

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES



TESIS DOCTORAL

**Sobre la unicidad del equilibrio en modelos con generaciones
sucesivas**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Carlos José Cuervo-Arango Martínez

DIRECTOR:

Julio Segura

Madrid, 2015

Carlos José Cuervo-Arango Martínez

TP
1983
040



* 5 3 0 9 8 6 0 4 3 9 *

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

X-53-121088-0

**SOBRE LA UNICIDAD DEL EQUILIBRIO EN MODELOS
CON GENERACIONES SUCESIVAS**

Departamento de Teoría Económica
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
1983



BIBLIOTECA

Colección Tesis Doctorales. Nº 40/83

© **Carlos José Cuervo-Arango Martínez**
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1983
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-4110-1983

SOBRE LA UNICIDAD DEL EQUILIBRIO EN MODELOS CON

GENERACIONES SUCESIVAS

Carlos Cuervo-Arango Martinez

Somosaguas, Madrid 1.981.



APENDICE

PARTE

- I INTRODUCCION.
 - II EL MODELO.
 - III EL CASO ESTACIONARIO.
 - IV EL CASO GENERAL.
 - V SOBRE CONDICIONES SUFICIENTES DE REGULARIDAD.
 - VI RESUMEN, EXTENSIONES Y COMENTARIOS.
- REFERENCIAS.

1.- INTRODUCCION

Esta investigación se ocupa del estudio de la unicidad del equilibrio competitivo en una cierta clase de modelos dinámicos, la de los llamados modelos monetarios con generaciones sucesivas, Wallace, 1.970. El genuino carácter dinámico implicado por la estructura generacional y el ser estos modelos básicamente desagregados, los hace especialmente aptos para el tratamiento teórico de cuestiones monetarias en términos dinámicos.

En el tratamiento de problemas de economía dinámica, los últimos años han presenciado la aparición tanto de nuevos métodos de análisis como de conceptos de solución originales. Entre estos últimos tiene especial importancia el concepto de Equilibrio con Expectativas Racionales (ER). Este se define como una secuencia de valores para las variables endógenas correspondientes a todo el horizonte temporal del modelo económico que se estudia y con la propiedad de que, dados esos valores, las decisiones de los agentes económicos son óptimas, sujetas a sus particulares restricciones, y todos los mercados se vacían, Muth, 1.961; Lucas, 1.970; Sargent, 1.972; Sargent and Wallace, 1.973.

Este es el concepto de equilibrio que usaremos a lo largo de esta investigación.

Como una primera aproximación, puede decirse que la unicidad es un problema en los modelos de generaciones sucesivas porque dado su carácter dinámico, multiplican en el tiempo el problema de obtener un único equilibrio en el modelo de equilibrio general estático de Arrow-Debreu. Por ejemplo, como veremos después, es perfectamente posible que exista un único equilibrio en cada periodo de la evolución de la economía, lo que llamaremos un Equilibrio Temporal (ET), mientras que la secuencia infinita que define el equilibrio con ER puede no ser única en absoluto.

Esta peculiar falta de unicidad ha sido ya señalada por varios autores, y no solo en la clase de modelos que nosotros vamos a analizar sino ligada a un problema más general relacionado con la naturaleza del equilibrio con ER; Shell, 1.971; Black 1.974; Calvo 1.978, 1.979; Shiller, 1.978. La idea propuesta por éstos autores es simplemente que el equilibrio con ER no es lo suficientemente fuerte como para determinar una entre las diferentes sendas de equilibrio que puede seguir una economía dinámica. E incluso algunos llegan a afirmar que éste es un defecto básico que elimina la posibilidad de usar eficazmente éste concepto de equilibrio en el estudio de modelos dinámicos:

Sin embargo, es difícil ver el sentido de esta última afirmación. En modelos monetarios dinámicos, las acciones dependen de las ideas de los agentes sobre el futuro y por lo tanto, debe esperarse que diferentes perspectivas den lugar a diferentes sendas de equilibrio. Al requerir que las citadas perspectivas se relacionen con elementos objetivos de la situación contemplada por el modelo, el concepto de equilibrio con ER se convierte en compatible con todo tipo de ideas acerca del futuro, incluso las no explicadas en el contexto del modelo. El hecho de que ninguna de las sendas de equilibrio resultantes se vea anulada como un equilibrio con ER no es ningún defecto del concepto. Significa simplemente que tenemos que buscar restricciones razonables sobre el comportamiento y estructura de la economía que nos permitan reducir el número de sendas que podrían aparecer como equilibrios con ER.

Este es exactamente el camino que adaptaremos. Así pues, vamos a estudiar la unicidad de la senda de equilibrio bajo una condición de regularidad que imponemos en la economía. Esta condición se relaciona con una propiedad que a priori se diría que cualquier buen modelo dinámico debe poseer, a saber, la propiedad de que el futuro lejano no debería tener demasiada influencia sobre la situación existente en cualquier periodo dado. En consecuencia, nuestra condición de regularidad impone que, hablando sin precisión, lo que suceda ó lo que la gente piensa que va a suceder en el futuro lejano, no tenga una influencia

demasiado fuerte sobre el equilibrio que resulta en cualquier momento particular. En cierto sentido, las páginas que siguen podrían considerarse como una exploración de las implicaciones de esta condición de regularidad para el problema de la unicidad del equilibrio en la clase de modelos dinámicos que hemos escogido analizar. De hecho, bajo tal condición nos será posible demostrar la unicidad del equilibrio con ER tanto en una versión estacionaria de nuestro modelo como en el caso general, no estacionario.

Sin embargo, debemos hacer ahora una advertencia. En estos modelos con generaciones sucesivas, un precio del dinero igual a cero es siempre un equilibrio con Previsión Perfecta (PP) ó con ER, en el que no tiene lugar ninguna transacción monetaria. No consideraremos éstos equilibrios. Además, es también una característica de la clase de modelos con generaciones sucesivas que incluso versiones de los mismos muy sencillas y estacionarias, presentan un continuo de equilibrios con PP en los que el precio del dinero converge a cero asintóticamente. Excluyendo modelos con una estructura muy particular, no parece que exista ninguna forma natural de suprimir este comportamiento, en cierta medida patológico. Así pues, en éste trabajo nos hemos visto constreñidos a reducirnos al análisis de la clase de equilibrios con PP en los que el precio del dinero está acotado por encima de cero.

Dividiremos nuestro análisis en dos partes, la primera dedicada al estudio del caso estacionario y la segunda que se ocupa del caso más general no estacionario. Hay dos razones que justifican esta decisión. En primer lugar, en lo que respecta al problema de la unicidad del equilibrio, la distinción entre esas dos situaciones es más de grado que de otra cosa. En el tratamiento del caso estacionario encontraremos ya la mayor parte de los problemas que hacen que un equilibrio con ER único sea algo tan difícil de obtener en éstos modelos dinámicos. Sin embargo, desde el punto de vista económico, el estudio inicial del caso estacionario nos permitirá presentar los problemas y las dificultades de

forma clara, sin preocuparnos por las dificultades técnicas inherentes a los procesos no estacionarios. Por otra parte, desde el punto de vista técnico, el análisis del caso estacionario nos ofrecerá claves importantes sobre las extensiones de la condición de regularidad necesarias para discutir la situación no estacionaria.

Como se verá, la solución de nuestro modelo constituye una ecuación en diferencias de primer orden no lineal, de la forma $p_t = g_t(p_{t+1})$ $t \geq 1$, donde p_t es el precio del dinero en términos del bien en el periodo t . En el caso estacionario, $g_t = g$ para todo $t \geq 1$, mientras que en el caso general las g_t son diferentes. Así pues, es natural que nuestro primer objetivo sea relacionar nuestra condición de regularidad con ciertas propiedades de las funciones g_t . En el caso estacionario, esta relación es clara y podemos caracterizar la clase de funciones g regulares, esencialmente como la clase de funciones contractivas definidas sobre el espacio de precios con la topología euclidiana. Sin embargo, tal caracterización deja de ser válida en el caso general, en el que el análisis se vuelve mucho más complicado.

La literatura sobre la unicidad del equilibrio con ER es sorprendentemente escasa y, de hecho, sólo he podido encontrar dos trabajos, que se ocupan ambos de diferentes versiones de nuestro modelo estacionario. Lucas, 1.972, define el equilibrio en términos de funciones definidas sobre el espacio de parámetros de su economía y consigue un único equilibrio probando que la relación que existe entre los precios de equilibrio de dos periodos cualesquiera (lo que corresponde a nuestra función g) es un operador contracción. Por otra parte, Wallace, 1.980, define el equilibrio en términos de secuencias reales y prueba la unicidad del equilibrio estacionario óptimo. El presente trabajo puede considerarse como una generalización de éstos.

Finalmente, me gustaría señalar que independientemente de los resultados -

obtenidos, las técnicas de prueba pueden ser en si mismas de cierto interes para el lector. En particular, se hace uso del hecho de que, bajo ciertas condiciones, cambios en la métrica del espacio sobre el que se definen ciertas funciones pueden proveerlas con más estructura de la que tendrían en otro caso, y ello sin cambiar la topología original del espacio.

La organización de éste trabajo es la siguiente. En la Parte II presentamos el modelo y discutimos algunos de sus rasgos fundamentales. La Parte III se dedica a la definición y caracterización de la condición de regularidad, que se aplica seguidamente al estudio de la unicidad del equilibrio con ER en el caso estacionario. La Parte IV generaliza la condición de regularidad al caso general no estacionario, en cuyo contexto también se prueba unicidad. En la parte V discutimos algunas condiciones económicas suficientes para nuestra condición de regularidad y, finalmente, la Parte VI se dedica a conclusiones, generalizaciones posibles, y sugerencias para trabajos futuros.

II. EL MODELO

En el modelo que usaremos el tiempo es discreto y ordenado de acuerdo con $t = 0, 1, 2, \dots$. En cada t , $t \geq 1$, aparece en la economía un nuevo grupo de N agentes que viven dos periodos, la generación t . Así pues, aunque cada generación tiene un horizonte de vida de duración finita, la economía como tal tiene un horizonte temporal infinito. Los miembros de la generación 0 están presentes en la economía solo en $t = 1$. Para cada t , G_t denotará el conjunto de consumidores nacidos en el periodo t , la generación t -ésima.

En cada período, existe en la economía un único bien, no producido. Cada agente tiene un vector de recursos iniciales $w_t^i = (w_{t1}^i, w_{t2}^i)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, N$, donde w_{th}^i es la cantidad de bien recibido por el miembro i de la generación t cuando es joven, $h = 1$ ó viejo, $h = 2$. Los recursos iniciales son conocidos con certidumbre.

Supuesto 1 : $w_{th}^i > 0$, $i = 1, \dots, N$, $h = 1, 2$, $t \geq 0$

$$0 < \sum_{i=1}^N w_{th}^i \leq W, \quad h = 1, 2, \quad t \geq 0.$$

El siguiente supuesto es acerca de la cantidad de dinero fiduciario que existe en la economía.

Supuesto 2 : La cantidad de dinero fiduciario es fija e igual a M .

Esta cantidad de dinero fiduciario es poseída inicialmente por los miembros de la generación cero.

En lo que respecta a las preferencias, la primera cosa a señalar es que en el periodo 1, cada miembro de la generación cero maximiza el consumo del bien existente en ese periodo, mientras que todos los demás agentes en la economía

tienen una función de utilidad $U_t^i(c_{t1}^i, c_{t2}^i)$ donde c_{th}^i es el consumo en el periodo $t + h - 1$ del agente i , miembro de la generación t , cuando es joven, $h = 1$, ó viejo, $h = 2$. Así pues, permitimos que las preferencias difieran tanto en el seno de una misma generación como a lo largo de las generaciones.

Supuesto 3 : $U_t^i(\dots), i = 1, \dots, N, t = 0, 1, 2, \dots$

es continua, monótona y estrictamente quasi-concava.

Como dijimos anteriormente, en cualquier periodo t , cada agente $i \in G_t$ conoce con certidumbre los recursos iniciales en el periodo $t + 1$. Sin embargo todavía no puede tener certidumbre acerca del precio que prevalecerá en el periodo siguiente. Esto se debe a las posibilidades de intercambio que se abren en el periodo $t + 1$, debido a la aparición de una generación nueva. Así pues, cada agente que es joven en el periodo t tiene que formar expectativas acerca del precio en el periodo siguiente. Como se formen éstas es crucial para la estructura del modelo. Volveremos sobre éste punto más adelante. Sin embargo, puesto que en éste modelo no hay incertidumbre acerca del espacio físico futuro, es natural que colapsemos tales expectativas en un único valor. Esto es, consideraremos expectativas puntuales y no distribuciones de probabilidad completas.

En la economía de horizonte infinito que hemos descrito, hay dos problemas diferentes que pueden considerarse. Uno es el equilibrio que puede existir en cualquier periodo dado t , lo que Hicks llamó el Equilibrio Temporal (ET) en el periodo t . El otro, es el equilibrio de la economía completa. Empezamos con el primero.

Supongamos que todos los miembros de la generación t tienen las mismas expectativas, un supuesto que se justificará más adelante. Esto es, todos los

agentes jóvenes en el periodo t esperan que prevalecerá el mismo precio en el periodo $t + 1$. Sea p_t el precio de una unidad de dinero fiduciario en el periodo t , en términos del bien en ése periodo.

Entonces, en cualquier periodo arbitrario t , $t \geq 1$, tenemos en ésta economía el problema trivial de los miembros de la generación $t - 1$, que tratan de maximizar su consumo dados sus recursos iniciales y la parte de los recursos iniciales de los jóvenes que puedan conseguir a cambio de su dinero. Por otra parte, cada agente $i \in G_t$ escoge su consumo de forma óptima resolviendo el problema,

$$\begin{aligned} & \max U_c^i(c_{t1}^i, c_{t2}^i) \\ \text{sometido a } (1) \quad & c_{t1}^i + p_t m_t^i \leq w_{t1}^i \\ & i \in G_t \\ (2) \quad & c_{t2}^i \leq w_{t2}^i + p_{t+1} m_t^i \\ & c_{t1}^i > 0, \quad c_{t2}^i > 0 \end{aligned}$$

donde m_t^i es la demanda de dinero por el agente i en el periodo t , $p_t \in \mathbb{R}_+$ está dado y $p_{t+1} \in \mathbb{R}_+$ es el precio del dinero que unánimemente se espera prevalecerá en $t + 1$.

Este problema de maximización genera funciones de demanda de consumo en los periodos t y $t + 1$ por parte de los miembros de la generación t , como funciones de p_t y p_{t+1}

$$c_{t1}^i = f_{t1}^i(p_t, p_{t+1}) \quad i \in G_t$$

$$c_{t2}^i = f_{t2}^i(p_t, p_{t+1})$$

También, siendo $z_{t1}^i(p_t, p_{t+1}) = f_{t1}^i(p_t, p_{t+1}) - w_{t1}^i$ y

$$z_{t2}^i(p_t, p_{t+1}) = f_{t2}^i(p_t, p_{t+1}) - w_{t2}^i, i \in G_t,$$

obtenemos los excesos de demanda de los miembros de la generación t .

Notese que los miembros de la generación $t-1$ ofrecen, en el periodo t , todo el dinero que tienen inelásticamente al precio corriente, por lo que

$$\sum_{i \in G_{t-1}} z_{t-1,2}^i(p_{t-1}, p_t) = p_t M.$$

Esto justifica el concepto de ET que vamos a definir como una situación en la que el mercado para el bien en el periodo t se vacía.

Definición II.1: Dado $p_{t+1} > 0$, un equilibrio en el periodo t , ó Equilibrio Temporal en t , es un precio del dinero $p_t > 0$ y la correspondiente distribución de consumo tal que,

$$(3) \quad p_t M + \sum_{i \in G_t} z_{t1}^i(p_t, p_{t+1}) = 0.$$

Ahora bien, de la ecuación (1) con igualdad se deduce que,

$$m_t^i = p_t^{-1} (w_{t1}^i - c_{t1}^i)$$

y sumando sobre los $i \in G_t$,

$$(4) \quad \sum_{i \in G_t} m_t^i = p_t^{-1} \sum_{i \in G_t} (w_{t1}^i - c_{t1}^i)$$

Así pues, cuando se cumpla la ecuación (3),

$$(5) \quad M = p_t^{-1} \left[- \sum_{i \in G_t} z_{t1}^i(p_t, p_{t+1}) \right] = p_t^{-1} \left[- \sum_{i \in G_t} (f_{t1}^i(p_t, p_{t+1}) - w_{t1}^i) \right]$$

Así pues, si p_t es de hecho un ET en el periodo t , la ecuación (3) se cumple, se sigue comparando (4) y (5) que,

$$M = \sum_{i \in G_t} m_t^i$$

con lo que el mercado monetario se vacía.

Un ET en el periodo t es entonces cualquier precio positivo del dinero para el cual, dadas sus expectativas y restricciones, todos los agentes que viven en el periodo t se comportan de la mejor manera que pueden y todos los mercados en dicho periodo se vacían. En particular, el concepto de ET se define independiente de que el precio del dinero esperado en el periodo t se vea ó no realizado en el periodo $t+1$. Esto es lo que hace que el concepto de ET sea un concepto de equilibrio muy débil.

En nuestra investigación juega un papel crucial una cierta aplicación, la Aplicación de Equilibrio Temporal en cualquier periodo t ,

$$g_t : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$$

definida como,

$$g_t(p_{t+1}) = \{p_t : p_t \text{ define un ET en el periodo } t\}$$

En otras palabras, $p_t \in g_t(p_{t+1})$ si y solo si,

$$p_t M + \sum_{i \in G_t} z_{t1}^i(p_t, p_{t+1}) = 0.$$

Esta claro que la aplicación de ET está bien definida en tanto en cuanto exista por lo menos un ET en cualquier periodo t . La existencia de ET en un modelo similar al nuestro ha sido probada por Grandmont y Laroque, 1.973, y es una aplicación directa de resultados conocidos en el análisis estático del equilibrio general. Igualmente, la aplicación g_t será de hecho una función

continúa si y solo si dado cualquier p_{t+1} , el ET en el periodo t es único y cambia continuamente con p_{t+1} .

Debe señalarse que la unicidad del ET dado p_{t+1} y el carácter funcional de la aplicación de ET, no son exactamente la misma cosa. Por supuesto, si la aplicación de ET es de hecho una función, el ET será único para cualquier valor de p_{t+1} . Sin embargo, como se verá claramente en lo que sigue, podemos tener un único ET en el periodo t , dado p_{t+1}^* , incluso si el rango de la aplicación de ET tiene varios valores para algunos p_{t+1} y un único valor para otros, incluyendo p_{t+1}^* . Sin embargo, no es en absoluto claro que el permitir esta pequeña generalización adicional compense la enorme complejidad analítica que ello implicaría. La generalización verdadera sería permitir que la aplicación de ET fuese una auténtica correspondencia.

Puesto que nuestro interés en este trabajo es la unicidad del equilibrio con ER, que se define más adelante, no podemos llegar tan lejos. Esta es la razón por la cual, en este estadio de la investigación, nos contentaremos con suponer la condición global de que el ET es único para todo $t \geq 1$, aunque esto, en sentido estricto, es más de lo que realmente necesitamos. Así pues, tenemos,

Supuesto 4 : El ET en el periodo t es único para todo $t \geq 1$.

Sean $Z_t(p_t, p_{t+1}) = p_t M + \sum_{i \in G_t} z_{t1}^i(p_t, p_{t+1})$ la función de exceso de demanda agregada en el periodo t . Se cumple entonces lo siguiente.

Lema II.1: Bajo el supuesto 4, la aplicación de ET en el periodo t es una función continua para todo $t \geq 1$.

Prueba: Que la aplicación de ET en el periodo t , G_t , es de hecho una función para todo $t \geq 1$, es simplemente otra forma de expresar el supuesto 4, ya que éste sólo significa que para cada $p_{t+1} > 0$ existe un $p_t > 0$ y sólo uno tal que $Z_t(p_t, p_{t+1}) = 0$. Así pues, sólo tenemos que probar continuidad. Para cualquier $t \geq 1$, la función $Z_t: \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es continua puesto que es la suma de funciones continuas. Por lo tanto, puesto que $\{0\}$ es un

conjunto cerrado, $Z_t^{-1}(0)$ también ha de ser cerrado.

Puesto que $Z_t^{-1}(0) = \left\{ (p_t, p_{t+1}) : p_t = g_t(p_{t+1}) \right\}$, es claro que si la secuencia $(p_t^n, p_{t+1}^n) \subset Z_t^{-1}(0)$ converge a $(\bar{p}_t, \bar{p}_{t+1})$ cuando n tiende a infinito, entonces $(\bar{p}_t, \bar{p}_{t+1}) \in Z_t^{-1}(0)$, por lo que $\bar{p}_t = g_t(\bar{p}_{t+1})$ con lo cual g_t es continua.

Q.E.D.

Volviendo a la línea principal de nuestra argumentación, consideraremos ahora el equilibrio de la economía completa. Sin embargo, tenemos primero que precisar nuestra hipótesis acerca de la formación de expectativas. Se supondrá que los agentes tienen Previsión Perfecta, el correlato en condiciones de certidumbre de la hipótesis de Expectativas Racionales. Lo que significa PP es que el precio que los agentes de cualquier periodo t esperan que prevalezca en el periodo $t+1$, se realiza efectivamente como precio de equilibrio en $t+1$. Puesto que en cada periodo solo existe un único precio de equilibrio, una consecuencia inmediata de esta hipótesis es que los miembros de cualquier generación dada, tienen todas expectativas comunes. En un equilibrio con PP todos los miembros de cualquier generación t dada, tienen que tener la misma expectativa sobre el precio del dinero en el periodo $t+1$. Esto justifica el que hayamos supuesto previamente (ver página 8) lo que aparece ahora como una implicación del concepto de equilibrio utilizado.

Cuando se considera la economía con horizonte infinito, la situación en cualquier periodo t es exactamente la misma que la que nos llevó a la definición de ET. Lo que cambia crucialmente es que el concepto de equilibrio que utilizamos ahora se refiere a la economía completa y, por lo tanto, requerimos que las expectativas de los agentes se vean satisfechas en todos los periodos.

Definición II.2: Un equilibrio competitivo con Previsión Perfecta, equilibrio con PP para simplificar, es una secuencia $\left\{ p_t \right\}_{t=1}^{\infty}$, $p_t \in \mathbb{R}_{++} \forall t$, y la se-

cuencia correspondiente de distribuciones de consumo tal que,

$$(6) \quad p_t^M + \sum_{i \in G_t} z_{t1}^i (p_t, p_{t+1}) = 0, \quad t = 1, 2, \dots$$

Esto es, un equilibrio con PP es cualquier secuencia de precios positivos tal que cada miembro de cada generación se comporta de la mejor manera posible y todos los mercados se vacían.

Exactamente igual que antes, la condición de equilibrio define una relación entre p_t y p_{t+1} para cada $t \geq 1$.

Sin embargo, mientras que la definición de ET en el periodo t no implicaba en absoluto lo que pudiera ocurrir en el periodo $t+1$, esto es ahora de importancia fundamental, puesto que el precio esperado para el periodo $t+1$ tiene que ser un equilibrio temporal en el periodo $t+1$. Por lo tanto, podemos frasear la definición de equilibrio con PP en términos de la aplicación de ET como sigue. Un equilibrio con PP es una secuencia $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$, $p_t \in R_{++} \forall t$, tal que cualesquiera dos elementos consecutivos de la misma satisfacen la aplicación de ET del correspondiente periodo t .

Lema II.2: Si $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$ constituye un equilibrio con PP, $p_t \leq W/M$, $t = 1, 2, \dots$

Prueba: De la ecuación (1) con igualdad se sigue que en cualquier periodo $t \geq 1$, para cualquier $i \in G_t$,

$$p_t m_t^i = w_{t1}^i - f_{t1}^i (p_t, p_{t+1})$$

Por lo que sumando sobre los $i \in G_t$,

$$p_t \sum_{i \in G_t} m_t^i = \sum_{i \in G_t} [w_{t1}^i - f_{t1}^i (p_t, p_{t+1})]$$

esto es,

$$p_t = M^{-1} \sum_{i \in G_t} w_t^i - f_{t1}^i (p_t, p_{t+1}) \leq M^{-1} \sum_{i \in G_t} w_t^i \leq W/M.$$

Q.E.D.

Con este lema no hay ninguna pérdida de generalidad en considerar el conjunto $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq W/M\}$ como nuestro espacio de precios. Sin embargo, si la hay en restringir el análisis a los equilibrios con PP cuyos precios están acotados por encima de cero, lo que haremos en éste trabajo. Existen buenas razones teóricas que justificarían ésta restricción, al menos en el caso estacionario, y todas ellas están ligadas al hecho de que el permitir que los precios pertenezcan al conjunto Q no impide la existencia de equilibrios en los que el precio del dinero converge asintóticamente a cero. En primer lugar, como muestra el trabajo de Millan 1.981, si existe un equilibrio con PP que converge a cero, existe también un continuo de equilibrios, todos los cuales convergen a cero. Esta es ciertamente una negra perspectiva si queremos discutir el tema de la unicidad del equilibrio. Pero hay más. En un cierto sentido, los equilibrios que convergen a cero pueden considerarse como algo especial. En particular, es presumible que fuertes expectativas de un precio del dinero en el futuro positivo, ó el requisito de que los agentes paguen un impuesto en dinero, suprimiría esos equilibrios al establecer una cota inferior efectiva en el precio del dinero. En diferentes contextos, Grandmont, 1.977, ha utilizado la primera idea y Starr, 1.974, la segunda. Brock y Scheinkman, 1.980, han probado la efectividad del establecimiento del impuesto en un modelo con generaciones sucesivas, y en el mismo contexto, Wallace, 1.980, presenta un mecanismo en el que el hecho de que el gobierno esta dispuesto a cambiar dinero por bien a una cierta, y reducida, tasa, pone una cota inferior en el precio del dinero. Finalmente, debe hacerse notar que la convergencia del precio del dinero a cero es, en estos modelos, una condición necesaria para que tales equilibrios no sean Pareto óptimos, Balasko y Shell, 1.979; Okuno y Zilcha, 1.979.

Así pues, a partir de ahora consideraremos precios en el conjunto - - -
 $P = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq W/M, \alpha > 0\}$ y consiguientemente reduciremos nuestra atención a economías cuyas aplicaciones de ET están definidas sobre P .

III. EL CASO ESTACIONARIO

Proponemos comenzar la investigación con el análisis de la economía estacionaria, en la que no cambia a lo largo de las generaciones ni la distribución de las funciones de utilidad ni la de los recursos iniciales. Hay dos razones que justifican ésta decisión. En primer lugar, el análisis de ésta situación - aparentemente sencilla nos va a permitir presentar nuestros temas básicos desde una perspectiva más clara, al no entrar en las muchas dificultades inherentes al estudio de la estructura dinámica general. Ello permitirá al lector obtener una visión más clara de por qué la unicidad del equilibrio es un problema en ésta clase de modelo y de qué tipo de condiciones se requieren para obtenerla. En segundo lugar, es presumible que el estudio del caso estacionario - nos ofrezca claves e indicaciones acerca de qué condiciones reforzar, y en qué sentido, cuando lleguemos a discutir la unicidad del equilibrio con PP en el caso general.

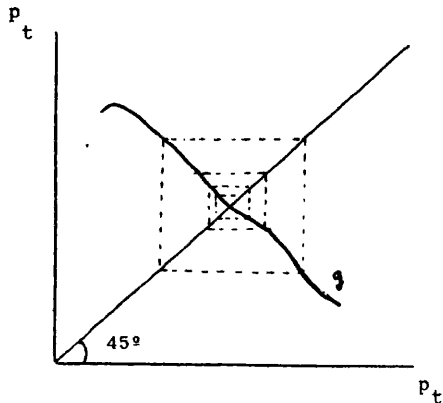
Por supuesto, como podría esperarse, en éste caso estacionario obtendremos resultados más fuertes, y utilizando menos condiciones, que los que podremos obtener para la economía general. En particular, podremos identificar con precisión la naturaleza del único equilibrio con PP existente bajo las condiciones de regularidad que imponemos. Sin embargo, de nuevo debemos señalar que en lo que respecta al problema de la unicidad, la situación estacionaria no es sustantivamente diferente de la general; la diferencia es más bien de grado. En esta parte encontraremos ya la mayor parte de los problemas que convierten a un único equilibrio con PP en algo de obtención tan dificultosa en éstos modelos dinámicos.

Así pues, entrando en materia, consideraremos ahora una economía estacionaria. Esto es, en el contexto del modelo expuesto en la Parte II, supondremos

ahora que $U_t^i(C_{t1}^i, C_{t2}^i) = U^i(C_{t1}^i, C_{t2}^i)$, $t = 1, 2, \dots$ y que $w_{th}^i = w_h^i$, $h = 1, 2$, $t = 1, 2, \dots$ con lo que en la economía existen N tipos de individuos, idénticos en cada periodo.

Se recordará que definimos el equilibrio del modelo a partir del equilibrio que existe en cada periodo, el ET en cualquier periodo $t \geq 1$. Diremos que el ET en el periodo t es único si, dado $p_{t+1} \in P$, existe un único p_t tal que p_t es un ET en el periodo t . De igual forma, el equilibrio con PP será único si existe sólo una secuencia $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$ que sea de equilibrio. Puesto que cualquier equilibrio con PP puede caracterizarse como una secuencia de ET autoconsistente, es claro que la unicidad del ET en cada periodo $t \geq 1$ es una condición necesaria para la unicidad del equilibrio con PP (sin embargo, veanse los comentarios en la pagina 12). La mejor forma de mostrar que no es condición suficiente es con el sencillo ejemplo que sigue.

Nótese que en nuestro marco estacionario y bajo los supuesto de la Parte II que seguimos manteniendo, la aplicación de ET que resulta del modelo es la misma en todos los periodos, esto es, es una función que no cambia con el tiempo. Supongamos además que su grafico es como el de la función que aparece en el dibujo.



Es claro que el ET es único en cada periodo. Sin embargo, puesto que el único requisito en una secuencia de equilibrio con PP es que cualesquiera dos - elementos consecutivos de la misma satisfagan a la aplicación de ET, es igualmente claro que hay muchas secuencias que cumplen ésta condición. Hemos dibujado dos de ellas, una que realiza un ciclo fijo alrededor de un punto fijo y - otra que converge a él. Ninguno de los supuestos que hemos realizado a lo largo del modelo impide que la aplicación de ET se comporte de ésta forma. Así pues, parece que en ausencia de restricciones adicionales, el caso más común en este tipo de modelos es la existencia de múltiples equilibrios.

La razón de ésta falta de unicidad también es clara. Como veremos, en estos modelos las acciones de los agentes en cualquier periodo dependen de sus opiniones acerca del comportamiento futuro de los precios. El contenido básico - del concepto de equilibrio con ER, es justamente el relacionar tales opiniones con elementos objetivos de la situación contemplada por el modelo. Sin embargo, tal relación, en nuestro caso el requisito de que las expectativas se satisfagan en cada periodo, no es suficientemente restrictivo como para forzar el que la secuencia de precios de equilibrio siga una senda determinada. Como hemos sugerido en la Introducción, lo único que ésta situación requiere es que formulemos restricciones sobre la estructura de éstas economías que nos permitan reducir el número de equilibrios con PP posibles. La condición de regularidad que discutiremos a continuación cumple éste objetivo. Su caracterización y el estudio de sus implicaciones para la unicidad del equilibrio con PP, nos ocupará toda ésta parte.

Volviendo ahora a la ecuación $p_t = g(p_{t+1})$, la aplicación de ET que corresponde a cualquier periodo de nuestra economía estacionaria, la primera cosa a notar es que es una ecuación en diferencias no lineal. En consecuencia, su solución por recursión hacia adelante depende de condiciones terminales sobre el comportamiento de la variable independiente. Lo que esto implica en particu

cular, es que el ET en cualquier periodo t depende de toda la senda futura de los precios. Es claro que ésta situación puede conducir a todo tipo de fenómenos erráticos en el comportamiento de la secuencia de precios que constituye un equilibrio con PP.

Estas posibles patologías son las que se pretenden impedir con nuestra condición de regularidad. Esta requiere que no sea muy grande la influencia que sucesos futuros, ó la anticipación de los mismos, pueda tener sobre el ET en el momento presente. Porque parece que un buen modelo dinámico debería tener la propiedad de que el futuro distante no tuviera demasiada influencia sobre el equilibrio presente. En particular, se querría que el modelo tuviese la propiedad de que las expectativas referentes a periodos más y más lejanos tuviesen cada vez menos influencia en el equilibrio existente hoy, hasta llegar a ninguna. Por otra parte, si el futuro no debería tener demasiada influencia sobre el equilibrio presente, tampoco deberían tener demasiada importancia los errores en las expectativas acerca de precios pertenecientes al futuro lejano. En otras palabras, cualquier expectativa de un precio en el futuro debería tener implicaciones sobre el precio de equilibrio hoy, inversamente proporcionales a la lejanía en el tiempo del periodo al que tal expectativa se refiere.

Basados en las ideas del párrafo anterior, establecemos nuestra condición de regularidad en la siguiente forma preliminar.

Condición de regularidad: La economía en el periodo t se llamará regular si diferentes opiniones acerca de algún precio futuro tienen una influencia sobre la solución de la ecuación de ET en el periodo t que disminuye a medida que el periodo al que tal expectativas se refieren se hace más y más lejano.

Nótese que, incluso en una forma tan primitiva como la anterior, la condición de regularidad que se propone es de hecho una condición sobre la aplicación de ET correspondiente a ésta economía. Para ver ésto, supongamos que los miembros

de la generación t esperan un cierto precio dado en algún periodo futuro $T > t$. Llamemos este precio p_t . Entonces, utilizando este precio como una condición terminal y trabajando hacia atrás con la aplicación de ET, obtenemos un cierto precio en el periodo t , que, por supuesto, depende unívocamente de p_t , la condición terminal. Llamemos $p_t(T)$ a tal precio.

Si establecemos ahora la condición terminal en periodos cada vez más lejanos, $T+1, T+2, \dots, T+n$, obtenemos, igual que anteriormente, precios correspondientes en el periodo t , digamos $p_t(T+1), p_t(T+2), \dots, p_t(T+n)$. Lo que la condición de regularidad está imponiendo, es que la secuencia $\{p_t(T+n)\}_{n=1}^{\infty}$ converja independientemente del valor particular de la condición terminal utilizado.

Observese sin embargo, que debido a la ley de formación de la secuencia

$$\{p_t(T+n)\}_{n=1}^{\infty},$$

$$p_t(T) = g^T(p_T)$$

donde $g^T = g \circ g^{T-1}$ es la iteración T -ésima de la aplicación de ET. De igual forma.

$$p_t(T+1) = g^{T+1}(p_T) = g \circ g^T(p_T) = g[p_t(T)],$$

y, en general,

$$p_t(T+n) = g^n[p_t(T)] = g^n[g^T(p_T)] = g^{T+n}(p_T),$$

por lo que convergencia de la secuencia $\{p_t(T+n)\}_{n=1}^{\infty}$

es idéntico a convergencia de la secuencia correspondiente $\{g^{T+n}(p_T)\}_{n=1}^{\infty}$ con diferentes condiciones terminales, valores de p_t . Esto justifica nuestra afirmación de que el papel de la condición de regularidad es imponer restricciones sobre la aplicación de ET de la economía estacionaria, asegurando que la se-

secuencia $\left\{ g^{T+n}(p_T) \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo valor de p_t , llamémoslo p , independientemente del valor particular de p_T esperado. De hecho, reforzaremos esta convergencia requiriendo, dentro de la definición de nuestra condición de regularidad, que exista un entorno abierto de p , W , que se reduce hasta el conjunto $\{p\}$ a medida que iteramos la aplicación de ET, esto es, tal que $g^n(W) \rightarrow \{p\}$ cuando n tiende a infinito.

Podemos definir ahora con rigor nuestra condición de regularidad.

Definición III. 1. (Condición de Regularidad): La economía estacionaria se llamará regular si,

- a) Para cualquier $q \in P$, la secuencia $\left\{ g^n(q) \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo valor, digamos que p .
- b) Existe un conjunto abierto W , $p \in W$, tal que $\left\{ g^n(W) \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\{p\}$ (es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam. } g^n(W) = 0$), donde $g^n(\cdot) = g \circ g^{n-1}(\cdot)$ es la iteración n -ésima de la aplicación de ET y $g^0(q) = q$, $\forall q \in P$.

Probablemente debamos hacer algún comentario sobre la condición b). En primer lugar, debería ser claro que la condición a) no implica la b). Lo que a) requiere es convergencia puntual de la secuencia de funciones $\left\{ g^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ a la función constante $f(x) = p$, $\forall x \in P$. Y aunque $g^n(P) \subset P$ para $n=1, 2, \dots$, de ninguna manera se sigue que la inclusión tenga que ser propia para ningún $n \geq 1$. Por otra parte, lo que la condición b) pide, es que exista un entorno abierto, W , del punto de convergencia p , el diámetro de cuyas iteraciones tiende a cero. De esta forma, lo que hace es imponer convergencia uniforme de $\left\{ g^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ localmente, en W . Además, como se verá más adelante, escogiendo adecuadamente el entorno de p , podemos asegurar que $g^n(W)$ está incluido propiamente en $g^{n-1}(W)$

para todo $n \geq 1$. Debe notarse sin embargo, que a) y b) juntas es un requisito mucho más débil que la convergencia uniforme de $\{g^n\}_{n=1}^{\infty}$ a f en P . De hecho, una vez que se tiene a), la condición b) es bastante fácil de satisfacer. Por ejemplo si g es transversal a la línea de 45 grados y/o diferenciable en p , la condición b) se cumple. En cualquier caso, para la prueba de la unicidad del equilibrio necesitamos alguna forma de convergencia uniforme de la secuencia $\{g^n\}_{n=1}^{\infty}$ y nuestra condición de regularidad es justamente adecuada para éste propósito como se verá en lo que sigue.

Con la condición de regularidad ya definida, la primera cuestión que parece natural preguntarse es acerca de la clase de aplicaciones de ET que pueden considerarse regulares. Esto es, queremos caracterizar la clase de aplicaciones de ET regulares.

Un muy conocido teorema de Banach, nos ofrece una primera idea sobre el tipo de funciones a las que debemos dirigir nuestra atención. El citado teorema afirma que si g es una contracción, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = y$ para todo x en el dominio de la función y , además, no es difícil probar que b) en la definición III.1. también se cumple. Sin embargo, podemos conseguir un resultado algo mejor, como veremos.

Definición III.2: Sea $\{X, d\}$ un espacio métrico. Se dirá que una función $f: X \rightarrow X$ es una contracción en $\{X, d\}$, si existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que para todo $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

Se dirá que una función $f: X \rightarrow X$ es contractiva en $\{X, d\}$, si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$,

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Es claro que cada contracción es también una función contractiva en el mismo espacio. Sin embargo, es fácil mostrar con ejemplos que la inversa no es cierta en general, incluso cuando el dominio de la función es un conjunto compacto.

Por ejemplo consideremos $f: [0, 1/2] \rightarrow [0, 1/2]$ definida como $f(x) = x^2$. Entonces para todo $x, y \in [0, 1/2]$, $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| \leq (x + y)|x - y| < |x - y|$.

Sin embargo, puesto que $(x + y)$ puede estar tan cerca de uno como queramos, no existe ningún $\lambda \in [0, 1)$ que pueda servir para todos los pares de valores x, y en $[0, 1/2]$.

En nuestro caso, el espacio metrico básico es $\{P, |\cdot|\}$, donde $|\cdot|$ es la métrica euclidiana usual en los reales. Podemos ahora probar lo siguiente.

Proposición III. 1: Supongamos que la aplicación de ET de la economía estacionaria, $g : P \rightarrow P$ es contractiva. Entonces $\bigcap_{n=0}^{\infty} g^n(P) = \{p\}$ para algún $p \in P$.

En particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = p, \forall x \in P$, y se cumple b) en la Definición III.1 por lo que la economía es regular.

Prueba: Considérese los conjuntos:

$$K_0 = P, K_1 = g(P), \dots K_n = g^n(P), \dots$$

Puesto que la función de ET, g , es continua, K_n es compacto para $n=0,1,2,\dots$ y puesto que $g : P \rightarrow P$, es claro que $K_0 \supset K_1 \supset \dots K_n \supset \dots$. Por lo tanto, como es bien sabido $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ no es vacío. Probaremos que $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$

K_n contiene exactamente un punto. Para ésto, pruebo primero que $g(K) = K$.

$$g(K) = g\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n\right) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} g(K_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_{n+1} = K.$$

En otra dirección, sea $x \in K$, y considerese la secuencia $S_n = g^{-1}(x) \cap K_n$. Puesto que $\{x\}$ es un conjunto cerrado y K_n compacto para $n \geq 0$, la secuencia S_n es una secuencia de conjuntos compactos. Además, puesto que $x \in K$ implica que $x \in K_n$ para $n \geq 0$, S_n no es vacío para ningún $n \geq 0$,

Por lo tanto,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n = g^{-1}(x) \cap K \neq \emptyset$$

por lo que $x \cap g(K) \neq \emptyset$, y, por tanto, $x \in g(K)$. Se sigue que $K \subset g(K)$.

Así pues, g aplica K sobre sí mismo. Buscando la contradicción, supongamos ahora que K contiene más de un punto. Entonces $\text{diam } K > 0$ y puesto que K es compacto, $\text{diam } [g(K)] = \max_{x,y \in g(K)} |x-y| = \max_{u,v \in K} |g(u)-g(v)| = |g(\bar{u}) - g(\bar{v})|$ se alcanza efectivamente por algún $\bar{u}, \bar{v} \in K$.

Sin embargo, puesto que g es contractiva,

$$|g(\bar{u}) - g(\bar{v})| < |\bar{u} - \bar{v}| \leq \text{diam } K$$

con lo que $\text{diam } [g(K)] < \text{diam } K$, lo cual contradice el hecho de que g aplica K sobre sí mismo.

Por lo tanto $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ contiene únicamente un punto, que llamaremos p , y se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = p$ para todo $x \in P$.

Además, b) en la Definición III.1 se cumple para todos los conjuntos abiertos $W \subset P$ tales que $p \in W$.

Q.E.D..

Sin avanzar más, debemos hacer ahora dos observaciones. La primera simplemente señala que hasta ahora hemos estado trabajando con el espacio métrico $\{P, d\}$ donde d es la métrica euclidiana, $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in P$. Sin embargo, es claro que el mismo espacio básico P puede convertirse en un espacio métrico - escogiendo una cualquiera de las muchas métricas posibles. En tal sentido, introducimos la definición siguiente.

Definición III.3: Sean dos espacios métricos $\{X, d\}, \{X, d'\}$. Decimos que d y d' son métricas equivalentes topológicamente, si ambas dan lugar a los mismos conjuntos abiertos en X .

Así pues, las métricas equivalentes topológicamente cambian la forma en que medimos distancia en un espacio dado sin alterar la estructura topológica básica.

del mismo, la definición de sus conjuntos abiertos. Las métricas equivalentes topológicamente son importantes porque muchas propiedades interesantes de aplicaciones definidas a un espacio dado, dependen únicamente de la métrica utilizada y en absoluto de la topología del espacio.

En particular, y esto es nuestra segunda observación, dada cualquier función definida en un cierto espacio, la propiedad de "ser una función contractiva" - está definida únicamente en relación con una métrica dada. No es una invariante métrica. Lo que esto significa es que una función dada puede ser contractiva en un espacio métrico $\{X, d\}$ y no en otro $\{X, d'\}$, incluso cuando las métricas d y d' son equivalentes topológicamente. Un sencillo ejemplo de este fenómeno es el siguiente.

Sea $X = \{x, y, z\}$: Definamos en X dos métricas, d y d' , como sigue,

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & a=b \\ 1 & a \neq b \end{cases} \quad a, b \in X$$

$$d'(x,y) = d'(x,z) = 2$$

$$d'(y,z) = 1$$

$$d'(x,x) = d'(y,y) = d'(z,z) = 0$$

Sea $f : X \rightarrow X$ definida como $f(x) = y$, $f(y) = z$, $f(z) = z$. En este caso, f es contractiva en $\{X, d'\}$ pero no en $\{X, d\}$. Sin embargo, es fácil probar que d y d' están bien definidas y son métricas equivalentes topológicamente.

Voy a argumentar que estas ideas son relevantes, y no sólo para nuestro problema, como veremos, sino también desde un punto de vista más general. En muchos problemas de economía, el interés se centra en la existencia de puntos fijos de una cierta aplicación y en el número de tales puntos fijos. Ahora bien éstas son cuestiones que dependen exclusivamente de la definición de la aplicación de que se trate y no de la topología ó la métrica del espacio en que tal aplicación está definida. Si una aplicación bien definida tiene un punto

fijo, ó dos, ó cualquier número, los seguira teniendo independientemente de la métrica ó de la topología que queramos imponer en el dominio y rango de la aplicación. Por supuesto, otra cosa bien diferente es cómo probar que de hecho tales puntos fijos estan ahí. Pero para éste fin es perfectamente legitimo el violentar tanto cuanto queramos los espacios correspondientes siempre que no cambiemos la definición de la aplicación. Lo que quiero decir es que podemos cambiar la métrica y/o la topología del dominio y rango de la aplicación, probar la propiedad que nos interesa, y volver después a la situación primitiva para continuar el argumento.

En nuestro caso particular, lo que sugerimos es que si la economía estacionaria es regular, podría ser posible convertir la función correspondiente de ET en una función contractiva en $\{P, d\}$, simplemente cambiando la métrica d . Que tal es de hecho el caso lo probará nuestra proxima proposición. Sin embargo, primero necesitamos un lema.

Lema III.1: Supongamos que la economía estacionaria es regular. Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(q) = p, \forall q \in P$ y sea W el entorno de p que aparece en la parte b) de la Definición III.1. Entonces, existe un entorno abierto de p , que llamaremos O , tal que $O \subset W$ y $g(O) \subset O$.

Prueba: Puesto que $g^n(W) \rightarrow \{p\}$ cuando $n \rightarrow \infty$, existe un entero n tal que $g^n(W) \subset W$.

Para cualquier $h > 0$, sea $g^{-h}(W) = \{x \in P : g^h(x) \in W\}$ y considérese el conjunto abierto

$$O = \bigcap_{j=0}^{m-1} g^{-j}(W)$$

Puesto que $g^{-0}(W) = W$, es claro que $O \subset W$. Probaremos que para cada $x \in O$, $g(x) \in O$. Si $x \in O$, $x \in g^{-j}(W)$ para $0 \leq j \leq m-1$. Por lo tanto, $g(x) \in g^{-j+1}(W) = g^{-(j-1)}(W)$ para $0 \leq j \leq m-1$.

Puesto que $x \in 0$, $x \in W$ por lo que $g^m(x) \in g^m(W) \subset W$, ésto es $g^{m-1}(g(x)) \in g^m(W)$. Se sigue entonces que $g(x) \in g^{-(m-1)}(W)$.

Esto prueba que si $x \in 0$, $g(x) \in 0$, que es lo que nos proponiamos probar.

Q.E.D.

Lo que indica éste lema es que si la economía es regular, siempre existe un entorno abierto de $p, 0$, tal que $g(0) \subset 0$. Así pues, podemos sustituir W por 0 en la definición de economía regular y hacer uso de la propiedad anterior, lo que nos será de utilidad en la prueba de la siguiente proposición.

Proposición III.2: Supongamos que la economía estacionaria es regular. Entonces existe una métrica d sobre P , equivalente topológicamente a la métrica euclidiana, y tal que $g : P \rightarrow P$ es contractiva en $\{P, d\}$.

Prueba: Puesto que la prueba es bastante larga, no es superfluo ofrecer ahora una visión general del desarrollo de la misma. En primer lugar, - introducimos una métrica en P y probamos que es equivalente topológicamente a la métrica euclidiana. Después, introducimos una segunda métrica en P , probamos que g es contractiva en términos de ésta métrica y, finalmente, probamos que es equivalente topológicamente a la métrica euclidiana comparandola con la métrica introducida inicialmente.

Así pues, sea $d_1 : P \times P \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida como,

$$d_1(x, y) = \sup_{n \geq 0} |g^n(x) - g^n(y)|, \quad x, y \in P.$$

Entonces $d_1(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in P$ y es 0 si y solo si $x = y$.

Tenemos que probar que d_1 satisface la desigualdad triangular. Sean $x, y, z \in P$.

Puesto que la economía es regular, por a) en la Definición III.1, el

$\sup_{m \geq 0} |g^n(x) - g^n(y)|$ se alcanza por algún entero positivo $m \geq 0$, por lo que $d_1(x, y) = |g^m(x) - g^m(y)|$.

Entonces,

$$\begin{aligned} d_1(x, y) = |g^m(x) - g^m(y)| &\leq |g^m(x) - g^m(z)| + |g^m(z) - g^m(y)| \\ &\leq \sup_{m \geq 0} |g^m(x) - g^m(z)| + \sup_{m \geq 0} |g^m(z) - g^m(y)| \\ &= d_1(x, z) + d_1(z, y). \end{aligned}$$

Probaremos ahora que d_1 es equivalente topológicamente a la métrica euclídea.

Puesto que para todo $x, y \in P, |x - y| \leq d_1(x, y)$, se sigue que cualquier secuencia convergente con respecto a d_1 converge también con respecto a $|\cdot|$. Por lo tanto, tenemos que probar únicamente que secuencias convergentes con respecto a $|\cdot|$ son también convergentes con respecto a d_1 . Por b) en la Definición III.1. para cada $\delta > 0$ existe un entero positivo N tal que para $n > N$

$$\text{diam } g^n(W) = \sup_{x, y \in W} |g^n(x) - g^n(y)| < \delta.$$

Por a) en la Definición III.L. para cada $x \in P$, existe un entero finito $n(x) = \min \{n \geq 0 : g^n(x) \in W\}$. Puesto que g es continua, existe $\eta > 0$ tal que si $|x - y| < \eta$,

$$(7) \quad g^{n(x)}(y) \in W \text{ y } |g^j(x) - g^j(y)| < \delta, \quad 0 \leq j \leq N + n(x).$$

Utilizando el Lema III.1. puesto que $g(W) \subset W$, se sigue que,

$$\begin{aligned} g^{n+N+n(x)}(x) &\in g^{n+N}(W) \\ g^{n+N+n(x)}(y) &\in g^{n+N}(W) \end{aligned}$$

para todo $n > 0$, por lo que

$$(8) \quad |g^j(x) - g^j(y)| < \delta, \quad j > N + n(x).$$

Pero entonces, si $|x - y| < \eta$, se sigue de (7) y (8) que $d_1(x, y) < \delta$, lo que implica que cualquier secuencia convergente a x con respecto a $|\cdot|$, también converge a x con respecto a d_1 .

Así pues, $|\cdot|$ y d_1 son métricas equivalentes topológicamente.

Introduzcamos ahora una segunda función $d: P \times P \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida como,

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} |g^n(x) - g^n(y)| \quad x, y \in P, \text{ donde } K = \text{diam } P.$$

Es claro que d es no negativa y cero si y solo si $x = y$, además, si $z \in P$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} |g^n(x) - g^n(y)| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} |g^n(x) - g^n(z) + g^n(z) - g^n(y)| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} |g^n(x) - g^n(z) + (g^n(z) - g^n(y))| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} [|g^n(x) - g^n(z)| + |g^n(z) - g^n(y)|] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \left[\sup_{n \geq k} |g^n(x) - g^n(z)| + \sup_{n \geq k} |g^n(z) - g^n(y)| \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} |g^n(x) - g^n(z)| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} |g^n(z) - g^n(y)| \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

por lo que d satisface la desigualdad triangular y es, por tanto, una métrica bien definida.

Probaremos ahora que en términos de d , la aplicación de ET, g , es contractiva.

- (9) Puesto que para todo $k \geq 0$, $\sup_{n \geq k} |g^{n+1}(x) - g^{n+1}(y)| \leq \sup_{n \geq k} |g^n(x) - g^n(y)|$, se sigue que,

$$\begin{aligned}
 d(g(x), g(y)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} \left| g^n(g(x)) - g^n(g(y)) \right| \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} \left| g^{n+1}(x) - g^{n+1}(y) \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} \left| g^n(x) - g^n(y) \right| = d(x, y).
 \end{aligned}$$

Probaremos que no puede darse el caso de que $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$, para ningún $x, y \in P$, $x \neq y$. Supongamos que fuera así, de forma que para algún $x, y \in P$, $x \neq y$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} \left| g^{n+1}(x) - g^{n+1}(y) \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \sup_{n \geq k} \left| g^n(x) - g^n(y) \right|$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k K} \left[\sup_{n \geq k} \left| g^{n+1}(x) - g^{n+1}(y) \right| - \sup_{n \geq k} \left| g^n(x) - g^n(y) \right| \right] = 0$$

y, por (9), tiene que ser cierto que para todo $k \geq 0$,

$$(10) \quad \sup_{n \geq k} \left| g^{n+1}(x) - g^{n+1}(y) \right| = \sup_{n \geq k} \left| g^n(x) - g^n(y) \right|.$$

Ahora bien, en términos de la métrica d_1 introducida inicialmente, la expresión (10) para $k = 0$ es simplemente

$$d_1(g(x), g(y)) = d_1(x, y)$$

y, puesto que utilizando de nuevo la expresión (10) con $k = 1$,

$$\begin{aligned}
 \sup_{n \geq 0} \left| g^{n+2}(x) - g^{n+2}(y) \right| &= \sup_{n \geq 1} \left| g^{n+1}(x) - g^{n+1}(y) \right| \\
 &= \sup_{n \geq 1} \left| g^n(x) - g^n(y) \right| \\
 &= \sup_{n \geq 0} \left| g^{n+1}(x) - g^{n+1}(y) \right|,
 \end{aligned}$$

obtenemos también que $d_1(g^2(x), g^2(y)) = d_1(g(x), g(y))$.

Se sigue entonces, por inducción, que para $n \geq 1$,

$$d_1(g^n(x), g^n(y)) = d_1(x, y) > 0$$

lo que significa ciertamente que $d_1(g^n(x), g^n(y))$ no converge a 0 cuando n tiende a infinito. Sin embargo, puesto que d_1 es topológicamente equivalente a la métrica euclidiana sobre P , éste hecho significa también que tampoco $|g^n(x) - g^n(y)|$ puede converger a cero cuando n va hacia infinito.

Por otra parte, utilizando la condición de regularidad, $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(y)$ implica que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g^n(x) - g^n(y)| = 0$$

y ésta contradicción prueba que no puede darse el caso de que $d(g(x), g(y)) =$
 $= d(x, y)$ para ningún $x, y \in P$, $x \neq y$, por lo que

$$d(g(x), g(y)) < d(x, y) \quad x, y \in P, \quad x \neq y$$

lo que significa que g es contractiva en términos de d .

Falta probar que d es equivalente topológicamente a la métrica euclidiana. Puesto que equivalencia topológica de métricas es una relación de equivalencia, nos basta probar que d y d_1 son equivalentes topológicamente. Puesto que $d_1(x, y) \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in P$, es claro que secuencias convergentes con respecto a d convergen también con respecto a d_1 y lo hacen al mismo límite. Por lo tanto, tenemos que probar únicamente la implicación en la dirección opuesta. Ahora bien,

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sup_{n \geq k} |g^n(x) - g^n(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sup_{n \geq 0} |g^n(x) - g^n(y)|$$

$$= \left[\frac{1}{2^0} \sup_{n \geq 0} |g^n(x) - g^n(y)| \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

donde la última serie converge y tiene suma 2. Así pues,

$$d(x, y) \leq \frac{2}{k} d_1(x, y) \quad . \quad .$$

Pero entonces, puesto que cualquier secuencia convergente con respecto a d_1 lo es también con respecto a $2/Kd_1$ y viceversa, se sigue que secuencias convergentes con respecto a d_1 son también convergentes con respecto a d .

Esto completa la prueba de equivalencia topológica, y, por tanto, también la prueba de la proposición.

Q.E.D.

Así pues, de acuerdo con ésta proposición, si la economía estacionaria es regular podemos cambiar la métrica de P sin alterar su topología, convirtiendo así la aplicación de ET en una aplicación contractiva. Esta última proposición, junto con la Proposición III.1., es claro que implica.

Proposición III.3. La economía estacionaria es regular en el sentido de la Definición III.1. si y solo si la aplicación correspondiente de ET, $g: P \rightarrow P$ es contractiva en $\{P, d\}$ para alguna métrica d .

Esta proposición agota la caracterización formal de la condición de regularidad. Significa, que la clase de funciones que pueden ser funciones de ET de economías regulares, es esencialmente la clase de funciones contractivas definidas en P . Si la aplicación de ET es contractiva, la economía es regular y si la economía es regular, la aplicación de ET correspondiente ó es contractiva ó puede hacerse tal imponiendo una métrica diferente sobre P que deja invariante su topología.

Nuestro objetivo es ahora utilizar ésta caracterización para el estudio de la unicidad del equilibrio con PP de economías estacionarias regulares. Como se

ñalamos anteriormente, podremos incluso identificar el único equilibrio con PP que existe en éstas economías. De hecho, éste estará constituido por la secuencia que repite en cada periodo el punto fijo de la función de ET, cuya existencia y unicidad vamos a probar ahora.

Proposición III.4. Supongamos que la economía estacionaria es regular. Entonces la función de ET correspondiente tiene un punto fijo y sólo uno.

Prueba :

Puesto que la economía es regular, $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = p$ para todo $x \in P$. Probaremos que éste p es el único punto fijo de g . Existencia es inmediata - puesto que, por continuidad de g ,

$$g(p) = g \left[\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(p) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{n+1}(p) = p$$

Para probar unicidad, supongamos que existe $q \in P$ tal que $g(q) = q$. En tal caso, puesto que, $g^2(q) = g[g(q)] = g(q) = q$, se sigue que,

$$g^n(q) = q, \quad n = 1, 2, \dots$$

por lo que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(q) = q.$$

Sin embargo, por regularidad, $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(q) = p$.

Por lo tanto $q = p$.

Q.E.D.

Por supuesto, no es lo mismo que exista un único punto fijo de la función de ET de la economía que el que el equilibrio con PP de la misma sea único. Lo primero significa simplemente que existe un equilibrio con PP estacionario y sólo uno. El probar que éste es el único equilibrio de la economía, requiere algo más de trabajo.

Proposición III.5. Supongamos que la economía estacionaria es regular. Entonces la secuencia $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$ define un equilibrio con PP si y sólo si para todo $t \geq 1$ p_t es un punto fijo de la aplicación de ET, g .

Prueba: Sea $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$ un equilibrio con PP.. Probaremos que p_t tiene que ser entonces un punto fijo de g para todo $t \geq 1$. Recuérdese que en virtud de la Proposición III.4, g tiene un único punto fijo que llamaremos q .

Supongamos que existe un periodo h para el cual $p_h \notin \{p_t\}_{t=1}^{\infty}$, $p_h \neq q$. Puesto que $\{p_t\}_{t=1}^{\infty}$ es un equilibrio con PP, $p_h = g(p_{h+1})$ y en general, $p_{h+n-1} = g(p_{h+n})$, $n = 1, 2, \dots$

Entonces,

$$p_h = g(p_{h+1}) = g \circ g(p_{h+2}) = g^2(p_{h+2})$$

y, en general,

$$p_h = g^n(p_{h+n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

En virtud de la Proposición III.2, g es una función contractiva en (P, d) dada una elección adecuada de la métrica d . Por lo tanto, utilizando la Proposición III.1, sabemos que $g^n(P) \rightarrow \{q\}$ cuando n tiende a infinito.

Ahora bien, para todo $n \geq 0$, $g^n(p_{h+n}) \in g^n(P)$, la iteración n -ésima del espacio de precios y se sigue inmediatamente que

$$d(g^n(p_{h+n}), g^n(q)) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En consecuencia, puesto que para todo $n \geq 1$,

$$d(g^n(p_{h+n}), g^n(q)) = d(p_h, q),$$

se sigue también que $d(p_h, q)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito lo que contradice nuestro supuesto de que $p_h \neq q$.

Por otra parte, es inmediato que si $p \in P$ es el único punto fijo de g , la secuencia $\left\{ p_t \right\}_{t=1}^{\infty}$ con $p_t \equiv p$ para $t = 1, 2, \dots$ es un equilibrio con PP.

• Q.E.D.

Con esta proposición, el siguiente colorario se sigue inmediatamente.

Colorario III.1 Si la economía estacionaria es regular, existe un equilibrio con PP y éste es único.

Prueba: Se sigue directamente de la Proposición anterior y de la Proposición III.4.

Q.E.D.

Este colorario completa nuestro estudio de la economía estacionaria. Hemos probado que, bajo nuestra condición de regularidad, existe un único equilibrio con PP y, en el proceso, hemos probado también la utilidad para nuestros propósitos de efectuar cambios en la estructura del espacio pertinente.

Finalmente, no está de más el que hagamos algunos comentarios acerca de la relevancia de los resultados obtenidos. En éstos modelos con generaciones sucesivas, un equilibrio es una senda, una secuencia infinita de valores para las variables endógenas. Este es un concepto de equilibrio que debe separarse radicalmente del concepto de equilibrio como "ausencia de movimiento" que tanto se ha usado, y abusado, en teoría económica. En consecuencia, si los modelos que trabajamos presentan alguna regularidad en absoluto, deberíamos esperar que los elementos de la secuencia de equilibrio correspondiente estuvieran relacionados con las características básicas del modelo en el periodo al cual corresponden. Sin embargo, la otra cara de la moneda es que, en tal caso, los equilibrios estacionarios sólo podrían aparecer, y deberían hacerlo, cuando la estructura

básica de la economía no cambia en el tiempo. En otras palabras, los equilibrios estacionarios deberían ser los equilibrios de las economías estacionarias. Con éste punto de vista, es tranquilizador encontrar que el equilibrio que se obtiene cuando imponemos nuestra condición de regularidad en la economía estacionaria es estacionario. Y también será tranquilizador el descubrir que la condición de regularidad que tendremos que imponer a la economía general, conduce a equilibrios que no son, en general, estacionarios. Después de todo, no hay nada "natural" en los estados estacionarios cuando la estructura de la economía es cambiante.

IV. EL CASO GENERAL

A partir de ahora permitiremos que cambien de generación en generación tanto las funciones de utilidad de los agentes como sus recursos iniciales. La consecuencia inmediata de esto, es que tendremos una aplicación de ET diferente para cada periodo $t \geq 1$, $g_t : P \rightarrow P$.

Lo que nos proponemos hacer es comenzar definiendo el espacio en el que se desarrollará el análisis, para introducir después una aplicación general construida utilizando las aplicaciones de ET correspondiente a cada período y discutir en este contexto las dificultades que se presentan cuando tratamos de obtener un equilibrio con PP único. Finalmente, definiremos una condición de regularidad más fuerte que la anteriormente presentada y probaremos las proposiciones principales de esta parte.

Nuestro espacio básico para esta parte será el espacio producto de los espacios P correspondientes a cada periodo. Así pues, definamos P_t para $t \geq 1$ como $P_t \cong P$ y consideremos el producto cartesiano,

$$\bar{P} = \prod_{t=1}^{\infty} P_t$$

Es claro que una vez que definamos una métrica, d , sobre \bar{P} , $\{\bar{P}, d\}$ se convierte en un espacio métrico. Así pues, definamos $d : \bar{P} \times \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$ como,

$$d(p, q) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^t K} |p_t - q_t|, \quad p, q \in \bar{P}$$

donde $K = \max \{|p_t - q_t| : p_t, q_t \in P_t, t = 1, 2, \dots\} = \text{diam } P_t$, que existe y es igual para todo $t \geq 1$ puesto que la distancia euclidiana es una función continua y $P_t \cong P \forall t \geq 1$, es compacto. Nótese también que los elementos de \bar{P} son secuencias infinitas, esto es, $p, q \in \bar{P}$, $p \cong \{p_t\}_{t=1}^{\infty}$ y $q \cong \{q_t\}_{t=1}^{\infty}$. Finalmente, puesto que para cualquier $p, q \in \bar{P}$,

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^t K} |p_t - q_t| \leq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^t K} K = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^t} = 1,$$

la función d está bien definida.

Tenemos que asegurarnos de que d es una métrica. Así pues, sean $p, q \in \bar{P}$ y

$$s_t = \frac{1}{2^t K}. \text{ Entonces,}$$

a) $\sum_{t=1}^{\infty} s_t |p_t - q_t| \geq 0$ con igualdad si y sólo si

$$|p_t - q_t| = 0 \text{ para } t = 1, 2, \dots \text{ es decir, si y solo si } p = q$$

b) $\sum_{t=1}^{\infty} s_t |p_t - q_t| = \sum_{t=1}^{\infty} s_t |q_t - p_t|$, puesto que la métrica euclidiana

es simétrica.

c) Sea $z \in \bar{P}$. Entonces,

$$|p_t - q_t| \leq |p_t - z_t| + |z_t - q_t|, \quad t = 1, 2, \dots$$

Así pues,

$$s_t |p_t - q_t| \leq s_t \left[|p_t - z_t| + |z_t - q_t| \right], \quad t = 1, 2, \dots$$

y sumando, puesto que los dos términos son finitos,

$$\sum_{t=1}^{\infty} s_t |p_t - q_t| \leq \sum_{t=1}^{\infty} s_t \left[|p_t - z_t| + |z_t - q_t| \right],$$

esto es

$$\sum_{t=1}^{\infty} s_t |p_t - q_t| \leq \sum_{t=1}^{\infty} s_t |p_t - z_t| + \sum_{t=1}^{\infty} s_t |z_t - q_t|,$$

en otras palabras,

$$d(p, q) \leq d(p, z) + d(z, q)$$

como se trataba de probar.

Así pues, la función d es una métrica bien definida sobre \bar{P} . Debe hacerse notar también que, como se prueba en Kelley, 1.955 pag. 122, ésta métrica da

lugar a la llamada "topología del producto" de \bar{P} . Este es un hecho importante que utilizaremos más tarde.

Utilizando las aplicaciones de ET correspondientes a cada período, queremos construir ahora una aplicación global para el conjunto de la economía. Sin embargo, dada la definición peculiar de las aplicaciones de ET, necesitamos ser cuidadosos para asegurar que la aplicación general está bien definida. Así pues sea N el espacio de los enteros no negativos y definamos la función $h : N \rightarrow N$ como

$$h(n) = n + 1, \quad n \in N$$

Sea ahora S el espacio de todas las secuencias reales y utilizando la función h , definamos la función $\bar{h} : S \rightarrow S$ como

$$\bar{h} \left\{ \left\{ a_n \right\} \right\} = \left\{ b_n \right\} \quad \left\{ a_n \right\} \in S$$

donde

$$\left\{ b_n \right\} = \left\{ a_{h(n)} \right\}$$

Finalmente, sea $G = \prod_{t=1}^{\infty} g_t$ la aplicación producto de las funciones ET co-

rrespondientes a cada período y definamos la función compuesta,

$$G \circ \bar{h} : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$$

Si $p \in \bar{P}$, poniendo ésta función en forma extendida,

$$\begin{aligned} G \circ \bar{h}(p_1, p_2; \dots, p_n, \dots) &= G(p_2, p_3, \dots, p_n, \dots) \\ &= (g_1(p_2), g_2(p_3), \dots, g_n(p_{n+1}), \dots) \\ &= (q_1, q_2, \dots, q_n, \dots) \end{aligned}$$

de forma que $G \circ \bar{h}$ está bien definida y aplica secuencias infinitas en secuencias infinitas. Además, es claro que $q = \left\{ q_t \right\}_{t=1}^{\infty}$ y $q_t = g_t(p_{t+1})$, $t = 1, 2, \dots$ como necesitamos.

La utilidad de ésta construcción se manifiesta en la siguiente proposición.

Proposición IV. 1: $p \equiv \left\{ p_t \right\}_{t=1}^{\infty} \in \bar{P}$ es un equilibrio con PP si y solo si es un punto fijo de la aplicación $G \circ \bar{h}$.

Prueba: Sea $p \in \bar{P}$ un equilibrio con PP. En tal caso, para cualquier $t \geq 1$, p_t, p_{t+1} tienen que satisfacer la ecuación $p_t = g_t(p_{t+1})$. Pero esto significa simplemente que la secuencia $\{\bar{h}(p)\}$ es aplicada por G en la secuencia p . En otras palabras, en tal caso p es un punto fijo de la aplicación $G \circ \bar{h}$.

Por otra parte, supongamos que $p \in \bar{P}$ es un punto fijo de $G \circ \bar{h}$, esto es, p es tal que $G \circ \bar{h}(p) = p$. En tal caso,

$$\begin{aligned} G \circ \bar{h}(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) &= G(p_2, p_3, \dots, p_n, \dots) \\ &= (g_1(p_2), g_2(p_3), \dots, g_n(p_{n+1}), \dots) \\ &= (p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) \end{aligned}$$

por lo que para $t \geq 1$, $p_t = g_t(p_{t+1})$ y se sigue que p es un equilibrio con PP.

Q.E.D.

Nótese que ésta proposición depende únicamente de la estructura generacional básica del modelo. En particular, es independiente de las características particulares de las aplicaciones de ET en cada período. Incluso si éstas fueran correspondencias y no funciones como en nuestro caso, todavía la proposición sería cierta con los cambios obvios. Por lo tanto, las discusiones de existencia o unicidad que pueden hacerse para ésta clase de modelos pueden reducirse al análisis de algún conjunto particular de condiciones que hacen que la aplicación $G \circ \bar{h}$ tenga un punto fijo ó que éste sea único.

Después de todo lo que hemos hecho para el caso de la economía estacionaria,

parecería natural que tratásemos de aplicar ahora los mismos métodos. En particular, podríamos restringir la definición de la economía estacionaria regular a cada periodo $t \geq 1$ y llamar regular a la economía en el periodo t si la aplicación de ET en el periodo t satisface las condiciones a) y b) de la Definición III.1. En tal caso, si la economía fuese regular en cada periodo $t \geq 1$, la utilización de la Proposición III.2 en éste caso resultaría en que las funciones g_t fuesen contractivas en $\{p_t, d_t\}$ dada una elección adecuada de la métrica d_t , y ésto para cada $t \geq 1$. Sin embargo, es un triste hecho que incluso si todas las funciones de ET son contractivas en sus métricas respectivas, ésto no implica ninguna propiedad particular para la aplicación general $G \circ \bar{h}$. El por qué ésto es así tiene mucho que ver con la forma en que se ha definido ésta aplicación. Para ver claramente el problema, supongamos que queremos probar que $G \circ \bar{h}$ es contractiva. Esto es, queremos probar que $d(G \circ \bar{h}(p), G \circ \bar{h}(q)) < d(p, q)$, $p, q \in \bar{P}$, $p \neq q$. En tal caso, utilizando la métrica producto definida anteriormente ó cualquier otra métrica que tenga en cuenta que tenemos ahora una métrica diferente en cada periodo, tendríamos una expresión de la forma,

$$d(G \circ \bar{h}(p), G \circ \bar{h}(q)) = \sum_{t=1}^{\infty} s_t d_t(g_t(p_{t+1}), g_t(q_{t+1}))$$

y, utilizando el hecho de que para todo $t \geq 1$, g_t es contractiva en $\{p_t, d_t\}$, la suma anterior es estrictamente menor que,

$$< \sum_{t=1}^{\infty} s_t d_t(p_{t+1}, q_{t+1}) .$$

Pero ésto significa que estamos midiendo con la medida correspondiente al periodo t , d_t , los elementos de p, q correspondientes al periodo $t+1$. A menos que tuviésemos información acerca de cómo comparar $d_t(\dots)$ y $d_{t+1}(\dots)$, lo que no tenemos, no podemos ir muy lejos en ésta dirección.

Lo que haremos será reforzar directamente nuestra condición de regularidad anterior (Definición III.1) tratando de corregir los aspectos que podrían no funcionar cuando tenemos una colección de diferentes funciones de ET, una por

cada periodo, en lugar de la única que existía en la economía estacionaria.

Recordando ahora la condición a) en la Definición III.1, si la aplicamos a cada una de las funciones de ET de nuestra economía general, obtendríamos $\lim_{n \rightarrow \infty} g_t^n(x) = p_t \quad \forall x \in P, t = 1, 2, \dots$. Nótese que lo que ésta condición implica es que las iteraciones de las funciones de ET correspondientes a cada periodo convergen puntualmente a la función constante $p_t, t = 1, 2, \dots$. Una forma alternativa de formular esto es poniendo $\lim_{n \rightarrow \infty} |g_t^n(x) - g_t^n(y)| = 0, x, y \in P, t = 1, 2, \dots$. Ahora bien, si tomamos cualesquiera dos puntos x, y , puede darse el caso de que incluso si para cada función de ET existe un entero finito que hace la diferencia de sus iteraciones tan próxima a cero como queramos, a lo largo de los periodos ésta diferencia no se aproxime a cero aun cuando busquemos un entero tan elevado como queramos. En otras palabras, incluso si para cada punto en el dominio, las iteraciones de cada función de ET convergen a un cierto valor, éstas convergencias pueden hacerse más y más lentas cuando t se aproxima a infinito. De ésta forma puede estropearse ésta condición. Sin embargo, superaremos ésta dificultad requiriendo no sólo que las iteraciones de cada función de ET converjan, sino que su supremo converja también, esto es, imponiendo una condición de la forma $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_t |g_t^n(x) - g_t^n(y)| = 0, x, y \in P$.

Al considerar la condición b) en la Definición III.1, las cosas son más complicadas y antes de discutir sus posibles generalizaciones será conveniente que introduzcamos algunas definiciones.

Definición IV.1: Sean $\{X, d\}, \{X; d'\}$ dos espacios métricos y \mathcal{I} un cierto conjunto de índices. Un conjunto de funciones $\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}, f_\alpha : X \rightarrow X' \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}$ se llama equicontínuo si para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $d'(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) < \varepsilon$ para cualquier $\alpha \in \mathcal{I}$ y cualesquiera $x, y \in X$ que satisfagan $d(x, y) < \delta$.

Por supuesto, lo importante en ésta definición es que dado $\varepsilon > 0$, el mismo $\delta > 0$ tiene que servir para todas las $f_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, la condición es

global en \mathcal{I} . Como una generalización adicional de éste concepto, introduciremos la definición siguiente.

Definición IV.2 Sean $\{X, d\}$, $\{X', d'\}$ dos espacios métricos y \mathcal{I} un conjunto índice. Un conjunto de funciones $\{f_{\alpha, n} : \alpha \in \mathcal{I}, n = 1, 2, \dots\}$, $f_{\alpha, n} : X \rightarrow X' \forall \alpha \in \mathcal{I}$ $n = 1, 2, \dots$ se llama conjuntamente m-equicontínuo si para cada $\epsilon > 0$ dado existe un $\delta > 0$ y un $m \geq 1$ tales que $d'(f_{\alpha, n}(x), f_{\alpha, n}(y)) < \epsilon$ para cada $\alpha \in \mathcal{I}$ y $n \geq m$ y cualquier $x, y \in X$ que satisfagan $d(x, y) < \delta$.

Lo que se requiere en ésta definición es que dado $\epsilon > 0$, el mismo $\delta > 0$ tiene que funcionar para todo $\alpha \in \mathcal{I}$ y todo n a partir de un cierto m en adelante. Así pues, la condición es global no sólo en \mathcal{I} sino también en $n = 1, 2, \dots$, a partir de un cierto entero m .

Recordando la condición b) en la Definición III.1, debe notarse que implica una cierta convergencia uniforme para las iteraciones de g , por lo menos en un entorno del punto p . Ahora bien, es sabido que secuencias uniformemente convergentes constituyen colecciones equicontínuas en conjuntos compactos y es claro que necesitaremos éste tipo de equicontinuidad para cada una de las aplicaciones de ET que constituyen nuestra economía general. Sin embargo, esto no es suficiente. De nuevo, cuando el tiempo va hacia el infinito puede convertirse en más y más difícil para las aplicaciones de ET el aplicar precios en el periodo siguiente cercanos entre sí, en precios en el periodo t que se encuentren a una cierta distancia prefijada. Esta es la razón por la que tendremos que requerir que las aplicaciones de ET constituyan una secuencia equicontínua también a lo largo del tiempo. Puesto que lo que esta condición implica es justamente que para cualquier $t \geq 1$ la imagen de precios en el periodo $t+1$ suficientemente cercanos, está constituida por precios en el periodo t también cercanos y esto de un modo uniforme a lo largo de los periodos.

En general, es fácil ver que ambas generalizaciones de la condición de regularidad que constituyó nuestra Definición III.1 apuntan en la misma dirección. Es imperativo que cuando las aplicaciones de ET cambian de un período a otro, pongamos restricciones limitando la magnitud de sus diferencias. En este sentido, si la economía se hace más y más "alocada" a medida que nos alejamos en el tiempo, no hay forma alguna de obtener proposiciones útiles validas con cierta generalidad.

Sea $H : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$, definida como $H = G \circ \bar{h}$, la aplicación general de nuestra economía. Las páginas siguientes se dedicarán a probar que ésta función tiene un punto fijo y solo uno. La línea general de la prueba será la siguiente. En primer lugar, utilizando las ideas de los párrafos anteriores, probamos que para una cierta iteración z , H^z es una función contractiva en $\{\bar{P}, d\}$. Después probaremos que $H^z : \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ tiene un punto fijo y sólo uno. Finalmente, concluiremos la prueba demostrando que el punto fijo de H^z es el único punto fijo de H . Así pues, nuestra primera proposición es la siguiente.

Proposición IV.2 Sean $g_t : P \rightarrow P$, $t = 1, 2, \dots$ las aplicaciones de ET correspondientes a cada período y supongamos,

- a) $\lim_n \sup_t |g_t^n(x) - g_t^n(y)| = 0, \quad x, y \in P$
- b) la colección $\left\{ g_t^n \right\}_{t=1}^{\infty} \quad n=0$ es conjuntamente m -equicontinua,

donde $\forall t \geq 1, g_t^n(x) = g_t \circ g_t^{n-1}(x), g_t^0(x) = x$.

Existe entonces un entero positivo z tal que $H^z = G^z \circ \bar{h}^z$ es una función contractiva en $\{\bar{P}, d\}$.

Prueba: Por a), dado $\epsilon > 0$, para cada $x, y \in P$ existe

A) $N(x, y)$ tal que para $n > N(x, y)$,

$$\sup |g_t^n(x) - g_t^n(y)| < \frac{\xi}{8} |x - y|$$

B) Por b), para cada $\xi > 0$, existe $\delta > 0$ y $m \geq 1$

tal que si $|u - v| < \delta$, $|g_t^s(u) - g_t^s(v)| < \xi$ para todo t y $s \geq m$. En particular, para el $\xi > 0$ dado en A),

existe $\delta > 0$ tal que si $|u - v| < \delta$,

$$|g_t^n(u) - g_t^n(v)| < \frac{\xi}{16} |x - y|$$

para todo $t \geq 1$ y todo $n > \max \{N(x, y), s\}$.

C) Sea $d_2(\cdot, \cdot)$ la métrica producto en $P^2 \times P^2$ generada

por $|\cdot|$, es decir si $(x, y), (p, q) \in P^2$, $d_2 \left[(x, y), (p, q) \right] = |x - p| + |y - q|$, y definamos la bola de radio

δ y centro (x, y) como,

$$B_\delta(x, y) = \left\{ (p, q) \in P^2 : d_2 \left[(x, y), (p, q) \right] < \delta \right\}$$

Entonces, para cada $n > \max \{N(x, y), s\}$ y $t = 1, 2, \dots$

si $(p, q) \in B_\delta(x, y)$,

$$\begin{aligned} |g_t^n(p) - g_t^n(q)| &\leq |g_t^n(p) - g_t^n(x)| + |g_t^n(x) - g_t^n(y)| \\ &\quad + |g_t^n(y) - g_t^n(q)| \\ &\leq \frac{\xi}{16} |x - p| + \frac{\xi}{8} |x - y| + \frac{\xi}{16} |x - y| = \frac{\xi}{4} |x - y| \\ &\leq \frac{\xi}{4} \left[|x - p| + |p - q| + |q - y| \right] \\ &\leq \frac{\xi \delta}{4} + \frac{\xi}{4} |p - q| \leq \frac{\xi}{4} |p - q| < \frac{\xi}{2} |p - q| \end{aligned}$$

Así pues, para todos los pares $(p, q) \in B_\delta(x, y)$ y cada $n > \max$

$\{N(x, y), s\}$,

$$\sup |g_t^n(p) - g_t^n(q)| \leq \frac{\xi}{2} |p - q| < \xi |p - q|$$

D) Puesto que todo lo anterior es cierto para cada par $(x, y) \in P^2$, la colección $\{B_\delta(x, y) : (x, y) \in P^2\}$ es una cobertura de P^2 .

Puesto que P^2 es compacto, se sigue que existe una subcobertura finita, esto es, una colección finita

$\{B_\delta(x_\ell, y_\ell) : (x_\ell, y_\ell) \in P^2, 1 \leq \ell \leq r\}$ tal que para todo $(p, q) \in P^2$, $(p, q) \in B_\delta(x_\ell, y_\ell)$ para algún ℓ , $1 \leq \ell \leq r$.

E) Sea $N = \max \{N(x_\ell, y_\ell), s(\epsilon, x_\ell, y_\ell), 1 \leq \ell \leq r\}$. Se sigue entonces de A), B), C), que para cada $z > N$ y $(p, q) \in P^2$, $\sup_t |g_t^z(p) - g_t^z(q)| < \epsilon |p - q|$.

F) Sea ahora $\epsilon = \frac{1}{2}$ y considérese la siguiente modificación de la métrica producto en \bar{P} ,

$$d(p, q) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^{t/z} K} |p_t - q_t| \quad p, q \in \bar{P},$$

donde $K = \text{diam } P$ and $z > N$ está dado. Entonces,

$$d(G^z \circ \bar{h}^z(p), G^z \circ \bar{h}^z(q)) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^{t/z} K} |g_t^z(p_{t+z}) - g_t^z(q_{t+z})|$$

$$< \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^{t/z} K} \frac{1}{2^{z/z}} |p_{t+z} - q_{t+z}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^z \frac{1}{2^{k/z} K} |p_k - q_k| + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2^{t/z} K} |p_{t+z} - q_{t+z}| = d(p, q)$$

por lo que $H^z = G^z \circ \bar{h}^z$ es contractiva en $\{\bar{P}, d\}$.

Q.E.D.

Como ya hemos anunciado, probaremos ahora que H^z tiene un punto fijo y sólo uno. Para no repetir más subíndices de los que son necesarios, definiremos $F = H^z$.

Proposición IV. 3: Existe un punto $p \in \bar{P}$ y solo uno tal que $F(p) = p$.

Prueba: Definamos la función $f: \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$ como,

$$f(q) = d(q, F(q)) .$$

En primer lugar probaremos que f es continua. Considérese la secuencia

$$\{p^n\}_{n=1}^{\infty}, p^n \in \bar{P} \forall n > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = p^0 \in \bar{P} .$$

Entonces,

$$f(p^n) = d(p^n, F(p^n)), \quad n = 1, 2, \dots$$

y utilizando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} |f(p^n) - f(p^0)| &= |d(p^n, F(p^n)) - d(p^0, F(p^0))| \\ &\leq |d(p^n, F(p^n)) + d(F(p^0), F(p^n)) - d(p^0, F(p^0))| \\ &\leq |d(p^n, p^0) + d(p^0, F(p^0)) + d(F(p^0), F(p^n)) - d(p^0, F(p^0))| \\ &= |d(p^n, p^0) + d(F(p^0), F(p^n))| . \end{aligned}$$

Ahora bien, en virtud de nuestros supuestos $d(p^n, p^0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y dado que al ser F contractiva es también continua, $d(F(p^0), F(p^n)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Así pues,

$$|f(p^n) - f(p^0)| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

y por tanto, f es continua.

Por el teorema de Tychonoff (Kelley, 1.955, pagina 143), siendo el producto de conjuntos compactos, \bar{P} es compacto en la topología del producto.

Por tanto, existe $p \in \bar{P}$ tal que,

$$\mathcal{V} = f(p) = \inf \{f(q) : q \in \bar{P}\}$$

Notese que $f(p) = d(p, F(p))$, por lo que tenemos que probar que $\mathcal{V} = 0$.

Buscando la contradicción, supongamos que $\mathcal{V} > 0$. Entonces, puesto que $p, F(p) \in \bar{P}$ y F es contractiva en $\{\bar{P}, d\}$,

$$d(F(p), F[F(p)]) < d(p, F(p))$$

lo que es una contradicción, puesto que p es el punto de \bar{P} en el que $f(p)$ alcanza su infimo. Sólo nos resta probar que p es único.

Supongamos que existiera también un $q \in \bar{P}$, $q \neq p$, tal que $F(q) = q$.

De nuevo, dado que F es contractiva,

$$d(F(p), F(q)) < d(p, q) .$$

Sin embargo, en virtud de nuestros supuestos,

$$d(F(p), F(q)) = d(p, q) .$$

Esta contradicción concluye la prueba.

Q.E.D.

Finalmente, probaré que el único punto fijo de $F \equiv H^Z$ lo es también de H .

Proposición IV.4: $p \in \bar{P}$ es un punto fijo de H si y sólo si es también un punto fijo de H^Z .

Prueba: Supongamos que $H^Z(p) = p$. Se sigue entonces que $H \circ H^Z(p) = H(p)$ y, por lo tanto, también que,

$$H^Z \circ H(p) = H^{Z+1}(p) = H \circ H^Z(p) = H(p) ,$$

lo que prueba que $H(p)$ es también un punto fijo de H^Z . Sin embargo, puesto que el punto fijo de H^Z es único (Proposición IV.3.), tiene que ser cierto que $H(p) = p$, por lo que p es también un punto fijo de H .

Además, p es el único punto fijo de H , pues si existiera $q \in \bar{P}$ tal que $H(q) = q$, entonces $H^Z(q) = H[H(q)] = H(q) = q$ y consecuentemente, por inducción, $H^Z(q) = q$ lo que implica que $q = p$.

Q.E.D.

Lo que prueban éstas tres últimas proposiciones es que bajo las condiciones de regularidad establecidas en la Proposición IV.2. la aplicación $H \equiv G \circ h$ co

respondiente a nuestra economía general tiene un punto fijo y sólo uno. Por su puesto, lo que esto implica en conjunción con la Proposición IV.1 es que existe un equilibrio con PP para la economía y solo uno. Recogemos éste hecho en el siguiente corolario.

Corolario IV.I: Sean $g_t : P \rightarrow P$, $t = 1, 2, \dots$ las funciones de ET correspondientes a cada período de desarrollo de la economía y supongamos que,

- a) $\lim_n \sup_t |g_t^n(x) - g_t^n(y)| = 0 \quad x, y \in P.$
- b) La colección $\{g_t^n\}_{t=1}^{\infty}$ es conjuntamente m -equicontinua, donde para todo $t \geq 1$, $g_t^n(x) = g \circ g_t^{n-1}(x)$, $g_t^0(x) = x$.

En estas condiciones el modelo general de la Parte II tiene un equilibrio con PP y sólo uno.

Prueba: Se sigue directamente de las Proposiciones IV.1, 2, 3, y 4.

Q.E.D.

Es obvio que el equilibrio con PP que hemos obtenido es una secuencia auto-consistente de equilibrios temporales. Debería ser claro también, que no está formado por la secuencia de los puntos fijos de las funciones de ET en cada período.

Forzoso es reconocer que las condiciones que incorpora el corolario anterior, están formuladas en términos muy generales y quizá son también de difícil comprobación en la práctica. Así pues, parece interesante buscar condiciones suficientes para ellas que puedan formularse en términos de uso más común en la literatura económica.

Sería afortunado que ésto sirviese también al lector como un recordatorio de que no hemos perdido de vista completamente el problema que justifica todo éste trabajo, esto es, el estudio de las implicaciones para la unicidad del equilibrio con PP de la idea de que el futuro lejano no debería importar demasiado para el equilibrio que se obtiene en cualquier periodo dado. Con éstos objetivos, presentamos las proposiciones siguientes.

Proposición IV.5: Supongamos que para $t = 1, 2, \dots$ la aplicación de ET $g_t : P \rightarrow P$ es una función contractiva y que se cumple la condición a) del Corolario IV. 1. En éste caso, existe un equilibrio con PP y sólo uno.

Prueba: Es claro que ésta proposición se sigue tan pronto como probemos que la familia $\left\{ g_t^n \right\}_{t=1}^{\infty}$ es conjuntamente m-equicontinua. Sea dado $\xi > 0$ y tomemos $\delta = \xi$. Entonces, si $x, y \in P$ son tales que

$$|x - y| < \delta, \text{ se sigue,}$$

$$|g_t(x) - g_t(y)| < |x - y| < \delta = \xi, \quad t = 1, 2, \dots$$

puesto que para todo $t \geq 1$, g_t es contractiva. Además para cualquier $n > 1$ y $t = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} |g_t^n(x) - g_t^n(y)| &= |g_t \circ g_t^{n-1}(x) - g_t \circ g_t^{n-1}(y)| < \\ < |g_t^{n-1}(x) - g_t^{n-1}(y)| &= < \dots < |x - y| < \delta = \xi \end{aligned}$$

lo que prueba que $\left\{ g_t^n \right\}_{t=1}^{\infty}$ constituye una familia conjuntamente m-equicontinua.

Q.E.D.

Proposición IV.6: Supongamos que para $t = 1, 2, \dots$ la aplicación de ET $g_t : P \rightarrow P$ es una contracción con constante $\lambda_t \in (0, 1)$. Supongamos además que la secuencia $\left\{ \lambda_t \right\}_{t=1}^{\infty}$ está acotada por debajo de 1, ésto es, existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda_t \leq \alpha < 1$ para todo $t \geq 1$. En este caso existe un equilibrio con PP y sólo uno.

Prueba: Puesto que cualquier contracción es también una función contractiva, en virtud de la Proposición IV.5 es suficiente probar que

$$\lim_n \sup_t |g_t^n(x) - g_t^n(y)| = 0, \quad x, y \in P.$$

Ahora bien,

$$\lim_n \sup_t |g_t^n(x) - g_t^n(y)| \leq \lim_n \sup_t \{\lambda_t^n |x - y|\} \leq \lim_n \alpha^n |x - y| = 0$$

lo que prueba que se cumple la condición a) del Corolario IV.1.

Q.E.D.

Estas proposiciones completan nuestro estudio de la economía general.

V. SOBRE CONDICIONES ECONOMICAS DE REGULARIDAD.

No es mi intención presentar aquí un análisis completo de las estructuras económicas que satisfarían nuestras condiciones de regularidad. Sin embargo, parece importante ofrecer algunas ideas sobre el tipo de comportamiento económico que corresponde a las economías regulares que hemos definido anteriormente. En éste sentido, nos proponemos hacer dos cosas. En primer lugar, presentaremos una condición suficiente para que la economía sea regular en el sentido de la Definición III.1. Después, discutiremos una condición económica que implica que la función de ET es una contracción del espacio de precios, circunstancia ésta muy relacionada con la regularidad de la economía. Sorprendentemente, ninguna condición implica la otra. Lo que se pretende es que éstos dos resultados sirvan para sugerir al lector el tipo de restricciones que generan regularidad en la economía.

En ésta parte, me restringiré al caso estacionario y puesto que el único problema adicional que se plantearía es notacional, considerará que cada generación se compone únicamente de un individuo.

Tendremos que entrar en el estudio de las propiedades estáticas de nuestro modelo y éste es el tema que nos ocupará en primer lugar.

A partir del problema de maximización del agente joven en cualquier periodo t , obtenemos como condiciones necesarias.

$$(11) \left. \begin{aligned} \frac{U_1(c_{t1}, c_{t2})}{U_2(c_{t1}, c_{t2})} &= \frac{p_{t+1}}{p_t} \\ \frac{p_{t+1}}{p_t} w_1 + w_2 - \frac{p_{t+1}}{p_t} c_{t1} - c_{t2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde $U_1(\cdot, \cdot)$ y $U_2(\cdot, \cdot)$ son las derivadas parciales de la función de utilidad con respecto a su primer y segundo componente respectivamente. Sea

$$R_t = \frac{p_{t+1}}{p_t} \text{ . Diferenciando totalmente,}$$

$$\frac{U_{11} U_2 - U_{21} U_1}{U_2^2} d c_{t1} + \frac{U_{12} U_2 - U_{22} U_1}{U_2^2} d c_{t2} - d R_t = 0$$

$$R_t dw_1 + w_1 d R_t + dw_2 - R_t d c_{t1} d R_t - d c_{t2} = 0$$

a partir de lo cual, siendo f'_1 y f'_2 las derivadas de las funciones de demanda del bien en los periodos t y $t+1$ con respecto a R_t , obtenemos la siguiente ecuación matricial,

$$(12) \begin{bmatrix} \frac{U_{11} U_2 - U_{21} U_1}{U_2^2} & \frac{U_{12} U_2 - U_{22} U_1}{U_2^2} \\ -R_t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ f_1 - w_1 \end{bmatrix}$$

Si suponemos que c_{t1} y c_{t2} son bienes normales, es fácil probar que $U_2 U_{11} - U_1 U_{21} < 0$ y que $U_2 U_{12} - U_1 U_{22} > 0$, con lo que, llamando D al determinante en la parte izquierda de (12), obtenemos,

$$D = \frac{U_{11} U_2 - U_{21} U_1}{U_2^2} + R_t \frac{U_{12} U_2 - U_{22} U_1}{U_2^2} > 0 \text{ .}$$

Por consiguiente, podemos resolver (f'_1, f'_2) y,

$$f'_1 = \frac{-1 - \left[(f_1 - w_1) \frac{U_{12} U_2 - U_{22} U_1}{U_2^2} \right]}{D}$$

$$f'_2 = \frac{R_t + (f_1 - w_1) \frac{U_{11} U_2 - U_{21} U_1}{U_2^2}}{D}$$

Puesto que $(f_1 - w_1) < 0$ en cualquier equilibrio con PP, es inmediato - que $f'_2 > 0$, lo que será importante en el futuro.

Nótese que para nuestros objetivos actuales, podemos expresar la ecuación (3) como sigue,

$$(13) \quad \left[f_2 (p_{t-1}^{-1} \cdot p_t) - w_2 \right] + \left[f_1 (p_t^{-1} \cdot p_{t+1}) - w_1 \right] = 0$$

y que la función de ET, $g : P \rightarrow P$, que describe la evolución de equilibrio de la economía es la solución, para cada p_{t+1} , de la ecuación anterior. Ahora bien, la elección que maximiza la utilidad del agente viejo satisface

$$f_2 (p_{t-1}^{-1} \cdot p_t) - w_2 = p_t M$$

lo que expresa que ofrece todo el dinero que tiene inelásticamente a cualquier precio no negativo p_t . Por lo tanto, podemos reescribir (13) como

$$(14) \quad p_t M = w_1 - f_1 (p_t^{-1} \cdot p_{t+1})$$

En virtud de (11), $f_1 (p_t^{-1} \cdot p_{t+1}) = w_1 + \left[w_2 - f_2 (p_t^{-1} \cdot p_{t+1}) \right] \frac{p_t}{p_{t+1}}$,

por lo que, sustituyendo en (14),

$$(15) \quad p_{t+1} M = f_2 (p_t^{-1} \cdot p_{t+1}) - w_2$$

Sea $T(p_{t+1}) \equiv p_{t+1} M - f_2 \left[\frac{p_{t+1}}{g(p_{t+1})} \right] + w_2$. Diferenciando,

$$M - \left[\frac{g(p_{t+1}) - p_{t+1} g'(p_{t+1})}{(g(p_{t+1}))^2} \right] \cdot f'_2 \left[\frac{p_{t+1}}{g(p_{t+1})} \right] = 0,$$

ésto es,

$$g' = \frac{f'_2 g - g^2 M}{p_{t+1} f'_2} = \frac{p_t}{p_{t+1}} - \frac{p_t^2 M}{p_{t+1} f'_2}$$

donde hemos suprimido los argumentos de las funciones.

Utilizando (14),

$$g' = \frac{p_t}{p_{t+1}} \left[1 - \frac{w_1 - f_1}{f'_2} \right]$$

Podemos presentar ahora nuestra primera proposición.

Proposición V.1: Supongamos que c_{t1} y c_{t2} son Sustitutos Brutos (Gross Substitutes) para todo $t \geq 1$. En tal caso, la economía es regular en el sentido de la Definición III.1.

Prueba: Puesto que la función de ET, g , es continua en P , el cual es compacto, existe por lo menos un $p_{t+1} \in P$ tal que $p_{t+1} = g(p_{t+1})$. Por otra parte,

$$g' = \frac{p_t}{p_{t+1}} \left[1 - \frac{w_1 - f_1}{f'_2} \right]$$

Utilizando la segunda ecuación en (12),

$$-R_t f'_1 - f'_2 = f_1 - w_1$$

por lo que,



$$\frac{R_t f'_1}{f'_2} + 1 = \frac{w_1 - f_1}{f'_2}$$

o bien,

$$1 - \frac{w_1 - f_1}{f'_2} = - \frac{R_t f'_1}{f'_2}$$

Así pues,

$$g' = \frac{p_t}{p_{t+1}} \left[- \frac{R_t f'_1}{f'_2} \right] = - \frac{f'_1}{f'_2}$$

Por definición, c_{t1} y c_{t2} son Sustitutos Brutos en cualquier periodo $t \geq 1$, si $f'_1 < 0$. En consecuencia, dado que $f'_2 > 0$, se sigue que sustituibilidad bruta implica que $g' > 0$. Además, en los puntos fijos de g , $p_t = g(p_{t+1}) = p_{t+1}$, con lo cual,

$$g' \left| \begin{array}{l} p_t = p_{t+1} \end{array} \right. = 1 - \frac{w_1 - f_1}{f'_2}$$

y puesto que $w_1 - f_1 > 0$ en cualquier equilibrio con PP, se sigue que

$g' \left| \begin{array}{l} p_t = p_{t+1} \end{array} \right. < 1$. Es ahora inmediato que el punto fijo de g cuya

existencia se probó al comienzo de la prueba es único. Llamémoslo p^* .

Escojamos cualquier $p_{t+1}^1 > p^*$ y consideremos la secuencia $\left\{ p_{t+1}^n \right\}_{n=0}^{\infty}$,

formada como sigue,

$$p_{t+1}^0 = p_{t+1}^1, \quad p_{t+1}^n = g(p_{t+1}^{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots$$

Quiero probar que la secuencia $\left\{ p_{t+1}^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ decrece monótonicamente. Para ello, afirmo que $p_{t+1}^1 < p_{t+1}^0$. Supongamos lo contrario, es decir que

$p_{t+1}^1 \geq p_{t+1}^0$, Por hipótesis no puede existir igualdad, por lo que

$p_{t+1}^1 > p_{t+1}^0$. Pero esto implica que $p_{t+1}^1 = g(p_{t+1}^0) > p_{t+1}^0$, es decir, que la función de ET va por encima de la línea de 45° a la derecha de p^* , lo que no puede ser. Así pues, $p_{t+1}^1 < p_{t+1}^0$ y se sigue por inducción que $p_{t+1}^n < p_{t+1}^{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$. Puesto que es monotónicamente decreciente, la secuencia $\left\{ p_{t+1}^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ converge a la mayor de sus cotas inferiores, p^* .

Nótese que por construcción, dado cualquier p_{t+1}^0 en el intervalo $[p^*, W/M]$ (recuérdese que $P = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq W/M, \alpha > 0\}$), $\left\{ p_{t+1}^n \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ g^n(p_{t+1}^0) \right\}_{n=1}^{\infty}$ por lo que lo que hemos probado es que la secuencia de funciones $\left\{ g^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en $[p^*, W/M]$ a la función constante $f(x) = p^*$ y que $g^n(p_{t+1}^0) < g^{n-1}(p_{t+1}^0)$ para cualquier $p_{t+1}^0 \in [p^*, W/M]$, $n = 1, 2, \dots$.

Así pues, podemos utilizar el teorema de Dini (Rudin, 1.976, pag. 150) para concluir que la convergencia de $\left\{ g^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ a f es uniforme en $[p^*, W/M]$. El mismo argumento, aplicado a $[\alpha, p^*]$, nos llevaría al mismo resultado, con lo que no es difícil concluir que la secuencia $\left\{ g^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en P a la función constante $f(x) = p^*$.

Se sigue inmediatamente que se cumple a) en la Definición III.1. y también b), para cualquier entorno del punto fijo p^* .

Q.E.D.

Una vez cumplida la primera parte de nuestro compromiso, vayamos a la segunda. Definamos $U(c_{t1}, c_{t2}) = \frac{U_2(c_{t1}, c_{t2})}{U_1(c_{t1}, c_{t2})}$. Notese que se sigue de (11) que en cualquier equilibrio con PP, $V(\dots) = \frac{1}{R_t}$. También, bajo nues-

tro supuesto de normalidad,

$$V_1 (\cdot, \cdot) = \frac{U_{21} U_1 - U_{11} U_2}{U_1^2} > 0; \quad V_2 (\cdot, \cdot) = \frac{U_{22} U_1 - U_{12} U_2}{U_1^2} < 0.$$

Podemos probar ahora lo siguiente.

Proposición V.2: Supongamos que existe $a \in (0,1)$ tal que $|V + (f_2 - w_2) V_2| \leq 1 - a$ para todo $p_{t+1} \in P$. En éste caso $g : P \rightarrow P$ es una contracción en P .

Prueba: De la ecuación (16),

$$g' = \frac{f'_1}{f'_2}$$

Ahora bien

$$f'_1 = - \frac{1 + \left[(f_1 - w_1) \frac{U_2 U_{12} - U_{22} U_1}{U_2^2} \right]}{D}$$

$$= - \frac{\frac{U_2^2}{U_1^2} + \left[(f_1 - w_1) \frac{U_2 U_{12} - U_{22} U_1}{U_1^2} \right]}{\frac{DU_2^2}{U_1^2}}$$

de la cual usando (11),

$$(17) \quad = - \frac{V^2 + V(w_2 - f_2) V_2}{\frac{DU_2^2}{U_1^2}}$$

Por otra parte

$$f'_2 = \frac{(f_1 - w_1) \frac{U_{11} U_2 - U_{21} U_1}{U_2^2} + R_t}{D}$$

$$(18) \quad = \frac{(f_1 - w_1) \frac{U_{11} U_2 - U_{21} U_1}{U_1^2} + R_t \frac{U_2^2}{U_1^2}}{\frac{DU_2^2}{U_1^2}} = \frac{V - (f_1 - w_1) V_1}{\frac{DU_2^2}{U_1^2}}$$

De aquí, se sigue de (17) y (18) que,

$$g' = - \frac{V (w_2 - f_2) V_2 - V^2}{V - (f_1 - w_1) V_1} = - \frac{V (w_2 - f_2) V_2 - V^2}{V - V (w_2 - f_2) V_1}$$

$$= - \frac{(w_2 - f_2) V_2 - V}{1 - (w_2 - f_2) V_1} = \frac{V + (f_2 - w_2) V_2}{1 + (f_2 - w_2) V_1}$$

lo que implica que $|g'| \leq 1 - a$. Sean $p_1, p_2 \in P$.

Se sigue entonces de la desigualdad del valor medio que,

$$|g(p_1) - g(p_2)| \leq \sup_{p \in P} |g'(p)| |p_1 - p_2| \leq (1-a) |p_1 - p_2|$$

por lo que la aplicación de ET es una función contracción con constante $(1-a)$.

Q.E.D.

¿Como debemos interpretar la condición necesaria para obtener éste resultado?. Notese que $(f_2 - w_2)$ es el exceso de demanda de consumo en el segundo periodo por parte del agente joven de cualquier periodo. Así pues, lo que nuestra

condición de hecho requiere es que tal exceso de demanda no sea demasiado sensible a la tasa de rendimiento. El exceso de demanda en el segundo periodo no debe cambiar demasiado cuando varia la tasa de rendimiento del dinero.

Finalmente, tenemos que probar que son independientes las condiciones de las proposiciones V.1 y V.2. Sin embargo, esto se deduce facilmente de la proposición siguiente.

Proposición V.3: En cualquier periodo $t \geq 1$, c_{t1} y c_{t2} son Sustitutos Brutos si y solo si $V + (f_2 - w_2) V_2 \geq 0$.

Prueba: Por definición, c_{t1} y c_{t2} son Sustitutos Brutos si $f'_1 < 0$.

Por (17),

$$f'_1 = - \frac{V^2 + V (w_2 - f_2) V_2}{\frac{DU_2^2}{U_1^2}} = \frac{V [(w_2 - f_2) V_2 - V]}{\frac{DU_2^2}{U_1^2}}$$

donde debe notarse que tanto V como $\frac{DU_2^2}{U_1^2}$ son positivos.

Asi pues, c_{t1} y c_{t2} son Sustitutos Brutos si y solo si $(w_2 - f_2) V_2 - V < 0$,

esto es si y sólo si $V + (f_2 - w_2) V_2 \geq 0$.

Q.E.D.

Es conveniente resaltar que lo que ésta proposición indica realmente es que sustituibilidad bruta no es una condición necesaria para la unicidad del equilibrio con PP.

IV. RESUMEN, EXTENSIONES Y COMENTARIOS

En modelos monetarios dinámicos las acciones dependen de las ideas acerca del futuro. A partir de éste hecho, las páginas anteriores exploraron las consecuencias de suponer que la relevancia de tales ideas para el equilibrio en cualquier periodo dado, disminuye a medida que el periodo al que se refieren se hace más y más lejano. Hemos probado que bajo éste tipo de regularidad, el equilibrio con PP que surge de nuestro modelo es único. Hemos discutido tanto el caso estacionario como el no estacionario. En el camino, descubrimos la utilidad de hacer cambios en la métrica de ciertos espacios dejando invariante su topología. Esto nos permitió dar más estructura a las funciones utilizadas de la que hubieran tenido en otro caso. Es de esperar que esta técnica encuentre mayor aplicación en otros campos.

Como se ha visto, la imposición de la condición de regularidad produjo resultados que son "regulares" en más de un sentido. Así, el equilibrio con PP de la economía estacionaria se reveló como estacionario, mientras que en la economía regular no estacionaria, el equilibrio con PP que obtuvimos no es, en general, estacionario. De hecho, todo esto es como debe ser. Es difícil encontrar sensatez en un modelo que incluso cuando estacionario, es compatible con todo tipo de sendas de precios correspondientes a equilibrios con PP. En particular, si tal fuera el caso sería absolutamente imposible incluso intentar el análisis en términos de bienestar de los efectos de políticas fiscales y monetarias alternativas. No se sabría ni siquiera de qué equilibrio partió el modelo. Una de las principales ventajas de nuestra condición de regularidad es la estrecha relación que establece entre la estructura física del modelo y el equilibrio con PP que resulta de la interacción de los diferentes agentes económicos en el seno de aquella estructura.

Sin embargo, estos aspectos positivos de los resultados que hemos alcanzado

no deberían oscurecer el hecho de que hemos restringido el modelo en varios aspectos, de forma que este no permite la completa generalidad que solemos dar por supuesta cuando nos enfrentamos con versiones del modelo de equilibrio general estático de Arrow-Debreu. Me propongo discutir ahora cada uno de los su puestos restrictivos utilizados al tiempo que sugeriré posibles caminos de generalización.

En primer lugar, nuestro modelo tiene un solo bien en cada uno de los perio dos de evolución de la economía. Aunque hoy por hoy la literatura no documenta ningún contraejemplo a las proposiciones derivadas bajo este supuesto, ceteris paribus por supuesto, parece cierto que el negar a los agentes posibilidades de sustitución entre bienes en cada periodo, necesariamente ha de reducir la generalidad de nuestro análisis. Sin embargo, la introducción de varios bienes en cada período, unida a la pluralidad de agentes que hemos considerado, plantea un nuevo campo de dificultades, tanto conceptuales como analíticas, que parece muy difícil resolver. De hecho, todavía no existe en la literatura una prueba general de la existencia de equilibrio monetario en un modelo con gene raciones sucesivas que incorpore una pluralidad tanto de agentes como de bienes en cada periodo. El primer intento de análisis general de un modelo de este tipo fué realizado por Okuno y Zilcha, 1.978, quienes probaron la existencia de un equilibrio competitivo, aunque no pudieron concluir que tal equilibrio fuese monetario, en oposición a autárquico. Más tarde, Balasko y Shell, 1.979, desarrollaron un estudio muy general del caso de una economía monetaria con varios bienes en cada periodo, aunque su análisis utilizaba la simplificación del agente representativo. Así pues, este problema parece que todavía está abierto.

Aunque por sí misma la consideración de un solo bien en cada periodo puede no ser excesivamente restrictiva, se hace mucho más importante cuando se une con el supuesto de que cada agente en la economía vive únicamente por dos periodos. Y la razón es la siguiente. Balasko, Cass y Shell, 1.979, han desarro

llado un algoritmo para convertir economías de intercambio puro con generaciones sucesivas en las que los agentes viven por un número de períodos arbitrario y finito, en otras en las que el horizonte de vida se extiende a lo más por dos períodos. Es claro que lo que esto significa es que el supuesto de que los agentes viven dos períodos no es más que una conveniente simplificación que no restringe el análisis de ninguna forma. Naturalmente, la base del algoritmo es una reinterpretación tanto de los períodos como de los bienes. Básicamente, este método define nuevos "períodos" de tal forma que cualquier "período" comprende el horizonte vital completo del agente con la mayor longevidad de los nacidos en períodos correspondientes al "período" anterior. En particular, lo que esto significa es que cada "período" está constituido por varios períodos primitivos, con lo cual, incluso si el modelo original tenía únicamente un solo bien en cada período, cada uno de los nuevos "períodos" tendrá ahora varios bienes, tantos de hecho como el número de períodos que lo componen. Para simplificar, el considerar únicamente dos períodos de vida no es más que una simplificación - sin importancia sólo en tanto en cuanto nuestro modelo incluya varios bienes en cada período. De ahí la relevancia de generalizar nuestro modelo en esta dirección.

Para finalizar nuestros comentarios sobre generalizaciones del modelo quiero discutir ahora brevemente el que hayamos supuesto que las aplicaciones de ET son de hecho funciones en lugar de correspondencias. Como ya se ha dicho - anteriormente, el que para cada precio en el período siguiente exista una pluralidad de precios que puedan ser equilibrios temporales en este período, nos sitúa en una situación completamente incompatible con la existencia de un equilibrio con PP único. Así pues, el evitar la derrota a priori sería justificación suficiente para nuestro Supuesto 4, el cual generó la naturaleza funcional de las aplicaciones de ET. Hay más razones, sin embargo. Como mostró nuestro estudio en la Parte V, sustitubilidad bruta es una condición suficiente de regularidad en el caso estacionario y es fácil probar que la misma condición es también suficiente para que se cumpla el Supuesto 4. Así pues sucede

bajo sustituibilidad bruta, el que las aplicaciones de ET -
sigue directamente de las características del modelo sin ne-
puesto adicional. Este resultado puede verse desde otro punto
que, en el caso estacionario, para conseguir unicidad en nues-
co no se necesita nada más que un supuesto cuya suficiencia
pósito es conocida en el modelo estático de Arrow-Debreu. Pa-
sin embargo, esperar que este resultado no se generalizará a
estacionaria.

lo, lo expuesto en el párrafo anterior no disminuye la impor-
r un estudio paralelo al que incorpora esta investigación ,
cuenta plenamente, que en general, las aplicaciones de ET son
y no simplemente funciones. Quizas podría extenderse la defi-
contracción y función contractiva a la nueva situación y
algunos resultados en ése caso. Sin embargo, si como parece
os fijos de una correspondencia contracción/contractiva no -
r únicos, esto introduciría nuevas dificultades para cuya so-
rían métodos matemáticos diferentes. Es conocida la dificul-
le los conjuntos de puntos fijos de correspondencias, incluso
amiento es muy regular.

marco del modelo desarrollado en esta investigación, los re-
s sería más solidos si pudiera probarse que el único equili-
se obtiene bajo regularidad, es continuo con respecto a la -
que define la economía. La idea es que, con definiciones -
onomías similares deberían tener equilibrios similares. Esto
quisito de cualquier buen modelo economico. Pequeños cambios
quizas más importante, en la observación de la economía, no
drásticamente el equilibrio resultante. Igualmente, recordando
con PP no es más que una secuencia autoconsistente de equili

brios temporales, sería bueno estudiar las propiedades de convergencia de estos bajo diferentes conjuntos de condiciones. Por ejemplo, si las aplicaciones de ET convergen en algún sentido, ¿es cierto que también lo hace la secuencia de ET que constituye nuestro equilibrio con PP?. Tanto éste como el problema de continuidad antedicho, serán los objetivos de mi investigación futura.

Referencias

Balasko, Y. and Shell, K. (1979). The Overlapping-Generations Model, II: The Case of Pure Exchange with Money. CARESS, Philadelphia.

Black, F. (1974). Uniqueness of the Price Level in Monetary Growth Models with Rational Expectations, JET, 7.

Brock, W.A. and Scheinkman, J.A. (1980). Some Remarks on Monetary Policy in an Overlapping Generations Model, in Kareken, J.H., and Wallace, N. (eds.), Models of Monetary Economies, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Calvo, G. (1978). On the Indeterminacy of Interest Rates and Wages with Perfect Foresight, JET, 19.

Calvo, G. (1979). On Models of Money and Perfect Foresight, IER, 20.

Cass, D. and Shell, K. (1980). In Defense of a Basic Approach, in Kareken, J.H., and Wallace, N. (eds.), Models of Monetary Economies, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Debreu, G. (1970). Economies with a Finite Set of Equilibria, Econ., 38.

Dierker, E. (1977). Regular Economies: A Survey, in Intriligator, M.D. (ed.), Frontiers of Quantitative Economics, North-Holland, London.

Grandmont, J.M. (1977) Temporary General Equilibrium Theory, Econ., 45

Grandmont, J.M. and Laroque, G. (1973). Money in the Pure Consumption Loan Model, JET, 6.

Kelley, J.L. (1955) General Topology, Springer-Verlag, New York.

Lucas, R.E. (1970). Econometric Testing of the Natural Rate Hypothesis, in Eckstein, O. (ed.), The Econometrics of Price Determination, Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington.

Lucas, R.E. (1972). Expectations and the Neutrality of Money, JET, 4.

Millan, T. (1981) Existence of Optimal Competitive Equilibria in Overlapping-Generations Models, manuscript, University of Minnesota, Minneapolis.

Muth, J.F. (1961) Rational Expectations and the Theory of Price Movements, Econ., 40.

Okuno, M. and Zilcha, I. (1978). Existence of Competitive Equilibrium in a Generation-Overlapping Exchange Economy with Money. Foerder Institute for Economic Research, Tel-Aviv.

Okuno, M. and Zilcha, I. (1979) On the Efficiency of Competitive Equilibrium in Infinite Horizon Monetary Models. Foerder Institute for Economic Research, tel-Aviv.

Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, New York.

Sargent, T.J. (1972). Rational Expectations and the Term Structure of Interest Rates, JMCEB, 4.

Sargent, T.J. and Wallace, N. (1973). Rational Expectations and the Dynamics of Hyperinflation, IER, 14.

Shell, K. (1971) . Notes on the Economics of Infinity, JPE, 79.

Shiller, R.J. (1978). Rational Expectations and the Dynamic Structure of Macroeconomic Models, JME, 4.

Starr, R.M. (1974). The Price of Money in a Pure Exchange Monetary Economy with Taxation, Econ., 42.

Wallace, N. (1980). The Overlapping Generations Model of Fiat Money, in Kareken, J.H., and Wallace, N. (eds.), Models of Monetary Economies, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Wallace, N. (1980). A Hybrid Fiat-Commodity Monetary System, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Staff Report 61.

