CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS
Patronato "Alfonso el Sabio"

GACETA MATEMATICA

REVISTA PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN»
DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA
ESPAÑOLA

PRIMERA SERIE

Tomo XIII

INDICE

MADRID

1961

REQUISITOS DESEABLES POR LA UNIVERSIDAD EN LA FORMACION DE LOS ESTUDIANTES (1)

Por

Prof. T. Rodríguez Bachiller.

Requerido, en nombre del C. O. D., por mi estimado amigo el profesor García Rúa, para hablarles a ustedes sobre el tema *Requisitos deseables por la Universidad (y en especial por las Facultades de Ciencias Matemáticas y Físicas) en la formación secundaria de los estudiantes,* me ha parecido oportuno, en vez de enumerar tales o cuales conocimientos necesarios para comenzar con eficacia la tarea universitaria, lista que por lo pronto sería incompleta y muy discutible, el decirles brevemente algo sobre lo que en realidad es la Matemática, al menos actualmente, puesto que de ello, y con la experiencia e interés de ustedes no les ha de ser difícil el deducir el tipo general de preparación que pueda ayudar al estudiante en su futura carrera universitaria, científica, didáctica o técnica.

La Matemática es una actividad vital para el hombre en su trato con la realidad en que está, para entenderla y para poder vivir en ella ; es una actividad de pensamiento que intenta organizar, dar estructura a los diversos aspectos que tal realidad le presenta. Justamente los tres aspectos más destacados y urgentes, a saber : el lenguaje (para comunicar y expresar), la numerosidad de la realidad y su aspecto espacial son los que han obligado al hombre a hacer matemática, mediante esa facultad que lo distingue esencialmente del animal, la del pensar simbólico. La operación de contar construye el concepto de número natural, y la de medir, el concepto de espacio ; sólo mucho más tarde se ha caído en la cuenta de que el lenguaje, como estructura simbólica y como estructura significativa, contiene ya el modo del pensar matemático : la lógica elemental clásica no es otra cosa que pura matemática, un tanto tosca, de símbolos lingüísticos.

Ni que decir tiene, bien lo saben ustedes, la realidad es aquí sólo el motivo del que surge en el hombre la actividad matemática ; ésta es en definitiva una construcción mental que no nos da, en verdad, conocimiento

(1) Conferencia pronunciada en la Reunión de Catedráticos de Matemáticas de Enseñanza Media, en marzo del año actual.

alguno propiamente dicho de esa realidad; todo lo más, tales construcciones sólo nos proporcionan interpretaciones aproximadas de la realidad. El matemático se desentiende pronto de ésta, para dedicarse al estudio de las estructuras posibles de la colección de construcciones posibles de máxima generalidad. Por ello el punto de partida del matemático son los conjuntos en general contruidos con objetos indeterminados, como miembros o elementos: la relación básica y exclusiva es la relación de pertenencia. Nada importa el contenido concreto del objeto una vez elegida la relación mencionada. La tarea inmediata consiste en organizar conjuntos, lo cual se hace siempre o se reduce a fijar, con una u otra intención, una o más *relaciones* entre sus elementos, que son las que van a producir una estructura; entre tales relaciones, quizá las más fundamentales son las *relaciones de equivalencia*, que permiten, sin más, *distinguir* y, por tanto, *clasificar*, constituyendo la esencia del proceso de *abstracción*, característico del pensamiento matemático, y que garantiza la posibilidad de generalizar, es decir, de ampliar interminablemente el campo de las construcciones posibles, como almacén para elaborar sistemas de conocimiento o interpretaciones de las distintas regiones de la realidad: finalidad definitiva del físico, del biólogo, del sociólogo, del psicólogo, etc. Naturalmente, la invención de relaciones (aunque a priori es arbitraria), en virtud de la finalidad esencial del hombre, se ha desarrollado lentamente a lo largo de todo el proceso histórico de la matemática, siguiendo las más de las veces las sugestiones intuitivas que sobre la numerosidad y la espaciosidad de la realidad va destacando el hombre, impulsado por la urgencia de sus necesidades vitales; de aquí la atención predominante que ha concedido a las relaciones producidas por el manejo directo de los números y de las extensiones espaciales, con la Aritmética y la Geometría tradicionales, muy ligadas, como todos ustedes saben, a puras actividades prácticas (agrimensura, contabilidad mercantil, previsiones astronómicas, ritos religiosos, etcétera). Ya en esta primera etapa los griegos supieron darse cuenta: primero, de la necesidad de un lenguaje más preciso que los habituales; segundo, de la estructura deductiva de las construcciones formales ligadas a dicho lenguaje (en general simbólico), y tercero, de la exigencia axiomática que lleva consigo la fundamentación de tales construcciones. Estos motivos internos a la matemática han ido alternando con los motivos externos que la ampliación de las actividades técnicas de hombre, en su afán de dominar, aprovechar y, por tanto, entender las energías de la naturaleza, ha provocado, impulsando la invención de estructuras más adecuadas y más complicadas. Así, por ejemplo, el llamado cálculo infinitesimal nace de una actitud nueva frente a la griega, respecto de la realidad: la aceptación del cambio, de la variación; Galileo descubre la esencialidad de esta *variación* en el estudio de los fenómenos físicos, concepto que señala una posibilidad nueva de estructura, nacida del propio fenómeno físico y elaborada matemáticamente por Newton y Leibniz. Sería muy oportuno el seguir paso a paso, históricamente, este proceso de construcción de estructuras que desde los siglos XVI y XVII no ha hecho más que aumentar y enriquecer el sistema de pensamientos matemáticos, pero el tiempo y mi deseo de no cansarles me hace desistir de la tentación. Todo ello ha impulsado cada vez más al matemático y muchas veces al filósofo a reflexionar sobre la estructura propia de esta extraña ciencia que consiste en construir estructuras, expresarlas en un lenguaje simbólico, del cual aparentemente sólo se exige su *consistencia* o no contradicción, pero que no nos enseña *verdades* en el sentido riguroso de esta noción. En el concepto *verdad* entra un ingrediente imprescindible: la *realidad,* ausente en las proposiciones *exactas* de la Matemática. Esto es lo correcto al tratar de calificar los enunciados que propone el matemático: la exactitud, es decir la consistencia con los axiomas que sirven de fundamento y determinan la estructura en cuestión. La meditación a que estoy aludiendo dio ocasión a graves discusiones, que culminaron a finales del siglo pasado y las primeras décadas del actual, en tres actitudes ya clásicas y en cierto modo superadas, ante la Matemática en cuanto estudio de estructuras de los conjuntos en general, cuya *forma* puede expresarse mediante símbolos; sería, por decirlo así, la gramática de todos los sistemas simbólicos y entre ellos su propia estructura interna. Resumiré muy brevemente las tres posiciones aludidas con las denominaciones:

Logicistas: Russell, Logicismo.

Formalistas: Hilbert, Formalismo.

Intuicionistas: Brouwer, Intuicionismo.

Tesis logicista: La Matemática es una rama de la Lógica. La Matemática es solamente Lógica.

El programa de la escuela logicista ha sido expresado por *Russell* así: La Matemática pura es la clase de todas las proposiciones de la forma «p implica q», donde p, q son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en ambas proposiciones, y ni p ni q contienen constante alguna, excepto constantes lógicas.

Tesis formalista: La Matemática es la ciencia de la estructura formal de los símbolos.

El formalismo acentúa la importancia de las características formales de los signos que son *independientes* de su *significación.* En la Geometría ha tenido gran éxito, y una de sus preocupaciones ha sido la Teoría de la demostración.

Tesis intuicionista: La Matemática está fundada sobre una *intuición básica* de la posibilidad de construir una sucesión interminable de números.

Los formalistas ponen el acento sobre el simbolismo; los intuicionistas sobre el *pensamiento*: la Matemática es un *proceso* que no puede jamás ser completamente simbolizado. Es una *actividad social,* mediante la cual los individuos organizan los fenómenos en su aspecto más general para satisfacer sus necesidades: no es, pues, bastante poseer un simbolismo para los pensamientos matemáticos: éstos son independientes del lenguaje particular utilizado. Lo que es absolutamente necesario es que el *lenguaje exprese significativamente pensamientos* y también su *constructividad.* No es este el momento de desarrollar siquiera los rasgos típicos de estas actitudes y por eso, sólo aludo a ellas de un modo tan rápido y conciso.

La situación creada por las polémicas sobre los «fundamentos, como se decía, y que no tuvieron siempre carácter pacífico ni suave, han sido afortunadamente superadas y actualmente tiene poco sentido el adscribirse a un *ismo* cualquiera. En gran parte se debe a la nueva escuela francesa llamada «Grupo Bourbaki», creada aproximadamente hacia el 1930 por la entonces nueva generación de matemáticos franceses, todos ellos influenciados por las magistrales enseñanzas de Elie Cartan, y dirigido hasta hace poco por uno de los más grandes matemáticos actuales, André Weil. Y no poco han contribuido también los sorprendentes descubrimientos en la lógica-matemática del genial Gödel.

Todos estos afanes han ido creando una concepción más justa y a la vez más general y abierta de la Matemática, que, al menos en parte, comienza a realizar el ideal de Leibniz de Ciencia Universal. Porque, efectivamente, cada vez se da mejor cuenta el matemático de que en definitiva su actividad eencialmente libre y constructiva se ocupa de estructuras de sistemas de pensamientos cuya pretensión dominante es la exactitud. Yo creo, y esto es de mi propia responsabilidad (no de Bourbaki) que en toda Ciencia (en cuanto conocimiento verdadero), como sistema de pensamientos que pretenden ser exactos, referentes a cualquier región de la realidad, hay una estructura (que hay que descubrir, sin duda) y tal estructura es por lo pronto matemática, lo cual no implica que con ello se agote el contenido de conocimiento posible en la esfera de la realidad considerada. Y que se sospecha ya, viene comprobado con los intentos de matematizar familias de fenómenos, como los sociológicos, psicológicos, biológicos, etc. : sin duda, de modo equivocado hasta ahora, pues en realidad lo que se pretende hacer, por ejemplo, en la supuesta biología matemática es simplemente aplicar técnicas de estructuras familiares a situaciones biológicas aparentemente análogas a situaciones físicas : es decir, lo que hacía Kepler antes de constituirse por Galileo y Newton la auténtica matemática de la naturaleza física, cuando adaptaba los modelos geométricos de los griegos a las pacientes y relativamente precisas observaciones de Ptolomeo y Tycho-Brahe.

No quiero abusar más de la paciente atención de ustedes. Creo que reflexionando detenidamente sobre lo que de modo tan esquemático y, por tanto, pobre, he dicho, se pueden obtener algunas ideas sobre los fines que es deseable persiga la enseñanza segunda y que, desde luego, no es entre ellos el de aumentar desconsideradamente la cantidad de conocimientos, o mejor, la información. Es la calidad, la formación lo que importa, no el saber muchas técnicas o manejos que no constituyen otra cosa que un adiestramiento útil y necesario, pero siempre secundario. Lo principal es enseñar a pensar al modo matemático, sean los que sean los temas concretos que el profesor, con su experiencia, es el que tiene que elegir. Sólo me atrevo a hacer una recomendación : la matemática elemental clásica es tema eficaz y además inevitable, ya que es prudente hacer recorrer al estudiante las etapas que tantos esfuerzos ha costado salvar, lo cual no es incompatible con la introducción de métodos modernos más avanzados y simplificadores, pero siempre con mucho tacto. Los temas tradicionales debidamente presentados y seleccionados dan ocasión continuamente al profesor para iniciar a los estudiantes en muchos de los conceptos básicos del Algebra y de la Topología modernas, de modo especial aquellos más cercanos de la intuición física, geométrica y aritmética, sin olvidar multitud de situaciones y cuestiones que la misma actividad, llamada *práctica*, de la vida corriente, permite utilizar como motivación suficiente, para plantear conceptos, temas y problemas íntimamente ligados a las orientaciones actuales del pensar matemático.