

## **Un tratamiento axiomático de las decisiones colectivas con opiniones difusas**

por FRANCISCO JAVIER MONTERO DE JUAN

Departamento de Estadística e I. O.  
Universidad Complutense de Madrid

### RESUMEN

Los restrictivos resultados de Fung y Fu en la agregación de «preferencias difusas clásicas» no se obtienen al basar la información individual en «opiniones difusas», que permiten una mayor flexibilidad en los conceptos de «racionalidad» y «decisividad». Las versiones difusas de estos conceptos nos permiten caracterizar las «operaciones de agregación de opiniones» más importantes, y con éstas, las correspondientes reglas de agregación.

*Palabras clave:* Preferencias difusas, función de bienestar social, operación de agregación.

Cuando pretendemos estudiar la versión difusa de los teoremas de imposibilidad de Arrow [1] en la agregación de opiniones, nos encontramos que la relación de preferencia difusa clásica sigue llevando a resultados negativos (Pardo [6]). Sin embargo, el uso de lo que llamamos «opinión difusa» nos permite (Montero [3]) concebir la «racionalidad» como concepto difuso, de modo que, en este contexto, los teoremas de Arrow son resultados acerca de la imposibilidad de reglas absolutamente racionales, pero siempre va a ser posible construir reglas no absolutamente irracionales, con la única condición de que los individuos sean mínimamente racionales. En este artículo se caracterizarán algunas de las reglas de agregación de opiniones desde el punto de vista del bienestar social, no de la toma de decisión, definiendo para ello «operaciones de agregación».

## DEFINICION 1

Una relación de opinión difusa en un conjunto  $X$  de  $n$  alternativas es toda aplicación

$$\begin{aligned} \mu: X \times X &\rightarrow [0, 1]^3 \\ (x, y) &\rightarrow (\mu_i(x, y))_{i=1,2,3} \end{aligned}$$

tal que

- i)  $\sum_i \mu_i(x, y) = 1$  (reciprocidad).
- ii)  $\mu_1(x, y) = \mu_3(y, x)$  (simetría).
- iii)  $\mu_2(x, x) = 1$  (reflexividad estricta).

De tal modo que se asignan grados de verificación a cada una de las tres actitudes básicas en la comparación entre dos alternativas ( $x > y, x \sim y, x < y$ ). Cada individuo expresará sus preferencias de este modo, y se trata de agregar en otra relación de opinión difusa las preferencias globales del grupo considerado.

Sea  $D$  el conjunto decisor formado por  $K$  individuos y  $\mathcal{P}(D)$  todos los grupos posibles contenidos en él. Notemos por  $\mathcal{R}(X)$  la familia de todas las relaciones de opinión difusa definidas en  $X$ . Entonces, una «función de bienestar social» (SWF) es toda aplicación

$$S: \mathcal{R}^K(X) \rightarrow \mathcal{R}(X)$$

que haga corresponder a cada perfil de  $K$  opiniones individuales  $F \in \mathcal{R}^K(X)$  una opinión del grupo  $S(F) \in \mathcal{R}(X)$ .

## DEFINICION 2

Una operación de agregación difusa es toda aplicación que asigna a cada par de opiniones difusas de sendos grupos disjuntos una opinión difusa del grupo unión:

$$\begin{aligned} \oplus: M \times M &\rightarrow M \\ (F_1, G_1) \times (F_2, G_2) &\rightarrow (F_1 \oplus F_2, G_1 \cup G_2) \quad \forall G_1 \cap G_2 = \emptyset \\ & \quad \quad \quad G_1, G_2 \in \mathcal{P}(D) \end{aligned}$$

donde  $M = \mathcal{R}(X) \times \mathcal{P}(D)$ , de modo que  $\oplus$  es asociativa y conmutativa [la operación binaria  $\oplus$  depende de los grupos agregados  $G_1$  y  $G_2$ , aunque por simplificar la notación no escribamos  $\oplus(G_1, G_2)$ ].

A esta operación de agregación, que conserva la filosofía del trabajo de Fung-Fu [2], se le puede imponer versiones difusas de las condiciones que aparecen en los teoremas clásicos de imposibilidad:

### *Condición de anonimato*

Sean  $F_i$  y  $F_j \in \mathcal{F}(X)$  las opiniones difusas de dos individuos  $i, j \in D$ , tales que  $F_i \equiv F_j$ . Entonces  $(F_i, \{i\}) \otimes (F_G, G)$  y  $(F_j, \{j\}) \otimes (F_G, G)$  verifican que

$$F_i \oplus F_G = F_j \oplus F_G \quad \forall (F_G, G) \in M, G \subset D - \{i, j\}$$

### *Independencia de alternativas irrelevantes*

Sean  $F_1$  y  $F_2 \in \mathcal{F}(X)$ . Las opiniones difusas de un grupo  $G \subset D$  tales que

$$\mu^{F_1}(a_i, a_j) = \mu^{F_2}(a_i, a_j)$$

para todo par de alternativas  $(a_i, a_j) \in Y \subset X$ .

Entonces  $(F_1, G) \otimes (F', G')$  y  $(F_2, G) \otimes (F'', G')$  verifican que

$$\mu^{F_1 \oplus F'}(a_i, a_j) = \mu^{F_2 \oplus F''}(a_i, a_j) \quad \forall (a_i, a_j) \in Y$$

para todos  $(F', G'), (F'', G') \in M$ , tal que

$$\mu^{F'}(a_i, a_j) = \mu^{F''}(a_i, a_j) \quad \forall (a_i, a_j) \in Y$$

### *Condición de neutralidad*

Sean  $F_1$  y  $F_2 \in \mathcal{F}(X)$  dos opiniones difusas de un grupo  $G \subset D$  que coinciden en todas las asignaciones entre parejas, excepto en dos  $(a_i, a_j) \neq (a_k, a_1)$ , de modo que

$$\mu^{F_1}(a_i, a_j) = \mu^{F_2}(a_k, a_1)$$

$$\mu^{F_1}(a_k, a_1) = \mu^{F_2}(a_i, a_j)$$

Entonces

$$\mu^{F_1 \oplus F'}(a_i, a_j) = \mu^{F_2 \oplus F'}(a_k, a_1)$$

para todo  $(F', G') \in M$ .

## LEMA

Sea  $\oplus$  una operación de agregación verificando las condiciones de

- i) Alternativas irrelevantes.
- ii) Anonimato.
- iii) Neutralidad.

Entonces,  $\oplus$  queda unívocamente determinada por un conjunto de operaciones binarias

$$\oplus^k: [0, 1]^3 \times [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]^3$$

para  $k = 2, 3, \dots, \text{card}(D)$ .

*Demostración*

Por la asociatividad de  $\oplus$ , es claro que inductivamente podemos obtener la agregación de todo par de grupos, teniéndola definida sobre las restricciones que agregan cada subgrupo  $G \subset D$  con cualquier otro individuo en  $D - G$ . Por el anonimato, esta agregación no depende de quienes intervengan, sino sólo de cuantos. Es decir, basta estudiar

$$\oplus^k: \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(X)$$

que nos daría la opinión  $\mu_k \in \mathcal{R}(X)$  agregada al unir las operaciones  $\mu^1 \in \mathcal{R}(X)$  de un individuo aislado y  $\mu^{k-1}$  de un grupo formado por  $k - 1$  individuos distintos de aquél. Por el axioma de alternativas irrelevantes, la agregación sobre un par de alternativas no depende del resto de las alternativas, y dada la condición de neutralidad, la operación que agrega las preferencias entre dos alternativas cualesquiera es siempre la misma.

Además, al verificarse la simetría y la reciprocidad,  $\mu^1 \oplus^k \mu^{k-1}$  queda determinada conociendo su primera coordenada

$$\oplus_1^k(\mu^1, \mu^{k-1}) = \mu_1 \in [0, 1]$$

Estas condiciones, i), ii) y iii), corresponden a sendas traducciones de las análogas a Arrow; las condiciones de «asociación positiva» o «asociación no negativa» se refieren a la forma en que una opinión parcial afecta a la opinión global. Esto obliga a un análisis en los conceptos de dictadura y veto, que deben considerarse difusos (Montero [3]).

## DEFINICION 3

Se dice que un grupo  $G \subset D$  es  $\gamma(G)$  – dictador en  $D$  sobre la coordenada  $t$  cuando

$$\mu_t^D(a_i, a_j) \geq \gamma(G) \cdot \mu_t^G(a_i, a_j) \quad \forall(a_i, a_j)$$

## DEFINICION 4

Se dice que  $G \subset D$  tiene un  $\gamma(G)$  – veto sobre la coordenada  $t$  cuando

$$\mu_t^D(a_i, a_j) \leq 1 - \gamma(G) \cdot (1 - \mu_t^G(a_i, a_j)) \quad \forall(a_i, a_j)$$

## DEFINICION 5

Se dice que  $G \subset D$  es  $\gamma(G)$  – decisivo en  $D$  cuando es  $\gamma(G)$  – dictador y posee un  $\gamma(G)$  – veto en  $D$ .

Así, un conjunto sería «decisivo» en sentido nítido cuando fuese 1 – decisivo sobre las tres coordenadas.

## TEOREMA

Sea  $\oplus$  una operación de agregación verificando i), ii), iii) y además:

iv) Unanimidad por coordenadas:

$$\mu_t \oplus \mu_t = \mu_t \quad t = 1, 2, 3$$

v) Decisividad proporcional por coordenadas, es decir, que todo grupo  $G$  agregado con otro grupo  $G'$  tiene una decisividad en el grupo unión  $G \cup G'$  igual al cociente entre los cardinales de  $G$  y  $G \cup G'$ .

Entonces ha de ser, para  $t = 1, 2, 3$

$$\mu_t \oplus \mu_t^{k-1} = \frac{1}{k} \cdot \mu_t + \frac{k-1}{k} \cdot \mu_t^{k-1}$$

que corresponde a la regla:

$$\mu_t^D(a_i, a_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mu_t^{(k)}(a_i, a_j) \quad t = 1, 2, 3$$

$$\forall(a_i, a_j)$$

siendo en este caso  $\mu^{(k)}$  las opiniones individuales.

*Demostración*

Bajo aquellas condiciones, es fácil comprobar que la decisividad proporcional equivale a imponer que

$$\mu_t^1 \oplus_k \mu_t^{k-1} \in \left[ \begin{array}{l} \text{máx} \left( \frac{1}{k} \cdot \mu_t^1, \frac{k-1}{k} \cdot \mu_t^{k-1} \right), \\ \text{mín} \left( 1 - \frac{1}{k} (1 - \mu_t^1), 1 - \frac{k-1}{k} (1 - \mu_t^{k-1}) \right) \end{array} \right]$$

para  $t = 1, 2, 3$ . Supongamos entonces que

$$\mu_t^1 \oplus_k \mu_t^{k-1} > \frac{1}{k} \cdot \mu_t^1 + \frac{k-1}{k} \cdot \mu_t^{k-1} \quad [1]$$

Por la condición de unanimidad, ha de ser  $\mu_1^1 \neq \mu_1^{k-1}$ . Supongamos  $\mu_1^1 < \mu_1^{k-1}$  (análogo en el otro caso) y consideremos

$$(\mu_1^1, \mu_1^{k-1} - \mu_1^1, 1 - \mu_1^{k-1}) \oplus_k (\mu_1^{k-1}, 0, 1 - \mu_1^{k-1})$$

que ha de verificar (simplificando la notación, como antes):

$$\begin{aligned} \otimes_2 (\mu_1^{k-1} - \mu_1^1, 0) &= 1 - \oplus_1 (\mu_1^1, \mu_1^{k-1}) - \oplus_3 (1 - \mu_1^{k-1}, 1 - \mu_1^{k-1}) < \\ &< 1 - \frac{1}{k} \cdot \mu_1^1 + \frac{k-1}{k} \cdot \mu_1^{k-1} - (1 - \mu_1^{k-1}) = \frac{1}{k} (\mu_1^{k-1} - \mu_1^1) \end{aligned}$$

lo cual infringe la dictadura proporcional en la segunda coordenada. De haber impuesto en [1] el menor estricto se habría infringido el veto proporcional en dicha coordenada.

Otros tipos de reglas clásicas son las basadas en el operador mínimo o máximo (evidentemente, el mínimo o máximo sobre todas las coordenadas no daría en general una opinión difusa):

**TEOREMA**

Sea  $\otimes$  verificando las condiciones i), ii), iii), y además:

iv') Unanimidad y asociación no negativa sobre la preferencia estricta.

v') Todo grupo tiene un 1-veto sobre la preferencia estricta.

Entonces la única regla compatible es la determinada por

$$\mu_1^{\oplus k} \mu_1^{k-1} = \text{mín} (\mu_1^1 \cdot \mu_1^{k-1})$$

es decir

$$\mu_1^D(a_i, a_j) = \text{mín}_{k=1, \dots, K} \mu_1^{(k)}(a_i, a_j) \quad t = 1, 3$$

$$\mu_2^D(a_i, a_j) = 1 - \mu_1^D(a_i, a_j) - \mu_3^D(a_i, a_j)$$

o lo que es equivalente

$$\mu_{12}^D(a_i, a_j) = \text{máx}_{k=1, \dots, K} \mu_{12}^{(k)}(a_i, a_j)$$

(por la simetría y reciprocidad queda unívocamente determinada la regla anterior).

### Demostración

Trivial, pues por la condición iv') es, para  $\mu_1^{\circ} = \text{mín} (\mu_1^1 \cdot \mu_1^{k-1})$ :

$$\oplus_1 (\mu_1^1, \mu_1^{k-1}) \geq \oplus_1 (\mu_1^{\circ}, \mu_1^{\circ}) = \mu_1^{\circ}$$

pero por la condición v') no puede darse el mayor estricto.

De este modo se llegan a caracterizar una mayor variedad de reglas que las propuestas por Fung-Fu [2], en cuya axiomática no cabe la regla de la media. A partir de la agregación obtenida siguiendo alguna de las axiomáticas plausibles para el grupo decisor, es factible elaborar procesos de elección de una alternativa social, según los distintos enfoques existentes (Opricovic [4], Orlovsky [5], Roy [7], etc.).

### REFERENCIAS

- [1] ARROW, K. J.: *Social Choice and Individual Values*. Wiley, 1951 y 1964.
- [2] FUNG, L. W., y FU, K. S.: *An axiomatic Approach to Rational Decision Making in a Fuzzy Environment* (en Zadeh y cols.), 1975.
- [3] MONTERO, F. J.: *Racionalidad difusa en la agregación de opiniones*. XIII Reunión Nacional de Estadística, I. O. e Informática. Valladolid, 1982.
- [4] OPRICOVIC, S.: *Ideal, Compromise and Consensus Solution*. 13 Multicriteria Decision Aid Meeting. Madrid, 1981.
- [5] ORLOVSKY, S. A.: «Decision-Making with Fuzzy Preference Relation». *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 155-167, 1978.

- [6] PARDO, L.: *Medidas de nitidez para conjuntos y sucesos difusos. Procesos de decisión de grupo de preferencias individuales difusas*. Tesis. Madrid, 1980.
- [7] ROY, B., y VINCKE, P.: «Multicriteria Analysis: survey and new Directions». *Europ. J. of Op. Res.*, 8, 207-218, 1981.
- [8] ZADEH, L. A.; KING-SUM, F.; TANAKA, K., y SHIMURA, M. (eds.): *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes*. Ac. Press., 1975.

## SUMMARY

### AN AXIOMATIC TREATMENT OF COLECTIVE DECISIONS WITH FUZZY OPINIONS

The restrictive results obtained by Fung and Fu relative to fuzzy preferences aggregation are avoided when we take «fuzzy opinions» as individual information, which allows us to work with «rationality» and «decisiveness» as fuzzy concepts. So, we can characterize some of the most important operations of aggregation and the respective rules.

*Key words:* Fuzzy Preferences; Social Welfare Function, Aggregation Operation.

AMS. 1980. Subject classification: 90A08.