

Agregación de criterios difusos en conjuntos probabilísticos

por FRANCISCO JAVIER MONTERO DE JUAN

Departamento de Estadística e I. O.
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense

RESUMEN

En este trabajo se revisan algunos resultados sobre operaciones de agregación para aplicarlos a problemas de decisión multicriterio en ambiente difuso.

Palabras Claves: Decisiones Multicriterio, Operaciones de Agregación, Conjuntos Difusos.

1. INTRODUCCION

Aunque en los primeros trabajos sobre la Teoría de Conjuntos Difusos (Zadeh, 1965) se proponen los operadores para la intersección de conjuntos difusos (mínimo y producto) y otros dos operadores para la unión (máximo y suma), en muchas situaciones prácticas ninguno de estos operadores resulta apropiado. En concreto, tal deficiencia es notoria cuando un problema de decisión multicriterio se plantea como un problema de agregación (Czogala et al., 1984).

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ representa el conjunto de alternativas a considerar, notemos por $D = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de criterios utilizados para describir ca-

da una de las alternativas. De este modo, el conjunto de alternativas será evaluado para cada criterio, en términos de un «grado de aceptación» $[0, 1]$ valorado, que en principio dependerá de un estado $\omega \in \Omega$ observable. Así la bondad de las alternativas bajo el criterio $j \in D$ vendrá determinada por un conjunto difuso de la forma

$$\mu_{\{j\}}: X \times \Omega \rightarrow [0, 1]$$

es decir, un «conjunto probabilístico» en el sentido de Hirota (1981) si sobre un σ -álgebra de partes de Ω se define una medida de probabilidad P .

Se tratará entonces de ir agregando las valoraciones bajo los diferentes criterios hasta lograr una valoración global

$$\mu_D: X \times \Omega \rightarrow [0, 1]$$

de modo que si la sección

$$\mu_D(x_i, \cdot): \Omega \rightarrow [0, 1]$$

es medible para toda $x_i \in X$, sea posible hacer uso del criterio de la esperanza para escoger la alternativa. Dicho de otro modo, restringir nuestro problema al conjunto de alternativas x_i tal que

$$E[\mu_D(x_i, \cdot)] = \max_{x \in X} E[\mu_D(x, \cdot)]$$

2. DESCRIPCION FORMAL

Notemos entonces por $\mathcal{A}(X)$ la familia de todos los conjuntos difusos definidos sobre X , y por $\mathcal{P}(D)$ la familia de todas las partes de D (es decir, todos los grupos de criterios). Nuestro objetivo será ahora definir una operación de agregación para cada $\omega \in \Omega$ fijo:

$$\odot: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

donde $\mathcal{M} = \mathcal{A}(X) \times \mathcal{P}(D)$, de modo que a cada par de grupos de criterios le corresponda el grado de aceptación de su agregación. En otras palabras:

$$(\mu_A, A) \odot (\mu_B, B) = (\mu_{A \cup B}, A \cup B) \quad \forall A, B$$

Además, podemos suponer que el conjunto de criterios está dado a través de un conjunto difuso

$$\beta: D \rightarrow [0, 1]$$

donde $\beta(j)$ representa el grado en que el criterio $j \in D$ es realmente importante para el decisor. Supondremos que $\beta(j) > 0$ para todo criterio en D .

Por tanto, $\mu_A(x_i)$ nos indicará el grado de aceptación o bondad de la alternativa x_i analizada a la luz del grupo de criterios $A \in \mathcal{P}(D)$, valoración que vendrá afectada no sólo por el número de criterios agregados en A , sino también por las calidades $\beta(j)$ de los criterios $j \in A$ agregados.

Definición:

Una operación de agregación es toda correspondencia

$$\odot: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

$$(\mu_A, A) \odot (\mu_B, B) = (\mu_{A \cup B}, A \cup B) \quad A \cap B = \phi$$

verificando

$$((\mu_A, A) \odot (\mu_B, B)) \odot (\mu_C, C) = (\mu_A, A) \odot ((\mu_B, B) \odot (\mu_C, C))$$

$$(\mu_A, A) \odot (\mu_B, B) = (\mu_B, B) \odot (\mu_A, A)$$

Y algunas condiciones pueden ser aceptadas con cierta generalidad:

i) Sean $A, B \in \mathcal{P}(D)$ grupos disjuntos de criterios tales que $\mu_A \equiv \mu_B \equiv \mu \in \mathcal{A}(X)$. Entonces $\mu_{A \cup B} \equiv \mu$.

ii) Sean $A, B \in \mathcal{P}(D)$ grupos disjuntos de criterios tales que

$$\mu_A(x) \geq \mu'_A(x), \quad \mu_B(x) \geq \mu'_B(x) \quad \forall x \in Y \subset X$$

entonces

$$\mu_{A \cup B}(x) \geq \mu'_{A \cup B}(x) \quad \forall x \in Y \subset X$$

Bajo estas condiciones las siguientes definiciones tienen pleno sentido.

Definición:

Una familia de criterios G se dice « δ -decisivo» frente a otra familia de criterios G' ($G \cap G' = \emptyset$) y para una alternativa $x \in X$ tal que $\mu_G(x) \neq \mu_{G'}(x)$, cuando

$$\mu_{G \cup G'}(x) = \delta \cdot \mu_G(x) + (1 - \delta) \cdot \mu_{G'}(x)$$

Es claro que gracias a las dos condiciones anteriores $\delta \in [0, 1]$ y se puede notar

$$\delta = \delta_{G, G'}^x(\mu_G(x), \mu_{G'}(x))$$

de modo que

$$\delta_{G, G'}^x(p, q) = 1 - \delta_{G', G}^x(q, p) \quad \forall p \neq q$$

Definición:

La «calidad» de un criterio $j \in D$ frente a un grupo de criterios G ($j \notin G$) con opiniones $\mu_{\{j\}}$ y μ_G respectivamente ($\mu_{\{j\}} \neq \mu_G$) viene dado por

$$\delta(\{j\}, G)/\beta(j)$$

donde

$$\delta(\{j\}, G) = \inf_{x \in X} \delta_{\{j\}, G}^x(\mu_{\{j\}}(x), \mu_G(x))$$

$$\mu_{\{j\}}(x) \neq \mu_G(x)$$

representa la decisividad mínima del criterio $j \in D$ sobre el grupo de criterios G .

3. REGLAS DE AGREGACION

La principal regla de agregación viene justificada por el siguiente resultado:

Teorema 1

Sea \odot operación de agregación verificando (i) y (ii). Entonces la regla que hace máxima la mínima calidad de los criterios viene dada por

$$\mu_{G \cup G'}(x) = \left(\sum_{i \in G} \beta(i) \cdot \mu_G(x) + \sum_{i \in G'} \beta(i) \cdot \mu_{G'}(x) \right) / \sum_{i \in G \cup G'} \beta(i)$$

para G y G' disjuntos cualesquiera.

Demostración:

Sea un grupo G y un criterio $j \in G$. Como la regla propuesta viene caracterizada por

$$\delta_{\{j\}, G-\{j\}}^x(p, q) = \beta(j) / \sum_{i \in G} \beta(i) \quad \forall p \neq q, \quad \forall x \in X$$

bastará comprobar que toda regla bajo las condiciones (i) y (ii) presenta algún criterio $j \in G$ tal que

$$\delta_{\{j\}, G-\{j\}}^x(p, q) \leq \beta(j) / \sum_{i \in G} \beta(i)$$

para algún $p \neq q$ y algún $x \in X$. Y en efecto, por inducción:

a) Si $\text{card}(G - \{j\}) = 1$, $G - \{j\} = \{k\}$, y fuese

$$\delta_{\{j\}, \{k\}}^x(p, q) > \beta(j) / (\beta(j) + \beta(k))$$

entonces

$$\begin{aligned} \delta_{\{k\}, \{j\}}^x(q, p) &= 1 - \delta_{\{j\}, \{k\}}^x(p, q) < \\ &< 1 - \beta(j) / (\beta(j) + \beta(k)) = \\ &= \beta(k) / (\beta(k) + \beta(j)) \end{aligned}$$

b) Si suponemos que

$$\delta_{\{j\}, G-\{j\}}^x(p, q) \leq \beta(j) / \sum_{i \in G} \beta(i)$$

para $\text{card}(G - \{j\}) = n$ y $p \neq q$, bastará tomar

$$\begin{aligned} \mu_{\{j\}}(x) &= p \\ \mu_{G-\{j\}}(x) &= \mu_{\{k\}}(x) = q \end{aligned}$$

para algún criterio $k \notin G$ para que, por una parte,

$$\mu_{GU\{k\}}(x) = \delta_{\{j\}, GU\{k\}-\{j\}}^x(p, q) \cdot p + \delta_{GU\{k\}-\{j\}, \{j\}}^x(q, p) \cdot q$$

y por otra, si

$$z = \mu_G(x) = \delta_{\{j\}, G-\{j\}}^x(p, q) \cdot p + \delta_{GU\{k\}-\{j\}, \{j\}}^x(q, p) \cdot q$$

tendremos que

$$\mu_{GU\{k\}}(x) = \delta_{G,\{k\}}^x(z, q) \cdot \delta_{\{j\}, G-\{j\}}^x(q, p) \cdot p + \\ + (\delta_{G,\{k\}}^x(z, q) \cdot \delta_{G-\{j\}, \{j\}}^x(q, p) + \delta_{\{k\}, G}^x(q, z)) \cdot q$$

Por tanto,

$$\delta_{\{j\}, GU\{k\}-\{j\}}^x(p, q) = (1 - \delta_{\{k\}, G}^x(q, z)) \cdot \delta_{\{j\}, G-\{j\}}^x(p, q)$$

y podemos suponer $z \neq q$, de modo que si fuese

$$\delta_{\{k\}, G}^x(q, z) > \beta(k) / \sum_{i \in GU\{k\}} \beta(i)$$

sería

$$\delta_{\{j\}, GU\{k\}-\{j\}}^x(p, q) < \beta(j) / \sum_{i \in GU\{k\}} \beta(i)$$

y de cualquier manera el resultado es cierto.

En conclusión, bajo las tres condiciones del teorema,

$$\mu_D(x) = \sum_{i \in D} \beta(i) \cdot \mu_{\{i\}}(x) / \sum_{j \in D} \beta(j)$$

y si el grupo D fuese homogéneo (es decir, $\beta(j) = c$ para todo $j \in D$, con $c > 0$), la regla vendría dada por

$$\mu_{GUG'}(x) = (\text{card}(G) \cdot \mu_G(x) + \text{card}(G') \cdot \mu_{G'}(x)) / \text{card}(GUG')$$

de modo que

$$\mu_D(x) = \sum_{i \in D} \mu_{\{i\}}(x) / \text{card}(D) \quad \forall x \in X$$

con lo que se generaliza el teorema 3 de Montero (1985) para grupos homogéneos. Además, si consideramos una extensión

$$\beta^* = \mathcal{P}(D) \rightarrow [0, 1]$$

tal que $\beta^*(\{j\}) = \beta(j)$ para todo $j \in D$, definida a través de una operación de agregación bajo las condiciones del teorema 5(b) de Montero (1985), entonces la decisión sólo tendría en cuenta los criterios más importantes. Es decir:

$$\mu_D(x) = \sum_{i \in M} \mu_{\{i\}}(x) / \text{card}(M)$$

donde en el conjunto absolutamente decisivo

$$M = \{i \in D, \beta(i) = \max_{j \in D} \beta(j)\}$$

se han supuesto las condiciones del teorema 1.

Análogamente, el teorema 4 de Montero (1985) nos asegura, bajo las condiciones correspondientes dentro de M , la existencia de un valor $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \max_{i \in M} \mu_{\{i\}}(x) & \text{si } \mu_{\{i\}}(x) < \alpha & \forall i \in M \\ \alpha & \text{si } \exists j, k \in M, \mu_{\{j\}}(x) \leq \alpha \leq \mu_{\{k\}}(x) \\ \min_{i \in M} \mu_{\{i\}}(x) & \text{si } \mu_{\{i\}}(x) > \alpha & \forall i \in M \end{cases}$$

para cada $x \in X$.

Sin embargo, esta regla de agregación (de tipo «mixto» para Fung-Fu, 1975) aplicada a la importancia de los grupos de criterios puede llevarnos fácilmente a contradicciones:

Teorema 2.

Supongamos que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\beta^*(G) = \begin{cases} \sup_{i \in G} \beta(i) & \text{si } \beta(i) < \alpha & \forall i \in G \\ \inf_{i \in G} \beta(i) & \text{si } \beta(i) > \alpha & \forall i \in G \\ \alpha & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces no existe regla de agregación verificando i) y además

$$\text{iii) } B^*(A) \neq \beta^*(B) = \beta^*(A \cup B) \Rightarrow \mu_{A \cup B} \equiv \mu_B$$

Demostración

Ante todo, hay que señalar que bajo la condición iii), todo criterio que no modifique la importancia de un grupo de criterios tampoco modifica los grados de aceptación de las alternativas. Además, para un $\alpha \in [0,1]$ en general, tal condición implica evidentemente que si un grupo G es tal que $B^*(G) = \alpha$, este grupo es absolutamente decisivo frente a cualquier otro grupo G' , $G \cap G' = \phi$, $B^*(G') \neq \alpha$.

La demostración la llevaremos a cabo por reducción al absurdo: sea $\alpha \in (0,1)$ y sean A, A' , B, B' grupos disjuntos de criterios tales que $\mu_A \neq \mu_B$ y

$$\beta^*(A') < \beta^*(A) < \alpha < \beta^*(B) < \beta^*(B')$$

Entonces $\beta(A \cup B) = \beta(A' \cup B) = \alpha$, luego

$$\mu_{A \cup B \cup A'} \equiv \mu_{A \cup B} \equiv \mu_{A' \cup B}$$

para cualquier $\mu_{A'}$. Por tanto, por i) será

$$\mu_{A \cup B \cup A'} \equiv \mu_B$$

Análogamente, $\mu_{A \cup B \cup B'} \equiv \mu_{A \cup B} \equiv \mu_{A \cup B'}$ para cualquier $\mu_{B'}$, luego ha de ser

$$\mu_{A \cup B \cup B'} \equiv \mu_A$$

con $\beta(A \cup B \cup A') = \beta(A \cup B \cup B') = \alpha$. Pero entonces habría de ser

$$\mu_{A \cup B \cup A' \cup A'} \equiv \mu_{A \cup B \cup A'}$$

en contradicción con

$$\mu_{A \cup B \cup B' \cup A'} \equiv \mu_{A \cup B \cup B'}$$

Además, para cualquier α general, tenemos que si el conjunto $\{i \in D, \beta(i) = \alpha\}$ es no vacío, entonces es absolutamente decisivo.

4. EJEMPLO

Supongamos un grupo homogéneo de gran número de criterios, y que $\Omega = (0,1)$ representa las posibles coyunturas, que siguen una distribución P de tipo beta con parámetros $p > 0$ y $q > 1$. Supongamos además que

$$\mu_{ij}(x_i, \omega) = \omega^{i+j}$$

Entonces, bajo las condiciones del teorema 1,

$$\mu_D(x_i, \omega) = \sum_{j=1}^m \omega^{i+j}/m \simeq (u^i/(1-\omega))/m$$

de modo que

$$E[\mu_D(x_i, \cdot)] = \int_{\Omega} \mu_D(x_i, \omega) dP(\omega) \simeq (1/m) \cdot \int_{\omega=0}^1 (\omega^i/(1-\omega)) \cdot \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \omega^{p-1} \cdot (1-\omega)^{q-1} d\omega =$$

$$= (1/m) \cdot (\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)/\Gamma(p+q)) \cdot (\Gamma(p+i+q-1))/(\Gamma(p+i) \cdot \Gamma(q-1))$$

y como hemos supuesto $q > 1$,

$$E[\mu_D(x_{i+1}, \cdot)] = \frac{p+i+q-1}{p+i} \cdot E[\mu_D(x_i, \cdot)] > E[\mu_D(x_i, \cdot)]$$

es claro que la alternativa que maximiza la esperanza del grado de aceptación es la alternativa x_m .

BIBLIOGRAFIA

CZOGALA, E.; ZIMMERMANN, H. J. «The Aggregation Operations for Decision Making in Probabilistic Fuzzy Environment» *Fuzzy Sets and Systems* 13 (1984) 223-239.
 FUNG, L. W.; FU, K. S. «An Axiomatic Approach to Rational Decision Making in a Fuzzy Environment», en ZADEH, L. A.; KING-SUM, F.; TANAKA, K.; SHIMURA, A. (eds.) «Fuzzy Sets and their Application to Coquitive and Decision Processes» Academic Press, 1975.

- HIROTA, K. «Concepts of Probability Sets» *Fuzzy Sets and Systems* 5 (1981) 31-46.
- MONTERO, F. J. «A Note on Fung-Fu's Theorem», *Aparecerá en Fuzzy Sets and System* 17 (1985).
- ZADEH, L. A. «Fuzzy Sets» *Information and Control* 8 (1965) 338-353.

SUMMARY

AGREGATION OF FUZZY CRITERIA ON PROBABILISTIC SETS

In this paper some results on aggregation operations are revised in order to its application in multicriteria decision making in a fuzzy environment.

Key words: Multicriteria Decision Making, Agregation Operations, Fuzzy Sets.

AMS, 1980. Subject classification: 90A08.