UN PASEO POR EL SIGLO XX DE LA MANO DE FERMAT Y PICASSO[1]

Capi Corrales Rodrigáñez,

Departamento de Algebra, Facultad de Matemáticas, UCM.

[1] Este estudio obtuvo el Premio Consejo Social al Docente Complutense en el año 2000. Fue publicado en forma de libro por el Consejo Social de la Complutense en 2001 ([C-3] en la bibliografía)

AGRADECIMIENTOS

A Carlos Andradas, que me sugirió llevar a cabo este trabajo. A Marcos Corrales, por darme una motivación para hacerlo. A Carmen de Francisco, Narelle Jubelin y René Schoof, que me ayudaron a organizar el material. A César Gutiérrez, que metió los ojos de Picasso por debajo de mi puerta. A Laura Tedeschini-Lalli y sus alumnas A. Carlini. A. Marinelli, V. Sabatini, que me enseñaron a leer cuadros como quien lee una fórmula matemática escrita sobre una pizarra. A Ana Martínez de Aguilar, directora del Museo Esteban Vicente de Segovia, que me contó la historia del edificio y compartió conmigo alguno de sus guiños privados con los cuadros. A los vigilantes de las salas del Museo Esteban Vicente de Segovia, que discretamente facilitaron mi trabajo en ellas. A Belén Franco, que me regaló claves fundamentales durante la primera exploración que hice de la exposición "Picasso en las colecciones españolas". A Carlos Andradas, Ana Corrales, Goyo Díaz, Belén Franco, Carlos Franco, José Manuel Gamboa, Mariano Martínez, Jaime Rodrigáñez, Rosemary Samalot, Feliciana Serrano y Carlos Wert, que con sus comentarios y sugerencias me ayudaron a pulir este trabajo. A Jonás Andradas, que me prestó su Zip. Y, finalmente, a Federico Romero. En estos tiempos que corren, las editoriales han sustituido la necesaria y esencial figura del corrector profesional por un programa de ordenador. Desafortunadamente, las máquinas no leen. Federico sí, y muy bien. Gracias a él y a su desinteresada ayuda, estas páginas tienen menos errores.

ESQUEMA DEL TRABAJO

1. Introducción
   - La mirada matemática en el desarrollo científico y artístico de la cultura occidental
   - Fermat visto desde la ventana Picasso

2. La pintura figurativa y Picasso

3. El estudio de ecuaciones y el último teorema de Fermat

4. El siglo XX a través de Picasso y Fermat

4. 1- Descomposición de un objeto en un prisma con mil caras
   - Picasso: Descomposición de una figura en planos. Ejemplo: *Hombre con clarinete* (1911)
   - Matemáticas: Descomposición de una ecuación en una infinidad de ecuaciones locales fáciles de estudiar. Ejemplo: Descomposición de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ (1910-20)

4.2- Relaciones entre los objetos
   - Picasso: Comparar figuras comparando su forma. Ejemplo: *Verre et Pichet* (1914)
   - Matemáticas: Comparar ecuaciones comparando las redes que forman sus conjuntos de soluciones. Ejemplo: La red de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ (1920)

4.3- Reconstrucción de un objeto usando algunas imágenes parciales
   - Picasso: Construcción de figuras a partir de algunos planos. Ejemplo: *Pipe, verre et paquet de tabac* (1918)
   - Matemáticas: Construcción de las soluciones a una ecuación a partir de algunas de ellas Ejemplo: Construcción de la red de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ (1923)

4.4- Descripción global de un objeto encolando descripciones locales
   - Picasso: Representación global de una figura vista simultáneamente desde distintos ojos
     Ejemplos: *Las meninas, M.ª Agustina Sarmiento* (1957); *Femme assise* (1971)
   - Matemáticas: Información global que sobre una ecuación dan sus soluciones locales
     Ejemplos: La Conjetura de Modular (1955) y la demostración de Wiles del último teorema de Fermat (1995)

1. INTRODUCCIÓN

En 1992, la Unión Matemática Internacional declaró el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. Esta declaración fue apoyada por la Asamblea General de la UNESCO en noviembre de 1997. El segundo milenio de nuestra era se cerró, pues, con una reflexión sobre el papel que las matemáticas ocupan en el desarrollo de nuestra cultura, su enseñanza y su divulgación. Y es desde el marco de esta reflexión desde el que encaramos el trabajo que presentamos en estas páginas.

Nadie pone en duda el papel fundamental que las matemáticas ocupan como lenguaje común de las diversas ramas de la ciencia, ni que los conocimientos matemáticos sean imprescindibles en la formación del individuo en esta época tan apoyada sobre el desarrollo tecnológico, ni que una educación básica en matemáticas sea esencial para poder entender muchos de los retos con los que nos enfrentamos hoy en nuestro intento por entender el universo que nos rodea.

Sin embargo la mayoría de la gente sigue considerando las matemáticas como una disciplina difícil y ajena, algo que es importante para la ciencia y la tecnología, pero cuya influencia ni está a la vista, ni se puede entender con facilidad ni tiene mucho que ver con los demás componentes de la cultura. Se dice con frecuencia, por ejemplo, que música y matemáticas están muy relacionadas. Pero pocas son las personas capaces de describir con precisión tal relación e ir más allá de los pitagóricos y sus trabajos con la escala musical. Lo mismo ocurre cuando hablamos de matemáticas y arquitectura, o matemáticas y pintura. Salen a relucir los maestros del Renacimiento, la perspectiva, la geometría proyectiva y poco más. Parece como si a partir del siglo XVIII, fuera de su papel en el desarrollo científico y tecnológico, las matemáticas se hayan limitado a ser, a lo más, musa de la inspiración creativa de artistas aislados, como es el caso de aquellos que en los últimos años han realizado obras inspiradas en los fractales matemáticos o quienes, como Escher, se dejaron subyugar por las geometrías no euclídeas construidas por los matemáticos del siglo XIX.

Los matemáticos somos aun considerados como bichos raros por el resto de la sociedad, gentes con talento especial para las cuentas, que vivimos en una torre de marfil, totalmente ajenos a la cultura que nos rodea. Nosotros sabemos que no es así, que nuestro trabajo es un componente tan imprescindible como los otros en la construcción de nuestra cultura, pero pocas veces nos paramos a contarlo. Estamos tan atrapados por nuestra propia labor que a menudo nos aislamos, y no es frecuente que participemos en debates ni llevemos a cabo tareas de divulgación. No es sólo la falta de tiempo lo que nos lleva a no comunicarnos profesionalmente con otros ciudadanos. Es también que divulgar matemáticas, transmitir conocimientos abstractos, es difícil y requiere un esfuerzo grande. Para mantener una conversación fructífera es necesario que todos los interlocutores compartan una mínima información básica, y este no suele ser el caso cuando de matemáticas se trata. Fuera de los propios matemáticos, algunos científicos e ingenieros, y contados arquitectos, la mayor parte de los ciudadanos del mundo moderno no saben casi nada de matemáticas, y sienten verdadera alergia por las fórmulas y la abstracción, por el lenguaje con el que los matemáticos nos comunicamos. Transmitir conocimientos matemáticos requiere una labor previa casi diríamos que terapéutica, y no siempre se está en situación de llevarla a cabo o someterse a ella.

Es muy importante que entre todos contribuyamos a cambiar esta imagen de las matemáticas. No puede haber verdadera transmisión de cultura si no somos conscientes de qué contribuye a la evolución y construcción de esta cultura. Y qué duda cabe de que la contribución de la mirada matemática al desarrollo del proceso de abstracción que han seguido las artes y ciencias en nuestra cultura occidental ha sido y está siendo fundamental.

> *Imaginar un objeto requiere y da forma a una representación mental del mismo, y este nivel descriptivo abstracto normalmente se pasa por alto, no se discute. Y sin embargo es precisamente este componente abstracto el que con frecuencia se reconoce como el obstáculo esencial cuando personas de distintas culturas intentan comunicarse. Es obvio que las diferentes representaciones de un mismo objeto oscurecen algunas de sus características y realzan otras: la elección de ciertas de ellas supone escoger deliberadamente unas, al tiempo que se descartan otras. Esta representación mental modela, a su vez, las expectativas con que de hecho contemplamos un objeto, porque guía la selección de características que hacemos al observar: la "mirada" se modela culturalmente* (Laura Tedeschini-Lalli en *Mira a tu alrededor a medida que avanzas: Lentes abstractas, encrucijadas concretas*, [C-2] págs. 9-11).

Hacer explícito el componente abstracto en la mirada de una cultura no solo hace posible la transmisión de esta cultura, sino también su convivencia y comunicación con otras culturas. Para poder transmitir nuestra cultura y para que ésta aprenda a convivir con otras, necesitamos prestar atención a cómo modelamos culturalmente nuestra mirada, y en particular a de qué elegimos hacer abstracción y de qué decidimos abstraernos cuando miramos. A esta mirada dedicaremos nuestras reflexiones en estas páginas.

Relación entre la mirada matemática y el desarrollo científico y artístico en la cultura occidental

El ojo se educa. Y el cómo miramos, la mirada con la que nos enfrentamos a lo que nos rodea, se va forjando a lo largo del tiempo de la mano, entre otros, de científicos, artistas y creadores en general. Cómo miramos condiciona lo que vemos, que a su vez hace que vaya tomando forma una manera nueva de mirar. Al guiarnos a la hora de seleccionar las características en las que fijarnos cuando observamos un objeto, la cultura funciona como unas gafas que llevamos siempre puestas. Ser conscientes de que miramos a través de lentes nos permite cambiarlos a voluntad, ya sea como juego o experimento, para probar qué pasa si miramos de otra manera, ya sea por necesidad, cuando los lentes se nos quedan obsoletos y nos impiden una visión clara.

Todas las disciplinas que buscan conocer, explicar o representar lo que hay alrededor de nosotros van contribuyendo a esta forja de la mirada, pero son probablemente los matemáticos y los pintores quienes de forma más directa influyen en, y dan testimonio de, cómo se mira en un momento dado. Cómo seleccionar los aspectos que caracterizan un determinado tipo de objetos, cómo relacionar las distintas formas, cómo identificar comportamientos parecidos, cómo reconocer y describir con precisión las analogías entre las diversas cosas y los diversos fenómenos es precisamente lo que nos enseñan las matemáticas que todos aprendemos en la escuela. Y llevando puestas esas gafas con las que nos entrenan a mirar en las clases de matemáticas desde la infancia, nos enfrentamos después al mundo que nos rodea. Por eso en cualquier disciplina y en cualquier época de la cultura occidental es posible identificar el rastro que la influencia de la mirada matemática ha ido dejando en el desarrollo científico y social de tal cultura.

Y porque son los pintores quienes de forma más directa dan testimonio de cómo y qué se mira en un momento dado, es en la obra de los pintores donde con más claridad encontramos trazos de las estrategias y retos matemáticos de los distintos períodos de nuestra cultura.

Mucho se ha escrito, por ejemplo, sobre la relación entre la matemática y el arte en el período que va desde los objetos aislados de Egipto, Mesopotamia y la Grecia clásica hasta el espacio cúbico y perspectivo que encontramos en los maestros. El siglo XVII marca una nueva época en la matemática europea. De la mano de las traducciones de los textos de la Grecia clásica y de la matemática de la escuela árabe de los siglos IX al XIV (llegados a Europa precisamente a través de España), surgen el álgebra, el cálculo infinitesimal, la geometría ubicada dentro de un *espacio contenedor*. Este resurgir de la matemática en Europa coincide con el surgir del artista como individuo. Durante muchos años el arte europeo oficial había recibido instrucciones, primero de la religión (arte didáctico) y luego de la política (arte que sigue una idea normalizada de belleza). Esta situación empieza a cambiar precisamente durante el período en que surge la matemática moderna: a finales del siglo XVII y principios del XVIII. A principios del siglo XVII encontramos aun al artista sustentador del Estado (y por lo tanto sustentado por éste). A lo largo de este siglo, y según la creación artística se va despatronizando, un proceso nuevo empieza a tener lugar en el arte.

> *El proceso de reflexión del artista, que se inició en el Renacimiento, ganó en contenido y amplitud cuando a finales del siglo XVIII y principios del XIX, —coincidiendo con su potenciación y afirmación— se produjo la ruptura entre el artista y el patrocinador. Vuelta hacia sí misma y liberada de la tarea de adornar iglesias y palacios, de retratar príncipes y de surtir galerías de aficionados, la conciencia artística adquiere una nueva dimensión, concretamente su liberación de toda atadura, con lo cual, si bien da vía libre a la consecuente exploración de problemas puramente artísticos, también la expone a la dubitación escéptica al pretender aislar y articular como cultura pura el valor intrínseco del arte. Orgulloso y resignado al mismo tiempo, el artista se dispone a crear sin previo encargo, pero la conciencia de este paso le obliga a adoptar decisiones; unas veces le lleva a una nueva y autómata fundamentación de lo artístico, otras le sugiere la búsqueda de su gloria más allá del arte* (Hofmann, *Los Fundamentos del arte moderno,* 1987).

Es sorprendente y hermoso ver cómo, por ejemplo, la evolución en la noción matemática de espacio desde la imagen del espacio cúbico y contenedor que encontramos en Newton en el siglo XVII (y describe con toda precisión Euler en su *Introductio* a finales del siglo XVII) hasta el espacio concebido como red de relaciones entre objetos que nos ofrece Hausdorff en 1914 (y que sigue considerándose en matemáticas como la definición más adecuada de espacio), aparece plasmada en la obra de los pintores de estos dos siglos, desde el espacio cúbico impecablemente representado por Velázquez, hasta los espacios red de relaciones de luz, color o forma de los Impresionistas, culminando en los espléndidos espacios abstractos de las acuarelas de Kandinsky de 1913. Un estudio de esta evolución puede encontrarse en [C-1] y [C-2].

A lo largo de estas páginas nos proponemos hacer explícito, sacar a la luz, el proceso de abstracción común a la mirada de matemáticos y pintores a lo largo del siglo XX, y nos gustaría comenzar la tarea explicando las consideraciones didácticas que hemos tenido en cuenta al elegir la pintura como compañera de las matemáticas en este viaje intelectual. Entre los muchos problemas a los que nos enfrentamos quienes enseñamos matemáticas hoy en la Universidad, hay dos fundamentales. Por un lado, nuestros alumnos viven inmersos en una cultura esencialmente visual: el cine, los *comics*, la televisión, los vídeos, los ordenadores... Las imágenes visuales les acompañan como en su día los libros nos acompañaron a sus profesores. Hoy por hoy en las aulas universitarias, la frontera entre el libro y la imagen sigue siendo zona de conflicto entre docentes y alumnos, y especialmente en disciplinas como las matemáticas, cuya transmisión pasa inevitablemente por el texto escrito. Utilizar la pintura para ilustrar una estrategia matemática o un cambio en la manera en que los matemáticos miran o encaran un problema concreto en un momento dado, puede ser usado de forma muy efectiva como puente para salvar esta distancia en las clases de matemáticas de cualquier carrera universitaria. El proceso de comprensión de las matemáticas pasa por momentos de súbita iluminación.

> *Quizás la mejor manera de describir mi experiencia haciendo mátemáticas sea comparándola con entrar en una mansión oscura. Entras en la primera habitación, y está a oscuras, completamente a oscuras. Vas dando tumbos, tropezando con los muebles. Poco a poco aprendes dónde está cada mueble, y finalmente, después de más o menos seis meses, encuentras el interruptor de la luz y lo conectas. De repente todo se ilumina, y puedes ver exactamente dónde estás. Entonces entras en la siguiente habitación oscura ...* (Andrew Wiles en *El último teorema de Fermat*, programa *Horizon* de la cadena de TV BBC, 2 de octubre de 1997.)

Con frecuencia la imagen adecuada consigue que se encienda el interruptor en el aula, y que los alumnos *vean* la idea que les intentamos transmitir. Y una vez la ven, una vez la entienden, le pierden el miedo y es posible enseñarles a formalizarla, a describirla en palabras con precisión.

Por otro lado, las matemáticas que se enseñan en el bachillerato entrenan a la gente para mirar y pensar llevando puestas como gafas estructuras espaciales matemáticas desarrolladas no después del siglo XVIII, mientras que las matemáticas que por lo general se estudian en la universidad (ya sea en carreras científicas, de humanidades o técnicas) son matemáticas basadas en concepciones de los siglos XIX y XX. Todos nosotros, profesores y alumnos, nos hacemos la misma pregunta al principio de cada curso: ¿cómo podemos rellenar esta laguna y a la vez tener tiempo para cubrir todo el material del programa? En general, sólo hay una solución factible: los profesores damos a los estudiantes listas de libros, y éstos han de leérselos por su cuenta. En esta difícil tarea, cualquier ayuda que encontremos será de valor. Y ocurre que, al menos en España, nuestros estudiantes no estarán familiarizados con la matemática contemporánea, pero han crecido entre pósteres y láminas que reproducen los trabajos de Cézanne, Matisse, Mondrian y Picasso, por ejemplo. Todos estos pintores, y muchos más, compartieron las gafas culturales de sus contemporáneos matemáticos.

Si nuestros alumnos no tienen miedo a entrar en una exposición de cuadros de Picasso, no hay razón para que teman ser expuestos a las estructuras desarrolladas en matemáticas para poder mirar como Picasso miraba, para poder mirar “localmente”. Todo lo que necesitamos para que pierdan el miedo es lograr que identifiquen esas estructuras y estrategias matemáticas que a primera vista les resultan tan nuevas con una manera de mirar que ha estado en su bagaje cultural desde la infancia.

Fermat visto desde la ventana Picasso

Como ya se ha escrito, en estas páginas nos proponemos hacer explícito, sacar a la luz, el proceso de abstracción común a la mirada de matemáticos y pintores a lo largo del siglo XX. Y para hacerlo, lo más sencillo y directo es elegir un problema matemático cuya resolución haya requerido herramientas desarrolladas a lo largo del siglo XX y los cuadros de un pintor en cuya obra, a lo largo de los años, encontremos un testimonio de la evolución de la pintura en este mismo siglo. Por otro lado, pintura y matemáticas contemporáneas son bastante desconocidas fuera de los círculos profesionales correspondientes, y eso dificulta la tarea, ya de por sí compleja, que abordamos. Tiene, pues, sentido elegir el pintor y el problema que nos sean más familiares a todos. Así encarada, la elección es casi obligada: Pablo Picasso y el teorema de Fermat.

La obra de Pablo Picasso es bien conocida en España. Además, Picasso pintó mucho, a lo largo de muchos años y utilizando una enorme variedad de materiales y formas de representación. En su obra aparecen plasmados casi todos los retos encarados y métodos utilizados por los pintores a lo largo del siglo XX. Y afortunadamente para nuestro objetivo, Picasso pintaba figuras y objetos que forman parte de la vida cotidiana de todos nosotros, por lo que todos reconocemos qué es lo que mira, y podemos concentrarnos en cómo lo mira. Cualquier exposición antológica de Picasso serviría a nuestro propósito. Elegí aquella que me resultaba, a efectos prácticos, la más conveniente: la espléndida exposición que desde el 10 de octubre de 2000 haste el 14 de enero de 2001 nos ofreció el Museo Esteban Vicente de Segovia bajo el título *Picasso en las colecciones españolas* .

El Teorema de Fermat es probablemente el único teorema matemático que ha despertado la curiosidad de las personas no matemáticas. Desde que Pierre de Fermat lo concibiese y lo propusiese en el margen de un libro en el siglo XVII, hasta que Andrew Wiles lo demostró en 1994, gentes de lo más variopinto le han dedicado muchas horas de su pensar.

Pierre de Fermat fue un consejero en el Parlamento de Toulouse que vivió en la primera mitad del siglo XVII, y era muy conocido por sus investigaciones matemáticas, en concreto en la teoría de los números. En el margen de su copia de *Aritmética*, libro escrito por Diofanto de Alejandría hacia el siglo II, Fermat escribió: "No es posible encontrar dos cubos cuya suma sea un cubo, dos potencias cuartas cuya suma sea una potencia cuarta, más generalmente dos potencias cuya suma sea una potencia del mismo tipo. He encontrado una demostración maravillosa de este hecho que no cabe en el tamaño del margen".

Esta anotación de Fermat, publicada por su hijo tras la muerte de aquel, aparece, como hemos mencionado, en un margen de *Aritmética*, precisamente en la página en la que Diofanto discute el problema de encontrar tripletas de Pitágoras.

Todos aprendimos en la escuela que un triángulo es rectángulo si el cuadrado del lado mayor coincide con la suma de los cuadrados de los otros dos. Esta propiedad, conocida como el teorema de Pitágoras, caracteriza los triángulos rectángulos, pues nos dice que si tenemos un trío de números tales que la suma de los cuadrados de dos de ellos coincide con el cuadrado del tercero, entonces un triángulo cuyos lados midan las longitudes dadas por esos tres números será rectángulo.

Diofanto intenta responder a la siguiente pregunta; ¿cuántas ternas de números positivos podemos encontrar que se correspondan con los lados de un triángulo rectángulo? Puesto que 9 y 16 suman 25, y 25 y 144 suman 169, el teorema de Pitágoras nos garantiza que (3,4,5) y (5, 12,13) son dos ejemplos de ternas de números que miden lados de triángulos rectángulos. De hecho hay una infinidad de ternas de números que dan lugar a triángulos rectángulos, y aparecen ya descritas en el libro *Elementos,* de Euclides de Alejandría (siglo II a.C.) Al leer sobre este problema en el libro *Aritmética*, Fermat se preguntó qué ocurriría si cambiamos la palabra *cuadrado* en el teorema de Pitágoras por cubo, potencia cuarta, potencia quinta, etcétera.

Lo que ocurrió es que, por mucho que lo intentó, no logró encontrar tres números enteros positivos tales que la suma de los cubos de dos de ellos coincidiese con el cubo del tercero, o que la suma de las potencias cuartas de dos de ellos coincidiese con la cuarta potencia del tercero, o, en general, que la suma de las potencias n-ésimas de dos de ellos coincidiese con la potencia n-ésima del tercero si n es mayor que 2. Fermat llegó a demostrar que es imposible encontrar tales números en el caso de las potencias cuartas, y la demostración de este resultado es, de hecho, la única demostración completa que se encontró entre sus escritos a su muerte. En ella desarrolla un método de trabajo conocido como *el método del descenso,* que, curiosamente, utilizó Mordell en 1923 para desarrollar algunas de las herramientas con las que Wiles demostró en 1994 el último teorema de Fermat

La afirmación de Fermat de que no existen números positivos tales que la suma de las potencias n-ésimas de dos de ellos coincida con la potencia n-ésima del tercero si n es mayor que 2 acabó conociéndose por el nombre "el último teorema de Fermat". ¿Por qué el último? Fermat pertenecía a una red de científicos y pensadores organizada alrededor del cura Mersenne, perteneciente a la orden de los Mínimos. Algo parecido a las redes de correo electrónico de hoy en día. Pierre de Fermat era un miembro muy activo del grupo de Mersenne, y enviaba muchas cartas que con frecuencia incluían afirmaciones sobre las propiedades de los números enteros (véase [G] y [E] en la bibliografía). La mayor parte de las afirmaciones hechas por Fermat en sus cartas fueron demostradas por los matemáticos del siglo XVIII (Euler, Lagrange, Lamé, Dirichlet); de hecho, a principios del siglo XX todas las afirmaciones de Fermat, salvo la que hemos descrito, habían sido ya demostradas. Esa es la razón por la que la única que quedaba sin demostrar llegase a ser conocida como el último Teorema de Fermat. Con el tiempo, el último Teorema de Fermat se convirtió en una leyenda, el único problema en matemáticas que ha fascinado a jóvenes y ancianos, matemáticos y no matemáticos a lo largo de muchas generaciones. Aunque todos los intentos de demostrarlo anteriores al trabajo que Wiles anunció en 1993 e hizo público en 1994 resultaron fallidos, las estrategias y métodos a los que muchos de ellos dieron lugar han resultado esenciales en el desarrollo de las matemáticas: la historia de las maneras en las que los matemáticos intentaron demostrar el último Teorema de Fermat está estrechamente ligada con las matemáticas de, digamos, los dos últimos siglos. Finalmente, en octubre de 1994, el matemático inglés Andrew Wiles, residente en los Estados Unidos, logró demostrar el último Teorema de Fermat. Su trabajo conmocionó a la comunidad científica, y por vez primera en la historia de las matemáticas, una hazaña en esta disciplina fue anunciada en las portadas de los periódicos por todo el mundo.

El teorema de Fermat es, sin duda, uno de los teoremas más famosos de la historia de las matemáticas y, además, la solución hallada por Wiles en 1994 utiliza casi todas las estrategias seguidas y casi todos los resultados obtenidos en el estudio de la resolución de ecuaciones a lo largo del siglo XX. La construcción de Wiles y los cuadros de Picasso están no sólo entre las obras de matemáticas y pintura más notorias del siglo XX, sino también entre las obras que reflejan de forma más completa cómo han mirado matemáticos y pintores a lo largo de este siglo. Si queremos comparar estas miradas, no hay elección más adecuada. En estas páginas nos proponemos buscar en los cuadros de Picasso y en la demostración del teorema de Fermat las gafas culturales (y por lo tanto comunes) abstractas con las que los pensadores y creadores occidentales han mirado la realidad que les rodea a lo largo del siglo XX. Y lo haremos reproduciendo precisamente la estrategia seguida por Picasso para pintar y por los matemáticos para resolver el teorema de Fermat: el paso de lo local a lo global.

Pensaremos en la pieza matemática como si se tratase de una construcción que estuviese montada en mitad de un patio en el Museo Esteban Vicente, y recorreremos las salas del Museo parando ante algunos de sus cuadros, que utilizaremos como ventanas a través de las que observaremos desde distintos puntos de vista la pieza de Wiles. Desde cada punto, desde cada cuadro, obtendremos una visión distinta y parcial, y luego las encolaremos todas para recomponer una imagen única y global de la demostración del teorema de Fermat.

Con el fin de ayudar a la comprensión de las ideas abstractas que expondremos, hemos decidido exponer éstas en forma de ensayo, un relato que se pueda leer de corrido sin que fórmulas o cuadros interrumpan la lectura. Sin embargo, tanto pintores como matemáticos acostumbramos a trabajar con papel y lápiz, a ir anotando en un cuaderno bocetos, cuentas y reflexiones, y pensamos que resultará útil y ameno para los lectores que demos cuenta no sólo de la estrategia abstracta que hay tras nuestra mirada común, sino también de este método compartido de trabajo. Por eso, he añadido a lo largo del texto las notas y dibujos que he ido haciendo mientras lo preparaba. También se han incluido reproducciones en color de algunos de los cuadros de Picasso sobre los que trabajaremos.

2. LA PINTURA FIGURATIVA Y PICASSO

Supongamos que tenemos delante de nosotros una figura de persona de la que queremos dar una descripción lo más completa posible. Lo primero que hacemos es movernos en derredor suyo y observarla desde todos los ángulos posibles.

Cuando fijamos la atención en su ojo izquierdo, el derecho nos aparecerá borroso. Para ver el segundo ojo, habremos de variar la dirección de nuestra mirada, y entonces será el ojo izquierdo el que veamos borroso. Y tampoco podremos disfrutar simultáneamente del perfil de su nariz y la palma de una de sus manos. Para poder ver la figura en su totalidad habremos de movernos, y al hacerlo obtendremos diversas imágenes parciales. Son estas imágenes parciales lo que llamamos datos locales.

Reconstruir a continuación la figura como un todo único a partir de estos datos locales, dar lo que llamamos una descripción global del objeto de nuestro estudio, plantea de inmediato dos problemas. El primero, seleccionar de entre todos los datos locales un número suficiente, pero ciertamente finito, con los que trabajar. Si intentásemos recoger en un solo dibujo las dos orejas, todas las facciones de la cara, el cuello y el cogote, el torso y la espalda, las rodillas y los tobillos, etc., el dibujo se nos disolvería en una multitud de detalles difícilmente reconocibles. Habremos, pues, de llevar a cabo un proceso de abstracción y, una vez decidido qué aspecto es el que queremos poner de manifiesto en la figura que hay ante nuestros ojos, separar lo que es anecdótico de lo que no lo es a la hora de describir tal aspecto, y quedarnos con unos cuantos datos básicos y locales.

Aquí surge nuestro segundo problema: cómo encolar de manera coherente en una imagen global única diversos datos locales. Esta estrategia de dividir un objeto en zonas con distintos puntos de vista la encontramos ya en muchos pintores anteriores al siglo XX, como Giotto y otros pintores del Renacimiento. Sin embargo, hay una búsqueda en los pintores del siglo XX que no está presente en Giotto y sus contemporáneos. Esta búsqueda es fácil de identificar si reflexionamos brevemente sobre tres pintores inmediatamente anteriores o contemporáneos a Picasso: Cézanne, Mondrian (en sus primeros cuadros de árboles, fachadas de iglesias y malecones, llevados a cabo entre 1905 y 1915) y Matisse.

Cézanne observa una montaña, por ejemplo, y aspira a representar aquellas líneas que nos hacen reconocerla como tal, independientemente de si la montaña está cubierta de árboles, piedras o nieve, o se encuentra desnuda. Cézanne hace abstracción de lo concreto en la montaña que mira y dibuja la estructura externa, el volumen o contorno que nos permite reconocer el objeto universal “montaña”. La estrategia seguida por Mondrian para llevar a cabo el mismo proceso, la identificación de una estructura que permita hacer abstracción de lo concreto en un objeto, es la opuesta. Mondrian toma un árbol, por ejemplo, e ignora todo en él salvo las líneas dibujadas por sus ramas, el esqueleto cuyas proporciones y direcciones nos permiten reconocer que estamos ante la estructura interna de un árbol. Cézanne dibuja volúmenes, contornos; Mondrian esqueletos.

Por su parte, los cuadros de Matisse nos enseñan lo que significa buscar aquello que el ojo “ve exactamente”. Cuando quiere, por ejemplo, describirnos una ventana desde la que se ve el mar, Matisse enfoca sus ojos en los tiestos de flores sobre el alféizar de la ventana y, coherentemente, el agua aparece como una mancha azul, la playa como una raya amarilla y las figuras sobre la playa como sombras oscuras. Para ver las figuras con precisión tendría que enfocar sus ojos sobre ellas, y dejaría de ver los tiestos con detalle.

Equipados con los ojos de Matisse y con las herramientas y estructuras desarrolladas en la época de Cézanne y Mondrian, cubistas y matemáticos se enfrentaron a la tarea de dar una descripción global de un objeto a través de varias descripciones locales. El problema, tanto para los matemáticos como para los pintores, fue, es, cómo encolar las distintas descripciones locales de manera coherente y producir a partir de ellas una descripción global adecuada. Este paso de lo local a lo global, casi nunca único, pocas veces posible y con frecuencia no obvio, es precisamente uno de los grandes retos a los que se enfrenta mucha de la matemática contemporánea.

Mirando, pues, como miraba Matisse, y haciendo abstracción como la hacían Cézanne y Mondrian, los pintores figurativos del siglo XX, y Picasso en particular, afrontaron la tarea de dar una descripción lo más completa posible (global) de un objeto o escena mediante la combinación de muchas descripciones parciales (locales). Siguiendo la estrategia desarrollada por Cézanne, comienzan por dividir en regiones, en entornos, la figura o escena que quieren describir, y después, en cada región miran como Matisse miraba sus tiestos y describen exactamente, mediante los esqueletos de Mondrian, lo que ve el ojo. Picasso solía decir: "En un cuadro de Rafael es imposible medir la distancia que hay entre la punta de la nariz y la boca. Yo quiero pintar cuadros en los que esto sea posible".

Analicemos con más cuidado los diversos pasos del proceso que acabamos de describir. Primero, el pintor abandona la estrategia de tomar un punto de vista fijo. El ojo —el pintor— se mueve alrededor de la escena y la describe desde varios puntos de vista a la vez. Esto conlleva un primer proceso de selección, un primer nivel de abstracción. Hay que pasar muchas horas descomponiendo figuras en distintos planos hasta que se llega a comprender cuántos y cuáles nos bastan para dar una descripción lo suficientemente completa. De este aspecto trataremos con más detalle en la sección 4.1 de nuestro trabajo.

Así pues, el pintor selecciona algunas zonas del volumen a representar y las descompone en planos. Con estos planos intentará hacer una especie de construcción arquitectónica básica que reproduzca la figura original. Pero, ¿cómo hacerlo? ¿Qué estructura dar a esta construcción de forma que sea muy sencilla y a la vez sea posible identificar el objeto que reproduce? ¿Qué trazos distinguen esencialmente un vaso y una jarra? Se necesita comparar figuras, ver qué formas las relacionan y qué características las diferencian esencialmente, estudiar sus esqueletos y sus volúmenes. En la sección 4.2 analizaremos este aspecto del trabajo de pintores y matemáticos del siglo XX.

A estas alturas del proceso, una vez elegidas las zonas a representar en un objeto y cómo representarlas , el pintor cuenta ya con unas cuantas piezas de información local; ahora su problema, al igual que el de sus contemporáneos matemáticos, es cómo combinarlos. Una tercera tarea que requiere, una vez más, un proceder abstracto, que analizaremos en la sección 4.3. Por último, tras haber encolado de manera coherente los diversos puntos de vista, los distintos niveles de aproximación a la realidad, el pintor nos ofrece una imagen global de lo que quiere representar. Este paso de lo local a lo global lo estudiaremos en la sección 4.4.

El resultado de este proceso es todo un reto para el intelecto, porque el espectador ha de sintetizar en su cabeza todos estos componentes: distintos niveles de abstracción y distintos puntos de vista aparecen entretejidos en cada cuadro. Si por un lado nuestros ojos reciben mayor cantidad de información sobre el material representado en la tela, por otro lado no es posible percibir esta información de inmediato: nos es necesario descodificarla primero, recorrer nosotros, como espectadores ante el cuadro, los distintos niveles de abstracción que el pintor recorrió cuando lo pintó.

3. EL ESTUDIO DE ECUACIONES Y EL ULTIMO TEOREMA DE FERMAT

Uno de los problemas centrales en matemáticas es el de hallar soluciones a ecuaciones. Ya hemos encontrado antes la ecuación de Pitágoras, que nos describe la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. También nos resulta familiar, aunque sólo sea por verla reproducida en camisetas y carteles, la ecuación de Einstein que relaciona masa, energía y velocidad de la luz.

Estudiar si una ecuación tiene soluciones o no, y de tenerlas, describirlas todas, es uno de los problemas más antiguos en matemáticas, y también uno de los más difíciles. Puesto que los números más sencillos con los que trabajar son los números *racionales*, formados por los números *enteros* (0, 1, -1, 2, -2, etc.) y sus fracciones, ya que es el conjunto más pequeño de números con los que además de sumar restar y multiplicar podemos dividir, es natural que uno de los primeros problemas con que se encararan los matemáticos fuese el de hallar soluciones en números racionales (o enteros) a las diversas ecuaciones que les iban surgiendo, tanto a ellos como a otros científicos, en el curso de sus investigaciones sobre la realidad que nos rodea. A partir de este momento, en toda ecuación que mencionemos consideraremos sólo sus soluciones enteras o racionales (esto es, soluciones formadas por números enteros o racionales).

Uno de los pasos fundamentales en el estudio de las ecuaciones lo dieron, independientemente, Pierre de Fermat y René Descartes. En el siglo XVII, y siguiendo las pautas marcadas por los matemáticos de la escuela de Bagdag del siglo X, en concreto Abu al-Jud ibn al-Leith y Omar al-Jayán, también espléndido poeta (véase [Ras] y [You] en la bibliografía), Fermat y Descartes relacionaron la búsqueda de soluciones a ecuaciones con la búsqueda de puntos sobre curvas. Concretamente, Fermat en su libro *Ad locos planos et solidos isagogue* (1936) enuncia el principio fundamental de la geometría de las coordenadas o *geometría analítica*, como se le llama en matemáticas

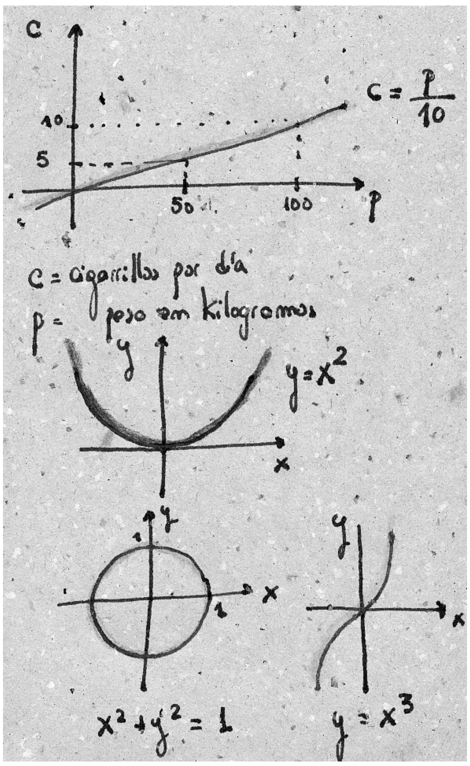
> *Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva.*

y utiliza de manera sistemática en sus gráficas de las curvas, los ejes de coordenadas formados por dos rectas perpendiculares entre sí: los ejes x e y que todos aprendimos a utilizar en la escuela. Por su parte, un año después y de manera mucho menos precisa, Descartes escribe a su vez el principio de la geometría analítica en el libro II de *La géométrie,* apéndice de su libro *El discurso del método*:

> *La solución de uno cualquiera de estos problemas de lugares geométricos consiste nada más que en hallar un punto para cuya completa determinación falta una condición. En cualquiera de estos casos se llega a una ecuación que contiene dos cantidades incógnitas.*

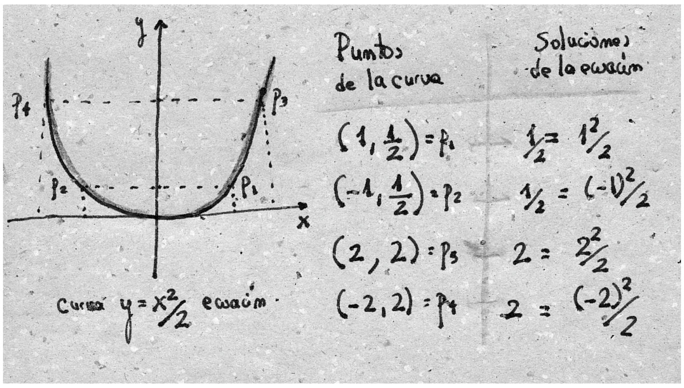
La descripción de Descartes es mucho menos clara que la de Fermat, y además no utiliza sistemas de coordenadas rectangulares ni fijos (aunque ahora a estos sistemas de coordenadas, introducidos de hecho por Fermat, les llamemos cartesianos). la gran contribución de Descartes fue el traducir los procedimientos geométricos a operaciones algebraicas, esto es, describir construcciones geométricas de regla y compás al lenguaje de las ecuaciones. La manera de mirar y colocarse de Fermat y la manera de describir de Descartes, juntas, construyeron el puente entre la geometría y el álgebra que permitió a la matemática estudiar las ecuaciones como las estudiamos hoy.

Pensemos en una curva trazada sobre una superficie, por ejemplo una carretera trazada sobre el globo terráqueo. Cada punto en esta carretera puede ser descrito mediante dos números, su latitud y su longitud. ¿Qué son latitud y longitud de un punto? Pues nada más que la distancia más corta desde este punto a dos circunferencias trazadas sobre la superficie terrestre que se cortan en un ángulo de noventa grados: el meridiano de Greenwich y la línea del Ecuador. Lo mismo que hacemos sobre la Tierra, se puede hacer sobre cualquier otra superficie: si esta es plana, podemos fijar dos rectas perpendiculares y utilizarlas como referencia, como ejes de coordenadas desde los que describir la posición de cualquier punto sobre la superficie. Basta con que asociemos a cada punto sobre la superficie los dos números que miden sus distancias respectivas a los ejes. Los dos números que determinan la posición de un punto con respecto a dos ejes de coordenadas se denominan *las coordenadas del punto respecto a esos ejes*. El método de Fermat y Descartes nos permite representar gráficamente con una curva ecuaciones que relacionen dos cosas de naturaleza numérica, dos *magnitudes* diríamos con propiedad.



Por ejemplo, hay una ecuación que nos relaciona el peso de un individuo con el número máximo de cigarrillos que es prudente que fume al día: un pitillo por cada diez kilos de peso. En las clases de matemáticas de la escuela aprendimos a representar gráficamente esta relación entre peso y cigarros: elegimos un eje de coordenadas formado por dos rectas perpendiculares. Las distancias sobre el eje horizontal representan los distintos pesos, las distancias sobre el eje vertical, los números de cigarrillos autorizados. Casando cada peso con su número de cigarrillos autorizado obtenemos un conjunto de puntos sobre el plano del papel que forman lo que llamamos una curva, que en este caso es una recta.

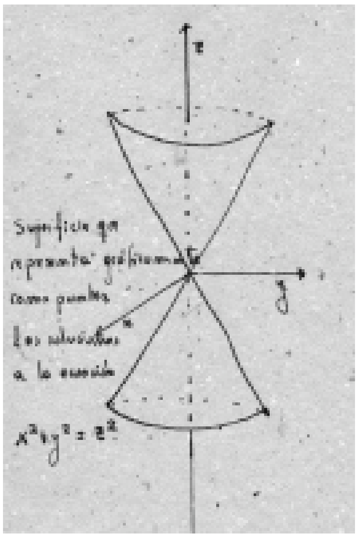
Desde Descartes, las ecuaciones que relacionan dos cosas se representan gráficamente mediante una curva, y a su vez las curvas se describen sobre el papel con una ecuación. Curvas y ecuaciones que relacionen dos magnitudes pueden considerarse como las dos caras de una misma moneda. Hablamos pues, con toda naturalidad, de la curva asociada a una ecuación y de la ecuación asociada a una curva. A cada punto en la curva corresponde una solución de la ecuación, y cada solución de la ecuación representa un punto de la curva.



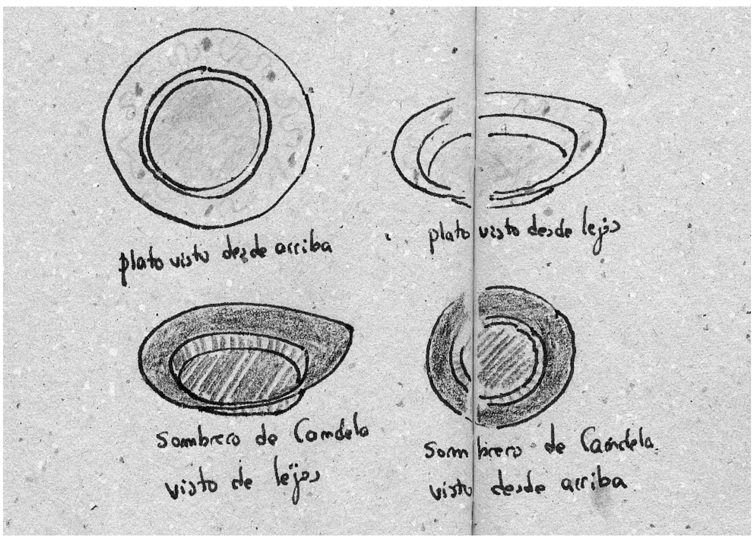
Si la ecuación sobre la que estemos trabajando relaciona tres magnitudes, necesitaremos tres ejes de coordenadas, tres rectas perpendiculares entre sí y que se corten en un punto, por ejemplo. En este caso la gráfica que obtengamos consistirá en puntos con tres números como coordenadas, y formará una superficie en vez de una curva.

Este método, claramente, no funcionará en cuanto nuestras ecuaciones relacionen más de tres magnitudes, pues la mente humana es incapaz de visualizar, y mucho menos dibujar, objetos en cuatro, cinco o más dimensiones.

Por eso el método introducido por Descartes para estudiar soluciones a ecuaciones mediante el estudio de puntos sobre las correspondientes curvas o superficies es bastante limitado, y los matemáticos han tenido que inventar otras maneras de proceder que les resulten útiles para aquellos casos en los que las representaciones gráficas no les ayuden.



Aun si limitamos el estudio de las ecuaciones a las que relacionan tan sólo dos o tres magnitudes, y aun si nos restringimos en la búsqueda de soluciones a los números enteros, el problema con que nos encaramos es muy difícil; basta pensar en la cantidad de tiempo y esfuerzo que ha llevado demostrar el Teorema de Fermat. Además es un problema que podríamos llamar infinito, puesto que hay una infinidad de números enteros y, en principio, habría que recorrerlos todos para comprobar si son o no son solución de nuestra ecuación. A finales del siglo XIX y principios del XX, los matemáticos Kummer, Krönecker y Hensel descubrieron una manera de hacer estas comprobaciones en etapas sucesivas, tomando cada vez tan sólo una cantidad finita de números que comprobar, y casando luego de forma adecuada los resultados obtenidos en las diversas etapas. Este método de trabajo, que geométricamente consiste en ir descomponiendo la curva o superficie que representa gráficamente la ecuación en una multitud de curvas o superficies sencillas (y por lo tanto en descomponer la ecuación en multitud de ecuaciones fáciles de resolver), lo describiremos en la sección 4.1.



Pese a las limitaciones mencionadas, relacionar ecuaciones con curvas da mucho juego. Por ejemplo, la curva que marca el borde de un plato (o un sombrero) cambia según desde donde lo miremos. Si nos colocamos sobre él, el plato tendrá forma de circunferencia. Visto desde lejos parecerá una elipse.

Tiene sentido, pues, considerar circunferencia y elipse como un mismo objeto matemático, una misma curva diríamos platónica, ideal, vista desde dos lugares distintos. Esta idea se puede traducir a las ecuaciones correspondientes, y eso facilita bastante nuestro trabajo, pues nos permite darnos cuenta de que muchas ecuaciones, en apariencia diferentes, de hecho no lo son. Se trata, simplemente, de una misma ecuación “vista” desde lugares distintos. Sólo hay que describir con cuidado cómo se transforma el aspecto de las soluciones de una misma ecuación vista desde lugares distintos. Esto no es fácil. Entre otras cosas, no es obvio cuándo dos curvas aparentemente diferentes son en realidad una única curva observada desde puntos de vista diferentes. Los matemáticos han dedicado mucho esfuerzo a lo largo del siglo XX para desarrollar maneras de comparar curvas (y ecuaciones), de identificar las características esenciales que distinguen a unas de otras, para reconocer cuándo se trata de la misma, vista desde lugares diferentes. Este aspecto del trabajo de los matemáticos se analizará en la sección 4.2.

Kummer, Krönecker y Hensel sustituyeron el problema infinito de hallar las soluciones enteras a una ecuación por una cadena de problemas finitos, cada uno de los cuales consiste en hallar las soluciones de la ecuación en el conjunto de los números menores que uno dado. “¡Menudo ahorro!”, podríais rebatir. Hemos sustituido una única ecuación por una infinidad de ellas. La respuesta es que las nuevas ecuaciones son todas resolubles. Para hallar las soluciones a la primera ecuación hay que ser muy, muy listo. Para resolver las nuevas, basta con ser muy, muy paciente.

Hensel y otros matemáticos de principios del siglo XX decidieron no ser ni estúpidos y pacientes, ni listos y rápidos (y fracasar probablemente), sino inteligentes y vagos, y siguieron pensando. Sus investigaciones les llevaron a hallar la manera de construir soluciones enteras a ecuaciones a partir de de tan sólo una cantidad finita de ellas. En 4.3 veremos un ejemplo de esta estrategia.

El estudio de las soluciones de una ecuación siguiendo los métodos que acabamos de mencionar ha resultado muy fructífero. Entre otras cosas, ha servido para que Andrew Wiles resolviese el Teorema de Fermat, como veremos en la sección 4.4.

4. EL SIGLO XX A TRAVES DE PICASSO Y FERMAT

El Museo de Arte Contemporáneo Esteban Vicente está en la Plazuela de las Bellas Artes de Segovia, ciudad castellana a una hora de camino de Madrid en un autobús que, convenientemente, tiene parada junto a la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. Eso me permite ir y venir de mi despacho en la Facultad a las salas del Museo en una misma mañana, atravesando los hermosos montes de la sierra madrileña acompañada por las imágenes de los cuadros de Picasso y las construcciones matemáticas que han llevado a resolver el Teorema de Fermat. Todo un lujo.

Durante el viaje, cómodamente recostada en el asiento, las miradas de pintores y matemáticos se cruzan en mi cabeza, mientras las luces del otoño, bailando sobre rocas, encinas y pinos, hipnotizan mi mirada. Quizás sea cierto que el ojo físico y el ojo mental miran mejor cuando miran juntos.

4. 1. DESCOMPOSICION DE UN OBJETO EN UN PRISMA CON MIL CARAS

PICASSO: Descomposición de una figura en planos

Subo las escaleras que separan la calle Real de Segovia y el museo, impresionada por los sobrios edificios de piedra de la plaza que atravieso. Mire donde mire, lo que veo es hermoso y está lleno de luz. Del metro gris de Madrid a las piedras doradas de Segovia. Vaya suerte la mía. A lo lejos la catedral, cúpulas y pináculo sobre los tejados.

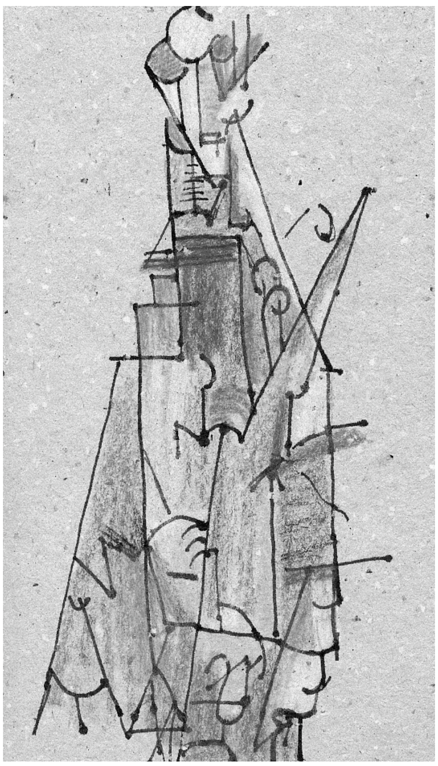
En un recoveco de la plazuela, se levanta el Museo. Construido originalmente en 1455 como palacio para Enrique IV y su esposa, D.ª Juana de Portugal, el edificio ha sufrido tantas transformaciones a lo largo de su vida que apenas quedan en él vestigios de cómo era durante el siglo XV. En 1518 es dividido en tres partes, y la parte central, convertida hoy en Museo de Arte Contemporáneo, la heredan Pedro Lope de Medina y Catalina de Barros, que la transforman en Hospital de Viejos. Vuelve a cambiar de destino y de fisonomía durante el siglo XVIII, al convertirse en la primera Escuela de Dibujo de Segovia. Las grandes salas se compartimentan en aulas y se pierde el trazo original del espacio. A partir del siglo XIX alberga la primera Escuela de Artes y Oficios de Segovia, función que mantiene hasta 1974, año en que, ante la amenaza de ruina que pende sobre el edificio, la Escuela se traslada a la Casa de los Picos. Es entonces cuando la Diputación Provincial de Segovia, consciente del desequilibrio existente entre el riquísimo patrimonio histórico de su ciudad y la escasa oferta artística desde una visión más actual, considera la posibilidad de restaurar el edificio, transformándolo en museo de arte contemporáneo.

Mientras, y de la mano de la magnífica exposición organizada por Natacha Seseña en 1987 en la Fundación del Banco Exterior. en Madrid, España ha recuperado al pintor segoviano Esteban Vicente. Nacido en Turégano en 1903, Vicente abandona España en 1928, se establece en Nueva York en 1936 —donde vive hasta su muerte el 11 de enero de 2001—, y forma parte de la llamada escuela de Nueva York, el primer movimiento del expresionismo abstracto, que tanta influencia ha tenido en la pintura occidental del siglo XX. Se suceden las exposiciones por toda la Península, y de esta manera, uno de los pintores españoles de mayor proyección fuera de nuestras fronteras y más desconocidos dentro de ellas, pasa de ser una mera cita en los grandes manuales a convertirse en una de las primeras figuras de nuestro panorama artístico. Consciente de la necesidad de dar a conocer la espléndida obra de Esteban Vicente, la Diputación Provincial de Segovia comienza las gestiones que culminan, tras una sobria y moderna recuperación del espacio original del edificio, con la inauguración, el 28 de abril de 1998, del actual Museo de Arte Contemporáneo Esteban Vicente.

Nada más entrar en el museo, la primera sorpresa grata: hay guardarropa. (A ver cuando lo ponen en el Prado ... ¡Cuántas mañanas de lluvia la pereza de tener que llevar a cuestas una gabardina mojada impide que los madrileños visitemos nuestra pinacoteca más querida!) Cómoda ya sin el abrigo y cargada con cuaderno, pluma, lapiceros de colores y sacapuntas, atravieso una puerta de cristales que separa la entrada del edificio de la zona de exposiciones. Entro en la primera sala de la muestra *Picasso en las colecciones españolas*. Un cuadro llama poderosamente mi atención: está pintado exactamente con los mismos colores de las piedras de las escaleras y fachadas que componen la plazuela de las Bellas Artes que acabo de recorrer.

Hombre con clarinete, 1911

Planos, planos de luces, planos de formas. Belén Franco, pintora y amiga, que está conmigo en la sala, me susurra al oído. “Quítate las gafas para mirar este cuadro”, y yo me las quito.



Como si de un holograma se tratase, un volumen cobra forma ante mis ojos. Un volumen con sensación de volumen, en relieve y flotando sobre el lienzo, no pintado sobre el lienzo. Me vuelvo a poner las gafas y regresan los planos, perfectamente delimitados por gruesos trazos negros y rectilíneos. Me quito las gafas una segunda vez y los trazos negros desaparecen de nuevo. Los planos, pintados en diversos tonos de gris, oro y pardo, actúan como planos de luz que se disolvieran unos en otros creando la figura del clarinetista en perfecto relieve sobre la superficie del lienzo. El efecto óptico es espectacular. Y al no haber proyectores, ni rayos láser, ni equipo técnico, el fenómeno no parece fruto de la técnica, sino de las manos, un juego malabar propio de circos, ferias y magias de café.

Picasso descompone la figura en un prisma con mil caras de luz, y el espectador, si desenfoca sus ojos (la luz sólo se puede mirar directamente desenfocando los ojos, cerrando los párpados hasta que la imagen que está ante nuestros ojos no es más que una finísima línea borrosa), puede recomponerla de nuevo. Y cuando lo hacemos aparece ante nosotros una imagen en relieve, un volumen, no un dibujo plano que, a base de trucos (perspectivos y gradaciones de color, por ejemplo), logra crear la ilusión de volumen. Desenfocados los ojos, disueltas las caras del prisma unas en otras, el clarinetista de Picasso no pretende tener volumen, sino que es un volumen.

Picasso logra describir un aspecto global de esta figura, el ser un volumen, a base de una infinidad de imágenes locales y planas.

Pienso en esta estrategia. Un método que es fruto de un proceso de abstracción. El pintor hace abstracción en la figura de todo lo que es ajeno a su ser de volumen. Como consecuencia, tan solo las luces que componen la figura (pintadas como planos de colores) son seleccionadas. Todas las demás características del clarinetista se pasan por alto, se ignoran. Seleccionar unas características locales y abandonar otras para que en nuestro ojo pueda reproducirse el volumen global de la figura. Este cuadro está pintado en 1911. Año 1911 ...

Nuestro objetivo es mirar la construcción de Wiles utilizando los cuadros de Picasso como ventanas. El trabajo de Wiles es magnífico desde dos puntos de vista: por la maestría con la que combina y teje en un finísimo encaje de bolillos prácticamente todos los resultados obtenidos a lo largo del siglo XX sobre el estudio de las soluciones a ecuaciones de tercer grado, y por los métodos nuevos que él mismo inventa, tan potentes que en los cinco años que han pasado desde que Wiles publicase en 1995 sus resultados en la revista *Annals of Mathematics*, ya han abierto caminos nuevos al quehacer matemático y han servido para hallar respuesta a muchas de la preguntas que sobre ecuaciones concretas o familias de ecuaciones los matemáticos tienen aún sin responder.

Pienso, pues, en las matemáticas de la demostración del teorema de Fermat, y las pienso desde este cuadro de Picasso. Para ayudarme a enfocar la mirada mental, miro de nuevo la fecha.

Año 1911. ¿Dónde me ubica este año, matemáticamente hablando? Es el año en el que el matemático Fréchet lleva a cabo la formalización final de lo que es el plano tangente a una superficie cualquiera en uno de sus puntos (sugerida para dos dimensiones por Stolz, en 1893 y por Young, en 1909). Plano tangente a una superficie en uno de sus puntos... Una superficie esférica, la Tierra, pongamos por caso. Queremos describir la Tierra, que es globalmente un volumen, sobre un papel, que es plano. Como ya descubrieron los cartógrafos hace siglos, no es posible construir sobre un plano un mapa de la Tierra sin distorsión. Este hecho puede expresarse diciendo que la esfera en su conjunto, esto es, globalmente, no puede ser proyectada sobre un plano sin que haya distorsión. Por otra parte, podemos definir el plano tangente a la esfera en cada uno de sus puntos. Si, a continuación, consideramos en cada punto de la esfera un trocito de su plano tangente, no es difícil imaginarse la esfera como un encolado de todos estos planos *locales*. Esto se expresa diciendo que, *localmente,* podemos construir la esfera pegando, encolando planos. La esfera es, pues, un ejemplo de objeto en el que las estructuras locales y las globales tienen propiedades opuestas. Globalmente no puede representarse sobre un plano. Localmente sí.

La definición de la esfera como encolado de planos nos da, como el clarinetista de Picasso, una visión *local* de la esfera. Trabajar localmente ofrece, de entrada, dos ventajas: brinda información detallada sobre algún aspecto parcial del objeto que estudiamos y, a la vez, no requiere elegir previamente referencias externas. Ni el matemático ha de elegir un sistema de coordenadas exterior a la esfera desde donde mirarla, ni el ojo del pintor ha de quedarse quieto en un punto desde el que mirar la figura. Ambos, matemático y pintor, se mueven alrededor del objeto con volumen que quieren describir y, en ambos casos, en la descripción que nos dan no importa dónde esté colocado el objeto. Ni en el cuadro de Picasso hay una escena alrededor del hombre, ni en la descripción de los matemáticos aparece nada exterior a la esfera.

¿Por qué funcionan estas descripciones de Picasso y matemáticos? Miro de nuevo el clarinetista. La característica global que Picasso nos quiere describir es el volumen de la figura. El pintor se enfrenta aquí con un problema: el lienzo es plano. Solución: dividir al hombre en regiones, en trozos locales. Cada pequeña región sí se puede describir sobre un plano.

La misma estrategia que siguen los cartógrafos para describir la Tierra. Planos de regiones pequeñas, la multitud de cartas que todo navegante que atraviesa el océano lleva a bordo.

Los matemáticos que estudian en esa época las ecuaciones también se enfrentan a un problema que, en esencia, es de la misma naturaleza que el afrontado por Picasso y los cartógrafos. Hay una ecuación, y buscan sus soluciones. Estas soluciones tienen que encontrarlas entre una infinidad de números. Eso plantea de inmediato un problema: sólo somos capaces de llevar a cabo una cantidad finita de comprobaciones. Solución: descomponer la infinidad de números en pequeños trozos que puedan ser recorridos con una cantidad finita de cálculos.

MATEMATICAS: Estudio de una ecuación descomponiéndola en una infinidad de ecuaciones fáciles de estudiar.

El problema de hallar las soluciones en números racionales a una ecuación es difícil. Incluso si nos limitamos a buscar soluciones entre los números naturales (0, 1, 2, 3, 4, ...), el problema sigue siendo difícil, como ya hemos comentado con anterioridad, pues seguimos teniendo que comprobar una infinidad de números como posibles soluciones. Es un problema de los que se llaman en matemáticas globales, que llevan a recorrer un conjunto infinito, en este caso de números, en toda su globalidad. A principios de este siglo, el matemático Kurt Hensel introdujo lo que conocemos con el nombre de *métodos locales,* entendiendo aquí por *local* algo que es pequeño, parcial y asequible, esto es, computable: descomponer, repartir la infinidad de números naturales en pequeñas colecciones formadas cada una de ellas por una cantidad finita de números, recorrer estas colecciones por separado y luego intentar traducir todos los datos conseguidos en información sobre las soluciones a nuestra ecuación en números enteros. Dicho con otras palabras, trabajar localmente sobre colecciones finitas de números, y combinar las informaciones locales de tal forma que brinden información global sobre la ecuación, que digan algo sobre las soluciones enteras a la ecuación.

Guiado por sus maestros Ernst Kummer y Leopold Krönecker, Hensel reflexionó sobre la posibilidad de ir recorriendo el conjunto 0, 1, 2, 3, 4, ... poco a poco, en etapas sucesivas, cada una de las cuales requiriese tan sólo una cantidad finita de operaciones. Y se le ocurrió la siguiente idea.

Supongamos que tenemos un ecuación concreta de la que buscamos todas sus soluciones *globales* (esto es, todas sus soluciones en el conjunto 0, 1, 2, 3, ...). Podríamos comenzar por considerar sólo los números 0 y 1, después trabajar con 0, 1 y 2, a continuación ampliar los números con los que trabajamos a 0, 1, 2, y 3, y así sucesivamente. En cada etapa añadimos un número más a los considerados en la etapa anterior, y en todas ellas comprobamos si una cantidad finita de números son o no soluciones a nuestra ecuación. Es un método conceptualmente sencillo, algo así como construir una librería grande a base de ir encajando pequeños módulos uno en otro. Comenzamos con un módulo de dos piezas, 0 y 1, el siguiente módulo tendrá tres piezas, 0, 1, y 2, el siguiente cuatro, y así sucesivamente. Siguiendo con la analogía de la librería, a partir de ahora describiremos este proceso diciendo que buscamos primero las soluciones en el *módulo 2* (el módulo con las *dos* piezas 0 y 1), luego en el *módulo 3* (formado por las *tres* piezas, 0, 1 y 2), a continuación en el *módulo 4* (con *cuatro* piezas, 0, 1, 2 y 3), y así sucesivamente.

Piezas del módulo 2: 0, 1.

Piezas del módulo 3: 0, 1, 2.

Piezas del módulo 4: 0, 1, 2, 3.

...

Piezas del módulo 2.000: 0, 1, 2, 3, ..., 1999.

Etcétera.

Al ir recorriendo todos los módulos vamos de hecho recorriendo todos los números naturales, y a Hensel se le ocurrió que quizás fuese posible construir las soluciones en números naturales a nuestra ecuación, las soluciones llamadas globales, a partir de sus soluciones en los distintos módulos, lo que llamamos sus soluciones locales. La misma estrategia que Picasso y otros pintores contemporáneos a Hensel estaban siguiendo en su descripción de las figuras: construir una imagen global combinando adecuadamente imágenes locales. Sólo necesitaba poder echar en cada módulo las cuentas que requiere comprobar si un número es o no solución de una ecuación: sumar, restar y multiplicar. ¿Cómo echar cuentas, por ejemplo en el módulo 5?

En el módulo 5 sólo contamos con cinco piezas, los números 0, 1, 2, 3 y 4, ¿podemos contar sólo con estos números? Contar manejando todos los números enteros da lugar a la serie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc.

Intentemos contar en el módulo 5: cero, uno, dos, tres, cuatro... ¿qué hacemos ahora? Ya hemos agotado todos nuestros números, así que no nos queda más remedio que volver a empezar de cero. Haciendo esto cada vez que llegamos a un cinco, obtenemos la serie 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, etc. ¿Cómo calcular, por ejemplo, 4 + 4? Sumar cuatro más cuatro no es, al fín y al cabo, más que contar hasta cuatro y a continuación contar otras cuatro unidades más. Esto nos lleva al octavo lugar de la serie de los números usuales, que en el módulo 5 lo ocupa el 3:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12, ...

0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, **3**, 4, 0, 1, 2, ...

Así pues, en el módulo 5, 4 + 4 produce 3. Y para calcular 4 - 1 contamos hasta cuatro y a continuación echamos una hacia atrás: 3. Si podemos sumar, podemos también multiplicar, que no es en el fondo más que sumar, y por tanto contar. Multiplicar 3 x 4, por ejemplo, consiste en contar hasta cuatro tres veces, una detrás de otra: esto nos lleva hasta 12. El número que ocupa el lugar 12 en la serie 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1... es el 2, por lo que multiplicar 3 x 4 en el módulo 5 produce 2.

Una vez que sabemos cómo sumar, restar y multiplicar utilizando exclusivamente los números con que contamos en cada módulo, ya podemos buscar soluciones a una ecuación en estos módulos: vamos realizando las sumas, restas y multiplicaciones que nos describe la ecuación con los distintos números del módulo, y comprobamos cuáles son y cuáles no son soluciones.

Reflexionemos con un poco más de detalle sobre el proceso que acabamos de describir. ¿Qué ventajas e inconvenientes nos ofrece? En principio, no parece que hayamos avanzado mucho. Da la impresión de que tan sólo hemos descrito una manera sistemática de llevar a cabo en etapas sucesivas la búsqueda de soluciones a una ecuación, pero que aún necesitamos recorrer una infinidad de etapas. Afortunadamente no es así, pues son ciertos, de entrada, tres hechos.

El primero es que si al buscar las soluciones a una ecuación por este método, resulta que si en alguna de las etapas, en alguno de los módulos, la ecuación no tiene solución, tampoco la tiene en general. Así pues, si en alguna de las etapas no encontramos solución, podemos parar, pues la ecuación de la que partíamos no tiene solución y el problema queda resuelto.

El segundo hecho cierto es que nos basta trabajar con los módulos primos para obtener toda la información posible sobre nuestra ecuación.

Por último, el número de soluciones a una ecuación dada en los sucesivos módulos primos, esconde información sobre sus soluciones en números enteros.

No nos importa, pues, cuáles sean exactamente las soluciones a una ecuación en todos los módulos sucesivos; sólo necesitamos considerar los que vengan dados por una cantidad prima de números, y en ellos sólo nos importa saber si las soluciones existen y cuántas son. Si no existen en alguno de los módulos, podemos parar, pues ya sabemos que la ecuación de la que partíamos no tiene solución. Si existen, vamos tomando nota de cuántas son.

Descomposición en módulos de la ecuación $x^3 - x = y^2 + y$ (1910-1920).

El número *210* tiene la peculiar propiedad de ser a la vez producto de dos y detres números consecutivos, pues $210 = 14 \times 15$, y a la vez $210 = 5 \times 6 \times 7$. ¿Cuántos números distintos hay, que como el 210, sean a la vez producto de dos y de tres números consecutivos? Unos cálculos sencillos nos dicen que responder a esta pregunta requiere hallar las soluciones a la ecuación $(x - 1)\, x\, (x + 1) = y\, (y + 1)$, o lo que lo mismo, $x^3 - x = y^2 + y$. Para hacerlo, seguimos la estrategia de las etapas sucesivas, de los módulos, recordando que basta con considerar los que tengan un número primo de piezas. Consideramos, pues, los módulos 2, 3, 5, 7, 11, etc.

Para hallar las soluciones a la ecuación $x^3 - x = y^2 + y$ en cada uno de estos módulos, vamos considerando uno a uno los distintos valores que pueden tomar x e y, y comprobando cuántos de estos valores encajan en la ecuación, recordando que operar en un módulo concreto requiere pensar en sumar, restar y multiplicar como formas de contar. En el módulo 2 la ecuación tiene cuatro soluciones; en el módulo 3 tiene seis; en el módulo 5 las soluciones son siete; en el módulo 7 hay ocho soluciones a nuestra ecuación, etcétera. Así pues, la información sobre el número de soluciones locales a la ecuación $x^3 - x = y^2 + y$ viene dada por la serie de números 4, 6, 7, 8, ...

Picasso descomponía su clarinetista en planos, cada uno de los cuales proporciona información sobre la forma y la luz de una parte de la figura. Nosotros hemos descompuesto nuestra ecuación en números, cada uno de los cuales proporciona información sobre el número de soluciones de la ecuación en el módulo primo correspondiente.

4.2. RELACIONES ENTRE LOS OBJETOS

Abandono la primera sala del museo y me doy un paseo. Necesito estirar las piernas y la cabeza. Deambulo por el pasillo, antaño parte del corredor de un patio de tres caras, hoy eje fundamental, horizontal y vertical, del edificio.

Hay mucha gente joven recorriendo la exposición, algunos enfundados en cazadoras de cuero, con el pelo corto y el flequillo levantado en pinchos, otros, de pelo largo, cubiertos por enormes jerseys de lana y amplios pantalones. Todos parecen igualmente intrigados por los cuadros, y con esfuerzo resisto el impulso de acercarme a los grupos y escuchar sus conversaciones.

Mientras, llego a una de las salas del primer piso, estructurada como un enorme pasillo que a modo de balconada, va recorriendo las paredes de la sala del piso bajo que acabo de abandonar, a media altura entre el suelo y el techo. Una hermosa ventana abocinada del siglo XV y una cornisa que sirve ahora de cómodo banco a una pareja de turistas que toman notas en un cuaderno son los únicos vestigios del pasado a la vista.

La luz que atraviesa una segunda ventana, al fondo, llama mi atención y me dirijo a ella. Veo, del otro lado, un arco de medio punto. Arco de medio punto. Cómo me gustó esa expresión cuando me la enseñaron de niña, y cómo se me llenaba la boca diciéndolo. Arco de medio punto. ¿Cómo de grande es medio punto? Me recuesto contra la ventana y miro por ella. A mis pies, la sala de conferencias del museo, una capilla construida en el siglo XVI y restaurada recientemente. Es la única parte del edificio que ha resistido las múltiples transformaciones. Disfruto unos minutos contemplando a través del cristal el hermoso artesonado mudéjar, la bóveda de crucería gótica y los dos sepulcros con sus estatuas yacientes de ojos, sorprendentemente, abiertos.

Cómoda y en la tranquilidad del rincón, recapacito. Hay un problema que resolver: recorrer un algo inabarcable. El pintor, describirnos un volumen desde un lienzo plano; el matemático, llevar a cabo una cantidad infinita de cuentas en un tiempo finito. En la búsqueda de solución al problema, ambos, pintor y matemático, investigan siguiendo similares procesos de abstracción. Van probando distintos métodos, distintas aproximaciones. La primera: descomponer ese algo inabarcable en zonas abarcables. Una figura con volumen no se puede proyectar sobre un plano, pero una zona pequeña sí.

La voz de Laura Tedeschini-Lalli me viene desde Roma. “Piensa en los atlas de la Tierra”, me dice.Y yo pienso en ellos. Una de esas grandes cadenas de tiendas madrileñas que lo mismo venden un libro que una lechuga y abren de noche, tuvo hace unos años a precio de oferta libros de mapas. La voz se corrió por la Facultad de Matemáticas entre los profesores, y creo que en unos días nos los llevamos todos. Yo conseguí un ejemplar con espléndidas ilustraciones en las que se aprecian con claridad dos períodos en la elaboración de mapas: el período anterior a Euler y el período posterior a Euler.

Este matemático, que vivió en el siglo XVIII, demostró que no se puede proyectar sin distorsión la superficie esférica de la Tierra sobre un plano. Las representaciones de la Tierra previas a Euler que aparecen en mi libro son mapas de la Tierra, intentos por reproducir la corteza terrestre y los mares sobre la superficie plana del papel. A partir de la época de Euler, ya no hay mapas, hay atlas. La geosfera nunca aparece representada directamente sobre un único mapa, sino que se hacen varios mapas de áreas más pequeñas que sí pueden ser representadas fácilmente sobre la superficie plana del papel, y se nos dan unas reglas para pegar unos con otros. Pienso también en las cartas de navegación que lleva a bordo cualquier navegante. Cada una es un mapa local. Todas juntas nos dan información sobre un objeto que es tridimensional, la superficie de la Tierra.

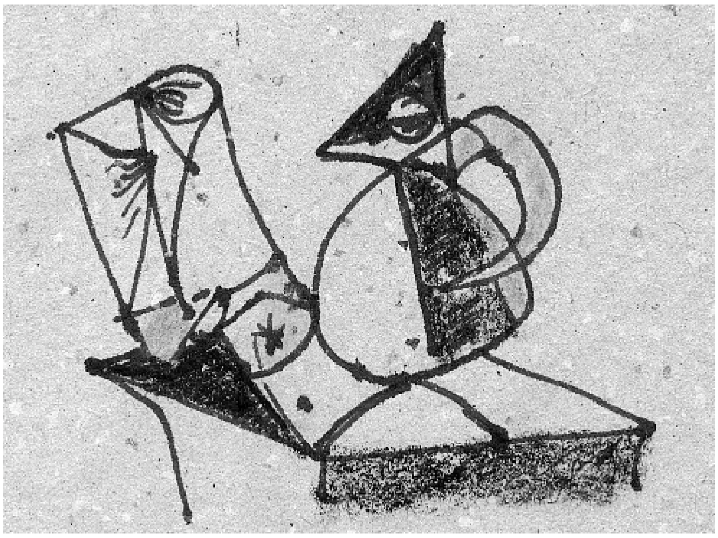
Descomposición de un volumen en planos. Si es posible descomponer un volumen en planos, ¿será también posible componer un volumen a base de planos? Para ello necesitaríamos primero estudiar los distintos volúmenes, sus formas y comparar unas con otras. De esta manera nos será posible hacer la necesaria selección de trazos con los que caracterizar un volumen y distinguirlo de otros.

Dejo mi esquina y bajo de nuevo a la primera planta.

PICASSO: Relaciones entre las figuras

Entro en la sala segunda de la exposición. A la izquierda un cuadro pequeño me hace sonreir. Desde él me contemplan, muy pomposos y solemnes, un pájaro y una pájara que parecen salidos de las páginas de *Apuntes para un tratado de cocotología*, libro en que don Miguel de Unamuno utiliza matemáticas, embriología, etimología y diversas artes más para enseñarnos a distinguir pájaros, pájaras y sus primas, las pajaritas, de otras aves.

Verre et Pichet, 1914



Yo he visto muchos cuadros en los que Picasso pinta palomas, pero es la primera vez que en un cuadro suyo veo un pájaro y una pájara. Abro el cuaderno, saco los lapiceros y los dibujo pensando en don Miguel. Al acabar me acerco al cuadro para leer su nombre: *Verre et Pichet*, 1914. Vaso y jarra. Así pues, no se trata de un pájaro y una pájara sino de un vaso y una jarra. Me alejo de nuevo, y vuelvo a mirar el cuadro. Sí, también es el dibujo de un vaso y una jarra. Pero no por ello dejan de ser un pájaro y una pájara. Ahora bien, ¿se trata de un pájaro que tiene forma de vaso, o de una jarra con forma de pájara? Recuerdo aquellos chistes de la adolescencia. ¿En qué se parecen las cataratas del Niágara y el Polo Norte?, nos preguntábamos nosotros. ¿En qué se parecen un vaso y un pájaro?, me pregunta Picasso.

> *Juan Gris llamaba a esta manera de pintar "poética", y en sus exposiciones, Gris se colocaba junto a los cuadros y los decoraba con "rimas y metáforas", como él las llamaba, señalando al atónito observador similitudes que éste no había percibido antes. "¿No cree que la boca de esta jarra se parece a la pera, la que está a su lado? ¿La copa al As de corazones? Las cosas están encadenadas por relaciones* ([Kah -2], pág. 86).

Esta cita de Juan Gris me trae a la memoria la conferencia “De las posibilidades de la pintura” que este pintor pronunció ante el Grupo de estudios Filosóficos y Científicos en la Sorbona, el 15 de mayo de 1925. Reproduzco algunos párrafos (el texto completo puede leerse en [Kah-1], págs. 420-434).

> *Cada época ha influido en sus elementos pictóricos con sus inquietudes peculiares. En ciertos momentos de la historia se ha dado importancia y alcance religioso a puros elementos de la pintura; en otras épocas han influido científicamente los elementos del pintor. Se sabe que Vinci pensaba en la composición química de la atmósfera cuando pintaba el azul de un cielo. La carne palpitante de vida de los pintores venecianos, donde se adivina la sangre circular bajo la dorada piel no era debida sino a las conquistas fisiológicas del Renacimiento.*
>
> *Estos elementos, influenciados así, han formado lo que se ha llamado la estética de cada época y no hay duda de que un descubrimiento científico aplicable sólo a la técnica pictórica como la perspectiva italiana influyó en todas las estéticas desde el Renacimiento.*
>
> *En todas las grandes épocas del arte, se siente la necesidad de representación de un mundo sustancial y espiritual. Cada época lo ha influenciado y diversificado según sus exigencias e inquietudes. La técnica no ha hecho, cada vez, más que adjetivar ese mundo sustancial. Hay medios técnicos que han existido en todos los tiempos, y hay otros que son menos constantes y están sometidos a la estética. Ejemplo: la perspectiva italiana no era sino un medio, sujeto a las exigencias científicas de la estética del Renacimiento.*

Sólo los medios arquitectónicos son constantes en la pintura. Incluso diría que la única técnica pictórica valedera es una suerte de arquitectura plana y coloreada.

Puede decirse ahora que, si la estética es el conjunto de las relaciones entre el pintor y el mundo exterior, la técnica es el conjunto de relaciones entre las formas y los colores que contienen, y entre las formas coloreadas entre sí. Esto es la composición y da lugar al cuadro.

¿En qué se diferencian dos figuras? En su forma, en su estructura. Si dos figuras son distintas, desde algún punto de vista habrá de ser apreciada una diferencia entre sus formas. Si se las mire desde donde se las mire vemos lo mismo en una y otra, concluiremos que se trata de la misma figura. Descomponer una figura en planos nos enseña a mirar los volúmenes como composiciones arquitectónicas construidas a base de planos, y volúmenes distintos dan lugar a composiciones con formas distintas. Desde esta ventana que nos ha abierto el cuadro de Picasso, observamos nuestra construcción matemática, en la que intentamos estudiar las soluciones a ecuaciones. ¿Tienen forma también las soluciones a una ecuación? Sí.

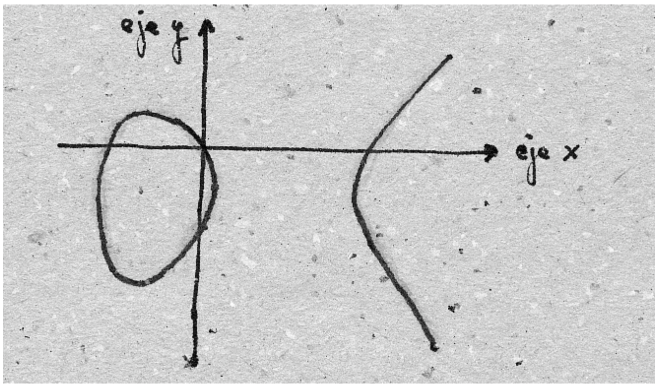
MATEMATICAS: Comparar ecuaciones construyendo una red con el conjunto de sus soluciones y comparando estas redes.

Descartes nos enseñó a representar gráficamente una ecuación con una curva. A cada punto sobre la curva le corresponde una solución de la ecuación y viceversa. Una vez que esta relación está establecida, se pueden estudiar soluciones determinadas de una ecuación a través del estudio de los puntos correspondientes sobre la curva. Si, por ejemplo, sólo interesan las soluciones que sean números racionales, nos limitaremos a estudiar los puntos sobre la curva cuyas coordenadas sean números racionales.

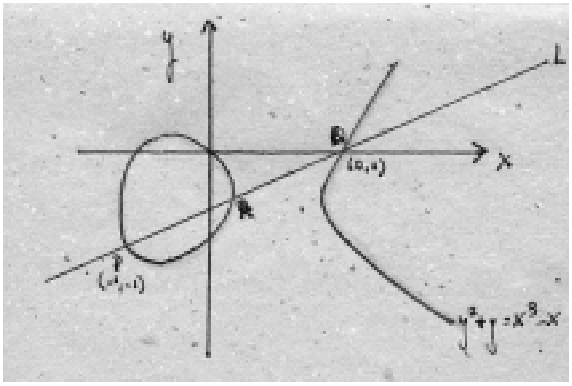
Supongamos, pues, que se tiene una ecuación, y que se quieren estudiar sus soluciones en números racionales. Se dibuja la curva correspondiente y se presta atención a los puntos de ella que tienen por coordenadas dos números racionales. ¿Se puede formar alguna estructura con ellos? Hay un juego para niños que consiste en unir con rectas una serie de puntos numerados y obtener así una estructura que identifica una figura. Lo mismo podemos hacer con los puntos de una curva que tengan coordenadas racionales. Por lo general, si unimos con rectas los puntos con coordenadas racionales de una curva cualquiera no obtenemos más que un caos de rectas sin orden ni concierto. Pero en el caso de algunas curvas específicas, como la curva $y^2 + y = x^3 - x$ que encontramos en 4.1 —y todas las de su tipo, en las que la *y* aparece al cuadrado y la *x* al cubo—, sí obtenemos una estructura ordenada, un esqueleto que caracteriza tanto a la curva como a la ecuación que representa. Esta estructura, cuando existe, nos permite comparar ecuaciones (y curvas), saber cuándo son distintas y cuándo de trata de la misma, vista desde puntos de observación distintos. Si dos ecuaciones (o curvas) son distintas, desde algún punto de vista la forma de la estructura que forman sus soluciones ha de ser distinta.

La red de soluciones de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$

Dibujo mi ecuación sobre un plano siguiendo el método de Descartes: elijo dos ejes de coordenadas perpendiculares y voy dando valores numéricos a las variables x e y en la ecuación.

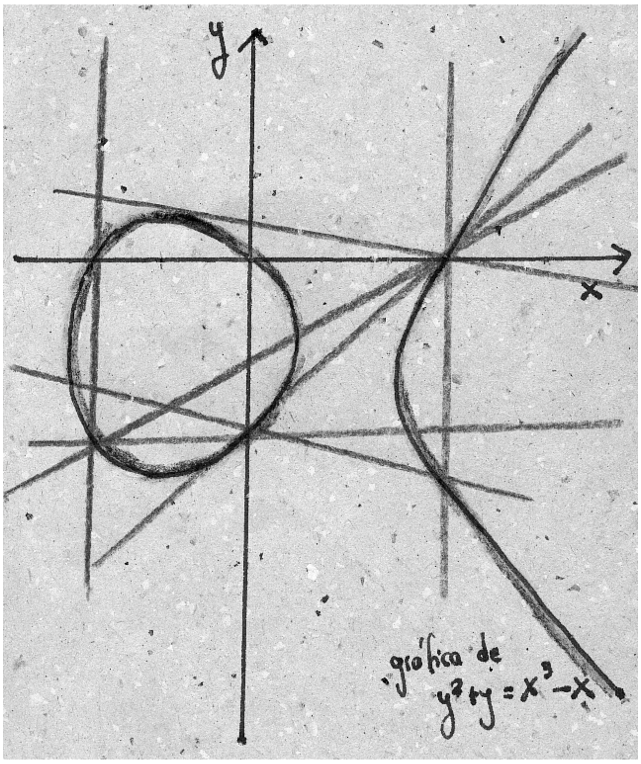


Obtengo una curva con dos partes, una de forma oval y la otra con forma de paraboloide. Ahora presto atención a los puntos de la curva cuyas dos coordenadas se corresponden con soluciones en números racionales a la ecuación. Y observo algo curioso: siempre aparecen alineados de tres en tres.



Esto no es frecuente. En general, toda recta que yo trace cortará a una curva con ecuación de tercer grado en tres puntos, pero las coordenadas de estos tres puntos serán números de naturaleza distinta.

Sin embargo, en la curva $y^2 + y = x^3 - x$, y en todas las de su tipo —una variable aparece al cuadrado y la otra al cubo—, ocurre que si dos de los puntos en los que recta y curva se cortan tienen coordenadas que se corresponden con soluciones racionales a la ecuación de la curva, las coordenadas del tercer punto de corte también serán números racionales, y se corresponderán también, por lo tanto, con una de las soluciones que busco. Esta inusual propiedad nos garantiza que las soluciones en números racionales a la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ forman una estructura muy simple, constituida por rectas que, como si de un esqueleto se tratase, subyacen a la curva y se cortan con la curva en sus puntos con coordenadas racionales.



Ya contamos, pues, con una estructura cuya forma caracteriza a la ecuación: el esqueleto construido uniendo por medio de rectas todos los puntos de la curva con coordenadas racionales. Si dos curvas o ecuaciones son distintas, sus estructuras serán distintas. Si dos curvas o ecuaciones, en apariencia diferentes, son de hecho la misma, descrita desde lugares distintos, sus estructuras serán iguales. Hemos encontrado, pues, una manera de comparar ecuaciones a base de comparar la forma de la estructura de sus soluciones.

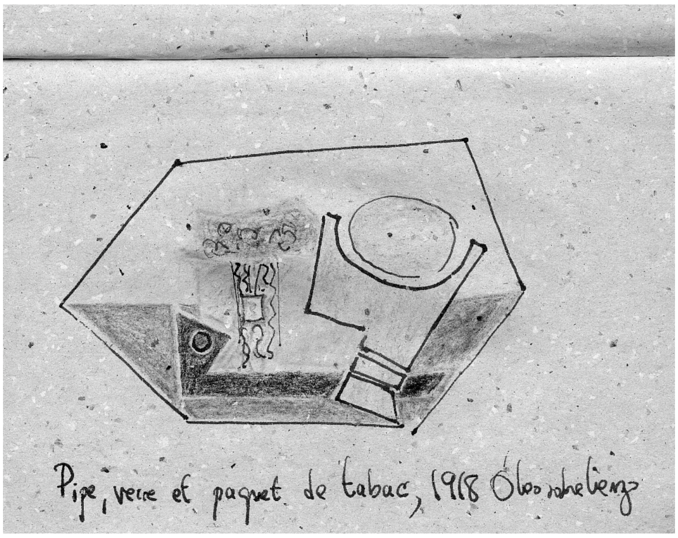
4.3. RECONSTRUCCION DE UN OBJETO USANDO ALGUNOS PLANOS

PICASSO: Construcción de figuras a partir de algunos planos

Salgo de la segunda sala y regreso a la primera. Vuelvo a mirar el cuadro del clarinetista de Picasso, la ventana desde la que observamos el primero de los procesos de abstracción comunes a matemáticos y pintores del siglo XX que llevamos analizados: enfrentarse a un objeto inabarcable (un volumen, para describirlo sobre un lienzo plano. o un conjunto infinito de números. para recorrerlo entero) descomponiéndolo en pequeñas zonas a las que sí podemos llegar. Describir un algo global mediante una serie de descripciones locales.

Sigo caminando por la primera sala del museo, con estas ideas dando vueltas en la cabeza. Descomponer una figura, un volumen, en planos. Y planos, precisamente, es lo único que advierto en *Pipe, verre et paquet de tabac* .

Pipe, verre et paquet de tabac, 1918



En apariencia este nuevo cuadro no tiene nada que ver con el del clarinetista, y es muy posible que, de no tener la cabeza llena de planos, lo hubiese pasado por alto. Pero la tengo llena de planos, y eso me hace parar frente a él: un bodegón construido a base de combinar unos cuantos planos sólidos de color. Venimos de contemplar una descomposición en planos y nos encontramos con el proceso inverso: construir a base de planos.

Tiene todo el sentido. Ya sabemos que un volumen puede ser descompuesto en planos, tantos cuantos queramos. Ahora intentamos avanzar un poco más en el proceso de la reproducción de una realidad tridimensional sobre un lienzo plano. En *Verre et Pichet* aprendimos, además, cómo reducir las formas de la naturaleza a unos cuántos contornos básicos, cómo basta con seleccionar y señalar unas cuantas estructuras esenciales para que el observador pueda identificar los objetos que tiene ante sus ojos. Aquí tenemos la combinación perfecta de todo lo que hemos aprendido hasta ahora. Por un lado descomponemos una composición con volumen, tridimensional, en planos, y por otro elegimos unas cuantas formas básicas que describen la forma de los objetos. A continuación reconstruimos de nuevo la figura seleccionando aquellos planos y formas que a nuestro ojo (culturalmente educado) le parecen esenciales. Los planos en este cuadro son tan obviamente planos que parecen hechos con trozos de papeles de colores recortados y pegados. Uno para la pipa, otro para su interior, otro para el paquete de tabaco, otro para el propio tabaco, otro para el vaso, etc. Picasso selecciona los trazos mínimos necesarios en los contornos para que puedan ser reconocidos, y se limita a rellenar la estructura que obtiene con colores sólidos. Salvo el sello y las hebras en el paquete de tabaco (y, ¡cómo resistirse a dibujarlas! son formas tan atractivas...) nada hay que no sea bloque sólido de color. Planos.

Para la pipa le bastan dos. Uno para la figura global, otro para indicar que el interior es hueco y redondo. El vaso es una copa que tiene cuello, pie, y hueco de sección redonda. Cuatro planos, pues, cada uno describiendo una de estas características. En el paquete de tabaco el pintor se dejó llevar; quizás el placer mezclado producido por el olor, el color y la forma fue excesivo. Sobre los dos planos de color sólido con los que se nos describen, respectivamente, paquete y hierba, unas filigranas negras, pocas y sin gran detalle, pero suficientes para hacernos evocar aquellas descripciones de los galanes solteros en las novelas de la adolescencia : “fulanito olía a esa mezcla tan masculina de tabaco inglés y colonia...”. El plano de la mesa, de nuevo, sólido y sobrio.

Intentamos reproducir el proceso de abstracción seguido por Picasso para construir este bodegón. Ignora la luz, ignora las texturas, ignora la naturaleza de los objetos que tiene delante. Incluso pasa por alto el volumen individual de cada objeto, reduciéndolo a planos. Sólo presta atención a cuántos objetos hay y a las formas que generan sus contornos. Probablemente, los círculos por los que el cuello de la copa se une al pie y al cuenco estuviesen decorados por collares hechos del mismo cristal. De ahí que aparezcan sus trazos. Así pues, selección de una cantidad finita de planos con los que construir la composición, sin ningún detalle salvo la forma de los contornos; y aun ésta aparece descrita de una forma bien abstracta, no hay más que fijarse en la pipa, por ejemplo.

La pipa ... ¿Por qué sé que es una pipa? Por el redondelito. Si lo quito (coloco un dedo ante mis ojos y lo tapo), podría tratarse de un palo de golf, de un bastón, de un hierro para atizar el fuego. Pero el redondelito habla de un interior vacío, es una pipa. Me cohibe un poco la astucia del ojo de Picasso. Poder expresar con un mero redondelito la diferencia entre una pipa y un bastón.

El cuadro *Verre et Pichet* es una ventana desde la que pudimos contemplar la búsqueda de las formas esenciales que diferencian las diversas cosas. La ventana *Pipe, verre et paquet de tabac* nos muestra ahora la búsqueda de una cantidad finita de formas planas esenciales con las que construir las diversas cosas. ¿Qué nos permite ver este cuadro de la construcción matemática que llevó a resolver el teorema de Fermat?

MATEMATICAS: Construcción de las soluciones a una ecuación a partir de algunas de ellas

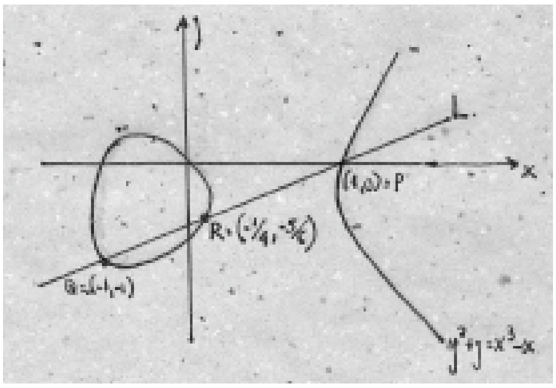
En 4.1 hemos aprendido a descomponer el proceso de búsqueda de las soluciones con números racionales de una ecuación, un proceso que requiere una infinidad de comprobaciones numéricas en pasos sucesivos, cada uno de los cuales requiere sólo una cantidad finita de cuentas. También hemos aprendido, en 4.2, que, en algunos casos, las soluciones con números racionales de una ecuación forman una estructura sencilla que consiste en rectas. El proceso seguido por Picasso de seleccionar tan sólo una cantidad finita de entre los planos y formas en que se puede descomponer un volumen nos inspira una pregunta: ¿podríamos hacer algo parecido con el problema matemático? Podríamos ser capaces de seleccionar algunas partes de la estructura formada por las soluciones de tal manera que estas partes nos permitieran reconstruirla toda ella? La respuesta, como veremos enseguida, es sí.

Los matemáticos que a finales del siglo XIX y principios del XX estudiaron la estructura de rectas que forman las soluciones de algunas ecuaciones que vimos en 4.2, se dieron cuenta de que tal estructura, además de permitirnos comparar ecuaciones (o sus curvas) y distinguir unas de otras, también nos permiten construir soluciones nuevas de una ecuación a partir de unas cuantas conocidas. Incluso encontrarlas todas, es decir, reconstruir la estructura completa que forman las soluciones a partir de unas cuantas de ellas.

Veamos como llevar a cabo esta reconstrucción en una ecuación que ya conocemos bien.

Construcción de la red de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ (1923)

Sabemos que las soluciones con números racionales de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$.están alineadas de tres en tres. Reflexionando sobre este hecho se llega a una conclusión astuta: si cada vez que conozco dos de estas soluciones trazo la recta *L*, que une los puntos de la curva correspondientes a dichas soluciones, digamos *P* y *Q*, y busco el tercer punto *R* de corte entre la recta *L* y la curva, habré encontrado, en los números que dan sus coordenadas, una tercera solución a la ecuación. No tengo, pues, más que calcular dos soluciones por la cuenta de la vieja y utilizarlas para hallar una tercera.



Si tomamos los puntos $P = (1,0)$ y $Q = (-1,-1)$ sobre la curva, la ecuación de la recta *L* que los une es $y = (x-1)/2$. Para hallar el tercer punto *R* en que *L* corta a la curva, sustituimos la ecuación de la recta en la de la curva, y obtenemos $(x-1)^2/4 + (x-1)/2 = x^3 - x$, esto es, $4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$, ecuación cúbica con tres soluciones, que son $x = 1,\ 1/4,\ -1/4$, de coordenadas *y* respectivas, $y = 0,\ -1,\ -5/8$. Nuestro nuevo punto *R* es, pues, $R = (1/4, -5/8)$.

Sigo reflexionando. He logrado hallar una tercera solución a partir de las dos primeras. ¿Ahora qué hago? No cuento con más puntos que estos tres, y todos están sobre la misma recta. ¿Qué puedo hacer para hallar más soluciones?

Lo primero que se me ocurre es calcular, otra vez por la cuenta de la vieja, una cuarta solución, dibujar su punto correspondiente S sobre la curva, y trazar las diversas rectas que unen el punto S con los puntos que ya tenía, P, Q y R. Seguro que funciona, pero si cada dos por tres he de volver a la cuenta de la vieja, no resulta muy sistemático el método que he encontrado. Sigo, pues, reflexionando. Recordando las clases de cálculo del bachillerato, encuentro la solución a mi problema: usar las rectas tangentes a la curva en los tres puntos P, Q y R. Cada una de ellas cortará la curva en un nuevo punto, que también tendrá coordenadas racionales. Conseguiré así tres soluciones más a mi ecuación.

Con mucha paciencia, y repitiendo este proceso cuantas veces quiera, podré encontrar un montón de soluciones nuevas a la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$. ¿Cuántas? Ésta es precisamente la pregunta que se hicieron los matemáticos que a principios de siglo desarrollaron este método para buscar las soluciones a una ecuación del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$.¿Es posible encontrarlas todas partiendo de algunas iniciales? ¿De cuántas?

En 1923, Louis Mordell demostró, utilizando precisamente el método del descenso inventado por Fermat, que cualquier ecuación del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$. (una variable aparece al cuadrado, la otra al cubo) tiene una infinidad de soluciones racionales, todas ellas ligadas por la estructura de rectas que ya conocemos. Y también demostró que en este tipo de curvas siempre podemos encontrar una cantidad finita de soluciones que dibujadas como puntos sobre la curva correspondiente, y aplicando sobre dichos puntos este método de unirlas de dos en dos por una recta y buscar las coordenadas del tercer punto de corte entre recta y curva, llegamos a obtener todas las demás soluciones racionales. Dicho con otras palabras, siempre hay una cantidad finita de soluciones que generan geométricamente todas las demás. A partir, pues, de una cantidad finita de puntos en la estructura que forman las soluciones en números racionales, podemos reconstruir la estructura completa.

En nuestra curva concreta, $y^2 + y = x^3 - x$, el punto *P* con coordenadas *(1,0)*, por ejemplo, genera todas las demás soluciones. Primero trazo la tangente a la curva en *P*, que cortará la curva en un segundo punto *Q*. Ya tengo dos soluciones a mi ecuación. Ahora dibujo la tangente a la curva en *Q*, y el punto *R* de corte de esta recta con la curva produce una tercera solución. Uno a continuación *P* y *R* con una recta, que cortará la curva en un punto <u>*S*</u>, distinto a todos los que ya tengo: una cuarta solución a mi ecuación. Y así sucesivamente.

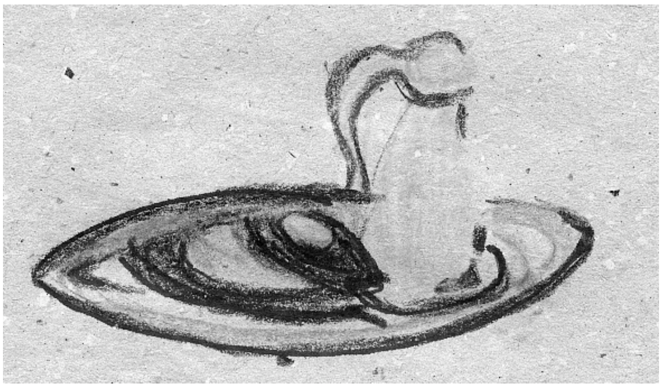
4.4 DESCRIPCION GLOBAL DE UN OBJETO ENCOLANDO DESCRIPCIONES LOCALES

PICASSO: Representación de algo visto simultáneamente desde distintos ojos

Las meninas, 1957

Subo a la última planta del museo. En el pasillo, junto a una habitación llena de mosqueteros a los que parece atender, M.ªAgustina Sarmiento, la doncella de las meninas. La niña del búcaro. Para mira este cuadro conviene tener a mano una reproducción del cuadro de Velázquez (1656).

Desde que escuché a Natacha Seseña hablando en un programa de la televisión catalana sobre Velázquez, los búcaros y la bucarofagia, el pequeño jarro de barro es lo primero que buscan mis ojos en cualquier representación de Sarmiento (el trabajo de Seseña sobre este búcaro puede encontrarse en [Se] véase bibliografía). Me fijo en el dibujado por Picasso.



Una vez más me emociona el enorme talento de Picasso. Un par de líneas oscuras es todo lo que necesita para describirnos el búcaro que reposa sobre la bandeja. Tan sólo unas líneas oscuras. Un momento, hablando de líneas oscuras... ¿no resultan un poco extrañas las de la bandeja?

Abro de nuevo el cuaderno, y me pongo a dibujar la bandeja como yo la dibujaría si fuese Picasso espectador, mirando la escena de Velázquez. Comparo bandejas. En la mía, las líneas negras que delimitan el contorno interior aparecen detrás del búcaro, no delante. ¿Será que están dibujadas según las veía el pintor Velázquez, no el pintor Picasso mirando el cuadro de Velázquez? Saco una postal de las Meninas que, desde hace tiempo, y convenientemente, en este momento, utilizo como marcador de las páginas del cuaderno. Compruebo que, de estar pintadas desde donde está colocado Velázquez, las líneas negras interiores de la bandeja aparecerían del lado de la panza del búcaro, no del lado del asa. ¿Quién las ve así? Recorro con la imaginación los lugares en los que están colocados los personajes en la escena y sobre el cuaderno voy dibujando la bandeja, vista desde cada uno de ellos. Cuando acabo comparo mis dibujos con el de Picasso y la conclusión es inmediata: es la propia M.ª Agustina la que ve así la bandeja. Así pues, este cuadro podría tratar de M.ª Agustina vista por M.ª Agustina. Un par de segundos me bastan para darme cuenta de lo absurdo de esta sugerencia.

La bandeja está descrita tal y cómo la ve M.ª Agustina, pero la doncella no ve sus propios ojos, que además está claro que no casan el uno con el otro, luego ni están vistos por M.ªAgustina, ni están vistos ambos desde el mismo lugar.

Nueva hipótesis de trabajo: Picasso abandona el punto fijo, se mueve físicamente alrededor de la figura de M.ª Agustina, elige unos cuantos lugares desde donde nos da descripciones locales de la doncella y luego las casa todas en una única descripción global. No parece, en principio, una hipótesis disparatada. Al fin y al cabo, de ser correcta, se trataría de una versión siglo XX del mismo juego que practica Velázquez: moverse de sus ojos a los de los reyes y los espectadores, y de éstos, a través del espejo, a los del visitante que aparece por la puerta del fondo de la escena. En el cuadro de Velázquez algunos objetos y figuras están vistos desde un lugar, otros desde otros. En el cuadro de Picasso parece que una misma figura está vista desde varios lugares simultáneamente. Comprobémoslo, intentando averiguar cuáles son estos lugares en los que se detiene Picasso para dibujar a M.ª Agustina. Miro de nuevo el cuadro. Las claves que busco están en la bandeja sobre la que aparece el búcaro, la mano que sostiene la bandeja, el pelo y el rostro y, finalmente, en los ojos y la nariz.

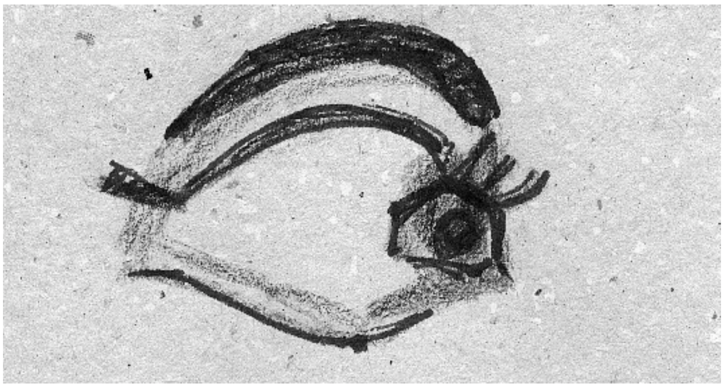
Al dibujar esta mano que sustenta la bandeja, me doy cuenta de un detalle que hasta entonces he pasado por alto: en la mano aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma. Esa es la clave que busco. ¿Quién está situado en la posición adecuada para poder ver esas almohadillas? Miro mi postal de Las meninas, aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma. Sólo el propio Velázquez, a la izquierda de M.ª Agustina, podría percibirlas. Paso a dibujar la cabeza de Sarmiento.

El pelo enmarca perfectamente el rostro, y el contorno de ambos aparece completo, como sólo puede verlos la infanta, a la que M.ª Agustina mira de frente.

La propia M.ª Agustina, Velázquez, la infanta. Picasso se va poniendo en el lugar dónde está situado cada uno de ellos y, entrenado en el proceso de la abstracción, selecciona alguna característica de la figura elegida que describir desde ese lugar.

M.ª Agustina Sarmiento nos describe la bandeja sobre la que reposa el búcaro; Velázquez, la mano que sostiene la bandeja; la infanta, el marco del rostro de M.ª Agustina.

Un hormigueo nervioso se va apoderando de mí. Tengo la sensación de que me estoy acercando a algo. Respiro hondo, intento no pensar en nada que no sea lo que estoy viendo y me pongo a dibujar el ojo izquierdo.



Al dibujarlo compruebo que hay tres claves esenciales en este ojo: el trazo horizontal de la izquierda, la acumulación de grises a la derecha y el lugar donde está dibujada la pupila.

Estas claves indican que el ojo está descrito desde el perfil derecho, esto es, desde el lugar que ocupan los reyes y los espectadores en el cuadro de Velázquez. El mismo lugar, observo, desde donde está visto el búcaro. Tiene sentido, los padres se preocupan. ¿Se dará su niña a esas veleidades de la bucarofagia?

Picasso ya nos ha descrito la figura que componen doncella y búcaro desde arriba, desde la derecha, desde la izquierda y desde delante. No puedo contenerme más. Estoy francamente nerviosa. Necesito dar un paseo, relajarme, visitar los aseos y lavarme la cara.

Intento despejarme, no paro de dar vueltas a la misma idea en la cabeza. Si fuese cierto lo que sospecho, ¡si Picasso llegase a dar *toda* la vuelta a M.ª Agustina...!

Me cruzo con una amiga en el pasillo y le cuento lo que busco. ¿Describir una figura desde los cuatro costados? Imposible, concluye incrédula. La figura se disolvería.

Yo no estoy tan segura como ella de que la figura se disolvería. Dos razones me llevan a confiar en que Picasso lo haya conseguido: que en matemáticas se puede hacer y el enorme talento de Picasso. Le he visto ya hacer demasiadas cosas difíciles como para dudar de su capacidad.

Vuelvo, pues, ante M.ª Agustina, abro el cuaderno y repaso notas y dibujos. Me falta por analizar un ojo, el de la derecha.

Lo dibujo, y al hacerlo comprendo que está mirado desde el mismo lugar desde el que está mirada la nariz.

Vuelvo a estudiar la escena de Velázquez. ¿Desde dónde está visto este perfil? Desde la izquierda de Sarmiento. Es, pues, un ojo descrito como lo ven el visitante que aparece por la puerta del fondo y los reyes a través del espejo. M.ª Agustina vista desde detrás. ¡El cuarto costado que me faltaba!

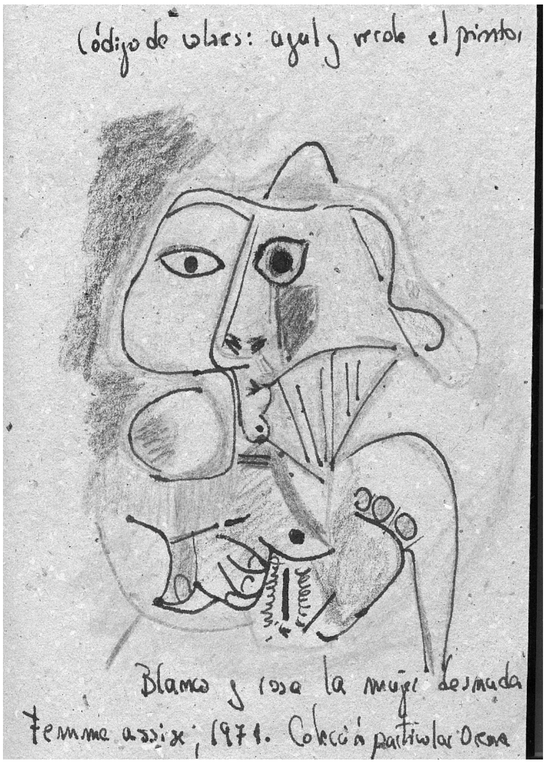
Como la veían Velázquez, la infanta, los reyes, el visitante; como se veía ella misma. Una persona vista desde delante, desde detrás, desde su izquierda, desde su derecha, e incluso desde sus propios ojos. Encolando todas esas visiones parciales y locales, Picasso nos ofrece una visión global completa, interroga a todos los testigos que estaban allí. "Me gusta su peinado", comenta la infanta, en plena edad del pavo. Velázquez, pintor, se fija en las manos. "Buen pulso sosteniendo la bandeja", concluye. "Tenía tanto miedo de que se me cayese el búcaro", confiesa M.ª Agustina. "El búcaro, el búcaro... eso es lo que me preocupa a mí", interviene la reina. "Pendiente de la niña sí parece que esté", opina el rey. Y el visitante suspira, mientras comenta, "¡Un magnífico perfil!".

PICASSO: Descripción desde dos ojos que se miran simultáneamente.

Emocionada aún por el trabajo de Picasso en el cuadro de Sarmiento, entro en la última sala de la exposición. Si se trata de describir un volumen sobre un plano a base de encolar vistas parciales y planas, no se puede hacer de forma más completa. Picasso recorre los tres ejes. En el que nos indica la profundidad nos coloca por delante y por detrás de M.ª Agustina. En el que indica la anchura, nos lleva a la izquierda y a la derecha. En el tercero, en la dimensión de la altura, nos coloca sobre M.ª Agustina. Si la madera tuviese ojos, seguro que también nos hubiese hecho mirar desde el suelo.

Pensando en miradas, recorro con la vista la habitación. Sobre la pared de la derecha, sólo, un cuadro llamativo. De lejos únicamente veo unos enormes ojos azules y verdes, de pájaro, superpuestos a un sexo femenino rosa y pálido. Ana Martínez de Aguilar, historiadora del arte y amiga, me dice: “Mira que juego de espejos tan impresionante. Picasso comiéndose con los ojos a la modelo desnuda. No puedo entrar en esta sala sin verle, a Picasso, devorando a la mujer con la vista”. Desde que Ana me regalase ese comentario, tampoco yo.

Femme assise, 1971.



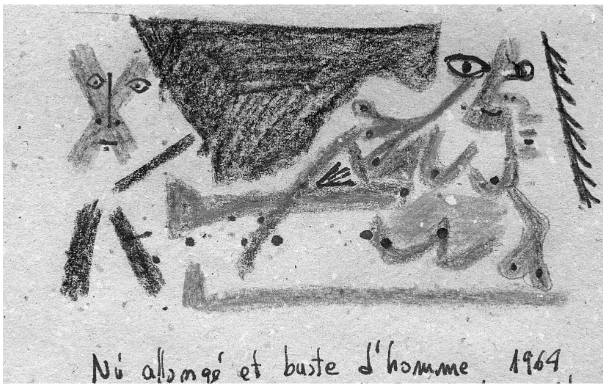
Mientras, en cuclillas frente al cuadro, lo dibujo, un grupo de niños y niñas de siete u ocho años se acercan. Les acompañan dos profesoras, y una de ellas pide a un niño que lea el título del cuadro. El niño, con dificultad, lee “fe-me-a-si-se”. Grandes carcajadas. “Es que está en francés”, comenta, risueña, la vigilante de la sala. “En francés”, repite la profesora, ”¿y por qué? ¿Cuál creéis que es la razón de que el título de este cuadro aparezca escrito en francés?” “Porque vivía en París”, responde una niña desde una silla de ruedas. Para entonces un grupo ha descubierto mi dibujo, y presta más atención a mi pequeña caja de lapiceros que a las explicaciones de la maestra. Ella ni se inmuta al darse cuenta, sino que, con astucia y hacer de buena maestra, decide adaptarse a la situación. Hace cuatro comentarios generales sobre los colores del cuadro y se dirige a mi con una mirada de esas en las que se mezclan por igual complicidad y autoridad. “Disculpe, ¿podría explicarnos algo sobre este cuadro?”. “¡Tierra, trágame!”, pienso yo. Pero la tierra no me traga, y la mirada amable pero firme de la profesora y el revuelo de expectación entre la chavalería me empujan a superar el pudor. Como mejor puedo traduzco a palabras adecuadas a la situación el comentario de Ana. Incluso represento la escena eligiendo a una niña como modelo y actuando yo como pintor, yendo y viniendo de la niña a un ficticio caballete.

“Lo primero que observo en este cuadro es que hay lo que parece una enorme figura que está claramente dividida en dos partes. De la mitad para arriba está pintada en azul y verde. De la mitad para abajo, en rosa y blanco. ¿Qué hay, exactamente, pintado de verde y azul, y qué de rosa y blanco? De verde y azul veo dos ojos, una nariz, una boca, un pulgar (éste, ¿lo veis?, a la izquierda de los otros dedos), un brazo. En blanco y rosa se ve un pie desnudo, una mano, un sexo femenino, parte de un pecho, la parte derecha del cabello. Todo, ya sea verde y azul, o rosa y blanco, visto de frente. Leo el título del cuadro. *Femme assise*, mujer sentada. Una mujer desnuda y sentada, dibujada de la cabeza a los pies: toda la parte rosa y blanca, pero, ¿y esos ojos, y ese pulgar? ¡Claro, el pintor! El pintor que la mira, que con el pulgar la va midiendo. ¿Habéis intentado dibujar una figura alguna vez? ¿Sí? ¿Y cómo habéis medido las proporciones? Levantando el pulgar, efectivamente. Miremos el cuadro de nuevo. Aquí están, el pintor y la modelo, superpuestos en una única figura.”

El grupo se disuelve, varios niños se acercan a mi y pasan unos segundos mirando mi dibujo, luego el cuadro, otra vez mi dibujo.... “¡Qué bien dibujas!”, me dicen por fín. Yo respiro aliviada y río de alegría al saberme aprobada por tan honesto tribunal.

La sala vuelve a quedarse en silencio, y yo sigo dibujando y dando vueltas en la cabeza a lo que acabo de decirles a los niños. ¿Por qué elige el pintor superponer sus ojos al cuerpo de la modelo? ¿Cuál es el *objeto* representado en el cuadro? En *Hombre con clarinete* Picasso representa la descomposición de un volumen en planos, en *Verre et Pichet,* las formas esenciales que relacionan los diversos volúmenes, en *Pipe, verre et paquet de tabac*, la composición de un volumen con unos cuantos planos sólidos de color, en *Las meninas*: *M.ª Agustina Sarmiento*, la descripción de un volumen sobre un plano mediante el encolado de descripciones planas y locales dadas desde todos los costados posibles. ¿Cuál es el objeto que Picasso representa en este nuevo cuadro?

Si hubiera querido representarnos a un pintor pintando a una modelo lo habría hecho. A mi izquierda observo un cuadro en el que lo hace. ¡Y de qué manera! El pintor es una equis, un aspa, dos rectas que se cortan. Nada más que un sistema de referencia desde el que se describe la modelo. Según este sistema de referencia se va moviendo alrededor del cuerpo reclinado, se obtienen las distintas visiones de éste.



Deduzco que el objeto representado en *Femme assise* no es un pintor que pinta una modelo. ¿Qué es, entonces? Él mira hacia ella. Ella mira hacia él. La inversión en la orientación, de la parte superior de la figura a la parte inferior, nos habla de un juego de imágenes especulares hecho explícito.

¿Un intercambio de miradas? No. Ella le mira a él, pero él no la mira a ella, mira su sexo. Un cuadro que describe el juego de espejos entre dos miradas —él soñando con ella, ella halagada en su vanidad— ya no es tan sólo una representación pictórica. Es un relato de cómo ven misma la escena dos los personajes que la representan.

Dios ha creado las noches que se arman
De sueños y las formas el espejo
Para que el hombre sienta que es reflejo
Y vanidad. Por eso nos alarman
(del poema *Los espejos* de J. L. Borges)

MATEMATICAS: Información global que sobre una ecuación dan sus soluciones locales

A través de los dos últimos cuadros de Picasso hemos podido contemplar una misma figura del modo en que la ven simultáneamente diversos observadores colocados en corro a su alrededor, y una misma escena tal como la viven simultáneamente sus dos actores. El logro es enorme. Como lo es el que nos muestran las matemáticas que vemos desde las ventanas que nos ofrecen estos cuadros: la demostración de Andrew Wiles del último Teorema de Fermat.

La Conjetura Modular (1955)

Años cincuenta, Japón. Dos jóvenes estudiantes de matemáticas de la Universidad de Tokio, Taniyama y Shimura. La Segunda Guerra Mundial ha causado estragos en su país, y los profesores no les prestan demasiada atención. Taniyama y Shimura pasan muchas horas estudiando ecuaciones del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$ (una variable aparece al cuadrado, la otra al cubo) y analizando la estructura de rectas que forman sus soluciones. Es demasiado grande, demasiado extensa. No logran ver qué forma tiene en su globalidad. ¿Y si la descompusiesen en pequeños módulos finitos utilizando las técnicas de Hensel? Al principio no encuentran gran cosa, pero al cabo les parece reconocer algo. Si se la mira localmente, descompuesta en pequeños módulos, esta estructura ofrece una gran cantidad de simetrías, y sólo se sabe de un cierto tipo de estructuras, en matemáticas, que ofrezcan tal cantidad de ellas. Se trata de estructuras muy complicadas y globales, cuya forma se conoce bien, que surgen en matemáticas en el siglo XIX de la mano del estudio de las geometrías no euclídeas. Con la falta de miedo que caracteriza a los jóvenes, Taniyama y Shimura acometen la tremenda tarea de comparar ambas. Pasan horas y horas en la biblioteca, mirando en libros, revisando notas y, finalmente, llegan a forjarse una opinión: ambas estructuras coinciden. Las pequeñas piezas que van formando las soluciones de la ecuación en los diversos módulos coinciden con partes de la estructura geométrica que han encontrado. La opinión de Taniyama y Shimura no era más que eso: una opinión. Basándose en la potente intuición de Taniyama y en horas y horas de cuentas, los estudiantes estaban convencidos de hallarse ante un hecho cierto. Pero no sabían cómo demostrarlo, ni tampoco tenían conocimientos de la materia lo bastante profundos para entender las consecuencias de su hallazgo, de ser éste cierto (una descripción detallada de esta experiencia puede verse en el vídeo y leerse en el texto que aparecen en [Si], véase bibliografía).

En 1955 Taniyama y Shimura presentan sus trabajos en un congreso internacional de matemáticas que tiene lugar en la ciudad de Tokio. El matemático francés André Weil, hermano de la filósofa Simone Weil, asiste al congreso y reflexiona sobre lo que exponen Taniyama y Shimura. Él sí tiene conocimientos profundos sobre las estructuras de rectas que forman las soluciones de las ecuaciones que estudian los jóvenes, tanto vistas globalmente como vistas localmente, y también conoce bien las estructuras llenas de simetrías que éstos creen reconocer en las primeras cuando se las mira localmente desde los módulos.

Weil estudia la sugerencia de Taniyama y Shimura, y sus posibles consecuencias, de ser cierta. Entre otras cosas, significaría que la descripción local de las soluciones de la ecuación nos permite reconocer las propiedades globales geométricas de la curva que representa dicha ecuación. En otras palabras: la sugerencia de los jóvenes japoneses permitiría traducir el número de soluciones de la ecuación en los sucesivos módulos en una descripción global de la curva.

Si Taniyama y Shimura están en lo cierto, la serie de números *4, 6, 7, 8, ...* que construimos en 4.1 listando el número de soluciones a la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ describe con toda precisión la geometría global de la curva de la ecuación. Y lo hace de la misma manera que los cuadros *M.ª Agustina Sarmiento* y *Femme assise* de Picasso. Por un lado, y como ocurre en el primero de los cuadros, la conexión hallada por Taniyama y Shimura nos ofrece una manera de encolar información proveniente de la curva vista desde todos sus costados en una descripción global única. Por otro lado, y como hace el segundo cuadro, describe con una sola pieza matemática la situación, tal y cómo se ve simultáneamente desde la mirada aritmética y desde la mirada geométrica.

Weil logró entender el significado profundo de la sugerencia de Taniyama y Shimura, y también llegó a convencerse de su plausibilidad. Pero no logró demostrar que fuese cierta.

Desde entonces, la sugerencia de que la geometría de las curvas del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$ es de un tipo específico y completamente clasificado en matemáticas y que para identificarla basta con describir localmente el conjunto de soluciones a la ecuación en los distintos módulos se conoce con el nombre de Conjetura Modular.

Esta Conjetura Modular, finalmente demostrada en 1999 ([BCDT], véase bibliografía) se consideró durante la segunda mitad del siglo XX uno de los resultados matemáticos más difíciles de verificar, y su demostración, una de las más buscadas, ya que establece un puente muy útil entre las soluciones locales de ecuaciones (en los sucesivos módulos) y las propiedades geométricas globales de curvas. Un puente analítico (esto es, que se construye con herramientas de la rama matemática conocida como análisis) entre la aritmética y la geometría.

La demostración de Wiles del último teorema de Fermat (1994)

A lo largo del siglo XIX era frecuente entre los miembros de la comunidad matemática intentar demostrar el último teorema de Fermat. Pero a principios del siglo XX los intentos eran cada vez más escasos. El teorema se consideraba excesivamente difícil, y tan alejado de la línea central de la investigación matemática del momento que no merecía la pena perder el tiempo con él.

Esta situación cambió, sin embargo, en los años ochenta. En 1987 un resultado de Ken Ribet colocó el último Teorema de Fermat, una vez más, en el corazón de las investigaciones matemáticas del momento (la historia que pasamos a relatar a continuación puede leerse y verse en [Si], véase bibliografía).

La estrategia para demostrar el último Teorema de Fermat que vamos a explicar se le ocurrió al matemático G. Frey ([Fr] , véase bibliografía). Comencemos por ilustrarla con un ejemplo. Los números 3, 4 y 5 están ligados por la ecuación $3^2 + 4^2 = 5^2$, ya que 9 + 16 = 25. En consecuencia, y utilizando el teorema de Pitágoras, si construimos un triángulo cuyos lados midan, respectivamente, 3, 4 y 5 unidades, este triángulo tendrá uno de sus ángulos rectos. Por otro lado, si construimos un triángulo cuyos lados midan 3, 4 y 7 unidades respectivamente, encontraremos que ninguno de sus ángulos es recto, No existe ningún triángulo rectángulo cuyos lados midan 3, 4 y 7 unidades, de lo que deducimos que $3^2 + 4^2 \neq 7^2$.

La idea de Frey es la siguiente: supongamos que Fermat estuviese equivocado. Eso significaría que podríamos encontrar cuatro números distintos de cero, llamémosles *a, b, c* y *n*, ligados por la ecuación $a^n + b^n = c^n$. Cuatro números no son más que cuatro datos numéricos. Con tres números podemos construir, por ejemplo, un triángulo que tenga esos números como lados en unidades de longitud, y las propiedades del triángulo —que sea rectángulo o no, por ejemplo— nos dan información sobre la relación aritmética entre los tres números (que la suma de los cuadrados de dos de ellos coincida con el cuadrado del tercero, por ejemplo). Si tenemos cuatro números, podemos utilizarlos como medidas para construir muchos objetos. Un cuadrilátero cuyos lados midan, respectivamente, *a*, *b*, *c* y *n* unidades. Una mesa, con un tablero que mida *a* unidades de largo, *b* unidades de ancho y tenga *c* unidades de grosor, y unas patas de *n* unidades de altura.

Muchos son los objetos que pueden construirse a partir de cuatro números, y como Frey es especialista en curvas del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$, se le ocurrió que, de estar Fermat equivocado, y existir tales números *a, b, c* y *n*, podrían ser utilizados como medidas para construir una curva parecida a $y^2 + y = x^3 - x$, concretamente la curva $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$. A esta curva se la conoce con el nombre de curva de Frey,

Puesto que la curva de Frey se construye tomando como medidas cuatro números *a, b, c* y *n*, con $a^n + b^n = c^n$, cuya existencia es hipotética, la existencia de esta curva también es hipotética. Si los números de hecho existen, la curva también existirá y, recíprocamente, si la curva no existe, los números tampoco. La misma situación que teníamos unos párrafos más arriba con los tres números y el triángulo rectángulo. Si los tres números a, b, y c verifican $a^2 + b^2 = c^2$, existirá un triángulo rectángulo cuyos lados midan esos números y, recíprocamente, si un triángulo construido con lados de medidas *a, b,* y *c* no es rectángulo, entonces es que $a^2 + b^2 = c^2$.

Frey sugirió la posibilidad de demostrar la afirmación de Fermat probando que no existe ninguna curva con ecuación $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$, donde *a* y *b* son números ligados por la relación

$a^n + b^n = c^n$. Pero demostrar que una curva no existe es una tarea muy difícil, por lo que la sugerencia de Frey de resolver el último Teorema de Fermat demostrando que una cierta curva no existe no parecía simplificar mucho la cuestión. Y entonces llegó la sorpresa.

En 1987, Ken Ribet demostró que, de existir la curva de Frey, la estructura de su conjunto de soluciones locales no tendría la forma descrita por Taniyama, Shimura y Weil ([Ri], véase bibliografía).

El trabajo de Ribet abrió una nueva puerta. Si se lograse demostrar que Taniyama, Shimura y Weil tenían razón, y que el conjunto de soluciones de toda curva existente del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$, y de $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ (en las que una variable aparece al cuadrado y otra al cubo) tiene una cierta forma, el resultado de Ribet nos daría una demostración del Teorema de Fermat: si existen cuatro números *a, b, c* y *n*, con $a^n + b^n = c^n$, existe la curva $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$, pero esta curva no puede existir porque sus soluciones locales no tienen la estructura que las soluciones locales a curvas de este tipo deben tener.

Por fin se había encontrado un camino para demostrar el último Teorema de Fermat, y un camino que conectaba este teorema con el cuerpo central de la investigación matemática en el siglo XX.

Así pues, desde 1987 la situación estaba clara para la comunidad matemática: bastaría con demostrar la Conjetura Modular para, finalmente, tener una demostración del último Teorema de Fermat. En aquellos años, para la mayor parte de la gente de la matemática esta situación era comparable a abandonar la sartén para caer en las brasas, puesto que demostrar la Conjetura Modular se consideraba un problema matemático mucho más difícil aún de resolver que el último Teorema de Fermat. Pero esa “mayor parte de la gente” no incluía a Andrew Wiles. Después de siete años trabajando en soledad sobre ello, Wiles consiguió demostrar en 1994 la Conjetura Modular para una familia infinita de curvas entre las que estaría, de existir, la construida con la hipotética solución a la ecuación de Fermat. De esta manera, combinando el trabajo de muchos matemáticos, y siguiendo la estrategia iniciada por Hensel de describir globalmente una curva a base de juntar descripciones locales, el enunciado de Fermat quedó demostrado, y uno de los problemas más famosos de la historia de las matemáticas quedó resuelto.

EPÍLOGO

Evoquemos de nuevo las palabras de Wiles.

> *"Quizás la mejor manera de describir mi experiencia haciendo matemáticas sea comparándola con entrar en una mansión oscura. Entras en la primera habitación, y está oscura, completamente a oscuras. Vas dando tumbos, tropezando con los muebles. Poco a poco aprendes donde está cada mueble, y finalmente, después de más o menos seis meses, encuentras el interruptor de la luz y lo conectas. De repente todo se ilumina, y puedes ver exactamente dónde estás. Entonces entras en la siguiente habitación oscura..."*

La experiencia de Wiles la hemos vivido casi todos a lo largo de nuestra vida profesional. Si los cuadros de Picasso me han ofrecido ventanas desde las que mirar las matemáticas, la mirada matemática me ha abierto la posibilidad de vivir, mirando cuadros, la misma experiencia que vivo al hacer matemáticas: la emoción del descubrimiento del interruptor.

No es sólo la emoción lo que tiene de valioso esta experiencia, con ser la emoción importante. Es el descubrimiento, individual e íntimo, de que los trazos abstractos esenciales a nuestra cultura no están fuera de nuestro alcance, sino que forman parte de nuestro bagaje por el simple hecho de vivir, desde que nacemos, inmersos en ella. Todos contamos con las herramientas adecuadas para reconocer estos trazos y entenderlos. Nos las va dando la formación matemática que, seamos conscientes o no de ello, vamos recibiendo a lo largo de nuestra vida (las clases de matemáticas en la escuela, las horas pasadas cada día ante tanto objeto diseñado desde la matemática y tanta información organizada desde la matemática).

Descubrir este hecho hace posible el desarrollo de una mirada propia. Las matemáticas con las que contamos todos y cada uno de los miembros de nuestra sociedad que hemos pasado por un bachillerato son suficientes para dar el salto que supone enfrentarse libremente, por ejemplo, a los cuadros de Picasso. Las matemáticas nos entrenan para crear preguntas propias, para desarrollar métodos propios, para experimentar la satisfacción del (re)conocimiento íntimo de algo.

La decisión de la Unesco de que el siglo XX se cerrase con un Año Internacional de la Matemáticas, supuso todo un reto para la comunidad matemática. Nos sacó de nuestras facultades y centros de investigación, haciéndonos debatir con otros científicos y profesionales. Nos hizo abandonar nuestras aulas universitarias y tomar parte en tareas de divulgación. Nos llevó a las calles, donde intentamos acercar las matemáticas al resto de los ciudadanos. Y nos llevó a la reflexión profunda, como individuos y como grupo, sobre la naturaleza de nuestro trabajo.

La conclusión que, como matemática profesional, yo extraje de ese año de trabajo y diálogo, y que he querido transmitir a lo largo de estas páginas, es clara: una de las contribuciones más importantes y más pasadas por alto que las matemáticas hacen al desarrollo de nuestra sociedad es su fundamental papel en la construcción de una mirada propia.

Vivimos en una época en la que estamos sometidos a un bombardeo constante de información, imágenes y sonidos. ¿Cómo llevar a cabo el necesario proceso de selección? ¿Cómo dosificar el exceso y eliminar los ruidos? Es esencial que desarrollemos cada uno de nosotros una manera propia de mirar. Porque esas miradas propias son los únicos hilos con los que es posible tejer una red sólida que deje pasar la luz, pero no las piedras, que sea elástica y permeable, pero no se rompa ni deforme.

Es responsabilidad de los matemáticos poner de manifiesto lo que las matemáticas pueden contribuir en este proceso. Y es responsabilidad del resto de la sociedad, cada uno desde su lugar, el escucharnos.

BIBLIOGRAFIA

[B] Jorge Luis Borges, *El hacedor* (1960), en *Obras completas,* volumen II, Círculo de Lectores, Barcelona, 1995.

[BCDT] Christopher Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, Richard Taylor, *On the modularity of elliptic curves over Q: Wild 3-adic exercises*, JournalA.M.S. 14 (2001), págs. 843-939.

[C-1] Capi Corrales Rodrigáñez, *Dallo spacio come contenitore allo spazio come rete*, en *Matematica e Cultura 2000*, Michele Emmer (ed.), Springer-Verlag. Milán, 2000, págs. 123-138.

[C-2] Capi Corrales Rodrigáñez, *Contando el espacio*, ediciones despacio. Madrid, 2000.

[D] René Descartes, *La géométrie*, apéndice a *El discurso del método* (1639).

[E] Harold M. Edwards, *Pierre de Fermat*, en *Grandes matemáticos*, *Investigación y Ciencia*, Temas 1, Prensa Científica S.A. Barcelona,1995.

[Fe] Pierre de Fermat, *Ad locos planos et solidos isagoge* (1636).

[F] Gerhard Frey, *Links between stable elliptic curves and certain Diophantine equations*" en *Ann. Univ. Saraviensis, Ser. Math.* 1 (1986), págs. 1-40

[G] Catherine Goldstein, *Fermat, Number Theory and History*, en *Cuatrocientos años de matemáticas en torno al Ultimo Teorema de Fermat*, Carlos Andradas y Capi Corrales Rodrigáñez (eds.), Editorial Complutense. Madrid, 1999, págs. 1-22.

[K 1] Daniel-Henry Kahnweiler, *Juan Gris* (1946), Quaderns Crema. Barcelona, 1995.

[K 2] Daniel-Henry Kahnweiler, *El camino del Cubismo* (1963), Quaderns Crema. Barcelona, 1997.

[P] *Picasso en las colecciones españolas*, catálogo de la exposición del Museo de Arte Contemporáneo Esteban Vicente de Segovia, Segovia, 2000.

[R] Roshdi Rashed, *Regiones árabes: intersección del álgebra y la geometría*, en *Viaje al país de las matemáticas*, *El Correo de la UNESCO*. París, noviembre de 1989.

[Ri] Ken Ribet, *On modular representations of Gal (bQ/Q) arising from modular forms*, en *Inv. Math.* 100 (1990), págs. 431-476.

[S] Natacha Seseña, *El búcaro de las meninas*, en *Velázquez y el arte de su tiempo*, Jornadas de arte, Centro de Estudios Históricos del CESIC. Madrid, 1991.

[Si] Simon Singh, *Fermat´s Last Theorem*, BBC-1997, Programa *Horizon.*

[U] Miguel de Unamuno, *Tratado de cocotología* (1902), Almacenes Generales El Papel S.A. Barcelona 1969.

[Y] Adolf P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VII-XV siècles)*, Vrin. Paris 1976.

[W] Andrew Wiles, "Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem", en *Annals of Mathematics,* vol. 141, n.° 3, 1995, págs. 443-551.