PEDRO ABELLANAS

MATRICES DE POLINOMIOS EN VARIAS INDETERMINADAS

Publicado en la «Revista Matemática Hispano Americana»
4.ª Serie-Tomo XVII-Núm. 6)

MADRID
C. BERMEJO, IMPRESOR
J. García Morato, 122.-Tel. 33 06 19
1957

MATRICES DE POLINOMIOS EN VARIAS INDETERMINADAS

por

PEDRO ABELLANAS

1. Factores invariantes de una matriz de polinomios.

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ indeterminadas independientes sobre un cuerpo arbitrario k. $K = k(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $K_i = k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_r)$, $\mathfrak{o} = k[\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$, $\mathfrak{r}_i = k[\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_r]$, $P_i = K_i[\lambda_i]$, $i = 1, \ldots, r$.

Sea $A(\lambda)$ una matriz $n \times n$ cuyos elementos pertenecen a $\mathfrak{o}$ y tal que $\Delta_n(\lambda) = |A(\lambda)|$ no contiene ningún factor que pertenezca a alguno de los anillos $\mathfrak{o}_i$, $i = 1, \ldots, r$. Representaremos por Δ_α^i a un menor de orden i de $A(\lambda)$ y por J_i al conjunto de índices tal que cuando α recorre todos los índices de J_i, Δ_α^i recorre una vez y solo una todos los menores de orden i de $A(\lambda)$. Pondremos:

$$\mathfrak{D}_i(\lambda) = \mathfrak{o}\left(\Delta_\alpha^i\right)_{\alpha \in J_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Representaremos por $\mathfrak{D}_i^*(\lambda)$ a los ideales superiores(*) quasi-iguales a $\mathfrak{D}_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces será:

$$\mathfrak{D}_i^*(\lambda) = \mathfrak{p}_{i1}^{e_{i1}} \ldots \mathfrak{p}_{is_i}^{e_{is_i}}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

en donde los ideales $\mathfrak{p}_{ij}$ son primos. Por ser $\mathfrak{D}_i^*(\lambda)$ superior lo se-

(*) Véase, p. ej., v. d. Waerden, *Moderne Algebra*, vol. II, cap. XIV.

rán también los ideales $\mathfrak{p}_{ij}$ y como consecuencia, serán principales:

$$\mathfrak{p}_{ij} = \mathfrak{o}\,\varphi_{ij}, \quad \varphi_{ij} \in \mathfrak{o}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, s_i$$

siendo φ_{ij} irreducible sobre $\mathfrak{o}$. Por consiguiente:

$$\mathfrak{D}_i^*(\lambda) = \mathfrak{o}\,\varphi_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \ldots \varphi_{is_i}^{\varepsilon_{is_i}}. \qquad [1]$$

A los ideales $\mathfrak{D}_i(\lambda)$ les llamaremos *ideales determinantes invariantes* de $A(\lambda)$ y a los $\mathfrak{D}_i^*(\lambda)$ *ideales determinantes invariantes superiores*. De la definición de los ideales $\mathfrak{D}_i(\lambda)$ resulta que

$$\mathfrak{D}_{i+1}(\lambda) \subset \mathfrak{D}_i(\lambda), \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

de donde se obtiene que

$$\mathfrak{D}_i^*(\lambda) \leq \mathfrak{D}_{i+1}^*(\lambda) \qquad [2]$$

en donde $\leq$ es el signo de quasi divisor. De [2] se deduce que se pueden numerar los subíndices de los polinomios $\varphi_{i+1,j}$ de modo que

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_{i+1,1} = \varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i+1,s_i} = \varphi_{i,s_i}, & s_{i+1} \geq s_i \\ \varepsilon_{i+1,1} \geq \varepsilon_{i,1}, \ldots, \varepsilon_{i+1,s_i} \geq \varepsilon_{i,s_i}, & i = 1, \ldots, n-1. \end{array}\right\} \qquad [3]$$

De donde,

$$\varphi_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \ldots \varphi_{is_i}^{\varepsilon_{is_i}} \mid \varphi_{i+1}^{\varepsilon_{i+1,1}} \ldots \varphi_{i+1,s_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1,s_{i+1}}}. \qquad [4]$$

En virtud de la hipótesis, de no poseer $\Delta_n(\lambda)$ ningún factor que pertenezca a algunos de los anillos $\mathfrak{o}_i$, y de [4] se deduce que ninguno de los polinomios φ_{ij} pertenece a alguno de los anillos $\mathfrak{o}_h$, $h = 1, \ldots, r$. Pongamos

$$D_i = \prod_{=1}^{s_i} \varphi_{ij}^{\varepsilon_{ij}}; \qquad [5]$$

con lo que [4] se podrá escribir en la forma:

$$D_i \mid D_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \qquad [6]$$

A los polinomios [5] les llamaremos *determinantes invariantes* de A (λ). Pondremos:

$$\Phi_i = \frac{D_{n-i+1}}{D_{n-i}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad D_0 = 1. \qquad [7]$$

A los polinomios Φ_i les designaremos como *factores invariantes* de A (λ).

Mediante los factores invariantes construiremos la matriz

$$A^*(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1 & & & \\ & \Phi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Phi_n \end{pmatrix}, \qquad [8]$$

que llamaremos *matriz canónica correspondiente a* A (λ). Como $D_n = \Delta_n(\lambda) = |A(\lambda)|$, de [7] y [8] se deduce que

$$|A(\lambda)| = |A^*(\lambda)| = \Phi_1 \ldots \Phi_n. \qquad [9]$$

Consideremos ahora el caso general, en que $|A(\lambda)|$ puede tener factores que pertenezcan a alguno de los anillos $\mathfrak{o}_\alpha$. En este caso llamaremos *determinantes invariantes* de A (λ) a los polinomios

$$D_i = \prod_{=1}^{s_i}{}' \varphi_{ij}^{e_{ij}}, \qquad [10]$$

en donde con el acento del símbolo de multiplicación se quiere expresar que en el producto debe prescindirse de todos los factores que pertenezcan a algunos de los anillos $\mathfrak{r}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Por lo demás, siguen siendo válidas todas las restantes definiciones que acabamos de dar. En el caso en que $|A(\lambda)|$ posea factores que pertenecen a $\mathfrak{o}_\alpha$, la igualdad [9] se verificará salvo el producto de estos factores.

2. Transformaciones elementales.

Llamaremos *transformación elemental* de índice α de una matriz A (λ) a la operación que consiste en multiplicarla por la izquierda por un número finito de matrices [11] y por la derecha por un número finito de sus transpuestas, siendo

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 \cdots\cdots 1 \cdots\cdots & & \\ & & \vdots \qquad \vdots & & \\ & & 1 \cdots\cdots 0 \cdots\cdots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}, \quad G_{ij}^{a} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varphi_a \cdots\cdots f \cdots\cdots & & \\ & & \ddots \qquad \vdots & & \\ & & 1 \cdots\cdots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}, \quad [11]$$

en donde $\varphi_a \in \mathfrak{o}_a, f \in$.

Lema 1.—*La matriz* $A(\lambda)$ *posee los mismos factores invariantes que cualquiera de sus transformadas mediante transformaciones elementales.*

Demostración.—El lema es trivial para las transformaciones producidas por las matrices E_{ij}. Bastará por tanto, demostrarlo para las transformaciones G_{ij}^{a}. Sea

$$M(\lambda) = G_{ij}^{a} A(\lambda)$$

y designemos por $\overline{\mathcal{D}}_l$ y $\overline{\mathcal{D}}_l^{*}$ a los ideales determinantes e ideales determinantes superiores, respectivamente, de $M(\lambda)$, Entonces, será

$$\mathcal{D}_l = \mathfrak{o}\left(\Delta_k^l\right)_{k \in J_l}; \qquad \overline{\mathcal{D}}_l = \mathfrak{o}\left(\Delta_{k'}^l;\ \varphi\, \Delta_h^l\right)_{\left\{\begin{smallmatrix} k' \in J_l^i \\ h \in J_l'^{\,i} \end{smallmatrix}\right\}},$$

en donde J_l^i es el subconjunto de J correspondiente a los menores en los que no figuran elementos de la fila i-ésima de $A(\lambda)$ y $J_l'^{\,i} = J_l - J_l^i$. De estas expresiones de $\mathcal{D}_l$ y $\overline{\mathcal{D}}_l$ se deduce que

$$\overline{\mathcal{D}}_l \subset \mathcal{D}_l, \qquad l = 1, \ldots, n;$$

o bien,

$$\mathcal{D}_l^{*} \leq \overline{\mathcal{D}}_l^{*}, \qquad l = 1, \ldots, n.$$

Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\,\phi$ es un divisor mínimo primo de $\overline{\mathcal{D}}_l^{*}$, que no figura en la descomposición de $\mathcal{D}_l^{*}$, será $\varphi\, \Delta_h^i \equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $h \in J_l'^{\,i}$. Si se verificase que $\varphi \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ sería $\Delta_h^i \equiv 0\,(\;)$ para todo $h \in J_l'^i$, y $\mathfrak{p}$ sería un d. m. p. superior de $\mathfrak{D}_l^*$, contradicción. Por consiguiente, será $\varphi \equiv 0\,(\mathfrak{p})$, es decir $\varphi \in \mathfrak{o}\,\psi$ y como $\varphi \in \mathfrak{o}_\alpha$, sería $\psi \in \mathfrak{o}_\alpha$, luego, en virtud de [10], ψ no figura en $\overline{D}_l$, siendo $\overline{D}_l$ el determinante invariante correspondiente a $\overline{\mathfrak{D}}_l^*$. Por consiguiente,

$$\overline{D}_l = D_l, \qquad l = 1, \ldots, n.$$

De aquí resulta que

$$\overline{\Phi}_l = \frac{\overline{D}_{n-l+1}}{\overline{D}_{n-l}} = \Phi_l = \frac{D_{n-l+1}}{D_{n-l}}. \qquad \text{Q. E. D.}$$

LEMA 2.—*Toda matriz* A (λ) *puede transformarse mediante transformaciones elementales de superíndice* s, *en una matriz de la forma:*

$$C_s(\lambda) = \begin{pmatrix} F_{1s}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & F_{ns}(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad s = 1, \ldots, r, \qquad [12]$$

en donde $F_{is} \in \mathfrak{o}$ *y* $F_{is} \mid F_{i+1,s}$, $i = 1, \ldots, n-1$, *en* $\mathfrak{o}$.

DEMOSTRACIÓN.—Efectuando en P_s la división de dos polinomios $a_{il}(\lambda)$ y $a_{jl}(\lambda)$, será $a_{il} = q(\lambda_s)\,a_{jl} + r_{il}(\lambda_s)$, de donde $q(\lambda_s)$ y $r_{il}(\lambda_s)$ pertenecen a P_s y el grado de $r_{il}(\lambda_s)$ respecto de λ_s es inferior al grado de a_{jl}. Sea

$$q(\lambda_s) = \frac{Q(\lambda)}{d(\lambda)}, \qquad r_{il}(\lambda_s) = \frac{R(\lambda)}{r(\lambda)},$$

en donde $Q(\lambda)$, $R(\lambda) \in \mathfrak{o}$ y $d(\lambda)$, $r(\lambda) \in \mathfrak{r}_s$. Si $m(\lambda) =$ m. c. m. $\big(d(\lambda), r(\lambda)\big)$, se verificará que

$$m(\lambda)\,a_{il}(\lambda) = Q(\lambda)\,m'(\lambda)\,a_j + R(\lambda)\,m''(\lambda),$$

$m(\lambda)$, $m'(\lambda)$, $m''(\lambda) \in \mathfrak{o}_s$. Por consiguiente, mediante transformaciones elementales se puede poner A (λ) en la forma:

$$M_1(\lambda)\,A(\lambda)\,N_1(\lambda) = \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & \ldots & b_{1n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}(\lambda) & \ldots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

en donde el grado de $b_{11}(\lambda)$ respecto de λ_s es el más pequeño posible entre los grados, respecto de λ_s, de todos los polinomios que figuran en las matrices que puede obtenerse mediante tranformaciones elementales a partir de $A(\lambda)$. Además, todos los polinomios $b_{ij}(\lambda)$ pertenecen a $\mathfrak{o}$. De todo esto resulta que $b_{ij}(\lambda) = q_{ij}(\lambda) b_{11}(\lambda)$, $q_{ij} \in P_s$; luego, mediante transformaciones elementales, puede alcanzarse que se anulen todos los elementos de la primera fila y de la primera columna menos el primero; es decir, que

$$M_2(\lambda) A(\lambda) N_2(\lambda) = \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

en donde $M_2(\lambda)$ y $N_2(\lambda)$ son productos de matrices de transformaciones elementales. No ofrece dificultad alguna comprobar que todos los polinomios $c_{ij}(\lambda)$ son divisibles por $b_{11}(\lambda)$ en $P_s(\lambda)$. Siguiendo ahora, de modo análogo al caso de una única indeterminada, resulta que existen matrices $M_t(\lambda)$ y $N_t(\lambda)$, productos de matrices elementales, tales que

$$M_t(\lambda) A(\lambda) N_t(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & f_n(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad f_i(\lambda) \in \mathfrak{o}; \qquad i = 1, \dots, n;$$

y que $f_i(\lambda)$ es divisor, en P_s, de $f_{i+1}(\lambda)$. Ahora bien, de

$$f_{i+1}(\lambda) = \frac{Q_{i+1}(\lambda)}{q_{i+1}(\lambda)} f_i(\lambda), \qquad Q_{i+1}(\lambda) \in \mathfrak{o}_1, \ q_{i+1}(\lambda) \in \mathfrak{o}_s,$$

se deduce que

$$q_{i+1}(\lambda) f_{i+1}(\lambda) = Q_{i+1}(\lambda) f_i(\lambda), \qquad i = 1, \dots, n-1,$$

luego, poniendo

$$F_i(\lambda) = q_2(\lambda) \dots q_i(\lambda) f_i(\lambda), \qquad i = 2, \dots, n$$

$$F_{1s}(\lambda) = f_1(\lambda),$$

y

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & q_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & q_2(\lambda) \dots q_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

resulta que $T(\lambda)$ es una matriz producto de matrices elementales, que:

$$T(\lambda)\, M_t(\lambda)\, A(\lambda)\, N_t(\lambda) = \begin{pmatrix} F_{1s}(\lambda) & & & \\ & F_{2s}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{ns}(\lambda) \end{pmatrix} \qquad [13]$$

en donde $F_{is}(\lambda) \in \mathfrak{o}$ y que $F_{is}(\lambda)$ es divisor de $F_{i+1,s}(\lambda)$ en $\mathfrak{o}$.

3. Forma canónica diagonal.

LEMA 3.—*Las matrices* $A(\lambda)$ *y* $A^*(\lambda)$ [8] *poseen los mismos factores invariantes.*

DEMOSTRACIÓN.—Si se representa por $\mathcal{D}'_l$ a los ideales determinantes de $C_s(\lambda)$ [12] y se tiene en cuenta el lema 2, resulta:

$$\mathcal{D}'_l = \mathfrak{o}\big(F_{1s}(\lambda) \dots F_{ls}(\lambda)\big), \quad l = 1, \dots, n. \qquad [14]$$

Para todo polinomio $F(\lambda)$ de $\mathfrak{o}$ representaremos por $[F(\lambda)]$ al producto de todos los factores que figuran en la descomposición en factores inaducibles de $F(\lambda)$ en $\mathfrak{o}$ que no pertenecen a ningún anillo $\mathfrak{o}_i$, $i = 1, \dots, n$. Sea D'_l el determinante invariante [10] correspondiente a $\mathcal{D}'_l$, será:

$$D'_l = [F_{1s}(\lambda) \dots F_{ls}(\lambda)],$$

luego, llamando Φ'_j, $i = 1, \dots, n$, a los factores invariantes de $C_s(\lambda)$, será:

$$\Phi'_l = \frac{[F_1(\lambda) \dots F_{n-l+1}(\lambda)]}{[F_1(\lambda) \dots F_{n-l}(\lambda)]} = [F_{n-l+1}(\lambda)]. \qquad [15]$$

En virtud de los lemas 1 y 2 resulta que:

$$\Phi_l = [F_{n-l+1}] = \Phi'_l, \quad l = 1, \dots, n.$$

Si $[F_{n-l}] = 1$, evidentemente que $[F_{n-l}] \mid [F_{n-l+1}]$. Si $[F_{n-l}] \neq 1$, será $[F_{n-l}] = \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_\pi^{\alpha_\pi}$, en donde todos los polinomios φ_i son irreducibles en $\mathfrak{o}$ y no pertenecen a ningún $\mathfrak{o}_i$. Ahora bien, de la definición de F_{n-l} se deduce que $\varphi_i^{\alpha_i} \mid f_{n-l}$, $i = 1, \ldots, n$, y como f_{n-l} es divisor de f_{n-l+1} en P_s, resulta que:

$$f_{n-l+1} = q_i(\lambda)\, \varphi_i^{\alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad q_i \in P_s.$$

Por consiguiente:

$$f_{n-l+1}\, Q_i'' = Q_i'\, \varphi_i^{\alpha_i}, \quad Q_i \in \mathfrak{o}, \quad Q_i'' \in \mathfrak{o}_s \qquad [16]$$

y como $\varphi_i \notin \mathfrak{o}_s$ y $\mathfrak{o}\, \varphi_i^{\alpha_i}$ es un ideal primario en $\mathfrak{o}$, de [16] se deduce que $f_{n-l+1} \equiv 0 \left(\mathfrak{o}\, \varphi_i^{\alpha_i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$; luego $[F_{n-l}] \mid f_{n-l+1}$, entendiendo esta divisibilidad en $\mathfrak{o}$. Como f_{n-l+1} difiere de $[F_{n-l+1}]$, a lo sumo, en factores de $\mathfrak{o}_s$, resulta que $[F_{n-l}] \mid [F_{n-l+1}]$, en donde la divisibilidad tiene lugar en $\mathfrak{o}$. Teniendo ahora en cuenta [15], resulta que Φ_{l-1} divide en $\mathfrak{o}$ a Φ_l, $l = 2, \ldots, n$. En virtud de este resultado, designando por D_{n-l}^* a los determinantes invariantes de $A^*(\lambda)$, será:

$$D_{n-l}^* = \Phi_n \ldots \Phi_{l+1},$$

de donde, si Φ_l^*, $l = 1, \ldots, n$, son los factores invariantes de $A^*(\lambda)$, será:

$$\Phi_l^* = \frac{D_{n-l+1}^*}{D_{n-l}^*} = \frac{\Phi_n \ldots \Phi_l}{\Phi_n \ldots \Phi_{l+1}} = \Phi_l, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Q. E. D.

De estos lemas resulta inmediatamente, el siguiente:

TEOREMA 1.—*Todas las matrices* $C_s(\lambda)$, $s = 1, \ldots, r$, *poseen la misma forma canónica* $A^*(\lambda)$ [8].

De la demostración del último lema se deduce que:

$$C_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{1s} & & \\ & \ddots & \\ & & \psi_{ns} \end{pmatrix} A^*(\lambda), \quad \psi_{is} \in \mathfrak{o}_s, \quad i = 1, \ldots, n; \quad s = 1, \ldots, r. \qquad [17]$$

De $F_{is} \mid F_{i+1,s}$ y $\Phi_i \mid \Phi_{i+1}$, refiriéndose ambas divisibilidades a $\mathfrak{o}$, y de [17] se deduce que $\psi_{is} \mid \psi_{i+1,s}$ en $\mathfrak{o}_s$. Pongamos:

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} \psi_{1s} & & \\ & \ddots & \\ & & \psi_{ns} \end{pmatrix}, \quad s = 1, \ldots, r,$$

y escribamos [13] en la forma:

$$M_s(\lambda)\, A(\lambda)\, N_s(\lambda) = C_s(\lambda), \qquad [13']$$

en donde se ha puesto $M_s(\lambda) = T(\lambda)\, M_t(\lambda)$, $N_s(\lambda) = N_t(\lambda)$. De [13'] y [17] se deduce que:

$$\Psi^{-1} M_s(\lambda)\, A(\lambda)\, N_s(\lambda) = A^*(\lambda), \qquad s = 1, \ldots, r;$$

de donde, tomando determinantes:

$$|\Psi_s|^{-1} |M_s|\, |A(\lambda)|\, |N_s(\lambda)| = |\Psi_i|^{-1} |M_i|\, |A(\lambda)|\, |N_i|,$$

es decir:

$$|\Psi_s|^{-1} |M_s|\, |N_s(\lambda)| = |\Psi_i|^{-1} |M_i|\, |N_i|, \qquad i, s = 1, \ldots, r. \qquad [18]$$

Teniendo ahora en cuenta que el primer miembro de [18] pertenece a K_s, y el segundo a K_i, y que la intersección de todos estos cuerpos es k, resulta que:

$$|\Psi_s|^{-1} |M_s|\, |N_s| = c, \qquad c \in k,$$

es decir:

$$|M_s|\, |N_s| = c\, |\Psi_s|,$$

luego, se podrá escribir $\Psi_s = \Psi_s' \Psi_s''$, en donde Ψ_s' y Ψ_s'' son matrices diagonales, de modo que:

$$|M_s| = c'\, |\Psi_s'|, \quad |N_s| = c''\, |\Psi_s''|, \quad c'\, c'' = c. \qquad [19]$$

Teniendo en cuenta que las matrices diagonales son permutables entre sí, será:

$$C_s(\lambda) = \Psi_s\, A^*(\lambda) = \Psi_s'\, A^*(\lambda)\, \Psi_s'',$$

en donde, Ψ_s' y Ψ_s'', son matrices diagonales con elementos en $\mathfrak{o}_s$. Entonces resulta que:

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_s'^{-1} M_s(\lambda)\, A(\lambda)\, N_s(\lambda)\, \Psi_s''^{-1} \\ &= \Psi_i'^{-1} M_i(\lambda)\, A(\lambda)\, N_i(\lambda)\, \Psi_i''^{-1} = A^*(\lambda); \end{aligned}\right\} \qquad [20]$$

o bien, poniendo

$$H_s(\lambda) = \Psi_s'^{-1} M_s(\lambda) \quad y \quad L_s(\lambda) = N_s(\lambda) \Psi_s''^{-1},$$

que

$$H_s A(\lambda) L_s = H_i A(\lambda) L_i = A^*(\lambda), \qquad [21]$$

en donde H_i, L_i tienen sus elementos pertenecientes a P_i, $i=1,\dots,r$.

De [19] y [21] se deduce el siguiente:

Lema 4.—$|H_s| = c'$, $|L_s| = c''$, $s = 1, \dots, r$ *y* $c\,|A(\lambda)| = |A^*(\lambda)|$, $c \in k$.

Lema 5.—*Si las matrices* $A(\lambda)$ *y* $A^*(\lambda)$ *son lineales respecto de* λ_s, *siendo el determinante de la matriz coeficiente de* λ_s *en* $A^*(\lambda)$ *distinto de cero, se pueden hallar las matrices* X_s, Y_s, *cuyos elementos pertenecen a* K_s, *y cuyos determinantes son números distintos de cero, tales que:*

$$X_s A(\lambda) Y_s = A^*(\lambda), \quad s = 1, \dots, r. \qquad [22]$$

Demostración.—Designemos por $\mathcal{M}_s$ al álgebra de las matrices cuyos elementos pertenecen a P_s. Si H_s y L_s son las matrices de [21], operando en $\mathcal{M}_s$, se podrá poner:

$$H_s = A^* Q + \overline{H}_s, \quad L_s = R A^* + \overline{L}_s,$$

en donde los elementos de $\overline{H}_s$ y $\overline{L}_s$ pertenecen a K_s. De [21] y de estas últimas igualdades resulta:

$$A^* = H_s A(\lambda) L_s = A^* \left[Q H_s^{-1} + L_s^{-1} R - Q A R\right] A^* + \overline{H}_s A \overline{L}_s.$$

Ahora bien, como $|H_s|$ y $|L_s|$ son números no nulos, todas las matrices que figuran en el último miembro de la igualdad anterior tienen sus elementos en P_s, y como A^* es de primer grado en λ_s, la matriz del paréntesis rectangular debe ser nula, en virtud de la hipótesis de ser el determinante del término en λ_s de $A^*(\lambda)$ distinto de cero. Por consiguiente:

$$A^* = H_s A(\lambda) L_s = \overline{H}_s A(\lambda) \overline{L}_s,$$

y recordando el significado de las matrices Ψ'_s y Ψ''_s,

$$\Psi' A^* \Psi''_s = M_s A(\lambda) N_s = \Psi'_s \overline{H}_s A(\lambda) \overline{L} \Psi''_s$$

y

$$|\Psi'_s| \, |\Psi''_s| = c \, |\Psi'_s \overline{H}_s| \, |\overline{L}_s \Psi''_s|.$$

De aquí resulta, por ser Ψ'_s y Ψ''_s matrices diagonales, que se pueden hallar otras dos matrices diagonales, Δ'_s y Δ''_s tales que $\Psi'_s \Psi''_s = \Delta'_s \Delta''_s$ y que $|\Delta'_s| = |\Psi'_s \overline{H}_s|$, $|\Delta''_s| = |\overline{L}_s \Psi''_s|$, luego, por consiguiente:

$$\Psi_s A^* \Psi''_s = \Delta'_s A^* \Delta''_s = M_s A(\lambda) N_s = \Psi'_s \overline{H}_s A \overline{L}_s \Psi''_s,$$

y, poniendo:

$$X_s = \Delta'^{-1}_s \Psi'_s \overline{H}_s, \quad Y_s = \overline{L}_s \Psi''_s \Delta''^{-1}_s,$$

resulta:

$$A^*(\lambda) = X_s A(\lambda) Y_s, \quad |X_s| \in k, \quad |Y_s| \in k, \quad |X_s| \neq 0, \quad |Y_s| \neq 0.$$

Q. E. D.

Universidad de Madrid
Patronato «Juan de la Cierva»