

Universidad Complutense de Madrid

Departamento de Análisis Económico



**Análisis microeconómico y modelos basados en agentes:
El modelo de Kiyotaki-Wright**

Trabajo fin de grado

Laura Antona García

Febrero 2023

Directores:

Francisco Álvarez González

Íñigo Herguera García

Índice general

1. Introducción	3
1. El modelo de Kiyotaki-Wright y su relevancia económica	3
2. Modelos basados en agentes y su interés económico	4
2. La economía de Kiyotaki y Wright	6
1. Descripción	6
2. Equilibrios de Nash-Markov	8
3. El modelo de Kiyotaki Wright basado en agentes	14
1. Planteamiento	15
2. El algoritmo de aprendizaje	15
3. Implementación del modelo	21
4. Análisis e interpretación de resultados	22
4.1. Ejecución estándar	22
4.2. Ejecución <i>batch</i>	27
4. Observaciones y comentarios finales	37
BIBLIOGRAFÍA	40

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se presenta una implementación de una versión del modelo de Kiyotaki-Wright basada en agentes. El objetivo principal es utilizar la perspectiva de agentes para simular la economía descrita en el modelo original, para posteriormente extraer resultados con sentido económico y comparables con los aportados en la literatura publicada.

En primer lugar, se presenta una introducción al modelo de Kiyotaki-Wright y a los modelos basados en agentes, y se explica por qué se ha considerado interesante juntar ambos enfoques. A continuación, se entra en una descripción detallada del modelo de economía que se va a manejar.

La parte central del presente trabajo consiste en la aportación de un algoritmo para la generación de simulaciones numéricas en el marco de los modelos basados en agentes. Primeramente, se presenta la adaptación de la economía que se va a simular, poniendo el foco en el trato de esta como un sistema complejo. En este punto, se especifica la estructura de la que se va a dotar al modelo de cara a formalizar la dinámica del mencionado sistema, y se describen todos los detalles en cuanto al algoritmo concreto que se va a emplear. El mencionado algoritmo se apoya en el algoritmo de aprendizaje introducido por Başçi (1999), que permite la imitación en juegos dinámicos recursivos, pero con el valor añadido de la implementación del mismo en un lenguaje tan actual y versátil como es Python.

Finalmente, se muestran los resultados extraídos y el enfoque adoptado para el análisis de los mismos. Se comprueba que estos son consistentes con lo teóricamente probado por Kiyotaki y Wright (1989) y lo numéricamente concluido por Başçi (1999), que constituyen las principales referencias del presente trabajo. Se incorpora, además, una propuesta de nuevos indicadores, de cara a estudiar nuevas posibles aportaciones económicas del modelo original.

Keywords: Modelos basados en agente; Modelo Kiyotaki-Wright del dinero; Aprendizaje; Imitación; Optimización dinámica; Sistemas de clasificadores; Python

Abstract

This Degree Project presents an implementation of an agent-based version of the Kiyotaki-Wright model. The main objective is to use the agent perspective to simulate the economy described in the original model, in order to extract results that make economic sense and are comparable to those provided by the literature so far.

First, an introduction to the Kiyotaki-Wright model and agent-based models is given, and it is explained why it has been considered interesting to bring the two approaches together. This is followed by a detailed description of the economic model to be used.

The central part of this paper consists of the contribution of an algorithm for the generation of numerical simulations in the framework of agent-based models. First, the adaptation of the economy to be simulated is presented, focusing on treating it as a complex system. At this point, the structure of the model is specified in order to formalise the dynamics of the system, and all the details of the specific algorithm to be used are described. The aforementioned algorithm is based on the learning algorithm introduced by Başçi (1999), which allows imitation in recursive dynamic games, but with the added value of its implementation in a language as up-to-date and versatile as Python.

Finally, the extracted results and the approach adopted for their analysis are shown. It is shown that they are consistent with the theoretical proofs of Kiyotaki and Wright (1989) and the numerical conclusions of Başçi (1999), which constitute the main references of the present work. In addition, a proposal of new indicators is incorporated, in order to study new possible economic contributions of the original model.

Keywords: Agent-based modeling; Learning; Imitation; Dynamic optimization; Classifier systems; Kiyotaki-Wright model of money; Python

Introducción

1. El modelo de Kiyotaki-Wright y su relevancia económica

On Money as a Medium of Exchange (1989) es considerado una contribución elemental en la literatura de la economía monetaria. En esta publicación, los economistas, Nobuhiro Kiyotaki y John Wright, mostraron un modelo económico con el que se propusieron ofrecer, desde una perspectiva *micro*, una explicación formal para el papel del dinero en la economía, y de manera más general, para la relación entre el mercado financiero y el mercado real.

En el citado trabajo, Kiyotaki y Wright abordaron un tema tan central en economía monetaria como es el surgimiento del dinero. Sin embargo, las contribuciones de este son bastante numerosas y trascienden el campo de la economía monetaria.

Precisamente, el conocido como *modelo Kiyotaki-Wright del dinero* ha sido fruto de sucesivas modificaciones, dando lugar a distintas versiones que, sin duda, han determinado la enorme versatilidad del mismo en cuanto a su aplicabilidad. Este aporta una visión única y enriquecedora al estudio del papel del dinero como medio de cambio en una economía de mercado. Las distintas aproximaciones a este asunto han favorecido que este modelo haya sido ampliamente propuesto para el estudio de diversos temas de interés, que van desde problemas más generales, relacionados la política económica o las finanzas, a cuestiones más relacionadas con el análisis económico.

En este sentido, cabe mencionar la contribución del modelo al estudio de la interacción entre dinero y capital en una economía, y su relación con la producción económica y los ciclos económicos; y más concretamente, en el análisis de cómo las diferencias en la accesibilidad al crédito pueden afectar el crecimiento económico y la distribución de la riqueza. Asimismo, también destacan las aportaciones en el área de los modelos de búsqueda y emparejamiento, al proporcionar este modelo un fundamento teórico para el uso del dinero como medio de intercambio y su papel en facilitar las transacciones

económicas.

La pluralidad en las aplicaciones del modelo de Kiyotaki-Wright es innegable, y es sin duda uno de los motivos de su reconocimiento. No obstante, dentro de esta variedad, en el presente trabajo nos centraremos en analizar las contribuciones del modelo desde la óptica de la microeconomía, en la línea de la aproximación seguida por Kiyotaki y Wright en 1989.

En la versión original, estos economistas aportaron herramientas para el estudio del impacto de la liquidez en la estabilidad económica desde una perspectiva microeconómica. El argumento empleado por estos economistas para estudiar esta relación fue la creación de una economía sencilla, con tres tipos de agentes y tres tipos de bienes, en la que cada agente actúa de comerciante, consumidor y productor al mismo tiempo. Cada tipo de agente consume un único tipo de bien y produce un bien distinto al consumido. El elemento clave de la economía es la diferencia existente entre los costes de almacenamiento de los distintos bienes, pues este matiz define el factor endógeno que determina el grado de liquidez de los bienes en la economía. El modelo ilustra cómo la existencia de un medio de intercambio estable, que es endógenamente determinado, ayuda a garantizar la eficiencia en el intercambio y en la producción.

2. Modelos basados en agentes y su interés económico

Los modelos basados en agentes o *agent-based models* (ABMs) son una herramienta de simulación que se utiliza a menudo en economía y otras disciplinas para estudiar cómo se comportan los sistemas complejos a medida que sus componentes individuales, conocidos como *agentes*, interactúan entre sí. Este tipo de modelos suelen utilizar un enfoque *bottom-up*, es decir, construyen el comportamiento del sistema a partir del comportamiento individual de los agentes.

Los modelos basados en agentes tienen sus raíces en la inteligencia artificial y la teoría de sistemas dinámicos. A finales de los años 70 y principios de los 80, los investigadores comenzaron a utilizar técnicas de inteligencia artificial, como redes neuronales y algoritmos de aprendizaje automático, para modelar la conducta de los individuos y las interacciones entre ellos. A medida que estos esfuerzos evolucionaron, los investigadores comenzaron a enfocarse en el desarrollo de modelos basados en agentes que pudiesen ser utilizados para estudiar problemas económicos y sociales.

En la década de los 90, los economistas comenzaron a adoptar estas técnicas y a desarrollar modelos basados en agentes específicamente para el estudio de problemas económicos. Uno de los puntos de partida principales para el uso de los modelos basados en agentes en economía fue el trabajo de Brian Arthur en el Santa Fe Institute. Arthur desarrolló un modelo de *autoorganización económica* que utilizaba agentes autónomos para simular la dinámica de los mercados y la competencia empresarial. A partir de ahí, el interés en los modelos basados en agentes continuó creciendo en la comunidad económica, favoreciendo su difusión entre las distintas áreas de la Economía.

El interés económico de este tipo de modelos reside en su potencial para simular la interacción entre individuos y las organizaciones en un sistema complejo, como bien puede ser un mercado, o incluso una economía. Estos permiten entender cómo se produce esta interacción, desde una aproximación más empírica a la habitual en Economía, al proporcionar un marco adecuado para la simulación de experimentos o puesta a prueba de modelos.

En particular, desde el punto de vista de la microeconomía, los modelos basados en agentes han sido empleados para analizar cómo las decisiones individuales afectan al comportamiento del sistema en su conjunto, y cómo las interacciones entre los agentes pueden generar patrones emergentes. En esta línea, se justifica el interés de incorporar este nuevo enfoque a la investigación económica.

No obstante, el empleo de los modelos basados en agente no está tan extendido como cabría esperar, y mucho de su potencial todavía está por revelarse. La implementación de este tipo de modelos no es sencilla y, habitualmente, requiere de habilidades técnicas muy concretas, relacionadas con la programación. Esto, sin duda, es un elemento disuasorio de cara a su incorporación como herramienta complementaria en el estudio económico.

Resultado de esta iniciativa, y con la motivación de aprovechar las habilidades más técnicas desarrolladas en el doble grado, surge el presente trabajo. En concreto, se propone abordar un estudio de una versión del modelo de Kiyotaki-Wright que incorpora esta nueva perspectiva de los modelos basados en agente.

La economía de Kiyotaki y Wright

El presente trabajo aborda un estudio de la primera versión del modelo de Kiyotaki-Wright (1989). En su célebre publicación, *On Money as a Medium of Exchange*, Kiyotaki y Wright plantearon un modelo de emparejamiento secuencial, enmarcado en una economía sencilla de individuos especializados en consumo y producción, con el que estudiar cómo los bienes surgen de manera endógena como medios de intercambio, o dinero mercancía, dependiendo tanto de sus propiedades intrínsecas como de creencias extrínsecas. En este capítulo, se presenta una descripción detallada de la economía de Kiyotaki y Wright en la que se va a apoyar el modelo.

1. Descripción

En la mencionada economía, se supone la existencia de 3 bienes indivisibles: 1, 2, y 3. Todos ellos son almacenables, pero con un coste en términos de utilidad. Los bienes 1 y 3 tienen el menor y el mayor coste, respectivamente. En la economía conviven tres tipos de agentes de vida indefinida: 1, 2, y 3; y se asume que existe un continuo de cada tipo.

Los agentes están especializados en producción, y el tipo de bien que producen viene determinado por el tipo de agente al que pertenecen. Al tipo de bien producido por un tipo de agente i nos referiremos como *bien de producción*. Los bienes 2, 3 y 1 son producidos por los tipos 1, 2 y 3, respectivamente; por tanto, diremos que estos son los bienes de producción de estos tipos de agente, de manera respectiva.

Asimismo, estos agentes también son consumidores: cada tipo de agente $i \in \{1, 2, 3\}$ disfruta consumiendo el bien i , pero no obtiene ninguna utilidad del consumo del resto de bienes. De manera análoga, a estos bienes nos referiremos como *bienes de consumo*: el bien tipo i es el bien de consumo del agente tipo i . Si se produce el consumo, automáticamente el agente produce una unidad de bien de producción y, de manera inmediata, obtiene la desutilidad correspondiente de esta producción. Se asume también que cada agente posee una unidad de capacidad de almacenamiento, y que entra en la economía dotado con una unidad de bien. En el cuadro 2.1 se muestra la distribución de bienes de consumo y

producción por tipo de agente, según se ha definido.

Tipo de agente	Bien de consumo	Bien de producción
1	1	2
2	2	3
3	3	1

Cuadro 2.1: Producción y consumo en el modelo Kiyotaki-Wright

Estos agentes, además de consumir y producir, pueden comerciar. Para esto, no existe una cámara de compensación central, sino una ronda de intercambios que tiene lugar al principio de cada periodo.

La **dinámica de la economía** se divide en periodos temporales y es como sigue:

1. Los agentes entran en la economía con una unidad de bien, que asumiremos es del mismo tipo de bien que producen. Inmediatamente, tiene lugar la **ronda comercial**. En ella, los agentes se distribuyen aleatoriamente por parejas y, o bien comercian intercambiando sus inventarios, o bien deciden no comerciar y esperar al emparejamiento del siguiente periodo. El intercambio tiene lugar si y solo si ambos están de acuerdo.
2. A continuación de esta ronda de intercambio, tiene lugar la **ronda de consumo**, en la que cada agente toma la decisión de consumo correspondiente. Si un agente tipo i sale de la ronda de comercio con un bien del tipo i , donde $i \in \{1, 2, 3\}$, este puede optar a consumir. En ese caso, el agente disfrutará de cierta utilidad positiva por consumo, y de manera inmediata, producirá una unidad de su bien de producción, que le lleva a incurrir en cierta pérdida en forma de desutilidad por producción. A la diferencia entre la utilidad por consumo y la desutilidad por producción nos referiremos como *utilidad neta*¹.
3. Al finalizar la ronda de consumo, el coste de almacenamiento del bien que queda en el inventario del agente se resta de la utilidad neta actual del agente. A continuación, el agente entra en el siguiente período y la economía se repite.

Bajo el patrón de producción y preferencias anterior, y con agentes racionales, es claro que esta organización de mercado no permite a los agentes producir y consumir en cada periodo, debido a una inconsistencia mutua en las necesidades. Ocurre que, algunos de los agentes tienen que aceptar y mantener temporalmente un bien que no les gusta, para así facilitar el comercio mutuamente beneficioso en periodos posteriores; es decir, eventualmente, los bienes pueden ser empleados como *medio de intercambio*. Qué tipo de agente

¹Es preciso observar que, en el escenario en el que el consumo tiene lugar, el agente finaliza la ronda de consumo con su bien de producción en el inventario. Sin embargo, si el consumo no tiene lugar, no se producen cambios en su inventario y este sale con la misma unidad de bien con la que inició la ronda de consumo

acepta qué tipo de bien como medio de intercambio viene determinado endógenamente por el concepto de **equilibrio de Nash-Markov**.

La función objetivo de un agente de tipo i viene dada por:

$$E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (U_{it} - D_{it} - c_{i1t} - c_{i2t} - c_{i3t}),$$

donde β es el factor descuento, U_{it} es el valor de la utilidad que este agente tipo i derivó de consumir en el periodo t ; D_{it} es el valor de la desutilidad de la producción en dicho periodo; y c_{ijt} es la desutilidad que el agente tipo i asumió en t por almacenar el bien j (coste de almacenamiento), donde $j \in \{1, 2, 3\}$. La diferencia $U_{it} - D_{it}$ denota la *utilidad neta* del agente i en el periodo t .

Cabe observar que, en la anterior ecuación, cada una de las U_{it} , D_{it} , y c_{ijt} con $j \in \{1, 2, 3\}$, es una variable aleatoria contingente de la historia². Es decir, cada una de ellas es una variable aleatoria cuya distribución en probabilidad varía dependiendo del valor de otra variable aleatoria, que para cada uno de estos casos concretos, es la ocurrencia de un cierto acontecimiento. Concretamente, cada una de estas es una variable que toma el valor cero, a menos que se haya producido el correspondiente suceso de consumo, producción o almacenamiento de un determinado bien, respectivamente. Cuando se produce el suceso de consumo del bien de consumo, de producción, o almacenamiento del bien j , estas variables aleatorias toman los valores de $U_i > 0$, $D_i > 0$, y $c_{ij} > 0$, respectivamente. Además, en consonancia con una de las asunciones clave del modelo, ocurre que, $c_{i1} < c_{i2} < c_{i3}$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$; esto es, para cada tipo de agente, el bien 1 tiene el menor coste de almacenamiento y el bien 3 el mayor.

2. Equilibrios de Nash-Markov

Los agentes en cada ronda deben de tomar un total de dos decisiones: la primera, en la ronda de comercio, y la segunda, en la ronda de consumo. De este modo, las estrategias de cada jugador constan de estos dos ejes:

1. Ronda de comercio. Dado que cada agente solo puede poseer uno de los tres bienes en un momento dado, una vez emparejados dos agentes, existen nueve estados pre-comerciales posibles para cada uno de ellos (ver cuadro 2.2). La función de comercio asigna estos nueve estados al conjunto $\{0, 1\}$. Aquí, 1 significa *comerciar* y 0 *no comerciar*.

²Una variable aleatoria contingente se define como una variable aleatoria que depende de otra variable aleatoria. Más formalmente, se dice que una variable aleatoria es una variable aleatoria contingente si su distribución de probabilidad varía dependiendo del valor de otra variable aleatoria. En economía financiera este concepto es ampliamente usado; por ejemplo, puede emplearse una variable aleatoria contingente para describir una situación en la que los flujos futuros de ingresos de un activo financiero están ligados a un evento contingente, como la ocurrencia de un cierto acontecimiento (como el cumplimiento de ciertas condiciones o el resultado de un juego de azar).

2. Ronda de consumo. Del mismo modo, después de cada ronda comercial, hay tres posibles estados de preconsumo (ver cuadro 2.3); y la función de consumo los asigna a $\{0, 1\}$, donde 1 significa *consumir* y 0 *no consumir*.

Cabe notar que el valor de la función objetivo depende no solo de las estrategias del agente, sino también de las de los demás agentes y de la distribución inicial de bienes entre los agentes.

Bien propio	Bien ajeno
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3

Cuadro 2.2: Estados precomercio para un agente tipo i ,

Bien propio
1
2
3

Cuadro 2.3: Estados preconsumo para un agente i

Previo a comenzar con los equilibrios del modelo, es preciso realizar unas observaciones sobre lo explicado hasta ahora. Suponiendo que se satisfacen las asunciones del modelo, y bajo hipótesis de racionalidad, el comportamiento de los agentes se esperaría que estuviese determinado por su deseo de conseguir su bien de consumo en la ronda de comercio, para así luego consumirlo en la ronda de consumo. Por tanto, se esperaría que en un estado en el que los agentes hayan aprendido a jugar su mejor estrategia (sean completamente racionales), estos en ningún caso van a decidir no consumir su bien de consumo si tienen la oportunidad. Luego, en concreto, en estas condiciones, en el equilibrio, no ocurrirá que los agentes entren en la ronda de comercio con su bien de consumo.

Además, también resulta coherente pensar que, en general, el bien 1, por ser el que menos coste de almacenamiento tiene, pueda ser empleado como bien *comodín* por los agentes en aquellas situaciones en que estos no opten a intercambiar por su bien de consumo, pero sí tengan acceso a obtener un bien tipo 1. Esto es, realmente hay incentivos

en el modelo para que el bien 1 sea, al menos, el segundo preferido para todos los agentes; o dicho de otro modo, hay incentivos para que el bien 1 sea empleado como *medio de intercambio* por los agentes.

En este caso, es claro que un agente de tipo 3, dado que el bien 1 es ya su bien de producción, solo va a aceptar intercambios por su bien de consumo; pues aceptar cualquier otro que no espere consumir le supondría asumir un mayor coste de almacenamiento, sin implicar esto la obtención de alguna compensación adicional (en términos de utilidad) por otra vía. Por tanto, no se espera que un agente de tipo 3, completamente racional, en algún momento ocurra que tenga un bien 2. Por su parte, a los agentes de tipo 2, en su búsqueda de su bien de consumo sí podría interesarles, en caso de no haber conseguido su bien de consumo, finalizar la ronda de consumo con el bien 1, en vez de con su bien de producción; pues este primero les supondría una menor desutilidad por coste de almacenamiento.

Efectivamente, en una ronda de intercambio en esta economía ocurre que cada agente acepta su propio bien de consumo. Pero además, se tiene que el bien 1 es aceptado por los agentes de tipo 2, ya que tiene la misma comerciabilidad que el bien 3, pero su coste de almacenamiento es menor. Los agentes de tipo 3, por su parte, sabiendo que su bien de producción, es decir, el bien 1, es aceptado tanto por los de tipo 1 como por los de tipo 2, no utilizarán el bien 2 como medio de intercambio, que además tiene mayor coste de almacenamiento.

El patrón de intercambio de los agentes de tipo 1, sin embargo, no es tan inmediatamente deducible. Para estos agentes ocurre que su bien de producción, es decir, el bien 2, tiene una comerciabilidad limitada. Por lo tanto, aceptarán el bien 3 a cambio del bien 2 si y solo si la ventaja de comercialización del bien 3 sobre el bien 2 supera la desventaja del coste de almacenamiento. Esta idea se recoge en la desigualdad (2.1) que figura a continuación,

$$(c_{13} - c_{12}) < \beta(U_1 - D_1) \frac{p_{31} - p_{21}}{3}. \quad (2.1)$$

Donde p_{ij} denota la proporción de agentes del tipo i que entran en la ronda comercial con el bien j . En esta desigualdad, es claro que $p_{31}/3$, $p_{21}/3$ son las probabilidades de que el agente del tipo 1 sea emparejado con un agente de tipo 2 y 3, respectivamente, y que este lleve el bien 1 en su inventario. Dado que estos son los únicos tipos que aceptarían los bienes 2 y 3, de manera respectiva, $(p_{31} - p_{21})/3$ indica la magnitud de la diferencia de comerciabilidad entre los bienes 3 y 2 en el siguiente periodo, para este tipo de agente. El producto de esto por el valor de la utilidad neta y por la tasa de descuento, devuelve el valor de la comerciabilidad en términos de utilidad actual. El lado izquierdo no es más que la diferencia entre los costes de almacenamiento de un bien 3 y un bien 2. La desigualdad, por tanto, es una condición necesaria para que los agentes de tipo 1 no acepten el bien 3 como medio de intercambio.

Kiyotaki y Wright invirtieron esfuerzo en estudiar el tipo de estrategia que estos individuos adoptarían en un estado de equilibrio estacionario. Se presentan, a continuación,

sus principales conclusiones al respecto. Se pondrá de manifiesto cómo, para cierta combinación de valores de los parámetros, los agentes de tipo 1 preferirán tener bien 3 a bien 2, pese a que este primero resulte más caro en términos de desutilidad por coste de almacenamiento; es decir, para la combinación de parámetros mencionada, los agentes de tipo 1 tendrán fuertes incentivos a intercambiar, ofreciendo su bien de producción a cambio de cualquiera de los otros dos (bien 3 o su bien de consumo), en la ronda de comercio.

Kiyotaki y Wright (1989) estudiaron las estrategias de equilibrio de Nash en estado estacionario para todos los rangos posibles de parámetros; y en concreto, demostraron³ que, para valores de los parámetros satisfaciendo (2.2), el único equilibrio es el referido como **equilibrio fundamental**.

$$(c_{13} - c_{12}) > 0,5 \frac{\beta}{3} (U_1 - D_1). \quad (2.2)$$

Para cualquier conjunto de valores de los parámetros que satisfagan la condición (2.2), la única distribución de inventario de equilibrio se da en el panel izquierdo de la Tabla 2.4. Es fácil comprobar que esta es consistente con las observaciones realizadas previamente en relación a los patrones de comercio.

En un equilibrio fundamental, los agentes de tipo 1 no aceptan el bien 3 como medio de intercambio, y tienden a mantener su bien de producción, el bien 2, a la espera de una pareja adecuada en el siguiente periodo. Es decir, este equilibrio se caracteriza porque los agentes de tipo 1 en ningún caso van a entrar en la ronda de comercio con un bien de tipo 3; pues antes que eso, prefieren conservar su bien de producción, el bien 2. En esta línea, se incorpora la siguiente observación:

Observación 2.1. *Como resultado de incorporar los valores de equilibrio fundamental, $p_{31} = 1$ y $p_{21} = 0,5$ (véase tabla 2.4) en la desigualdad (2.1), se llega a la expresión:*

$$(c_{13} - c_{12}) < 0,5 \frac{\beta}{3} (U_1 - D_1).$$

Luego, el equilibrio fundamental no es compatible con la condición 2.1 y, por tanto, los agentes de tipo 1 no aceptarán el bien 3 como medio de intercambio en este equilibrio. En consecuencia, en el equilibrio fundamental, los agentes del tipo 3 no manejarán el bien de tipo 1 como medio de intercambio.

Una situación más interesante surge como el equilibrio único cuando los valores de los parámetros satisfacen,

$$(c_{13} - c_{12}) < (\sqrt{2} - 1) \frac{\beta}{3} (U_1 - D_1). \quad (2.3)$$

³Para las derivaciones y las pruebas de las afirmaciones aquí expuestas, el lector puede consultar el documento original: *On money as a medium of exchange*, (1989).

Agente	Equilibrio fundamental			Equilibrio especulativo		
	Bien 1	Bien 2	Bien 3	Bien 1	Bien 2	Bien 3
Tipo 1	0	1	0	0	0.71	0.29
Tipo 2	0.5	0	0.5	0.59	0	0.41
Tipo 3	1	0	0	1	0	0

Cuadro 2.4: Distribución de tipos de bienes en la fase previa a la comercialización.

Esta combinación de parámetros da lugar al denominado **equilibrio especulativo**. En esta modalidad de equilibrio, además de que los agentes de tipo 2 aceptan el bien 1, ocurre que los agentes de tipo 1 aceptan el bien 3, cabe recordar, es el que presenta el mayor coste de almacenamiento. Para cualquier valor de parámetro que satisfaga la condición (2.3), la distribución del inventario de equilibrio se indica en la tabla 2.4.

En el equilibrio especulativo, las estrategias de los agentes de los tipos 2 y 3 son las mismas que en el equilibrio fundamental. De la tabla 2.4 se extrae que, en este caso, $p_{21} = 0,59$ y $p_{31} = 1$, y es inmediato ver que, por tanto la desigualdad (2.1) sí se cumple esta vez gracias a la condición (2.3). Por lo tanto, los agentes del tipo 1 tienen la ventaja de comerciar con el bien 3, en lugar del bien 2, en sus existencias. Esta ventaja de comerciabilidad supera la desventaja del coste de almacenamiento, y ahora los agentes del tipo 1 están dispuestos a intercambiar el bien 2 por el bien 3, que tiene el mayor coste de almacenamiento. Por lo tanto, en este caso, tanto el bien 1 como el bien 3 se utilizan como medios de intercambio en la economía.

Equilibrio	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Fundamental	$1 \succ 2 \succ 3$	$2 \succ 1 \succ 3$	$3 \succ 1 \succ 2$
Especulativo	$1 \succ 3 \succ 2$	$2 \succ 1 \succ 3$	$3 \succ 1 \succ 2$

Cuadro 2.5: Estrategias de negociación según el tipo de agente, para los equilibrios fundamental y especulativo.

Las estrategias de negociación de cada tipo de agente, y para cada tipo de equilibrio, pueden formalizarse a través de la definición una relación de preferencias: $a \succ b \succ c$ (véase cuadro 2.5). Su interpretación sería como sigue: dado un tipo de agente, a es el bien favorito y c el menos. El agente intercambiará cualquier bien a cambio del bien a (esto es, este será el bien de consumo del agente), ofrecerá bien b solo a cambio del bien a , y estará interesado en intercambiar bien c a cambio de cualquier otro bien.

De este modo, el cuadro 2.5 resume los principales resultados obtenidos en cuanto a las principales estrategias de cada tipo de agente, según la modalidad de equilibrio.

En esta misma línea, se ilustran en la figura 2.1 las relaciones comerciales que se definirían como consecuencia de las estrategias presentadas en el cuadro anterior. En

esta figura, se recogen gráficamente los patrones de comercio resultantes en cada tipo de equilibrio.

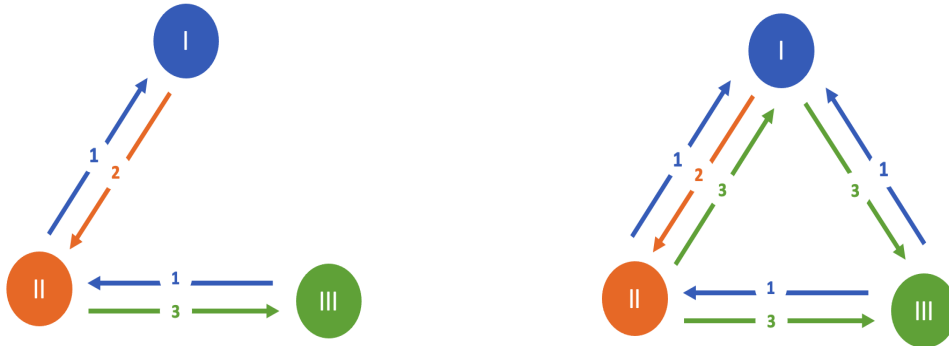


Figura 2.1: De izquierda a derecha, se muestran los patrones de comercio resultantes en los equilibrios fundamental y especulativo.

En la figura 2.1, se representa el tipo de agente y el tipo de bien como: I, II y III; y 1, 2, y 3; de manera respectiva. Las flechas indican la dirección y sentido en que se produce el intercambio del tipo de bien entre los agentes. El diagrama de la izquierda, recoge este detalle para las relaciones de intercambio que caracterizan el equilibrio fundamental. Análogamente, el derecho resume esta misma información pero para el caso del equilibrio especulativo. En relación a estos diagramas, se destacan dos observaciones de interés:

Observación 2.2. *En un equilibrio fundamental, se espera observar que la cantidad de bienes tipo 1 transada duplica a cualquiera de las cantidades de los otros tipo de bienes.*

Observación 2.3. *El equilibrio especulativo da pie al surgimiento de una vía comercial entre los agentes tipo 1 y los agentes tipo 3, que de otra forma no existiría.*

El modelo de Kiyotaki Wright basado en agentes

En este capítulo, apoyándonos en la base teórica detallada en la sección anterior, proponemos una adaptación de una de las economías de intercambio de Kiyotaki y Wright (1989), que constituirá el entorno de decisión seleccionado para nuestro modelo basado en agentes. En este tipo de economía, en caso de querer comerciar, los agentes deben utilizar una mercancía o dinero fiduciario como medio de intercambio.

Este modelo es susceptible de ser empleado como componente de un modelo basado en agentes, ya que define un entorno multiagente cuya evolución viene determinada por la solución de problemas de decisión secuenciales. Los agentes propuestos en el presente trabajo son artificialmente inteligentes y su toma de decisiones se apoya en los denominados sistemas de clasificadores. Por su parte, el algoritmo de aprendizaje seleccionado permite que este tenga lugar a partir de la experiencia del propio agente, pero además, y en la línea de lo propuesto por Başçi (1999), hace posible la imitación en juegos dinámicos recursivos. A esto último se suele hacer referencia en la literatura como *aprendizaje social* e introduce la idea de que los agentes utilizan la imitación de los valores sociales en su proceso de aprendizaje.

Al incorporar el modelo de Kiyotaki Wright en un modelo basado en agentes, es posible estudiar de manera experimental cómo variables, como por ejemplo la imitación, afectan al comportamiento del sistema completo y a la distribución de recursos en una economía. De este modo, se demuestra que la presencia de la imitación importa mucho en algunos entornos económicos. También, se observará que, en la mayoría de las economías que hemos simulado, los patrones de comercio y consumo convergen a un equilibrio estacionario de Nash incluso si los agentes comienzan con reglas aleatorias. Resultados más suculentos se mostrarán al final del capítulo, debidamente justificados.

1. Planteamiento

De manera general, la adaptación del modelo de Kiyotaki-Wright a un modelo basado en agentes podría realizarse siguiendo los siguientes pasos:

1. Definir el **conjunto de agentes**: Los agentes en un modelo basado en agentes son entidades cuyo cometido es la toma de decisiones con un impacto en el sistema.
2. Asignar **atributos** a los agentes: Cada agente debe tener un conjunto de atributos que lo describan y lo diferencien de otros agentes. Concretamente, cada agente contará con un nivel de riqueza (cuya principal fuente será su capacidad productiva y su capacidad de negociación en un entorno de emparejamiento aleatorio), y una habilidad para tomar decisiones (clasificadores, que en el caso de incorporar el aprendizaje por imitación al de experiencia, incluirán también esta vía de actualización).
3. Establecer las **reglas de interacción**: Los agentes deben interactuar entre sí de alguna manera, y estas interacciones deben estar regidas por reglas predefinidas. Concretamente, en este modelo, se definirán reglas de interacción a partir de la capacidad de los agentes para intercambiar bienes y sus posibilidades de consumo/producción, el aprendizaje en base a su experiencia y por imitación, y en base a sus propias características (individuos racionales y egoístas, con objetivos y preferencias definidas).
4. Ejecutar la **simulación**: Una vez definidos los agentes, sus atributos y las reglas de interacción, se puede ejecutar la simulación para ver cómo evoluciona el sistema a medida que los agentes interactúan entre sí. Se observará cómo la imitación tiene un impacto en el aprendizaje de los agentes, alterando las probabilidades de alcanzar un equilibrio frente a otro.

No obstante, con esto en mente y previo a entrar en el funcionamiento del algoritmo, dedicaremos una primera parte a describir la adaptación del modelo de dinero de Kiyotaki-Wright que se va a manejar.

2. El algoritmo de aprendizaje

En esta sección, suponemos que los agentes que operan en una economía de Kiyotaki-Wright no conocen las estrategias de equilibrio y empiezan actuando de acuerdo con algunas creencias aleatorias sobre los valores de las acciones posibles. Mientras interactúen, tendrán oportunidades tanto de aprender por experiencia como por imitación.

Para realizar simulaciones numéricas, es necesario disponer de número finito de agentes de cada tipo, que tomamos como 20. Los dos conjuntos de valores de los parámetros

Bien	Producido por	Consumido por	Utilidad neta	Coste de almacenamiento
Tipo 1	Tipo 3	Tipo 1	1.5	0.1
Tipo 2	Tipo 1	Tipo 2	1.5	0.2, 0.29
Tipo 3	Tipo 2	Tipo 3	1.0	0.3
Número de agentes por tipo				20
Número máximo de periodos				2000
Factor descuento				0.9

Cuadro 3.1: Parámetros utilizados en las simulaciones (conjuntos I y II).

que utilizamos en nuestras simulaciones se recogen en el Cuadro 3.1¹. Adicionalmente, se ha considerado un término de desutilidad por producción idéntico para todos los agentes: $D_i = 0,1 \forall i \in \{1, 2, 3\}$. El conjunto II solo difiere del conjunto I en el coste de almacenamiento del bien 2. Esto hace que la desigualdad (2.3) y que, por lo tanto, también la condición (2.1), sean más estrictas bajo los parámetros del conjunto II, y aumenta los incentivos para que los agentes de Tipo 1 utilicen la estrategia especulativa de aceptar el Bien 3 como medio de intercambio.

Cada uno de nuestros agentes de tipo 1, 2 y 3 comienza el periodo cero manteniendo los bienes 2, 3 y 1 en sus inventarios, respectivamente. A continuación, inician su primera ronda de intercambio.

En el algoritmo empleado, el aprendizaje y la toma de decisiones tienen lugar mediante los denominados *sistemas de clasificadores*:

Definición 3.1. *Un sistema de clasificadores es una lista de declaraciones de condición-acción y un número real asociado para cada declaración. Cada enunciado de condición-acción se denomina **clasificador** y el número real asociado a él se denomina **fuerza**.*

En definitiva, un sistema de clasificadores contempla todas las posibles situaciones con las que se puede encontrar el agente y asigna un valor numérico a cada una de las posibles decisiones que el agente pueda tomar ante cada situación. De esta manera, la decisión racional del agente de acuerdo con su aprendizaje hasta el momento se basará en la comparación de los valores numéricos que el sistema de clasificadores le aporta para las posibles decisiones.

Un algoritmo de aprendizaje basado en un sistema de clasificadores consta de tres

¹En la tabla se muestra el conjunto de valores de los parámetros correspondientes a los utilizados en la simulación numérica en GAUSS realizada por Başçi, E. (1999), y que a su vez fueron heredados del estudio experimental de Brown (1996) (conjunto I) y una variante del mismo (conjunto II). Todos los parámetros son comunes en ambos conjuntos, a excepción del coste de almacenamiento del bien 2: en el conjunto I, $c_2 = 0,20$ y en el conjunto II, $c_2 = 0,29$. Tanto para $c_2 = 0,20$, como para $c_2 = 0,29$, se satisface la condición (2.3), de modo que para ambos conjuntos de parámetros, I y II, el único equilibrio es el especulativo. Sin embargo, el conjunto II proporciona incentivos relativamente mayores para que los agentes de tipo 1 acepten el bien 3 como medio de intercambio.

etapas principales: activación, selección y actualización. Además, en línea con el trabajo de Başçi (1999), se incorpora una etapa adicional, la imitación, en la que los agentes intercambian información de manera puntual. Este elemento constituye el medio para incorporar el aprendizaje social en el algoritmo.

A continuación, se describen los pasos indicados:

1. **Activación.** En esta parte, el algoritmo reconoce el estado actual y determina los clasificadores cuyas partes *condición* se satisfacen en el estado actual. Se dice que estos clasificadores se *activan*.
2. **Imitación.** Este paso se ejecuta de acuerdo con la probabilidad de imitación definida, p_{imit} , y consiste en la sustitución del valor de uno de los clasificadores activos, seleccionado de forma aleatoria, por su *fuerza social*. Esta fuerza social es calculada como la media de las fuerzas de todos los clasificadores pertinentes, ponderada por la experiencia.
3. **Selección.** Este paso consiste en la selección del clasificador con mayor fuerza asociada, de entre los clasificadores activos. El modelo sigue su consejo y ejecuta las acciones asociadas a la decisión adoptada.
4. **Actualización.** Finalmente, en función de las consecuencias, se actualiza la fuerza del clasificador responsable de las mismas (esto es, el clasificador seleccionado en el paso 2).
5. Volver al paso 1.

Ahora, se verá cómo esto se concreta en nuestra economía.

1. Activación

En nuestra economía, en lo que respecta al paso 1, suponemos que cada agente tiene un sistema de clasificadores **privado**² y **completo**. Por completo se refiere a que, en cada estado posible, y para cada acción posible que se pueda tomar en ese estado, existe un clasificador distinto. Esta asunción significa que los agentes son capaces de reconocer plenamente tanto su estado de consumo³, como su estado de comercio⁴.

Como solo hay tres bienes, es fácil ver que, para cada agente, hay tres estados de consumo y nueve estados comerciales. En los cuadros (3.2) y (3.2) se resume los clasificadores de consumo y comercio, respectivamente, para un agente tipo i cualquiera. En ambos casos, cada fila representa uno de los posibles estados en que se puede encontrar un agente, independientemente de su tipo, en las rondas de consumo y comercio, respectivamente. A su vez, cada estado viene asociado al valor de una decisión binaria (consumir

²Suponemos que cada agente solo conoce su sistema de clasificadores y no tiene información del sistema de clasificadores del resto.

³Es decir, el tipo de bien que tienen en la mano en el momento previo a iniciar la ronda de consumo.

⁴Es decir, el tipo de bien propio y el bien del socio comercial, en ese periodo.

y no consumir, y comerciar y no comerciar, respectivamente). Finalmente, cada combinación estado-decisión determina una regla de actuación (clasificador), al que viene asociado un número real (fuerza del clasificador) determinado. En total, hay seis clasificadores de consumo y 18 de comercio.

Estados		Acciones				
Bien propio		Consumir	Fuerza		Consumir	Fuerza
1	1	SI	$S^{c_{11}}$	4	NO	$S^{c_{12}}$
2	2	SI	$S^{c_{21}}$	5	NO	$S^{c_{22}}$
3	3	SI	$S^{c_{31}}$	6	NO	$S^{c_{32}}$

Cuadro 3.2: Clasificadores de consumo para un agente tipo i , $i \in \{1,2,3\}$, en un momento dado

Estados		Acciones					
Bien propio	Bien ajeno		Comerciar	Fuerza		Comerciar	Fuerza
1	1	1	SI	$S^{r_{11}}$	10	NO	$S^{r_{12}}$
1	2	2	SI	$S^{r_{21}}$	11	NO	$S^{r_{22}}$
1	3	3	SI	$S^{r_{31}}$	12	NO	$S^{r_{32}}$
2	1	4	SI	$S^{r_{41}}$	13	NO	$S^{r_{42}}$
2	2	5	SI	$S^{r_{51}}$	14	NO	$S^{r_{52}}$
2	3	6	SI	$S^{r_{61}}$	15	NO	$S^{r_{62}}$
3	1	7	SI	$S^{r_{71}}$	16	NO	$S^{r_{72}}$
3	2	8	SI	$S^{r_{81}}$	17	NO	$S^{r_{82}}$
3	3	9	SI	$S^{r_{91}}$	18	NO	$S^{r_{92}}$

Cuadro 3.3: Clasificadores de comercio para un agente tipo i , $i \in \{1,2,3\}$, en un momento dado

2. Imitación

En el paso 2, se introduce la imitación en forma de adopción ocasional de la *fuerza social* asociada a uno de los clasificadores activados seleccionado al azar en el momento previo de la toma de decisión en un estado observado. La fuerza social de una regla se ha calculado como la fuerza media ponderada por la experiencia, sobre todos los agentes del mismo tipo que el agente considerado. La probabilidad de imitación, p_{imit} , es constante entre los agentes y a lo largo del tiempo. Cuando se emparejan dos agentes, cada agente lanza al aire su moneda de imitación. Si el agente observa la cara de la moneda *imitar*, entonces lanza otra moneda para decidir cuál se los dos clasificadores activos va a modificar. En consecuencia, con las mismas probabilidades, una de las dos fuerzas de los dos clasificadores activos en esa toma de decisión es sustituido por su contrapartida social, dada por:

$$S_{i,t}^h = \frac{\sum_{n=1}^{20} \tau_{n,t}^h S_{n,t}^h}{\sum_{n=1}^{20} \tau_{n,t}^h}, \quad (3.1)$$

para $t \geq 0$. Donde i es el índice del agente a imitar, h es el índice del clasificador⁵ que se selecciona en el paso de imitación, y n se refiere al n -ésimo agente de entre aquellos del mismo tipo que i .

Se supone que esta adopción se realiza de manera inconsciente. El mecanismo implícito podría ser el siguiente: cada agente va divulgando sobre el valor percibido con respecto al mencionado clasificador, en base a su experiencia con él. Por un lado, ocurre que los agentes más experimentados tienden a compartir su opinión (con respecto a la regla social asociada a ese clasificador) de manera más reiterada; mientras que por el otro, también parece coherente que los agentes tiendan a fiarse más del consejo de aquellos agentes con mayor práctica. En cualquier caso, ocurre que el impacto del conocimiento de los agentes más experimentados (en el uso de un determinado clasificador) en la media social (del mencionado clasificador) es mayor.

En conclusión, ocasional e inconscientemente, un agente individual se ve afectado por este valor social, lo adopta y trata esta cifra como si se debiera a su propia experiencia.

3. Selección

En cada una de las dos rondas de decisión que tienen lugar en cada periodo de la economía, la decisión de cada agente en el algoritmo depende, en primer lugar, del estado en que se encuentre el agente (*activación*); y en segundo lugar, de la fuerza relativa de los clasificadores activados.

Las fuerzas de clasificación iniciales se extraen de funciones de densidad normales independientes e idénticamente distribuidas, con media y varianza unitarias. Estas fuerzas iniciales pueden interpretarse como creencias previas sobre el valor de cada enunciado de condición-acción.

En principio, en el paso 3, se deja que los agentes sigan la recomendación del clasificador con la fuerza más alta. Sin embargo, se incorpora un matiz en esta asunción: con una probabilidad del 5 %, se permite que la selección del clasificador sea totalmente aleatoria. Esto refleja la noción de *mano temblorosa* de Selten (1975); además, de constituir una fuente de variabilidad en la toma de decisiones, lo que resulta esencial para que los agentes prueben también las estrategias aparentemente malas⁶. Como resultado, dado que en este modelo siempre se activan dos clasificadores, el clasificador aparentemente malo se elige

⁵Es decir, $h \in \{c_p, r_q\}$, donde $p \in \{(k, l) : 1 \leq k \leq 3, 1 \leq l \leq 6\}$, y $q \in \{(k, l) : 1 \leq k \leq 9, 1 \leq l \leq 18\}$.

⁶Este punto es muy importante. Recordamos que los agentes entran en el modelo completamente despistados (la fuerza inicial de los clasificadores se asigna de manera completamente aleatoria), y como se verá con mayor nivel de detalle más adelante, los clasificadores se actualizan según van siendo seleccionados por el agente. Por tanto, la incorporación de este margen para la acción aleatoria en la toma de decisiones garantiza que tenga lugar una calibración adecuada de los parámetros del modelo.

con una probabilidad del 2,5 % en cada situación de decisión. La presencia de este tipo de errores es útil en el proceso de aprendizaje, ya que sirven como dispositivo no deliberado para la experimentación.

4. Actualización

La actualización de la fuerza del clasificador de consumo, para un agente dado, se realiza según la fórmula:

$$S_{t+1}^{c_p} = S_t^{c_p} + \frac{1}{\tau_t^{c_p} + 1} (U_t - D_t - c_t + \beta S_{t+1}^{r_q} - S_t^{c_p}), \quad (3.2)$$

con $t \geq 0$. Donde $S_t^{c_p}$ es la fuerza del clasificador de consumo de un agente, que ha elegido esta regla concreta, p , con $p \in \{(k, l) : 1 \leq k \leq 3, 1 \leq l \leq 6\}$ ⁷, en el periodo t . $\tau_t^{c_p}$ es un contador de experiencia que muestra cuántas veces se ha elegido esta regla concreta en el pasado. U_t y D_t son la utilidad del consumo y la desutilidad por producción, respectivamente en este periodo. Si no ha habido consumo, se toman como cero. c_t es el coste de almacenamiento de las existencias mantenidas desde el periodo t hasta $t + 1$. Por último, $S_{t+1}^{r_q}$, con $q \in \{(k, l) : 1 \leq k \leq 9, 1 \leq l \leq 18\}$ ⁸, es la fuerza del clasificador comercial, que se selecciona en la ronda comercial que tendrá lugar en el periodo siguiente en que el agente usó su regla p en la ronda de consumo.

Se extrae de (3.2) que, la actualización del clasificador de consumo p en t solo se realiza después de que se haya tomado la decisión comercial en el periodo $t + 1$. Pues el valor de la fuerza del clasificador de consumo elegido en t asociado a la regla p , $S_t^{c_p}$, se actualiza con el valor de la fuerza del clasificador de comercio usado en el mismo periodo en que se produce esta actualización del clasificador de consumo, que es $t + 1$. De este modo, se incorporan los efectos del *temblor de manos* en la ronda de comercio de ese mismo periodo $t + 1$: a través de $S_{t+1}^{r_q}$.

La presencia del factor de descuento, β , multiplicando la fuerza del clasificador comercial elegido para el siguiente periodo, $S_{t+1}^{r_q}$, refleja ese desfase de un periodo que existe entre el *input* que incorpora el aprendizaje del agente hasta el periodo t (esto es, $S_t^{c_p}$), y el que recoge el aprendizaje del agente hasta ese periodo t . No obstante, la inclusión de este parámetro β tiene una justificación desde el punto de vista de la programación dinámica. Concretamente, en el contexto de la *ecuación de Bellman*, este factor descuento sirve para establecer el vínculo entre los valores asintóticos de las fuerzas del clasificador y los valores óptimos que resultan de esta ecuación a la que se enfrenta el agente en equilibrio. Una vez que el valor esperado del término entre paréntesis es cero para todos los clasificadores, podemos decir que la ecuación de Bellman se cumple para este consumidor, donde la función de valor óptimo en un estado dado es igual a la fuerza máxima del clasificador en ese estado. Se observa que, efectivamente, una vez que el valor esperado en el

⁷Nótese que k se mueve en el número de estados, y l en el número de reglas de acción o clasificadores con los que cuenta el agente en la ronda de consumo.

⁸Nótese que k se mueve en el número de estados, y l en el número de reglas de acción o clasificadores con los que cuenta el agente en la ronda de comercio.

paréntesis se hace igual a cero, el valor esperado del cambio en las fuerzas del clasificador, $S_{t+1}^{c_p} - S_t^{c_p}$, también es cero; un indicador de que el aprendizaje ha tenido lugar. Inmediatamente después de la actualización de la fuerza, el contador de experiencia también se actualiza según $\tau_{t+1}^{c_p} = \tau_t^{c_p} + 1$. Los valores iniciales de los contadores de experiencia se fijan en 1 para todos los clasificadores.

Por su parte, la actualización de la fuerza del clasificador de comercio, para un agente dado, se realiza de forma similar según,

$$S_{t+1}^{r_q} = S_t^{r_q} + \frac{1}{\tau_t^{r_q} + 1} (S_t^{r_q} - S_t^{c_p}), \quad (3.3)$$

con $t \geq 0$. Donde τ^{r_q} es el contador de experiencia para esta clasificador de comercio en particular. Se observa que, en este caso, no hay términos de utilidad y descuento en la ecuación porque la decisión de consumo se toma justo después de la ronda de comercio. Por lo tanto, la fuerza del clasificador de consumo elegido resume todos los pagos futuros posteriores. Si nuestro clasificador de comercio nos ha enviado a un estado de consumo fuerte, dicho clasificador se ve recompensado por un aumento de su fuerza. En caso contrario, se reduce. De nuevo, la actualización del contador de experiencia asociado a ese clasificador se produce inmediatamente después de la actualización de la fuerza del mismo, $\tau_{t+1}^{r_q} = \tau_t^{r_q} + 1$.

3. Implementación del modelo

Se ha implementado en Python el algoritmo descrito en la sección anterior. Para ello, se ha hecho uso de la librería Mesa, que proporciona un marco idóneo para el modelado basado en agentes mediante el uso de programación orientada a objetos⁹.

Los puntos clave de esta implementación se basan en el diseño adecuado de las clases *modelo* y *agente*, de modo que los métodos implementados ejecutan sobre los agentes las acciones descritas en el marco teórico planteado.

Se abordan dos aproximaciones para la obtención de resultados:

1. **Ejecución estándar.** Se llevan a cabo ejecuciones aisladas del modelo en las condiciones definidas en el cuadro 3.1. Esto favorece la extracción de rápida de resultados, y es especialmente adecuada para estudiar aspectos concretos del modelo.
2. **Ejecución *batch*.** Esta modalidad presenta una mayor eficiencia de proceso, y resulta especialmente útil de cara a la generación masiva de resultados. Esto facilita la obtención de muestras amplias que, a su vez, permite el estudio del comportamiento del modelo eliminando el factor de aleatoriedad¹⁰. Como resultado de esta ejecución,

⁹Para un mayor nivel de detalle en relación al código empleado, contactar con la autora del presente trabajo.

¹⁰Cabe recordar que varios pasos del algoritmo implementado están sujetos a aleatoriedad. Los individuos entran en la economía completamente despistados y esto se simula mediante la asignación de fuerzas

se han obtenido, para cada valor de probabilidad de imitación considerado, 100 ejecuciones del algoritmo, en las condiciones descritas en el cuadro 3.1 para el conjunto II.

En la siguiente sección se revelan los principales resultados extraídos de las ejecuciones mencionadas.

4. Análisis e interpretación de resultados

Para la ejecución de las dos aproximaciones descritas en la sección anterior, se han empleado los conjuntos de parámetros I y II (véase Cuadro 3.1). Ambos conjuntos presentan incentivos para que los agentes de tipo 1 acepten el bien 3 como medio de intercambio. Se recuerda que, para el caso del *set* II, estos incentivos son más pronunciados.

Se comienza discutiendo los resultados relativos a la primera aproximación.

4.1. Ejecución estándar

Por cada ejecución, se ha representado un gráfico temporal que recoge la evolución de:

1. El **ratio de aprendizaje**. Esto es, la proporción de agentes de tipo 1 que elegirían cambiar su bien de producción (bien 2) por el bien 3.
2. El **ratio de confianza**, que es como se ha denotado a la proporción de agentes de tipo 1 que elegirían conservar ese bien 3 (frente a una oferta de bien 2).

Ambos ratios constituyen indicadores del aprendizaje del modelo. El primero recoge la proporción de agentes de tipo 1 que aprende que intercambiar su bien de producción por el bien 3 resulta más ventajoso que no hacerlo. Es claro que, en ese caso, los agentes habrán aprendido a **aceptar** el bien 3 como medio de cambio. Sin embargo, esto no implica que estos agentes hayan aprendido a **conservar** este bien, y por tanto, no puede inferirse de este comportamiento que los agentes tipo 1 hayan interiorizado la estrategia especulativa.

En esta línea, el segundo ratio, o *ratio de confianza*, contribuye a ofrecer una visión más completa de la calidad de ese aprendizaje. Resulta evidente que no es suficiente con que los agentes de tipo 1 aprendan que ofrecer su bien de producción a cambio del bien 3 para garantizar que estos han *aprendido* que la estrategia especulativa es su mejor opción en este escenario. Para que se pueda decir que el aprendizaje efectivamente ha tenido lugar, y la estrategia especulativa ha sido correctamente incorporada, es necesario que, en el resto de escenarios de negociación, estos sean consistentes y se mantengan firmes en su elección del bien 3 (frente al bien 2).

aleatorias en los clasificadores. También, la combinación de la aleatoriedad en la asignación de parejas, previo a la ronda de negociación, y de la inherente al mecanismo de aprendizaje social, pueden favorecer la obtención de resultados sesgados.

Podría darse el caso en que el ratio de aprendizaje rápidamente alcanzase la unidad porque, efectivamente, la totalidad de los agentes de tipo 1 hubiese aprendido a identificar que en ese escenario concreto, de intercambio de bien 2 por bien 3, decidir comerciar fuese favorable; pero que, sin embargo, una vez con el bien 3 en su inventario, no fuesen consistentes, y ante un nuevo emparejamiento con un agente tipo 3 que ofreciese bien 2, estos aceptasen el intercambio. Esta forma de actuación resulta absurda, pues en ella los agentes tipo 1 estarían haciendo y deshaciendo este intercambio (de bien 2 por bien 3) hasta conseguir su bien de consumo; y esto estaría lejos de reflejar un comportamiento especulativo para este tipo de agentes.

En la figura 3.1 se muestra un caso como el descrito. Se observa cómo hacia el periodo 1250 todos los agentes tipo 1 han aprendido a intercambiar su bien de producción por bien 3; sin embargo, el ratio de confianza toma la dirección contraria, y ya en el periodo 500 se encuentra estable en 0. Combinando ambas, se obtiene que hacia el periodo 1000 ya existe unanimidad en la economía en lo relativo a las decisiones de intercambio de bien 2 y bien 3 entre los agentes de tipo 1; sin embargo, la realidad es que estas decisiones, conjuntamente consideradas, no tienen ningún sentido económico, ni son congruentes con el marco teórico del modelo.

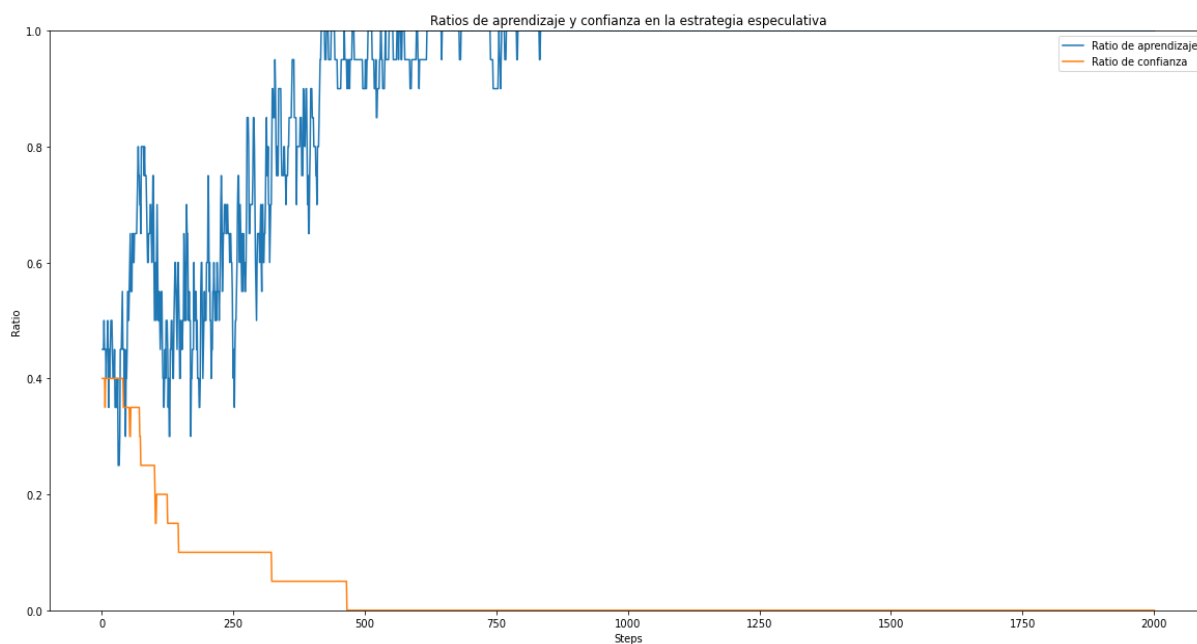


Figura 3.1: Aprendizaje con incentivos fuertes y con probabilidad de imitación 0.25.

Una vez trasladado el interés de emplear los dos indicadores propuestos, se procede a revisar los principales resultados arrojados por las ejecuciones realizadas.

Grado de aceptación de la estrategia especulativa en la economía a partir de los ratios de aprendizaje y confianza

Para extraer conclusiones numéricas del modelo en relación a los ratios mencionados, se comienza fijando una probabilidad de imitación en torno a 0.3. Se observa lo siguiente:

Para valores del conjunto de parámetros II, en el que los agentes tipo 1 tienen incentivos muy marcados a aceptar el bien 3 como medio de intercambio, y para un valor fijo de la probabilidad de imitación de 0.25, se obtiene que en 3 de cada 4 ejecuciones del algoritmo, ambos ratios acaban convergiendo a 1. La figura 3.2 es un ejemplo de esto. Hacia el periodo 1000, el 100 % de los agentes ha aprendido a utilizar la estrategia especulativa, y a mantenerla.

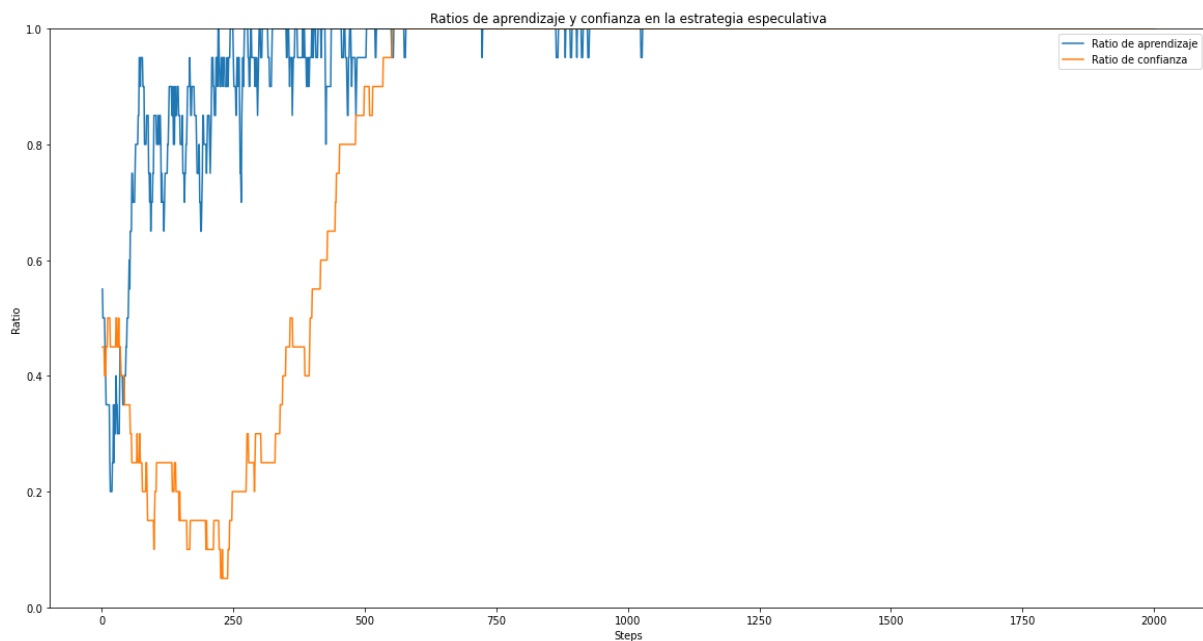


Figura 3.2: Aprendizaje con incentivos fuertes y con probabilidad de imitación 0.25.

Sin embargo, la foto cambia ligeramente si lanzamos el algoritmo con el conjunto de parámetros I. En particular, para este valor de los parámetros, manteniendo la probabilidad de imitación en 0.25, se observa que, en torno a 1 de cada 4 casos, los ratios de aprendizaje y confianza se estabilizan en la unidad. Además, como se ilustra en la figura 3.3, la convergencia es más lenta. La proporción de agentes tipo 1 que ha aprendido a intercambiar su bien de producción por el bien 3 no alcanza el límite de 1 hasta pasado el periodo 1750. No obstante, analizando en mayor detalle, se observa que, realmente, poco después del *step* 750, ninguno de los dos ratios baja de 0.8, que indica un nivel de calado de la estrategia especulativa bastante aceptable; además, el ratio de confianza logra estabilizarse en la unidad poco después de los 1000 *steps*.

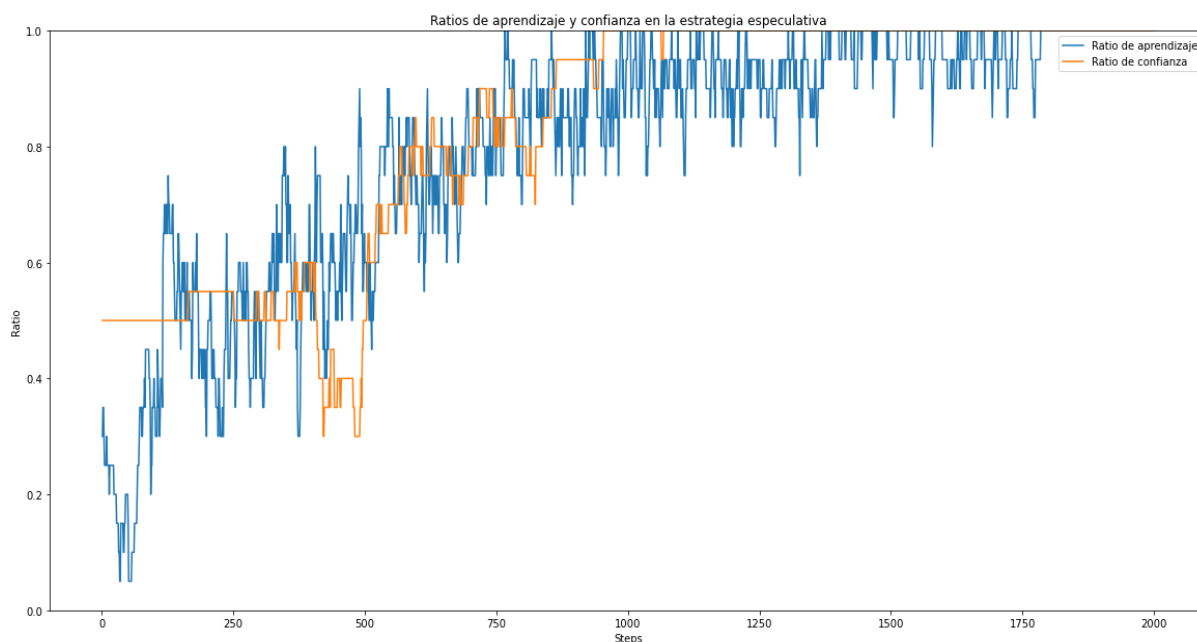


Figura 3.3: Aprendizaje con incentivos débiles y con probabilidad de imitación 0.25.

Con los parámetros del conjunto I, y como es de esperar, los resultados obtenidos en cuanto a convergencia en el equilibrio especulativo son menos ricos. Así, por ejemplo, es habitual encontrarse, en una proporción similar al escenario de la 3.3, situaciones como la descritas en la figuras 3.4 y 3.5. En ambas se muestra cómo en la ejecución ha tenido lugar un proceso de *desaprendizaje*. En la primera resulta evidente que la situación es totalmente opuesta a la idílica. En la segunda, sin embargo, además de mostrar la ausencia de convergencia al equilibrio especulativo, ilustra una debilidad importante del algoritmo. Esta figura 3.5 presenta el caso en el que los clasificadores de los agentes de tipo 1 asociados a esta regla de acción (“rechazar bien 3 a cambio de bien 2”) se mantienen relativamente estables en torno a su valor inicial. Es decir, muestra el escenario en el que, por cuestiones relacionadas con la aleatoriedad presente en el algoritmo, estos clasificadores no son entrenados. Ambas constituyen un ejemplo de ejecuciones en las que los clasificadores asociados con la decisión “aceptar bien 3 a cambio de bien 2”, no son entrenados correctamente.

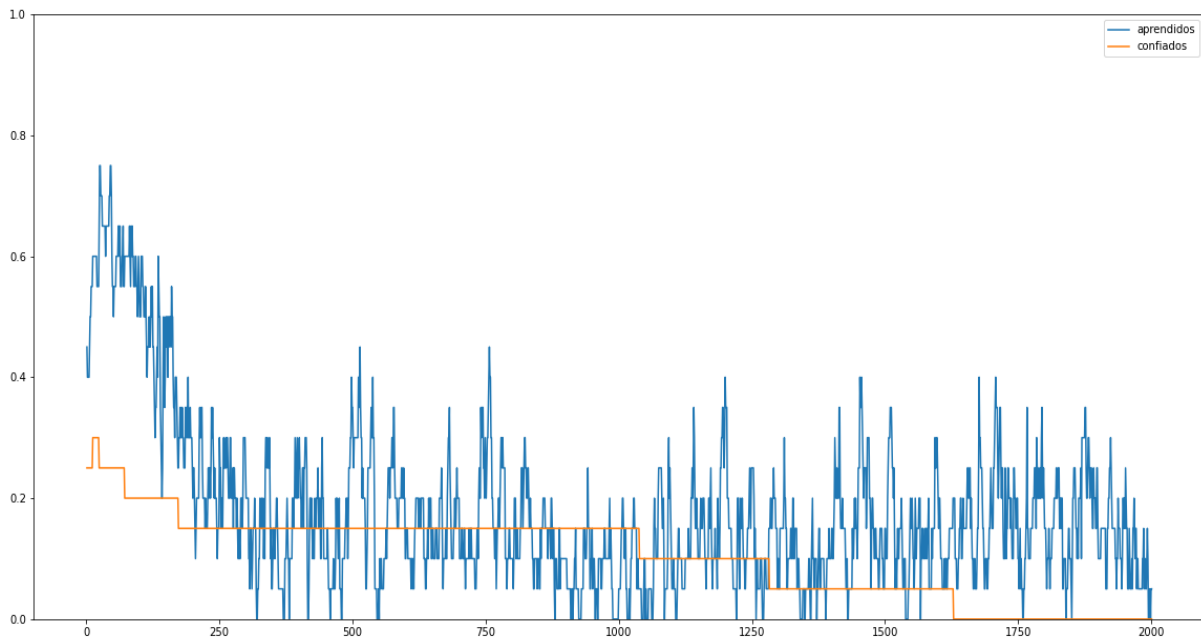


Figura 3.4: Aprendizaje con incentivos débiles y con probabilidad de imitación 0.25.

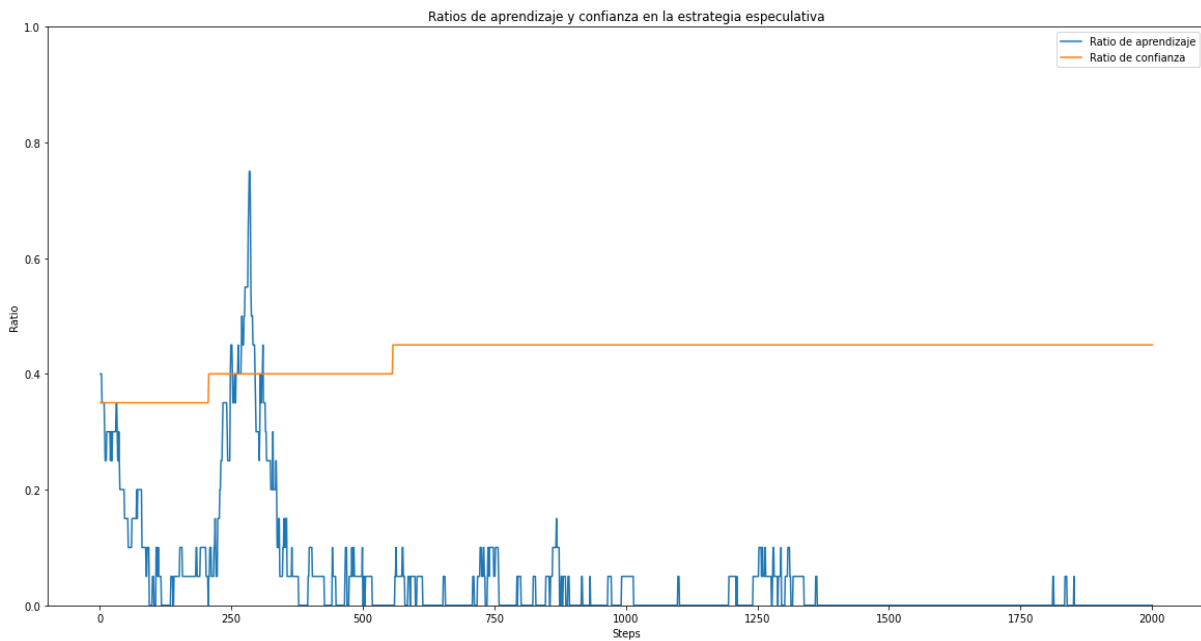


Figura 3.5: Aprendizaje con incentivos débiles y con probabilidad de imitación 0.25.

4.2. Ejecución *batch*

A continuación, se procede con una revisión de los resultados más destacables en relación a los aspectos más globales del modelo. Para ello, nos apoyamos en los resultados extraídos de la ejecución masiva del algoritmo, o ejecución *batch*. Se ha empleado el conjunto de parámetros II, que presenta fuertes incentivos al surgimiento del equilibrio especulativo.

En concreto, hemos centrado la atención en estudiar el comportamiento del algoritmo en función de la probabilidad de imitación. Nos interesa medir el impacto que resulta tras relajar la hipótesis de *privacidad de la información* en los resultados del modelo.

En el capítulo 3, cuando se describía el paso de *activación* del algoritmo de aprendizaje, se comenzaba con la aclaración de que a cada agente le corresponde un sistema de clasificadores privado. Es decir, cada agente, en principio, es conocedor, exclusivamente, de la fuerza asociada a cada uno de sus clasificadores; y desconoce por completo, cuál es el valor, que los otros agentes de su tipo, le asignan a esos clasificadores. Más en general, cada agente desconoce la estructura que subyace en el proceso de toma de decisiones del resto, y en concreto, el valor de la fuerza que define la regla de acción de cualquier agente en cualquiera de los posibles escenarios.

En estas condiciones, los individuos de esta economía ven limitada su fuente de aprendizaje a la propia experiencia. No obstante, de manera ocasional, estos agentes tienen la opción de intercambiar información con otros agentes de su mismo tipo; y esta posibilidad es controlada en el modelo por la denominada *probabilidad de imitación*.

En consecuencia, la inclusión de este parámetro en el modelo cuenta con un doble interés:

- Por un lado, esta nueva variable permite analizar cómo afecta la incorporación del factor imitación como **canal adicional de aprendizaje** en modelos de juegos dinámicos recursivos. Esta aplicación fue analizada en el trabajo de Başçi (1999). En el mencionado trabajo señaló la existencia de una relación positiva entre el valor de la probabilidad de convergencia y la convergencia social hacia el equilibrio de Nash-Markov.
- Pero además, la probabilidad de imitación enriquece el modelo al considerar un eje adicional para regular el grado de **apertura de la información** existente en la economía. Si bien, hasta un cierto límite. Es claro que una probabilidad de imitación nula nos da el escenario equivalente a una economía en la que los individuos no se comunican entre sí más que como resultado de la interacción que tiene lugar en la ronda de comercio. Su información sobre el entorno se limita a lo que observan (experiencia). Sin embargo, fijar la probabilidad de imitación en su máximo valor no nos ofrece un escenario de información completamente pública. Este parámetro abre una vía para el intercambio de información para agentes del mismo tipo, y en

consecuencia, solo regula el nivel de privacidad de la información entre agentes de un mismo tipo; el intercambio de información no se produce en todas las direcciones.

En lo que resta de sección, nos centraremos en medir el efecto que tiene la **probabilidad de imitación** en la economía desde la perspectiva planteada en este segundo punto, poniendo el foco en el equilibrio especulativo y en sus propiedades cualitativas en relación con el equilibrio fundamental. No obstante, también se aprovechará para señalar algunos aspectos relevantes relacionados con el efecto del factor imitación en el aprendizaje de los agentes, en este mismo contexto de estudiar la convergencia al equilibrio especulativo.¹¹

De manera adicional, se dedicará un apartado al final de la sección a estudiar la **monetariedad** de cada tipo de bien en el equilibrio especulativo. Para ello, se ofrece caracterización del comportamiento de variables como, la *velocidad*, o la *aceptabilidad*.

Distancia entre la convergencia del ratio de aprendizaje y el ratio de confianza

En la figura 3.6 se muestra la brecha de tiempo que existe entre las convergencias del ratio de aprendizaje y el ratio de confianza al equilibrio especulativo, para aquellas ejecuciones en las que la convergencia ha tenido lugar. Es decir, en esta figura se representa la diferencia de tiempo medido en (*steps*) que surge entre la convergencia del ratio de aprendizaje y la convergencia del ratio de confianza, para este equilibrio.

Se representa la distribución de esta variable en diagrama de violín para facilitar la visualización de propiedades estadísticas interesantes como son la media, la moda o la varianza. En el gráfico, se representa una sucesión de diagramas de violín, uno para cada probabilidad de imitación estudiada. Para la construcción de cada uno de estos diagramas se ha considerado, de las cien ejecuciones realizadas, aquellas en las que tanto el ratio de aprendizaje, como el ratio de confianza, converge a la unidad¹².

Intuitivamente, esta indicador pretende capturar el tiempo que transcurre entre que los agentes de tipo 1 aprenden a aceptar el bien de tipo 3 como medio de cambio, y el tiempo que estos tardan en darse cuenta de que, una vez con el bien 3 en su inventario, lo óptimo es conservarlo hasta poder intercambiar este bien por su bien de consumo. Es decir, muestra cuánto tiempo sucede entre que se descubre la estrategia especulativa y esta se consolida; o dicho de otra forma, entre que los agentes tipo 1 **aprenden** a incorporar

¹¹Para un mayor detalle acerca de las conclusiones relativas al primer punto, sobre el efecto de la imitación en el aprendizaje de los agentes, consultar Başı (1999).

¹²Este criterio de convergencia es configurado mediante el nivel de tolerancia, que se ha fijado en 0.5. De esta forma, en una ejecución para una probabilidad de imitación determinada, si se detecta que uno de los dos ratios toma un valor unitario, primero se comprueba que, en al menos un 50% de los *steps* restantes este ratio se mantiene en uno, y si esto se confirma, se toma este valor como *step* en el que el ratio converge. Se realiza lo mismo con el otro ratio. Si se encuentra un *step* que cumpla este criterio en ambos casos, entonces se calcula la diferencia y se incorpora este dato en la distribución. En otro caso, se busca el siguiente *step* en el que el ratio que no haya cumplido el criterio valga otra vez uno, y se realiza la misma comprobación hasta encontrar un valor en el que el criterio del 50% se cumpla. Si esta situación no se da, entonces no se considera la ejecución.

esta estrategia y entre que estos **confían** en que mantenerla (conservar el bien tipo 3 hasta lograr un intercambio por su bien de consumo) es la mejor decisión.

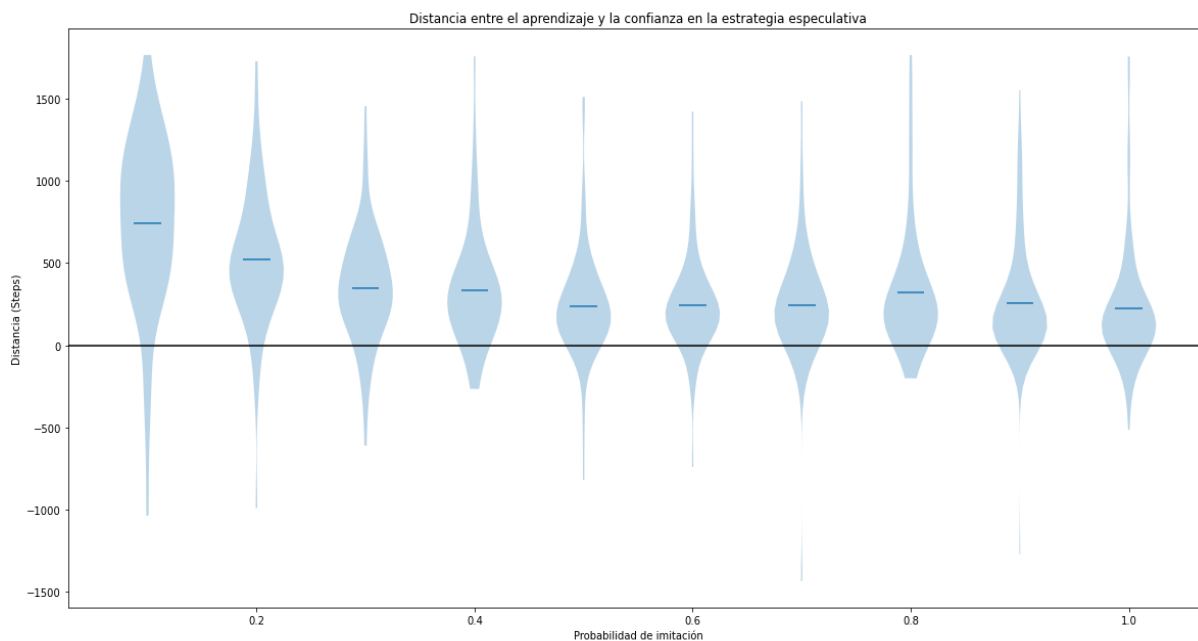


Figura 3.6: Distancia temporal entre la convergencia al equilibrio especulativo del ratio de aprendizaje y la convergencia del ratio de confianza, medida en *steps*, y en función de la probabilidad de imitación.

Lo primero que se extrae de observar la figura 3.6 es la relación negativa existente, en media, entre distancia temporal y la probabilidad de imitación. Este resultado es coherente con lo concluido en Başı (1999) sobre el impacto de la probabilidad de imitación en el aprendizaje. Además, es razonable y cabe esperar que, en general, cuanto mayor sea la comunicación entre los agentes, mejor será la calidad de su aprendizaje y, por tanto, mayor rapidez y eficacia.

Luego, en relación a lo razonado en la anterior subsección sobre el papel de los ratios de aprendizaje y confianza en el aprendizaje de la estrategia especulativa, se muestra cómo el tiempo que transcurre, entre que uno converge a la unidad y el otro le sigue, se va reduciendo, progresivamente, a medida que los intercambios de información entre los agentes tipo 1 se vuelven más frecuentes. Esta reducción alcanza su punto de *saturación* en torno a los 250 *steps*. En consecuencia, esta distancia temporal entre la convergencia de ambos ratios permanece prácticamente inalterada para incrementos en la probabilidad de imitación superiores a 0,3.

Otra observación destacable, a nivel global, está relacionada con la reducción de los extremos de los diagramas, a medida que aumenta la probabilidad de imitación. La densidad, progresivamente, se va concentrando en torno a la media. Esto denota que, efectivamente,

con valores de la probabilidad de imitación superiores a 0,3, va adquiriendo sentido hablar de un comportamiento medio en este indicador. Pues la distancia temporal entre la convergencia de ambos ratios, además de reducirse, se va homogeneizando con el número de ejecuciones; y esto se hace más evidente, en general, a mayor probabilidad de imitación.

Más específico, y más interesante, es apreciar la progresiva desaparición del extremo inferior de los diagramas con el aumento de la probabilidad. Este comportamiento denota que este aprendizaje de los agentes tipo 1 a especular tiene lugar en el orden lógico: primero aprenden a intercambiar su bien de producción por bien tipo 3, y luego aprender a conservar este cambio, mostrándose así consistentes con los incentivos *especulativos* que les guiaban a tomar la decisión anterior.

Es preciso observar también que, relativamente, la mejora más evidente en el aprendizaje de este comportamiento especulativo tiene lugar en el incremento de la probabilidad de imitación en el que esta asciende de 0,1 a 0,2. En esta transición, la media y la moda se reducen bastante, y las ejecuciones individuales ganan precisión. El cambio a 0,3 también produce mejoras sustanciales en este sentido. Sin embargo, a partir de este punto, no puede extraerse conclusiones sobre la relación entre el aumento de la probabilidad de imitación y la calidad del aprendizaje.

La velocidad de convergencia

Para finalizar los resultados relacionados con el impacto de la probabilidad de imitación, o el nivel de *apertura de la información*, se presentan unos gráficos en los que se recoge una última forma de abordar el estudio de la relación existente entre el componente social del aprendizaje y la rapidez en que este se alcanza en la economía. Como se ha venido haciendo hasta este punto, se conserva el foco en estudiar las condiciones de este aprendizaje en un escenario de convergencia al equilibrio especulativo.

En las figuras 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 se muestra la proporción de ratios de aprendizaje y confianza que han convergido al equilibrio especulativo¹³. El análisis conjunto de las cuatro proporciona una imagen completa de cómo la rigidez con la que el criterio de convergencia es definido afecta a la extracción de conclusiones sobre el impacto de la probabilidad de imitación en el aprendizaje de la estrategia especulativa.

Para cada una de las gráficas presentadas, se ha considerado una ventana, que define el marco en el que se va a abordar el estudio de la convergencia al equilibrio especulativo. Las figuras se presentan en orden decreciente según la amplitud de esta ventana. De este modo, las cuatro figuras muestran, para cada probabilidad, la proporción de ejecuciones en las que cada ratio convergió en después de tener lugar las primeras 1000, 1500, 1900, y 1990 iteraciones, respectivamente. Esto es, para ventanas de 1000, 500, 100 y 10 *steps*, de manera respectiva. A través de la definición de este valor, se regula la exigencia en el criterio de convergencia.

¹³Estas gráficas se han conseguido ajustando una curva a los 11 valores obtenidos de esta proporción, uno por cada conjunto de 100 valores ejecutados para cada probabilidad de imitación considerada.

En las cuatro figuras se hace patente la relación positiva entre la probabilidad de imitación y la posibilidad de converger al equilibrio especulativo. En todas ellas, las gráficas lucen una forma cóncava y con una clara asíntota horizontal en 0,8. Es decir, se tiene que aumenta la proporción de éxito en la consecución del equilibrio especulativo a medida que crece la probabilidad de imitación. Sin embargo, la tasa de crecimiento se va reduciendo progresivamente, hasta volverse prácticamente cero para valores altos de esta probabilidad de imitación.

En la figura 3.7 se hace especialmente evidente el comportamiento del éxito en el aprendizaje de la estrategia especulativa como función creciente de la probabilidad de imitación. En el resto, sin embargo, resulta más llamativo el punto de inflexión que ambas curvas alcanzan para valores de la probabilidad de imitación en torno a 0.1. A partir de este valor, aproximadamente, el impacto de incrementos en la probabilidad de imitación en el éxito del modelo en alcanzar el equilibrio especulativo es prácticamente despreciable.

Una última observación interesante en relación a estas figuras, es el paralelismo en el comportamiento de los dos ratios representados. Esto transmite nítidamente la idea de que, para que se consolide el comportamiento especulativo, es necesario que se de la convergencia de ambos ratios, simultáneamente. Por eso es que el crecimiento de las dos gráficas es prácticamente idéntico. Adicionalmente, cabe observar cómo la proporción de ratios de confianza que converge siempre se encuentra superiormente acotada por la proporción de ratios de aprendizaje que converge. Es decir, nuevamente la idea de que lo lógico es que, primero, los agentes descubran el papel del bien 3 como medio de cambio, y luego consoliden este comportamiento, recogiendo los dos matices que caracterizarían un comportamiento especulativo en estas condiciones.

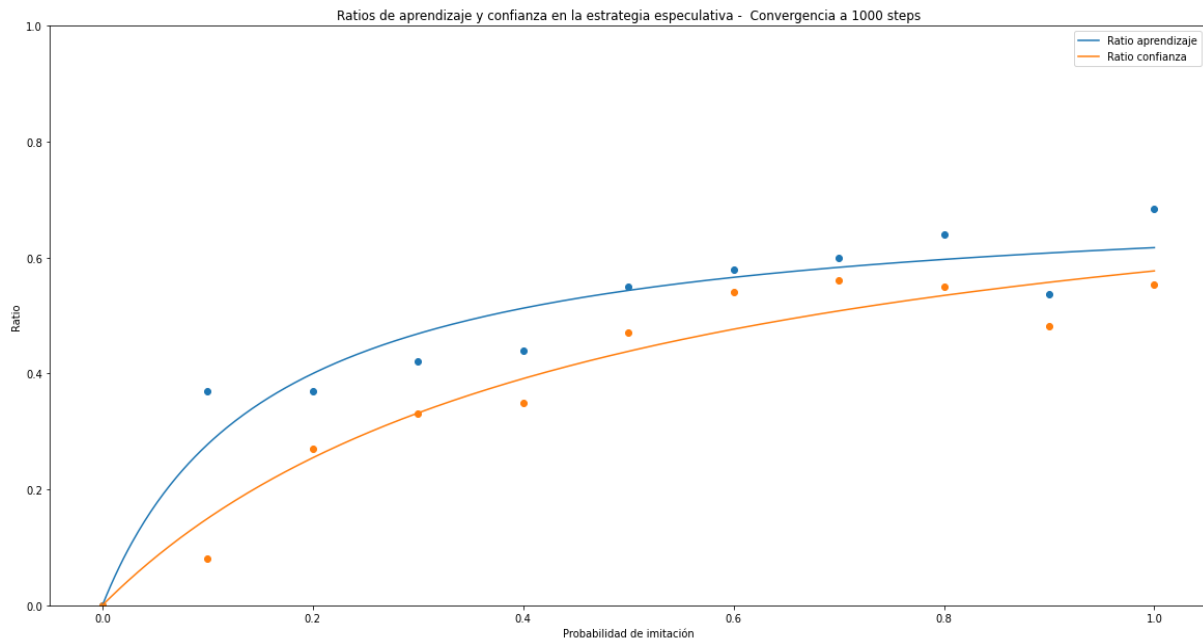


Figura 3.7: Proporción de ratios de aprendizaje y confianza que han convergido a la unidad en los últimos 1000 *steps*

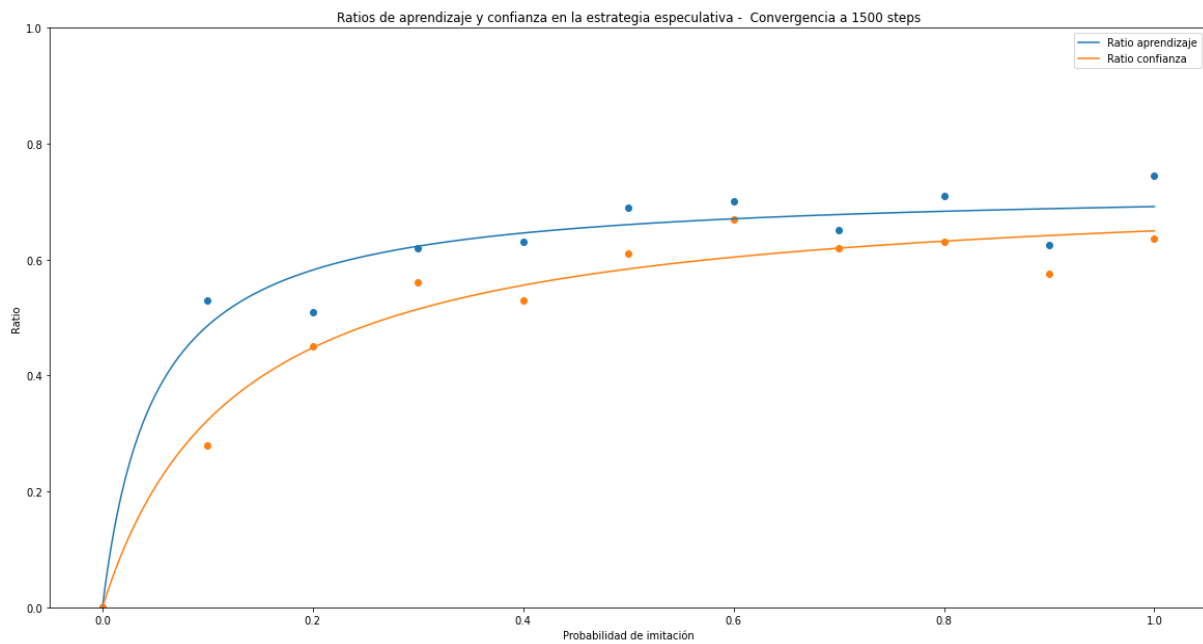


Figura 3.8: Proporción de ratios de aprendizaje y confianza que han convergido a la unidad en los últimos 500 *steps*

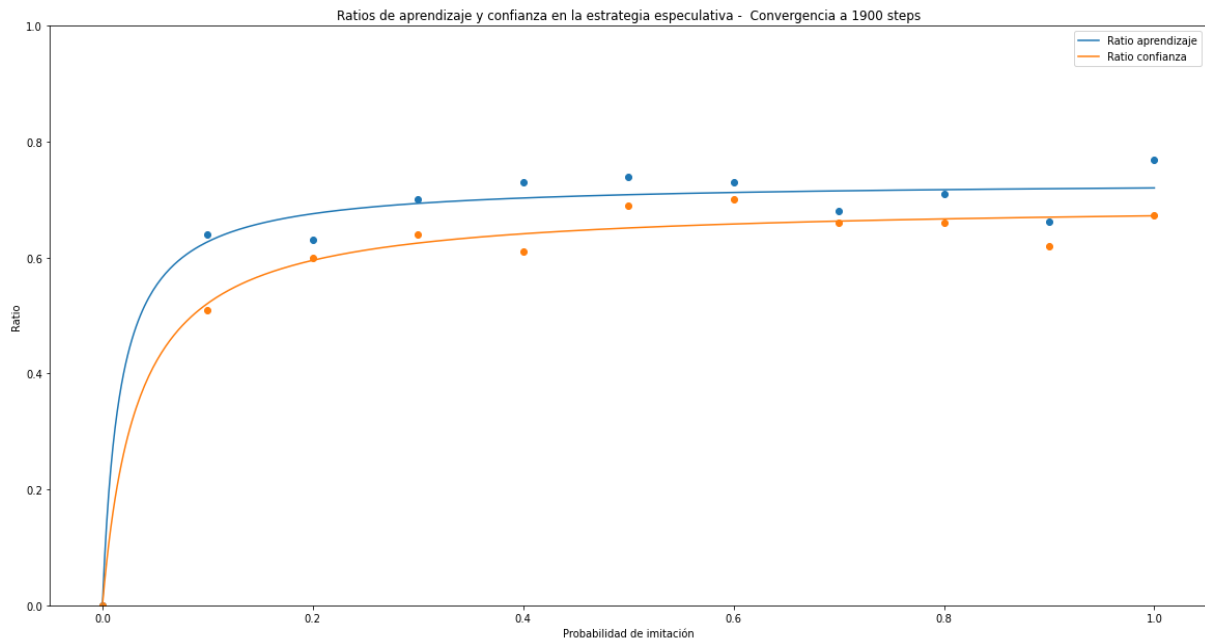


Figura 3.9: Proporción de ratios de aprendizaje y confianza que han convergido a la unidad en los últimos 100 *steps*

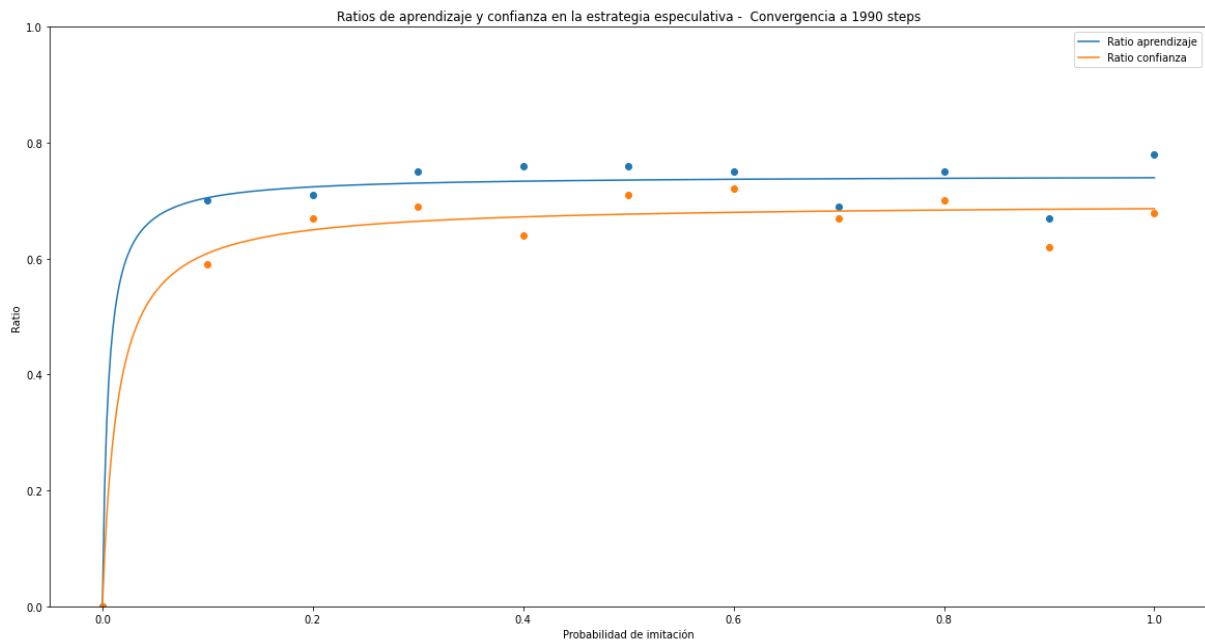


Figura 3.10: Proporción de ratios de aprendizaje y confianza que han convergido a la unidad en los últimos 10 *steps*

Propiedades de los bienes en el equilibrio especulativo

En último lugar, con el fin de conectar el modelo basado en agentes hasta ahora discutido, con el modelo original de Kiyotaki y Wright¹⁴, y también a modo de curiosidad, se presentan una serie de figuras en las cuales se recoge:

1. La evolución en distribución media de los bienes en la economía para aquellas ejecuciones en las que se ha convergido al equilibrio especulativo.
2. La evolución del número de transacciones en las que se ve implicado cada bien en estas ejecuciones.
3. La evolución de un par de indicadores típicos de la *monetariedad* de cada bien, también para aquellas ejecuciones en las que se ha alcanzado el mencionado equilibrio: la **velocidad** y la **aceptabilidad**.

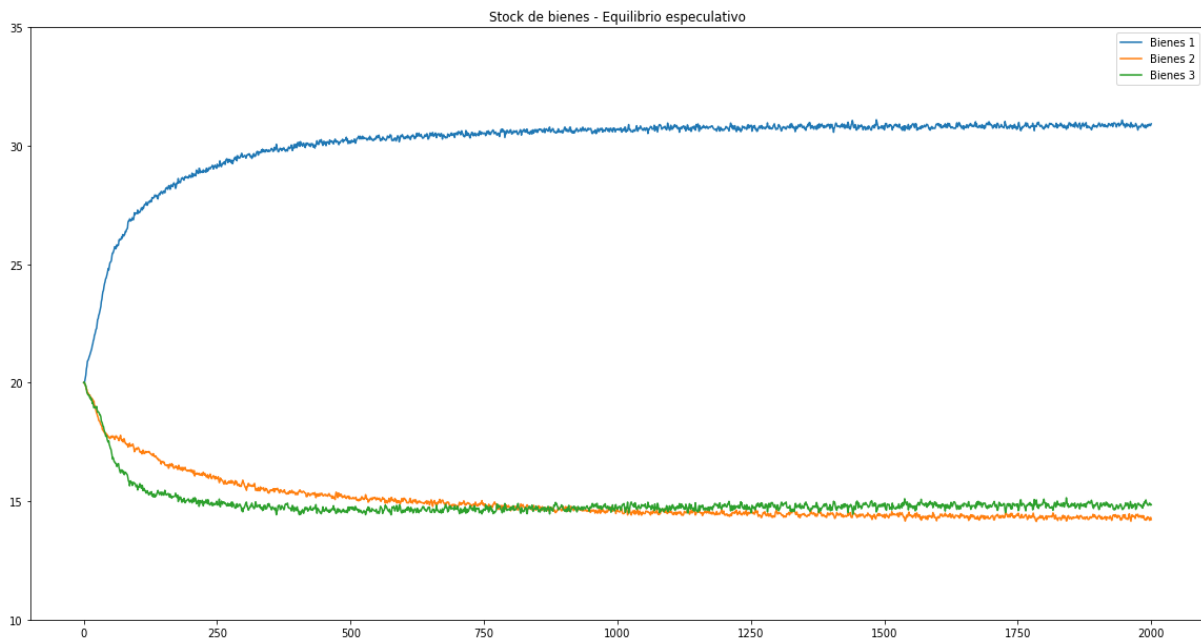


Figura 3.11: Evolución de la distribución media de los bienes en un escenario de equilibrio especulativo

¹⁴En su célebre publicación, *On Money as a Medium of Exchange* (1989), estos economistas dedicaron espacio a mostrar los resultados sobre el comportamiento de la *aceptabilidad*, *velocidad* y *liquidez* de diversos activos de la economía

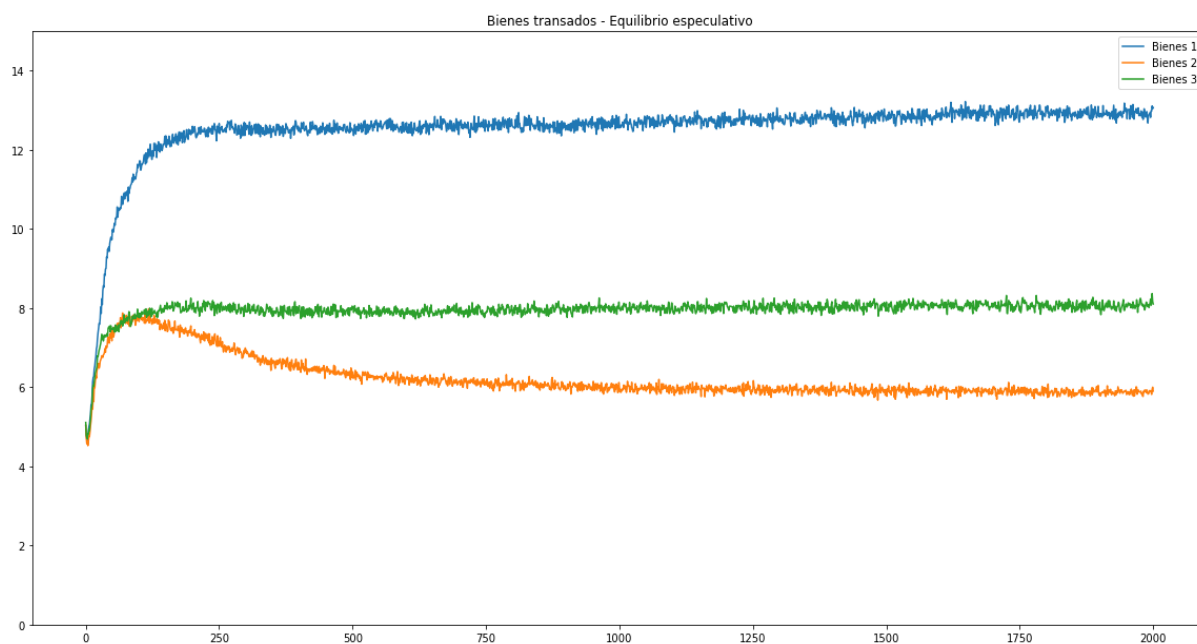


Figura 3.12: Evolución del número medio de transacciones de cada tipo de bien en un escenario de equilibrio especulativo

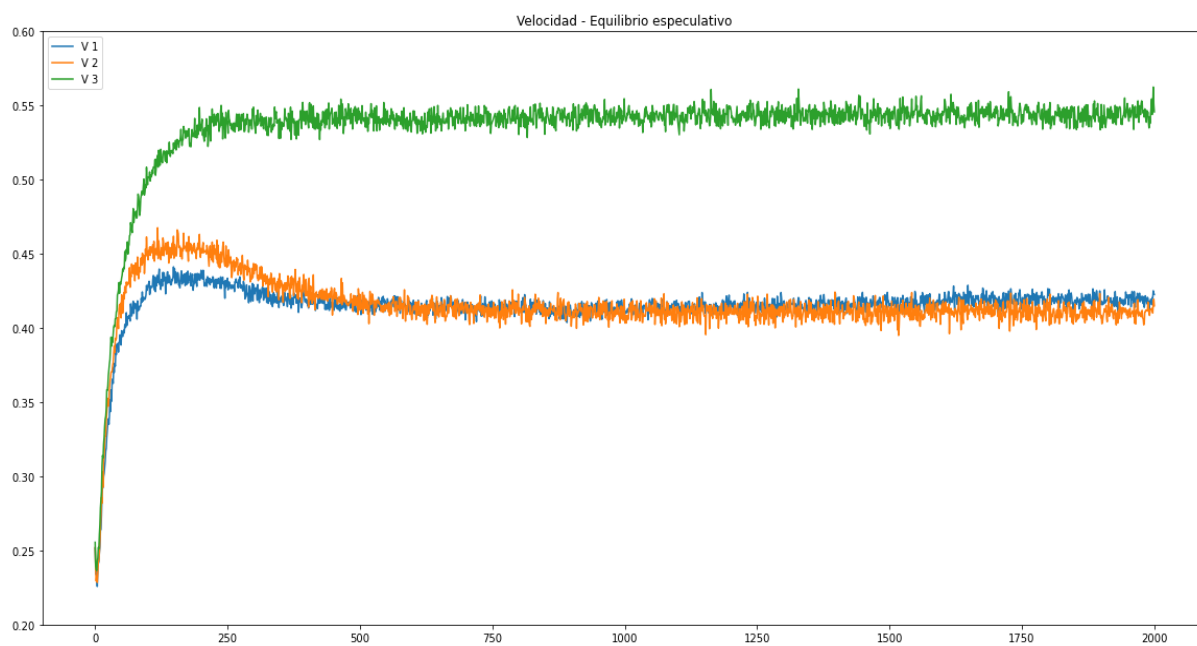


Figura 3.13: Evolución de la *velocidad* media de transacción de los bienes en un escenario de equilibrio especulativo

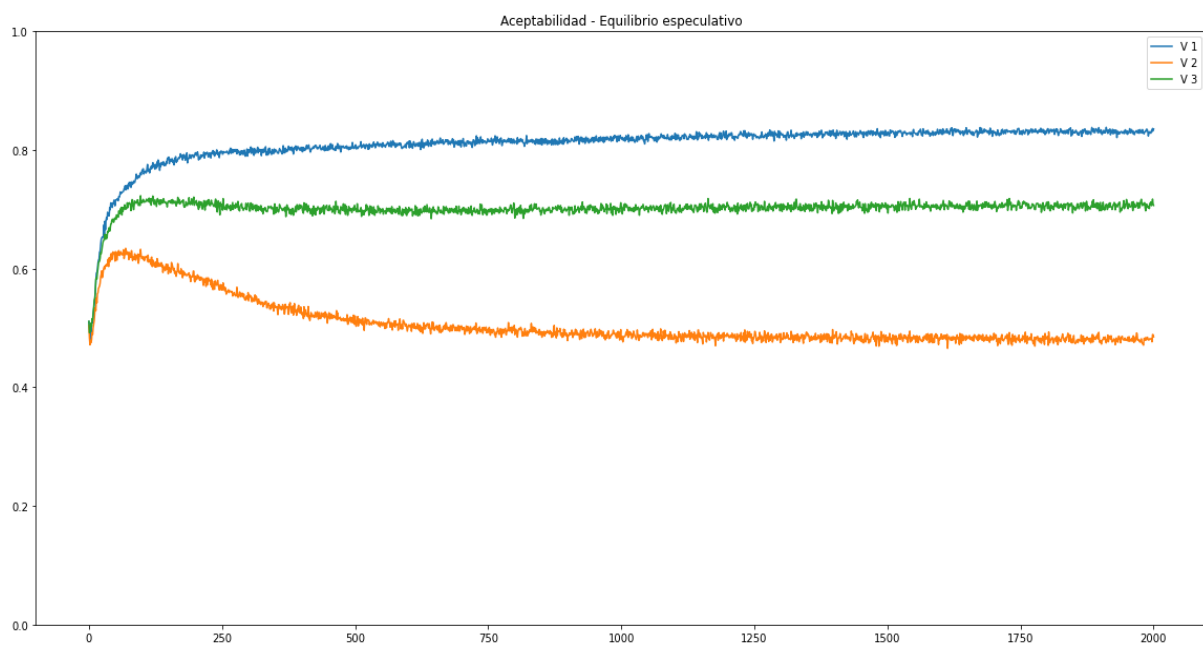


Figura 3.14: Evolución de la *aceptabilidad* media de los bienes en un escenario de equilibrio especulativo

Observaciones y comentarios finales

En el presente trabajo se ha detallado la implementación de una versión del modelo de Kiyotaki-Wright basado en agentes. Se ha aprovechado para incorporar el *aprendizaje social*, en la línea de Başçi (1999). Se aprovecha este capítulo para incluir algunas observaciones adicionales.

Conviene comentar, en primer lugar, sobre los principales resultados extraídos de las simulaciones numéricas realizadas. En este punto, se destaca el relativamente alto nivel de exactitud que alcanza el modelo implementado. En la sección 4 del capítulo anterior, se había visto que, para ejecuciones que superasen las 1900 iteraciones, fijando el valor de la probabilidad de imitación en torno a 0,1, se esperaba un porcentaje de éxito cercano al 70 %. Este nivel de precisión podía llegar a mejorarse hasta alcanzar el 80 %. Sin embargo, alcanzado ese nivel, no se esperaban mejores valores ante aumentos en la probabilidad de imitación. Esta idea resulta bastante coherente: no es realista esperar un éxito en el aprendizaje del 100 %. Sin embargo, sí es cierto que, a mayor exposición al intercambio de información (escuela, actividades, etc.), mayor velocidad se espera en el aprendizaje, hasta cierto punto.

También cabe mencionar sobre la alineación de los resultados propuestos con la caracterización de los equilibrios que se detalla en el modelo teórico: se ha logrado mostrar resultados con un nivel de heterogeneidad suficiente que ilustre la idea de la alternancia de estos los dos equilibrios, fundamental y especulativo, en la economía¹.

Adicionalmente, es interesante dedicar también unas líneas a subrayar cuestiones importantes relacionadas con la teoría del modelo, para evitar perder la conexión entre el concepto económico y los aspectos más descriptivos de los resultados. En esta línea, es preciso observar cómo la existencia de la estrategia especulativa ofrece una vía para **completar el mercado**².

¹Como se vio en la última sección del capítulo anterior, cada modalidad de equilibrio viene caracterizada por un comportamiento concreto de los indicadores escogidos.

²Una de las conclusiones que se extraía del capítulo 2, ya introducía esta idea (véase la observación 2.3).

En el *equilibrio fundamental*, no existe relación comercial entre los agentes de tipo 1 y los agentes de tipo 3; y en consecuencia, la única forma que tienen los agentes de tipo 3 de adquirir su bien de consumo es a través de los agentes de tipo 2. En el equilibrio especulativo, sin embargo, los agentes de tipo 1 tienen incentivos para intercambiar su bien de producción por el bien de tipo 3; lo que da lugar al surgimiento de la relación comercial entre estos agentes de tipo 1 y los agentes de tipo 3. Asimismo, tal y como muestra el diagrama del equilibrio fundamental (véase 2.1), el único bien que se emplea con motivo de **medio de cambio**, o como bien intermedio, es el bien de tipo 1 (por los agentes de tipo 2). La importancia del papel de esta función en la economía resulta evidente, pues de otro modo, los agentes de tipo 1 presentarían dificultades para consumir en el equilibrio fundamental.

En el *equilibrio especulativo*, por su parte, el bien 3 también comienza a ser empleado con este motivo (por los agentes tipo 1). Ahora, los agentes de tipo 2 pueden intercambiar su bien de producción con agentes de tipo 1, además de con los de tipo 3. De este modo, una observación inmediata es que en el equilibrio especulativo, cuando un agente de tipo 1 es emparejado con uno de tipo 2, el agente de tipo 2 siempre estará interesado en comerciar³.

En esta línea, también en relación con la parte más teórica del modelo, es interesante observar que, si bien es claro que, en el origen de la economía la información de los agentes es *incompleta*, a medida que transcurren los periodos, como consecuencia del aprendizaje, estos van **completando su información**. Esta idea, se concreta en el algoritmo mediante la evolución de la fuerza los clasificadores, que luciría una forma cóncava si se representase como función del tiempo transcurrido⁴.

Por otro lado, en relación a la versión del modelo de Kiyotaki-Wright implementada, conviene aclarar que, en contraste con otros trabajos similares, como el mencionado de Başı (1999), en este se ha dotado a los agentes de un mayor grado de libertad en cuanto a la decisión de consumo. Todos los agentes tienen presente la opción de consumir cualquiera de los 3 bienes que circulan en la economía, sean o no su bien de consumo. Esto, es evidente, supone un mayor desafío para los agentes en su proceso de aprendizaje, pues estos tienen que, primero, descubrir cuál es su bien de consumo, para poder luego aprender esta acción y consolidarla en el tiempo.⁵

Para concluir, se realiza un último comentario relacionado con el modelo de Kiyotaki-

³Pues cualquiera de los tipos de bien que este tipo de agente maneja (bienes tipo 1 y 3) son preferidos por los agentes tipo 1 a su bien de producción (véase cuadro 2.5).

⁴Si se dibujase la fuerza de un clasificador que se ha conseguido entrenar correctamente, se observaría una forma nítidamente cóncava; sugiriendo que, a mayor número de iteraciones, más se acerca la fuerza de cada clasificador a su valor límite (velocidad de convergencia decreciente). De este modo, la fuerza de cada clasificador convergerá a un valor límite determinado, que será mayor o menor en función de lo beneficiosa que resulte esa acción en concreto para ese tipo de agente.

⁵El motivo de incorporar este grado de libertad adicional se encuentra en el interés en crear una versión lo más flexible posible, que ofreciese la opción de poder simular la mayor variedad de posibilidades. Se quería aprovechar, el potencial de la modelización basada en agentes, y la versatilidad del lenguaje empleado para la implementación, para poder así, extraer la mayor variedad de resultados económicos.

Wright que se ha implementado. La formalización del proceso en el que los agentes reciben los estímulos del entorno se ha realizado de la manera más sencilla posible⁶. En concreto, esta simplificación determina una situación en la que no hay herencia de las decisiones malas sobre el capital, pues no se ha definido el concepto de *riqueza* como tal en el modelo. Los agentes comienzan todos los periodos de la misma manera y sus oportunidades de aprender son ilimitadas. Esta observación es interesante de acuerdo a dos líneas:

1. Por un lado, apoya la iniciativa del presente trabajo de incorporar el *ratio de confianza* como indicador complementario al *ratio de aprendizaje* para estudiar el calado de la estrategia especulativa en los agentes de tipo 1. Pues, en este contexto de ausencia de herencia de las decisiones malas sobre el capital, con todavía mayor motivo, la decisión de los agentes tipo 1 de mantener la estrategia especulativa (esto es, conservar el bien tipo 3) no debería verse afectada por el número de periodos que este tarde en conseguir su bien de consumo⁷.
2. Por el otro, abre la puerta a considerar una posible **extensión del modelo**, en la que los agentes tuviesen definido un atributo *riqueza*, que registrase de manera numérica el éxito/fracaso de las decisiones que van tomando en cada periodo.

⁶Nótese que la fuerza de los clasificadores indica orden únicamente *dentro* la distribución de decisiones de cada agente, pero no determina orden *entre* agentes; como, por ejemplo, sí que haría la definición de un atributo de *riqueza*.

⁷Es decir, independientemente de lo “tentado” que pueda llegar a estar el agente, este no debería ceder ante una oferta de su bien de producción a cambio del bien tipo 3; o dicho de otro modo, los agentes tipo 1 deberían confiar en el éxito de la estrategia especulativa una vez aprenden a aceptar el bien 3 como medio de intercambio.

Bibliografía

- [1] Başçi, E. (1999): *Learning by imitation*. Journal of Economic Dynamics & Control, 23:1569-1585.
- [2] Kiyotaki, N. and Wright, R. (1989): *On Money as a Medium of Exchange*. The Journal of Political Economy, 97:927-954.