones al problema planteado.

Pronto recibirás por parte de tu profesora la dirección de una página web en la que podrás evaluar las clases que hemos tenido.

¡Muchos éxitos para el resto del curso [redacted]!

Cordialmente,

Carlos Rojas Suárez