UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística

TESIS DOCTORAL

Decisiones N-personales con opiniones difusas

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Francisco Javier Montero de Juan

DIRECTOR:

Sixto Ríos García

Madrid, 2015

Francisco Javier Montero de Juan

DECISIONES N-PERSONALES CON OPINIONES DIFUSAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

1983

Colección Tesis Doctorales. Nº 210/83

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1983
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-32317-1983

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Sección de Estadística e Investigación Operativa

"DECISIONES N-PERSONALES CON OPINIONES DIFUSAS"

F. Javier Montero de Juan

Memoria para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas,
realizada bajo la dirección del
Dr. D. Sixto Ríos García.

Madrid, Junio de 1982

PROLOGO

Prólogo

El descorazonador resultado de Arrow y sus variantes nos llevan a introducir otros planteamientos a un problema que aparentemente está cerrado si se ataca bajo los supuestos clásicos. En concreto, en esta memoria introduciremos un tratamiento dentro de la teoría de conjuntos difusos del problema de la decisión n-personal, sin tener en cuenta los factores propios de la teoría de juegos y equipos ni de las decisiones secuenciales. Atacaremos pues el problema estático -- sin posibles estrategias.

Las piezas fundamentales de la decisión de grupos son bien conocidas: el conjunto de alternativas, el conjunto decisor, las preferencias individuales y la función social. Supondremos que el primero está descrito exhaustivamente y de manera nítida (aunque, como dice -- Dacey,1979, la difusidad de las alternativas es a veces lo óptimo). Respecto al conjunto decisor, en general también se supondrá nítido, aunque se pesen cuando sea necesario sus opiniones (se deben medir - sus grados de afectación por el problema general y las alternativas concretas; no sería más que introducir sendos grados de pertenencia al conjunto decisor). Las preferencias, tanto individuales como del grupo, habrán de imponerse relaciones binarias difusas, cuyas propiedades generalizanalas de las relaciones nítidas (ver los trabajos de Zadeh, Orlovsky, Trillas, Azorín y Pardo).Aunque a nuestro entender algunas de tales propiedades se definen usualmente de modo excesivamente fuerte, que nos llevan a menudo a obtener propiedades no deseables. Por ejemplo, observamos una confusión grande acerca de la transitividad difusa, acerca de la cual se proponen multitud de alternativas (Dubois-Prade, 1980; Zadeh, 1971; Bezdek-Harris, 1978; Trillas, etc). Aunque muchas de ellas coincidan bajo la hipótesis de reciprocidad, es significativo que el grado de pertenencia a la relación difusa de par (x,x) sea introducido axiomáticamente, y ni siquiera de modo generalizado. Habrá que plantearse la cuestión de la necesidad de la hipótesis de reciprocidad, y la cuestión de cómo quedan - o de ben quedar - reflejadas las indiferencias difusas. Pero la transitividad no es más que un tipo de "racionalidad" que se les exige a los individuos y al grupo. Y algo perfectamente coherente con la filosofía de conjuntos sería la búsqueda de grados de racionalidad, para - luego poder exigir simplemente un mínimo.

La función social, que en general asocia a cada perfil de órdenes de preferencias difusas un orden de preferencias difusas para la sociedad, admite idéntica crítica respecto a su "racionalidad", pero - también se ha de cuestionar si esa ordenación es el objeto perseguido (el problema puede quedar resuelto simplemente con la existencia de una alternativa óptima, o alguna satisfaciente, sin más). Campbell, por ejemplo, distingue las funciones de preferencia (Arrow) de las - soluciones algorítmicas, en varias etapas, que sólo buscan acercarse a un "óptimo".

En el capítulo primero daremos un repaso a resultados clásicos, - siguiendo a Monjardet (1978) en la distinción inicial de los diferentes tipos de resultados, que agruparemos en tres líneas fundamenta-- les: las de Black, Arrow y Sen.

El capítulo segundo se dedica al problema de la racionalidad como propiedad difusa, la cual nos exigirá una elaboración coherente de la difusidad, a la que en general le asignaremos un origen ontológico -- (Azorín, 1981, estructura en cinco las formas fundamentaltes de originarse la difusidad). Se definirá la característica difusa (que no es el conjunto difuso clásico) y el espacio de características difusas, que no sólo generaliza a NowaKowska, sino que incluye, con variaciones no sustanciales, las funciones medibles y las variables difusas, conceptos que distinguimos para hablar en cada caso de difusidad comprehensiva y extensiva. Definimos también las relaciones de opinión - difusas (que tampoco son las de preferencia clásica), aportando definiciones coherentes de sus propiedades; en concreto se dará un giro - absoluto a las nociones de aciclidad y orden, al concebirlas no nítidamente, y se aplicarán los resultados a la conocida paradoja del azucar.

Los nuevos conceptos de relación binaria de opinión difusa y de aciclidad se aplicarán en el tercer capítulo al problema de la decisión de grupos, según dos metodologías:

- la axiomática, donde se obtienen teoremas de existencia bajo condiciones éticas.
- la multicriterio, donde por una parte se estudiarán las conexiones entre la racionalidad-aciclidad y el consenso-aceptación de la decisión; y por otra parte se generalizará el algoritmo de Siskos et al.

Por último, quiero agradecer al Profesor Sixto Ríos García la dirección de esta tesis, así como su ayuda constante.

Madrid, Junio de 1981

INDICE

CAPITULO I

RESULTADOS CLASICOS DE IMPOSIBILIDAD Y POSIBILIDAD

I.1.- La paradoja de Arrow

En su ya clásico libro "Social Choice and Individual values" (1951, y en edición corregida de 1964), Arrow se plantea la existencia de - un orden completo entre las alternativas que refleja las preferencias sociales, a partir de las preferencias de los individuos del grupo, - expresadas según órdenes completos. La idea era obtener una estructura "racional" (en el sentido concreto de orden completo) entre las alternativas a partir de individuos "racionales" (en idéntico sentido): ¿se derivará siempre, un orden completo social a partir de órdenes -- completos individuales?

La información de entrada (input) se supone que presenta en la forma de n relaciones binarias, una por cada decisión, y estas n relaciones son la única información utilizable. Arrow partirá pues de un conjunto $D = \{d, d_2 .. d_n\}$ de decisores, un conjunto $A = \{a_1 a_2 .. a_k\}$ y - alternativas, y un conjunto de relaciones binarias $\{R_1 R_2 .. R_n\}$,

$$R_i \subset A \times A \qquad \forall_i$$

La información de salida (output) será una nueva relación binaria social

$$R \subset A \times A$$

y a cada una de las n+1 relaciones binarias habrá que exigirles algunas propiedades que se consideren necesarias para que sean racionales en algún sentido.

He aquí algunas propiedades que podríamos exigir (Suppes, 1957, capítulo 10):

DEFINICION 1.1.- Sea $R \subset A \times A$ relación binaria definida en A.

Entonces se dirá que

i) R es reflexiva si y sólo si para todo $a \in A$ se tiene que - $a\,R\,a$: $(a,a) \in R$, $\forall a \in A$.

ii) R es simétrica si y sólo si para todo par $a,b \in A$ se cumple que si

$$a\,R\,b \Longrightarrow b\,R\,a$$

iii) R es antisimétrica si y sólo si dado $a,b \in A$ entonces

$$\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,a \end{matrix} \Longrightarrow a = b$$

iv) R es asimétrica si y sólo si

$$a\,R\,b \Longrightarrow b\,\overline{R}\,a$$

(notamos por $\overline{R}$ la negación de R, es decir :

$b\,\overline{R}\,a$ equivale a $(b,a) \notin R$).

v) R es transitiva si y sólo si

$$\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,c \end{matrix} \Longrightarrow a\,R\,c$$

vi) R es cuasitransitiva si y sólo si

$$\begin{matrix} a\,R\,b \wedge b\,\overline{R}\,a \\ b\,R\,b \wedge c\,\overline{R}\,b \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} a\,R\,c \\ c\,\overline{R}\,a \end{matrix}$$

vii) R es compositiva si y sólo si

$$\left.\begin{array}{l} a\ R\ b \\ a\ R\ c \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, d \text{ tal que } \left\{\begin{array}{l} b\ R\ d \\ c\ R\ d \end{array}\right.$$

viii) R es completa si y sólo si

$$a\ R\ b \vee b\ R\ a \qquad \forall\, a, B \in A$$

En principio nos movemos en el aspecto normativo de la decisión de grupo, no en el descriptivo : se trata de aproximar el aproximar el comportamiento de individuos "racionales" en algún sentido. Arrow definirá esta racionalidad como el establecimiento de lo que se conoce usualmente como un preorden completo u orden débil (relación binaria reflexiva, transitiva y completa). Exige así la existencia de n+1 relaciones tales que en n de ellas, a R_i b tiene el significado de "el individuo i considera que a es al menos tan buena como b.", dándoles a cada decisor a escoger una entre las siguientes opciones para cada par a,b de alternativas :

(1) i prefiere a estrictamente a b :

$$a\ P_i\ b \iff a\ R_i\ b \wedge b\ \bar{R}\ a$$

(2) i prefiere b estrictamente a a : b P_i a.

(3) i es indiferente entre a y b :

$$a\ I_i\ b \iff a\ R_i\ b \wedge b\ R_i\ a$$

(Es interesante señalar que mientras Arrow parte de las preferencias débiles para definir a partir de ellas la indiferencia y la preferencia estricta, otros autores como Fishburn (1973) toman como punto de origen la preferencia estricta; la causa de este cambio, sin ninguna trascendencia en la elaboración de la preferencia social, está en que parece más fácil determinar directamente, descriptivamente, hablando, las preferencias estrictas que las débiles).

En general se puede hablar de las Reglas de Decisión de Grupo -- (Sen, 1969) :

DEFINICION 1.2.- Una Regla de Decisión de grupo es una aplicación -- que hace corresponder a cada conjunto ordenado de n preferencias individuales (débiles) una y sólo una preferencia débil social.

(Obsérvese que no estamos todavía imponiendo ninguna restricción ética a priori a dichas relaciones binarias de preferencia).

Si el objetivo es entresacar la alternativa socialmente mejor, parece necesario dar las siguientes definiciones
(Pattanaik, 1971) :

DEFINICION 1.3.- Dado un subconjunto $S \subset A$ se define el conjunto de elección $C(S)$ - Choice Set - como

$$C(S) = \{x \in S \,//\, x R y , \ \forall y \in S\}$$

Es decir, el conjunto de alternativas en S tales que son al menos tan buenas como cualquiera de las demás alternativas en S.

DEFINICION 1.4.- Dado un subconjunto $S \subset A$, se define el conjunto maximal $M(S)$ como

$$M(S) = \{x \in S \,//\, y \bar{P} x , \ \forall y \in S\}$$

Es decir, que ningún elemento de $M(S)$ es preferido estrictamente por algún elemento de S. Y se demuestra entonces la siguiente propiedad:

PROPOSICION 1.1.- Sea R una relación binaria definida en A y un subconjunto S de A. Entonces $C(S) \subset M(S)$ y son idénticas cuando R completa sobre S.

Demostración : Supongamos un $x \in C(S)$ arbitrario. Por definición, tenemos que $x \in S$ y $x R y$ para todo $y \in S$, lo cual implica que $y \bar{P} x$, luego $x \in M(S)$. Por otra parte, si suponemos que R es completa en S, sea $x \in M(S)$; entonces tendremos que $y \bar{P} x$, $\forall y \in S$, pero por ser R completa esto implica que $x R y$, es decir, $x \in C(S)$.

Pero es claro que el Conjunto de Elección sólo da base para la decisión, caso de no ser vacío. Basta considerar el conjunto S formado por dos alternativas no comparables para ver que $M(S) = S \neq \emptyset$, y no sabremos sin embargo cómo escoger alguna de las dos (Pattanaik, 1971). Nos interesarán pues las siguientes definiciones:

DEFINICION 1.5.- Dado un subconjunto S de A, una función de elección social (S C F) definida sobre S es toda aplicación que define un conjunto de elección no vacío para cada subconjunto no vacío de S --- (Arrow, 1951).

Y aunque el conjunto de elección tenga más de una alternativa, -- cualquiera de éstas nos será válida, pues cualquiera de ellas es al menos tan buena como las demás.

DEFINICION 1.6.- Una Función de Decisión Social (S D F) es una regla de decisión de grupo tal que cualquier relación de preferencia social de su recorrido (imagen) genera una función de elección social en A.

Es evidente que si R no es reflexiva o no es completa en A, entonces no puede generar una función de elección social: si existe $x \in A$ tal que $x \bar{R} x$ es claro que $C(\{x\}) = \emptyset$; y si existen $x, y \in A$, $x \neq y$

tales que x $\bar{R}$ y y y $\bar{R}$ x, entonces de nuevo C({x,y}) = ∅. Sin em-- bargo, la reflexividad y la completitud no son suficientes para asegurar que R genere una S C F : baste considerar R reflexiva con --- (x P y y y P z y z P x), intransitiva en esta terna, para que -- C ({x,y,z}) = ∅. Volveremos más adelante sobre las condiciones de existencia de la S C F. Lo que sí importa hacer notar es que ha aparecido una condición de racionalidad distinta de las anteriores : la reflexividad, transitividad y completitud las propusimos primeramente como condiciones para que las preferencias queden expresadas "racionalmente".

El exigir que los conjuntos de elección sean no vacíos desde luego es una petición de racionalidad, pero en la línea de la utilidad: con la regla de decisión social se deben tomar decisiones dentro, -- claro está, de ese conjunto de elección social. Es decir, que así como antes hacíamos incapié en la racionalidad de los individuos y del grupo social; y cabe preguntarse también sobre la racionalidad de la regla en sí. Por ejemplo, parece razonable permitir que los individuos tengan libertad plena de opinión (que puedan escoger cualquiera de las relaciones de preferencia, que estamos suponiendo preordenes completos), y otras restricciones que más que de racionalidad serían cuestiones acerca de si la regla es éticamente aceptable o no (Luce-Raiffa, 1957 ; Pattanaik, 1971).

Así, por ejemplo, Arrow buscó condiciones para lo que llamo "funciones de bienestar social", caso concreto de S D F:

DEFINICION 1.7.- Una Función de Bienestar Social" (S W F) es una re-- gla (o proceso) tal que a un conjunto de n órdenes completos (uno,-

por individuo) asigna un orden completo, que refleja la preferencia social.

Hemos dado aquí el concepto de S W F en la línea de Arrow (1951). No corresponde exactamente a la que da Pattanaik (1971). De todas - formas, el término S W F (Social Welfare Function) fue propuesto -- por Bergson (1939,1948) y desarrollado primariamente por Samuelson (1947). La función de bienestar social de Bergson (o Samuelson) es - una función real que asigna un índice de bienestar social a cada estado de la naturaleza, y lo que presentamos en el capítulo III estará en parte en esta línea. La S W F de Arrow asigna ordenaciones. Es evidente que toda S W F de Bergson determina una única S W F de Arrow, pero no al revés.

Una vez establecido que lo que nos interesa, siguiendo a Arrow, -- son las S W F, procuró Arrow imponer a la regla algunas condiciones - éticas o de sensatez para las S W F; adoptando la notación de Arrow:

CONDICION 1' ("dominio no restringido" (*)): El dominio de la regla - de decisión social contiene a todas las combinaciones lógicas posi--- bles de preórdenes (órden débil) completos individuales.

CONDICION P ("Unanimidad Pareto") : Para cualquiera x, y $\in$ A se tiene que si $x \, P_i \, y$, $\forall i$, entonces $x \, P \, y$ (si x es preferido a y de manera - estricta y unánimemente, entonces la sociedad prefiere estrictamente x a y).

CONDICION 3.- ("Independencia de alternativas irrelevantes"): Sean R

(*) Usamos la terminología de Sen. Arrow no puso nombre especial a esta condición.

y R' las relaciones débiles de preferencia social correspondiente a $\{R_1 .. R_n\}$ y $\{R_1' .. R_n'\}$. Sea S un subconjunto de A y sean C(S) y - C'(S) los conjuntos de elección generados por R y R' respectivamente. Entonces, si

$$\begin{array}{c} x\ R_i\ y \iff x\ R_i'\ y \\ \forall\ x,y \in S,\ \forall i \end{array} \implies C(S) = C'(S)$$

(es decir, si los individuos no cambian las relaciones entre elem tos de S, los conjuntos de elección de S no varían).

CONDICION 5.- ("No dictadura"): No existe ningún individuo i tal que para cualesquiera $x,y \in A$ tal que $x\ P_i\ y$, entonces el grupo opina -- x P y, independientemente de las ordenaciones de los demás individuos.

El resultado es el conocido :

TEOREMA 1.1.(de Imposibilidad) : Si S tiene al menos tres alternativas y el grupo al menos dos individuos, las condiciones 1',P,3 y 5 - son incompatibles.

Demostración : Sen (1970 a); la de Arrow es muy oscura.

Se pueden imponer otras condiciones a las S W F, obteniendo otros teoremas de Imposibilidad. El expuesto corresponde al de Arrow (teoremas 2, pág. 97 de la edición de 1964). Por ejemplo, la

CONDICION 1 : En el conjunto A existe al menos un subconjunto S de - tres alternativas tal que para cualquier conjunto $T_1 \dots T_n$ de ordenaciones sobre S existe algún conjunto admisible $R_1 \dots R_n$ de ordena sobre A tal que $x\ R_i\ y$ si y sólo si $x\ T_i\ y$.

Esta condición viene a exigir la existencia de alguna tripleta --

"libre", entre las que admitamos cualquier ordenación; notas que la análoga condición 1' exige, no que exista al menos una, sino que todas las tripletas sean libres. Este punto es clave en la historia del Teorema de Imposibilidad, cuya primera versión (Arrow, 1951, capítulo 5) era incorrecta, como mostró Blau (1957). Más adelante detallaremos este asunto.

CONDICION 2.- (Asociación Positiva) : Sea R y R' las relaciones de preferencia sociales correspondientes a los conjuntos $\{R_1 \ldots R_n\}$ y $\{R_1' \ldots R_n\}$ de ordenaciones individuales, relacionados ambos de la siguiente forma : para a y b dos alternativas distintas de X

$$a\ R_i\ b \iff a\ R_i'\ b$$
$$x\ I_i\ b \implies x\ R_i'\ b$$
$$x\ P_i\ b \implies x\ P_i'\ b$$

Entonces, si x P y ==> x P' y, y si x I y ==> x R' y.

O sea, que si se hacen modificaciones en las preferencias individuales a favor de x, su situación en la estructura de preferencias social no empeora.

CONDICION 4.- (Soberanía Ciudadana) Para cualquiera $x,y \in A$ existe un conjunto de ordenaciones individuales para el cual x P y.

CONDICION A.- (Anonimato). Sean $\{R_1 .. R_n\}$ y $\{R_1' .. R_n'\}$ dos conjuntos de ordenaciones del dominio de una regla de decisión de grupo, a los que asigna las relaciones débiles de preferencia débil R y R', respectivamente. Se dice que existe anonimato si

$$R_j = R'_k$$
$$R_k = R'_j \qquad\qquad\qquad\qquad ==> R = R'$$
$$R_i = R'_i \qquad \forall\, i \neq j,k$$

<u>CONDICION N</u>.- (Neutralidad). Sean (x,y) y (z,w) dos parejas ordenadas de alternativas. Se dice que existe neutralidad si para todo individuo i

$$a\ R_i\ b \iff a\ R'_i\ b \qquad \forall\, a,b \neq x,y,z,w$$

y además

$$\left.\begin{array}{l} x\ R_i\ a \iff z\ R'_i\ a \\ a\ R_i\ x \iff a\ R'_i\ z \\ y\ R_i\ a \iff w\ R'_i\ a \\ a\ R_i\ y \iff a\ R_i\ w \end{array}\right. \qquad \forall\, a \neq x,y,z,w$$

y también

$$x\ R_i\ y \iff z\ R'_i\ w$$
$$y\ R_i\ x \iff w\ R'_i\ z$$

entonces se verifica

$$x\ R\ y \iff z\ R'w$$

Por tanto, mientras el anonimato exige que toda permutación entre las ordenaciones de los individuos deje R invariable, evitando cualquier discriminación entre los individuos, la neutralidad asegura que cualquier permutación entre las alternativas en las preferencias individuales produce idéntica permutación en la ordenación social, evitando cualquier discriminación entre las alternativas.

Ambas condiciones, así como la siguiente, se deben a May (1952).

Ésta nos dice que si originalmente x R y y se hacen modificaciones a favor de x, entonces x pasa a ser preferido a y :

CONDICION RP.- (Responsividad Positiva): Sea (x,y) par ordenado de alternativas. Supongamos que para todos a,b distintos de x es

$$a\ R_i\ b \iff a\ R_i'\ b \qquad \forall i$$
$$x\ P_i\ a \implies x\ P_i'\ a \qquad \forall i$$
$$x\ I\ a \implies x\ R_i'\ a \qquad \forall i$$

y que además existe i tal que

$$x\ I_i\ y \quad \wedge \quad x\ P_i'\ y$$

o bien $y\ P_i\ x \quad \wedge \quad x\ R_i'\ y$

Entonces $x\ R\ y \implies x\ P\ y$

CONDICION 2'.- Si la regla de decisión de grupo da x P y para ciertos x e y y cierto conjunto de ordenaciones individuales, y se modifican algunas de éstas a favor de x (relativo a y), sin modificar la relación entre ambas en las demás, entonces la regla sigue asignando x P Y (Murakami, 1961).

CONDICION 5'.- Entre todas las tripletas de alternativas, que satisfacen la condición 1, existe al menos una tal que ningún individuo es dictador respecto a dicha tripleta (Murakami, 1961).

El origen de estas dos últimas condiciones radica en el intento de Murakami de superar el fallo de Arrow en su primera edición sin modificar la condición 1. A la luz del contraejemplo que encontró Blau se verá claro el porqué de tal exigencia. La condición 2' sólo se interesa en las comparaciones entre x e y, mientras que la 2 de Arrow lo hace en todas las comparaciones en las que aparece x : en aquélla las -

modificaciones se hacen mejorando x relativamente a y; Arrow mejora la posición de x ante alguna alternativa, en general. Nadie que acepte la condición 2 rechazará la 2', aunque sea más fuerte. Análogamente con la condición 5' y la 5, la sustitución es muy razonable.

CONDICION L* : (Mínimo liberalismo) : Existen al menos dos individuos i,j tales que cada uno es decisivo sobre un par de alternativas : existen cuatro alternativas (tres de ellas distintas) tales que

$$x \; P_i \; y \implies x \; P \; y$$
$$y \; P_i \; x \implies y \; P \; x$$
$$z \; P_j \; w \implies z \; P \; w$$
$$w \; P_j \; z \implies w \; P \; z$$

CONDICION L** : Existen al menos dos individuos i,j y dos pares ordenados de alternativas distintas (x,y) y (z,w) tales que

$$x \; P_i \; y \implies x \; P \; y$$
$$z \; P_j \; w \implies z \; P \; w$$

con x,y,z,w todos distintos entre sí.

CONDICION L*** : Existen al menos dos individuos i,j y dos pares ordenados de alternativas distintas tales que

$$x \; P_i \; y \implies x \; P \; y$$
$$z \; P_j \; w \implies z \; P \; w$$

con $x \neq z$ e $y \neq w$.

CONDICION AUI : (Ausencia de Indiferencia Universal). El recorrido de la regla de decisión no está formado únicamente por la relación de preferencia que asigna indiferencia a cada par de alternativas --

(Hanson, 1969).

Las tres condiciones de liberalismo tratan de defender de algún modo valores "liberales" en el sentido de que toda persona sea libre de hacer lo que quiera en algo (L), que al menos haya dos individuos que lo puedan hacer (L*); estas dos dan libertad ante algún conjunto de dos alternativas, mientras que L** y L*** generalizan al caso de parejas ordenadas. Es fácil ver que L implica L*, que L** implica L*** y que L* implica L***.

Otras condiciones son variantes de la que hemos llamado Condición Pareto :

CONDICION WPC : (Criterio Débil Pareto) :

$$x \; P_i \; y \quad \forall i \implies x \; P \; y$$

$$x \; I_i \; y \quad \forall i \implies x \; I \; y$$

Arrow (1951) propuso que las condiciones 1,2,3,4 y 5 eran incompatibles para S W F, pero Blau (1957) demostró la invalidez de este resultado, construyendo una regla de decisión de grupo que es S W F y satisface las cinco condiciones. La clave de dicho contraejemplo está en que mientras la Condición 1 se refiere a una única tripeta, la condición 5 se establece en términos de todas las tripletas. Así puede existir un "dictador"que no lo es en el conjunto total, pero que lo sea en un subconjunto suyo. En concreto, puede existir una sola tripleta "libre", y un individuo que sea dictador sólo sobre esa tripleta. Un modo de arreglar el fallo es sustituir la condición 1 por la 1', y la filosofía negativa de Arrow se mantiene.

A partir de entonces se han elaborado multitud de Teoremas de Impo posibilidad. He aquí una pequeña relación para S W F :

TEOREMA 1.2. (Murakami, 1961) : 1,2',3,4 y 5' son incompatibles.

TEOREMA 1.3. (Arrow, 1964) : 1',3,5 y W P C son incompatibles.

TEOREMA 1.4 (Arrow, 1964) : 1,3,5' y W P C son incompatibles.

TEOREMA 1.5. (Arrow, 1964) : 1',2',3,4 y 5 son incompatibles

TEOREMA 1.6. (Arrow, 1964) : 1',2,3,4 y 5 son incompatibles.

TEOREMA 1.7. (Hanson, 1969) : N,A, AUI,1' y 3 son incompatibles.

TEOREMA 1.8. (Sen,1970 a): 1',A,N y RP son incompatibles.

TEOREMA 1.9. (Sen, 1070 b) : 1',P y L* son incompatibles.

TEOREMA 1.10. (Sen, 1970 a) : 1',P y L** son incompatibles.

TEOREMA 1.11. (Sen, 1970 a) : 1',P y L*** son incompatibles.

Naturalmente, estos resultados son válidos imponiendo la no trivialidad del problema : que el número de individuos sea al menos dos y el número de alternativas al menos tres.

Para ampliar el número de estos resultados de Imposibilidad, ver Fishburn (1973), Sen (1977) y sobre todo Kelly (1978).

Tenemos pues más o menos resuelta la respuesta negativa al problema de decisión de grupo, bajo un tratamiento del más puro enfoque de la lógica aristotélica. Habrá que buscar entonces respuestas positivas (teoremas de posibilidad y reglas de elección concretas), y parejo a ello irá una crítica a las condiciones que hacen posible los teoremas de Imposibilidad.

I.2.- Teoremas de Posibilidad

Los primeros intentos de resolver los problemas de elección en grupos o comités ("cualquier grupo de personas que toman una decisión mediante una votación", como lo define Black, 1958), son en gran medida pragmáticos, búsqueda de reglas de votación en el sentido no técnico. Así se deben destacar a Borda (1733-1799), Condorcet (1743-1794), Laplace (1749-1827), Nanson (1850-1936), Galton (1822-1911) y Dodgson (1832-1898), que no utilizan demasiado aparato matemático. Black, con "The Theory of Committees and Elections" (1958) lleva a cabo un magnífico resumen de esta línea. Pero una vez que es conocido el enfoque Arrowniano no parece razonable estudiar el problema de la votación sin referirse a él; así se pueden ver los trabajos de Jacobs (1979). Quizá el libro de Black hubiese tenido un esquema radicalmente distinto de incorporar los resultados de Arrow (1951); de esta ausencia se lamenta el propio Black, pero su obra sigue perteneciendo a los clásicos del tema, al resumir lo llevado a cabo hasta el primer cuarto de siglo.

Borda nota que la votación simple puede escoger una alternativa equivocada. Y pone más o menos el siguiente ejemplo : un grupo de 21 individuos con tres alternativas A,B,C, resulta que 8 de ellos tienen una estructura A > B > C, siete B > C > A y seis C > B > A; entonces la votación directa daría una mayoría simple a favor de la alternativa A, cuando es la solución menos preferida para trece de los 21 individuos. Borda propone un método de las marcas que no es más que una ponderación, grados de mérito : ordenándolos de peor a mejor, cada decisor da unos pesos a, a+b, a+2b, etc. Se suman las puntuaciones de todos los individuos, y la alternativa con mayor calificación sería - la escogida socialmente. Es trivial ver que el resultado es indepen-- diente de los valores a y b que se escojan. Así, en el ejemplo, A ten dría una puntuación (tomando a=b=1) de 37, mientras que B y C obten-- drían 49 y 40 respectivamente, con lo que B sería la acción elegida.

Condorcet propone varios métodos de elección. En su conocido Essai, terriblemente oscuro en estos aspectos, elabora un sistema relacionado con la teoría de la probabilidad. Cada elector tiene una probabili dad v ("verité") de dar con la decisión correcta, y una probabilidad e = 1-v ("erreur") de equivocarse (pensar por ejemplo el caso de de-- clarar a un acusado culpable o inocente; en la elección entre varios candidatos este planteamiento no es tan claro). Luego lleva a cabo u- na generalización a varias alternativas.

Lo que sí nos parece interesante es recalcar un factor psicológico que sugiere el tratamiento de Condorcet con otros posteriores basados en las funciones de bienestar social: en su planteamiento subyace la existencia de una "verdad" contra una "mentira", o de algo mejor fre- te a algo peor, socialmente hablando. Cada individuo busca honradamen te lo mejor "para todos", y tratando la información como variables es tadísticas, cada opinión podría suponerse como una muestra de una po- blación Bernouilli de parámetro p, donde es de esperar que p sea mayor que 0.5, para que sea cierto aquél convencimiento de que "la mayor -- parte de las veces, la mayoría de las personas no se equivoca". Sin - embargo, la utilización de las S W F -o cualquier otro sistema basado en filosofias hedonistas - lo que busca es "agradar", contestar, al - mayor número posible de gente, conseguir que el descontento social --

sea el mínimo posible. Se trataría de un razonamiento dentro de la línea subjetivista, frente al objetivismo del anterior.

Laplace siguió una idea parecida a la de Borda, que también admite estrategias de votación que pueden alterar gravemente la decisión. De ahí que Borda exigiese en alguna ocasión la honestidad (My scheme is only intended for honest men", traduce Black).

Dodgson, mas conocido como Lewis Carroll, tiene una serie de cartas y artículos realmente ingeniosos sobre el tema (ver la recopilación en Black, 1958).

Galton hace ya referencia a las curvas de preferencia unimodales -- ("single - peaked"), mejor analizadas por Black, Arrow y Fishburn :

<u>DEFINICION 1.10</u>. Una estructura de preferencia (A,D), con A un conjunto de alternativas y D una n-upla de órdenes parciales y completos, se dice que es unimodal si y sólo si existe un orden lineal en A tal que para cada $i \in \{1,2, .. n\}$ existen X_i, Y_i y Z_i disjuntos tales que

$$X_i \cup Y_i \cup Z_i = A$$

$$(a,b) \in (X_i \times Y_i) \cup (Y_i \times Z_i) \cup (X_i \times Z_i) \Rightarrow a < b$$

$$a,b \in X_i \text{ con } a < b \Longrightarrow b >_i a$$

$$a,b \in Y_i \Longrightarrow a \sim_i b$$

$$a,b \in Z_i \text{ con } b < a \Longrightarrow b >_i a$$

$$(a,b) \in (X_i \quad Z_i) \times Y_i \Longrightarrow b >_i a$$

$$a < b < c \text{ con } a \sim_i b \text{ y } b \sim_i z \Longrightarrow a \sim_i z$$

Esta complicada definición, formalizada por Fishburn (1973) a partir de Black, corresponde al caso en el que las alternativas se pueden ordenar de tal modo que las preferencias de todo individuo alcancen su máximo en una zona Y_i, y son menos preferidas cuanto más nos alejemos de esa zona, por cada lado.

Entonces Black demostró que :

TEOREMA 1.12. Si Todas las preferencias son unimodables, entonces existe un conjunto de alternativas tal que todo elemento de él se impone por mayoría simple a las alternativas fuera de dicho conjunto, y no se impone a las que están dentro.

Black propone que esa indiferencia se decida mediante un presidente ("chairman"). Es evidente que de este modo se está rechazando la hipótesis de Universalidad de Arrow.

LEMA.- Sea $D = (<_1, <_2 \ldots <_n)$ una n-upla de órdenes parciales estrictos sobre un conjunto finito y no vacio A. Entonces (A,D) es unimodal si y sólo si existe un orden lineal < en A tal que, para cada $i \in \{1, \ldots n\}$ existen unos únicos $a_i, b_i \in A$ con $a_i \leq b_i$ tales que

a) $x < y \leq a_i \implies y >_i x$

b) $a_i \leq x \leq b_i$, $a_i \leq y \leq b_i \implies x \sim_i y$

c) $b_i \leq y < x \implies y >_i x$

d) $(x < a_i$ ó $b_i < x)$, $a_i \leq y \leq b_i \implies y \geq_i x$

e) $x < y < z$, $x \sim_i y$, $y \sim_i z \implies x \sim_i z$

Demostración : Fishburn (1973).

TEOREMA 1.13.- Sea A finito y (A,D) unimodal, con < y los a_i y b_i como en el lema. Sea $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ una reordenación no decreciente ($c_i \leq c_{i+1}$) del conjunto formado por todos los a_i y los b_i. Entonces existe un conjunto no vacio de alternativas tales que ninguna alterna tiva de A se impone (estrictamente) a alguna de ellas por el método de la mayoría simple :

$$R(A,D) = \{x \in A \,/\, c_n \leq x \leq c_{n+1}\}$$

(Fishburn, 1973)

<u>COROLARIO</u>.- Sea A finito y (A,D) unimodal con $a_i = b_i$ para cada i. Supongamos la ordenación $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Entonces

$$R(A,D) = \{a_{(n+1)/2}\} \quad \text{si} \quad n \text{ es impar}$$

$$R(A,D) = \{x \,/\, a_{n/2} \leq x \leq a_{1+n/2}\} \quad \text{si } n \text{ es par}$$

(Black, 1958)

Tenemos así que suponiendo unas estructuras unimodales, la regla de la mayoría simple nos permite localizar una mejor estructura alternativa social, en este sentido concreto.

Más tratando de encontrar salidas al teorema de imposibilidad, aparte de criticar las condiciones de racionalidad impuestas - sobre lo que se ha escrito mucho - se puede pensar en funciones no del tipo S W F, sino S D F. En general sabemos que no toda S W F es S D F, pero dicha implicación se verifica cuando el conjunto de alternativas sea finito. Suponiendo esto, si buscamos alguna S D F, con las condiciones que sean, estaríamos ampliando el conjunto de posibilidades soluciones, y cabe entonces la posibilidad de resultados positivos :

<u>TEOREMA 1.14</u>. Hay una S D F que satisface las condiciones 1',P, 3 y 5 para cualquier conjunto finito A.

Lo que nos está garantizando la S D F es que alguna "mejor" alternativa estará presente en cada subconjunto de alternativas. Está claro que si la preferencia social R es orden débil completo, se asegura la existencia de una función de elección en A finito; rebajando, tenemos que es suficiente para ello que la relación binaria R sea reflexiva, completa y cuasitransitiva en A (Sen, 1969), pero la condición necesaria y suficiente es la de la aciclidad, para una R reflexiva y completa (Sen, 1970 a; Pattanaik, 1971), sobre un conjunto finito A. Es obvio que la transitividad es suficiente para A finito, pero no necesario : basta pensar, como propone Sen (1977) en el siguiente ejemplo :

$$x > y \succsim z \sim X$$

De especial interés son los estudios sobre reglas de la mayoría (MMD), que han sido exhaustivamente analizadas, llevando al estudio de las ventajas de que el número de decisores sea impar, y de la hipótesis de equiprobabilidad de ciclos, que nosotros desarrollaremos mediante difusos (De Meyer y Plott, 1970). Un camino sugerido para escapar del teorema de imposibilidad de Arrow, aparte de las manipulaciones en el dominio y codominio de la función de bienestar, es a través de la clausura transitiva R* de la MMD R (x R* y si y sólo si existen $x_1, x_2 \ldots x_n \in A$ tales que $x \; R \; x_1 \; Rx_2 \ldots x_n \; Ry$), y trabajando con el conjunto de elección de R*, de tal modo que se han eliminado los ciclos de preferencias estrictas, aunque su utilización es muy cuestionable en el contexto de S W F. La regla de la mayoría presenta problemas de transitividad (recordar además el clásico ejemplo de la división del pastel, haciendo al pobre más pobre).

TEOREMA 1.15.- Hay una S D F que satisface 1', P*, 3 y D* para cualquier conjunto finito A (Sen, 1970 a).

Y aunque 1', P sean incompatibles cuando A es infinito (Sen 1970 a), este resultado no parece de importancia práctica. Sin embargo, si imponemos alguna otra condición "deseable", como las siguientes de Sen:

* Propiedad α : $x \in S_1 \subset S_2 \implies C(S_2) \subset C(S_1)$
* Propiedad β : $x, y \in C(S_1)$ y $S_1 \subset S_2 \implies$
  $\implies x \in C(S_2) \iff y \in C(S_2)$

Entonces obtenemos otro resultado negativo : las condiciones 1',P, 3,5 y β son incompatibles en el contexto de las S D F, lo cual hace pensar en la necesidad de la propiedad β . Como en la condición β, ya hemos dicho que todas las condiciones han sido sometidas a una crítica profunda, con bibliografía muy extensa, tanto en contra como defendiendo cada una (en el sentido de que no son la causa del teorema de Imposibilidad) de las condiciones más conflictivas (sobre todo, la 1' y 3). En este sentido debe consultarse la bibliografía citada por Sen (1977), que por otra parte es un magnífico resumen del estado de la cuestión.

Destacamos dos teoremas de imposibilidad para S D F, debidos a Gibbard y a Mas - Colell y Sonnenschein :

TEOREMA 1.16.- Cualquier S D F que genere una ordenación R cuasitransitiva y satisfaga 1',3 y P es oligárquica.

Entendiendo por oligarquía la existencia de un único grupo de personas tal que si cualquiera de ellas prefiere x a y, estrictamente, entonces la sociedad debe considerar x al menos tan buena como y.

TEOREMA 1.17.- Toda S D F que genere una ordenación R cuasitransitiva satisfaciendo 1',3,P y RP debe ser dictatorial.

Por supuesto, siempre suponiendo el caso no trivial (card(A) $\geqslant$ 3, car (D) $\geqslant$ 2).

TEOREMA 1.18.- Sea una S D F satisfaciendo 1',3,P y RP con al menos cuatro alternativas. Entonces alguien tiene veto.

Sen (1977) utiliza dos criterios de clasificación de los problemas de agregación que nos ocupan : según se trate de agregar intereses individuales (I) o juicios individuales (J), y según que el objetivo sea llegar a decisiones (D) o juicios de bienestar (W), obteniendo de este modo cuatro categorías básicas (ID,JD, IW, JW). El caso W está ligado al de optimalidad, y la diferenciación I-J es normativa y filosóficamente muy importante.

Observamos también que la S D F parece de algún modo más tendente a la Decisión que la S W F; en concreto, Sen (1969) define la S D F como una regla relacional de elección colectiva ($R = f\{R_i\}$) que siempre genera una relación binaria R tal que un conjunto de elección es no vacio para todo $S \subset A$ no vacio. De lo anterior, sabemos que esto exige que R sea acíclica, completa y reflexiva. Cabe entonces elaborar una teoría con reglas funcionales de elección social $C(.)= f\{R_i\}$, que hemos llamado funciones de elección, que asigna un conjunto $C(S) \neq \emptyset$ a cada $S \subset A$ no vacio (definición 1.5.). Como ya hemos visto, dada una relación binaria R en A se define

$$C(S,R) = \{x \ / \ x \in S; \ x R y \ , \ \forall y \in S\}$$

Análogamente se puede definir una relación binaria R_c a partir de una regla funcional de elección :

$x \; R_c \; y \iff \exists \; S \subset X$ tal que $x \in C(S)$, $y \in S$

Herzberger (1973) toma la relación a partir de los pares, de tal modo que propone

DEFINICION 1.11.- Se dice que una función de elección es básicamente binaria si y sólo si

$$C(S) = C(S, \bar{R}_C) \qquad \forall \; S \neq \emptyset$$

donde $\bar{R}_C$ es la relación base definida de la forma $x \; \bar{R}_C \; y \iff$ $\iff x \in C(\{x,y\})$

TEOREMA 1.19.- Una función de elección social tiene su relación base $\bar{R}_C$ acíclica por tripletas si (condición suficiente) existe $x \in C(S)$ - tal que $x \in C \; x,y$, $\forall \; y \in S$.Así, la SCF son basicamente binarias .

Pero es evidente que todos los resultados negativos de las reglas relacionales se pueden aplicar a las funciones de elección basicamente binarias. Incluso se pueden trasladar a las funciones de elección sin exigir tal característica : lo que antes se refería a R, ahora - se dirá respecto $\bar{R}_C$, de tal modo que toda regla relacionada puede -- considerarse esencialmente funcional, tal que $\bar{R}_C = f(\{R_i\})$. En este sentido, los resultados relacionales (Arrow,p,e.) son más generales que los funcionales. Si definimos

CONDICION 3.-(Independencia) : Para f relacional, si $\forall x, y \in S \subset A$ - es

$$\left.\begin{array}{l} x \; R_i \; y \iff x \; R'_i \; y \\ x \; R_i \; x \iff y \; R'_i \; x \end{array}\right. \quad \forall i$$

entonces $f\{R_i\}$ y $f\{R_i'\}$ ordenan exactamente igual a S.

Seguimos obteniendo resultados negativos (Sen, 1977, recogiéndolo de Blair, Suzumura y Kelly; otros resultados se dan para obtener un dictador y el veto) :

TEOREMA 1.20.- Toda regla funcional de elección social con $\overline{R}_C$ cuasi-transitiva satisfaciendo 1',3' y P, es oligárquica.

Atendiendo a las categorías de los problemas de agregación,Sen para, entre otras, las siguientes conclusiones :

i) El tratamiento clásico, iniciado por Arrow, parece poco apropiado para la agregación de intereses (ID,IW), ya que las n-uplas de -- preferencias individuales son una información incompleta para el tratamiento del conflicto de intereses. Esto hace secundaria el problema de intransitividad de la preferencia social. Por otra parte, como bien dice Sen en el artículo antes citado, Arrow impone una serie de condiciones necesarias para que un mecanismo de elección social sea razonable, y nunca las propone como suficientes.

ii) En la agregación de JW se siguen obteniendo resultados negativos con los planteamientos clásicos, aún debilitando la transitividad a aciclidad o aciclidad en tripletas, al considerar básica en estos - problemas la relación binaria de preferencia social. Por otra parte, este caso tiene escaso interés filosófico. (Sen, 1977).

iii) Para el caso JD la situación es más favorable, pero incluso - bajo condiciones débiles de consistencia para funciones de elección - ("choice function, C(.), relación funcional que asigna un conjunto -- C(S) no vacío a todo $S \subset A$, tampoco vacío), llegamos a la existencia

251

CAPITULO II

ESTRUCTURAS DIFUSAS

de una relación base binaria (Sen, 1977) a la que serían aplicables teoremas de imposibilidad.

Todo lo cual nos debe empujar no hacia el estudio exhaustivo de las condiciones éticas, sino hacia las condiciones de racionalidad; en concreto, pensamos, debe cuestionarse la metodología usada : la lógica aristotélica.

Otros enfoques interesantes del problema de agregación de ordenaciones en nuestros contexto (sin estrategias, en un proceso unietápizo y estático) son los de Jacobs, Peleg, Opricovic , Gillet, Hoyer-Mayer, Fishburn-Gehrlein, etc, y junto con críticas a las condiciones que usualmente se imponen, pueden verse en la bibliografía (ver en concreto Sen, 1977). Destacamos como último esquema-resumen llegado a nuestras manos los artículos recogidos en el libro "Analyse et Agregation des Preferences" (Batteau et al., 1981), con una revisión de los métodos de agregación entre los que destacan los basados en técnicas multicriterio, el anánilis de rangos (cfr. Kendall) y en el análisis canónico (cfr. Guibaud).

II.I. Definiciones clásicas

Si nuestro punto de partida queremos que sea la información de los individuos dada en forma de una relación de preferencia difusa definida en el conjunto de las alternativas, debemos comenzar por analizar dicha relación.

Zadeh (1971, 1975) estudió ya las propiedades de las relaciones difusas, trasladando, una vez definido el concepto de conjunto difuso, el concepto de relación binaria de una manera análoga a como en la -- teoría nítida se pasa de conjuntos a relación binaria : ya que una relación binaria en un conjunto X nítido es un subconjunto del conjunto producto $X \times X$, Zadeh propuso la relación binaria difusa como un subconjunto difuso de $X \times X$:

DEFINICION 2.1.1.- Sea X un conjunto de elementos. Un conjunto difuso $\mathcal{C}$ en X es un conjunto de pares ordenados $(x, \mu_{\mathcal{C}}(x))$ con $x \in X$ y - una aplicación o función de grado de pertenencia

$$\mu_{\mathcal{C}} : X \longrightarrow [0,1]$$

Lo cual generaliza los conjuntos clásicos, como bien comprueba -- Kaufman. Entonces, según Zadeh :

DEFINICION 2.1.2.- Una relación difusa R en X es un conjunto difuso

$$\mu_R : X \quad X \longrightarrow [0,1]$$

Las propiedades fueron someramente discutidas en el planteamiento inicial de esta memoria. Preguntados acerca de la racionalidad de una relación difusa de preferencia difusa, ya notamos entonces que algunas de esas propiedades no plantean problemas, siendo deseables y admisibles; sin embargo, apuntamos una gran riqueza de opciones en la llamada "transitividad" (cfr. los trabajos de Kaufman y Dubois-Prade), así como ciertos convenios acerca de la diagonal de la llamada "matriz de consumo", que pensamos tiene su causa en una indeterminación conceptual. Se comprueba por una parte que la intransitividad clásica no es en general irracional cuando se presenta en los individuos (sobre este aspecto se han hecho ya bastantes estudios descriptivos, cuidando especialmente las condiciones psicológicas de los encuestados), aunque bajo ciertas hipótesis sí parece razonable exigirla : por ejemplo, cuando se aplican a atributos simples, ya que toda intransitividad entre tres características se podrá explicar utilizando dos atributos, con una relación de preferencia transitiva definida para cada atributo (cfr. Keeney-Raiffa, 1976 y Roy-Vincke, 1981).

Por otra parte observamos que, tanto para la teoría clásica como para las difusas de Zadeh, una relación es transitiva o no lo es, mientras que a la hora de la práctica hay, en ambos planteamientos, relaciones donde la intransitividad es clamorosa y relaciones no transitivas pero con menos intransitividad (en número o en gravedad de sus consecuencias : así a la hora de tomar una decisión sólo nos preocupa que existan intransitividades que afecten al conjunto de las alternativas "mejores"). Esto nos hace concebir la "transitividad" como un nuevo concepto difuso.

Asignemos a cada relación de preferencia un "grado de transitividad", lógico en algún sentido. Intentaremos definir la transitividad como una propiedad (conjunto) difuso, de tal modo que a cada relación difusa le asignemos una medida de su transitividad; sería una aplicación, según Zadèh, para $\mathcal{R}$ el conjunto de relaciones difusas :

$$\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,1].$$

II.2. Relación binaria de opinión difusa. Característica difusa.

Comencemos analizando la cuestión de la indiferencia en las relaciones difusas. Si $\mu(x,y) \in [0,1]$ nos mide el grado en que x es preferido (estrictamente) a y, entonces habrá que imponer $\mu(x,x) = 0$; si la interpretación es una preferencia débil en vez de fuerte, entonces $\mu(x,x)$ habrá de valer la unidad. Consultando la bibliografía, observamos que sobre los valores que han de aparecer en la diagonal de la matriz que representa la relación difusa (Pardo, 1980) no hay unanimidad, tomándose a menudo $\mu(x,x) = \frac{1}{2}$. Nos parece que la única salida sin ambiguedades es introducir un nuevo concepto de relación de preferencia difusa que se componga de un grado de preferencia fuerte y un grado de similaridad.

DEFINICION 2.2.1.- Una relación de preferencia difusa X sera una aplicación

$$\mu : X \times X \longrightarrow [0,1]^3$$
$$(x,y) \longrightarrow (\mu_i(x,y))_{i=1,2,3}$$

tal que μ_1 y μ_3 son dos relaciones difusas contrarias ($\mu_1(x,y) = \mu_3(y,x)$, $\forall x,y$) y μ_2 con una relación difusa tal que $\mu_2(x,x)=1$ $\forall x$.

Como precedente de este tratamiento podemos citar, por ejemplo, el importante artículo de Orlovsky (1978), que introduce las relaciones de preferencia estricta y de indiferencia, pero a partir de las relaciones en el sentido de Zadeh. Aquí introducimos ambas relaciones, en un sentido asimilable a un L - difuso con L = $[0,1]^3$, como información de entrada. En general, asociamos un conjunto L- difuso A con una función μ_A : X ——> L siendo X el universo en el que A está in--

merso (Goguen, 1967). Para que se trate de una relación de preferencia, le hemos impuesto dos propiedades : $\mu_2(x,x)=1$ y $\mu_1(x,y)=\mu_3(y,x)$, condición esta última especialmente importante, ya que introduce una estructura característica dentro de L, una partición difusa : m-uplas de conjuntos difusos (A_1 .. A_m) tal que $\Sigma\mu_{A_i}(x) = 1$ para todo $x \in X$ (Dubois - Prade, 1980). Más adelante profundizaremos en este tema.

DEFINICION 2.2.2.- Se dirá que $\mu : X \times X \longrightarrow [0,1]^3$ es recíproca cuando

$$\sum_{r=1}^{3} \mu_r(x,y) = 1 \qquad \forall\ (x,y) \in X\ X$$

DEFINICION 2.2.3.- Se dirá que una relación binaria

$$\mu : X \times X \longrightarrow [0,1]^3$$

es de opinión difusa si es reflexiva ($\mu(x,x) = 1$), de contrarios ($\mu_1(x,y) = \mu_3(y,x)$) y recíproca.

Un caso de especial interés serán las relaciones difusas unimodales:

DEFINICION 2.2.4.- Se dice que una relación binaria de opinión difusa es unimodal cuando

$$\mu_2(x,y) \geqslant \min\{\mu_1(x,y), \mu_3(x,y)\}$$

Es decir, cuando no exista ningún par para el cual

$$\mu_1(x,y) > \mu_2(x,y) < \mu_3(x,y)$$

situación que no parece muy natural (al menos sugiere un conflicto especial).

Así, la relación que vamos a utilizar será una terna de difusos de Zadeh, habiéndonos parecido sin sentido la reciprocidad en el sen tido de Zadeh. Lo coherente con la nueva definición es encontrar el concepto de conjunto difuso que genera el de relación difusa que proponemos : el primer intento sería definir un conjunto difuso A como una aplicación

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]^3$$

de tal modo que un significado no sería ni el de "grado de pertenencia" ni el de "compatibilidad", que no admiten más que dos posiciones cualitativas (pertenece - no pertenece; compatible - incompatible). Sin embargo, la noción de asociación o correlación admite estas tres posiciones : un elemento de X puede tener en parte asociación positiva con la propiedad representada por el conjunto difuso, asociación negativa y un grado de indiferencia.

Por ejemplo, para el espacio

$$X = \{(a,b) \,\,,\, a,b \in A = \{-1,0,1\}\}$$

y estudiando la "negatividad" como conjunto difuso se podría definir la aplicación

$$\mu : X \longrightarrow [0,1]^3$$

tal que

$$\mu_1 (a,b) = \frac{1}{2} \text{ (n° de -1 en } \{a,b\} \text{)}$$

$$\mu_2 (a,b) = \frac{1}{2} \text{ (n°de 0 en } \{a,b\} \text{)}$$

$$\mu_3 (a,b) = \frac{1}{2} \text{ (n° de +1 en } \{a,b\} \text{)}$$

ya que la tercera coordenada correspondería al concepto contrario al estudiado : el de "positividad".

Señalamos el pleno sentido que tiene, según esta nueva definición, el concepto de contrario : hay conceptos difusos μ que llevan aso-- ciado un conjunto difuso contrario de tal modo que

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x))$$

$$\bar{\mu}(x) = (\mu_3(x), \mu_2(x), \mu_1(x))$$

y se trata de contrario, no de complementario. Pensamos que esta es la diferencia es la que subyace en la crítica de Dubois - Prade (1980) a la justificación clásica del concepto de "complementario" difuso - $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, requerido a menudo para un uso de "contrario".

DEFINICION 2.2.5.- Dado un conjunto difuso sobre X

$$\mu : X \longrightarrow [0,1]^3$$
$$x \longrightarrow (x_1 x_2\ x_3)$$

se define su contrario como

$$\bar{\mu} : X \longrightarrow [0,1]^3$$
$$x \longrightarrow (x_3\ x_2\ x_1)$$

Zadeh no solucionó satisfactoriamente este problema del contrario, pero su definición coincidirá con la aquí dada cuando sea "dicotómico" en el sentido siguiente :

DEFINICION 2.2.6.- Se dirá que un conjunto difuso es dicotómico cuando $\mu_2(x) = 0 \quad \forall\ x \in X$

DEFINICION 2.2.7.- Una relación binaria difusa en XxY es todo conjunto difuso en XxY.

DEFINICION 2.2.8.- Una relación binaria difusa en X es cualquier rela ción difusa en $X \times X$.

DEFINICION 2.2.9.- Una relación binaria difusa en X se dice antirreflexiva si $\mu_2(x,x) = 0 \quad \forall x \in X$.

DEFINICION 2.2.10.- Una relación binaria difusa en X es simétrica si $\mu(x,y) = \mu(y,x) \quad \forall (x,y) \in X \times X$.

DEFINICION 2.2.11.- Una relación binaria difusa en X se dice antisimétrica cuando

$$\mu_2(x,y) = 1 \implies x = y$$

Sin embargo, según lo expuesto, se obtiene que mientras la difusidad de Zadeh aparece aplicada a los conjuntos, aquí la aplicamos a los conceptos o características, si bien ya hemos dicho que esto sería la consideración de n modalidades de esa característica (cfr. los trabajos de Farquhar y Blin sobre multiatributos difusos). Así mientras Zadeh habla del "conjunto de los hombres muv altos", nosotros hablaremos de la característica de la "altura" en los hombres. En este sentido Blin (1977) se refiere a la imprecisión conceptual, básica en Ciencias Sociales y que hace insuficiente la noción de grado de credibilidad para la función de pertenencia. Evidentemente cabe pensar que tanto en cuanto toda característica - incluso cuantitativa, como en principio sería la altura - se puede considerar bajo planteamiento difusos.

Con estas anotaciones entramos de lleno en la consideración de L-difusos con $L = [0,1]^{\beta}$ con arbitrario, y entre los significados que propone Dubois - Prade nos inclinamos más al de "partición".

Un ejemplo interesante es el de "color", considerado como un conjunto - característica - difuso de coordenadas - modalidades -, de tal modo que a cada objeto no incoloro le correponde la proporción que contiene de cada color esencial.

En resumen, distinguimos tres conceptos difusos :

1.- El conjunto difuso A, que será el clásico de Zadeh :

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

2.- La característica difusa, toda aplicación

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]^n$$

tal que $\Sigma \mu_{A_i}(x) = 1$, y que corresponde a la partición difusa clásica. Los multiatributos en este contexto surgirían como un conjunto ordenado de características difusas.

3.- La relación de opinión en X :

$$\mu : X \times X \longrightarrow [0,1]^3$$

tal que $\mu_2(x,x) = 1$, y $\mu_1(x,y) = \mu_3(y,x)$.

Se podrá hablar, por ejemplo, de característica ordenada como aquella con unimodalidad en el sentido de Black, la cual genera trivialmente una relación binaria recíproca y de contrarios. La reflexividad se entenderá más adelante como un ciclo de orden uno, y como tal ciclo servirá para definir los α- órdenes. Notar que distinguimos el orden como propiedad de los elementos de X del orden como propiedad difusa.

La reciprocidad corresponde a la completitud nítida, y se impondrá en principio si no se dice nada en contra.

II-3.- INTRANSITIVIDAD DIFUSA

Volvamos ahora a nuestro problema inicial, cifrado en la cuestión de la transitividad. Para ello fijemos una terna de elementos a,b,c $\in$ X sobre la que está definida una relación de opinión difusa :

$$\mu\,(a,b) = (p_1\ p_2\ p_3)$$
$$\mu\,(b,c) = (q_1\ q_2\ q_3)$$
$$\mu\,(c,a) = (r_1\ r_2\ r_3)$$

Y observamos dentro de esta terna qué casos representan una intransitividad, notando por T las combinaciones transitivas, por I las intransitivas y por I(CT) las intransitivas pero cuasitransitivas : de los 27 casos, nos encontramos 13 T, 8 I, y 6 I(CT).

Si concedemos a cada uno de estos casos los pesos "naturales" --- (por ejemplo, al a > b > c > a le asignaríamos un peso $p_1 \cdot q_1 \cdot r_1$,etc), podríamos dar la medida de intransitividad siguiente :

$$I\ (a,b,c;\mu) = p_{12} \cdot q_{12} \cdot r_{12} + p_{32} \cdot q_{32} \cdot r_{32} - 2 \cdot p_2 \cdot q_2 \cdot r_2$$

siendo $S_{ij} = S_i + S_j$. Se comprueba que I $(a,b,c;\mu)$ es la suma de los pesos "naturales" de los casos intransitivos. Para la cuasitransitividad obtendríamos una medida de incuasitransitividad :

$$ICT\ (a,b,c;\mu) = I\ (a,b,c;\mu) - p_{13} \cdot q_2 \cdot r_2 - p_2\, q_{13}\, r_2 - p_2\ q_2\, r_{13}$$

Entonces podemos medir la transitividad y la cuasitransitividad sobre una terna a,b,c respectivamente por :

$$T\{a,b,c\} : \quad \mathcal{P}_{\{a,b,c\}} \longrightarrow [0,1]^3$$

$$(\mu : \{a,b,c\} \longrightarrow [0,1]^3) \longrightarrow 1 - I(a,b,c;\mu)$$

$$CT\{a,b,c\} : \mathcal{P}_{\{a,b,c\}} \longrightarrow [0,1]^3$$

$$(\mu : \{a,b,c\} \longrightarrow [0,1]^3) \longrightarrow 1 - ICT(a,b,c;\mu)$$

con $\mathcal{P}_{\{a,b,c\}}$ el conjunto de opiniones difusas sobre dicha terna de elementos. Directamente sacamos la transitividad y cuasitransitividad de ternas, concibiendo ambos conceptos como conjuntos difusos - nítidos ($\mu_2(x) = 0 \; \forall x$) y recíprocos ($\Sigma \mu_i(x) = 1$).

<u>DEFINICION 2.3.1.</u>- La transitividad en $X = \{a,b,c\}$ es un conjunto difuso recíproco y dicotómico

$$T : \mathcal{P}_{\{a,b,c\}} \longrightarrow [0,1]^3$$

$$\mu \longrightarrow (1 - I(\mu), 0, I(\mu))$$

<u>DEFINICION 2.3.2.</u>- La cuasitransitividad en $X = \{a,b,c\}$ es un conjunto difuso recíproco y dicotómico

$$CT : \mathcal{P}_{\{a,b,c\}} \longrightarrow [0,1]^3$$

$$\mu \longrightarrow (1 - ICT(\mu), 0, ICT(\mu))$$

Aunque se pondrían introducir los casos cuasitransitivos no transitivos dentro de la segunda coordenada, lo cual, siendo intrinsicamente justificable, no complicaría demasiado el tratamiento.

Para obtener el conjunto difuso de la transitividad, dada los 27 casos posibles, consideramos la siguiente descomposición :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{\{a,b,c\}} \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "T"'] & {[0,1]^{27}} \arrow[d, "R"] \\ & {[0,1]^3} \end{tikzcd}$$

donde

a) T: $\mathcal{P}_{\{a,b,c\}} \longrightarrow [0,1]^3$ es el conjunto difuso "transitividad", tal que $T(\mu) = (t_1, 0, t_3)$ con $t_1 + t_3 = 1$, según se ha dicho.

b) P : $\mathcal{P}_{\{a,b,c\}} \longrightarrow [0,1]^{27}$ es el conjunto difuso "peso de casos", según la partición difusa clásica. Suponiendo dichos casos ordenados, de tal forma que el vector $\bar{p}$ de 13 coordenadas corresponde a los casos transitivos, y el vector $\bar{q}$ a los 14 intransitivos. Imponemos de modo natural la reciprocidad :

$$\Sigma\, p_i + \Sigma\, q_i = 1$$

c) R : $[0,1]^{27} \longrightarrow [0,1]^3$ es el conjunto difuso de representación de la transitividad, tal que

$$R\,(\bar{p},\, \bar{q}) = (\, t_1,\ 0,\ 1-t_1)$$

Y si imponemos los siguientes axiomas plausibles obtendremos la unicidad de R :

AXIOMA R1 : $R(p_1 \,..\, p_i \,..\, p_j \,..\, p_{13} \,..\vec{q}) = R(\vec{p}_1 \,..p_i+\varepsilon ..\, p_j-\varepsilon \,..p_{13}\, \vec{q})$

$R(\vec{p}\; q_1..q_i..\, q_i..q_j..q_{14}) = R(\vec{p}\; q_1 \,..q_i+\varepsilon..q_j-\varepsilon \,..\, p_{14})$

AXIOMA R2 : $R(p_1 \,..\, p_i+\varepsilon \,...\, q_j-\varepsilon \,..) > R(\,...\, p_i \,...\, q_j \,...)$

AXIOMA R3 : $\forall r \in [0,1] \Longrightarrow \exists (\vec{p}, \vec{q})$ tal que $R(\vec{p}, \vec{q}) = r$

Entonces :

Propiedad 2.3.1. $R(\vec{p}, \vec{q}) = R^* (\Sigma p_i)$

<u>Demostración</u> : aplicando sucesivamente R1 :

$$R(p_1 \,..\, p_{13}\; q, \,..\, q_{14}) = R(p_1+p_2, 0, p_3..p_{13}\; q_1+q_2, 0, .. \,q_{14}) =$$

$$... = R(\Sigma p_i, 0 \,..\, 0, \Sigma q_i, 0 \,..\, 0) =$$

$$= R(\Sigma p_i, 0 \,..\, 0, 1-\Sigma q_i, 0 \,..\, 0) =$$

$$= R^* (\Sigma p_i)$$

<u>COROLARIO 1</u>.- : $R^* (\Sigma p_i) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es estrictamente creciente (por AXIOMA R2)

COROLARIO 2.- : $R (\bar{p}, \bar{0}) = 1$

$R (0, \bar{q}) = 0$

(por R3)

Será evidente entonces que toda función R^* definida de $[0, 1/2]$ en $[0, 1/2]$ biyectiva y creciente genera un conjunto difuso de transitividad que cumple R1,R2 y R3 : basta tomar, para todo $t > 1/2$ el valor $R^* (t) = 1 - R^* (1 - t)$.

Si deseamos la unicidad podemos imponer el

AXIOMA R4 : $R^* (t + \varepsilon) - R^* (t) = R^* (t'+\varepsilon) - R^* (t')$

<u>TEOREMA 2.3.1</u>. El único conjunto difuso de representación R que verifica R1, R2, R3 y R4 es

$$R(\bar{p}\ ,\ \bar{q}) = R^*\ (\Sigma\ P_i) = \Sigma\ P_i$$

Demostración: por R4, para todo t y todo $\varepsilon > 0$:

$$h(2\varepsilon) = R^*(t + 2\varepsilon) - R^*(t) = R^*\ (t+ 2\varepsilon) - R^*\ (t+\varepsilon) + R^*\ (t+\varepsilon) - R^*(t) =$$

$$= h\ (\varepsilon) + h\ (\varepsilon) = 2h\ (\varepsilon)$$

y en general

$$h\ (n\ \varepsilon) = n\ h\ (\varepsilon) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$h\ (\varepsilon) = h\ (\frac{n}{n}\ \varepsilon) = n\ h(\frac{1}{n}\ \varepsilon) \Longrightarrow h\ (\frac{1}{n}\ \varepsilon) = \frac{1}{n}\ h(\varepsilon)$$

luego

$$h(r\varepsilon) = r.h(\varepsilon) \qquad \forall\ r \in \mathbb{Q}$$

y por ser h continua

$$h(x.\varepsilon) = h(\lim r_n.\varepsilon) = \lim h(r_n.\varepsilon) = \lim[r_n.\ h(\varepsilon)] =$$

$$= h(\varepsilon).\ \lim r_n = x.h(\varepsilon) \qquad x = r_n \in \mathbb{R},\ r_n \in \mathbb{Q}$$

Entonces

$$R^*\ (t) = R^*(t) - R^*\ (0) = h\ (t) = t.h\ (1) = t$$

ya que $R^*\ (1) - R^*\ (0) = h(1) = 1$ por los corolarios anteriores.

Caso de suponer

AXIOMA RO : $R(\bar{p},\ \bar{0}) = 1$

$R(\bar{0},\ \bar{q}) = 0$

AXIOMA R1' : $R(\ldots p_i \ldots p_j \ldots\ q_k\ \ldots q_l \ldots) = R(\ldots\ p_i+\varepsilon\ \ldots p_j-\varepsilon\ \ldots q_k-\nu \ldots q_l-\nu)$

AXIOMA R4' : $R(p_1 \ldots\ p_i+\varepsilon \ldots\ q_1\ \ldots\ q_j-\varepsilon\ \ldots) - R(\ p_1\ \ldots p_i\ \ldots\ q_j\ \ldots) =$

$= R(p_1' \ldots p_i'+\varepsilon \ldots q_1' \ldots q_j'-\varepsilon \ldots)-R(p_1' \ldots p_i' \ldots q_j' \ldots) > 0$

$\forall\varepsilon, \forall i,j$

Tendremos el

TEOREMA 2.3.2. El único conjunto difuso de representación de transitividad que verifica R0, R1' y R4' es

$$R(\vec{p}, \vec{q}) = \Sigma P_i$$

Demostración : El axioma R1' es suficiente para demostrar la propiedad 2.3.1. y obtener así el corolario 1, pues R5' ==>R2. Como R4' == ==> R4, la demostración anterior sigue siendo válida, aunque el paso final esté justificado por R0 y no por el corolario 2.-

La asignación natural para el conjunto difuso P sería

$$P_i(a\ R_1\ b\ R_2\ c\ R_3\ a) = \mu_{R_1}(a,b) \cdot \mu_{R_2}(b,c) \cdot \mu_{R_3}(c,a)$$

siendo $R_i \in \{1,2,3\}$. Es trivial que así definido, $\Sigma P_i = 1$.

Busquemos algún modo de razonar axiomáticamente esta elección:

sea i el caso $a\ R_1\ b\ R_2\ c\ R_3\ a$ conociéndose la relación binaria de opinión :

$$\mu_{R_1}(a,b) = \mu_{i1}$$

$$\mu_{R_2}(b,c) = \mu_{i2}$$

$$\mu_{R_3}(c,a) = \mu_{i3}$$

AXIOMA P0.- Si $\mu_{ik} = 1 \quad \forall k = 1,2,3 \implies P_i = 1$

Si $\mu_{ik} = 0 \implies P_i = 0$

AXIOMA P1.- En cualquiera de las tres coordenadas del caso i se tiene que

$$P_i(\mu_{i1}+\varepsilon,\ \mu_{i2},\ \mu_{i3}) - P_i(\mu_{i1},\ \mu_{i2},\ \mu_{i3}) = k_{\mu_{i2}\ \mu_{i3}} \cdot \varepsilon$$

$$P_i(\mu_{i1},\ \mu_{i2}+\varepsilon,\ \mu_{i3}) - P_i(\mu_{i1},\ \mu_{i2},\ \mu_{i3}) = k_{\mu_{i1}\ \mu_{i3}} \cdot \varepsilon$$

$$P_i(\mu_{i1},\ \mu_{i2},\ \mu_{i3}+\varepsilon) - P_i(\mu_{i1},\ \mu_{i2},\ \mu_{i3}) = k_{\mu_{i1}\ \mu_{i2}} \cdot \varepsilon$$

TEOREMA 2.3.3. El único conjunto difuso P de pesos que verifica P0 y P1 es el que asigna

$$P\{\mu\} = (P_i)_i$$

con P_i el valor antes definido.

Demostración: directamente,

$$P_i(\mu_{i1},\ \mu_{i2},\ \mu_{i3}) = k_{\mu_{i2}\mu_{i3}} \cdot \mu_{i1} + P_i(0,\mu_{i2},\ \mu_{i3}) =$$

$$= k_{\mu_{i2}\ \mu_{i3}} \cdot \mu_{i1} = P_i(1,\ \mu_{i2},\ \mu_{i3}) \cdot \mu_{i1} =$$

$$= \mu_{i1} \cdot \mu_{i2} \cdot P_i(1,1,\ \mu_{i3}) = \mu_{i1}\ \mu_{i2}\ \mu_{i3} \cdot P_i(1,1,1) =$$

$$= \mu_{i1} \cdot \mu_{i2} \cdot \mu_{i3} \qquad \text{c.q.d.}$$

En conclusión, la transitividad es una terna en el conjunto difuso T = R . P, de acuerdo con la primera definición dada. Análogamente, la cuasitransitividad será el conjunto difuso CT = R' o P, con la única variación de R', que distingue entre cuasitransitividades (19 - casos) y no - cuasitransitividades. Salvo esto, los axiomas exigidos serían los mismos, obteniendo evidentemente que la primera coordenada de T(μ) es menor o igual que CT(μ).

Pero nuestro problema no es directamente la transitividad de una terna, sino la de un conjunto cualquiera. Es más : dado un conjunto arbitrario, buscaremos ciclos de todo orden. En principio podemos - proponer dos medidas de transitividad para un conjunto finito X con card (X) $\doteq n$, estando asegurado el sentido de la primera (poniendo infimo) aunque S sea infinito:

$$T_1(\mu) = \min_{t_i \in S_3(X)} T_\mu(t_i)$$

$$T_2^f(\mu) = \sum_{t_i \in S_3(X)} f(t_i)\, T'_\mu(t_i)$$

siendo $S_3(X) = \{t_i \subset X \,,\, \text{card}(t_i) = 3\}$ el conjunto de todas las ternas posibles en X (con tres elementos sólo está definido un ciclo).

Es claro que T_1 busca la terna más intransitiva, mientras que T_2 es una media ponderada de las intrasitividades de todas las ternas - en X (por ejemplo, $f(t_i) = 1/\binom{n}{3}$ $\forall t_i$). La T_1 es criticable tanto - en cuanto expresa la situación de una única terna, con lo que manteniendo ese valor como máximo, la medida del conjunto no es sensible a que haya ninguna o más intransitividad en el resto de las ternas. Pero será la definición a utilizar, por los mismos argumentos que el criterio de Wald, aparte de una mayor coherencia con la teoría de difusos :

DEFINICION 2.3.2.- Dado el conjunto de relaciones binarias en X, $\mathcal{R}(X)$, la transitividad T_1 (idem para T_2) es un conjunto difuso

$$T_1 : \mathcal{R}(X) \longrightarrow [0,1]^3$$

$$\mu \longrightarrow (T_1(\mu), 0, 1-T_1(\mu))$$

Definición análoga sería para la cuasitransitividad, con

$$CT_1(\mu) = \min_{t_i \in S_3(X)} CT_\mu(t_i)$$

II.4.- Aciclidad difusa.-

Considerando la transitividad como una aciclidad de orden 3, podríamos generalizar y hablar de aciclidad de orden k en un conjunto ordenado $X = (a_1 \dots a_k)$ de k elementos o "ciclo" (dos ciclos serán iguales cuando para todo elemento considerado a_i, el conjunto de contiguos $\{a_{i-1}, a_{i+1}\}$ es el mismo), como un conjunto difuso $A^{(k)} = R^{(k)} \, P^{(k)}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(a_1 \dots a_k) \arrow[r, "P^{(k)}"] \arrow[dr, "A^{(k)}"'] & {[0,1]^{(3^k)}} \arrow[d, "R^{(k)}"] \\ & {[0,1]^3} \end{tikzcd}$$

con $P^{(k)}$ y $R^{(k)}$ la generalización trivial del caso de la transitividad, con estudio y axiomas análogos, de tal modo que $A^{(k)}$ sea recíproco y dicotómico.

La noción de cuasiaciclidad de orden k sobre X con cardinal k también es trivial, siendo todos difusos en el sentido Zadeh.

Notemos por

$$A^{(k)}(\mu) = \min_{t_i \in S_k(X)/\mu} A_\mu^{(k)}(t_i)$$

donde $S_k(X)$ son todos los ciclos de cardinal k en X, con cardinal $\mathrm{card}(X) = n \geq k$, y $A_\mu^{(k)}(t_i)$ está definido como genera lización trivial de $T_\mu(t_i) = A_\mu^{(3)}(t_i)$, antes visto. Análogamente se define $A_2^{(k)}$.

Por otra parte, es evidente que $A_\mu^{(1)}(t_i)$ y $A_\mu^{(2)}(t_i)$ son medidas de la reflexividad y de la simetría cásicas (ciclos de órdenes 1 y 2). Entonces, para $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$:

DEFINICION 2.4.1. La aciclidad de orden k en X de cardinal n ($n \geq k$) es un conjunto difuso

$$A^{(k)} : \mathcal{R}(X) \longrightarrow [0,1]^3$$
$$(A_1^{(k)}(\mu),\ 0\ ,1-A_1^{(k)}(\mu))$$

(Análogo para la cuasiaciclidad de orden k, $CA^{(k)}$).

En concreto, si consideramos $t_i = (x_1,x_2 \ldots,x_k) \in S_k(X)$, y notamos $x_{k+1} = x_1$, será

$$A_\mu^{(k)}(t_i) = 1 - \sum_{\{j_n\} \in RP_k^*} \prod_{n=1}^{k} \mu_{j_n}(x_n,x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{\{j_n\} \in RP_k^{**}} \prod_{n=1}^{k} \mu_{j_n}(x_n,x_{n+1})$$

siendo RP_k^* el conjunto de variaciones, con repetición, de orden k, con elementos de $\{1,2,3\}$ tales que

a) $\exists\ j_n \neq 2$

b) Si $\exists\ j_n = m \neq 2 \implies j_n \in \{m,2\} \quad \forall\ j_n$

Y RP_k^{**} el conjunto de variaciones con repetición, de orden k, del mismo conjunto verificando que si

$$\exists\ j_n \neq 2 \quad \Rightarrow \exists\ j_m \notin \quad \{2, j_n\}$$

Es fácil comprobar entonces que, notando por

$$\mu_{ij}(x_m, x_n) = \mu_i(x_m, x_n) + \mu_j(x_m, x_n)$$

$$\mu_{A^{(k)}}(t_i) = 1 - \left\{ \prod_{n=1}^{k} \mu_{12}(x_n, x_{n+1}) + \prod_{1}^{k} \mu_{23}(x_n, x_{n+1}) - \right.$$
$$\left. - \prod_{1}^{k} \mu_2(x_n, x_{n+1}) \right\}$$

PROPIEDAD 2.4.1.- μ es reflexiva (en el sentido de 2.2.1.) si y sólo si $A^{(1)}(\mu) = (1, 0, 0)$.

DEFINICION 2.4.2.- La aciclidad en X es un conjunto difuso

$$A_1 : \mathcal{R}(X) \longrightarrow [0,1]^3$$

$$\mu \longrightarrow (A_1(\mu), 0, 1-A_1(\mu))$$

donde $A_1(\mu) = \min\limits_k A_1^{(k)}(\mu)$.

(Análogo para la cuasiaciclidad y para aciclidades ponderadas A_2^f). Entonces, tanto con A_1 como con A_2^f podemos definir:

DEFINICION 2.4.3.- La característica orden de las relaciones binarias es un difuso

$$\rho_1 : \mathcal{R}(X) \longrightarrow [0,1]^3$$

que aplica a cada relación binaria el valor

$$\rho_1(\mu) = (A_1(\mu), 0, 1-A_1(\mu))$$

si μ es recíproca y de contrarios, y

$$\rho_1(\mu) = (0, 0, 1)$$

en otro caso.

Lo cual no es más que una distancia (Dubois-Prade, 1980, trata con profusidad el tema de las distancias y su relación con los difusos). Nos hemos inclinado a incluir la reflexividad como un ciclo más (de hecho, un mismo objeto no tiene por qué -descriptivamente hablando- tener asignado la indiferencia absoluta respecto de sí mismo cuando éste es presentado en otro tiempo o lugar, con circunstancias físicas o psicológicas distintas). Se podrían también haber hecho difusas la reciprocidad y la contraposición en μ (" The more, the fuzzier", que dicen Dubois-Prade). Por otra parte, la cuasiaciclidad generaría un cuasiorden de forma paralela, pudiendo, como ya se ha indicado, introducir los casos cuasitransitivos no transitivos en la segunda coordenada, que no queda entonces constantemente nula.

II.5.- Ejemplo: paradoja del azúcar.

Como ejemplo, apliquemos la relación de opinión difusa a la paradoja bien conocida del grano de azúcar (Luce, 1956; Pattanaik, 1971).

La preferencia, si el individuo se supone goloso, entre el café con N granos, A_N, y con N+1 granos será del tipo

$$\mu(A_N, A_{N+1}) = (0, 1-\varepsilon, \varepsilon)$$

donde $\varepsilon > 0$ es el grado en el que A_N está menos azucarado que A_{N+1}, y $1-\varepsilon$ el grado de indiferencia, muy próximo a la unidad.

Esta paradoja justificó el uso de las cuasitransitividades clásicas; lo mismo ocurrirá aquí, ya que el problema de discernimiento subjetivo sigue existiendo: el proceso de comparación sigue siendo insensible ante disparidades muy pequeñas (ver, respecto a este tema, la obra de Krantz et al. "Foundations of Measurement").

En general, ε podría ser una función de N. Admitiendo una condición markoviana para la preferencia entre dos estados no consecutivos:

$$\mu(A_N, A_{N+M}) = (0, f_\varepsilon(M), 1-f_\varepsilon(M))$$

y suponiendo

$$f_\varepsilon(M+1) / f_\varepsilon(M) = 1 - \varepsilon$$

con la condición $f_\varepsilon(0) = 1$ nos determina

$$f_{\varepsilon}(M) = (1-\varepsilon)^{M}$$

que verifica las propiedades deseables de ser estrictamente decreciente y que

$$\lim_{M\to\infty} f_{\varepsilon}(M) = 0$$

La paradoja tratada con difusos sugiere varios problemas muy interesantes de sensibilidad y medida, Además podemos estudiar la aciclidad de esta estructura μ : sea un ciclo $X_1 = (A_{N_i})_{i=1,n}$ con $N_i = N_{i-1}+h_i$, siendo $X = \{A_0, \ldots, A_k\}$ y h_i negativo o positivo. Aplicando lo visto, la aciclidad de orden n de X_1 será calculada del siguiente modo:

$$\mu_{12}(A_N, A_{N+M}) = \mu_{23}(A_{N+M}, A_N) = \mu_2(A_N, A_{N+M}) =$$
$$= (1-\varepsilon)^{M}$$
$$\mu_{12}(A_{N+M}, A_N) = \mu_{23}(A_N, A_{N+M}) = 1$$

Y notando

$$H = \sum_{h_i > 0} h_i$$

$$G = -\sum_{h_i < 0} h_i$$

observamos que todo ciclo de orden n se identifica con la condición $H-G = 0$, luego se comprueba que

$$A_1(X_1) = A_1(G) = 1 - ((1-\varepsilon)^{G} + (1-\varepsilon)^{H} - 2(1-\varepsilon)^{H+G}) =$$
$$= 1 - 2.((1-\varepsilon)^{G} - (1-\varepsilon)^{2G})$$

$$A_1(\mu) = \min_{X_1 \subset X} A_1(X_1) = \min_{0 \leq G \leq k} A_1(G) = A_1(G^*)$$

donde $G^* = \min (k , -(\ln 2)/(\ln (1- \varepsilon)))$.

Evidentemente, si $k \geqslant -(\ln 2)/\ln (1- \varepsilon)$, tendremos que

$$A_1 (X) = A_1 (G = - (\ln 2)/\ln (1- \varepsilon)) = 1/2$$

es la cota mínima -que habríamos podido predecir- de aciclidad en este tipo de problema, para toda insensibilidad $\varepsilon > 0$ escogida.

De todas formas adelantamos que no todos los ciclos son igualmente problemáticos. Si lo que se pretende es tomar una decisión, aquí y ahora, entre cuatro alternativas, es claro que las dos situaciones siguientes son radicalmente distintas:

a) $x_1 > x_i \quad i=2,3,4$

$x_2 > x_3 > x_4 > x_2$

b) $x_1 < x_i \quad i=2,3,4$

$x_2 > x_3 > x_4 > x_2$

ya que en el primer caso el ciclo no incluye el elemento x_1, que es el óptimo en el grupo.

Un tratamiento interesante, aunque quizá un poco alejado de la realidad, es el llevado a cabo buscando la probabilidad de que no exista un vencedor por mayoría, sobre lo que se deben consultar los trabajos de Sen (1970a). Guilbaud (1952), bajo unos planteamientos bayesianos que conceden igual probabilidad a todas las preferencias (clásicas nítidas) para cada individuo, hizo un primer acercamiento; Garman y Kanien (1968) han comprobado que para tres alternativas la probabilidad de que no haya vencedor por mayoría aumenta con el número de votantes, pero se estabiliza en un número inferior al 1%. Niemi y Weisberg (1968) muestran sin embargo la negativa repercusión que tiene el aumento de las alternativas. Pero aquella equiprobabilidad no es aceptable de ningún modo. Garman y Kanien hacen otros análisis bajo distintos supuestos, aunque siempre quedan en pie problemas de determinación empírica y de significado de la distribución a priori.

Por otra parte, es claro que un conjunto difuso recíproco queda determinado con una matriz (μ_{ij}) cuadrada tal que $\mu_{ij}+\mu_{ji}$ vale a lo más la unidad, de tal modo que $1-(\mu_{ij}+\mu_{ji})$ representa el grado de indiferencia.

II.6.- Espacio de una caracterfstica difusa.

Siguiendo a Nowakowska (1977) se pueden definir distancias entre las caracterfsricas difusas:

$$d_1(\mu,\mu') = \sup_{x\in X} \sup_{i=1,n} |\mu_i(x) - \mu_i'(x)|$$

$$d_2(\mu,\mu') = \frac{1}{n} \sum_{x\in X} \sum_{i=1}^{n} (\mu_i(x) - \mu_i'(x))^2$$

por ejemplo. Aunque mucho más importante será construir la estructura de cada característica difusa, coherente consigo misma y con las definiciones de operaciones entre conjuntos difusos.

Hemos definido la característica difusa sobre los objetos elementales, sobre los que era natural exigir la reciprocidad. Pero si pretendemos que se aplique sobre el álgebra (o σ-álgebra) engendrada por esos objetos elementales tendremos que eliminar dicha exigencia; entonces hablaremos de "espacio de una característica difusa μ":

DEFINICION 2.6.1.- Llamaremos espacio de la característica difusa μ a la terna formada por

$$(X, \mathcal{Q}(X), \mu^*)$$

donde $\mu : X \longrightarrow [0,1]^n$ es la característica difusa definida en X, $\mathcal{Q}(X)$ es la topología discreta en X y

$$\mu^*: \mathcal{Q}(X) \longrightarrow [0,1]^n$$

es tal que

$$\mu^*(A) = (\sup_{x\in A} \mu_i(x))_{i=1,n}$$

Son evidentes las siguientes propiedades:

a) $\mu_i^*(A \cup B) = \sup\ (\mu_i^*(A), \mu_i^*(B)\ )$

b) $\mu^*(A \cap B) = \mu^*(A)$

c) $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B)$

Esta definición, para n=1, coincide con la de sucesos difusos de Zadeh(1968), que exige que μ sea medible respecto de $\mathcal{Q}(X)$ y el σ-álgebra Borel en $[0,1]$.

II.7.- Espacio de las características difusas.

Su construcción no parece intuitiva en general:

DEFINICION 2.7.1.- Dada una familia de relaciones difusas de contrarios

$$\left\{ \mu^{A_i} : X \times X \longrightarrow [0,1]^3 \right\}$$

se definen

$$\mu^{\cup A_i} : X \times X \longrightarrow [0,1]^3$$

$$\mu^{\cap A_i} : X \times X \longrightarrow [0,1]^3$$

tales que

$$\mu^{\cup A_i}(x,y) = (\sup_i \mu_j^{A_i}(x,y))_{j=1,2,3}$$

$$\mu^{\cap A_i}(x,y) = (\inf_i \mu_j^{A_i}(x,y))_{j=1,2,3}$$

que son de contrarios (aunque no sean recíprocas, a pesar de que los μ^{A_i} lo sean).

Todo lo cual es plenamente coherente con la definición anterior y las reglas cásicas de conjunto difuso. Así tenemos un espacio de relaciones difusas

$$(X \times X , L = \{A_i\} , \mathcal{Q}(L) , \mu)$$

con

$$\mu : (\mathcal{Q}(L) , X \times X) \longrightarrow [0,1]^3$$

En general, se puede construir con cualquier familia de $[0,1]^n$-

-difusos, siempre y cuando coordenada a coordenada se trate de la misma difusidad y tenga sentido por tanto la comparación realizada. En concreto, para los conjuntos difusos clásicos tendremos un espacio de conjuntos difusos generado por

$$\mu^{A_i}: X \longrightarrow [0,1]$$

$$(X , L , \mathcal{A}(L) , \mu : (\mathcal{A}(L),X) \longrightarrow [0,1])$$

de tal forma que para todo $\{B_j\} \in \mathcal{A}(L)$ son

$$\mu^{\cup B_j}(x) = \sup_j \mu^{B_j}(x)$$

$$\mu^{\cap B_j}(x) = \inf_j \mu^{B_j}(x)$$

Nótese la diferencia existente entre un conjunto difuso Zadeh y su correspondiente característica difusa (recíproca) de complementarios $(\mu, 1-\mu)$ definida sobre $[0,1]^2$, por ejemplo en el sentido de lo que sería la inclusión en cada caso, diferenciándola también de la definición desarrollada por Trillas, especialmente interesante.

<u>PROPOSICION 2.7.1.</u>- $\mu^{A\cup(B\cap C)} = \mu^{(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

$$\mu^{A\cap(B\cup C)} = \mu^{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$$

Con esta estructura se pueden responder a las preguntas "grados de verificación de una característica en un conjunto" y "grado de verificación de una serie de características en un elemento" ; trivialmente, a través de la composición, el "grado de verificación de una serie de características en un conjunto":

$$(X , \mathcal{A}(X) , L , \mathcal{A}(L) , \mathring{\mu})$$

donde para todo $B \in \mathcal{A}(X)$ se definen, para $\mu^{A_i}: X \longrightarrow [0,1]$:

$$\mathring{\mu}^{\cup A_i}(B) = \sup_{x \in B} \sup_{i} \mu^{A_i}(x)$$

$$\mathring{\mu}^{\cap A_i}(B) = \sup_{x \in B} \inf_{i} \mu^{A_i}(x)$$

Si los conjuntos difusos $\mu^{A_i}: X \longrightarrow [0,1]$ son de complementarios (recíprocos) serán

$$\mu^{A_i^c} = 1 - \mu^{A_i}$$

y por tanto existirán relaciones evidentes entre $\mu^{A_i}(B)$ y $\mu^{A_i^c}(B)$, que serán analizadas más adelante, junto conotras operaciones que nos completarán la estructura.

Subyace en estos planteamientos una diferenciación entre lo que podríamos llamar difusidad extensiva $(X , \mathcal{A}(X))$ y la difusidad comprehensiva $(L , \mathcal{A}(L))$, denominación escogida por el lugar donde realmente se aplica la función de medida de difusidad; como dice Blin, la teoría de Suppes (1963) de "medida de creencia" es suficiente para las "ciencias duras" como idea de difuso. Una aplicación muy interesante es considerar los difusos como medida de la posibilidad, como desarrolla Zadeh (1978). Ver también el concepto de conjuntos vagos de Gentilhomme.

La composición de ambas difusidades es lo que nos da lugar al espacio difuso real. Comparemos este espacio de conceptos difusos con la estructura de conceptos difusos propuesta por Nowakowska (1977), del tipo

$$(X , G , L , \oplus , \varphi)$$

donde

X es el conjunto básico de objetos,

$G = \{G_1, G_2 \ldots \}$ es una clase de conjuntos difusos en X,

L es un conjunto de etiquetas (nombres),

$\oplus$ representa la etiqueta vacía (sin nombre), y

$\varphi : \mathcal{Q}(G) \longrightarrow L \cup \oplus$ la función de etiquetado, es decir, la representación linguística.

Observamos lo siguiente:

1.- Hace uso del conjunto básico de objetos no difuso (el conjunto de objetos que nos pueden interesar no es extensivamente difuso tanto en cuanto sean reales).

2.- Aparece el álgebra de las características (conjuntos difusos), para poder responder a las preguntas asociadas a dicho álgebra.

3.- Lo específico de esta estructura de Nowakowska es su objetivo: asignar conceptos (psicológicos en su caso, elementos de $L \cup \oplus$) a partir de esas características elementales de G. Esto supone un salto de tercer grado (objetos, características, -

conceptos) que nosotros no hemos dado en la estructura propuesta, aunque su incorporación sea trivial: $G = \{A_i\}$.

Nowakowska (1979) abunda en esta estructura, enfocada hacia la resolución de problemas de medida linguística para conceptos psicológicos. Distingue también Nowakowska entre diferentes tipos de ambiguedades, y diferencia el problema de asignación ("labeling") y de agregación, que es el que nos interesa en esta memoria.

Comparando por otra parte con otros trabajos dedicados a las operaciones entre conjuntos difusos (que en nuestra estructura son características difusas sobre $L = [0,1]$, de dimensión 1, mejor llamadas "propiedades" por Nowakowska), observamos variantes en las definiciones. De especial interés son la unión disjunta y la composición condicional (con la composición conjuntiva y la disjuntiva, ésta forma el grupo de las tres reglas de tipo II de composición de proposiciones de Zadeh en el artículo "Fuzzy Sets as a basis for a Theory of Possibility", donde están más formalizadas):

DEFINICION 2.7.2.- Dadas A,B propiedades difusas, tales que

$$\mu_A(x) + \mu_B(x) \leq 1 \qquad \forall\, x \in X$$

se define la unión disjunta o suma como

$$\mu_{A+B} : X \longrightarrow [0,1]$$

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x)$$

Es decir, la medida λ-difusa de Sugeno (1974) para $\lambda=0$!

Para operaciones que tienen en cuenta la independencia entre atributos, consultar por ejemplo el trabajo de Thole et al. (1979). Esta operación es propia pues entre propiedades de una misma característica en nuestro sentido (partición difusa). Esto nos sugiere definir para cada característica C_i de modalidades C_i^j disjuntas:

$$C_i = \bigcup_j C_i^j$$

con

$$\mu_{C_i^j} : X \longrightarrow [0,1]$$

y

$$\sum_j \mu_{C_i^j}(x) = 1 \qquad \forall\, x$$

un álgebra $\mathcal{Q}(C_i)$ sobre la que trabajar, con una "+" ($C_i^j+C_i^k$ es una propiedad distinta de la $C_i^j \cup C_i^k$) y una operación "." (también distinta de $\cap$ y tal que

$$\mu_{C_i^j . C_i^k}(x) = \delta_{jk}$$

es decir, la unidad si j=k y cero en el caso contrario). Así, para todo $M,N \in \mathcal{Q}(C_i)$ tal que $M = \sum_{j \in J} C_i^j$ y $N = \sum_{k \in K} C_i^k$ definimos

$$\mu_{M+N}(x) = \sum_{j \in J \cup K} \mu_{C_i^j}(x)$$

$$\mu_{M.N}(x) = \sum_{j \in J \cap K} \mu_{C_i^j}(x)$$

Y asociadas tendremos las operaciones correspondientes al complementario, tanto de C_i como de $L = \{C_i^*\} = \{C_i^j\}$: si $M = \bigcup_{i \in I} C_i^*$ se definen

$$\mu_{M^c}(A) = \mu_{\bigcup_{i \notin I} C_i^*}(A) = \sup_{x \in A} \sup_{i \notin I} \mu_{C_i^*}(x)$$

$$\mu_{\sim M}(A) = \mu_{\bigcap_{i \in I}(C_i^*)}(A) = \sup_{x \in A} \inf_{i \in I} (1 - \mu_{C_i^*}(x))$$

$$\mu_{\bar{M}}(A) = \mu_{\bigcup_{i \in I}(C_i^*)}(A) = \sup_{x \in A} \sup_{i \in I} (1 - \mu_{C_i^*}(x))$$

$$\mu_{M'}(A) = \mu_{\bigcap_{i \notin I} C_i^*}(A) = \sup_{x \in A} \inf_{i \notin I} \mu_{C_i^*}(x)$$

$$\mu_{-M}(A) = \sup_{x \in A} (1 - \mu_M(x))$$

Y análogamente se definen las operaciones restringiéndonos a la clase C_i:

$$\mu_{M'/C_i}(A), \quad \mu_{M/C_i}(A), \quad \mu_{M/C_i}(A)$$

y además

$$\mu_{-M}(A) = \sum_{j \notin J} C_i^j (A) = \sup \left(1 - \sum_{j \in J} \mu_{C_i^j}(x) \right) =$$

$$= \mu_{-\sum_{j \in J} C_i^j}(A)$$

Todo lo cual nos parece que abarca las operaciones lógicas entre conjuntos difusos, aunque todas ella son composición de las tres básicas $\bigcup$, $-$, y $\sum$, junto con la unión y complementariedad clásicas:

$$M^c(x) = \bigcup_{C_i^* \notin M} C_i^*(x)$$

$$M(x) = \bigcap_{C_i^* \in M} \neg C_i^*(x) = \neg \bigcup_{C_i^* \in M} C_i^*(x)$$

$$M(x) = \bigcup_{C_i^* \in M} \neg C_i^*(x) = - \bigcap_{C_i^* \in M} C_i^*(x)$$

$$M'(x) = \bigcap_{C_i^* \notin M} C_i^*(x) = - \bigcup_{C_i^* \notin M} \neg C_i^*(x)$$

$$-M(x) = 1 - M(x)$$

Suponiendo pues que las características $C_i = \{C_i^j\}$ son recíprocas, es decir, suponen una partición, las demás operaciones se pueden definir a partir de las tres básicas, considerando donde sea preciso recorridos restringidos a $M \cap C_i$. Esto supone una estructura previa inspirada en el σ-álgebra difusa de Klement(1980):

DEFINICION 2.7.3.- Un conjunto $\sigma_i = \{ \mu_i^j : X \longrightarrow [0,1] \}$ es un σ-álgebra difuso de la característica i si y sólo si

1) Para todo $\mu \in \sigma_i$ existe una misma partición J_p tal que

$$\sum_{j \in J_p} \mu_i^j = 1 \quad , \quad \mu_i^j \in \sigma_i$$

$$\exists\ J \subset J_p \text{ tal que } \mu = \sum_{j \in J} \mu_i^j$$

2) Para toda $\{\mu_i^j\}_{j \in J \subset J_p}$ con J_p la partición, se verifica que

$$\sum_{j \in J} \mu_i^j \in \sigma_i$$

DEFINICION 2.7.4..- Se dice que $\sigma = \sum_{i \in I} \sigma_i$ es un σ-álgebra difuso de I características difusas si y sólo si

1) σ_i es un σ-álgebra de la característica i

2) $\forall \mu \in \sigma \Rightarrow 1 - \mu \in \sigma$

3) $\forall (\mu_n)_n \subset \sigma \Rightarrow \sup \mu_n \in \sigma$.

II.8- Funciones medibles.

Se dirá entonces que los conjuntos difusos σ son medibles difusos, y el par (X , σ) es un espacio medible de características difusas.

PROPOSICION 2.8.1.-

i) Sea (Y , σ) un espacio medible de características difusas y $f: X \longrightarrow Y$ función. Entonces $f^{-1}(\sigma)$ es un σ-álgebra difusa.

ii) Sea (X , σ) un espacio medible de características difusas, e Y un subconjunto no vacío de X. Entonces

$$\sigma/Y = \left\{ \mu/Y \text{ tal que } \mu \in \sigma \right\}$$

es un σ-álgebra difuso en Y.

Demostración:

i) es trivial, ya que

$$f^{-1}(1-\mu) = 1 - f^{-1}(\mu)$$

$$f^{-1}(\sup \mu_n) = \sup f^{-1}(\mu_n)$$

$$f^{-1}(\Sigma \mu_i^j) = \Sigma f^{-1}(\mu_i^j)$$

ii) es un caso particular de i), cosiderando la función $f: X \longrightarrow Y$ tal que $f(y)=y$ para $y \in Y$, y cero en caso contrario.

PROPOSICION 2.8.2.- Sea $\left\{ \sigma_j \;/\; j \in J \right\}$ una familia de σ-álgebras de I características difusas en X. Entonces la intersección

$$\bigcap_{j \in J} \sigma_j$$

es un σ-álgebra de I características difusas en X.

Así se podrá hablar, para un conjunto arbitrario α de conjuntos difusos, del mínimo σ-álgebra difuso $\sigma(\alpha)$ que contiene a dicho α.

DEFINICION 2.8.1.- Sean (X, ξ) y (Y, σ) dos espacios medibles de Icaracterísticas difusas. Una función $f: X \longrightarrow Y$ es medible difusa cuando $f^{-1}: (Y, \sigma) \longrightarrow (X, \xi)$ es tal que $f^{-1}(\sigma) \subset \xi$.

PROPIEDAD 2.8.3.-

i) Sean $f: (X, \xi) \longrightarrow (Y, \sigma)$ y $g: (Y, \sigma) \longrightarrow (Z, \rho)$ dos funciones medibles difusas. Entonces la composición

$$g \circ f : (X, \xi) \longrightarrow (Z, \rho)$$

es medible difusa.

ii) Sea $f: (X, \xi) \longrightarrow (Y, \sigma)$ medible difusa y un subespacio de (X, ξ), $(Z, \xi/Z)$. Entonces la restricción

$$f/Z : (Z, \xi/Z) \longrightarrow (Y, \sigma)$$

es medible difusa.

iii) Sea (Y, σ) espacio medible difuso y $f: X \longrightarrow Y$ una función. Entonces $f^{-1}(\sigma)$ es la mínima σ-álgebra en X que hace de f medible difusa.

iv) Sea α un conjunto de conjuntos difusos definidos de Y en $[0,1]$. Entonces $f: (X, \xi) \longrightarrow (Y, \sigma(\alpha))$ es medible difuso si y sólo si $f^{-1}(\alpha) \subset \xi$.

Otras propiedades se pueden obtener a través de las funciones definidas en Klement (1980). A este autor le interesa que toda función constante sea medible difusa, lo cual le obligaría en este contxto a añadir la hipótesis de que todo conjunto difuso K tal que $K(x)=K$ para todo x, sea $K \in \xi$:

<u>PROPIEDAD 2.8.4.</u>- Sea $K: X \longrightarrow Y$ función constante $(K(x)=K)$. Para que K sea medible difusa es necesario que

$$\left\{ \mu_\alpha : X \longrightarrow [0,1] \ / \ \mu_\alpha(x) = \mu(\alpha) \right\} \subset \xi$$

para todo $\mu \in \sigma$.

<u>Demostración</u>: será medible, por definición, cuando para todo μ se verifique

$$f^{-1}(y, \mu(y))_{y \in Y} = (x, \sup_{y=f(x)} \mu(y))_{x \in X} =$$

$$= (x, \mu(\alpha))_{x \in X}$$

De todas formas, y a pesar de sus argumentos (pg.84) no nos parece realmente necesaria tal hipótesis complementaria.

II.9.- Variables Difusas.

Nahmias (1978), que comienza este artículo recordando que no existe todavía axiomática satisfactoria para describir la difusidad, da una definición de variable difusa que no está dentro del contexto de las funciones medobles, en el sentido de Klement o en el nuestro. Se trata, como él mismo afirma, de una nueva definición de conjunto difuso (pg. 98) que juega el mismo papel que la variable aleatoria en probabilidad. La clave de la diferencia está en que las funciones medibles difusas trabajan dentro de lo que hemos llamado difusidad comprehensiva $(L\ ,\ \mathcal{Q}(L))$, mientras que las variables difusas de Nahmias se aplican en la difusidad extensiva $(X\ ,\ \mathcal{Q}(X))$.

Las únicas propiedades absolutamente características son la exigencia de que exista al menos un punto con grado de pertenencia 1, lo cual impone una filosofía muy concreta, y que $\mathcal{Q}(X)$ sea una topología discreta de subconjuntos de X, y no simplemente un σ-álgebra.

DEFINICION 2.9.1. Una variable difusa es toda aplicación

$$\xi\ :\ X \longrightarrow \mathbb{R}$$

DEFINICION 2.9.2. La función de pertenencia de una variable difusa ξ, que notaremos por μ_ξ, es una aplicación

$$\mu_\xi\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow [\,0\,,1]$$

tal que

$$\mu_{\xi}(y) = \sigma \left\{ x \in X \ / \ \xi(x) = y \right\}$$

donde σ es una escala definida en $\mathcal{Q}(X)$ con las propiedades siguientes:

i) $\sigma(\emptyset)=0$ y $\sigma(X)=1$

ii) Para toda colección arbitraria de conjuntos $A_x \in \mathcal{Q}(X)$, numerable o no,

$$\sigma\left(\bigcup_x A_x \right) = \sup_x \sigma(A_x)$$

<u>PROPIEDAD 2.9.1.</u>- $0 \leq \sigma(A) \leq 1$, para todo $A \in \mathcal{Q}(X)$.

<u>Demostración</u>: Como $X=A \cup A^c$, entonces

$$1 = \sigma(X) = \max\ (\ \sigma(A)\ ,\ \sigma(A^c)\ )$$

luego $\sigma(A) \leq 1$. Por otra parte, al ser $A=A \cup \emptyset$,

$$\sigma(A) = \max\ (\ \sigma(A)\ ,\ 0\ )$$

luego $\sigma(A) \geq 0$.

<u>PROPIEDAD 2.9.2.</u>- $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$.

<u>Demostración</u>: Trivial considerando $C=B \cap A^c$ y $B=A \cup C$.

Así la escala σ hace el papel del conjunto difuso **básico** del que ya hemos hablado en $(X, \mathcal{Q}(X))$, imponiendo que exista algún elemento que esté en ese conjunto nítidamente (que verifique esa propiedad plenamente), lo cual en la mayoría de los casos parece natural.

En probabilidad, recordamos, la distribución está definida sobre los conjuntos de la forma $(-\infty\ ,\ x\ ]$, lo cual determina unívocamente una probabilidad en los conjuntos de Borel. Sin embargo en el modelo difuso, y debido a la operación supremo, la escala σ no queda determinada unívocamente por extensión a partir de tales intervalos: la función de pertenencia debe obtenerse por extensión de los conjuntos puntuales; esto nos obliga a considerar uniones no numerables, con lo que no es apropiado dotar a $\mathcal{Q}(X)$ de una estructura simplemente de σ-álgebra.

Dada una variable difusa ξ definida en $(X\ ,\ \mathcal{Q}(X)\ ,\ \sigma)$ y una función $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, es claro que $g(\xi): X \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra variable difusa sobre el mismo espacio, con

$$\left\{ g(\xi)=y \right\} = \bigcup_{u \in g^{-1}(y)} \left\{ \xi=u \right\} =$$

$$\bigcup_{u \in g^{-1}(y)} \left\{ x \in X \ / \ \xi(x)=u \right\} \subset \mathcal{Q}(X)$$

$$\mu_{g(\xi)}(y) = \sigma\left\{ g(\xi)=y \right\} = \sigma \bigcup_{u \in g^{-1}(y)} \left\{ \xi=u \right\} =$$

$$= \sup_{u \in g^{-1}(y)} \sigma\left\{ \xi=u \right\} = \sup_{u \in g^{-1}(y)} \mu_\xi(u)$$

que coincide con la definición de la transformación de un conjunto difuso dada por Zadeh (1965).

Sean entonces ξ y η dos variables difusas. Podemos preguntarnos acerca de la variable suma $\zeta = \xi + \eta$ (por ejemplo, $\xi = \{$números cercanos al 5$\}$ y $\eta = \{$números cercanos al 15$\}$, para que $\zeta = \{$números cercanos al 20$\}$):

TEOREMA 2.9.1.- $\mu_\zeta(z) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \min\ (\mu_\xi(x)\ ,\ \mu_\eta(z-x)\ )$

Demostración: Se trata de la propiedad análoga a la convolución de densidades de probabilidad. En efecto:

$$\begin{aligned}\mu_\zeta(z) &= \sigma\{\xi + \eta = z\} = \sigma\{(\xi+\eta=z) \cap X\} = \\ &= \sigma\{(\xi+\eta=z) \cap (\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{\xi=x\})\} = \\ &= \sigma\{\bigcup_x (\xi=x,\ \xi+\eta=z)\} = \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \sigma\{\xi=x, \eta=z-x\} = \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \min\ (\sigma\{\xi=x\},\ \sigma\{\eta=z-x\}) = \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \min\ (\mu_\xi(x)\ ,\ \mu_\eta(z-x)\ )\end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos utilizado la hipótesis de que ξ y η son independientes (es decir, siguiendo a Nahmías, cuando - $\sigma\{(\xi=x) \cap (\eta=y)\} = \min\{\sigma(\xi=x), \sigma(\eta=y)\}$, y esto para todo par x,y de reales; corresponde evidentemente este concepto al de - independencia probabilística).

Entonces podemos introducir familias de variables difusas con resultados análogos a los probabilísticos. Por ejemplo, son de especial interés para expresar las opiniones individuales las basadas en la función de densidad Normal, simétricas y unimodales:

DEFINICION 2.9.3.- Una variable difusa ξ es Normal si y sólo si existen $a,b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, tales que

$$\mu_\xi(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b} \right)^2 \right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

TEOREMA 2.9.2.- Sean $\xi \equiv N(a_1,b_1)$ y $\eta \equiv N(a_2,b_2)$ independientes. Entonces

$$\zeta = \xi + \eta \equiv N(a_1+a_2 \ , \ b_1+b_2)$$

Demostración: Sea

$$g_z(x) = \min(\mu_\xi(x) \ , \ \mu_\eta(z-x))$$

que es evidentemente unimodal y con máximo en un $x^*(z)$ tal que

$$\mu_\xi(x^*(z)) = \mu_\eta(z-x^*(z))$$

es decir, que analizando las dos raices y suponiendo $b_2 \geq b_1$, lo cual no quita generalidad:

$$x^*(z) = (a_1.b_2^2-(z-a_2).b_1^2-b_1.b_2.(z-a_1-a_2))/(b_2^2-b_1^2)$$

luego

$$\mu_\zeta(z) = \sup_x \min(\mu_\xi(x) \ , \ \mu_\eta(z-x)) =$$

$$= \sup_x g_z(x) = g_z(x^*(z)) =$$

$$= \exp\left(-(z-a_1-a_2)^2/(b_1+b_2)^2 \right)$$

COROLARIO.- Sea $\{\xi_i\}_{i=1,n}$ un conjunto de variables difusas independientes y normales de parámetros $\{(a_i,b_i)\}_{i=1,n}$ y sean $\{\alpha_i\}_{i=1,n}$ reales no nulos. Entonces

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \xi_i$$

es también normal, y de parámetros $\sum \alpha_i . a_i$ y $\sum |\alpha_i| . b_i$.

Si las opiniones de los individuos viniesen expresadas en la forma de números difusos en el sentido de Dubois-Prade (caso particular de la definición 2.9.1., pues será un conjunto difuso m con función de pertenencia $\mu_m : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ continua con máximo la unidad y tal que para cualesquiera x,y,z reales tales que $x \leq y \leq z$ se verifica que

$$\mu_m(y) \geq \min (\mu_m(x) \ , \mu_m(z) \ )$$

siendo la hipótesis de continuidad aceptada en orden a la aplicación en el contexto nuestro), se puede utilizar el teorema de extensión de Zadeh para agregar dichas opiniones, como alternativa a las técnicas que veremos en el capítulo III, basándonos en el siguiente resultado general:

TEOREMA 2.9.3.- Dados A,B números difusos y a,b reales, entonces aA+bB es un número difuso:

$$\begin{aligned}
\mu_{aA+bB}(z) &= \sigma \{ aA+bB=z \} = \sigma \left(\bigcup_{ax+by=z} \{ AxB=(x,y) \} \right) = \\
&= \sup_{ax+by=z} \sigma \{ AxB=(x,y) \} = \\
&= \sup_{ax+by=z} \min \{ \sigma(A=x) , \sigma(B=y) \} = \\
&= \sup_{ax+by=z} \min \{ \mu_A(x) , \mu_B(y) \}
\end{aligned}$$

con σ la medida de posibilidad.

Si las opiniones X_i son números difusos, Nahmias propone, para su agregación, el número difuso $Z = \sum \alpha_i . X_i$, con $\sum \alpha_i = 1$, que se adecúa mejor que los modelos según planteamientos de probabilidad subjetiva:

a) Si consideramos X_i según una distribución (probabilística) normal de parámetro (a,b), sabemos que $Z = \sum \alpha_i . X_i$ sigue otra distribución normal, pero distinta (de parámetros $\sum \alpha_i . a$ y $b . (\sum \alpha_i^2)^{-1/2}$), en contra de la unanimidad. Sólo tiene sentido este planteamiento si el problema es análogo al de estimación del parámetro media poblacional; no reflejaría nunca, bajo tal hipótesis, la opinión del grupo.

b) Si consideramos que cada individuo es una estimación de la función de pertenencia μ_z del grupo, y planteamos un modelo $\mu_{x_i}(y) = \mu_z(y) + \varepsilon_i(y)$ con $\{\varepsilon_i(y)\}$ distribuciones normales con propiedades razonables (independencia e igualmente distribuidas de media nula), solucionaríamos el problema de unanimidad anterior, pero en estimador máximo verosímil de μ_z no daría en general un número difuso.

c) Sin embargo, tenemos que ambos problemas se solucionan con la propuesta de Nahmias, según la proposición 2.9.2. , pues si $X_i = X$ son números difusos normales de parámetros (a,b), entonces $Z = \sum \alpha_i . X_i$ es otra normal de idénticos parámetros.

Claro es que esta propuesta de Nahmias no es más que una aplicación directa del principio de extensión, dando en este caso la versión difusa del estimador clásico de la media en inferencia. Así asociamos a

$$g(\vec{X}) = \sum_{1}^{n} \alpha_i . X_i$$

el conjunto difuso μ_g tal que

$$\mu_g(z) = \sup_{g(\vec{X})=Z} \min_{i=1,n} \{\mu_i(x_i)\}$$

y en general, por analogía, tendríamos versiones difusas de los criterios clásicos (nítidos), susceptibles de ser axiomatizados.

Nahmias (1979) desarrolla un ejemplo con función de pertenencia y distribuciones de probabilidad normales, pero ya señala que el problema general de inferencia difusa es extremadamente complejo, no habiéndose desarrollado todavía la base teórica apropiada. dado además que ciertos conceptos difusos (por ejemplo, no-interacción o independencia) parecen más bien traducciones forzadas del modelo probabilístico, con poca evidencia física.

En este sentido, siguiendo la línea de investigación propuesta por Blin (1977), es en el que se ha trabajado en esta memoria. "Fuzzy decision-making is still in its early age" (Dubois-Prade, 1980, página 277).

En resumen: un espacio de características difusas se compone de:

a) Una difusidad $(L, \mathcal{A}(L), \mu)$ "comprehensiva" donde $\mathcal{A}(L)$ es el σ-álgebra difusa de $L = \{L_{ij}\}_{i,j(i)}$ propiedades difusas.

b) Una difusidad $(X, \mathcal{A}(X), \mu)$ "extensiva" donde $\mathcal{A}(X)$ es la topología discreta del conjunto de objetos X.

c) Una medida de difusidad $\mu : LxX \longrightarrow [0,1]$ que por extensión se aplicará sobre $\mathcal{A}(L)xX$ y luego sobre el total $\mathcal{A}(L)x\ \mathcal{A}(X)$.

De este modo asociadas a a) se definen las funciones medibles difusas, y asociadas a b) las variables difusas; y evidentemente como composición de las variables y su función de pertenencia, todo conjunto difuso se puede expresar como variable difusa, suponiendo -lo cual no es muy restrictivo, incluso natural a menudo- que toda propiedad difusa tenga al menos un elemento nítido.

76

CAPITULO III

SOLUCIONES DIFUSAS EN LA DECISION DE GRUPOS

Nos enfrentamos, con todo el bagaje anterior, al problema de encontrar salidas positivas a la decisión de grupos. Y lo haremos según dos enfoques:

- El axiomático (teoremas de existencia)

- El multicriterio, donde desarrollaremos un método basado en los trabajos de B. Roy.

III.1.- Tratamiento axiomático.

Consideremos un proceso de decisión unietápico; siguiendo el esquema presente en la parte anterior de esta memoria, sean

* $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ el conjunto de alternativas, no difusas, con card(X) finito.

* $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$ el conjunto de decisores, nítido también, y en principio finito.

Supongamos que el input o información de entrada para la decisión es una relación binaria de opinión difusa por cada decisor:

$$\mu_i : X \times X \longrightarrow [0, 1]^3$$

que supondremos reflexivas y con una medida mínima de aciclidad:

$$A_1(\mu_i) = \alpha_i \geq \alpha \qquad \forall i = 1, \ldots, k$$

Cuando μ_i verifique ser reflexiva y con $A_1(\mu_i) \geq \alpha$, diremos que es un α-orden de opinión individual difusa.

DEFINICION 3.1.1.- Un perfil de opiniones difusas de grado α es una k-upla de α-órdenes de opiniones individuales difusas.

Entonces podemos plantearnos la existencia o no de funciones sociales en el sentido clásico (cfr. los trabajos de Arrow y Pardo). Notemos por $\mathcal{F}_\alpha(X) \subset \mathcal{R}(X)$ el conjunto de todos los α-órdenes de opiniones difusas. Entonces:

DEFINICION 3.1.2.- Una función social es todo aplicación que asocie a cada elemento de un conjunto $\mathcal{F}^k(X) \subset \mathcal{R}^k(X)$ de perfiles de opiniones difusas una opinión difusa $S(F) \in \mathcal{R}(X)$, para toda F de $\mathcal{F}^k(X)$.

Es claro que además de la reflexividad, a S(F) debiera exigírsele un mínimo β de aciclidad. Si $A_1(S(F)) \geq \beta$, para todo $F \in \mathcal{F}^k(X)$ se hablará de función social de grado β. El teorema de Arrow clásico aseguraba la inexistencia de una función social que verificase una serie de restricciones (un tipo de "racionalidad absoluta"). Imponiendo unas propiedades paralelas con el concepto de difusidad nos encontraremos con que siempre podremos evitar la irracionalidad absoluta.

DEFINICION 3.1.3.- A toda función social que verifique las siguientes propiedades la denominaremos "función de bienestar social":

C1.- DOMINIO UNIVERSAL: La función social está definida para todos los posibles perfiles de α-órdenes de opiniones difusas:

$$S : \mathcal{F}_\alpha^k(X) \longrightarrow \mathcal{R}(X)$$

C2.- ASOCIACION POSITIVA: Dado un perfil $F \in \mathcal{F}^k$ tal que

$$S(F)(a_i,a_j) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

y se considera otro perfil F' tal que

$$F(a_k,a_l) = F'(a_k,a_l) \qquad \forall\ k,l \neq i,j$$

pero se modifican las intensidades entre a_i y cualquier otra alternativa a_j a favor de a_i en la coordenada t (ésta no disminuye), entonces

$$S(F')(a_i,a_j) = (\mu_1', \mu_2', \mu_3')$$

es tal que $\mu_t' \geq \mu_t$.

C3.- INDEPENDENCIA DE ALTERNATIVAS IRRELEVANTES: Dado $X_1 \subset X$, si se consideran dos perfiles F y F' tales que

$$F(a_i,a_j) = F'(a_i,a_j)$$

para todos a_i y a_j en X_1 , entonces

$$S(F)(a_i,a_j) = S(F')(a_i,a_j)$$

para todos a_i y a_j que pertenezcan a X_1.

C4.- SOBERANIA CIUDADANA: Para cada par $a_i, a_j \in X$ y todo $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in [0,1]^3$ existe un perfil de órdenes de opiniones difusas F tal que

$$S(F)(a_i,a_j) = (\mu_1,\mu_2,\mu_3)$$

C5.- NO DICTADURA: No existe un individuo d en D tal que si

$$\mu_d(a_i,a_j) = (\mu_1,\mu_2,\mu_3)$$

entonces

$$S(F)(a_i,a_j) = (\mu_1^*,\mu_2^*,\mu_3^*)$$

con $\mu_1^* \geq \mu_1$ si $\mu_1 \geq \mu_3$.

Para reconstruir un teorema equivalente en forma al de Arrow cuestionamos si existe alguna función social que asocie a cada conjunto de k α-órdenes difusos un β-orden difuso, verificando estas condiciones, en un caso no trivial (con k mayor o igual a dos).

TEOREMA 3.1.1.- Dado $\alpha > 0$, existe al menos una función social definida sobre las k-uplas de α-órdenes en los β-órdenes (para algún $\beta \neq 0$) y que verifica C1,C2,C3,C4 y C5.

Demostración: Bastará construir una función social tal que nunca pueda dar lugar a un orden de grado cero. Definamos para toda k-upla de α-órdenes $(R_1, \ldots, R_k)$ el siguiente orden difuso:

$$S(R_1, \ldots, R_k)(a_i,a_j) = (\sigma_t(i,j))_{t=1,2,3}$$

con
$$\sigma_t(i,j) = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} \mu_t^{R_l}(a_i,a_j)$$

y es claro que S cumple los axiomas, estando bien definida, y evidentemente, si $\{R_l\}$ son α-órdenes, entonces $S(R_1, \ldots, R_k)$ es un orden (relación binaria de opinión difusa reflexiva) con grado de aciclidad todavía no determinado. Pero bajo estas hipótesis, dado cualquier induvuduo l y cualquier $X_1 \subset X$ con $card(X_1) = m$, alguno de sus casos acíclicos es de peso no nulo. Es trivial entonces que el mismo caso acíclico tiene peso no nulo mediante σ, con lo que será $A_1^{(m)}(X_1) \neq 0$, como queríamos demostrar.

Aún así, notamos el interés que puede tener el ponderar las opiniones de los individuos proporcionalmente a sus grados de coherencia -aciclidad-; estas ponderaciones anularían la condición C3, pues dependen de las demás preferencias. En concreto:

$$\sigma_t^A(i,j) = \frac{1}{\sum A(R_l)} \sum A(R_l) \cdot \mu_t^{R_l}(a_i, a_j)$$

Pero no sólo se verifica que dada una k-upla de α-órdenes ($\alpha > 0$) existe una regla que no es 1-cíclica en ningún caso, sino que es trivial demostrar que el ínfimo de los β es distinto de cero, haciendo uso de la hipótesis de que card(X) era finito.

Hemos propuesto, como es evidente, la variante lógica de la regla de la mayoría, esquivando el efecto Condorcet como irracionalidad absoluta; la irracionalidad entendida como ciclidad deja paso al concepto de "conflictividad", y quizá más correcto en este contexto al de entropía de la agregación.

Así pues, tenemos un teorema de existencia de funciones sociales de algún grado $\beta > 0$, para cualquier $\alpha > 0$ exigido en el input (opiniones personales). Si no se verifica la unicidad se plantearía un problema de optimización (buscar S tal que su mínimo grado sea máximo, por ejemplo, y analizar dicho conjunto optimal), que parece natural intentar resolver mediante el uso de otro criterio (unanimidad, entropía del grupo agregado), lo cual nos sugiere un tratamiento -

multicriterio, que veremos en su momento.

Pero es evidente que dicha unicidad no se verifica: por ejemplo, tomando como base

$$\sigma_t^1(i,j) = \sigma_t^2(i,j) \qquad t=1,3$$

e imponiendo la segunda coordenada de tal forma que la suma de las tres sea la unidad, la nueva regla verifica también las cinco condiciones. Se trataría entonces de buscar una regla tal que la máxima ciclidad posible sea mínima, y en su defecto, que esté a una distancia subjetivamente pequeña del ínfimo.

Mas, de igual modo a como Blau encontró un contraejemplo al primer teorema de imposibilidad propuesto por Arrow, con esas condiciones no queda eliminada la posibilidad de existencia de "dictadores" que solucionan localmente las inconsistencias, es decir, individuos que rebajen la ciclidad de la regla del grupo mediante su imposición: pesando más la opinión de un individuo concreto, es claro que se acota el grado de ciclidad posible, por ejemplo definiendo

$$\sigma_t^{(m)}(i,j) = \frac{1}{k+m}\left((m+1)\mu_t^{R_1}(a_i,a_j) + \sum_{l=2}^{k} \mu_t^{R_l}(a_i,a_j)\right)$$

se cumplen los cinco axiomas, y si μ^{R_1} es un α-orden, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $m(\varepsilon)$ tal que si $m \geqslant m(\varepsilon)$ entonces la regla $\sigma^{(m)}$ es de grado $\alpha - \varepsilon$, al ponderar cada vez más algo acíclico en esa medida.

TEOREMA 3.1.2.- Dado un $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \alpha$), existe al menos una función social definida sobre las k-uplas de α-órdenes en los $(\alpha - \varepsilon)$-órdenes y que verifica los axiomas C1,C2,C3,C4 y C5.

No parece muy ético, sin embargo, solucionar todos los problemas dejando que casi decida un individuo. Notamos en lo expuesto que el concepto de "dictador" es otro difuso, pues se es dictador con mayor o menor fuerza. Asignemos a cada regla regla F una aplicación

$$\gamma : D \longrightarrow [0,1]$$

difuso Zadeh que determine el grado en el que cada decisor es dictador;

DEFINICION 3.1.4.- Se dice que un individuo d en D es un γ-dictador sobre el par (a_k,a_j) en D para una regla F dada, y en la coordenada t si

$$\mu_d(a_k,a_j)=(\mu_1,\mu_2,\mu_3) \Rightarrow S(F)(a_k,a_j)=(\mu_1^D,\mu_2^D,\mu_3^D)$$

con

$$\mu_t^D \geq \gamma.\mu_t$$

siendo $\gamma \in [0,1]$ el máximo valor que verifica esta condición.

Análogo para el veto (cfr. los trabajos de Blau y Deb):

DEFINICION 3.1.5. Se dice que un individuo d tiene un γ-veto sobre (a_i,a_j) si

$$\mu_t^D \leq 1 - (1-\mu_t).\gamma$$

con γ el máximo de los que verifican esta condición, y como antes, sean cuales sean los perfiles de los demás individuos.

PROPOSICION 3.1.1.- La condición C5 implica la no existencia de ningún 1-dictador.

Entendiendo por γ-dictador aquél que lo es sobre cada par (análogo γ-veto) en las tres coordenadas.

PROPOSICION 3.1.2.- Si existe en D un individuo γ-dictador (γ-veto), entonces cada individuo en D distinto de él tiene a lo más un $(1-\gamma)$-veto. (Análogamente, es $(1-\gamma)$-dictador).

Un problema sería fijar una cota superior γ para alguna (o ambas) características y buscar funciones sociales con la mayor aciclidad posible. De todas formas, el trabajar con la condición C5 difusa, - como estamos haciendo, sugiere intentar lo equivalente con las otras condiciones (ver, por ejemplo, Blin(1976) sobre la condición C3).

DEFINICION 3.1.6.- Se dirá que un individuo $d \in D$ es γ-decisivo si es γ-dictador y tiene un γ-veto.

Parece deseable que este valor sea $\gamma = 1/k$ si card(D)=k, al mismo tiempo que se verifica esta propiedad de proporcionalidad en los grupos: $\sigma_t^!$ hace de todo individuo $(1/(k^2))$-decisivo, con lo que se podría hablar de opresión social sobre cada individuo, en el sentido de que la decisividad individual es menor que el valor proporcional. Si tenemos $G \subset D$ con card (G)= g, se dirá que G es γ-decisivo cuando

$$\gamma . \mu_t^G \leq \mu_t^D \leq 1 - (1-\mu_t^G) . \gamma \qquad \text{para todo } t$$

sean cuales sean los perfiles en D-G, y para todo par comparado.

CONDICION C5': Todo conjunto $G \subset D$ con card(G)= g, es g/k -decisivo.

Es claro que la función social citada basada en σ_t verifica C1, C2, C3, C4, y C5. Todas las condiciones del tratamiento clasico admiten una versión de este tipo, obteniéndose resultados análogos. Por ejemplo, tendríamos un teorema de existencia basado en el teorema de Sen sobre las condiciones clásicas 1', A, N y RP, ahora con C1, C2 y

CONDICION A.- Dados d, d' $\in$ D y dos perfiles de opiniones difusas $F = \{R_i\}$, y $F^* = \{R_i^*\}$, tales que

$$R_i = R_i^* \qquad \forall\ i \neq d,d'$$

$$R_d = R_{d'}^*$$

$$R_{d'} = R_d^*$$

Entonces $S(F) = S(F^*)$.

CONDICION N.- Dadas dos alternativas $i,j \in X$ y dos perfiles de opiniones difusas $F = \{R_l\}$ y $F^* = \{R_l^*\}$ tales que

$$\mu^{R_l}(a_i,a_t) = \mu^{R_l^*}(a_j,a_t)$$

$$\mu^{R_l}(a_j,a_t) = \mu^{R_l^*}(a_i,a_t)$$

es la única diferencia existente entre ellos (para todo t), entonces

$$S(F)(a_i,a_t) = S(F^*)(a_j,a_t)$$

es la única diferencia entre S(F) y S(F*).

Las reglas del tipo $\sigma_t'^{(m)} = (\sigma_t)^m$ para t=1,3 y para t=2 el valor calculado, aglutinan el peso en la indiferencia social, lo cual aporta la posibilidad de disminuir la aciclidad en algún caso, pero no en general (por ejemplo, si $\sigma_1(a_i,a_j)=1$, $\sigma_1(a_j,a_k)=1$, y además $\sigma_1(a_i,a_k)=0.9$). Sería una buena técnica para trabajar on cuasiaciclidades (de este modo se corresponde con lo que Sen ha denominado "impurezas").

Para obtener la unicidad en la función social basada en la que hemos dado en llamar proporcional bastará exigir alguna condición de linealidad: que σ_t sólo dependa de los μ_t a través de una función σ independiente de t, tal que a un incremento h (en una cualquiera de sus coordenadas) le corresponde un incremento L.h, con L constante. Es evidente que se verifica en este caso la unanimidad (si todos los individuos tienen el mismo perfil de preferencia la sociedad tiene ese perfil) y de sustitución (si a todos los miembros de un subgrupo se les cambia su perfil por la agregación de este subgrupo, la agregación del grupo total no se modifica).

Así es claro que, como dicen Fung y Fu, los modelos de agregación de grupos persiguen reducir la excesiva subjetividad de los individuos aislados.

Fung-Fu (1975), por otra parte, tratando formalmente cada individuo como un criterio (el problema de decisión de grupos es un caso particular de los problemas multicriterio), asigna a cada decisor un L-difuso sobre el conjunto de las alternativas, de tal forma que $\mu_d(x_j)$ representaría el grado de preferencia de la acción x_j para el decisor d (quizá mejor deba interpretarse como "grado de aceptación"), exigiendo a L determinadas propiedades que, desde luego verifica el intervalo $[0,1]$, aunque L no necesariamente ha de ser acotado.

La axiomática de Fung-Fu se basa en la agregación como operación binaria "$\circledast$" en L de tal modo que $B_1 \circledast B_2$ representa la agregación de los conjuntos difusos B_1 y B_2, y que es a su vez otro difuso:

$$B_1 \circledast B_2 \; : \; X \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longrightarrow \mu_{B_1}(x) \circledast \mu_{B_2}(x)$$

Fung y Fu proponen los siguientes axiomas (es claro que en el axioma II subyace una condición de anonimato, y el I es el orden lineal en L):

CONTINUIDAD: La operación binaria "$\circledast$" es continua en la topología de L.

MONOTONICIDAD: Si $B_1 = B \circledast C_1$, y $B_2 = B \circledast C_2$ son tales que

$$\mu_{C_1}(x) > \mu_{C_2}(x)$$

entonces

$$\mu_{B_1}(x) \geqslant \mu_{B_2}(x)$$

IDEMPOTENCIA: $B_i \circledast B_i = B_i$ (unanimidad)

CONMUTATIVIDAD: $B_i \circledast B_j = B_j \circledast B_i$

ASOCIATIVIDAD: $B_i \circledast (B_j \circledast B_k) = (B_i \circledast B_j) \circledast B_k$

De tal modo que la agregación de tres o más preferencias se hace inductivamente:

$$B_1 \circledast B_2 \; \ldots \; \circledast B_m = (B_1 \circledast B_2 \; \ldots \; \circledast B_{m-1}) \circledast B_m$$

TEOREMA 3.1.3.- (Fung-Fu, 1975): Sea L y "$\circledast$" satisfaciendo los axiomas anteriores. Entonces las únicas opciones para "$\circledast$" son las siguientes:

a) $a \circledast b = \min(a,b)$ o agregación pesimista

b) $a \circledast b = \max(a,b)$ o agregacion optimista

c) Existe $\alpha \in L$ tal que

$a \circledast b = \max(a,b)$ si $a,b \leq \alpha$

$a \circledast b = \min(a,b)$ si $a,b \geq \alpha$

$a \circledast b = \alpha$ en caso contrario.

Se pueden obtener entonces las unicidades de la regla optimista o de la pesimista, sustituyendo el axioma de monotonicidad por el axioma siguiente, respectivamente en cada caso:

<u>OPTIMISMO</u> : Existe $\alpha \in L$ y una cota superior "1" de L tal que $\beta < x \leq 1 \Rightarrow 1 \circledast x = 1$

<u>PESIMISMO</u> : Existe $\alpha \in L$ y una cota inferior "0" de L tal que $0 \leq x < \alpha \Rightarrow 0 \circledast x = 0$

Así, con el axioma de pesimismo -y los demás- queda justificado el principio minimax, que escoge como mejor acción x* tal que

$$\mu(a^*) = \sup_{x} \min_{i=1\ldots m} \mu_{B_i}(a)$$

siendo X el conjunto de alternativas y m el número de decisores. Notar que el valor $\mu_{B_i}(a)$ representa la admisibilidad asignada por B_i a la acción a, con lo que la base de la decisión no es una relación de preferencia (ver el capítulo dedicado al tratamiento multicriterio) y por otra parte, el conceder a la acción a un valor $\min \mu_{B_i}(a)$ significaría conceder a cada individuo un 1-veto y una 0-dictadura.

Tendremos que llevar a cabo alguna modificación para aplicar la idea de Fung-Fu en este contexto. La clave estará en considerar, - junto con los valores a agregar, los "pesos" de dichos valores, - siendo fácil introducir axiomas para asegurar que la agregación sólo depende de dichas cantidades. Daremos una modificación de la operación de agregación que no supondrá en principio el anonimato, pero que nos permitirá representar las funciones de decisión social que nos interesan:

DEFINICION 3.1.7.- Una operación de agregación de opiniones difusas se define sobre los pares de grupos de D y asigna a cada par de opiniones difusas (se supone pues una condición de dominio universal) una opinión del grupo unión:

$$\circledast : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

siendo $\mathcal{M} = \mathcal{R}(X) \times \mathcal{P}(D)$ y tal que para todo par de grupos (elementos de las partes de D) disjuntos es

$$(F_1, G_1) \times (F_2, G_2) \xrightarrow{\circledast} (F_1 \oplus F_2 \,,\, G_1 \cup G_2)$$

con $\circledast$ asociativa y conmutativa, y $\oplus$ continua.

Podría parecer natural, sobre todo para simplificar el tratamiento, exigir un axioma de agregación por coordenadas, según el cual - se agreguen por una lado cada preferencia estricta y por otro las - indiferencias, notando además cada una por $\oplus_t$, que por otra parte depende de los grupos que se estén agregando.

Impondremos un axioma de alternativas irrelevantes, de tal modo que

$$\mu^{F_1 \oplus F_2}(a_i, a_j)$$

no dependa de

$$\mu^{F_1}(a_l, a_m)$$

ni de

$$\mu^{F_2}(a_l, a_m)$$

para $\{l,m\} \neq \{i,j\}$.

El objetivo será el estudio de agregaciones

$$(\mu^{F_1}(a_i,a_j)\ ,\ G_1) \times (\mu^{F_2}(a_i,a_j)\ ,\ G_2) \xrightarrow{\circledast}$$

$$\longrightarrow (\mu^{F_1}(a_i,a_j) \oplus \mu^{F_2}(a_i,a_j)\ ,\ G_1 \cup G_2)$$

con "$\oplus$" dependiendo en un principio tanto de G_1 como de G_2 , que aunque se han supuesto disjuntos ($G_1 \cap G_2 = \emptyset$), la generalización es trivial. Tal operación también se ha supuesto conmutativa sólo en el sentido requerido por la operación "$\circledast$", y es evidente su asociatividad.

Por otra parte, de suponer el anonimato y la sustitución, es fácil ver que "$\oplus$" depende de G_1 y G_2 sólo a través de sus cardinales (notar que de darse la condición de soberanía ciudadana, generalización trivial de la vista en el planteamiento no difuso, los axiomas de sustitución y unanimidad son equivalentes, dándose siempre la implicación de ésta sobre aquélla).

CONDICION DE ANONIMATO : Sean F_G, F_i y F_j los perfiles de un grupo $G \subset D$ y de dos individuos en $D-G$ tales que $F_i \equiv F_j$. Entonces

$$(F_j\ ,\ \{j\}\ )\ \circledast\ (F_G\ ,\ G)$$

y

$$(F_i\ ,\ \{i\}\ )\ \circledast\ (F_G\ ,\ G)$$

tienen idéntica su primera coordenada.

Observamos que de exigir la agregación por coordenadas, el criterio del teorema 3.1.3. -sea la versión optimista o la pesimista- no es consistente, pues la suma de las tres coordenadas no sería, en general, la unidad.

LEMA.- Sea "$\circledast$" la operación de agregación de grupos, verificando las condiciones

i) Alternativas irrelevantes

ii) Anonimato

iii) Neutralidad

Entonces "$\circledast$" queda unívocamente determinado por un conjunto de operaciones binarias

$$\oplus^k\ :\ [0,1]^3 \times [0,1]^3 \longrightarrow [0,1]^3$$

para $k = 2,3,\ldots \mathrm{card}(D)$, y tales que sean compatibles con la asociatividad requerida a "$\circledast$".

Demostración: por la asociatividad de $\circledast$, es claro que inductivamente podemos obtener la agregación de todo par de grupos, teniéndola definida sobre las estricciones que agregan un subgrupo G con un individuo fuera de él. Por el anonimato esta agregación no depende de quiénes formen G y ese individuo aislado, sino sólo de cuántos sean: card(D)= k-1 (a lo sumo depende de esto; la asociatividad del teorema 3.1.3. impone la independencia incluso respecto de este cardinal). Es decir, basta estudiar

$$\oplus^k : \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X) \longrightarrow \mathcal{R}(X)$$

pero por el axioma de alternativas irrelevantes es suficiente determinar los valores de

$$\mu^1(a_i,a_j) \oplus^k \mu^{k-1}(a_i,a_j) = \mu^k(a_i,a_j)$$

que agrega la opinión sobre el par (a_i,a_j) de un individuo y un grupo de k-1 personas distintas de aquél, con k tomando valores entre 2 y card(D).

Además, al tratarse de opiniones difusas, cada terna $\mu(a_i,a_j)$ queda descrita por el par formado por dos cualesquiera de sus coordenadas, y como sabemos que

$$\mu_3(a_i,a_j) = \mu_1(a_j,a_i)$$

será suficiente, dada la condidión de neutralidad, definir la función $\oplus^k$ tal como dice el enunciado del lema.

Incluso es suficiente el conocimiento de su primera proyección $\oplus_1^k$, tal que verifique

$$\oplus_1^k(a_i,a_j) + \oplus_1^k(a_j,a_i) \leq 1$$

ya que entonces

$$\oplus^{k}(\mu^{1}(a_i,a_j)\ ,\ \mu^{k-1}(a_i,a_j)) = \mu^{k}(a_i,a_j)$$

con

$$\mu_1^k(a_i,a_j) = \oplus_1^k(\mu^1(a_i,a_j)\ ,\ \mu^{k-1}(a_i,a_j))$$

$$\mu_2^k(a_i,a_j) = 1 - \mu_1^k(a_i,a_j) - \mu_3^k(a_i,a_j)$$

$$\mu_3^k(a_i,a_j) = \mu_1^k(a_j,a_i)$$

o bien la determinación de la suma de las dos primeras coordenadas, que podemos notar a partir de ahora por $\oplus_{1,2}^{k}$.

También hemos visto que, si γ_k^V es el veto y γ_k^D es la dictadura de un grupo de cardinal k, entonces, para t=1,2,3, ha de ser

$$\mu_t^k \in \Big[\max\ (\gamma_k^D\cdot\mu_t^{k-1}\ ,\ \gamma_1^D\cdot\mu_t^1)\ ;\ ,\min\ ((1-\gamma_{k-1}^V)+\gamma_{k-1}^V\cdot\mu_t^{k-1},\ (1-\gamma_1^V)+\gamma_1^V\cdot\mu_t^1)\Big]$$

intervalo que contiene al

$$\Big[\min\ (\mu_t^{k-1},\mu_t^1)\ ,\ \max\ (\mu_t^{k-1},\mu_t^1)\Big]$$

PROPOSICION 3.1.3.- Bajo el mismo contexto del lema anterior, si γ_k^D es la dictadura de un grupo de cardinal k, entonces ha de ser, para todos i+j=k,

$$\gamma_i^D + \gamma_j^D \leq 1$$

$$\gamma_i^D + \gamma_j^V \leq 1$$

Demostración: Por lo anterior, será necesario, para que exista alguna solución, que sea

$$\text{Max} \sum_{t=1}^{3} \max \left(\gamma_i^D \cdot \mu_t^i \,,\ \gamma_j^D \cdot \mu_t^j \right) \leq 1$$

máximo que toma el valor $\gamma_i^D + \gamma_j^D$, con lo que queda demostrado.

De suponer la proporcionalidad (aditividad de los valores individuales hasta lograr $\gamma_k = 1$, con anonimato), será $\gamma_i^D + \gamma_j^D = 1$.

Apoyándonos, como hemos visto, en que los índices de dictadura imponen restricciones sobre los índices de veto posibles y recíprocamente, es fácil comprobar que ha de ser

$$\gamma_{k-i}^D \leq 1 - \gamma_i^V$$

asegurándonos de que tienen sentido los intervalos de definición (son no vacíos).

PROPOSICION 3.1.4.- Sea "$\circledast$" verificando i), ii), iii) y además

iv) unanimidad por coordenadas

v) asociación positiva

Entonces:

a) Se verifica la agregación por coordenadas

b) Si están definidos los γ-vetos (o dictaduras) de grupos de cardinal i dentro de grupos de cardinal j (que denotamos por $\gamma_{i/j}$, con $j > i$), entonces

$$\gamma_{i/j} = \gamma_{i/k} \cdot \gamma_{k/j} \qquad \forall \ i < k < j$$

La clave de la demostración está en la simetría de "$\oplus$" y la asociatividad de "$\circledast$". Obsérvese que

$$\oplus_1^k(x,y) \in \Big[\max(\gamma^D_{1/k}\cdot x,\ \gamma^D_{1/k-1}\cdot y\ ,$$

$$\min(1-\gamma^V_{1/k}+\gamma^V_{1/k}\cdot x\ ,\ 1-\gamma^V_{1-1/k}+\gamma^V_{1-1/k}\cdot y\ )\Big]$$

implica

$$\oplus_1^k(1-x\ ,\ 1-y) = 1 - \oplus_1^k(x,y) \quad \in$$

$$\in \Big[\max(\gamma^V_{1/k}(1-x)\ ,\ \gamma^V_{1-1/k}(1-y)\ ,$$

$$\min(1-\gamma^D_{1/k}+\gamma^D_{1/k}(1-x)\ ,\ 1-\gamma^V_{1-1/k}+\gamma^V_{1-1/k}(1-y))\Big]$$

<u>COROLARIO</u>.- Determinados $\left\{\gamma_{1/k} \neq 0\right\}$, para todo k, entonces

$$\gamma_{i/j} = \prod_{k=i}^{j-1} \gamma_{k/(k+1)} = (\gamma_{1/j})/(\gamma_{1/i}) \qquad \forall\ i < j$$

<u>PROPIEDAD 3.1.5.</u>- Si se verifican las condiciones i), ii), iii), iv) y v), entonces

$$\oplus_1^k(x,y) = 1 - \oplus_1^k(1-x,1-y)$$

La demostración es trivial considerando la agregación

$$(x,0,1-x)\ \oplus^k\ (y,0,1-y)$$

y aplicar la proposición anterior.

<u>TEOREMA 3.1.4.</u>- Toda operación de agregación $\circledast^k$ verificando i), ii), iii), iv) y v), y tal que tenga definidos unos $\gamma^V_{1/k}$-vetos y -

y $\gamma^{D}_{1/k}$-dictaduras, viene caracterizado unívocamente por una aplicación continua

$$\oplus^{k}_{1} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

que verifica

a) $x^{*} > x \ , \ y^{*} > y \Rightarrow \oplus^{k}_{1}(x^{*},z) \geq \oplus^{k}_{1}(x,z)$

$$\oplus^{k}_{1}(z,y^{*}) \geq \oplus^{k}_{1}(z,y^{*}) \qquad \forall\ z$$

b) $\oplus^{k}_{1}(x,y) \in \Big[\max(\gamma^{D}_{1/k}\cdot x \ , \ \gamma^{D}_{1-1/k}\cdot y) \ ,$

$$\min(1-\gamma^{V}_{1/k}+\gamma^{V}_{1/k}\cdot x \ , \ 1-\gamma^{V}_{1-1/k}+\gamma^{V}_{1-1/k}\cdot y)\Big]$$

con $\gamma_{(k-1)/k} = (\gamma_{1/k})/(\gamma_{1/(k-1)})$, siendo ambos extremos alcanzables para algún x,y .

c) $\oplus^{k}_{1}(x,y) = 1 - \oplus^{k}_{1}(1-x,1-y)$

d) $\oplus^{k}_{1}(x,x) = x$

<u>Demostración</u>: Es claro que para toda $\oplus^{k}$ existe una $\oplus^{k}_{1}$ verificando estas propiedades, y además única. También es claro que si una tal $\oplus^{k}_{1}$ las verifica, la $\oplus^{k}$ que determinamos haciendo coincidir $\oplus^{k}_{3} = \oplus^{k}_{1}$ y tomando $\oplus^{k}_{2} = 1 - \oplus^{k}_{1} - \oplus^{k}_{3}$ verifica la conmutatividad, continuidad y además i), ii), iii) y iv). Quedaría por comprobar la asociatividad y los vetos y dictaduras, utilizando para ello la extensión evidente.

<u>TEOREMA 3.1.5.</u>- En las condiciones i), ii), iii), iv) y v), si es-

tán definidas las decisividades de forma que

$$\gamma_{1/k} = \gamma^{V}_{1/k} = \gamma^{D}_{1/k} = 1 - \gamma_{1-1/k}$$

(con la máxima decisividad asociada) entonces la única regla de asociación es la determinada por

$$\oplus^{k}_{1}(x,y) = \gamma_{1/k}.x + \gamma_{1-1/k}.y$$

Demostración: supongamos que existen x,y tales que

$$\oplus^{k}_{1}(x,y) > \gamma_{1/k}.x + \gamma_{1-1/k}.y$$

(análogo si menor estricto, ya que si existen x',y' con

$$\oplus^{k}_{1}(x',y') < \gamma_{1/k}.x' + \gamma_{1-1/k}.y'$$

es claro que $\oplus^{k}_{1}(1-x',1-y')$ cumplen lo primero, por la propiedad 3.1.5.). Supongamos que $x < y$ (por la unanimidad no pueden ser iguales). Entonces consideramos

$$(x\ ,\ y-x\ ,\ 1-y)\quad \oplus^{k}\quad (y\ ,\ 0\ ,\ 1-y)$$

$$\begin{aligned}\oplus^{k}_{2}(y-x,0) &= 1 - \oplus^{k}_{1}(x,y) - \oplus^{k}_{1}(1-y,1-y) < \\ &< 1 - (\gamma_{1/k}.x + \gamma_{1-1/k}.y) - (1-y) = \\ &= \gamma_{1/k}.(y-x)\end{aligned}$$

de tal modo que se infringe la $\gamma_{1/k}$-dictadura en la segunda coordenada (de suponer el menor estricto se infringiría, de modo paralelo, el $\gamma_{1/k}$-veto).

PROPIEDAD 3.1.6.- Si están definidas γ-decisividades (γ-vetos ó γ-dictaduras) tales que

$$\text{vi)} \quad \gamma_{1/k} = 1 - \gamma_{1-1/k} \qquad \forall \; k \geq 2$$

entonces ha de ser

$$\gamma_{1/k} = 1/k$$

$$\gamma_{i/j} = i/j$$

La demostración se puede hacer por inducción, apoyándose en el hecho de que por la asociatividad ha de verificarse

$$\gamma_{1/k} = \prod_{i=1}^{k-1} \gamma_{i/(i+1)} \qquad \forall \; k \geq 2$$

Y entonces es trivial comprobar que:

COROLARIO: Bajo las condiciones i), ii), iii), iv), v) y vi), la única regla de asociación es la que asigna a cada par de alternativas y cada k-upla de opiniones difusas la opinión social

$$\oplus \left(\{\mu_t^i\}_{t=1,2,3} \right)_{i=1,\ldots k} = \left(\mu_t^G \right)_{t=1,2,3}$$

donde $\mu_t^G = (1/k) . \sum_{i=1}^{k} \mu_t^i$.

El resultado análogo a las reglas clásicas podría venir dado por el siguiente teorema (recordemos que el máximo y el mínimo en todas las coordenadas es inconsistente):

TEOREMA 3.1.6.- Bajo las condiciones i), ii), iii) y

iv*) unanimidad en la primera coordenada (y por tanto en la tercera)

v*) asociación positiva en la primera coordenada (y en la tercera).

vi*) está definido un veto $\gamma^{V}_{1/k} = 1$, para todo k, sobre la primera coordenada (y por tanto en la tercera)

Entonces la única regla compatible es la determinada por

$$\oplus^{k}_{1}(x,y) = \min\ (x,y)$$

o lo que es equivalente, por

$$\oplus^{k}_{1,2}(x,y) = \max\ (x,y)$$

Demostración: el paso clave está en que si $x > y$, por v*) y iv*) ha de ser

$$\oplus^{k}_{1}(x,y) \geqslant \oplus^{k}_{1}(y,y) = y$$

siendo evidente la contradicción de suponer el menor estricto, por la condición vi*).

La equivalencia propuesta es fácil de comprobar, recordando que

$$\oplus^{k}_{1,2}(x,y) = 1 - \oplus^{k}_{3}(1-x,1-y) =$$

$$= 1 - \min(1-x,1-y) = \max(x,y)$$

y es además evidente que el imponer un 1-veto sobre la primera y tercera coordenada equivale a imponer una 1-dictadura ($\gamma^{D}_{1/k} = 1$) sobre la segunda coordenada (indiferencia).

De este modo, a partir de la agregación obtenida siguiendo algu na de las axiomáticas, plausibles para el grupo decisor, puede elaborarse el proceso de elección de una alternativa social, siguiendo cualquiera de los métodos que veremos en la siguiente sección (soluciones mínimo-consensuales, o en la línea de Orlovsky, Roy, etc.)

III.2.- Tratamiento multicriterio.

Expondremos en este apartado el enfoque estrictamente multicriterio de la decisión de grupos, aplicando a este problema algunas variantes de técnicas ya conocidas (Opricovic, Orlovsky, Roy, Siskos, etc.)

Es de resaltar que, como dice Blin (1977), la multiplicidad de los criterios de pertenencia (recuérdese el ejemplo de los colores) está en la raiz misma del concepto de conjunto difuso. Y no sólo esto, sino que existe un isomorfismo entre la clase de los conjuntos difusos y los procedimientos multicriterio (cada criterio es una ordenación, y a un grupo de criterios se le asigna otra ordenación). Los problemas que surgen de la multiplicidad de evaluación de criterios (que a su vez se pueden dividir en subcriterios, según jerarquías analizadas por Saaty, por ejemplo) son intrínsecamente problemas de conjuntos difusos (tipo clásico de Zadeh y en general de Goguen), y muchas de las técnicas usadas no son más que métodos de considerar versiones difusas del problema. En este punto, señala Blin, se podrán generar nuevos métodos, mediante tal metodología, basándose en los procedimientos clásicos multicriterio, teniendo siempre en cuenta al consumidor en la elaboración de dicha versión difusa ("fuzzifying") y las estimaciones necesarias.

En el mismo artículo, Blin distingue entre las estimaciones objetivas (basadas en una métrica) y las subjetivas (ambas han sido utilizadas en diferentes momentos a lo largo de la memoria), y critica la noción de eficiencia clásica en el sentido ya expuesto de que se necesita otro criterio para escoger entre las soluciones eficientes, y porque además elimina de los planteamientos posteriores alternativas que en la práctica pueden ser utilizadas en el proceso completo de decisión.

Lo trivial (Blin, 1977) es interpretar cada criterio como un votante y determinar el conjunto difuso de soluciones eficientes:

<u>DEFINICION 3.2.1.</u>- (Optimalidad Pareto): μ^R es eficiente si y sólo si no existe $\mu^{R'}$ tal que

$$f_j(\mu^{R'}) \geqslant f_j(\mu^R)$$

para todo criterio j, con alguna desigualdad estricta.

El grado de pertenencia (en el sentido Zadeh) al conjunto eficiente vendrá dado en nuestro caso por

$$\mu_E(\mu^R) = \text{Min} \; (f_0(\mu^R) \; , \; f_1(\mu^R) \;)$$

ya que parece natural tener dos criterios: uno que mida la tranquilidad social (consenso, entropía, f_0) junto con el de racionalidad (aciclidad, f_1).

Puede ser conveniente en algún caso asignar pesos λ_i con la condición $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, a cada $f_i(\mu^R)$, en las líneas propuestas por Blin en dicho artículo, o las de Opricovic. Yager (1978) propone otro tratamiento, con pesos en las potencias, pero lo más sencillo, aunque muy criticble, sería

$$\text{Max} \sum_{i=0,1} \lambda_i . f_i(\mu^R)$$

La noción de consenso está íntimamente ligada a las medidas de difusidad, nitidez y entropía (De Luca-Termini, 1972,1979; Dubois-Prade, 1980; Bezdek-Spillman-Spillman,1978), siendo evidente su relación con la nitidez de k-particiones difusas. La matriz de consenso a la que se refieren muchos textos es la ordenación social, de donde, a partir de su traza, se proponen las medidas clásicas de consenso. Así mismo, en el libro de Dubois-Prade vienen abundantes referencias sobre el tema, resaltando los trabajos de Ragade sobre el consenso secuencial; aunque sea siempre un "consenso" con distinto sentido del de "tensión social" aquí expuesto, es por supuesto aplicable en este contexto, pudiendo utilizarlo como tercer criterio en la decisión del grupo.

Suponiendo las preferencias individuales dadas en forma de opiniones difusas ($L = [0,1]^3$) podemos en principio proponer como medida de nuestro consenso (estabilidad de una opinión frente a las opiniones del grupo) cualquier distancia basada en las métricas L_p, que nos medirán de algún modo el grado de tensión social para las opiniones individuales $\{\mu^{R_i}\}_{i=1,k}$ y la opinión social μ^R. Por ejemplo, podemos suponer la tensión $1-f_0(\mu^R)$ de distintas formas:

$$\eta_p(\{\mu^{R_i}\}_{i=1,k}, \mu^R) = (n.k^{1/p})^{-1} . \sum_{j=1,n} \left[\sum_{i=1,k} (d_j(R_i,R)^p) \right]^{1/p}$$

donde

$$d_j(R_i,R) = \left| \mu_1^{R_i}(j) - \mu_1^{R}(j) \right|$$

o bien

$$T_\infty \left(\{\mu^{R_i}\}_{i=1,k}, \mu^{R} \right) = (1/n) . \sum_{j=i,n} \max_{i=1,k} d_j(R_i,R)$$

con n=m.(m-1) el número de pares ordenador que se comparan y m el número de alternativas. Ambas medidas se proponen suponiendo que las diferencias de opinión en las segundas coordenadas no provocan tensión social alguna.

Evidentemente, quien invalide la aciclidad como criterio, buscará sin más las ordenaciones que minimicen (basta que sea a una distancia suficientemente pequeña de dicho mínimo)

$$\min T_p \left(\{\mu^{R_i}\}, \mu^{R} \right)$$

para algún p (como antes puede ser finito o infinito) para luego aplicar algún critrio que nos sirva para tomar la decisión última, que es lo que usualmente interesa:

<u>PROPOSICION 3.2.1.</u>- Para p=2 y p= ∞ , las opiniones máximo-consensuales son, respectivamente,

$$\mu_1^{R}(j) = (1/k) . \sum_{i=1}^{k} \mu_1^{R_i}(j)$$

$$\mu_1^{R}(j) = \frac{1}{2} \left(\max_{i=1,k} \mu^{R_i}(j) + \min_{i=1,k} \mu^{R_i}(j) \right)$$

a partir de las cuales se obtienen, como ya se ha indicado, las -

opiniones completas μ^R.

Pero manteniendo los dos criterios nos encontramos que el problema de programación con restricciones

$$\min \, T_p \left(\{\mu^{R_i}\}, \mu^R \right)$$

sujeto a

$$A^{(k)}(\mu^R) \geqslant \alpha_k \qquad \forall\, k$$

que nos asegura una cierta aciclidad, aunque posible mediante los algoritmos clásicos, es compleja (cfr. Seif et al., 1980; Kacprzyk, 1978; y Dyson, 1980, sobre programación difusa).

Opricovic (1981) aporta un algoritmo que desde luego es aplicable a nuestro problema bicriterio:

$$f_o(\mu^R) = 1 - T_p(\{\mu^{R_i}\}, \mu^R)$$

con p fijo, y

$$f_1(\mu^R) = A(\mu^R)$$

(aunque quizás sea más razonables tomar una suma ponderada de las aciclidades,

$$f_1(\mu^R) = \sum_{i=1} p_i \cdot A^{(i)}(\mu^R)$$

con el conjunto de pesos $\{p_i\}$ "razonables" de algún modo, como que sea una sucesión monótona decreciente con límite cero).

Define Opricovic la solución ideal

$$F^* = (f_o^* , f_1^* , \dots , f_n^*)$$

tal que

$$f_i^* = \max_{\mu^R} f_i(\mu^R)$$

(en nuestro caso, n=2, y $f_i^* = 1$ para todo i).

En general, y también en nuestro problema, es francamente difícil que F* sea solución factible. Se define, bajo cada métrica L_p:

$$R(\mu^R, p) = (\sum_{i=o}^{n} (f_i^* - f_i(\mu^R))^p)^{1/p}$$

y a partir de ello el conjunto de soluciones de compromiso:

$$F_c = \left\{ F_c(p) = \arg\min R(\mu^R, p) \ , \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \right\}$$

Es claro que para p=1 la solución de compromiso está basada en la estrategia que maximiza la utilidad del grupo, y para $p=\infty$ en la estrategia minimax.

Se define la solución pésima F^- de coordenadas

$$f_i^- = \min f_i(\mu^R) \qquad\qquad i=0,\dots,n$$

y la pseudométrica

$$r(\mu^R , p) = (\sum_{i=0}^{n} \left| f_i(\mu^R) - f_i^- \right|^{-p})^{-1/p}$$

cuya maximización nos aporta el conjunto de soluciones denominadas "subsidiarias", $F_s(p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Parece intuitivo que la solución de consenso se encuentre entre $F_c(\infty)$ y $F_s(\infty)$, de coordenadas, respectivamente,

$$(f_{ic}(\infty))_{i=1,n}$$

$$(f_{is}(\infty))_{i=1,n}$$

Entonces Opricovic propone minimizar la distancia al ideal desplazado, que define como

$$F^{+} = (f_i^{+})_{i=1,n} = (\max (f_{ic}(\infty), f_{is}(\infty))_{i=1,n}$$

es decir,

$$\min_{R} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| f_i^{+} - f_i(\mu^R) \right|^{p} \right)^{1/p}$$

lo cual nos determina un nuevo conjunto de soluciones de compromiso (con p variando desde uno hasta infinito, incluyendo éste). La minimización ha de realizarse bajo las restricciones

$$f_i(\mu^R) \geq \min (f_{ic}(\infty), f_{is}(\infty)) \qquad i=1,n$$

$$f_i(\mu^R) \leq f_i^{+} \qquad i=1,n$$

Debido a las propiedades que lleva asociadas, así como su significado intuitivo, se sugiere trabajar con $p=\infty$ preferiblemente. Y para nuestro caso, hemos de considerar como soluciones factibles aquéllas que rebasan un umbral mínimo de aciclidad y de estabilidad social:

$$f_1(\mu^R) \geq \alpha$$

$$f_0(\mu^R) \geq \beta$$

Mas como nuestro problema bicriterio es asimétrico, en el senti do de que la aciclidad se aplica sobre la opinión social sólamente, el factor consenso debe ser de algún modo prioritario. La acotación de tal índice, propuesta anteriormente, es una solución, pero en la práctica -y ésta es la crítica más importante a Arrow y a la aciclidad global- lo que se busca es una solución (en general satisfaciente; cfr. los trabajos de Simon y Rios-Rios) dentro de un conjunto especial (admisible, satisfaciente), y ya hicimos notar que no todos los ciclos (inconsistencias, irracionalidades) eran igualmente problemáticos, por tanto.

Así planteado, nos despreocupamos, como objetivo, de la construcción de una relación de opinión social para tomar únicamente una decisión, escoger una alternativa.

Ahora cada alternativa vendrá caracterizada por un par: Un grado por el que sería aceptada (pertenencia difusa al conjunto "admisible") y otro de conflictividad (el correspondiente a la medida en que le afecta la aciclidad). Lo primero se elaboraría, como antes, directamente a partir de las preferencias individuales. Lo segundo sería el grado mínimo de aciclidad de todos los ciclos que contienen a dicha alternativa concreta, en la opinión social estimada.

Aunque las inconsistencias se puedan tratar mediante programación dinámica, nada más natural, según lo expuesto, que construir una estructura de dominancia difusa (Orlovsky, 1978), que detallaremos un poco más adelante.

La cuestión es que incluso con esta solución seguimos exigiendo una "racionalización global" previa, que es más que discutible si el problema es de decisión puro (una alternativa a escoger).

Siskos et al. presentan en la reunión del Multicriteria Decision Aid de Madrid 1981 un trabajo basado en las publicaciones de B. Roy (por ejemplo, ver Roy, 1978) sobre los métodos ELECTRE, y que elabora un algoritmo para la construcción de una estructura de dominación apoyándose directamente en las preferencias individuales. Con diversas modificaciones, aplicaremos tal método a la k-upla de opiniones difusas.

El concepto clave se halla en la relación de "outranking" (que podemos traducir como "subordenación"). la cual, en pocas palabras es una relación que no sólo indica cuándo hay preferencia estricta o indiferencia entre dos alternativas, sino cuándo hay problemas de comparabilidad, en el sentido concreto de Roy (en un aspecto una alternativa es incomparablemente mejor que otra, mientras que en otro aspecto ocurre exactamente lo contrario, de tal modo que al tener en cuenta ambos aspectos no se pueden ordenar las dos alternativas).

Supongamos como siempre un conjunto finito X de acciones y el conjunto de decisores, también finito, que jugarán la misma función que los criterios en los trabajos de Roy.

Sean $\{p_i\}$ ponderaciones para cada individuo (la suma de todas ellas ha de ser la unidad), que bajo la hipótesis de anonimato serán todas iguales. Suponiendo definida la relación de opinión para los individuos

$$\left\{ \left(\mu^i_t(a,b) \right)_{t=1,2,3} \right\}_i$$

formamos la relación, que no es propiamente de subordinación, ya que en las opiniones individuales habíamos admitido que no existían fenómenos de incomparabilidad:

$$q^i \; : \; X \times X \longrightarrow [0,1]$$

$$q^i(a,b) = \mu^i_1(a,b) + \mu^i_2(a,b)$$

con lo que la función de concordancia sería

$$C \; : \; X \times X \longrightarrow [0,1]$$

$$C(a,b) = \sum p_i \cdot q^i(a,b)$$

Y definiendo la función de discordancia en el sentido clásico:

$$D_i \; : \; X \times X \longrightarrow [0,1]$$

con

- $D_i(a,b) = 1$ si b es incomparablemente mejor que a para el individuo i. Entonces éste no admite que a desplace socialmente a b, y evidentemente ha de ser $\mu^i_1(a,b)=1$.
- $D_i(a,b) = 0$ cuando no hay problemas de incomparabilidad a favor de b.
- $D_i(a,b) \in (0,1)$ para los demás casos intermedios.

Se construye entonces una relación de "outranking" o subordinación:

$$d \; : \; X \times X \longrightarrow [0,1]$$

$$d(a,b) = \begin{cases} C(a,b) & \text{si } D_i(a,b) \leq C(a,b) \quad \forall\, i \\ C(a,b) \cdot \prod\limits_j \dfrac{1-D_j(a,b)}{1-C(a,b)} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

con el producto hecho a lo largo de los individuos j tales que

$$D_j(a,b) > C(a,b)$$

Era de esperar que las discordancias rebajasen el grado de subordenación, que a priori toma el valor de la concordancia.

La nueva relación "d" es efectivamente de subordenación, al admitir las tres posiciones exigidas:

- a desplaza a b (b está subordinado a a) cuando

$$d(a,b) > d(b,a)$$

- a es "indiferente a b cuando

$$d(a,b) = d(b,a) > 0$$

- existe incomparabilidad (en el sentido de Roy) cuando

$$d(a,b) = d(b,a) = 0$$

Y siguiendo a Orlovsky se puede definir la estructura de dominación, pasando por la relación de dominación:

$$d^D(a,b) = \max\ (\ 0\ ,\ |d(a,b)-d(b,a)|\ )$$

$$\mu^D(a) = \max_b\ d^D(b,a)$$

que será el grado en que la acción a está dominada (Orlovsky trabaja con la función de no-dominancia, lógicamente

$$\mu^{ND}(a) = 1 - \mu^D(a)$$

y la presentación de los resultados es paralela). Entonces se trata de localizar el conjunto de alternativas menos dominadas:

$$\left\{ a^* \ \text{ tal que } \ \min_a \mu^D(a) = \mu^D(a^*) \right\}$$

Pero se observa que existe una nueva causa de conflicto, no debido a la relación de las alternativas entre sí como era la discordancia anterior, sino por ser alguna alternativa inaceptable per se -de forma difusa- para algún individuo (el conjunto de soluciones admisibles es difuso). Sea entonces una función de admisibilidad o de veto:

$$V_i\ :\ X \longrightarrow [0,1]$$

que asigna a cada alternativa el valor cero si tal alternativa es totalmente aceptable (aunque haya otras mejores y peores), la unidad si es totalmente inaceptable, y valores entre (0,1) en el resto de los casos intermedios.

Análogamente a D_i , definimos entonces

$$\mu^{V}(a) = \begin{cases} \mu^{D}(a) & \text{si } V_i(a) \leq \mu^{D}(a) \quad \forall i \\ 1-(1-\mu^{D}(a)).\prod_j \frac{1-V_j(a)}{1-\mu^{D}(a)} & \text{si } V_j(a) > \mu^{D}(a) \end{cases}$$

o grado en que la acción a está vetada . De este modo nos interesarían las alternativas menos dominadas en este sentido, es decir, aquéllas con mayor grado de pertenencia al conjunto admisible:

$$\left\{ a^* \text{ tal que } \min_a \mu^{V}(a) = \mu^{V}(a^*) \right\}$$

(evidentemente, con esta técnica todo individuo tiene idéntica capacidad de veto, ejercida a través de V_i , pero se podrían ponderar con sendos coeficientes en la potencia de los cocientes en la expresión de μ^{V}).

Si aceptamos la filosofía de las soluciones satisfacientes de Simon, nos interesarán las alternativas "suficientemente" cercanas al óptimo teórico, y al conjunto

$$X^{NV} = \left\{ a^* \text{ tal que } \mu^{NV}(a^*) = \sup_a \mu^{NV}(a) \right\} \subset X$$

(con $\mu^{NV}(a) = 1 - \mu^{V}(a)$) se le denominará maximal no dominado (con veto). El conjunto de alternativas nítidamente no dominadas ("Unfuzzy NV") será

$$X^{UNV} = \left\{ a^* \text{ tal que } \mu^{NV}(a^*) = 1 \right\} \subset X$$

Y desde luego que se han de exigir condiciones de coherencia entre los difusos que se han necesitado; por ejemplo:

$$D_i(a,b)=1 \Rightarrow q_i(b,a)=1$$

$$q_i(a,b)=1 \Rightarrow D_i(a,b)=0$$

$$q_i(a,b)=0 \Rightarrow D_i(b,a)=0$$

$$q_i(a,b) > q_i(b,a) \Rightarrow V_i(b) \geqslant V_i(a)$$

Otros trabajos, aparte de los ya citados, y que aportan una mayor visión global de las técnicas multicriterio, cara a ser modificadas para su aplicación en este contexto, son Hwang-Masud (1979) y Starr--Zeleny (1979), ambos con amplia bibliografía.

$\{p_i\}$ $\{q_i\}$ $\{D_i\}$ $\{V_i\}$

Concordancia

$C : X \times X \longrightarrow [0,1]$

Subordinación

$d : X \times X \longrightarrow [0,1]$

Relación Dominación

$d^D : X \times X \longrightarrow [0,1]$

Estructura Dominación

$\mu^D : X \times X \longrightarrow [0,1]$

Estructura Dominación con Veto

$\mu^V : X \longrightarrow [0,1]$

Conjunto Alternativas menos Dominadas

$\left\{ a^* \text{ tal que } \mu^V(a^*) = \min_a \mu^V(a) \right\}$

BIBLIOGRAFIA

(Se ha señalado con "*" la básica en esta memoria)

Arrow, K. J. (1951)(1964) "Social Choice and Individual Values" Wiley(*)

Azorín, F. (1979) "Algunas Aplicaciones de los Conjuntos Borrosos a la Estadística" Publicaciones I.N.E. Madrid

Azorín, F. (1981) "Conjuntos Borrosos, Estadística y Probabilidad" Discurso recepción Real Academia de Ciencias.

Barthelemy, J.P. (1981) "Arrow's theorem: Unusual Domains and extended Codomains" 13 Decision Aid Meeting. Madrid

Batteau, P,; Jacquet, E.; Monjardet, B. (1981) "Analyse el Agregation des preferences" Ed. Economica. Paris

Bezdek, J.C.; Spillman, B.; Spillman, R. (1979) "Fuzzy Relations Spaces for Group Decision theory: an Application" Fuzzy Sets and Systems 2, 302-313.(*)

Black,R.D. (1958) "The Theory of Committes and Elections" Cambridge U.P.(*)

Blau, J.H. (1957) "The Existence of Social Welfare Functions" Econometrica 25, 302-313.

Blin, J.M. (1977) "Fuzzy Sets in Multiple Criteria Decision-Making" (en Starr y Zeleny, eds.) (*)

Dubois, D.; Prade, H. (1980) "Fuzzy Sets and Systems" Ac. Press (*)

Fishburn, P.C. (1973) "The Theory of Social Choice" Priceton U.P.

Fishburn, P.C.; Gehrlein (1977) "Towards a theory of Ellection with

Probabilistic Preferences" Econometrica 45, 1907-1924.

Fung, L.W.; Fu, K.S. (1975) "An Axiomatic Approach to Rational Decision Making in a Fuzzy Environment" (en Zadeh et al.) (*)

Gupta, M.M.; Ragade, R.K.; Yager, R.R. (eds.) (1979) "Advances in Fuzzy Set Theory and Applications" North-Holland

Hanson, B. (1964) "On Group Preferences" Econometrica 37

Kaufmann, A. (1973) "Introduction a la Theorie des sous-ensembles flous" Maison et cie.

Kelly, J.S. (1978) "Arrow Imposibility Theorems" Ac. Press

Klement, E.P. (1980) "Fuzzy σ-algebras and Fuzzy Measurable Functions" Fuzzy Sets and Systems 4, 83-93 (*).

May, K.O. (1952) "A Set on Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision" Econometrica 20, 680-684.

Mizumoto, M.; Tanaka, K. (1979) "Some Properties of Fuzzy Numbers" (en Gupta et al.)

Nahmias, S. (1978) "Fuzzy variables" Fuzzy Sets and Syst. 1,97-110(*)

Nowakowska, M. (1977) "Methodological Problems of Measurement of Fuzzy Concepts in the Social Sciences" Beh. Science 22, 107-115. (*)

Opricovic, S. (1981) "Ideal, Compromise and Consensus Solution" 13 Multicriteria Decision Aid Meeting. Madrid (*)

Orlovsky, S.A. (1978) "Decision-Making with Fuzzy Preference Relation" Fuzzy Sets and Systems 1, 155-167. (*)

Pardo, L. (1980) "Medidas de Nitidez para Conjuntos y Sucesos Difusos. Procesos de Decisión de Grupo con Preferencias Individuales difusas". Tesis. Madrid

Pattanaik, K.P., (1971) "Voting and Collective Choice" Cambridge (*)

Peleg, B. (1978) "Consistent voting Systems" Econometrica 46,153-61.

Rios, S. (1976) "Análisis de Decisiones" Ed. I.C.E. Madrid

Roy, B.; Vincke, P. (1981) "Multicriteria Analysis: survey and new Directions" Europ. J. of Op. Res. 8, 207-218.

Sen, A.K. (1970a) "Collective Choice and Social Welfare" Holden (*)

Sen, A.K. (197ob) "The Imposibility of a Paretian Liberal" J. of Political Economics 78, 152-157.

Sen, A.K. (1977) "Social Choice Theory: a Re-examination" Econometrica 45 (*)

Siskos, J.; Lochard, J.; Lombard, J. (1981) "A Multicriteria Decision-Making Methodology under Fuzziness" 13 Decision Aid Meeting. Madrid (*)

Starr, M.K.; Zeleny, M. eds. (1977) "Multiple Criteria Decision Making" Tims Studies in the Management Sciences 6.

Trillas, E. (1979) "Sobre Funciones de Negación en la Teoría de Conjuntos Difusos" Stochastica 111 (n.1), pg.47

Zadeh, L.A. (1965) "Fuzzy Sets" Inf. and Control 8, 338-353.

Zadeh, L.A. (1971) "Similarity Relations and Fuzzy Orderings" Inf. Sci. 3, 177-200. (*)

Zadeh, L.A.; King-Sum, F.; Tanaka, K.; Shimura, M. eds. (1975) "Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes" Ac. Press.