UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT07

La física del quarkonio pesado

Heavy quarkonium physics

Supervisor/es: Clara Peset Martín

Anna Machín Diport

Grado en Física

Curso académico 2025-26

Convocatoria Extraordinaria

Calificación: 9.5

Resumen:

Los sistemas de quarkonio pesado constituyen un marco privilegiado para estudiar la cromodinámica cuántica (QCD), ya que presentan una jerarquía de escalas bien definida que permite describirlos mediante teorías efectivas de campos (EFT). En este trabajo se desarrolla la descripción efectiva del quarkonio pesado mediante las teorías NRQCD y pNRQCD, derivadas de QCD a través de la separación sistemática de escalas. Para ello, se llevan a cabo explícitamente los procedimientos de *matching* a nivel árbol, obteniéndose los coeficientes de Wilson asociados a NRQCD y los potenciales efectivos de pNRQCD, tanto dependientes como independientes del espín, que gobiernan la dinámica de estos sistemas. Asimismo, se estudia la evolución de la constante de acoplo fuerte mediante el grupo de renormalización y su relevancia en la descripción de estos sistemas. Como aplicación fenomenológica, se calcula el desdoblamiento hiperfino de los estados fundamentales de charmonio y bottomonio, comparando las predicciones teóricas a primer y segundo orden con los resultados experimentales. Los resultados obtenidos permiten analizar la dependencia del desdoblamiento hiperfino con la escala de renormalización y evaluar el impacto de las correcciones perturbativas sobre la estabilidad de las predicciones teóricas.

Abstract:

Heavy quarkonium systems constitute an appropriate framework to study quantum chromodynamics (QCD), since they display a hierarchy of well defined energy scales that allows for them to be described by effective field theories (EFT). This work develops the effective description of heavy quarkonium through the theories NRQCD and pNRQCD, derived from full QCD by means of the systematic separation of scales. In order to do so, the explicit procedures of matching at tree level are carried out, leading to the procurement of the Wilson coefficients of NRQCD and the effective potentials of pNRQCD (both spin dependent and spin independent) that govern the dynamics of these systems. In addition, this work studies the evolution of the strong coupling constant through the renormalization group, and its relevance in the description of these systems. On the phenomenological side, the hyperfine splitting of the fundamental states of charmonium and bottomonium is computed, comparing the theoretical predictions at leading order and next to leading order to the experimental values. The results allow for an analysis of the hyperfine splitting's dependence on the renormalization scale and of the impact of perturbative corrections over the stability of theoretical predictions.

Índice

1. Introducción **3**

2. Teorías efectivas para tratar el quarkonio pesado **4**

2.1. Introducción a las teorías efectivas de campos 4

2.2. NRQCD 5

2.3. *Matching* de QCD a NRQCD 6

2.3.1. Expansión no relativista en QCD 6

2.3.2. Amplitud en NRQCD 9

2.4. pNRQCD 11

2.5. *Matching* de NRQCD a pNRQCD 12

3. *Running* de la constante de acoplo fuerte **16**

4. Fenomenología: Desdoblamiento hiperfino para masas iguales $(b\bar{b})$, $(c\bar{c})$ **17**

5. Conclusiones **20**

Referencias **21**

1. Introducción

Este trabajo presenta un estudio y revisión bibliográfica de las descripciones de sistemas ligados quark-antiquark muy pesados cerca del umbral, es decir, el quarkonio pesado. La descripción de estos sistemas requiere comprender la interacción fuerte y la dinámica de quarks y gluones, formalizadas en el marco de la cromodinámica cuántica (QCD). La constante de acoplo fuerte α_s, que media las interacciones, disminuye con el aumento de la energía, lo cual se conoce como libertad asintótica. Esto implica que las partículas interactúan débilmente a altas energías y fuertemente a energías bajas; por consiguiente, el primer régimen permite una descripción perturbativa muy precisa de QCD, mientras que el segundo requiere un enfoque no perturbativo.

Históricamente, el estudio del quarkonio pesado desempeñó un papel fundamental para la consolidación de este marco teórico. En 1974, se descubrió un bosón vectorial de anchura estrecha, llamado J/Ψ [1], que revolucionó el modelo de quarks establecido hasta entonces. Dado que su masa era considerablemente superior a la de los hadrones conocidos hasta entonces, se esperaba una anchura de desintegración significativamente mayor. Sin embargo, el descubrimiento de una resonancia estrecha llevó a postular la existencia de un nuevo sabor de quark (charm) originalmente conjeturado para explicar el *branching ratio* del kaón neutro [2]. Esta interpretación se consolidó con el descubrimiento posterior de todo un espectro de estados excitados del charmonio en 1976 y, poco después, en 1977, la identificación del sistema bottomonio ($b\bar{b}$) confirmó que este patrón se repetía en familias aún más pesadas, convirtiendo al quarkonio en una herramienta universal.

Desde entonces, el estudio de los sistemas de quarkonio fue alentador y crucial para el desarrollo de la teoría QCD. Por un lado, en el ámbito teórico, la masa de los componentes de este sistema conduce a una adecuada aproximación al régimen no relativista, asemejándose al problema del átomo de hidrógeno. Asimismo, la descripción teórica del quarkonio pesado presenta una característica fundamental: la existencia de múltiples escalas de energía bien separadas, como la masa del quark pesado, su momento típico en el estado ligado y la energía de ligadura. Esta jerarquía de escalas hace que, aunque una descripción en términos de QCD resulte compleja, se puedan construir teorías efectivas en las que los grados de libertad de alta energía se integran sistemáticamente. De este modo, estos sistemas proporcionan un marco controlado en el que separar y tratar de manera consistente los efectos perturbativos y no perturbativos de QCD.

Por otro lado, en el ámbito experimental, el estudio del quarkonio pesado ofrece un escenario ideal para contrastar las predicciones teóricas de la cromodinámica cuántica (QCD) en todos sus regímenes de energía: desde la región ultravioleta hasta el dominio infrarrojo. En este sentido, estos sistemas permiten estudiar de forma controlada la transición entre sus regímenes perturbativo y no perturbativo, lo que los convierte en una de las áreas más relevantes de la física de partículas en la actualidad. Este gran interés se ve impulsado por la combinación de teorías efectivas cada vez más precisas y la enorme cantidad de datos de alta calidad proporcionados por experimentos modernos como CLEO, BES y LHCb [3]. Por encima de esto, estos sistemas desempeñan un papel fundamental en la determinación de parámetros esenciales del Modelo Estándar; tal es el caso de la obtención de las masas de quarks pesados a partir de las mediciones en los estados fundamentales de charmonio y bottomonio con los experimentos KEDR y MD-1, o de la constante de acoplamiento fuerte a partir de *Lattice* QCD. Este campo de estudio ha experimentado un resurgimiento notable durante los ciclos de operación más recientes del LHC. Las colaboraciones LHCb y CMS, en particular, han reportado una gran cantidad de nuevos estados hadrónicos cuya caracterización constituye un desafío para la cromodinámica cuántica convencional. La observación de estados altamente excitados y la compleja familia de estructuras multiquark [4] han abierto nuevas líneas de

investigación, obligándonos a actualizar y profundizar en el estudio de las teorías efectivas.

2. Teorías efectivas para tratar el quarkonio pesado

2.1. Introducción a las teorías efectivas de campos

Las teorías efectivas de campos (EFT, por sus siglas en inglés) proporcionan un marco para describir sistemas físicos a una escala de energía dada, operando como aproximaciones rigurosas de una teoría más fundamental. Su construcción se basa en el principio de separación de escalas, el cual establece que la dinámica de un régimen concreto puede describirse utilizando únicamente los grados de libertad relevantes en él, mientras que los efectos de otras escalas quedan absorbidos en los coeficientes de la teoría.

Por consiguiente, la construcción de una EFT se aborda desde la identificación de los grados de libertad dinámicos a la escala de interés. Una vez fijados los campos, el lagrangiano se construye incluyendo todos los términos compatibles con las simetrías de la teoría. En general, la EFT contiene un número infinito de operadores. Para dotar a la teoría de capacidad predictiva, los operadores se organizan mediante un esquema de *power counting*. Este formalismo induce una expansión en un parámetro pequeño δ, de modo que truncar el cálculo a un orden n garantiza que el error cometido será del orden de δ^{n+1} [5].

El número de parámetros del lagrangiano indica cuántos observables independientes se necesitan como *input*. Una vez fijados, el resto de las cantidades son predicciones de la teoría. Cuando la EFT proviene de una teoría más fundamental conocida, los coeficientes que acompañan a los operadores del lagrangiano, conocidos como coeficientes de acoplamiento efectivo o coeficientes de Wilson, se pueden determinar mediante un procedimiento llamado *matching*, que garantiza que ambas teorías reproduzcan los mismos observables en el régimen energético relevante. En este caso la EFT sirve para simplificar y organizar los cálculos, manteniendo el control sobre la precisión.

Para que la acción S que describe a una EFT sea adimensional:

$$S_{\mathrm{EFT}} = \int d^{\mathrm{d}}x \; \mathcal{L}_{\mathrm{EFT}}(x), \tag{1}$$

la densidad lagrangiana debe tener dimensión de masa igual a d:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EFT}}(x) = \sum_i c_i O_i. \tag{2}$$

Si denotamos por $\mathcal{D}$ la dimensión de masa de cada operador (los cuales deben respetar las simetrías de Lorentz y de gauge), los coeficientes de Wilson c_i deben poseer dimensión $d - \mathcal{D}$. Para hacer explícito el *power counting*, se introduce una escala física ultravioleta Λ característica del sistema, redefiniendo los coeficientes para que sean adimensionales:

$$\mathcal{L} = \sum_{\mathcal{D}\geq 0, i} \frac{c_i O_i^{(\mathcal{D})}}{\Lambda^{\mathcal{D}-d}}. \tag{3}$$

Esta escala Λ marca la frontera de validez de la teoría efectiva, interpretándose como la escala de energía a partir de la cual se activan nuevos grados de libertad. Para procesos con un momento

típico $p \ll \Lambda$, la contribución de los operadores de mayor dimensión queda fuertemente suprimida. Esto induce de forma natural una expansión en el parámetro adimensional $\delta \sim p/\Lambda$, permitiendo organizar y truncar la teoría de forma sistemática y controlada.

2.2. NRQCD

Como ya se ha señalado, los componentes pesados del quarkonio, con movimiento relativo reducido, lo convierten en un sistema no relativista. Para describirlo, es necesario construir una teoría efectiva que identifique y separe correctamente las múltiples escalas de energía involucradas en el sistema. Se separan en la escala *hard*, que se corresponde con la masa del quark pesado (m); la escala *soft*, propia del momento relativo del par quark-antiquark pesados en el sistema de referencia del centro de masas ($|\boldsymbol{p}| \sim mv$); y la escala *ultrasoft* propia a la energía cinética típica del quark pesado en el sistema ($E \sim mv^2$).[6] La escala *hard* no tiene relevancia dinámica en la teoría, se puede eliminar y absorber en los coeficientes de Wilson. La teoría resultante, que retiene únicamente los grados de libertad relevantes para la dinámica no relativista a bajas energías, es la Cromodinámica Cuántica No Relativista (NRQCD).

Los grados de libertad dinámicos, es decir, los campos que seguiremos considerando en NRQCD, son el par quark-antiquark, los gluones y los quarks ligeros. Los quark-antiquarks pesados serán descritos por campos no relativistas, como espinores de Pauli mientras que los gluones y quarks ligeros seguirán formando parte de los grados de libertad dinámicos de la teoría. Estos últimos serán relevantes en el régimen de bajas energías, siempre que sus energías y momentos espaciales sean mucho menores que la masa del quark pesado. Introducimos además la escala dinámica característica de la QCD (Λ_{QCD}) (del orden de $200 - 300$MeV), que determina el inicio del régimen no perturbativo de la interacción fuerte, y se asume $\Lambda_{\text{QCD}} \ll m$ en NRQCD para legitimar la separación de escalas. Los operadores a considerar serán aquellos que sigan la simetría de QCD, es decir, sean invariantes bajo rotaciones, transformaciones gauge, conjugación de la carga, inversión de paridad e inversión temporal (C, P y T).

Para entender la magnitud de cada operador, es necesario emplear un esquema de *power counting* basado en la velocidad relativa v, que nos permite asignar un peso a los operadores según las nuevas reglas de escala. En quarkonio pesado se cumple la relación paramétrica $\alpha_s \sim v$, por lo que tanto las correcciones perturbativas como las relativistas pueden organizarse en una expansión sistemática en potencias de v. Esto permite organizar el lagrangiano como una expansión donde los operadores de mayor dimensión aparecen suprimidos por potencias sucesivas de v, convirtiéndose en una descripción controlada.

En este trabajo, que solo trata los sistemas ligados quark-antiquark para el caso de masas iguales, el lagrangiano efectivo será:

$$\mathcal{L}_{\text{NRQCD}} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{\psi\chi}. \tag{4}$$

Cada uno de ellos se define al orden que nos interesa, salvo redefiniciones del campo, donde la

contribución principal será la de los fermiones (ψ) y antifermiones (χ) no relativistas:

$$\mathcal{L}_\psi = \psi^\dagger[iD_0 + \frac{c_k}{2m}\boldsymbol{D}^2 + \frac{c_4}{8m^3}\boldsymbol{D}^4 + \frac{c_F}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot g\boldsymbol{B} + \frac{c_D}{8m^2}(\boldsymbol{D}\cdot g\boldsymbol{E} - g\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}) \tag{5}$$
$$+ \frac{ic_s}{8m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{D}\times g\boldsymbol{E} - g\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{D})]\psi + \frac{\delta\mathcal{L}_{\psi l}}{m^2},$$
$$\mathcal{L}_{\chi_c} = \mathcal{L}_\psi(\psi\to\chi_c, g\to -g, T^a\to(T^a)^T), \tag{6}$$
$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}G^{\mu\nu\ a}G^a_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\frac{c_1^g}{m^2}gf_{abc}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\ b}_{\ \ \alpha}G^{\nu\alpha\ c}, \tag{7}$$
$$\mathcal{L}_l = \sum_{i=1}^{n_f}\bar{q}_i i\not{D}q_i + \mathcal{O}(\frac{1}{m^2}), \tag{8}$$
$$\mathcal{L}_{\psi\chi_c} = -\frac{d_{ss}}{m^2}\psi^\dagger\psi\chi_c^\dagger\chi_c + \frac{d_{sv}}{m^2}\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi\chi_c^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi_c - \frac{d_{vs}}{m^2}\psi^\dagger T^a\psi\chi_c^\dagger(T^a)^T\chi_c + \frac{d_{vv}}{m^2}\psi^\dagger T^a\boldsymbol{\sigma}\psi\chi_c^\dagger(T^a)^T\boldsymbol{\sigma}\chi_c, \tag{9}$$

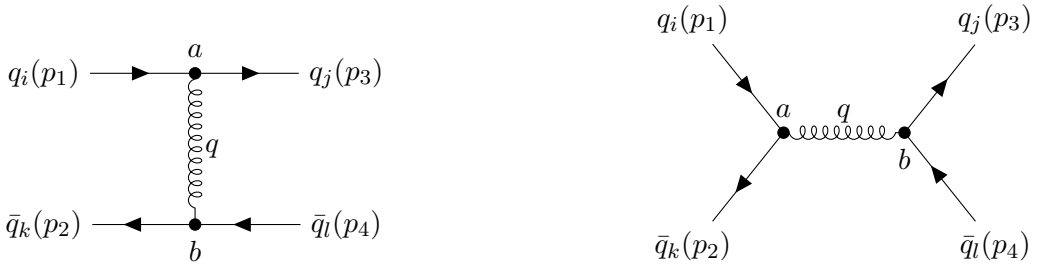
donde ψ y $\chi_c = -i\sigma^2\chi^*$ son espinores de Pauli. A partir de él se derivan las reglas de Feynman que usaremos para hacer cálculos relevantes para sistemas de tipo quarkonio.

2.3. *Matching* de QCD a NRQCD

La construcción de NRQCD como teoría efectiva se fundamenta en el desacoplamiento sistemático de la escala de masa m. Los grados de libertad asociados a momentos del orden de la masa se integran, separando así las contribuciones de corta distancia de la dinámica de baja energía. Las primeras quedan codificadas en los coeficientes de Wilson, pero hará falta un proceso de *matching* para determinarlos. Para ello debemos igualar los resultados de la misma cantidad física, en este caso la amplitud ($\mathcal{M}$), para la teoría efectiva y la fundamental en el régimen de bajas energías, donde ambas deben coincidir.

2.3.1. Expansión no relativista en QCD

Para comenzar el proceso de *matching*, se calcula la amplitud de probabilidad de dispersión de un par quark-antiquark pesado en el límite no relativista de la teoría completa QCD. Resolvemos los diagramas de Feynman a nivel de árbol. El caso tratado consta de partículas distinguibles, pero con masas iguales.



(a) Canal t. (b) Canal s.

Figura 1: Diagramas de Feynman para la dispersión $q_i\bar{q}_k \to q_j\bar{q}_l$ a nivel árbol con momentos.

Para este trabajo se adoptará la representación estándar de Dirac para las matrices γ^μ, junto con la normalización relativista estándar $u^\dagger(p)u(p) = 2E$. Los cuadriespinores soluciones de la ecuación de Dirac libre, de energía positiva y negativa respectivamente, se pueden escribir en esta base como: [7]

$$u(p,s) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \psi^s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\,\psi^s \end{pmatrix}, \qquad v(p,s) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\,\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Dada la velocidad de los quarks de nuestro sistema $v \ll 1$, se realiza una expansión en serie de potencias del parámetro $\frac{p}{m}$ a la energía, para poder posteriormente identificar los términos que aportan la dinámica de Schrödinger de orden principal.

$$\sqrt{E+m} = \sqrt{\sqrt{m^2+p^2}+m^2} = \sqrt{m\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2}}+m} \approx \sqrt{2m(1+\frac{p^2}{4m^2})} \approx \sqrt{2m}(1+\frac{p^2}{8m^2}), \tag{11}$$

$$\frac{1}{E+m} \approx \frac{1}{2m(1+\frac{p^2}{4m^2})} \approx \frac{1}{2m}(1-\frac{p^2}{4m^2}). \tag{12}$$

Introduciendo esta expansión en los cuadriespinores (10), a orden $\mathcal{O}(v^2)$, podemos realizar el cálculo de la amplitud en el límite no relativista:

$$u(p,s) \approx \sqrt{2m}\begin{pmatrix} (1+\frac{p^2}{8m^2})\psi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\,\psi^s \end{pmatrix}, \qquad v(p,s) \approx \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\,\chi^s \\ (1+\frac{p^2}{8m^2})\chi^s \end{pmatrix}. \tag{13}$$

El canal t, correspondiente a la figura 1a, y el canal s, correspondiente a 1b contribuyen a operadores y coeficientes de Wilson distintos, por lo que hacemos el *matching* por separado. La amplitud del canal t se escribe según la siguiente ecuación, con un signo negativo debido a las propiedades anticonmutativas de fermiones y antifermiones: [8]

$$i\mathcal{M}^t_{\mathrm{QCD}} = (-1)\cdot \bar{u}_{3\,j}(-ig_s\gamma_\mu(T^a)_{ji})u_{1\,i}(-i\frac{\delta^{ab}g^{\mu\nu}}{q^2+i\eta})\bar{v}_{2\,k}(-ig_s\gamma_\nu(T^b)_{kl})v_{4\,l}. \tag{14}$$

Para realizar el *matching* de QCD a NRQCD de la contribución del canal t, será conveniente la proyección al estado de color de singlete, para simplificar: $\langle \mathbf{1}|_f\,(T^a)_{ji}(T^a)_{kl}\,|\mathbf{1}\rangle_i = \frac{1}{N_C}\delta_{ik}\delta_{jl}(T^a)_{ji}(T^a)_{kl} = \frac{1}{N_C}(T^a)_{ji}(T^a)_{ij} = \frac{\delta^{aa}}{2N_C} = C_f$.

Regresando a la ecuación (14), es conveniente expandir la suma $\bar{u}_3\gamma^0u_1\bar{v}_2\gamma^0v_4 - \bar{u}_3\gamma^iu_1\bar{v}_2\gamma^iv_4$. Trabajamos en el sistema de referencia del centro de masas y definimos $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}'$, así como el propagador $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$. Además, utilizamos la normalización de los espinores de Pauli $\psi^\dagger\psi = \chi^\dagger\chi = 1$,y definimos los operadores de espín de partícula y antipartícula: $\boldsymbol{S}_1 = \psi^\dagger\frac{\sigma}{2}\psi$, $\boldsymbol{S}_2 = -\chi^\dagger\frac{\sigma}{2}\chi$. La expresión del producto de corrientes temporales resultante es:

$$\begin{aligned}\bar{u}_3\gamma^0u_1\bar{v}_2\gamma^0v_4 &= 4m^2\psi^\dagger\left(1+\frac{\boldsymbol{p}_1^2}{8m^2}+\frac{\boldsymbol{p}_3^2}{8m^2}+\frac{\boldsymbol{p}_3\cdot\boldsymbol{p}_1}{4m^2}+i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}_3\times\boldsymbol{p}_1)}{4m^2}\right)\psi \\ &\quad \chi^\dagger\left(1+\frac{\boldsymbol{p}_2^2}{8m^2}+\frac{\boldsymbol{p}_4^2}{8m^2}+\frac{\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{p}_4}{4m^2}+i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}_2\times\boldsymbol{p}_4)}{4m^2}\right)\chi \\ &= 4m^2\left(1+2\frac{(2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}{8m^2}-2i\frac{(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})}{4m^2}\cdot(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Al desarrollar la parte espacial, se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{u}_3\gamma^i u_1\bar{v}_2\gamma^i v_4 &= \psi^\dagger\left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_3)\sigma^i+\sigma^i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_1)\right]\psi\ \chi^\dagger\left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_2)\sigma^i+\sigma^i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_4)\right]\chi = \\ &= \psi^\dagger[(2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^i - i(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q})^i]\psi\ \chi^\dagger[(-2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^i - i(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q})^i]\chi = \\ &= -(2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2 + 4i(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}) + 4\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2) - 4(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{S}_2)(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{S}_1). \end{aligned} \tag{16}$$

A continuación, podemos escribir la amplitud de probabilidad según estos términos, resaltando su significado físico y grado de contribución. Para expresar el propagador en límite no relativista $q^2 = q_0^2 - \boldsymbol{q}^2$, se realiza una expansión $\frac{1}{q^2} \approx -\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}(1+\frac{q_0^2}{\boldsymbol{q}^2})$. Podemos escribir q_0^2 en función de términos cinéticos, utilizando las ecuaciones de movimiento [9] , $\frac{q_0^2}{\boldsymbol{q}^4} \to -\frac{(\boldsymbol{p}'^2-\boldsymbol{p}^2)^2}{4m^2\boldsymbol{q}^4}$:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^t_{\text{QCD}} &= \frac{iC_f g_s^2}{\boldsymbol{q}^2}\left(4m^2 + 2(2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2 - 6i(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2) - 4\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2)\right. \\ &\left. +4(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{S}_2)(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{S}_1)\right)(1+\frac{q_0^2}{\boldsymbol{q}^2}) = \frac{iC_f g_s^2}{\boldsymbol{q}^2}(4m^2 + 2(2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2 - 6i(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2) \\ &- 4(\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2) - (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{S}_2)(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{S}_1)) - \frac{(2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}^2)^2}{\boldsymbol{q}^2}). \end{aligned} \tag{17}$$

Es importante notar que la expansión del propagador solo se aplica al término de orden principal $(4m^2)$. Dado que los demás términos son ya de orden $\mathcal{O}(\mathbf{p}^2)$ o $\mathcal{O}(\mathbf{q}^2)$, cualquier corrección por la expansión generaría términos de orden superior en v que despreciamos por consistencia en la expansión no relativista. Por último, se deben reconciliar las convenciones de normalización de los estados externos en ambas teorías. Mientras que en QCD los estados adoptan la normalización covariante relativista $\langle p'|p\rangle = 2E(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$, en NRQCD se emplea la normalización espacial estándar $\langle p'|p\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$. Por tanto, la amplitud extraída de QCD debe multiplicarse por un factor cinemático de $(2E)^{-1/2}$ por cada línea externa del diagrama. Expandiendo el producto de estos factores:

$$\prod_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{E_i}} = \frac{1}{4m^2}(1-\frac{\boldsymbol{p}_1^2+\boldsymbol{p}_2^2+\boldsymbol{p}_3^2+\boldsymbol{p}_4^2}{4m^2}) = \frac{1}{4m^2}(1-\frac{4\boldsymbol{p}^2+2\boldsymbol{q}^2-4\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4m^2}). \tag{18}$$

Finalmente, la amplitud del canal t en QCD queda:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^t_{\text{QCD}} &= C_f g_s^2\left(\frac{i}{\boldsymbol{q}^2} + i\frac{4\boldsymbol{p}^2-4\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{4m^2\boldsymbol{q}^2} - i\frac{(2\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}^2)^2}{4m^2\boldsymbol{q}^4} + 3\frac{(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})}{2m^2\boldsymbol{q}^2}\right. \\ &\left. -\frac{i}{m^2\boldsymbol{q}^2}(\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2) - (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{S}_2)(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{S}_1))\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Al tratar el caso de masas iguales, es necesario considerar también la contribución de la amplitud de aniquilación, que se calcula de manera análoga:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}^s_{\text{QCD}} &= \bar{v}_{2\,k}(-ig_s\gamma_\mu(T^a)_{ki})u_{1\,i}(-i\frac{\delta^{ab}g^{\mu\nu}}{q^2})\bar{u}_{3\,j}(-ig_s\gamma_\nu(T^b)_{jl})v_{4\,l} \\ &= -\frac{ig_s^2}{q^2}(\bar{v}_{2\,k}\gamma^0 u_{1\,i}\bar{u}_{3\,j}\gamma^0 v_{4\,l} - \bar{v}_{2\,k}\gamma^i u_{1\,i}\bar{u}_{3\,j}\gamma^i v_{4\,l})(T^a)_{ki}(T^a)_{jl} \\ &= -\frac{ig_s^2}{4m^2}\psi_k^\dagger\boldsymbol{\sigma}^i\chi_i\ \chi_j^\dagger\boldsymbol{\sigma}^i\psi_l(T^a)_{ki}(T^a)_{jl}. \end{aligned} \tag{20}$$

2.3.2. Amplitud en NRQCD

Para continuar, realizamos el mismo cálculo según la teoría de NRQCD. A partir del lagrangiano 5 se obtienen las reglas de Feynman de NRQCD. Los propagadores para el gluón longitudinal y transversal son, respectivamente:

$$\frac{i\delta^{ab}}{\boldsymbol{q}^2}; \qquad \frac{i}{q^2+i\eta}(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{\boldsymbol{q}^2})\delta^{ab}. \tag{21}$$

De todos los vértices de la teoría, aquellos relevantes para el orden de este cálculo (α_s y $1/m^2$) dependen de los coeficientes de Wilson y vienen dados por:

$$-ig_sT^a_{ji} \qquad \text{(Vértice de Coulomb)} \tag{22}$$

$$\frac{ig_s}{2m}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')T^a_{ji} \qquad \text{(Vértice de Dipolo)} \tag{23}$$

$$\frac{c_Fg_s}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{q})T^a_{ji} \qquad \text{(Vértice de Fermi)} \tag{24}$$

$$i\frac{c_Dg_s}{8m^2}\boldsymbol{q}^2T^a_{ji} \qquad \text{(Vértice de Darwin)} \tag{25}$$

$$\frac{c_Sg_s}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}'\times\boldsymbol{p})T^a_{ji} \qquad \text{(Vértice de } c_S\text{)} \tag{26}$$

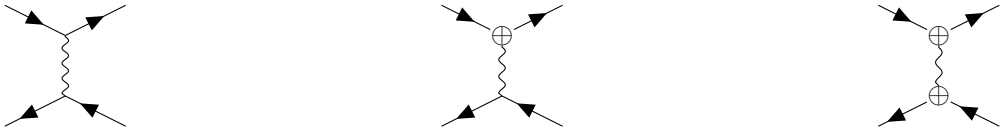
Las reglas de Feynman para antipartícula, se obtienen de las anteriores, sustituyendo $g_s \to -g_s$ y $T^a \to (T^a)^T$. Los vértices de los operadores de cuatro fermiones correspondientes a cada coeficiente viene descritos por el lagrangiano de interacción (9), y se observan representados en la figura 2.



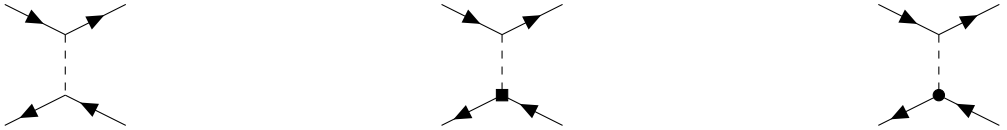
(a) d_{ss} (b) d_{sv} (c) d_{vs} (d) d_{vv}

Figura 2: Vértices de contacto de cuatro fermiones.

A continuación calculamos explícitamente la amplitud del mismo proceso para NRQCD, simplificando en la medida de lo posible, y comenzando por el intercambio de un gluón (los diagramas considerados para ello vienen reflejados en la figura 3):



(a) Dipolo-Dipolo (b) Dipolo-Fermi (c) Fermi-Fermi



(d) Coulomb-Coulomb (e) Coulomb-Darwin (f) Coulomb-c_S

Figura 3: Diagramas de Feynman organizados por tipo de propagador y vértices.

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{t}_{\text{NRQCD}} =& \frac{ig_s^2 C_f}{4m^2}(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_3})^i(\frac{1}{q^2+i\eta})(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{\boldsymbol{q}^2})(\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_4})^j + \frac{g_s^2 c_F C_f}{2m^2}(\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_3})^i(\frac{1}{q^2+i\eta}) \\
&\cdot(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{\boldsymbol{q}^2})(\boldsymbol{S_2}\times\boldsymbol{q})^j + \frac{g_s^2 c_F C_f}{2m^2}(\boldsymbol{S_1}\times\boldsymbol{q})^i(\frac{1}{q^2+i\eta})(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{\boldsymbol{q}^2})(\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_4})^j \\
&-\frac{ig_s^2 C_f c_F^2}{m^2}(\boldsymbol{S_1}\times\boldsymbol{q})^i(\frac{1}{q^2+i\eta})(\delta_{ij}-\frac{q_iq_j}{\boldsymbol{q}^2})(\boldsymbol{S_2}\times\boldsymbol{q})^j + \frac{ig_s^2 C_f}{\boldsymbol{q}^2} - 2\frac{ig_s^2 c_D C_f}{8m^2} \\
&-\frac{ig_s^2 c_S C_f}{2m^2\boldsymbol{q^2}}\boldsymbol{S}_1\cdot(\boldsymbol{p_3}\times\boldsymbol{p_1}) - \frac{ig_s^2 c_S C_f}{2m^2\boldsymbol{q^2}}\boldsymbol{S}_2\cdot(\boldsymbol{p_4}\times\boldsymbol{p_2}).
\end{aligned} \tag{27}
$$

Una vez más, en el sistema del centro de masas podemos escribir la amplitud en función de $\boldsymbol{p}$ y del momento del propagador $\boldsymbol{q}$. De esta manera obtenemos una igualdad que podemos comparar con la de la teoría completa, calculada en el apartado anterior (19).

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{t}_{\text{NRQCD}} =& g_s^2 C_f[\frac{c_F}{m^2\boldsymbol{q}^2}(\boldsymbol{S_1}+\boldsymbol{S_2})\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p}) - \frac{ic_F^2}{m^2\boldsymbol{q}^2}[\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{S_1}\cdot\boldsymbol{S_2}) - (\boldsymbol{S_1}\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{S_2}\cdot\boldsymbol{q})] \\
&+\frac{i}{4m^2\boldsymbol{q}^2}(4\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2-4\boldsymbol{pq}) - \frac{i}{4m^2\boldsymbol{q^4}}(2\boldsymbol{pq}-\boldsymbol{q}^2)^2 + \frac{i}{\boldsymbol{q}^2} - 2\frac{ic_D}{8m^2} + \frac{c_S}{2m^2\boldsymbol{q^2}}(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S_2})\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})].
\end{aligned} \tag{28}
$$

La contribución de aniquilación se corresponderá, por otro lado, con los diagramas de contacto de NRQCD, donde la amplitud será $i\mathcal{M}_{\text{NRQCD 4f}} = i\mathcal{L}_{\psi\chi_c}$. Para simplificar el *matching*, se puede aplicar una transformación de Fierz para reordenar los términos y expresar el lagrangiano en función del campo χ: [10]

$$
\mathcal{L}_{\psi\chi 4\text{f}} = \frac{d^c_{ss}}{m^2}\psi^\dagger\chi\chi^\dagger\psi + \frac{d^c_{sv}}{m^2}\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi + \frac{d^c_{vs}}{m^2}\psi^\dagger T^a\chi\chi^\dagger T^a\psi + \frac{d^c_{vv}}{m^2}\psi^\dagger T^a\boldsymbol{\sigma}\chi\chi^\dagger T^a\boldsymbol{\sigma}\psi. \tag{29}
$$

La amplitud resultante es:

$$
i\mathcal{M}^{\text{4f}}_{\text{NRQCD}} = \frac{i}{m^2}(d^c_{ss}\ \psi^\dagger\chi\chi^\dagger\psi + d^c_{sv}\ \psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi + d^c_{vs}\ \psi^\dagger T^a\chi\chi^\dagger T^a\psi + d^c_{vv}\ \psi^\dagger T^a\boldsymbol{\sigma}\chi\chi^\dagger T^a\boldsymbol{\sigma}\psi), \tag{30}
$$

donde la relación entre los coeficientes en cada base viene dada por:

$$
\begin{aligned}
d_{ss} &= -\frac{d^c_{ss}}{2N_c} - \frac{3d^c_{sv}}{2N_c} - \frac{N_c^2-1}{4N_c^2}d^c_{vs} - 3\frac{N_c^2-1}{4N_c^2}d^c_{vv}, \\
d_{sv} &= -\frac{d^c_{ss}}{2N_c} + \frac{d^c_{sv}}{2N_c} - \frac{N_c^2-1}{4N_c^2}d^c_{vs} + \frac{N_c^2-1}{4N_c^2}d^c_{vv}, \\
d_{vs} &= -d^c_{ss} - 3d^c_{sv} + \frac{d^c_{vs}}{2N_c} + \frac{3d^c_{vv}}{2N_c}, \\
d_{vv} &= -d^c_{ss} + d^c_{sv} + \frac{d^c_{vs}}{2N_c} - \frac{d^c_{vv}}{2N_c}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Finalmente, se realiza el *matching* comparando las amplitudes de dispersión para cada canal por separado, debido a que representan contribuciones dinámicamente independientes: $i\mathcal{M}^{t}_{\text{QCD}} = i\mathcal{M}^{t}_{\text{NRQCD}}$ y $i\mathcal{M}^{s}_{\text{QCD}} = i\mathcal{M}^{4f}_{\text{NRQCD}}$. Obtenemos así los valores de los coeficientes de Wilson, a primer orden (nivel árbol):

$$\begin{cases} c_F = 1, \\ c_D = 1, \\ c_S = 1. \end{cases} \quad (32) \qquad \begin{cases} d^c_{ss} = d^c_{sv} = d^c_{vs} = 0, \\ d^c_{vv} = -\frac{g_s^2}{4} = -\alpha_s \pi. \end{cases} \quad (33) \qquad \begin{cases} d_{ss} = \frac{2}{3}\alpha\pi, \\ d_{sv} = -\frac{2}{9}\alpha\pi, \\ d_{vs} = -\frac{1}{2}\alpha\pi, \\ d_{vv} = \frac{1}{6}\alpha\pi. \end{cases} \quad (34)$$

Como se observa en las ecuaciones (32), los coeficientes de Wilson de los términos bilineales son la unidad a nivel árbol, ya que a este orden coinciden directamente con los acoplamientos originales de QCD sin recibir correcciones de la escala de la masa. Por otro lado, los coeficientes de cuatro fermiones en (33) y (34) son distintos de cero porque los procesos de aniquilación o intercambio de gluones energéticos que codifican se contraen en interacciones de contacto locales al pasar a NRQCD. Ambos comportamientos se han verificado contrastándolos con la literatura de referencia [11].

2.4. pNRQCD

NRQCD es una herramienta útil para tratar el quarkonio, pero presenta ciertas limitaciones: sigue habiendo grados de libertad dinámicos de la escala *soft*, lo cual hace que las reglas de *power counting* no sean homogéneas y que la expansión dependa de dos escalas, manteniendo cierta arbitrariedad. La teoría pNRQCD nace, como solución a este problema, de integrar los modos asociados a la escala *soft* (mv) , dejando libres solamente los *ultrasoft* (mv^2).

Al integrar los modos de energía asociados a la escala *soft*, se logra distinguir qué contribuciones pertenecen a la dinámica cuántica que seguirá siendo libre (los gluones *ultrasoft* y los quarks «potenciales» restantes, de trimomento *soft* y energía *ultrasoft*) y cuáles deben ser absorbidas por un coeficiente que describa la interacción entre fermiones. La primera equivale al lagrangiano de NRQCD para escala *ultrasoft*, mientras que la segunda se corresponde con un potencial efectivo V_{pNRQCD} [6]:

$$L_{\text{pNRQCD}} = L^{US}_{\text{NRQCD}} + L_{\text{pot}}. \quad (35)$$

$$L_{\text{pot}} = -\int d^3\boldsymbol{x}_1 d^3\boldsymbol{x}_2 \; \psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}_1)\chi(t,\boldsymbol{x}_2)\; V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)(\text{gluones } \textit{ultrasoft})\chi(t,\boldsymbol{x}_2)^\dagger\psi(t,\boldsymbol{x}_1) \quad (36)$$

Los grados de libertad de pNRQCD pueden ser descritos por los mismos campos que NRQCD. Sin embargo, cabe mencionar la utilidad de realizar una proyección del lagrangiano al sector quark-antiquark del espacio de Fock. En este proceso, el sistema $Q\bar{Q}$ deja de describirse mediante campos de quarks individuales para representarse como un dipolo con una distancia relativa r explícita. Esto permite clasificar el sistema según su estado de color en campos de singlete y octete, facilitando el cálculo de transiciones mediante una expansión multipolar. Así, el potencial surge de forma natural como un coeficiente que encapsula la física de corta distancia, permitiendo que pNRQCD recupere la estructura de un modelo de potencial no relativista derivado directamente desde QCD [12]. En este caso el par quark-antiquark se representa por un solo campo que se puede descomponer en componentes de singlete y octete:

$$\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)_{\alpha\beta} \sim \psi_\alpha(\mathbf{x}_1,t)\,\chi^\dagger_\beta(\mathbf{x}_2,t) \sim \frac{1}{N_c}\,\delta_{\alpha\beta}\,\psi_\sigma(\mathbf{x}_1,t)\,\chi^\dagger_\sigma(\mathbf{x}_2,t) + \frac{1}{T_F}\,T^a_{\alpha\beta}\,T^a_{\rho\sigma}\,\psi_\sigma(\mathbf{x}_1,t)\,\chi^\dagger_\rho(\mathbf{x}_2,t), \quad (37)$$

$$\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t) = P\Big[e^{ig\int_{\mathbf{x}_2}^{\mathbf{x}_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}}\Big]\,S(\mathbf{r},\mathbf{R},t) + P\Big[e^{ig\int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{x}_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}}\Big]\,O(\mathbf{r},\mathbf{R},t)P\Big[e^{ig\int_{\mathbf{x}_2}^{\mathbf{R}}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{x}}\Big] \quad (38)$$

donde P indica ordenación de caminos, $\boldsymbol{R}$ es la posición del centro de masas y $\boldsymbol{r}$ es la distancia relativa entre el par. El lagrangiano se construye de la manera más general posible (siendo compatible con las simetrías de QCD) como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{pNRQCD}} = &\int d^3\boldsymbol{r}\text{Tr}\{S^\dagger(i\partial_0 - h_s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},\boldsymbol{P_r},\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{S_2}))S + O^\dagger(iD_0 - h_o(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},\boldsymbol{P_r},\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{S_2}))O\} \\ &+ V_A(r)\text{Tr}\{O^\dagger\boldsymbol{r}\cdot g\boldsymbol{E}S + S^\dagger\boldsymbol{r}\cdot g\boldsymbol{E}O\} + \frac{V_B(r)}{2}\text{Tr}\{O^\dagger\boldsymbol{r}\cdot g\boldsymbol{E}O + O^\dagger O\boldsymbol{r}\cdot g\boldsymbol{E}\} \\ &- \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu a} + \sum_{i=1}^{n_f}\bar{q}_i i\not{D}q_i,\end{aligned} \tag{39}$$

donde h_s y h_o se pueden separar en un término cinético y uno potencial:

$$h_s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_r} + V_s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2), \tag{40}$$

$$h_o(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_r} + V_o(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2), \tag{41}$$

2.5. *Matching* de NRQCD a pNRQCD

A nivel árbol, pNRQCD es, por construcción, una teoría donde la única contribución a la dispersión $q\bar{q} \to q\bar{q}$ proviene del vértice de interacción instantáneo. Debido a que en este orden de aproximación no existen correcciones de bucles (*loops*) en la escala de baja energía que redefinan la interacción, la amplitud de dispersión en la teoría efectiva se reduce trivialmente al valor de dicho vértice. Por lo tanto, para garantizar que pNRQCD reproduzca la misma física que NRQCD en la región infrarroja, el potencial en el espacio de momentos $\tilde{V}$ debe relacionarse con la amplitud $\mathcal{M}$ calculada en la teoría subyacente según la expresión dada por la aproximación de Born:

$$\langle p'|\, iT\,|p\rangle = -i\,\langle p'|\,\tilde{V}(\mathbf{q})\,|p\rangle \tag{42}$$

A partir de este punto, se realiza una proyección en el singlete, para obtener solamente los potenciales que influyen en el cálculo de niveles de energía (V_s). Conlleva el mayor interés fenomenológico debido a que, a causa del confinamiento de color, representa la configuración en la que el par $q\bar{q}$ forma un estado ligado estable y físicamente observable.

Relacionando la expresión (42) con la amplitud de probabilidad de la dispersión del quark-antiquark, calculada en la ecuación (28), obtenemos los potenciales contribuyentes a la interacción, a nivel árbol. La relación entre la amplitud y el potencial queda simplificada a $i\mathcal{M} = -iV$. Comenzando con el término más importante:

$$\tilde{V}_c(\boldsymbol{q}) = -\frac{C_f g_s^2}{|\boldsymbol{q}|^2}. \tag{43}$$

Trivialmente, podemos transformarlo al espacio de posiciones, consiguiendo una expresión análoga al potencial de Coulomb:

$$V_c(r) = -\int dq^3 \frac{C_f g_s^2}{(2\pi)^3 |\boldsymbol{q}|^2} e^{i\boldsymbol{qx}} = -\int dq d\theta d\phi \frac{C_f g_s^2 sen(\theta)}{(2\pi)^3} e^{iqrcos(\theta)} = -\frac{C_f \alpha_s}{r}. \tag{44}$$

El término $-\frac{ig_s C_f c_F^2}{m^2 \boldsymbol{q}^2}[\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{S_1}\cdot\boldsymbol{S_2})-(\boldsymbol{S_1}\cdot\boldsymbol{q})(\boldsymbol{S_2}\cdot\boldsymbol{q})]$ de la ecuación (28) dará los potenciales dependientes de espín $\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2$ y $\boldsymbol{S}_{12} = 4(3(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{S_1})(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{S_2}) - \boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2})$:

$$\tilde{V}_{SS}(\boldsymbol{q}) = \frac{C_f c_F^2 g_s^2}{m^2}(\boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2} - \frac{1}{|\boldsymbol{q}|^2}(\boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{q})(\boldsymbol{S_2} \cdot \boldsymbol{q})). \tag{45}$$

El primer sumando, al no presentar dependencia explícita en el momento, puede integrarse directamente, dando lugar a una delta de Dirac en el espacio de posiciones. El segundo término se resuelve según la propiedad:

$$\int dq^3 \frac{e^{i\boldsymbol{qr}} q_i q_j}{(2\pi)^3 \boldsymbol{q}^2} = -\partial_i \partial_j (\frac{1}{4\pi r}), \tag{46}$$

que, a su vez, se puede reescribir según la expresión (47).

$$\partial_i \partial_j (\frac{1}{4\pi r}) = \frac{3 r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{4\pi r^5} - \frac{\delta_{ij} \delta^{(3)}(r)}{3}. \tag{47}$$

De esta manera, llegamos a la contribución espín-espín del potencial en espacio de posiciones:

$$\begin{aligned} V_{S_1 S_2}(r) =& \frac{c_F^2 C_f g_s^2}{m^2}(\boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2} \delta^{(3)}(r) - \frac{\boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2} \delta^{(3)}(r)}{3}) = \frac{2 c_F^2 C_f g_s^2 \boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2} \delta^{(3)}(r)}{3 m^2} = \\ &= \frac{c_F^2 C_f \alpha_s \boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2}}{m^2} \frac{8\pi \delta^{(3)}(r)}{3}. \end{aligned} \tag{48}$$

Además de la contribución del operador tensorial de espín, donde $\boldsymbol{S}_{12}$:

$$V_{S_{12}} = \frac{\alpha_s C_f c_F^2}{m^2} \frac{3(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{S_1})(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{S_2}) - r^2(\boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2})}{r^5} = \frac{\alpha_s C_f c_F^2 \boldsymbol{S}_{12}}{4 \boldsymbol{r}^3 m^2}. \tag{49}$$

A continuación, obtenemos el potencial en espacio de momentos para los términos que contienen productos de espín por el producto vectorial de momentos $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}$:

$$\tilde{V}_{LS}(\boldsymbol{q}) = \frac{i C_f g_s^2}{|\boldsymbol{q}|^2 m^2}(\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}) \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p})(c_F + \frac{c_s}{2}). \tag{50}$$

Se puede transformar al espacio de posiciones, donde introducimos el espín total $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$. Para resolver la integral usamos nuevamente que $q_i e^{i\boldsymbol{qr}} = -i\partial_i e^{i\boldsymbol{qr}}$, de modo que:

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{q_i}{\boldsymbol{q}^2} e^{i\boldsymbol{qr}} = -\frac{i r_i}{4\pi r^3}. \tag{51}$$

El resultado se refleja en la ecuación (52), donde $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$:

$$\begin{aligned} V_{LS}(r) &= \frac{i C_f g_s^2}{m^2}(c_F + \frac{c_s}{2}) \int \boldsymbol{d^3 q} \frac{e^{i\boldsymbol{qr}}}{(2\pi)^3 |\boldsymbol{q}|^2} \epsilon_{ijk} S_i q_j p_k = \frac{i C_f g_s^2}{m^2}(c_F + \frac{c_s}{2}) \epsilon_{ijk} S_i \frac{i r_j}{4\pi r^3} p_k \\ &= \frac{C_f \alpha_s}{m^2 r^3} \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}(c_F + \frac{c_s}{2}). \end{aligned} \tag{52}$$

La contribución de los términos cinéticos, independientes del espín, en la ecuación (28) viene dada por el potencial (53):

$$\tilde{V}_{\rm cin}(\boldsymbol{q})) = -\frac{C_f g_s^2}{|\boldsymbol{q}|^2 4m^2}\left((4\boldsymbol{p}^2 - 4\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2) - \frac{(2\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^2)^2}{\boldsymbol{q}^2}\right). \tag{53}$$

La transformada de Fourier de la anterior expresión está formada por una combinación de casos, por lo que el potencial cinético en espacio de posiciones resulta en la expresión (54), donde hemos usado las relaciones de conmutación y anticonmutación entre posición y momento para simplificar la expresión. Definiendo $\frac{\boldsymbol{L}^2}{\boldsymbol{r}^2} = \boldsymbol{p}^2 - \frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})^2}{\boldsymbol{r}^2}$,

$$V_{\rm cin}(r) = -\frac{C_f g_s^2}{8\pi m^2}(\frac{\boldsymbol{p}^2}{r} + \frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})^2}{r^3}) = -\frac{C_f \alpha_s}{m^2}\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}, \boldsymbol{p}^2\right\} - 2\pi\delta^{(3)}(r) - \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{L}^2}{r^3}\right). \tag{54}$$

La contribución del coeficiente de Darwin da lugar al potencial:

$$\tilde{V}_{c_D} = \frac{2g_s^2 C_f c_D}{8m^2}, \tag{55}$$

que en espacio de posiciones se expresa como:

$$V_{c_D} = \frac{\alpha_s \pi C_f c_D}{m^2}\delta^{(3)}(r). \tag{56}$$

Por último, el potencial dado por los coeficientes de contacto de cuatro fermiones, extraído directamente de la proyección en el singlete de la expresión (9), será:

$$\tilde{V}_{\rm 4f} = \frac{C_f}{m^2}[d_{vs} + 3d_{vv} + \frac{1}{C_f}(3d_{sv} + d_{ss}) - 2\boldsymbol{S}^2(\frac{1}{C_f}d_{sv} + d_{vv})], \tag{57}$$

que en espacio de posiciones se escribe:

$$V_{\rm 4f} = \frac{C_f}{m^2}[d_{vs} + 3d_{vv} + \frac{1}{C_f}(3d_{sv} + d_{ss}) - 2\boldsymbol{S}^2(\frac{1}{C_f}d_{sv} + d_{vv})]\delta^{(3)}(r), \tag{58}$$

El potencial total, a nivel árbol y orden $1/m^2$

$$V_s(r;\mu) = V_c(r;\mu) + V_{S_1S_2}(r;\mu) + V_{S_{12}}(r;\mu) + V_{LS}(r;\mu) + V_{cin}(r;\mu) + V_{c_D}(r;\mu) + V_{4f}(r;\mu). \tag{59}$$

El resto de componentes quedan recogidas en la tabla 1.

$$
\begin{aligned}
V_c(r;\mu) &= -\frac{C_f\alpha_s}{r} \\
V_{S_1S_2}(r;\mu) &= \frac{8\pi}{3m^2}C_f\alpha_s c_F^2\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 \\
V_{S_{12}}(r;\nu) &= \frac{\alpha_s C_f c_F^2}{4r^3m^2}\boldsymbol{S}_{12} \\
V_{LS}(r;\mu) &= \frac{C_f\alpha_s}{m^2r^3}\left(c_F+\frac{c_s}{2}\right)\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} \\
V_{\rm cin}(r;\mu) &= -\frac{C_f\alpha_s}{m^2}\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r},\boldsymbol{p}^2\right\}-2\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})-\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{L}^2}{r^3}\right) \\
V_{c_D}(r;\mu) &= \frac{\alpha_s\pi C_f c_D}{m^2}\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}) \\
V_{\rm 4f}(r;\mu) &= \frac{C_f}{m^2}[d_{vs}+3d_{vv}+\frac{1}{C_f}(3d_{sv}+d_{ss})-2\boldsymbol{S}^2(\frac{1}{C_f}d_{sv}+d_{vv})]\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

Tabla 1: Potenciales de pNRQCD a nivel árbol y orden $1/m^2$.

Al sustituir las expresiones de los coeficientes de Wilson a nivel árbol de la ecuaciones (32), (33) y (34), se recupera la estructura del potencial estático de Coulomb (proporcional a $1/r$) junto a las correcciones relativistas de orden $1/m^2$. Estas componentes, tanto las dependientes como las independientes del espín, resultan completamente coherentes con el formalismo a orden más bajo y coinciden con los resultados establecidos en la literatura científica [11]. Como se puede comprobar, para $C_f = 4/3$, todas las combinaciones de los coeficientes de cuatro fermiones presentes en los potenciales se anulan idénticamente. La desaparición de estas contribuciones se entiende formalmente al evaluar la proyección del canal s sobre el singlete de color: $\langle\mathbf{1}|_f\,(T^a)_{ki}(T^a)_{jl}\,|\mathbf{1}\rangle_i = \frac{1}{N_C}\delta_{ik}\delta_{jl}(T^a)_{ki}(T^a)_{jl} = \frac{1}{N_C}(T^a)_{ii}(T^a)_{jj} = 0$, la cual es nula debido a que las matrices generadoras de $SU(3)$ tienen traza cero. Físicamente, esto demuestra que un estado singlete de color no puede transicionar a un estado de un solo gluón (octete) sin romper la invarianza de color de la interacción. Por tanto, la aniquilación mediante el canal s es inaccesible para el estado ligado a este orden. Como consecuencia, a nivel árbol, los procesos de aniquilación son incapaces de generar correcciones de contacto al potencial.

Es instructivo notar que, al tomar el límite de la Electrodinámica Cuántica (QED) ($C_f \to 1$ y $\alpha_s \to \alpha$), estas expresiones reproducen exactamente las correcciones relativistas conocidas en la mecánica cuántica para sistemas ligados abelianos (como el átomo de hidrógeno o el positronio), incluyendo el acoplamiento espín-órbita y el desdoblamiento hiperfino [13]. En el régimen no relativista, ambos sistemas comparten una misma estructura efectiva debido a que la forma funcional de los potenciales viene dictada por las simetrías espaciotemporales. La distinción física reside en la naturaleza de la teoría gauge subyacente, la cual queda encapsulada tanto en los factores de color como en los coeficientes de Wilson.

La estructura de los potenciales efectivos obtenidos viene determinada, además, por la dependencia explícita de los coeficientes de Wilson de NRQCD, que permite obtener las correcciones y efectos de la escala *hard* al orden deseado. También facilita el uso de las ecuaciones de grupo de renormalización para resumar los grandes logaritmos del tipo $\ln(\mu/m)$ de la expansión perturbativa, optimizando su convergencia.

3. *Running* de la constante de acoplo fuerte

A nivel físico, la intensidad de la interacción cromodinámica depende intrínsecamente de la distancia espacial a la que interactúan las partículas, ya que el vacío cuántico actúa como un medio polarizable repleto de fluctuaciones de quarks y gluones virtuales que distribuyen la carga de color. Debido al principio de incertidumbre, en la práctica, la constante de acoplo se describe matemáticamente como una función dependiente de la escala de energía del proceso. Al introducir contribuciones más complejas, como *loops*, las computaciones de cualquier teoría cuántica de campos pueden resultar divergentes y hacer necesaria la regularización y renormalización de la teoría. A continuación se comprobará cómo este proceso traduce la dependencia de la energía en una dependencia explícita de la constante de acoplo respecto a la escala de renormalización μ, y qué consecuencias tiene en los cálculos de cantidades físicas a partir de las teorías efectivas desarrolladas.

En la actualidad, la definición de α_s ha sido adoptada casi universalmente en términos de la Regularización Dimensional. Ésta consiste en formular la teoría en $d < 4$ dimensiones espacio-temporales, con el objetivo de hacer finitas las divergencias ultravioletas. Las dimensiones de los campos cambian en d dimensiones y, como consecuencia, las constantes de acoplamiento de gauge pasan a tener dimensión $g_0 = \mu^\epsilon g_B$, donde g es adimensional y μ es una escala de masas. Como la acción (1) debe ser adimensional: $d = 4 - 2\epsilon$. Así, la expresión formal típica de las integrales de *loop* que traen estas divergencias será [14]:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{d^{(4-2\epsilon)} k}{(2\pi)^{(4-2\epsilon)}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} = \frac{\Gamma(\epsilon)(-m^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \tag{60}$$

El proceso de renormalización consiste en absorber las divergencias mediante la redefinición de los parámetros de la teoría. En el esquema de Sustracción Mínima Modificada ($\overline{\text{MS}}$), que es el más común en este tipo de cálculos, las constantes de acoplo desnuda (g_0) y renormalizada (g_R) se relacionan a través de una constante de renormalización Z_g:

$$g_0 = \mu^\epsilon Z_g g_R(\mu) \tag{61}$$

Dado que la constante desnuda g_0 es un parámetro fundamental de la teoría original y no puede depender de la escala arbitraria μ introducida en la regularización, se debe cumplir la condición de invarianza: $\frac{dg_0}{d\mu} = 0$. Aplicando esta derivada total a la relación anterior, se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la constante de acoplo con la escala, conocida como la función β de QCD [15]:

$$\beta(g_R; \epsilon) \equiv \mu \frac{dg_R}{d\mu} = -\epsilon g_R - \frac{\mu g_R}{Z_g} \frac{dZ_g}{d\mu}. \tag{62}$$

Tomando el límite físico $\epsilon \to 0$ y expresando el resultado en términos de la constante de estructura fina de la interacción fuerte, $\alpha_s \equiv g_R^2/(4\pi)$, la Ecuación del Grupo de Renormalización (RGE) adopta la forma estándar:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \frac{\alpha_s^{(n_f)}(\mu)}{\pi} \equiv \alpha_s^{(n_f)} \beta^{(n_f)}(\alpha_s^{(n_f)}; 0) \equiv \alpha\beta(\alpha) = -2\alpha \frac{d}{d\alpha} Z_\alpha^{(1)}, \tag{63}$$

donde

$$Z_\alpha^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi}\beta_0 + \cdots \quad ; \quad \alpha\beta(\alpha) = -2\alpha(\beta_0 \frac{\alpha}{4\pi} + \beta_1 (\frac{\alpha}{4\pi})^2 + \cdots). \tag{64}$$

Así se puede comprobar cómo varía la constante de acoplo según la escala de renormalización μ y su característica de libertad asintótica. Para evidenciar este comportamiento, el primer coeficiente de la

función beta se expresa en términos de los invariantes del grupo de gauge como: $\beta_0 = \frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}T_F n_f$ donde para el grupo de color $SU(3)$, $C_A = 3$ y $T_F = 1/2$. Al evaluar estos factores, teniendo en cuenta que en el Modelo Estándar el número de sabores activos es siempre $n_f \leq 6$, se garantiza que $\beta_0 > 0$. Introduciendo este resultado en las ecuaciones (64) y (63), se comprueba que la constante de acoplo disminuye su valor a altas energías. En contraposición, en la QED, al tratarse de una teoría abeliana ($U(1)$), $C_A = 0$ y $T_F = 1$. Como consecuencia, $\beta_0 < 0$ y se invierte el comportamiento de la teoría, dando lugar al apantallamiento de la carga, donde la interacción se vuelve más intensa a energías elevadas.

Debido a que el valor de β_0 depende explícitamente del número de sabores activos n_f, la evolución de $\alpha_s(\mu)$ debe modificarse al cruzar los umbrales cinemáticos impuestos por las masas de los quarks pesados. Cuando la escala μ desciende por debajo de la masa de un quark pesado, este deja de comportarse como una partícula dinámica en las correcciones de los *loops* y se desacopla de la teoría efectiva. Para garantizar la continuidad de la teoría, se realiza un procedimiento de *matching* para α_s en los umbrales de masa $\mu = m_Q$. A nivel árbol, la condición de contorno exige simplemente la continuidad de la constante: $\alpha_s^{(n_f-1)}(m_Q) = \alpha_s^{(n_f)}(m_Q)$. Este esquema por tramos consigue definir el comportamiento de la constante de acoplo en función de la región energética relevante para el cálculo del potencial del quarkonio.

4. Fenomenología: Desdoblamiento hiperfino para masas iguales $(b\bar{b})$, $(c\bar{c})$

Una vez establecido el formalismo de pNRQCD, su validez se contrasta mediante aplicaciones fenomenológicas. En particular, se calculan observables físicos susceptibles de ser comprobados o refutados experimentalmente, proporcionando además una guía para futuras investigaciones experimentales. Nos centraremos en un análisis de las aplicaciones de pNRQCD en el régimen de acoplamiento débil, es decir, cuando la escala *soft* es mucho mayor que el umbral ($mv \gg \Lambda_{QCD}$). En este régimen, debido a que en QCD el acoplamiento disminuye a altas escalas de momento, la condición implica que $\alpha(mv) < 1$ sea lo suficientemente pequeña como para permitir calcular perturbativamente el potencial efectivo.

A nivel cuantitativo, el estudio de la posición de los niveles de energía del quarkonio pesado y las transiciones entre ellos resulta indispensable para validar los modelos teóricos de la interacción fuerte. Así como el estudio del espectro del átomo de hidrógeno reveló la estructura del átomo, el espectro del quarkonio, que es considerado el «átomo de hidrógeno de la QCD», permite entender la interacción fuerte entre quarks. Dentro del estudio de la espectroscopía del quarkonio pesado, uno de los observables más sensibles a la dinámica de espín es el desdoblamiento o splitting hiperfino (HFS). Este representa la diferencia de energía entre los estados de espín y constituye una prueba rigurosa para la capacidad predictiva de pNRQCD en el régimen de acoplamiento débil. A continuación, se presenta el cálculo de esta energía de desdoblamiento y su sensibilidad frente a variaciones de la escala de renormalización μ, comparando el resultado teórico a distintos órdenes en el desarrollo perturbativo, con los valores experimentales para los sistemas correspondientes.

Para un estado de quarkonio pesado, se puede obtener la energía de desdoblamiento hiperfino calculando la diferencia energética entre los estados de singlete (S=0) y triplete (S=1). En concreto se estudiarán los sistemas ligados $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$ con momento orbital cero ($L = 0$). A nivel árbol, se puede utilizar el potencial dependiente de espín obtenido mediante NRQCD (48) para encontrar la energía.

Al tratarse de una diferencia de energías entre estados con idéntica parte espacial ($L = 0$), solo contribuyen los potenciales dependientes del espín. El término espín-órbita se anula trivialmente al ser $\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\Big(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\Big) = 0$, el tensorial promedia a cero por simetría esférica, y las correcciones relativistas puramente centrales se cancelan en la sustracción, quedando:

$$E_S = \langle V_{SS} \rangle = \frac{8\pi C_f c_F^2 \alpha_s}{3m^2} \langle \boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2} \rangle \langle \delta^{(3)}(r) \rangle \,, \tag{65}$$

donde los valores esperados del operador de espín-espín y de la delta de Dirac son [16]:

$$\langle \boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2} \rangle = \frac{1}{2}[s(s+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)], \tag{66}$$

$$\langle \delta^{(3)}(r) \rangle = \frac{1}{a_0^3 \pi n^3} = \frac{(m_r C_f \alpha_s)^3}{\pi n^3}. \tag{67}$$

De esta manera, se obtiene una expresión para el desdoblamiento de energía hiperfino en estados ligados de quark-antiquark con masas iguales, a primer orden (LO), que es proporcional a α_s^4. El valor de c_F^2 a este orden, como se demuestra en los resultados (32), es uno. Se evaluará en el estado $n = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{HF}^{LO} =& E_{s=1} - E_{s=0} = \langle V_{SS} \rangle_{s=1} - \langle V_{SS} \rangle_{s=0} = \frac{8\pi C_f \alpha_s}{3m^2}(\frac{1}{4} - (-\frac{3}{4}))\frac{(m_r C_f \alpha_s)^3}{\pi n^3} \\ &= \frac{8\pi C_f \alpha_s}{3m^2}\frac{1}{\pi n^3 a_0^3} = \frac{C_f^4 \alpha_s^4 m}{3n^3} = \frac{C_f^4 \alpha_s^4 m}{3}. \end{aligned} \tag{68}$$

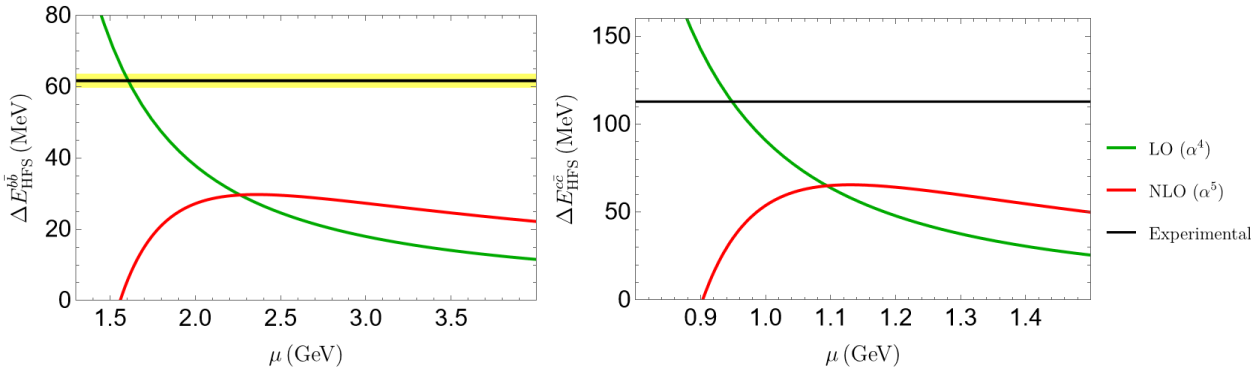
Será de interés también contrastar los resultados, añadiendo las contribuciones de un orden mayor, es decir, a un *loop*. La energía HFS a segundo orden (NLO) resultante queda reflejada en la ecuación (69), que se ha obtenido a partir de la expresión completa de los niveles de energía a cuarto orden ($\mathrm{N^3LO}$) para quarkonio pesado, de la referencia [17], para el caso de $n = 1$ y $L = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{HF}^{NLO} =& \frac{C_f^4 \alpha_s^4 m}{3}\left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\left(\beta_0 \pi^2 (\frac{2L_\mu}{\pi^2} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{2}C_f - \frac{3}{2}T_F(\ln 2 - 1) - \frac{2}{9}n_l T_F \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{3}{4}C_A(L_H \frac{7}{3} - \frac{43}{27})\right)\right], \end{aligned} \tag{69}$$

donde $L_\mu = \ln(\frac{n\mu}{C_f \alpha_s m_q}) + S_1(n+L) = \ln(\frac{\mu}{C_f \alpha_s m_q}) + 1$ y $L_H = \ln(\frac{n}{C_f \alpha_s}) + S_1(n+L) = \ln(\frac{1}{C_f \alpha_s}) + 1$. Las funciones β_n son las resultantes de la expansión de beta, definida en la ecuación (62), que son necesarias para resolver la RGE.

La figura 4 muestra la dependencia de la energía de desdoblamiento hiperfino del estado (1S) del bottomonio y del charmonio con la escala de renormalización (μ), calculada en el marco de pNRQCD a primer y segundo orden, junto con los valores experimentales extraídos del Particle Data Group (PDG) [18]. Debe señalarse que los errores teóricos asociados a estas predicciones son considerables y no se han representado en la figura, por lo que el análisis y comparación con el valor experimental consiste en una indicación cualitativa del comportamiento del cálculo perturbativo.

En primer lugar, se observa una divergencia de las predicciones teóricas cuando la escala de renormalización disminuye, a $\mu \approx 1.5\,\mathrm{GeV}$ para el bottomonio y a $\mu \approx 0.9\,\mathrm{GeV}$ para el charmonio. La



(a) Representación del bottomonio.

(b) Representación del charmonio.

Figura 4: Splitting hiperfino del 1S quarkonio como función de la escala de renormalización μ en las aproximaciones de LO y NLO. La banda horizontal representa el valor experimental

libertad asintótica de QCD implica que la constante de acoplo fuerte α_s alcance valores muy altos al disminuir la escala de renormalización μ, llegando a comprometer la validez de la expansión perturbativa. Esta divergencia refleja, por tanto, la aproximación a un régimen no perturbativo donde la descripción en términos de una serie en potencias de (α_s) deja de ser fiable. Su posición exacta depende de la validez de la EFT para el sistema estudiado Asimismo, en el régimen no perturbativo la divergencia para el NLO se hace negativa al constar de correcciones que pueden hacerse equiparables o mayores que el término LO. Precisamente por este motivo, las curvas correspondientes a NLO presentan un máximo para valores intermedios de la escala, en la región de transición entre regímenes.

Para escalas de renormalización mayores, tanto el resultado LO como NLO muestran una disminución de la energía de desdoblamiento hiperfino al aumentar μ, que puede entenderse nuevamente por la evolución de α_s: a escalas más altas la interacción fuerte se debilita. Comparando las predicciones teóricas con el valor experimental (61.7 ± 2.0) MeV para el bottomonio, y (112.8 ± 0.4)MeV para el charmonio, se aprecia que tanto la energía de desdoblamiento hiperfino para LO como para NLO proporcionan valores significativamente menores. Esta aparente discrepancia, como ya se ha mencionado, no es preocupante debido a las incertidumbres teóricas importantes, como las contribuciones de órdenes perturbativos superiores no incluidas, posibles efectos no perturbativos y la elección de los parámetros de entrada. Esta subestimación a órdenes bajos y su fuerte dependencia con μ coinciden con lo descrito en la literatura [19], [20], donde se demuestra que para corregir esta brecha y estabilizar la escala es indispensable incorporar la resumación de logaritmos mediante el Grupo de Renormalización. En particular, la comparación con el trabajo de Kniehl *et al.* resalta la sensibilidad del desdoblamiento hiperfino al valor de la masa del quark utilizado en el cálculo, cuya determinación no es trivial ya que el quark no puede observarse libre debido al confinamiento y depende del esquema de renormalización empleado. En este trabajo se ha hecho uso de las masas de polo de los quarks indicadas en [18].

Finalmente, se observa que la dependencia del resultado con la escala de renormalización se reduce al pasar de LO a NLO, lo que indica una mejora en la estabilidad del cálculo perturbativo. Aunque el resultado físico exacto debe ser independiente de μ, la truncación de la serie perturbativa introduce una dependencia residual que refleja la contribución de órdenes superiores no incluidos. Por ello, se espera que la incorporación de correcciones de mayor orden siga reduciendo progresivamente esta sensibilidad.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la física de los sistemas de quarkonio pesado, mediante la cromodinámica cuántica (QCD) y las teorías efectivas de campos desarrolladas a partir de ella. La característica fundamental de QCD es su naturaleza no abeliana, responsable del fenómeno de libertad asintótica, que permite describir los procesos de corta distancia de manera perturbativa, mientras que la dinámica a energías del orden de (Λ_{QCD}) queda dominada por efectos no perturbativos. Como se ha visto, en este contexto el tratamiento de los sistemas de quarkonio pesado se hace especialmente interesante porque la presencia de quarks pesados introduce una jerarquía de escalas bien separadas ($m \gg mv \gg mv^2$). La principal utilidad de las teorías efectivas NRQCD y pNRQCD, consiste en aprovechar esta separación para aislar la física relevante para el estado ligado y reorganizar el problema en términos adecuados a cada régimen energético. De este modo, la introducción de NRQCD permite codificar los efectos de corta distancia en coeficientes de Wilson que, al contener exclusivamente la física asociada a escalas del orden de la masa del quark pesado, pueden calcularse perturbativamente gracias a la pequeña magnitud del acoplamiento fuerte en dicho régimen. Un paso adicional en esta separación sistemática de escalas lo proporciona pNRQCD, que codifica la física de la escala blanda mv en potenciales efectivos. De este modo, permite recuperar de una ecuación de tipo Schrödinger para el estado ligado, tendiendo un puente directo entre la teoría cuántica de campos y la mecánica cuántica no relativista.

En concreto, se ha tratado pNRQCD en el régimen de acoplamiento débil donde los potenciales efectivos admiten expansiones perturbativas en (α_s) y $\frac{1}{m}$, permitiendo obtener predicciones de alta precisión para espectros, desdoblamientos finos e hiperfinos y anchuras de desintegración. Sin embargo, la coexistencia de escalas muy separadas genera grandes logaritmos en la expansión, cuya presencia puede deteriorar la convergencia de la serie perturbativa. Estos términos requieren técnicas de resumación, basadas en el Grupo de Renormalización para poder restaurar la estabilidad y el poder predictivo de los cálculos. Dado que el presente trabajo se ha centrado en la descripción a LO y, tan solo en el cálculo de la energía de desdoblamiento hiperfino, NLO, estas correcciones no se han considerado explícitamente. En estas circunstancias, el bottomonio ($\bar{b}b$) destaca por su notable convergencia, al tratarse de un sistema en una escala energética lo bastante alta para asegurar que $\alpha_s(m_b, v)$ es pequeño, ($m_b \sim 4.5$ GeV) [18]. Por ello, el formalismo de acoplamiento débil otorga predicciones suficientemente acordes con los datos experimentales, en especial al tratarse de un caso de orden en la expansión tan bajo. Por otro lado, al ser el quark charm más ligero ($m_c \sim 1.5$ GeV), sus escalas de interacción se acercan al límite de confinamiento de Λ_{QCD}, y el estudio del estado charmonio ($\bar{c}c$) presenta dificultades evidentes.

Para concluir, es esencial contextualizar el desarrollo del presente trabajo. Por motivos de conocimientos técnicos, el *matching* teórico entre las escalas se ha llevado a cabo fundamentalmente a nivel árbol. Si bien este orden de la expansión es básico e introduce una dependencia algo excesiva respecto de la escala de renormalización μ, constituye una introducción apropiada a las Teorías Efectivas. Aun con la limitación del nivel de precisión, los resultados obtenidos para los coeficientes de Wilson, los potenciales efectivos y su dependencia con la escala de renormalización μ es consistente con los presentes en la literatura especializada. Por tanto, el tratamiento al nivel de árbol constituye unas bases sólidas y comprensivas, sobre las cuales la precisión predictiva puede ser sistemáticamente mejorada incorporando términos de órdenes superiores.

Referencias

[1] J. J. Aubert et al. «Experimental Observation of a Heavy Particle J». En: *Phys. Rev. Lett.* 33 (23 dic. de 1974), págs. 1404-1406. DOI: 10.1103/PhysRevLett.33.1404.

[2] John Ellis. *Memories of quarkonia*. CERN. Sep. de 2025. URL: https://cerncourier.com/a/memories-of-quarkonia/ (visitado 22-04-2026).

[3] N. Brambilla et al. *Heavy Quarkonium Physics*. 2005. arXiv: hep-ph/0412158 [hep-ph].

[4] Hua-Xing Chen et al. «An updated review of the new hadron states». En: *Reports on Progress in Physics* 86.2 (dic. de 2022). ISSN: 1361-6633. DOI: 10.1088/1361-6633/aca3b6.

[5] Aneesh V. Manohar. *Introduction to Effective Field Theories*. 2018. arXiv: 1804.05863 [hep-ph]. URL: https://arxiv.org/abs/1804.05863.

[6] Antonio Pineda. «Review of heavy quarkonium at weak coupling». En: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 67.3 (2012), págs. 735-785.

[7] Francis Halzen y Alan D. Martin. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. New York: John Wiley & Sons, 1984. ISBN: 978-0471887416.

[8] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5.

[9] A. Pineda y J. Soto. «Potential NRQED: The positronium case». En: *Physical Review D* 59.1 (dic. de 1998). ISSN: 1089-4918. DOI: 10.1103/physrevd.59.016005.

[10] Antonio Pineda y Joan Soto. «Matching at One Loop for the Four-Quark Operators in NRQCD». En: *Phys. Rev. D* 58 (1998), pág. 114011. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.114011.

[11] Nora Brambilla et al. «Effective-field theories for heavy quarkonium». En: *Reviews of Modern Physics* 77.4 (dic. de 2005), págs. 1423-1496. DOI: 10.1103/revmodphys.77.1423.

[12] Clara Peset Martín. «Effective field theories for heavy quarkonia and hydrogen-like bound states». En: (2016). URL: https://hdl.handle.net/10803/385205.

[13] W. E. Caswell y G. P. Lepage. «Effective Lagrangians for Bound State Problems in QED, QCD, and Other Field Theories». En: *Phys. Lett. B* 167 (1986), págs. 437-442. DOI: 10.1016/0370-2693(86)91297-9.

[14] John C. Collins. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group, and the Operator-Product Expansion*. Cambridge University Press, 1984. ISBN: 9780521311779.

[15] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014. ISBN: 9781107034730.

[16] Clara Peset, Antonio Pineda y Maximilian Stahlhofen. «Potential NRQCD for unequal masses and the B_c spectrum at N3LO». En: *J. High Energy Phys.* 2016.5 (2016).

[17] Y. Kiyo e Y. Sumino. «Full formula for heavy quarkonium energy levels at next-to-next-to-next-to-leading order». En: *Nucl. Phys. B* 889 (2014), págs. 156-191.

[18] Particle Data Group. *Review of Particle Physics*. https://pdg.lbl.gov/. Accessed: 2026-06-10. 2026.

[19] Bernd A. Kniehl et al. «$M(\eta_b)$ and α_s from Nonrelativistic Renormalization Group». En: *Physical Review Letters* 92.24 (2004). DOI: 10.1103/physrevlett.92.242001.

[20] A. A. Penin et al. «M(B*(c)) - M(B(c)) splitting from nonrelativistic renormalization group». En: *Phys. Lett. B* 593 (2004), págs. 124-134. DOI: 10.1016/j.physletb.2004.04.066.