Una demostración constructiva de un homeomorfismo entre $\mathbb{P}^3$ y $\mathbf{SO(3)}$

por

J. M. Almira y P. D. González

Introducción

El objetivo fundamental de esta nota es proporcionar una versión constructiva y simple de un homeomorfismo entre el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^3$ y el grupo especial ortogonal $\mathbf{SO(3)}$. El interés, en comparación con la prueba clásica que aparece en [1], es que cambiamos un argumento de topología de variedades por otro que sólo utiliza resultados elementales de Geometría Afín, Álgebra Lineal y Topología Conjuntista elemental. Por tanto, esta demostración se puede explicar a nivel de segundo de licenciatura. Se puede aprovechar también nuestra demostración para realizar una breve introducción a los Grupos Matriciales, explicando al alumno que existen conexiones estrechas (más allá de lo que el alumno de ese nivel suele sospechar) entre Álgebra, Geometría, Topología y Física. Además, nuestra demostración ejemplifica (como se verá posteriormente) el hecho de que frecuentemente en Matemáticas se pueden buscar argumentos elegantes para evitar algunos cálculos desagradables.

El hecho de que $\mathbf{SO(3)}$ sea homeomorfo a $\mathbb{P}^3$ conlleva, entre otras cosas, que $\mathbf{SO(3)}$ no es simplemente conexo, ya que $\mathbb{P}^3$ es homeomorfo a $\mathbf{S}^3/\mathbb{Z}_2$ y, por tanto, su grupo fundamental es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, al ser $\mathbf{S}^3$ simplemente conexo (ver [2, Corolario 19.4]). Además, $\mathbf{S}^3$ es el recubridor universal de $\mathbb{P}^3$ y, por tanto, de $\mathbf{SO(3)}$. Esto es importante por diversas razones. Para empezar, es conocido que el cálculo del recubridor universal de un espacio topológico (cuando existe), no es en general sencillo. Pero, lo que es aún más importante, dado un objeto $\mathbf{O}$ en el espacio tridimensional, y fijado uno de sus puntos $\mathbf{p} \in \mathbf{O}$, $\mathbf{SO(3)}$ se puede interpretar como el conjunto de las posiciones que puede adoptar $\mathbf{O}$, de manera que $\mathbf{p}$ queda fijo. De esta forma cada camino cerrado (o lazo) de $\mathbf{SO(3)}$ representa un movimiento continuo de nuestro objeto, que deja fijo $\mathbf{p}$ y tal que la posición inicial coincide con la posición final de $\mathbf{O}$. Como $\pi_1(\mathbf{SO(3)}) \cong \mathbb{Z}_2$, existen dos formas de rotar nuestro objeto, volviendo a su posición inicial, que son esencialmente distintas (en el sentido de que no podemos deformar un movimiento en el otro). Una forma de visualizar esta propiedad es el conocido problema de las tijeras de Dirac (ver [6]), que consiste en lo siguiente: tomemos unas tijeras y una silla, pasemos una cuerda por uno de los agujeros de la tijera y uno de los huecos del respaldo de la silla, a continuación la volvemos a pasar por el otro agujero de la tijera y otra vez por otro hueco del respaldo de la silla, y entonces pegamos los dos extremos de la cuerda (de modo que ahora tenemos que la cuerda es homeomorfa a una circunferencia). Si giramos 360° las tijeras alrededor de su eje de simetría, es imposible deshacer el nudo que se forma sin rotar las tijeras o la silla, sin embargo, si el giro es de 720°, ésto es posible.

Desde el punto de vista de la física, existen además otras motivaciones para interesarnos por $\mathbf{SO(3)}$ y su recubridor universal. Es conocido que si $\mathbf{G}$ es un grupo de Lie, entonces su recubridor universal $\widetilde{\mathbf{G}}$ es también un grupo de Lie y, además, la aplicación recubridora $p : \widetilde{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ es un homomorfismo de grupos de Lie (ver [3]). En nuestro caso, veremos que $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{S}^3$ se puede dotar de estructura de grupo al identificarse con los cuaterniones de norma 1. Por otra parte, también es posible demostrar que $\mathbf{S}^3$, con la estructura de grupo de Lie que se acaba de describir, es isomorfo al grupo $\mathbf{SU}(2)$ de las matrices unitarias 2×2 y con determinante 1 (ver [5, Theorem 1.4]). Ahora bien, en Mecánica Cuántica se describe la configuración de un electrón (y, de manera más general, el estado de cualquier partícula que posea spin 1/2) en términos de su estado spin, que queda determinado por un vector $\mathbf{v} = (z, w) \in \mathbb{C}^2$ y los cambios de configuración de la partícula se obtienen multiplicando por matrices de $\mathbf{SU(2)}$ (ver [6]). Ahora bien, si $\alpha : [0,1] \to \mathbf{SO(3)}$ es un lazo en $\mathbf{SO(3)}$, cualquiera de sus levantamientos $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbf{SU(2)}$ representa un cambio continuo en las configuraciones del electrón cuando lo rotamos siguiendo el movimiento descrito por α. Como $\pi_1(\mathbf{SO(3)}) \cong \mathbb{Z}_2$, lo anterior nos permite garantizar que existen esencialmente dos formas de rotar el electrón volviendo a su posición inicial que son distintas, en el sentido de que una de ellas modifica el estado spin del electrón, mientras que la otra no.

Por definición, el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ se obtiene de la esfera unidad $\mathbf{S}^3$ identificando los puntos que sean antípodas (ver [2]) y por tanto una idea natural para encontrar un homeomorfismo $\mathbb{P}^3 \cong \mathbf{SO(3)}$ es construir una identificación $F : \mathbf{S}^3 \to \mathbf{SO(3)}$ tal que $F(x) = F(y)$ si y sólo si $x \in \{y, -y\}$, ya que en tal caso, se tendría que $\mathbb{P}^3 \cong \mathbf{S}^3/\sim_F \cong \mathbf{SO(3)}$.

Para la definición de F se utilizan los cuaterniones

$$\mathbb{H} = \{x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Recordemos que $\mathbb{H}$ es un cuerpo no conmutativo con el producto usual, que se tiene al considerar el siguiente conjunto de relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \qquad \text{y} \\ \mathbf{ij} &= \mathbf{k} = -\mathbf{ji}; \qquad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}; \qquad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}. \end{aligned}$$

Evidentemente, $\mathbb{H}$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{R}^4$ cuando se considera con la estructura de espacio vectorial métrico euclídeo con el producto interno

$$< x, y >= \sum_{i=0}^{3} x_i y_i$$

Además, $||xy|| = ||x|| \cdot ||y||$, donde $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ para $x \in \mathbb{H}$ y el conjunto $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{H}$. De esta forma, se puede visualizar la esfera $\mathbf{S}^3$ como el subconjunto de $\mathbb{H}$ formado por los cuaterniones de norma 1.

Sea $\mathbf{K} = \mathbf{Lin}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{H}$ generado por los vectores $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y sea $x \in \mathbf{S}^3$. Definimos la aplicación $F_x : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ como $F_x(y) =$

xyx^{-1}. Se observa que F_x está bien definida, es lineal y preserva la norma. Esto significa que F_x es una isometría lineal. Definimos $F : \mathbf{S}^3 \to \mathbf{O(3)}$ como $F(x) = A_x$, la matriz asociada a F_x respecto de la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de $\mathbf{K}$. No es difícil calcular la expresión

$$A_x = \begin{pmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2\,(x_1x_2 - x_0x_3) & 2\,(x_0x_2 + x_1x_3) \\ 2\,(x_1x_2 + x_0x_3) & x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2\,(x_2x_3 - x_0x_1) \\ 2\,(x_1x_3 - x_0x_2) & 2\,(x_0x_1 + x_2x_3) & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

Se sigue que F es continua (las entradas de A_x son funciones polinómicas y, por tanto, continuas). Además, se trata de una aplicación cerrada, ya que $\mathbf{S}^3$ es compacto y $\mathbf{O(3)}$ es Hausdorff. Finalmente, también es sencillo comprobar que F es un homomorfismo de grupos, ya que $F_{xy}(z) = F_x(F_y(z))$ para todo $z \in \mathbf{K}$.

Afirmamos que $F(\mathbf{S}^3) \subset \mathbf{SO(3)}$.

Demostración. $F(1) = \mathbf{I} \in \mathbf{SO(3)}$, $F(\mathbf{S}^3)$ es conexo y $\mathbf{SO(3)}$ es la componente conexa de $\mathbf{O(3)}$ que contiene a la matriz identidad $\mathbf{I}$. □

Por otra parte, también es claro que si vemos $\ker F = \{-1, 1\}$, entonces $F(x) = F(y) \Leftrightarrow x \in \{y, -y\}$. Comprobemos que $\ker F = \{-1, 1\}$.

Demostración. Sea $x = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Entonces $x \in \ker F$ si y sólo si $xy = yx$ para todo $y \in \mathbf{K}$. Esto, en coordenadas, significa que

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo $y = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k} \in \mathbf{K}$ ya que, con la notación que acabamos de introducir, se tiene la identidad:

$$\begin{aligned} xy - yx &= a_0[(y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) - (y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})] + \\ &\quad (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) - \\ &\quad (y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k})(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\ &= -a_1y_1 + a_1y_2\mathbf{k} - a_1y_3\mathbf{j} - a_2y_1\mathbf{k} - a_2y_2 + a_2y_3\mathbf{i} + \\ &\quad a_3y_1\mathbf{j} - a_3y_2\mathbf{i} - a_3y_3 + y_1a_1 - y_1a_2\mathbf{k} + y_1a_3\mathbf{j} + \\ &\quad y_2a_1\mathbf{k} + y_2a_2 - y_2a_3\mathbf{i} - y_3a_1\mathbf{j} + y_3a_2\mathbf{i} + y_3a_3 \\ &= 2[(a_2y_3 - a_3y_2)\mathbf{i} + (-a_1y_3 + a_3y_1)\mathbf{j} + (a_1y_2 - a_2y_1)\mathbf{k}] \end{aligned}$$

Por tanto $a_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ y $x = a_0 \in \mathbf{S}^3$, es decir, $x \in \{1, -1\}$. Por último, es claro que $A_1 = A_{-1} = \mathbf{I}$. □

Resta tan sólo ver que F es sobreyectiva. Al tratar este problema, en el libro [1] se dice lo siguiente (ver [1, p. 62]):

> *Será muy sencillo una vez se sabe algo de topología, en otro caso se trataría de un cálculo complicado casi sin esperanzas.*

De hecho, para corroborar dicha afirmación, a continuación emplea una página y media del texto al cálculo de la imagen inversa de la matriz $A \in \mathbf{SO(3)}$ asociada a la aplicación ortogonal que deja fijo $\mathbf{k}$, envía $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$, y $\mathbf{j}$ a $-\mathbf{i}$, concluyendo que

> *Esto bastará para convencernos de que no deberíamos intentar una prueba general de la sobreyectividad en este punto.*

El objetivo de esta nota es proporcionar una demostración constructiva de este resultado, mediante la introducción de ciertos argumentos geométricos.

Lo primero que haremos será introducir brevemente algunas ideas geométricas que nos llevarán a una prueba sencilla de la conexión de $\mathbf{SO(3)}$. Existen dos razones para hacer esto último. La primera es por completitud, ya que hemos usado la conexión de $\mathbf{SO(3)}$ para demostrar el contenido $F(\mathbf{S}^3) \subset \mathbf{SO(3)}$. La segunda razón que nos mueve a ello es que en cualquier caso necesitamos un paso intermedio de la prueba de la conexión de $\mathbf{SO(3)}$ que damos aquí (ver Corolario 1), para ofrecer una demostración constructiva de que $\mathbf{SO(3)} \subset F(\mathbf{S}^3)$, que es el resultado fundamental de esta nota.

Conexión de $\mathbf{SO(3)}$

Se sabe que $\mathbf{SO(n)}$ es una componente conexa de $\mathbf{O(n)}$ para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ pero, desafortunadamente, la demostración no es en absoluto sencilla y, de hecho, no es fácil encontrar libros de Topología o Geometría Diferencial donde aparezca una demostración explícita de este resultado (ver [5], [9]).

En esta sección demostraremos un resultado mucho más elemental: que $\mathbf{SO(3)}$ es conexo. La demostración se basa en el siguiente conocido resultado de Geometría Euclídea (ver [8]) :

Teorema 1. $\mathbf{O(n)}$ *está generado por simetrías respecto de hiperplanos. Además, si* $n \geq 2$ *y* $\tau \in \mathbf{O(n)}$*, entonces* τ se descompone como $\tau = \tau_1 \tau_2 ... \tau_t$ *con* $t \leq n$ *y* τ_i *simetrías.*

Corolario 1. *Sea* $h : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ *una isometría lineal tal que* $\det h = 1$. *Si* h *no es la aplicación identidad entonces* $\dim \mathbf{Fix}(h) = 1$, *donde* $\mathbf{Fix}(h) := \{x \in \mathbf{K} : h(x) = x\}$ *denota el espacio de vectores fijos de* h.

Demostración. Sabemos (ver Teorema 1) que existen a lo sumo tres simetrías de $\mathbf{K}$, s_1, s_2, s_3 tales que $h = s_1 s_2 s_3$. Afirmamos que h se descompone como producto de exactamente dos simetrías, $h = s_1 s_2$. Esto se deriva de que $\det s_i = -1$ para toda simetría s_i de $\mathbf{K}$, y nuestra hipótesis sobre $\det h$. Además $s_1 \neq s_2$ ya que h no es la aplicación identidad y las simetrías son involuciones. Por tanto,

$$\begin{aligned}\dim \mathbf{Fix}(h) &\geq \dim(\mathbf{Fix}(s_1)\cap \mathbf{Fix}(s_2)) \text{ (pues } \mathbf{Fix}(s_1)\cap \mathbf{Fix}(s_2) \subseteq \mathbf{Fix}(h))\\ &= \dim \mathbf{Fix}(s_1) + \dim \mathbf{Fix}(s_2) - \dim(\mathbf{Fix}(s_1)+\mathbf{Fix}(s_2))\\ &= 2+2-3=1.\end{aligned}$$

Finalmente, es claro que si $\dim \mathbf{Fix}(h) \geq 2$ entonces h es la identidad, ya que si (e_1, e_2, e_3) es una base de $\mathbf{K}$ tal que $\mathbf{Lin}\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbf{Fix}(h)$, entonces $h(e_3) = \pm e_3$, pero $\det h = 1$ implica $h(e_3) = e_3$. □

COROLARIO 2. $\mathbf{SO(3)}$ *es conexo.*

Demostración. Sea $A \in \mathbf{SO(3)}$ y sea $h : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ la isometría lineal asociada con respecto a la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathbf{K}$. Se sigue del Corolario 1 que existe una base ortonormal (e_1, e_2, e_3) con $h(e_1) = e_1$. Por tanto, la matriz de h respecto de esta base es de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & -b & a\end{pmatrix}$$

para ciertos valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$. Evidentemente, podemos escribir $a = \cos t_0$, y $b = \operatorname{sen} t_0$ para cierto $t_0 \in [0, 2\pi)$.

Como A y B son matrices asociadas al mismo operador lineal de $\mathbf{K}$ respecto de dos bases ortonormales distintas, se tiene que existe una cierta matriz $C \in \mathbf{O(3)}$ tal que $B = CAC^{-1}$. Definimos ahora el camino $\alpha : [0, 1] \to \mathbf{SO(3)}$ como $\alpha(s) = CG(s)C^{-1}$, donde

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t_0 s & \operatorname{sen} t_0 s\\ 0 & -\operatorname{sen} t_0 s & \cos t_0 s\end{pmatrix}$$

Evidentemente, α es continuo y $\alpha(0) = \mathbf{I}$, $\alpha(1) = A$. □

Se ha demostrado que $\mathbf{SO(3)}$ es conexo, pero en realidad $\mathbf{SO(3)}$ es una componente conexa de $\mathbf{O(3)}$. Ahora podemos demostrarlo. Para ello, basta tener en cuenta que la aplicación $\det : \mathbf{O(3)} \to \{1, -1\}$ definida como $A \mapsto \det(A)$ es abierta y cerrada.

EL RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección demostramos el resultado principal de esta nota, que es el siguiente:

Teorema 2. *Existe una demostración constructiva de la inclusión* $\mathbf{SO(3)} \subset F(\mathbf{S}^3)$*. Es decir, existe un algoritmo tal que, dado* $A \in \mathbf{SO(3)}$*, calcula un punto* $x \in \mathbf{S}^3$ *para el cual* $F(x) = A$*.*

Antes veamos un lema técnico.

Lema 1. *Para cada* $e \in \mathbf{K}$ *tal que* $||e|| = 1$ *existe algún* $y \in \mathbf{S}^3$ *tal que* $e = F_y(\mathbf{i})$*.*

Demostración. Sea $e = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ y sea $y = y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$. Entonces $e = F_y(\mathbf{i})$ si y solo si

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & = & 1 \\ y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 & = & \alpha_1 \\ 2\,(y_1y_2 + y_0y_3) & = & \alpha_2 \\ 2\,(y_1y_3 - y_0y_2) & = & \alpha_3 \end{array}\right.$$

de modo que lo único que tenemos que demostrar es que el anterior sistema de ecuaciones posee al menos una solución. Para ello basta tomar $y_0 = 0$ y resolver el sistema que queda de la siguiente forma: Para $\alpha_1 = \pm 1$, se tiene que $e = \pm\mathbf{i}$, forzosamente. Tomamos $y = \pm\mathbf{i}$ si $\alpha_1 = 1$ e $y = \pm\mathbf{j}$ si $\alpha_1 = -1$. Por otra parte, si $|\alpha_1| < 1$, tomamos

$$y = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha_1+1}{2}}\mathbf{i} + \frac{\alpha_2}{2\sqrt{\frac{\alpha_1+1}{2}}}\mathbf{j} + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\frac{\alpha_1+1}{2}}}\mathbf{k}\right),$$

lo que concluye la demostración. □

Demostración del Teorema 2. Sea $A \in \mathbf{SO(3)}$, $A \neq \mathbf{I}$. Vamos a encontrar dos puntos $x, y \in \mathbf{S}^3$ tales que $A_{y^{-1}}AA_y = A_x$ (de modo que entonces ocurrirá $A = A_yA_xA_{y^{-1}} = F(yxy^{-1})$).

Denotemos por h la isometría lineal de $\mathbf{K}$ definida por A usando la base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Podemos utilizar el Corolario 1, ya que $\det A = 1$. Por tanto, $\mathbf{Fix}(h) = \mathbf{Lin}\{e\}$ para cierto $e \in \mathbf{K}$ con $||e|| = 1$. Utilizamos ahora el Lema 1 para encontrar un $y \in \mathbf{S}^3$ tal que $e = F_y(\mathbf{i})$. Entonces

$$\mathbf{Fix}(F_{y^{-1}}hF_y) = \mathbf{Lin}\{\mathbf{i}\}$$

La matriz asociada a la aplicación $g = F_{y^{-1}}hF_y$ es de la forma

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

para ciertos valores reales a, b con $a^2 + b^2 = 1$, ya que $g : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ es una isometría lineal que satisface $\mathbf{Lin}\{\mathbf{i}\} \subset \mathbf{Fix}(g)$ y $\det g = 1$. Buscamos un cierto $x \in \mathbf{S}^3$ tal que $G = A_x$. Si $x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{i} \in \mathbf{Fix}(F_x)$ entonces $\mathbf{i}x = x\mathbf{i}$, lo que implica que $x_2 = x_3 = 0$, por tanto

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_0^2 - x_1^2 & -2x_0x_1 \\ 0 & 2x_0x_1 & x_0^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

y debemos resolver las ecuaciones $x_0^2 - x_1^2 = a$, $2x_0x_1 = b$, lo que se puede hacer tomando $x = x_0 + x_1\mathbf{i}$ una de las dos raíces cuadradas de $a + b\mathbf{i} \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Obsérvese que hemos calculado los puntos x, y de forma constructiva. □

OTRAS DEMOSTRACIONES DE $\mathbb{P}^3 \cong \mathbf{SO(3)}$

No quisiéramos concluir esta nota sin hacer referencia a otros posibles caminos para encontrar un homeomorfismo $\mathbb{P}^3 \cong \mathbf{SO(3)}$. Como ya hemos advertido, la demostración clásica sigue esencialmente los mismos pasos que la ofrecida por nosotros, excepto que para probar la sobreyectividad de F, usa el siguiente argumento de variedades: $F(\mathbf{S}^3)$ es una subvariedad conexa y cerrada de $\mathbf{SO(3)}$, de dimensión 3 (ya que F es un homeomorfismo local, y $\mathbf{S}^3$ es conexo y compacto) y, por tanto, $F(\mathbf{S}^3) = \mathbf{SO(3)}$. El problema con esta demostración es que utiliza el concepto de dimensión topológica, y, en particular, que la dimensión topológica es invariante por homeomorfismos. Éste es un resultado famoso debido a Brouwer (1911), que no es en absoluto sencillo de probar (la demostración estándar utiliza argumentos de Homología, ver [4, p. 109]).

Explicamos ahora otra demostración, también de carácter geométrico. Se sigue del Corolario 1 anterior, el siguiente

COROLARIO 3. *Cada $\mathbf{A} \in \mathbf{SO(3)}$ es un giro respecto de algún eje orientado, de cierto ángulo $\theta \in [0, \pi]$ (en el caso $\theta = 0$, tenemos la identidad).*

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{SO(3)}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$, y sea $\mathbf{V} = \mathbf{Lin}\{\mathbf{v}\} = \mathbf{Fix}(\mathbf{A})$ el espacio de vectores fijos de $\mathbf{A}$. Sea Π el plano ortogonal a $\mathbf{V}$ en el origen de coordenadas. Entonces $\mathbf{A}(\Pi) \subset \Pi$, ya que $\mathbf{A}$ conserva la ortogonalidad. Además, el único vector fijo de $\mathbf{A}_{|\Pi}$ es el origen de coordenadas (ya que $\Pi \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$), y, por tanto, $\mathbf{A}_{|\Pi}$ es un giro de cierto ángulo θ respecto del origen de coordenadas del plano Π. Esto obliga a que $\mathbf{A}$ es precisamente el giro de ángulo θ respecto del eje $\mathbf{V}$. □

Este hecho se comenta en [7, p. 6] y se utiliza de la siguiente forma. La aplicación $g : \overline{\mathbf{B}^3_\pi}(\mathbf{0}) \to \mathbf{SO(3)}$ que asocia a cada

$$\mathbf{P} \in \overline{\mathbf{B}^3_\pi}(\mathbf{0}) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi\}$$

el giro de ángulo $\theta = ||\overrightarrow{\mathbf{OP}}||$ (en el sentido contrario a las agujas del reloj) respecto del eje orientado de vector director $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$, es una identificación (esto se deduce de su expresión analítica, que demuestra que dicha aplicación es continua y, por tanto, cerrada (ya que $\overline{\mathbf{B}^3_\pi}(\mathbf{0})$ es compacto y $\mathbf{SO(3)}$ es Hausdorff), siendo en este caso la sobreyectividad obvia gracias al Corolario 1). Se sigue que $\mathbf{SO(3)} \cong \overline{\mathbf{B}^3_\pi}(\mathbf{0})/\sim$, donde

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{Q} \Leftrightarrow g(\mathbf{P}) = g(\mathbf{Q}).$$

Es claro que los puntos antípodas de

$$\mathbf{S}^2_\pi(\mathbf{0}) := \{\mathbf{P} \in \overline{\mathbf{B}^3_\pi}(\mathbf{0}) : ||\overrightarrow{\mathbf{OP}}|| = 1\}$$

producen el mismo giro. De hecho, la relación de equivalencia anterior es precisamente la que resulta de identificar los puntos antípodas de $\mathbf{S}^2_\pi(\mathbf{0})$. Ahora bien, el homeomorfismo $\mathbb{P}^3 \cong \overline{\mathbf{B}^3_\pi}(\mathbf{0})/\sim$ es bien conocido. Esto concluye la demostración. □

Como ya se habrá observado, las dos demostraciones geométricas explicadas en esta nota se basan en el Corolario 1 (cuya prueba consideramos novedosa), y ambas son constructivas. De hecho, dado $A \in \mathbf{SO(3)}$, $A \neq \mathbf{I}$, el cálculo de un punto $\mathbf{P} \in \overline{\mathbf{B}^3_\pi}(\mathbf{0})$ tal que $g(\mathbf{P}) = A$ se descompone en los siguientes pasos:

a) Se calcula

$$\mathbf{Fix}(A) : \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} = \mathbf{x}\} = \mathbf{Lin}\{\mathbf{w}\},$$

b) Se toma $\mathbf{v} \in \mathbf{Fix}(A)^\perp$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, y se calcula el ángulo θ que forman los vectores $\mathbf{v}$ y $A\mathbf{v}$. Entonces nuestro punto está dado por $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \theta \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}$.

(de modo que en ambas pruebas se requiere cierto volumen de cálculos para obtener las antiimágenes de los puntos de $\mathbf{SO(3)}$). Ahora bien, g no es una aplicación recubridora, ya que el cardinal de la fibra de los puntos de $\mathbf{SO(3)}$ no es constante (ver [2, Ejercicio 17.9 (h)]). La demostración del Teorema 2 supone un avance en el sentido de que permite realizar los cálculos directamente para el recubridor universal de $\mathbf{SO(3)}$.

Bibliografía

[1] Curtis, M. *Matrix Groups,* Springer-Verlag, 1984.

[2] Kosniowski, C. *Topología Algebraica,* Ed. Reverté, 1989.

[3] Mimura, M. y Toda, H. *Topology of Lie Groups, I and II.* (Translations of Mathematical Monographs; vol. 91), American Mathematical Society, 1991.

[4] MUNKRES, J.R. *Elements of Algebraic Topology,* Addison-Wesley Publishing Co., 1984.
[5] NABER, G. *Topology, Geometry and Gauge Fields. Foundations,* Springer, 1997.
[6] PENROSE, R. y RINDLER, W. *Spinors and space-time, Volume I,* Cambridge University Press, 1984.
[7] SATTINGER, D.H. y WEAWER, O.L. *Lie groups and algebras with applications to Physics, Geometry and Mechanics,* Applied Mathematical Sciences n$^{\mathrm{o}}$ 61, Springer-Verlag, 1986.
[8] TISSERON, C. *Geometries affine, projective et euclidienne,* Hermann, Paris, 1983.
[9] WARNER, F. *Foundations of Differentable Manifolds and Lie Groups,* Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971

J. M. Almira
Departamento de Matemáticas. Universidad de Jaén
E.U.P. Linares. 23700 Linares (Jaén)
correo electrónico: `jmalmira@ujaen.es`

P.D. González-Pérez
Universite de Paris 7, Institut de Mathematiques
UMR CNRS 7586 Equipe Geometrie et Dynamique Case 7012 2, Place Jussieu
75013 Paris (France)
correo electrónico: `gonzalez@math.jussieu.fr`