Las Matemáticas del Siglo XX
A. Martinón (Ed.)
Ed. Nivola, Madrid 2000. págs. 205-210.

LOS ESPACIOS ABSTRACTOS Y EL ANÁLISIS FUNCIONAL

Fernando Bombal
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense

La consideración de diversos conjuntos de funciones ha sido práctica habitual en Matemáticas desde muy antiguo. Piénsese por ejemplo en el conjunto de soluciones de una Ecuación Diferencial, cuya consideración parece evidente en cuanto se formula el problema, aunque el estudio explícito de su estructura no comenzó a hacerse hasta bien entrado el siglo XIX. Más frecuente (desde el siglo XVIII) fue el empleo de *sucesiones* o, más generalmente, *familias* de funciones dependientes de uno o varios parámetros reales.

También es muy antigua la idea de extender los conceptos de límite y continuidad a conjuntos formados por objetos matemáticos distintos de números o de puntos del plano o del espacio: cálculo de límites de familias de curvas o superficies dependientes de uno o varios parámetros o el tratamiento de los problemas de cálculo de variaciones, donde se trata de maximizar o minimizar una expresión del tipo

$$J(\varphi) = \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots)\, dx,$$

siendo F una función dada y las *variables* un conjunto adecuado de curvas regulares, *admisibles* parametrizadas en [a,b]. Este tipo de problemas aparece en multitud de cuestiones físicas o geométricas y la manera clásica de abordarlos era razonar por *analogía* al caso de funciones reales de una o varias variables reales: Así, si φ_0 minimiza a J, para cada $\epsilon > 0$ y η función regular tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, la función $\varphi_\epsilon := \varphi_0 + \epsilon\eta$ es una función admisible *próxima* (?) a φ_0, luego $J(\varphi_\epsilon) \geq J(\varphi_0)$ para todo ϵ suficientemente pequeño. Eso quiere decir que la función real de variable real $H(\epsilon) := J(\varphi_\epsilon)$ tiene un *mínimo* en $\epsilon = 0$, luego su derivada (¡si existe!) ha de ser 0 en ese punto. Una derivación formal, seguida de una integración por partes y un razonamiento más o menos riguroso permite obtener la conocida *Ecuación de Euler*, que es una ecuación diferencial que deben verificar las soluciones del problema.

Así pues, desde los mismos orígenes del Cálculo, se fue poniendo de manifiesto la conveniencia de considerar conjuntos cuyos elementos, a diferencia de lo que sucede en el Análisis clásico, no son puntos del espacio euclídeo ordinario, sino funciones, y la necesidad de extender a estos conjuntos las operaciones típicas del Análisis. De esta manera se va forjando la idea de *Espacio Funcional*, ya latente en el siglo XIX, pero cuya sistematización y rigorización tuvo lugar en la primera mitad del siglo XX, y sólo fue posible por el desarrollo de la teoría de conjuntos, la topología general y la aparición de la noción de *estructura*.

Las primeras referencias a esta noción de *espacio abstracto* se suelen remontar a la famosa *Habilitationsvortrag* de **B. Riemann** en 1854, sobre los Fundamentos de la Geometría. Allí aparece el germen de la idea de espacio abstracto infinitodimensional, en la forma:

...Pero también existen variedades en las que la determinación de la posición de un punto precisa de una sucesión o incluso de un continuo infinito de cantidades.

También parece ser Riemann el primero en concebir que un cierto conjunto de funciones pueda poseer una determinada estructura"geométrica" (*topología*, diríamos hoy en día) al afirmar, por ejemplo, que el conjunto de funciones para las que tiene sentido la integral de Dirichlet, constituye un "dominio conexo, cerrado en sí mismo" (?). Sin embargo, la primera formulación rigurosa de una estructura global sobre un espacio funcional es, probablemente, el concepto de *Equicontinuidad*, debido a **G. Ascoli** (1883), que garantiza que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas, sea una función continua. Esta noción permitió posteriormente a Ascoli y **C. Arzelá** obtener lo que puede considerarse el primer teorema de Análisis Funcional: *Toda sucesión en un conjunto equicontinuo y uniformemente acotado de funciones reales (sobre un cerrado y acotado del plano) posee una subsucesión uniformemente convergente.* Es la extensión a espacios funcionales del conocido Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos de puntos y el germen de la noción abstracta de *Compacidad.*

Por otro lado, a partir de Gauss cada vez se hacía más evidente que la clasificación tradicional de las Matemáticas resultaba inadecuada. El punto de vista clásico distinguía las distintas ramas de las matemáticas según la naturaleza de los objetos que estudiaban: La aritmética es la ciencia de los números; la geometría estudiaba los objetos en el espacio; el análisis, las funciones, etc. Sin embargo, cada vez con mayor frecuencia, técnicas y resultados de una de estas "parcelas" de las matemáticas, se mostraban útiles en otra "parcela". De esta forma, a lo largo del siglo XIX fue poniéndose en evidencia que lo relevante no era la *naturaleza* de los objetos estudiados, sino las *relaciones* entre ellos. Así van surgiendo, no sin dificultad, las primeras *estructuras algebraicas* (grupos, anillos, cuerpos, etc.), que permiten agrupar bajo una misma denominación conjuntos formados por elementos de naturaleza muy distinta, pero que gozan de una serie de relaciones y propiedades comunes.

La noción de grupo abstracto fue establecida por **Weber** en 1895, y la escuela italiana de finales del XIX (de la que ya hemos citado a alguno de sus representantes) poseía una completa teoría de los espacios vectoriales generales (aunque tardó en darse a conocer al resto de la comunidad matemática). Puede decirse, por tanto, que al comienzo del siglo XX, el núcleo principal de las estructuras algebraicas estaba ya firmemente establecido. Una evolución similar tardó algo más en producirse en Análisis. Como ya hemos comentado, la extensión de las nociones de límite y continuidad a conjuntos no numéricos, se había formulado siempre en situaciones muy particulares (familias de curvas, superficies o funciones) y en términos poco rigurosos (cálculo de variaciones). La posibilidad de definir estas nociones en un conjunto arbitrario fue desarrollada por **M. Fréchet** en su famosa Tesis Doctoral de 1906 *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, de enorme influencia en el desarrollo posterior del Análisis Funcional y la Topología. En ella, Fréchet introduce, de manera absolutamente actual, las nociones de espacio métrico, compacidad, completitud y separabilidad, discutiendo estas propiedades en algunos espacios especiales. En particular, consideró el espacio $C[a, b]$ (no con esta notación, desde luego) de las funciones reales continuas en el intervalo [a,b], dotado de la métrica de la convergencia uniforme, afirmando que *Weierstrass fue el primero en utilizar sistemáticamente este espacio...* También estudió Fréchet en su Tesis otros espacios funcionales no metrizables, como el de todas las funciones reales sobre [a,b] con la convergencia puntual.

Al aplicar estas ideas a otro de los grandes desarrollos de la época, la teoría de la Integración de Lebesgue, se originaron otros tipos de espacios funcionales: los espacios

$$L_p[a,b] := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es medible Lebesgue y } \|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Para $p = 1$ este espacio estaba implícito ya en los trabajos de Lebesgue; el caso p=2 aparece explícitamente en 1907, cuando, independientemente, **F. Riesz** y **E. Fischer** descubren el famoso *Teorema de Riesz-Fischer*, según el cual el cual el espacio métrico $L_2[a,b]$ es completo, separable e isomorfo al *espacio de Hilbert de sucesiones*

$$\ell_2 := \left\{ \mathbf{x} = (x_n) : \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

introducido por **D. Hilbert** al estudiar la ecuación integral $f(x) + \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy = g(x)$, donde f, g y K son funciones continuas. Hilbert había tenido la idea de considerar un sistema ortonormal completo (ϕ_n) de funciones continuas (por ejemplo, el sistema trigonométrico) y reducir la ecuación anterior a la determinación de los coeficientes $a_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx$ respecto a ese sistema. Sustituyendo en la ecuación integral, el problema se transforma entonces en el de resolver el sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas

$$a_n + \sum_{r=1}^{\infty} k_{nr} a_r = b_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{†}$$

siendo los b_n y los k_{nr} los coeficientes de g y K respecto al sistema ortonormal (ϕ_n). Pero por la conocida desigualdad de Bessel, tanto los datos como las incógnitas deben ser sucesiones de cuadrado sumable, y así aparece el espacio de Hilbert de sucesiones ℓ_2 (nótese que la distancia considerada en él, $d(x,y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$, es la generalización natural de la distancia euclídea para "infinitas coordenadas"). Uno de los efectos inmediatos del teorema de Riesz-Fischer es que todos los resultados de Hilbert se generalizan inmediatamente al caso en que tanto f como g y K son funciones de L_2, en lugar de continuas (lo que resultaba demasiado restrictivo en las aplicaciones), resolviendo así de golpe un problema que había tenido en jaque a muchos importantes matemáticos de la época.

En el mismo año de 1907, Fréchet y Riesz obtienen, independientemente, la representación de cualquier forma lineal continua sobre L_2 (el resultado para un espacio de Hilbert abstracto se debe también a Riesz, en 1934).

Los espacios L_p para $1 < p < \infty$ fueron introducidos en 1910 por Riesz para estudiar y resolver el problema general de los momentos, es decir, caracterizar cuándo existe una función f que cumple las condiciones

$$\int_a^b f(x) g_n(x)\,dx = c_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

siendo (g_n) una sucesión de funciones y (c_n) una sucesión de escalares dadas de antemano. Finalmente, los análogos discretos ℓ_p, $(1 < p < \infty)$ fueron introducidos y estudiados sistemáticamente también por Riesz en su famoso libro *Les Systèmes d'Équations Linéaires à une infinité d'Inconnues* (Paris, 1913), en el que desarrolla una teoría completa para la solución de los sitemas generales del tipo (†). En el Prefacio, Riesz establece que *"...Nuestro estudio no forma parte, propiamente hablando, de la Teoría de Funciones. Más bien podría considerarse como ... un primer estadio de una teoría de funciones de infinitas variables..."*. Más tarde (1916-18), Riesz reelabora la teoría espectral de Hilbert (en la que el énfasis se ponía en las formas cuadráticas) en términos de *operadores lineales acotados* y desarrolla la teoría moderna de los operadores *compactos*. Aunque su trabajo se desarrolla en el espacio $C[a, b]$, sus razonamientos son generales y están expresados en términos de la *norma* del espacio.

En Junio de 1920, **S. Banach** presenta su Tesis *"Sur les Opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales"*, publicada en Fundamenta Math. en 1922. En la introducción, puede leerse:

> "El objetivo de este trabajo es demostrar algunos teoremas que son ciertos para diferentes espacios funcionales (*champs fonctionneles*). En lugar de probar los resultados para cada espacio funcional particular, he optado por enfoque diferente: considero en general un conjunto de elementos abstractos, para los que postulo una serie de propiedades y demuestro los teoremas para esos conjuntos. Entonces pruebo que los distintos espacios funcionales particulares en los que estoy interesado, satisfacen los axiomas postulados..."

Los axiomas que postula Banach son los que hoy conocemos como los de *espacio normado completo* o *espacio de Banach*. Los principales teoremas que aparecen en la Tesis de Banach son el "principio de acotación uniforme" y la forma general del "principio de contracción" en un espacio métrico completo, que le permiten obtener demostraciones simples y elegantes de varios importantes resultados. Hay que destacar el modo sorprendentemente actual que emplea Banach para resolver una serie de problemas concretos, enmarcándolos en un contexto abstracto y aplicando métodos generales, tanto algebraicos como topológicos, para resolverlos. No obstante, probablemente la contribución más importante de la Tesis de Banach fue sacar a la luz la noción correcta de espacio normado, que de modo mas o menos implícito, estaba subyacente en gran parte de los artículos previamente aparecidos sobre Análisis *Abstracto* o *Funcional*. Por cierto, el nombre de Análisis Funcional toma carta de naturaleza en 1922, con la aparición del libro *Lecons d'Analyse Fonctionnelle* de **P. Lévy**, un alumno de Hadamard.

A partir de este momento, el desarrollo del Análisis Funcional es impresionante. La potencia de sus métodos y su enorme ámbito de aplicabilidad fueron puestos claramente de manifiesto por la publicación de tres libros, todos ellos aparecidos en 1932: *Matematische Grundlagen der Quantenmechanik* de **J. Von Neumann** (traducido al español, antes que al inglés, por el "Instituto Jorge Juan" con el título de *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*), cuya primera mitad está dedicada a la primera exposición de la teoría general de Espacios de Hilbert; *Linear Transformations in Hilbert Space*, de **M. Stone**, en el que se presenta la teoría espectral de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert, con aplicaciones al análisis clásico y un capítulo final de 220 páginas sobre ecuaciones integrales y diferenciales, y, finalmente *Théorie des Opérations Linéaires*, de S. Banach. Escrito en un estilo claro y elegante, este libro reúne los resultados más importantes de la teoría de Espacios de Banach y fue considerado durante muchos años como el punto de referencia obligado para los especialistas. No solamente contiene una tremenda cantidad de información organizada de forma sistemática, sino que presenta una serie de cuestiones y problemas abiertos que han sido fuente de inspiración de muchas investigaciones posteriores. La tremenda maquinaria desarrollada desde entonces, ha permitido resolver la mayoría de estas cuestiones, (algunas muy recientemente, en parte gracias a los trabajos de los recientes medallistas Field **J. Bourgain** y **W. T. Gowers**).

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

[Ba] S. Banach. *Théorie des Opérations Linéaires.* Chelsea, N.Y., 1932.

[Bi] G. Birkhoff y E. Kreyszig. *The Establishment of Functional Analysis.* Historia Math., **11** (1984), 258-321.

[Bm] F. Bombal. *Los orígenes del Análisis Funcional.* en "Historia de la Matemática en el siglo XIX (2ª parte)", R. Acad. Ci. de Madrid (1994), 35-56

[Bo] N. Bourbaki. *Elementos de Historia de la Matemática.* Alianza Ed., Madrid, 1972.

[D1] J. Dieudonné. *History of Functional Analysis.* North Holland, Amsterdam, 1981.

[D2] J. Dieudonné (ed.). *Abrég é d'Histoire des Mathématiques 1700-1900.* Paris, Hermann, 1978.

[Mo] A. F. Monna. *Functional Analysis in Historical Perspective.* Oosthoek, Utrecht, 1973.

[RN] F. Riesz y B. Szg. Nagy. *Lecons d'Analyse Fonctionnelle.* Gauthier Villars, Paris, 1965.

[Te] G. Temple. *100 Years of Mathematics.* Duckworth, Londres, 1981.