

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA TIERRA Y ASTROFÍSICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FTA02

De la Geofísica a la Ciencia Ficción

From Geophysics to Science Fiction

Supervisores: M. Luisa Osete López, F. Javier Pavón Carrasco

Marcos González Cruz

Doble Grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2024-25

Convocatoria ordinaria

Calificación: 9.4

De la Geofísica a la Ciencia Ficción: Un viaje gravimétrico al centro de la Tierra de Jules Verne

Resumen:

El objetivo de este trabajo consiste en realizar un análisis crítico de la novela *Viaje al centro de la Tierra*, de Jules Verne, desde la perspectiva de la gravimetría contemporánea. A partir de las concepciones decimonónicas de la época y del genio imaginativo del autor, que incluyen una gruta gigantesca bañada por un océano tormentoso en el interior terrestre, se examinan las implicaciones físicas que tal estructura tendría sobre el campo gravitatorio terrestre. En particular, se analizan las consecuencias sobre los primeros coeficientes armónicos del potencial gravitatorio terrestre, así como el volumen de agua máximo que admitiría dicho océano. Aplicando conceptos de gravimetría, tales como las ecuaciones de los potenciales gravitatorio y gravífico, la variación de la densidad en función del radio terrestre o la ecuación del aplanamiento terrestre, se demuestra la inviabilidad científica del escenario propuesto en el texto. Además, el trabajo pone en valor cómo el uso de los modelos disponibles en la actualidad nos permite refutar con precisión las conjeturas literarias. De esta forma, la novela se erige como un punto de partida para la difusión del rigor científico y el entendimiento crítico del interior terrestre.

Abstract:

The objective of this project is to perform a critical analysis of the novel *Journey to the Center of the Earth*, by Jules Verne, from the standpoint of contemporary gravimetry. Starting from the 19th-century scientific notions and the author's imaginative genius — which includes a vast cavern flooded by a tempestuous ocean within Earth's interior — the physical implications of such structure for the Earth's gravitational field are examined. In particular, the consequences for the first harmonic coefficients of the Earth's gravitational potential, as well as the maximum volume of water such an ocean could theoretically contain, are analyzed. By applying gravimetric concepts — such as the equations of the gravitational potential and the potential of gravity, the radial dependence of Earth's density profile, and the Earth's flattening equation — the scientific infeasibility of the scenario depicted in the text is demonstrated. Moreover, the work highlights how the current available models allow us to precisely refute these literary conjectures. In this way, the novel serves as a starting point for the diffusion of scientific rigor and the critical understanding of Earth's interior.

Índice

1. Introducción y objetivos	2
2. Metodología	4
2.1. Anomalías ΔJ_n inducidas por la cavidad	4
2.1.1. Aproximación para la altura de la cavidad	4
2.1.2. Planteamiento del problema	5
2.1.3. Expresión general del potencial gravitatorio	5
2.2. Distancia de una masa puntual al centro del planeta para $J_1 = 0$	6
2.2.1. Planteamiento del problema	6
2.2.2. Cálculo de la masa puntual equivalente a la de la cavidad	7
2.2.3. Expresión del potencial gravitatorio generado por una masa puntual	8
2.3. Volumen de agua máximo en la cavidad	9
2.3.1. Planteamiento del problema	9
2.3.2. Expresión del aplanamiento terrestre	10
3. Resultados y discusión	12
3.1. Anomalías ΔJ_n inducidas por la cavidad	12
3.1.1. Expresión del potencial de la cavidad	12
3.1.2. Desarrollo de los primeros armónicos del potencial de la cavidad	12
3.1.3. Comparación con el potencial gravitatorio terrestre	14
3.2. Distancia de una masa puntual al centro del planeta para $J_1 = 0$	15
3.3. Volumen de agua máximo en la cavidad	17
3.3.1. Consideración $M'' \approx M$	17
3.3.2. Consideración $\omega = 0$	18
3.3.3. Comparación de los resultados	18
4. Conclusiones	19
Referencias	20

Índice de figuras

1. Representación esquemática de la cavidad en el interior de la Tierra.	5
2. Potencial gravitatorio generado por una distribución de masa infinitesimal.	6
3. Variación de la densidad en función del radio terrestre.	7
4. Potencial gravitatorio generado por una masa puntual.	8
5. Representación esquemática del océano en el interior de la Tierra.	9

1. Introducción y objetivos

Viaje al centro de la Tierra, de Jules Verne (1828 - 1905), es una referencia canónica de la literatura universal. Más aún en el contexto del camino que va de la geofísica a la ciencia ficción (o viceversa). Aunque a menudo se le ha reducido al rol de autor de novelas de aventuras juveniles, Verne rezuma en su obra una profundidad científica y literaria que, en palabras de Salabert, solo ahora comienza a desvelarse por completo [1].

En *Viaje al centro de la Tierra*, el excéntrico profesor Otto von Lidenbrock descubre un fragmento de pergamino en el interior de un antiguo libro. El autor del manuscrito da las instrucciones para descender hacia el interior de la Tierra. Lidenbrock, acompañado de su sobrino Axel, decide viajar hasta Islandia, contratar al guía local Hans y, siguiendo las indicaciones de la nota, adentrarse en el cráter volcánico del Sneffels. Es en este punto donde comienza la aventura imposible del grupo hacia el interior terrestre. Los tres sufren numerosos contratiempos, que llegan a provocar el extravío de Axel de sus compañeros. Sin embargo, el grupo consigue reunirse nuevamente al pie de la playa de un gigantesco océano submarino. Construyen una balsa a partir de los árboles del bosque que circunda el océano y, ya en su navegación, vislumbran fenómenos como la batalla entre dos criaturas marinas jurásicas o la erupción de un géiser en una isla. Después, consiguen atravesar una implacable tormenta y, recuperada la compostura, preparar una explosión para destruir una roca que obstaculizaba su camino. Sin embargo, esta explosión provoca la apertura de una enorme grieta que succiona las aguas del océano subterráneo, con los viajeros incluidos. Tras ser arrastrados por la corriente, los tres emergen a la superficie terrestre, en Italia, gracias a una propicia erupción volcánica del Stromboli.

A lo largo de la novela, uno de los puntos más enriquecedores es el continuo contraste que se establece entre el escepticismo del propio lector (encarnado en la figura de Axel) y las disparatadas teorías en las que se fundamenta el profesor Lidenbrock. Estas encarnan las creencias de notables figuras científicas de la época, como las del químico Humphrey Davy. Porque a pesar de su impronta fantástica, en *Viaje al centro de la Tierra*, Verne esboza un magistral retrato de la historia y de la ciencia del siglo XIX —época de grandes progresos y de incesante curiosidad por lo desconocido—. En particular, Verne tomó como fuentes las obras de naturalistas como Milne Edwards, de mineralogistas como François Audoin y, especialmente, las del vulcanólogo Sainte-Claire Deville [1].

Dado el contexto en el que se sitúa la novela, y teniendo en cuenta las contrastadas fuentes de su propio autor, resulta de gran interés analizar desde un punto de vista geofísico actual los escenarios que plantea *Viaje al centro de la Tierra*. Más aún si consideramos que, como afirma Salabert, «no se sabe hoy del centro de la Tierra más que en la época de Verne. A lo sumo, hay muchas más hipótesis» [1]. Por supuesto, esto debe entenderse en sentido figurado y no como un juicio literal sobre la evolución de la geofísica desde el siglo XIX. Si bien no ha sido posible observar de forma directa el núcleo terrestre, la geofísica moderna ha progresado de forma extraordinaria en nuestro conocimiento indirecto del interior de la Tierra. Esto se ha basado en el empleo de técnicas sismológicas, geomagnéticas y gravimétricas que superan ampliamente las conocidas hasta entonces.

A pesar de que *Viaje al centro de la Tierra* podría ser estudiada desde múltiples enfoques geofísicos, dada la extensión del proyecto nos centraremos en un análisis puramente gravimétrico. Especialmente en las últimas décadas, la gravimetría ha experimentado una revolución tecnológica y teórica. Esto ha permitido caracterizar el campo gravitatorio terrestre con una precisión sin precedentes, lo cual ha resultado esencial para comprender la estructura y la dinámica interna de la Tierra. Hasta hace poco tiempo, la construcción de un modelo global de geoide de referencia de nuestro planeta era muy laboriosa. Se combinaban los datos obtenidos a partir de diferentes métodos, pero era imposible alcanzar grandes definiciones. Sin embargo, misiones espaciales como GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*), de la NASA, y GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*), de la ESA, han supuesto un cambio de paradigma.

GRACE fue lanzada el 17 de marzo de 2002 y cuenta con un sistema compuesto por dos satélites, de órbitas casi circulares y polares. Mediante el seguimiento satélite-satélite (radares de alta precisión) realiza medidas de gravedad. Pero, además, lleva a bordo instrumentos para investigaciones atmosféricas e ionosféricas y busca el control de cambios en el nivel del mar y en el fundido de los glaciares. Por su parte, GOCE fue lanzada el 17 de marzo de 2009 y, hasta el fin de su vida útil el 11 de noviembre de 2013, tomó las medidas necesarias para trazar la superficie del geoide con alta resolución. Constaba de un único satélite, en órbita polar cuasicircular, equipado con gradiómetros para medir gradientes de gravedad en las tres direcciones del espacio. Los modelos de Tierra obtenidos a partir de los datos de GOCE permiten moverse a diferentes alturas, en función de la prolongación ascendente o descendente de la señal gravimétrica. El modelo más actual es el XGM2019e, que incluye hasta el grado armónico $n = 5540$ [2].

La alta resolución conseguida por misiones espaciales como las anteriores en la determinación de la ondulación del geoide ha resultado crucial para el desarrollo de los sistemas de navegación actuales (GPS, Galileo). Otros métodos de geodesia espacial incluyen la interferometría radar de apertura sintética (*InSAR*), que analiza la fase de la señal radar que refleja y permite determinar pequeños cambios en la topografía. Por otra parte, la interferometría de muy larga base (*VLBI*) combina las observaciones de un gran número de radiotelescopios para determinar el movimiento y la velocidad del eje de rotación terrestre. Además, se espera que la integración de la inteligencia artificial en el procesamiento de grandes volúmenes de datos gravimétricos optimice aún más la resolución de los modelos de Tierra existentes y la detección de señales sutiles.

A la luz de lo anterior, el objetivo de este proyecto consiste en proponer un acercamiento novedoso a la novela de Verne utilizando el marco conceptual de la gravimetría moderna. La motivación surge de dos ejes principales. Por un lado, de la curiosidad por examinar la plausibilidad física de una novela pionera en la literatura de ficción especulativa. Por otro lado, de la oportunidad de divulgar los principios fundamentales de la gravimetría a través de un relato que, ya en su tiempo, jugó con la posibilidad de la exploración del interior terrestre profundo. En particular, analizaremos rigurosamente cómo la estructura de la cavidad que alberga el océano planteado por Verne se confronta con el modelo de gravimetría actual.

2. Metodología

Para llevar a cabo la tarea de modelizar un planeta Tierra que alberga en su interior la cavidad que supondremos hueca y uniforme descrita en *Viaje al centro de la Tierra*, abordaremos los tres siguientes problemas principales:

- El cálculo de las anomalías ΔJ_n inducidas por la cavidad en los coeficientes J_n del potencial gravitatorio terrestre.
- El cálculo de la distancia sobre el eje z con respecto al centro de la Tierra a la que debe situarse una masa puntual equivalente a la de la cavidad para que el coeficiente J_1 sea igual al terrestre.
- El cálculo del volumen de agua máximo admitido en la cavidad para que sea posible el aterrizaje sobre su superficie.

2.1. Cálculo de las anomalías ΔJ_n inducidas por la cavidad en los coeficientes J_n del potencial gravitatorio terrestre

2.1.1. Aproximación para la altura de la cavidad

El grupo de exploradores de la novela de Verne alcanza la superficie de la playa bañada por océano que representa la superficie de la cavidad el día 9 de agosto de 1863. Ese día, según los datos recogidos por Axel en el cuaderno de notas de la aventura, se encontraban a una profundidad de 138.6 km y a la latitud de los montes Grampianos escoceses. Además, el propio Axel queda fascinado por la altura que llega a alcanzar la cavidad:

«La bóveda suspendida por encima de mi cabeza, el “cielo”, por así decir, parecía hecha de grandes nubes, vapores móviles y cambiantes que, al condensarse, debían producir de vez en cuando lluvias torrenciales. Yo creía que la evaporación del agua no podría producirse bajo una presión atmosférica tan fuerte, pero por alguna razón física que no alcanzaba a comprender había grandes nubes extendidas en el aire» [1].

Dada la descripción anterior, podemos suponer que las nubes sobre el océano se ubican a una altitud típica de la troposfera media (~ 4 km). Por tanto, una idea razonable para estimar el valor de la altura de la cavidad puede ser asociarla al valor de la tropopausa en un día típico de agosto sobre la superficie de la región en la que se encuentra el grupo de aventureros.

El enlace al pie ¹ corresponde a un radiosondeo registrado en la página de la Universidad de Wyoming (*Department of Atmospheric Science*) para la estación con código WMO 03238, asociada al área de Aberdeen/Dyce, en el noreste de Escocia, el día 17 de agosto de 2024 a las 17:00 (UTC).

¹<https://weather.uwyo.edu/cgi-bin/sounding?region=europe&TYPE=TEXT%3ALIST&YEAR=2024&MONTH=08&FROM=1700&TO=1700&STNM=03238>

Para estimar la tropopausa, se observa la altura a la que el gradiente térmico cambia, es decir, donde la temperatura deja de disminuir con la misma rapidez y se hace casi constante. Esa transición se sitúa aproximadamente a 11 km de altitud, un valor típico de la tropopausa en verano para latitudes próximas a $55 - 60^\circ\text{N}$, como la de Escocia y la de los montes Grampianos en particular.

2.1.2. Planteamiento del problema

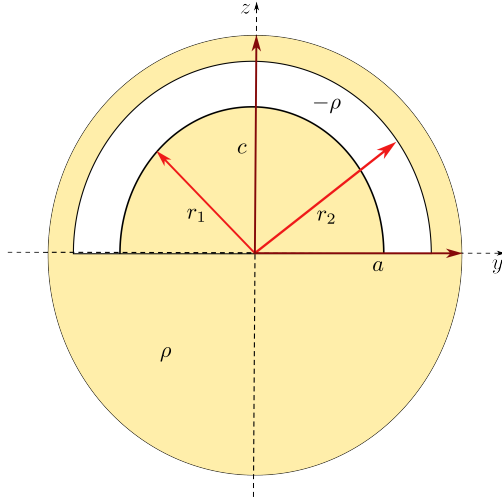


Figura 1: Esquema de corte transversal de la cavidad en forma de semicorona esférica en el interior del hemisferio norte terrestre.

Consideramos el modelo de Tierra como elipsoide de revolución oblató con los siguientes parámetros de referencia [3]:

- Radio polar: $c = 6356.752$ km.
- Radio ecuatorial: $a = 6378.137$ km.
- Masa total: $M = 5.9737 \times 10^{24}$ kg.

Supongamos que se excava una cavidad en forma de semicorona esférica en el hemisferio norte como la que se describe en la novela (Figura 1):

- Radios. $r' \in [r_1, r_2]$, con:
 - $r_1 = c - 138.6 = 6218.152$ km.
 - $r_2 = c - 138.6 + 11 = 6229.152$ km.
- Extensión angular.
 - Colatitud geográfica: $\theta' \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
 - Longitud geográfica: $\lambda' \in [0, 2\pi]$.

Vamos a determinar las anomalías ΔJ_n que induciría dicha cavidad en los primeros coeficientes J_n del potencial gravitatorio terrestre.

2.1.3. Expresión general del potencial gravitatorio

La Figura 2 ilustra el planteamiento geométrico que vamos a utilizar para calcular el potencial gravitatorio generado por la cavidad. En concreto:

- $\mathbf{r}'(\theta', \varphi', \lambda')$ (en rojo) es el vector que representa la posición en coordenadas esféricas de un elemento de volumen dV dentro de la Tierra.
- $\mathbf{r}(\theta, \varphi, \lambda)$ (en azul) es el vector que representa la posición en coordenadas esféricas del punto de observación P exterior a la Tierra donde se desea calcular el potencial.
- $\mathbf{r} - \mathbf{r}'(\psi)$ (en verde) es el vector diferencia entre el punto de observación y el elemento de volumen considerado. ψ es el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{r}' .

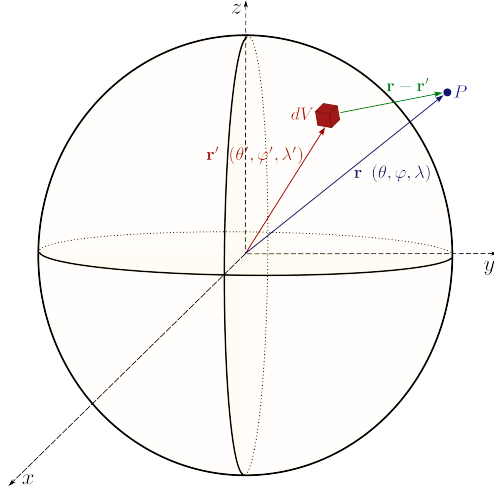


Figura 2: Potencial gravitatorio generado en un punto P exterior a la Tierra por una distribución de masa infinitesimal dV .

El potencial gravitatorio en un punto P exterior a la Tierra se expresa como:

$$V(\mathbf{r}) = -G \int_{V_{Tierra}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.1.1)$$

Es importante aclarar que en gravimetría se suele utilizar un potencial positivo. Solo se utiliza el signo negativo cuando se hacen consideraciones energéticas. Sin embargo, en este caso hemos decidido mantenerlo como reflejo del carácter negativo de la densidad de la cavidad.

Para $r > r'$, usamos la expansión en polinomios de Legendre [4]:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \psi) \quad (2.1.2)$$

La cavidad es una distribución independiente de λ' (axisimétrica). Por tanto, en la Ecuación (2.1.2) anterior solo sobreviven términos con $m = 0$ debido a la ortogonalidad de las funciones trigonométricas [4]:

$$P_n(\cos \psi) \rightarrow P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta') \quad (2.1.3)$$

2.2. Cálculo de la distancia de una masa puntual al centro del planeta para que el coeficiente J_1 sea igual al terrestre

2.2.1. Planteamiento del problema

La cavidad descrita en la novela, que hemos modelado como una semicorona esférica en el hemisferio norte en la Sección 2.1, induce una anomalía positiva en el coeficiente J_1 terrestre. Esto se debe a que el déficit de masa que supone una cavidad semejante en dicho hemisferio con respecto al modelo de Tierra real provoca un desplazamiento del centro de masas del sistema Tierra-cavidad hacia el hemisferio sur. Con el propósito de compensar esta aportación y de devolver el sistema a una configuración de masas con origen en el centro de la Tierra, podemos introducir una masa puntual negativa equivalente a la de la cavidad en el hemisferio sur. De esta manera, obtendríamos un nuevo sistema con $J_1'' = 0$, como ocurre en la Tierra real. El objetivo de esta sección consiste en determinar la distancia con respecto al centro de la Tierra a la que debería situarse una masa tal.

2.2.2. Cálculo de la masa puntual equivalente a la de la cavidad

En primer lugar, consideramos que la masa puntual debería tener el mismo valor que la masa de la cavidad para contrarrestar su efecto en el coeficiente J_1 .

Por tanto, podemos calcularla como

$$M_{puntual} = M_{cavidad} = \bar{\rho}_{cavidad} \cdot V_{cavidad} = \bar{\rho}_{cavidad} \cdot \frac{2}{3}\pi (r_2^3 - r_1^3) = 9.0148 \cdot 10^{21} \text{ kg} = \alpha M,$$

con $\alpha = 0.0015$. Es decir, $M_{puntual} = M_{cavidad} = 0.0015M$.

Hemos obtenido el valor de $\bar{\rho}_{cavidad}$ a partir de los datos del modelo PREM (*Preliminary Reference Earth Model*), propuesto por Dziewonski y Anderson [5]. Este describe la estructura del interior de la Tierra a partir de datos procedentes de las ondas sísmicas. En particular, tiene en cuenta la pérdida de energía que sufren las ondas sísmicas al propagarse (dispersión anelástica) y considera que su velocidad depende de la dirección de propagación y de la polarización (anisotropía).

Utilizando los datos del modelo, hemos elaborado el código de MATLAB para representar la densidad en función del radio terrestre que se recoge en el enlace al pie ². Dicho código proporciona la siguiente figura:

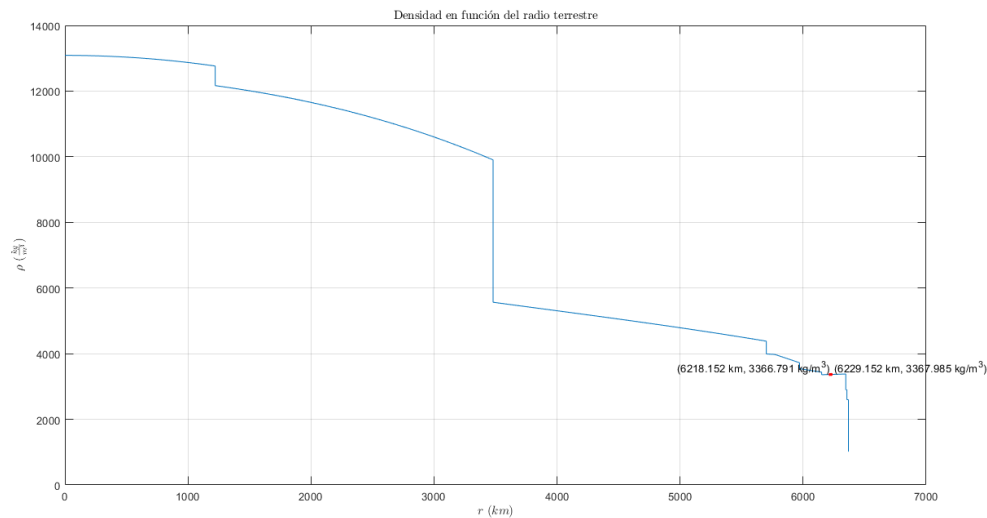


Figura 3: Variación de la densidad en función del radio terrestre. Se representan en color rojo los radios r_1 y r_2 que delimitan la cavidad y los valores de densidad correspondientes.

²<https://drive.google.com/file/d/1WPKAJsFC3h2NAGtjgSViow-uo1S3zKSR/view?usp=sharing>

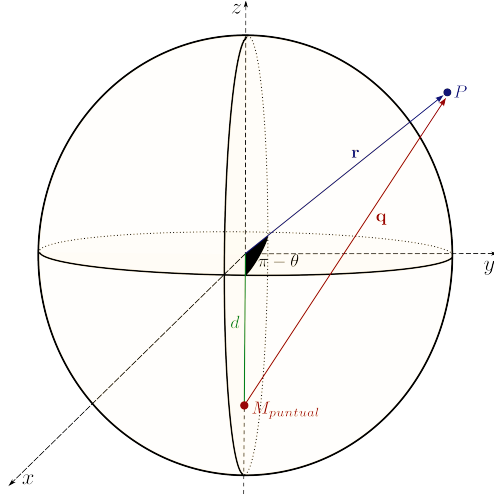


Figura 4: Potencial gravitatorio generado en un punto P exterior a la Tierra por una masa puntual $M_{puntual}$.

En la Figura 3 se han destacado los radios r_1 y r_2 de la base y de la altura de la cavidad de la novela, respectivamente. Hemos obtenido los valores de densidad que corresponden a estos radios a partir de la interpolación de los datos del modelo PREM. Finalmente, hemos considerado que la densidad media de la cavidad, $\bar{\rho}_{cavidad} = 3367.388 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, es la media aritmética de estos dos valores de densidad, detallados en la Figura 3.

Una vez justificado el valor de la masa puntual que situamos en el hemisferio sur terrestre, podemos calcular el potencial gravitatorio que genera en un punto P exterior a la Tierra, como se detalla en la configuración de la Figura 4.

2.2.3. Expresión del potencial gravitatorio generado por una masa puntual

Siguiendo un razonamiento análogo al de Lowrie [6], podemos aplicar el teorema del coseno y la ley de la distancia recíproca al triángulo delimitado por los lados \mathbf{r} , \mathbf{q} y d (que es la distancia de la masa con respecto al centro de la Tierra que queremos hallar):

$$q^2 = d^2 + r^2 - 2dr \cos(\pi - \theta) = r^2 \left(\left(\frac{d}{r} \right)^2 + 1 - 2 \frac{d}{r} \cos(\pi - \theta) \right) \iff$$

$$\iff \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r} \right)^n P_n(\cos(\pi - \theta)) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{d}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (2.2.1)$$

Por tanto, si consideramos además que la masa puntual que hemos introducido en el hemisferio sur ha de ser negativa, puesto que la cavidad que tenemos en el hemisferio norte supone un defecto de masa:

$$V_{masa}(r, \theta) = - \frac{GM_{puntual}}{q} \stackrel{(2.2.1)}{=} - \frac{GM_{puntual}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{d}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (2.2.2)$$

Podemos desarrollar la expresión anterior hasta el mismo grado armónico que las expresiones derivadas de la Sección 2.1 para comparar el potencial gravitatorio generado por la masa puntual con el terrestre y con el generado por la cavidad.

2.3. Cálculo del volumen de agua máximo admitido en la cavidad para que sea posible el aterrizaje sobre su superficie

2.3.1. Planteamiento del problema

En *Viaje al centro de la Tierra*, Axel se desliza por una gruta hasta caer sobre la superficie sólida de la gigantesca cavidad donde le esperan su tío y su ayudante islandés, que llegaron a través de otro pasillo subterráneo. Sobre la cavidad, como se expuso al comienzo de la Sección 2.1.1, se encuentra un vasto océano, rodeado por kilómetros de línea de costa. La extensión de esta playa es tal que Axel y Lidenbrock, antes de embarcarse en su aventura a través del océano subcortical en busca de una forma accesible de seguir descendiendo hacia el centro de la Tierra, deciden hacer un alto para explorarla. Es en este momento cuando la novela de Verne profundiza en algunos de sus pasajes más conocidos:

«Cuando llegamos a orillas del bosque, mi sorpresa se transmutó en admiración. En efecto, me hallaba en presencia de productos de la Tierra, pero cortados según un patrón gigantesco. Mi tío les dio inmediatamente el nombre que les correspondía.

—No es más que un bosque de hongos» [1].

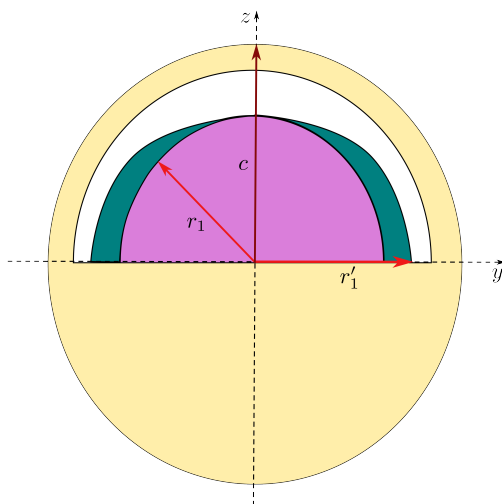


Figura 5: Esquema de corte transversal de la cavidad en forma de semicorona esférica en el interior del hemisferio norte terrestre, con el océano en forma de semielipsoide de revolución sobre su superficie.

tido por el océano resultante como la diferencia entre el área de la región en color azul y el área de la región en color violeta en la Figura 5. Introducimos, en primer lugar, una serie de conceptos teóricos.

Por otra parte, ya hemos considerado el modelo de Tierra como elipsoide de revolución oblató. Por tanto, como la cavidad en su interior tiene forma de semicorona esférica, la forma que describa el nivel de agua del océano sobre su superficie ha de ser la de un semielipsoide de revolución oblató, ya que se adaptará al potencial gravitatorio constante del semielipsoide.

Una representación esquemática de la situación se muestra en la Figura 5. Partiendo de esta idea, cabe la posibilidad de plantear un problema de interés gravimétrico que vamos a resolver: determinar el volumen de agua máximo que hubiera podido admitir el océano de la cavidad para permitir la caída de Axel sobre tierra firme, evitando su ahogamiento. Esto es, si reducimos la hipotética superficie de aterrizaje de Axel sobre la superficie de la cavidad a tan solo un punto, podemos determinar el volumen de agua máximo admi-

2.3.2. Expresión del aplanamiento terrestre

Dado un elipsoide de revolución de semieje mayor a y semieje menor c , se define su aplanamiento como [7]:

$$f = \frac{a - c}{a} \quad (2.3.1)$$

La ecuación anterior es útil para resolver el problema planteado, como se observará de manera explícita más adelante.

El potencial gravitatorio terrestre se expresa como [3]:

$$V_{Tierra}(r, \theta) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] \quad (2.3.2)$$

Si sumamos a la Ecuación (2.3.2) la contribución del potencial centrífugo, obtenemos la expresión completa del potencial gravífico terrestre:

$$U_{Tierra}(r, \theta) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.3.3)$$

donde $\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ es la velocidad media de rotación de la Tierra [3].

Si nos quedamos con la aproximación de primer orden del potencial gravífico (grado armónico $n = 2$ en el potencial gravitatorio) y sustituimos la expresión de $P_2(\cos \theta)$ en la ecuación anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned} U_{Tierra}(r, \theta) &\approx \frac{GM}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta = \\ &= \frac{GM}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2}{2GM} r^3 \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Para obtener la expresión que describe las superficies equipotenciales, podríamos pensar en tomar $U = U_0 \equiv cte$ y tratar de despejar r en (2.3.4). Sin embargo, hacer esto directamente es complicado, ya que se obtiene la siguiente ecuación de quinto grado en r que no se puede resolver analíticamente:

$$\omega^2 \sin^2 \theta r^5 - 2U_0 r^3 + 2GM r^2 - J_2 GM a^2 (3 \cos \theta - 1) \quad (2.3.5)$$

Un análisis más cuidadoso de la Ecuación (2.3.4) nos permite observar lo siguiente:

- $J_2 \sim 10^{-3} \ll 1$
- $\frac{\omega^2 a^3}{2GM} \sim 10^{-3} \ll 1$

Por tanto, podemos considerar los términos dentro del corchete como pequeñas perturbaciones al término dominante $\frac{GM}{r}$ del potencial newtoniano esférico.

Es decir, podemos considerar las variaciones de r con respecto a a lo suficientemente pequeñas como para sustituir $r = a$ en el interior del corchete en la Ecuación (2.3.4):

$$r = \frac{GM}{U_0} \left[1 - J_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \sin^2 \theta \right] \quad (2.3.6)$$

- En el ecuador ($r = a$, $\theta = 90^\circ$):

$$a = \frac{GM}{U_0} \left[1 + \frac{J_2}{2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right] \quad (2.3.7)$$

- En los polos ($r = c$, $\theta = 0^\circ$):

$$c = \frac{GM}{U_0} [1 - J_2] \quad (2.3.8)$$

Por tanto, sustituyendo en la Ecuación (2.3.1):

$$f = \frac{\frac{GM}{U_0} \left[1 + \frac{J_2}{2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right] - \frac{GM}{U_0} [1 - J_2]}{\frac{GM}{U_0} \left[1 + \frac{J_2}{2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right]} = \frac{\frac{3J_2}{2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM}}{1 + \frac{J_2}{2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM}} \underset{\substack{\approx \\ J_2 \ll 1 \\ \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \ll 1}}{\approx} \frac{3J_2}{2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \quad (2.3.9)$$

En este punto, se introduce el coeficiente de aceleración m , que se denomina así puesto que se puede interpretar como el cociente entre las fuerzas centrífuga y gravitatoria:

- En el ecuador:

$$m_{ecuador} = \frac{a\omega^2}{\frac{GM}{a^2}} = \frac{a^3\omega^2}{GM} \quad (2.3.10)$$

- En los polos:

$$m_{polos} = \frac{c\omega^2}{\frac{GM}{a^2}} = \frac{a^2 c\omega^2}{GM} \quad (2.3.11)$$

Finalmente, como $a \approx c$, podemos considerar $m_{ecuador} \approx m_{polos} \equiv m$ y sustituir en la Ecuación (2.3.9) para expresar el aplanamiento terrestre como:

$$f = \frac{3J_2}{2} + \frac{m}{2} \quad (2.3.12)$$

3. Resultados y discusión

3.1. Cálculo de las anomalías ΔJ_n inducidas por la cavidad en los coeficientes J_n del potencial gravitatorio terrestre

3.1.1. Expresión del potencial de la cavidad

El potencial debido al déficit de masa en la cavidad es, por la Ecuación (2.1.1):

$$\begin{aligned}
 V_{cavidad}(r, \theta) &= -G \int_{V_{cavidad}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \stackrel{(*)}{=} -G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \int_{V_{cavidad}} \underbrace{\rho(\mathbf{r}')}_{\rho \equiv \text{cte.}} r'^n P_n(\cos \theta') dV' = \\
 &= -G\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \int_{V_{cavidad}} r'^n P_n(\cos \theta') dV' \stackrel{(**)}{=} \\
 &= -G\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \cdot \underbrace{\left(\int_{r_1}^{r_2} r'^{n+2} dr' \right)}_{I_n^{radial}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \right)}_{I_n^{angular}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\lambda' \right)}_{2\pi} \stackrel{(***)}{=} \\
 &= -2\pi G\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \cdot \frac{r_2^{n+3} - r_1^{n+3}}{n+3} \cdot \int_0^1 P_n(x) dx \quad (3.1.1)
 \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado:

$$(*) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \stackrel{(2.1.2)}{=} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \psi) \stackrel{(2.1.3)}{=} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta')$$

$$(**) dV' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda'$$

$$(***) I_n^{radial} = \frac{r'^{n+3}}{n+3} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{r_2^{n+3} - r_1^{n+3}}{n+3}$$

$$I_n^{angular} \stackrel{=} {=} \int_{x=\cos \theta'}^{x=1} P_n(x) (-dx) = \int_0^1 P_n(x) dx$$

3.1.2. Desarrollo de los primeros armónicos del potencial de la cavidad

Desarrollamos el potencial de la cavidad en la Ecuación (3.1.1) hasta el grado armónico $n = 3$:

$$V_{cavidad}(r, \theta) \approx V_{cavidad}^{(0)}(r, \theta) + V_{cavidad}^{(1)}(r, \theta) + V_{cavidad}^{(2)}(r, \theta) + V_{cavidad}^{(3)}(r, \theta), \quad (3.1.2)$$

donde:

$$\begin{aligned}
V_{cavidad}^{(0)}(r, \theta) &= -2\pi G\rho \frac{P_0(\cos \theta)}{r^{0+1}} \cdot \frac{r_2^{0+3} - r_1^{0+3}}{0+3} \cdot \int_0^1 \underbrace{P_0(x)}_1 dx = \\
&= -2\pi G\rho \frac{1}{r} \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} \cdot \underbrace{\int_0^1 1 \cdot dx}_1 = -\frac{2\pi G\rho (r_2^3 - r_1^3)}{3r} = \frac{GM}{r} \cdot (-\alpha)
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned}
V_{cavidad}^{(1)}(r, \theta) &= -2\pi G\rho \frac{P_1(\cos \theta)}{r^{1+1}} \cdot \frac{r_2^{1+3} - r_1^{1+3}}{1+3} \cdot \int_0^1 \underbrace{P_1(x)}_x dx = \\
&= -2\pi G\rho \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} \cdot \underbrace{\int_0^1 x \cdot dx}_{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi G\rho (r_2^4 - r_1^4) \cos \theta}{4r^2} = \\
&= -\frac{GMa \cos \theta}{r^2} \cdot \frac{3\alpha (r_2^4 - r_1^4)}{8a (r_2^3 - r_1^3)}
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

$$\begin{aligned}
V_{cavidad}^{(2)}(r, \theta) &= -2\pi G\rho \frac{P_2(\cos \theta)}{r^{2+1}} \cdot \frac{r_2^{2+3} - r_1^{2+3}}{2+3} \cdot \int_0^1 \underbrace{P_2(x)}_{\frac{1}{2}(3x^2-1)} dx = \\
&= -2\pi G\rho \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2r^3} \cdot \frac{r_2^5 - r_1^5}{5} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \cdot dx}_0 = 0
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned}
V_{cavidad}^{(3)}(r, \theta) &= -2\pi G\rho \frac{P_3(\cos \theta)}{r^{3+1}} \cdot \frac{r_2^{3+3} - r_1^{3+3}}{3+3} \cdot \int_0^1 \underbrace{P_3(x)}_{\frac{1}{2}(5x^3-3x)} dx = \\
&= -2\pi G\rho \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2r^4} \cdot \frac{r_2^6 - r_1^6}{6} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \cdot dx}_{-\frac{1}{8}} = \\
&= \frac{\pi G\rho (r_2^6 - r_1^6) (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{48r^4} = \\
&= -\frac{GMa^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2r^4} \cdot \left(-\frac{\alpha (r_2^6 - r_1^6)}{16a^3 (r_2^3 - r_1^3)} \right)
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Por tanto:

$$V_{cavidad}(r, \theta) \approx \frac{GM}{r} \cdot (-\alpha) - \frac{GMa \cos \theta}{r^2} \cdot \frac{3\alpha (r_2^4 - r_1^4)}{8a (r_2^3 - r_1^3)} - \frac{GMa^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2r^4} \cdot \left(-\frac{\alpha (r_2^6 - r_1^6)}{16a^3 (r_2^3 - r_1^3)} \right) \quad (3.1.7)$$

3.1.3. Comparación con el potencial gravitatorio terrestre

Desarrollando la Ecuación (2.3.2) hasta el grado armónico $n = 3$ como en el caso del potencial de la cavidad tenemos que:

$$V_{Tierra}(r, \theta) \approx \frac{GM}{r} J_0 - \frac{GMa \cos \theta}{r^2} J_1 - \frac{GMa^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} J_2 - \frac{GMa^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2r^4} J_3 \quad (3.1.8)$$

Por tanto, el potencial gravitatorio total generado por la Tierra con la cavidad en su interior es igual a la suma de las ecuaciones (3.1.7) y (3.1.8):

$$\begin{aligned} V_{Tierra + cavidad}(r, \theta) &= V_{Tierra} + V_{cavidad} \approx \\ &\approx \frac{GM}{r} J'_0 - \frac{GMa \cos \theta}{r^2} J'_1 - \frac{GMa^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} J'_2 - \frac{GMa^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2r^4} J'_3, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\text{con: } \begin{cases} J'_0 = J_0 - \alpha \\ J'_1 = J_1 + \frac{3\alpha (r_2^4 - r_1^4)}{8a (r_2^3 - r_1^3)} \\ J'_2 = J_2 \\ J'_3 = J_3 - \frac{\alpha (r_2^6 - r_1^6)}{16a^3 (r_2^3 - r_1^3)} \end{cases}$$

Tabla 1: Comparación de los valores de los primeros coeficientes del potencial gravitatorio generado por la Tierra ($J_n, Tierra$), por la cavidad ($J_n, cavidad$) y por el sistema total de la Tierra con la cavidad en su interior ($J_n, total$). Los valores teóricos de $J_n, Tierra$ se han tomado de Lowrie [3].

n	$J_n, Tierra$	$J_n, cavidad$	$J_n, total$
0	1	-0.0015	0.9985
1	0	$0.7318 \cdot 10^{-3}$	$0.7318 \cdot 10^{-3}$
2	$1.0826 \cdot 10^{-3}$	0	$1.0826 \cdot 10^{-3}$
3	$-2.54 \cdot 10^{-6}$	$-0.1742 \cdot 10^{-3}$	$-0.1767 \cdot 10^{-3}$

Concluimos que la presencia de una cavidad en el interior de la Tierra como la descrita en la novela de Verne induciría las siguientes anomalías ΔJ_n en los primeros coeficientes del potencial gravitatorio terrestre:

$$\begin{aligned} \Delta J_0 &= -\alpha = -0.0015 = -0.15\% \text{ de } J_0, \\ \Delta J_1 &= \frac{3\alpha (r_2^4 - r_1^4)}{8a (r_2^3 - r_1^3)} = 0.73183 \cdot 10^{-3} \approx +0.07\% \text{ de } J_1, \\ \Delta J_2 &= 0, \\ \Delta J_3 &= -\frac{\alpha (r_2^6 - r_1^6)}{16a^3 (r_2^3 - r_1^3)} = -0.17420 \cdot 10^{-3} \approx 7000 \cdot J_3. \end{aligned}$$

La interpretación física de los resultados anteriores es la siguiente:

- ΔJ_0 : El signo negativo indica que la presencia de la cavidad reduce la masa total de la Tierra proporcionalmente a su volumen. Sin embargo, esta anomalía en valor absoluto es apenas apreciable debido al tamaño de la cavidad frente al del planeta.
- ΔJ_1 : El signo positivo indica que, como se explicó en la Sección 2.2.1, la cavidad se encuentra en el hemisferio norte, luego el centro de masas del sistema Tierra-cavidad se encuentra desplazado hacia el hemisferio sur con respecto al centro de masas de la Tierra sin la cavidad. El efecto es la introducción de una ligera anomalía, en valor absoluto, del campo gravitatorio, de tipo dipolar.
- ΔJ_2 : La presencia de la cavidad no afecta al achatamiento terrestre, ya que su forma no induce una asimetría ecuatorial-polar.
- ΔJ_3 : El signo negativo indica que la presencia de la cavidad contribuye a reforzar el déficit de masa en el hemisferio norte que ya de por sí presenta la Tierra ($J_3 < 0$, forma de “pera”). Además, lo hace de manera muy significativa, ya que la anomalía introducida representa un incremento en valor absoluto del coeficiente J_3 cercano a los cuatro órdenes de magnitud.

3.2. Cálculo de la distancia de una masa puntual al centro del planeta para que el coeficiente J_1 sea igual al terrestre

Desarrollamos la Ecuación (2.2.2) hasta el grado armónico $n = 3$, como hicimos en el caso del potencial de la cavidad y del potencial gravitatorio terrestre en las secciones 3.1.2 y 3.1.3 respectivamente. Sabiendo que $M_{puntual} = 9.0148 \cdot 10^{21} \text{ kg} = \alpha M$, tenemos:

$$\begin{aligned} V_{masa}(r, \theta) &\approx V_{masa}^{(0)}(r, \theta) + V_{masa}^{(1)}(r, \theta) + V_{masa}^{(2)}(r, \theta) + V_{masa}^{(3)}(r, \theta) = \\ &= \frac{GM}{r} \cdot (-\alpha) - \frac{GMa \cos \theta}{r^2} \cdot \left(-\frac{\alpha d}{a}\right) - \frac{GMa^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} \cdot \frac{\alpha d^2}{a^2} - \\ &- \frac{GMa^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2r^4} \cdot \left(-\frac{\alpha d^3}{a^3}\right) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Por tanto, el potencial gravitatorio total generado por la Tierra con la cavidad y la masa puntual en su interior es igual a la suma de las ecuaciones (3.1.9) y (3.2.1):

$$V_T(r, \theta) = V_{Tierra + cavidad} + V_{masa} \approx \frac{GM}{r} J_0'' - \frac{GMa \cos \theta}{r^2} J_1'' - \frac{GMa^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} J_2'' - \frac{GMa^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2r^4} J_3'', \quad (3.2.2)$$

$$\text{con: } \begin{cases} J_0'' = J_0 - \alpha - \alpha \\ J_1'' = J_1 + \frac{3\alpha(r_2^4 - r_1^4)}{8a(r_2^3 - r_1^3)} - \frac{\alpha d}{a} \\ J_2'' = J_2 + \frac{\alpha d^2}{a^2} \\ J_3'' = J_3 - \frac{\alpha(r_2^6 - r_1^6)}{16a^3(r_2^3 - r_1^3)} - \frac{\alpha d^3}{a^3} \end{cases}$$

Imponiendo la condición $J_1'' = 0$, obtenemos finalmente la distancia d con respecto al centro de la Tierra a la que debe encontrarse situada la masa puntual sobre el eje z en el hemisferio sur:

$$J_1'' = 0 \iff \underbrace{J_1}_0 + \frac{3\alpha(r_2^4 - r_1^4)}{8a(r_2^3 - r_1^3)} - \frac{\alpha d}{a} = 0 \iff d = \frac{3(r_2^4 - r_1^4)}{8(r_2^3 - r_1^3)} \iff \boxed{d = 3111.828 \text{ km}}$$

Tabla 2: Comparación de los valores de los primeros coeficientes del potencial gravitatorio generado por la Tierra ($J_n, Tierra$), por la cavidad ($J_n, cavidad$), por la masa puntual ($J_n, masa$) y por el sistema total de la Tierra con la cavidad y la masa puntual en su interior ($J_n, total$). Los valores teóricos de $J_n, Tierra$ se han tomado de Lowrie [3].

n	$J_n, Tierra$	$\Delta J_n, cavidad$	$\Delta J_n, masa$	$J_n, total (J_n')$
0	1	-0.0015	-0.0015	0.9970
1	0	$0.7318 \cdot 10^{-3}$	$-0.7318 \cdot 10^{-3}$	0
2	$1.0826 \cdot 10^{-3}$	0	$0.3571 \cdot 10^{-3}$	$1.4397 \cdot 10^{-3}$
3	$-2.54 \cdot 10^{-6}$	$-0.1742 \cdot 10^{-3}$	$-0.1742 \cdot 10^{-3}$	$-0.3509 \cdot 10^{-3}$

Conocido el valor de d , podemos estudiar cómo afectaría al resto de coeficientes J_n la introducción de una masa puntual como la descrita en el sistema Tierra-cavidad anterior.

- ΔJ_0 : La contribución de la masa puntual al coeficiente J_0 es negativa, al igual que en el caso de la cavidad (como cabría esperar porque la masa que hemos introducido es negativa). Esto indica que su presencia reduce la masa total de la Tierra. No solo eso sino que, además, es idéntica en módulo al caso de la cavidad, lo cual tiene sentido puesto que $M_{puntual} = M_{cavidad}$.
- ΔJ_1 : Hemos obtenido el valor de d imponiendo $J_1'' = J_1, Tierra = 0$ precisamente para mantener el centro de masas del sistema total en el centro de la Tierra.

- ΔJ_2 : A diferencia del caso de la cavidad, la presencia de la masa puntual afecta al achatamiento terrestre. De hecho, $\frac{\alpha d^2}{a^2} = 0.3571 \cdot 10^{-3} \approx 33\%$ de $J_{2, Tierra}$. Es decir, la introducción de la masa puntual supondría un aumento del coeficiente J_2 terrestre igual a una tercera parte de su valor.
- ΔJ_3 : Como ocurría con la cavidad, la presencia de la masa puntual contribuye a reforzar la característica forma de “pera” de la Tierra ($J_3 < 0$). Además, lo hace de manera idéntica a la cavidad, ya que:

$$\frac{\alpha d^3}{a^3} = 0.17420 \cdot 10^{-3} = \frac{\alpha(r_2^6 - r_1^6)}{16a^3(r_2^3 - r_1^3)}.$$

3.3. Cálculo del volumen de agua máximo admitido en la cavidad para que sea posible el aterrizaje sobre su superficie

A partir de las deducciones anteriores y utilizando la notación de la Figura 5, podemos calcular el volumen de agua máximo que podría albergar el océano subcortical de la novela para que fuera posible el aterrizaje sobre la superficie de la cavidad como:

$$\begin{aligned}
 V_{max} &= V_{semielipsoide} - V_{semiesfera} = \frac{2}{3}\pi (r'_1)^2 r_1 - \frac{2}{3}\pi r_1^3 = \frac{2}{3}\pi r_1 \left((r'_1)^2 - r_1^2 \right) = \\
 &\stackrel{(2.3.1)}{=} \frac{2}{3}\pi r_1 \left(\frac{r_1^2}{(1-f'')^2} - r_1^2 \right) = \frac{2}{3}\pi r_1^3 \left(\frac{1}{(1-f'')^2} - 1 \right) = \frac{2}{3}\pi r_1^3 f'' \frac{2-f''}{(1-f'')^2} = \\
 &\stackrel{(2.3.12)}{=} \frac{2}{3}\pi r_1^3 (3J_2'' + m'') \frac{4-m''-3J_2''}{(2-m''-3J_2'')^2}, \tag{3.3.1}
 \end{aligned}$$

con:

$$m'' = \frac{a^2 c \omega^2}{GM''}, \quad M'' = M - M_{cavidad} - M_{puntual} = M - 2M_{cavidad} = 5.9557 \cdot 10^{24} \text{ kg} \tag{3.3.2}$$

Por tanto, sustituyendo valores obtenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} J_2'' \stackrel{(3.2.2)}{=} 2.0454110 \cdot 10^{-3} \\ m'' \stackrel{(3.3.2)}{=} 3.460 \cdot 10^{-3} \end{array} \right\} \stackrel{(3.3.1)}{\implies} \boxed{V_{max} = 4.86719 \cdot 10^{18} \text{ m}^3}$$

3.3.1. Consideración $M'' \approx M$

En lugar de realizar el cálculo exacto de V_{max} , esta aproximación podría haber sido válida en tanto que las masas de la cavidad y de la masa puntual son relativamente pequeñas en comparación con la masa real de la Tierra. En ese caso:

$$m'' = \frac{a^2 c \omega^2}{GM''} \approx \frac{a^2 c \omega^2}{GM} \tag{3.3.3}$$

Este valor es conocido y se encuentra recogido en la obra de Lowrie y Fichtner [3]: $m'' = m_{Tierra} = \frac{1}{288.901}$. Así:

$$V_{max, aprox1} = 4.87212 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$$

Esta aproximación habría conllevado tan solo un error relativo del 0.1 % con respecto al valor teórico exacto de V_{max} .

3.3.2. Consideración $\omega = 0$

Esta aproximación, aunque desprecia el efecto de la rotación de la Tierra, podría haber sido válida en tanto que $m'' \sim 10^{-3} \approx 0$. Observamos que, en este caso, la Ecuación (3.3.1) sería más sencilla y se reduciría a:

$$V_{max} \approx 2\pi r_1^3 J_2'' \frac{4 - 3J_2''}{(2 - 3J_2'')^2} \quad (3.3.4)$$

Sustituyendo valores, obtendríamos que:

$$V_{max, aprox2} = 3.10418 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$$

Esta aproximación, sin embargo, habría conllevado un error relativo con respecto al valor teórico exacto de V_{max} del 36.22 %, mucho mayor que en el caso anterior. Esto se debe a que J_2'' y m'' son comparables ($\sim 10^{-3}$), por lo que los resultados se ven más afectados si eliminamos directamente de la ecuación el término m'' .

3.3.3. Comparación de los resultados

Podemos concluir que las dos aproximaciones que se podrían realizar para estimar el cálculo del volumen máximo del océano en la cavidad de la novela son consistentes entre sí en el sentido de que ambas se encuentran en el mismo orden de magnitud ($\sim 10^{18} \text{ m}^3$). Además, la primera aproximación difiere del valor real únicamente con un error relativo del 0.1 %.

Charette y Smith estiman un volumen oceánico terrestre total de $1.3324 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ [8]. Para ello, utilizan el modelo batimétrico global *SRTM30PLUS V5* (mapa digital de la topografía submarina), que combina medidas de altimetría por satélite con información recopilada por ecosondas instaladas en barcos.

Por tanto, lo que podemos afirmar es que, en cualquier caso, el volumen de agua máximo que hubiera podido admitir el océano de la novela de Verne para permitir la caída de Axel sobre tierra firme sería mayor que el volumen total de toda la superficie oceánica terrestre.

4. Conclusiones

Este proyecto ha abordado un análisis gravimétrico innovador de la novela de ficción especulativa *Viaje al centro de la Tierra*, de Jules Verne. Para ello, nos hemos centrado en evaluar el impacto en el campo gravitatorio terrestre que provocaría la presencia de una gigantesca cavidad subterránea como la que se describe en la obra. A continuación, se sintetizan las conclusiones más relevantes:

- Anomalías ΔJ_n inducidas por la cavidad. La modelización de la cavidad como una semicorona esférica en el hemisferio norte ha revelado anomalías considerables en los primeros coeficientes armónicos J_n del potencial gravitatorio terrestre. Destaca especialmente la anomalía inducida en el coeficiente J_3 , que llega a incrementar su valor absoluto en cuatro órdenes de magnitud, reforzando significativamente el déficit de masa en el hemisferio norte que ya presenta la Tierra real de por sí. Destaca el hecho de que el coeficiente J_2 no se ve afectado por la presencia de la cavidad, ya que la forma de la misma no afecta a la simetría ecuatorial-polar de la Tierra. También es notable el hecho de que el coeficiente J_1 deja de ser cero, como consecuencia del desplazamiento hacia el sur del centro de masas del sistema Tierra-cavidad con respecto al centro de la Tierra real. Este resultado ha dado pie a la discusión del siguiente apartado del proyecto.
- Compensación de la anomalía en J_1 a partir de una masa puntual. Para hacer coincidir de nuevo el centro de masas del sistema Tierra-cavidad con el centro de la Tierra real, hemos introducido una masa puntual negativa en el hemisferio sur sobre el eje z a una distancia $d = 5109.959$ km. Esto ha revelado, de nuevo, anomalías importantes en los coeficientes armónicos del potencial gravitatorio terrestre. Por una parte, se ha logrado que el coeficiente J_1 vuelva a ser cero, como en el caso de la Tierra real. Sin embargo, la introducción de esta masa puntual ha provocado que el coeficiente J_2 prácticamente se duplique en valor absoluto y que se sume un aporte aún más significativo que en el caso de la cavidad al coeficiente J_3 .
- Volumen de agua máximo admitido en la cavidad. Por último, hemos calculado de manera real el volumen máximo de agua que podría admitir el océano de la cavidad para permitir el aterrizaje sobre tierra firme, $V_{max} = 4.86719 \cdot 10^{18}$ m³, y hemos sugerido dos posibles aproximaciones para simplificar los cálculos. Este valor supera en casi cuatro veces el volumen total de los océanos terrestres ($1.3324 \cdot 10^{18}$ m³). Tal cantidad de agua, aunque físicamente inviable por las presiones y temperaturas del interior terrestre a la profundidad a la que se encuentra el océano, subraya el carácter especulativo de la novela.

Si bien la obra de Verne se sustenta en teorías científicas decimonónicas, el estudio desarrollado en este proyecto sirve como herramienta pedagógica para explorar conceptos gravimétricos fundamentales. Además, el modelo empleado asume simplificaciones (como la densidad uniforme de la cavidad o la ausencia de efectos termodinámicos) que podrían refinarse incorporando anisotropías sísmicas o dinámica de fluidos.

Sería interesante extender el análisis a otros elementos de la novela, como la viabilidad de ecosistemas en las condiciones extremas del interior terrestre, que podría ser analizada desde otras perspectivas científicas. En conclusión, este proyecto fusiona la literatura de ficción con la geofísica contemporánea, y destaca la importancia de la gravimetría en la exploración indirecta del interior terrestre. El estudio invita a reflexionar sobre los límites entre la ciencia y la ficción, así como sobre el papel de la curiosidad científica en la narrativa de aventuras.

Referencias

- [1] Jules Verne and Miguel Salabert. *Viaje al centro de la Tierra*. El Libro de Bolsillo Series. Alianza Editorial, S. A., 2022. ISBN 978-8-420-60904-1.
- [2] P. Zingerle, R. Pail, T. Gruber, and X. Oikonomidou. The combined global gravity field model xgm2019e. *Journal of geodesy*, 94(7):66, 2020.
- [3] William Lowrie and Andreas Fichtner. *Fundamentals of Geophysics*. Cambridge University Press, 3 edition, 2020. ISBN 978-1-108-49273-7.
- [4] Bernhard Hofmann-Wellenhof and Helmut Moritz. *Physical Geodesy*. Springer, 2 edition, 2006. ISBN 978-3-211-33544-7.
- [5] Adam M. Dziewonski and Don L. Anderson. Preliminary reference earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 25(4):297–356, 1981.
- [6] William Lowrie. *A Student's Guide to Geophysical Equations*. Cambridge University Press, 2011. ISBN 978-0-521-18377-2.
- [7] Wolfgang Torge. *Geodesy*. Walter de Gruyter, 2001. ISBN 978-3-110-17072-8.
- [8] Matthew A. Charette and Walter H. F. Smith. The volume of earth's ocean. *Oceanography*, 23(2):112–114, 2010.