MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

CURSO 2019-2020

PROPUESTA DIDÁCTICA DE APLICACIONES DE LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO EN LA ASIGNATURA "MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS" (3º ESO)

DIDACTICAL PROPOSAL OF APPLICATIONS OF THE MOVEMENTS IN THE PLANE IN THE COURSE "MATHEMATICS ORIENTED TO THE ACADEMIC TEACHINGS" (3º E.S.O.)

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS
APELLIDOS Y NOMBRE: SOFÍA DÍEZ ANTÓN
DNI: 47413312 - P
CONVOCATORIA: JUNIO
TUTOR/A: MARTA FOLGUEIRA LÓPEZ
Unidad Departamental de Astronomía y Geodesia.
Facultad de Ciencias Matemáticas

V.º B.º DEL TUTOR/A PARA PRESENTAR EL TFM A DEFENSA

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
AUTORIZACIÓN DE PRESENTACIÓN DE TRABAJOS FIN DE MÁSTER

CURSO: 2019 - 2020

TRABAJO:

Apellidos y nombre del autor/a: Sofía Díez Antón.

Título del trabajo: Propuesta didáctica de aplicaciones de los movimientos en el plano en la asignatura "MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS" (3º ESO)

Título en inglés: Didactical proposal of applications of the movements in the plar in the course "MATHEMATICS ORIENTED TO THE ACADEMIC TEACHINGS

Especialidad cursada: Matemáticas.

Convocatoria: ☑ Junio ☐ Septiembre ☐ Febrero.

TUTOR/A

Apellidos y nombre: Marta Folgueira López.

E-mail: martafl@mat.ucm.es Teléfono: ______.

Facultad: Ciencias Matemáticas.

Departamento: UD. Astronomía y Geodesia.

VISTO BUENO

Porcentaje de coincidencia del trabajo con trabajos anteriores (utilizando el programa UNICHECK): 10,15%

Observaciones ______

El trabajo indicado reúne las condiciones necesarias para proceder a su presentación ante la Comisión Evaluadora.

En Madrid a 6 de junio de 2020

Firmado por FOLGUEIRA LOPEZ MARTA - DNI 51383066P el día 06/06/2020 con un certificado emitido por AC Administración Pública

Firma del tutor/a y sello del Departamento,

La autorización original firmada y sellada por el tutor/a se incluirá en la segunda página del documento de TFM

ÍNDICE

RESUMEN

En el presente trabajo se construye una propuesta didáctica de aplicaciones referente a la unidad de movimientos en el plano de la asignatura “matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas” de tercero de ESO.

El marco teórico utilizado es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), mediante la cual se quiere relacionar la geometría plana y la resolución de problemas con aspectos cotidianos a los alumnos, como pueden ser la pintura o la escultura, y con otras asignaturas como historia o educación plástica y visual, por los mosaicos y el arte plasmado en ejercicios.

Para ello, se comienza con el análisis de las unidades didácticas correspondientes de cuatro libros de matemáticas de distintas editoriales para poder ser comparados entre sí y estudiar sus diferencias y similitudes. Se presta especial atención a cómo se presentan los contenidos teóricos y qué motivación inicial se ofrece al comienzo de la unidad. A continuación, se analiza la parte de aplicaciones y problemas, en especial los relacionados con el arte, y se realiza una comparativa con ayuda de tablas y gráficos.

Una vez realizada la valoración de los textos escolares, se presenta la propuesta didáctica que, dada la experiencia vivida con alumnos en las prácticas del presente máster, puede ser un buen complemento a sus necesidades matemáticas. Se adjuntan también las respuestas a test y las pruebas realizadas en el aula con el objetivo de argumentar el trabajo y los resultados.

Finalmente, algunas conclusiones obtenidas como resultado del estudio desarrollado.

PALABRAS CLAVE: mosaico, movimientos en el plano, simetría, Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD).

ABSTRACT

In the present work a didactic proposal of applications is constructed referring to the unit of movements in the plane of the subject "mathematics oriented to the academic teachings" of third of ESO.

The theoretical framework used is the Anthropological Theory of Didactics (TAD), through which we want to relate flat geometry and problem solving with everyday aspects of students, such as painting or sculpture, and with other subjects such as history or plastic and visual education, through mosaics and art in exercises.

To do this, we start with the analysis of the corresponding teaching units of four mathematics books from different publishers in order to be able to compare them with

each other and study their differences and similarities. Special attention is given to how the theoretical contents are presented and what initial motivation is offered at the beginning of the unit. Then, the part of applications and problems, especially those related to art, are analyzed and a comparison is made with the help of tables and graphs.

Once the assessment of the school texts has been carried out, the didactic proposal is presented which, given the experience lived with students in the practices of this master's degree, can be a good complement to their mathematical needs. Also attached are the answers to tests and the tests taken in the classroom with the aim of arguing the work and the results.

Finally, some conclusions obtained as a result of the study carried out.

KEYWORDS: mosaic, movements in the plane rotations, symmetry, Anthropological Theory of the Didactic (ATD).

1. JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El presente Trabajo Fin de Máster busca motivar al alumnado respecto a los movimientos en el plano con la aplicación práctica de los conocimientos dados en el aula. En particular en este trabajo, a través de diferentes materiales tanto manipulativos como digitales, se pretende que el bloque temático de geometría plana no quede excesivamente abstracto y de esta forma, los alumnos lleguen a su completa comprensión y logrando así una mayor visión espacial de los movimientos.

La elección de la unidad de movimientos en el plano de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º de la ESO se debe a la novedad de estos conceptos en su trayectoria escolar y por la sencillez que poseen en cuanto a comprensión.

Además, esta unidad se presta a cantidad de aplicaciones prácticas y se pueden llevar a cabo trabajos manipulativos, ejercicios teóricos en papel, ejercicios con programas interactivos como Geogebra o Socrative... siendo apropiados muchos recursos. Se trata de un tema que no han visto hasta ahora, al menos en el centro escolar, por lo que no tienen ideas preconcebidas. No obstante, se hace necesario introducirlo de manera que se vea un sentido a lo que están aprendiendo, y que finalmente se pueda relacionar con conceptos de arquitectura, arte y otras disciplinas.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El trabajo se desarrollará en el marco teórico de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), enunciada por Chevallard, Bosch y Gascón (1997). Esta teoría se considera el nuevo paradigma de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y proporciona las herramientas necesarias para analizar las tareas, técnicas y tecnologías que sirven para facilitar el estudio de la teoría por parte de los alumnos. Según este paradigma, el conocimiento se le presenta al alumno como un monumento: es el "paradigma de la visita a los monumentos", donde el estudiante debe admirar y disfrutar, pero que tiende a dotar de poco sentido a "las obras visitadas" (Baeza Alba y Sordo Juanena, 2016).

El modelo presentado por la TAD está formado por dos niveles: praxis (parte práctica) y logos (parte teórica). Estos dos niveles conforman lo que se conoce como praxeología u organización matemática (OM). Son herramientas fundamentales para la modelización de cualquier actividad matemática y son necesarias para dar respuesta a una cuestión determinada. La praxis, el "saber hacer", se compone de las tareas (T) y las técnicas (τ). Por su parte, el logos, el "saber", se compone de las tecnologías (Θ) y las teorías (θ). La praxeología u organización matemática (OM) presenta el siguiente esquema:

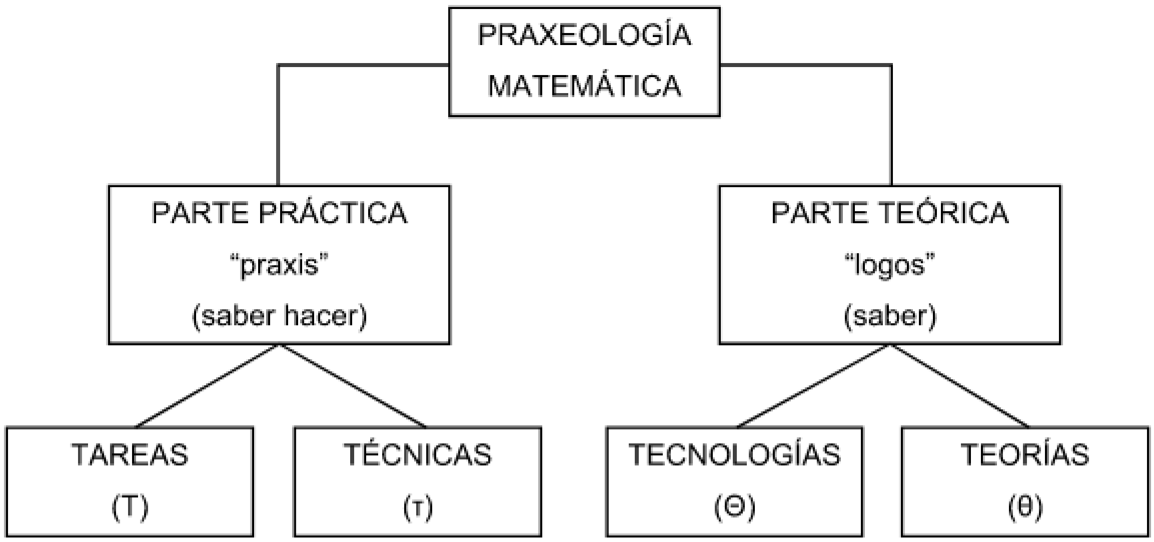


Figura 1: Imagen del esquema de la praxeología matemática según la TAD. Fuente: Chevallard, Bosch y Gascón, 1997.

Los elementos que componen la organización matemática son:

• Tareas (T): cuestiones a tratar o los problemas a resolver. Se trata de acciones sobre un objeto particular.

• Técnicas (τ): métodos y procedimientos para la realización de las tareas. Puede existir una técnica común para un mismo tipo de tareas.

• Tecnologías (Θ): explicaciones que dan validez a las técnicas y las justifican. Las tecnologías modifican y justifican las técnicas e, incluso, crean nuevas.

• Teorías (θ): definiciones, proposiciones, teoremas, lemas, corolarios y propiedades que componen el saber matemático. Las teorías justifican las tecnologías.

Por tanto, las teorías interpretan y justifican las tecnologías, que, a su vez, justifican las técnicas y, por último, las técnicas resuelven las tareas.

Chevallard (1999) afirma que durante este proceso de estudio deben aparecer distintos momentos o dimensiones de la actividad matemática. Estos momentos no corresponden a una secuencia temporal, sino que se refieren a la dimensión de la actividad realizada y pueden repetirse o incluso aparecer de forma simultánea. La única condición es que cada uno de los momentos surja al menos una vez mientras se realiza la actividad. Estos momentos son los siguientes:

- Momento del primer encuentro: Es la primera toma de contacto de los alumnos con un tipo de tareas de la organización matemática que el profesor quiere enseñar.

- Momento exploratorio: Está formado por dos etapas: la primera es en la que los alumnos buscan y elaboran las técnicas para la resolución de las tareas, y la segunda es en la que los alumnos deben ser capaces de aplicar las técnicas encontradas a problemas similares.

- Momento del trabajo de la técnica: Es el momento en el que los alumnos trabajan las técnicas de forma rutinaria para dominarlas. Así, pueden reproducirlas, relacionarlas con otras técnicas ya conocidas y elaborar otras nuevas.

- Momento tecnológico-teórico: Es necesario justificar y explicar las técnicas una vez elaboradas. Los alumnos deben razonar la validez de las técnicas al enfrentarse a las tareas.

- Momento de la institucionalización: Es el momento en el que se otorga carácter oficial a todo lo que se ha ido elaborando durante el proceso de aprendizaje, integrando o excluyendo distintos elementos que deben formar parte de la organización matemática o no.

- Momento de evaluación: Al final del proceso de trabajo y construcción, es necesario evaluar la calidad de los componentes de la organización matemática (tareas, técnicas y tecnologías) y determinar si todos los resultados están bien definidos. Es el momento de reflexionar sobre todo lo aprendido durante el proceso.

También es necesario comprobar la calidad de la organización matemática (OM). Para ello, Fonseca (2004) presentó unos indicadores de completitud, que son los siguientes:

1. Los tipos de tareas que componen la organización matemática están relacionados entre ellos y existen tareas relativas al cuestionamiento tecnológico dentro de la propia organización matemática.

2. Se dispone de diferentes técnicas para cada tipo de tarea y es posible discernir criterios para elegir entre ellas.

3. Los ostensivos (palabras, explicaciones, escrituras, notaciones, etc.) que conforman la "materia prima" de los elementos de la organización matemática son suficientemente ricos y variados como para permitir diferentes representaciones de la actividad matemática.

4. Existencia de tareas y técnicas "inversas" en relación a los tipos de tareas inicialmente considerados (o "más estándares").

5. Posibilidad de interpretar el funcionamiento de las técnicas y su resultado en términos de los elementos tecnológico-teóricos de la organización matemática.

6. Carácter poco estereotipado de los tipos de tareas de la organización matemática y existencia de tareas matemáticas "abiertas".

7. Necesidad de construir nuevas técnicas capaces de ampliar los tipos de tareas inicialmente considerados.

3. OBJETIVOS

Los objetivos que se pretenden alcanzar en el presente Trabajo Fin de Máster se enumeran a continuación:

1. Lograr motivar a los estudiantes en el campo de las matemáticas. Las matemáticas son la base de asignaturas que están estudiando en el mismo momento con lo que conlleva un beneficio a corto y largo plazo para ellos.
2. Afianzar los conceptos de simetría, rotaciones y traslaciones y hacer entender los nuevos conceptos en la geometría del plano a través de aplicaciones teóricas y prácticas.
3. Ampliar la visión espacial y las estrategias de resolución de problemas de los alumnos, tanto en la asignatura de matemáticas como en tecnología, física y química.
4. Realizar un análisis de distintos libros de texto acerca de su enfoque de la unidad didáctica de movimientos en el plano. Para ello, se han analizado los enunciados y problemas propuestos, así como la presentación de las teorías que sostienen el resto de los elementos que forman la organización matemática.
5. Proponer actividades y problemas prácticos que resulten atractivos a los alumnos. Para ello, se potencia el uso de las TIC en el aula, así como ejercicios manipulativos en pequeños grupos.

4. METODOLOGÍA

La propuesta se enmarca en 3º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, normalmente desarrollado en el segundo trimestre.

4.1. MARCO LEGAL

Se analiza a continuación el Real Decreto 1105/2014 y el Decreto 48/2015 de la Comunidad de Madrid, dentro del currículo de la asignatura "Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas" de 3º de la ESO. Se establecen criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para la unidad de movimientos en el plano.

En el Decreto 48/2015, en la página 108 se encuentran los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para 3º ESO, en concreto:

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas
1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.
3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.
4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.
10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.
11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

Según el Boletín oficial del estado Núm. 3 sábado 3 de enero de 2015 Sec. I. pág. 391, en el apartado de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 3º ESO, en concreto en el Bloque de Geometría, se puede leer:

Los contenidos: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio.
Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Los criterios de evaluación:

1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.
2. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas.
4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Estándares de aprendizaje evaluables:

4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

4.2. SECUENCIACIÓN DE LOS CONTENIDOS

La secuenciación de los contenidos comentados se realiza de la siguiente manera:

1. Los contenidos se imparten siguiendo el libro de texto SM (Alcaide, Hernández, Serrano, Moreno y Pérez, 2015), que es el habitualmente utilizado en el Centro de Prácticas (Colegio Doroteo Hernández, en Coslada). Las actividades propuestas se realizan en el momento en que los conceptos teóricos necesarios hayan sido introducidos.
2. En cada sesión se explica un epígrafe del libro citado y a continuación se complementa con ejemplos. El profesor guía a los alumnos en la resolución de los problemas, comenzando por ejemplos en la pizarra y después facilitando el trabajo individual en el cuaderno.
3. Se realizaron, además, diversas actividades extras relativas a mosaicos de elaboración propia.
4. El número de sesiones es diez pero el tiempo que se debe dedicar a cada uno de los contenidos es orientativo, en función del seguimiento de los alumnos y la situación en el aula de cada sesión.

5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Siguiendo la Teoría Antropológica de lo didáctico (Baeza Alba y Sordo Juanena, 2016) se analiza a continuación la organización matemática. Para ello, se compara cómo ésta es abordada por cuatro textos diferentes, de las editoriales SM (Alcaide, Hernández, Serrano, Moreno y Pérez, 2015), Anaya (Colera Jiménez y Gaztelu Albero, 2015), Oxford (Quero Grande, 2016), y Edelvives (Ocaña Fernández, Romero Torralba y Mejía Sánchez-Bermejo, 2015). Para la unidad didáctica que se trata en el presente TFM, el centro escolar utiliza mayoritariamente la editorial SM.

En primer lugar, se presta atención a la parte teórica, especialmente en cómo se presentan las teorías. Después, en la parte práctica, se estudia cómo se distribuyen las actividades propuestas en cada uno de los textos analizados. Por último, se realiza una valoración general que recoge las ideas principales.

5.1 ANÁLISIS: PARTE TEÓRICA

La siguiente tabla muestra el análisis comparativo de distintos libros de texto de las editoriales SM, Anaya, Oxford y Edelvives respecto a la organización de los bloques teóricos dentro de la unidad didáctica. Por tanto, se analiza el logos, las tecnologías y teorías de las praxeologías matemáticas (Baeza Alba y Sordo Juanena, 2016).

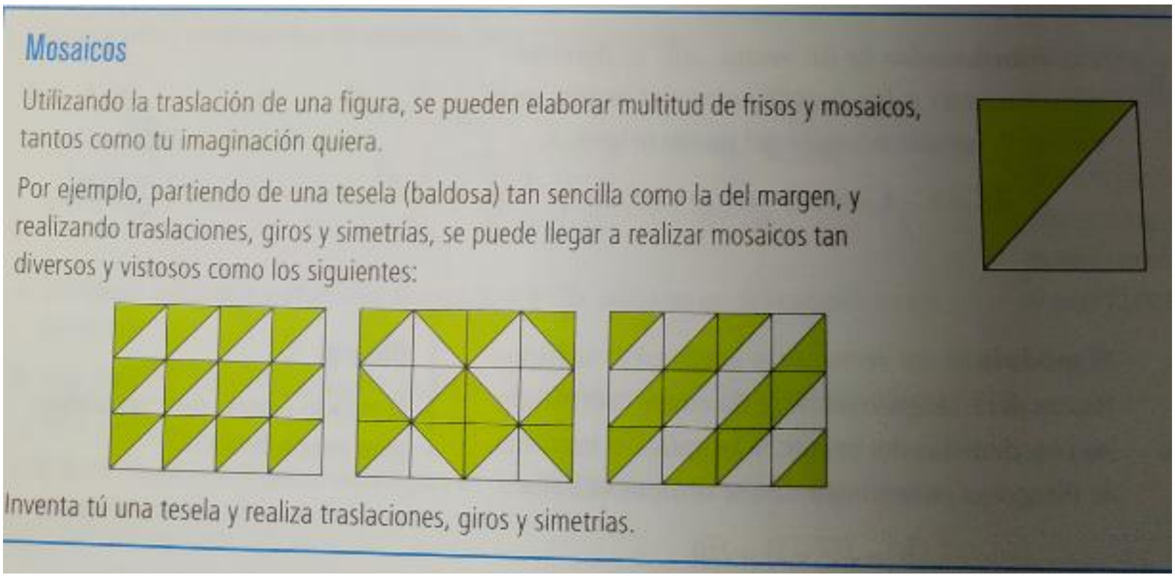
	SM	ANAYA	OXFORD	EDELVIVES
Introducción a la unidad	SI	SI	NO	NO
Noción de transformación geométrica	NO	SI	NO	SI
Introduce los vectores	SI	SI	NO	SI
Producto de dos giros.	SI	SI	NO	SI
Producto de simetrías	SI	SI	NO	SI
Eje y centro de simetría de figuras planas	SI	SI	SI	NO
Movimientos inversos	SI	SI	NO	SI
Resumen de la unidad	SI	NO	NO	NO
Referencia al arte	SI	SI	NO	SI

Tabla 1: Análisis de la parte teórica de los textos.

A partir de la Tabla 1 se puede extraer lo siguiente:

- Para empezar, se puede ver una analogía entre SM y Anaya. Ambos textos comparten la misma estructura de prácticamente todos los apartados teóricos. Se podría considerar el más completo el texto de Anaya, y a partir de él destacar que ligeramente difiere en dos apartados de la tabla con SM y Edelvives.

- Los contenidos de “Eje y centro de simetría de figuras planas” son lo único que el texto de la editorial Oxford comparte en cuanto a contenido teórico con el resto de las editoriales.
- Los cuatro textos tratan las traslaciones, los giros y las dos simetrías, excepto Anaya, que solo trata la simetría axial. Además, todos incluyen una autoevaluación para que la realice el alumno y vea por sí mismo su grado de comprensión, ya que disponen de las soluciones al final del libro y pueden comprobar sus progresos sin ayuda directa del profesor.
- En cuanto a las diferencias, es notable que el texto que más difiere de los demás es Oxford. Escasamente comparte apartados con las demás editoriales, además de quedarse corto en cuanto a teoría por no nombrar el producto de giros, producto de simetrías o movimientos inversos.
- Se observa también que algunos libros explican aparte la noción de vector y otros no, como Oxford, siendo el único que no introduce los vectores. En Edelvives y Oxford apenas se nombran dentro de la noción de traslación.
- De igual forma, la noción de transformación geométrica no es común en los libros, apareciendo solo en Anaya y Edelvives.
- En el libro de Edelvives no aparecen actividades, ni siquiera teóricas, hasta el final del temario, lo que puede causar desconcierto a los alumnos por no saber cómo se aplican las nociones que acaban de estudiar. Puede ser incómodo durante el desarrrollo de una clase el tener que acudir al final de la unidad cada vez que se quiera practicar lo explicado en la sección del tema, así como transformarse en una distracción al estudiante y hacer perder la concentración.
- El texto SM es el único que recoge en un resumen todos los contenidos de la unidad. Es una gran ayuda para que el estudiante aclare ideas y las estructure de un vistazo. Sería importante que todas las editoriales lo tuvieran.
- En general, se ha observado que mientras SM y Anaya tienen un alto nivel de exigencia, Oxford se centra más en la representación gráfica. Se podría considerar más bien, en esta unidad, como un cuaderno extra o una complementación a lo visto en clase.
- Por último, hay que destacar las diferencias respecto a la referencia al arte. El texto de Anaya dedica un apartado entero, en el que trata los mosaicos, cenefas y rosetones con varios ejemplos de cada uno y ejercicios específicos. Distingue, por ejemplo, entre mosaicos regulares y semirregulares según si están formados por polígonos regulares e ilustra con imágenes reales rosetones, frisos y cenefas. Es más completo que el resto de los libros, pues Oxford evita completamente referenciar nada, y SM solo trata el arte en ejercicios. En Edelvives solo aparece lo siguiente en cuanto a teoría de mosaicos (ver Figura 2).



Mosaicos

Utilizando la traslación de una figura, se pueden elaborar multitud de frisos y mosaicos, tantos como tu imaginación quiera.

Por ejemplo, partiendo de una tesela (baldosa) tan sencilla como la del margen, y realizando traslaciones, giros y simetrías, se puede llegar a realizar mosaicos tan diversos y vistosos como los siguientes:

Inventa tú una tesela y realiza traslaciones, giros y simetrías.

Figura 2: Imagen de la teoría de mosaicos en el texto de Edelvives. Nótese que utilizan la baldosa cuadrada bicolor y sus combinaciones, tan trabajada en este trabajo por las posibilidades que ofrece.

5.2 ANÁLISIS: PARTE PRÁCTICA

Se busca estudiar la praxis de las organizaciones matemáticas (Baeza Alba y Sordo Juanena, 2016), es decir, las técnicas y tareas justificadas por las tecnologías vistas en el anterior apartado. En la Tabla 2 se muestra una comparativa numérica de la tipología de ejercicios de cada editorial analizada:

	SM	ANAYA	OXFORD	EDELVIVES
Resueltos	10	6	0	5
De resolución gráfica	46	30	12	45
De aplicación	12	2	5	10
Teóricos	10	12	0	10
Total	78	50	17	70

Tabla 2: Análisis de la parte práctica de los textos.

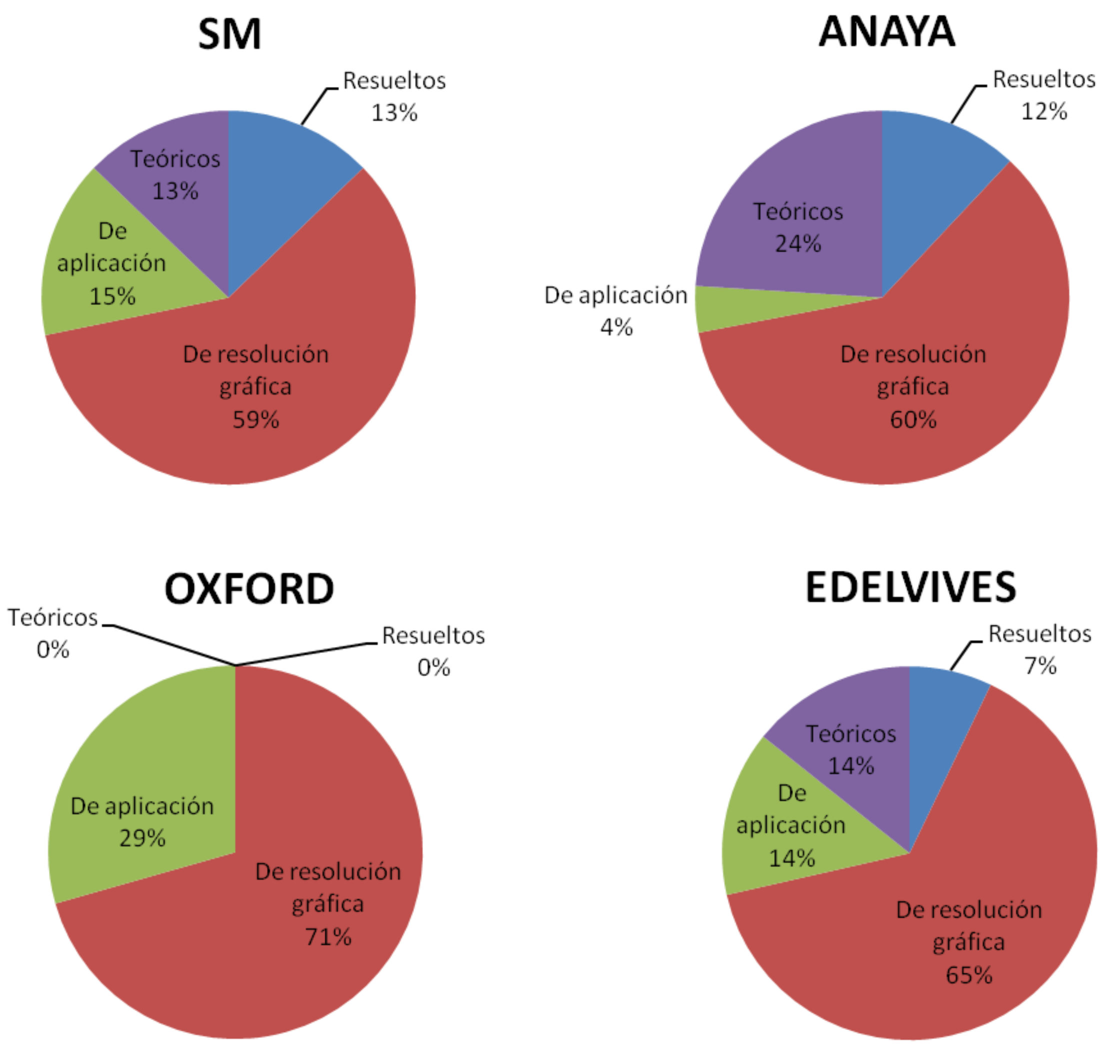
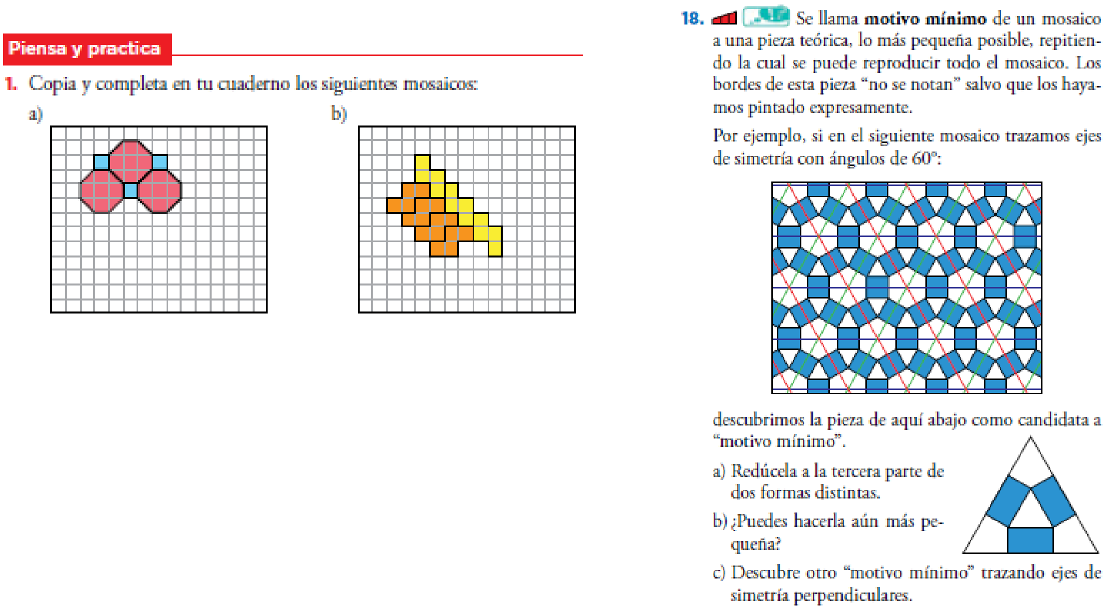


Figura 3: Comparativa de ejercicios en los textos analizados.

Las comparativas de la Tabla 2 y Figura 3 muestran lo siguiente:

- Se observa nuevamente la analogía entre Anaya y SM. La cantidad de ejercicios de cada tipo es muy similar, insistiendo ambos en la resolución gráfica, tan importante en esta unidad. También son parecidos en cuanto a dificultad de resolución. Edelvives es muy semejante a SM en cuanto a número de ejercicios, pero el nivel es inferior.
- Se podría considerar que todos los ejercicios pertenecen al momento exploratorio (Baeza Alba y Sordo Juanena, 2016), puesto que corresponden a la tarea en la que el aprendiz busca técnicas para resolver la tarea encomendada, y debe ser capaz de usar las técnicas encontradas para problemas similares.
- En cuanto a las desigualdades entre los textos, de nuevo destaca Oxford frente a los demás. Se observa la escasez de ejercicios resueltos en los que el alumno pueda tener un ejemplo sin necesitar al profesor. En la unidad de esta editorial se puede encontrar un único ejemplo, sólo sobre el cálculo de vectores a partir de dos puntos. Tampoco aparece la tipología de ejercicio teórico, lo que sería una buena herramienta para potenciar el pensamiento racional de los estudiantes.
- Oxford acerca las proporciones entre ejercicios de aplicación y de resolución gráfica, teniendo 5 y 12, frente a 2 y 30 de Anaya, o 10 y 45 de Edelvives, cuya proporción es menor que 1 frente a 4. Además, es el único que no incluye actividades al final de la unidad que puedan complementar y ampliar las de cada bloque. Solo ejercicios de autoevaluación.
- Por último, se quiere destacar las referencias al arte. Como se dijo en la parte teórica ya estudiada, el libro de Anaya dedica más contenido. Contiene una sección entera dedicada al arte: cenefas, frisos y rosetones. Incluye tres ejercicios resueltos mientras que la editorial SM solamente incluye uno. El resto de las editoriales apenas incluyen un detalle. De nuevo, es notable la diferencia entre unas editoriales y otras, y la forma de poder enfocar esta unidad didáctica a través de los textos.
- En los ejercicios del final del tema, en cuanto a mosaicos y arte, aparecen de dos tipos: se da un mosaico y el alumno debe identificar cómo ha sido construido, o por el contrario se le proporciona la pieza y debe construir el mosaico. En Anaya se pueden encontrar ambos tipos (ver Figura 4). En SM, sin embargo, solo aparecen dos, y ambos de la tipología de identificar el movimiento en los mosaicos. En el libro de Edelvives se encuentra solo los ejemplos mostrados en la Figura 5.



Piensa y practica

1. Copia y completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:

a)

b)

18. Se llama **motivo mínimo** de un mosaico a una pieza teórica, lo más pequeña posible, repitiendo la cual se puede reproducir todo el mosaico. Los bordes de esta pieza "no se notan" salvo que los hayamos pintado expresamente.

Por ejemplo, si en el siguiente mosaico trazamos ejes de simetría con ángulos de 60°:

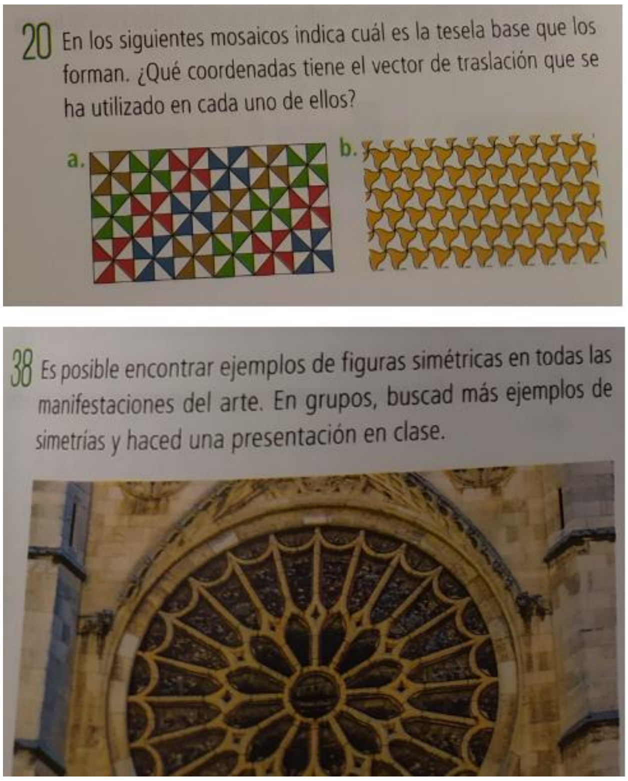
descubrimos la pieza de aquí abajo como candidata a "motivo mínimo".

a) Redúcela a la tercera parte de dos formas distintas.

b) ¿Puedes hacerla aún más pequeña?

c) Descubre otro "motivo mínimo" trazando ejes de simetría perpendiculares.

Figura 4: Imagen de ejemplos de ejercicios de mosaicos en la editorial Anaya.



20 En los siguientes mosaicos indica cuál es la tesela base que los forman. ¿Qué coordenadas tiene el vector de traslación que se ha utilizado en cada uno de ellos?

a. b.

38 Es posible encontrar ejemplos de figuras simétricas en todas las manifestaciones del arte. En grupos, buscad más ejemplos de simetrías y haced una presentación en clase.

Figura 5: Imagen de ejemplos de ejercicios de arte en la editorial Edelvives.

5.3 VALORACIÓN GENERAL

En general, se observa que las TIC aparecen de forma insuficiente. Se promueve su uso en casa más que en el aula. Esto puede ser debido a que existe la limitación del tiempo para impartir cada unidad y se deja como trabajo individual extraescolar. Por tanto, es común que los estudiantes tengan dificultades en la visión espacial, lo que se solucionaría impartiendo una clase con cualquier programa como, por ejemplo, Geogebra.

En SM se hace mucho hincapié en que se puede practicar en medios digitales y la editorial incluye programas prediseñados para ello. De igual forma ocurre en Anaya, donde se hace referencia a la web asociada al libro en las diferentes secciones del tema.
El problema principal sería que en clase se trabajan los contenidos mínimos y el alumno generalmente evita leer los márgenes del libro donde aparecen las imágenes mostradas anteriormente. Como encuadre teórico y artístico, solamente Anaya nos habla de la Alhambra, Escher, el arte árabe, nazarí, y la geometría intrínseca en el arte.

Sin duda, después de haber estudiado concienzudamente los cuatro libros, Anaya es el que más aplicaciones incluye, así como un buen nivel de conceptos teóricos, en un entorno coloreado y ameno para el estudiante. Además, se presta a muchas más actividades extras, da pie a seguir ejercicios en la línea de incluir el arte, ya sea pintura, escultura, teselado de suelos, etcétera.

Respecto al grado de completitud de las organizaciones matemáticas estudiadas se podrían considerar que poseen los siguientes según la clasificación dada en la fundamentación teórica de este trabajo:

1. Los tipos de tareas que componen la organización matemática están relacionados entre ellos y existen tareas relativas al cuestionamiento tecnológico dentro de la propia organización matemática.

4. Existencia de tareas y técnicas “inversas” en relación a los tipos de tareas inicialmente considerados (o “más estándares”).

5. Posibilidad de interpretar el funcionamiento de las técnicas y su resultado en términos de los elementos tecnológico-teóricos de la organización matemática.

7. Necesidad de construir nuevas técnicas capaces de ampliar los tipos de tareas inicialmente considerados.

6. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Tras la investigación realizada en la organización matemática, y el análisis de cómo abordan los cuatro textos tanto el bloque teórico como el bloque práctico, se debe comprobar los resultados en el alumnado. En el aula se utiliza la editorial SM (Alcaide, Hernández, Serrano, Moreno y Pérez, 2015) por ser el libro con el que se trabaja en el Centro educativo Doroteo Hernández. Se va a valorar el resultado de la aplicación con alumnos reales y se analiza su acogida.

Para empezar esta sección se muestran las actividades realizadas en el apartado de aportación, relacionándolas con el marco teórico de la TAD, en concreto ***la teoría de momentos de Chevallard*** (1999). A continuación, se propone una adaptación de esta unidad didáctica a la docencia online, con el apoyo de herramientas dinámicas como Geogebra. Para terminar, se discuten las limitaciones del presente estudio y se proponen líneas de investigación futuras.

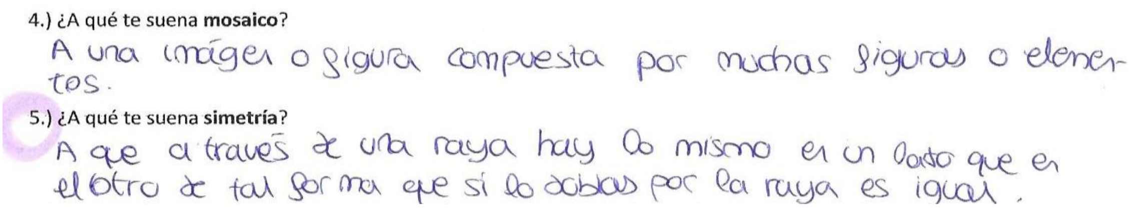
6.1 APORTACIÓN

Como ampliación a la unidad se utilizaron diferentes recursos además del aprendizaje teórico mediante el libro de la editorial SM, que se incluyen a continuación.

1. Al iniciar la unidad didáctica se pudo comprobar su nivel previo a la unidad a través de la realización de un test (consultar Anexo 2). Con ello, pudieron intuir de qué trata lo que se iba a estudiar próximamente, así como realizar una introspección para poder conocer sus nociones a priori.

   Esta actividad se encuadra en el ***momento de primer encuentro*** puesto que es una situación en la que el aprendiz tiene un primer contacto con un tipo de tarea que forma parte de una determinada praxeología matemática.

   Los resultados fueron satisfactorios, pues tenían buena intuición de los conceptos y además una visión muy acertada como se puede comprobar en la Figura 5. Además, se ve que relaciona simetría con la noción de doblar, doblar figuras, papiroflexia, plástica.

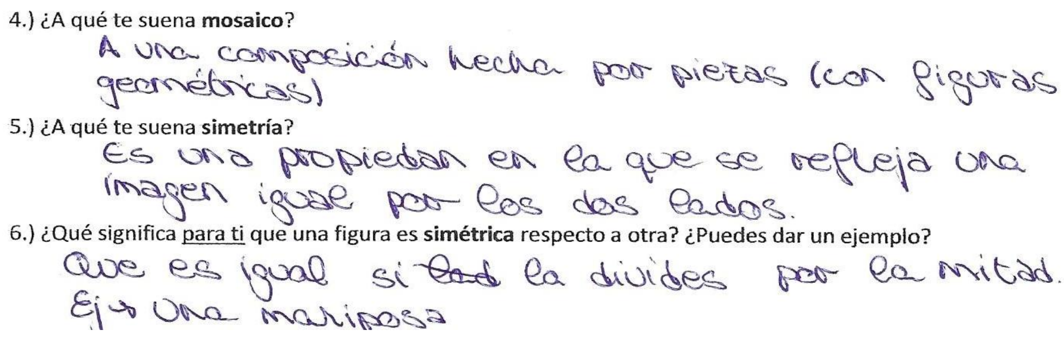

4.) ¿A qué te suena **mosaico**?

A una imágen o figura compuesta por muchas figuras o elementos.

5.) ¿A qué te suena **simetría**?

A que a través de una raya hay lo mismo en un lado que en el otro de tal forma que si lo doblas por la raya es igual.

Figura 6. Imagen de una de las respuestas a test previo a la unidad.


4.) ¿A qué te suena **mosaico**?

A una composición hecha por pietas (con figuras geométricas)

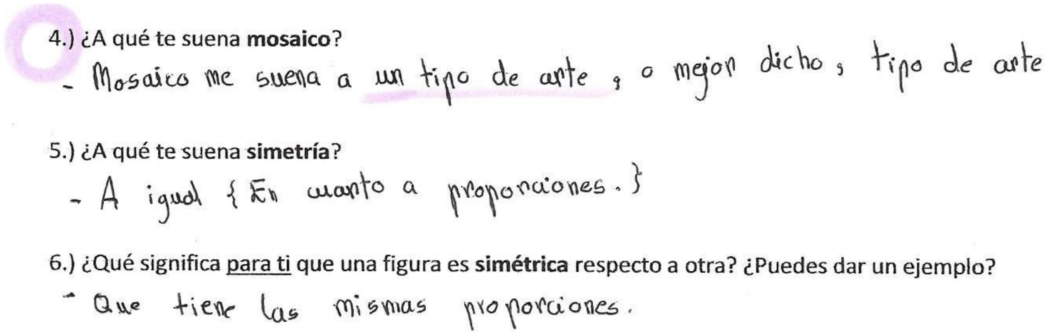
5.) ¿A qué te suena **simetría**?

Es una propiedad en la que se refleja una imagen igual por los dos lados.

6.) ¿Qué significa para ti que una figura es **simétrica** respecto a otra? ¿Puedes dar un ejemplo?

Que es igual si ~~lad~~ la divides por la mitad. Ej → Una mariposa

Figura 7. Imagen de una de las respuestas a test previo a la unidad.


4.) ¿A qué te suena **mosaico**?
- Mosaico me suena a un tipo de arte, o mejor dicho, tipo de arte

5.) ¿A qué te suena **simetría**?
- A igual {En cuanto a proporciones.}

6.) ¿Qué significa para ti que una figura es **simétrica** respecto a otra? ¿Puedes dar un ejemplo?
- Que tiene las mismas proporciones.

Figura 8. Imagen de una de las respuestas a test previo a la unidad.

En las Figuras 7 y 8, parece la noción de arte sin haber dado aún esta unidad didáctica y el estudiante habla de “proporciones” y arte. Por lo tanto, se podría relacionar esta unidad perfectamente con la escultura.

2. El segundo día de clase se puso un vídeo de divulgación sobre mosaicos y el arte (Sáenz de Cabezón, 2015). En él se explican los conceptos de simetría, traslación, mosaico, grupo cristalográfico. También se muestra variedad de mosaicos hechos con trasparencia para demostrar los giros y traslaciones. Y por último se muestra también el arte de La Alhambra. Así se pudo complementar las carencias artísticas del libro de texto de una forma amena.

3. A mediados de la unidad se introdujo trabajo manipulativo en el aula. Esta actividad se encuadra como ***momento exploratorio***. En una primera etapa el aprendiz busca técnicas para resolver la tarea encomendada (se le da unas baldosas y debe decidir qué hacer con ellas) mientras que en la segunda etapa debe ser capaz de usar las técnicas encontradas, es decir, construir un verdadero mosaico que tenga sentido. Se realizaba por parejas y consistía en construir un mosaico con la baldosa cuadrada de dos colores que vemos a continuación en las Figuras 9 y 10.

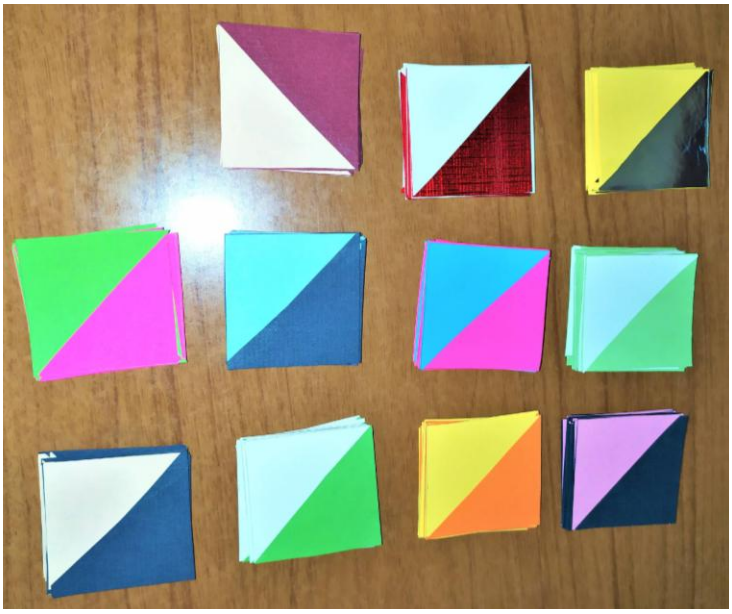


Figura 9. Imagen de un detalle de las baldosas construidas.

En relación con la Figura 9, se considera este tipo de baldosa cuadrada bicolor lleva intrínseca la intención de recordar a las preguntas finales del test previo a la unidad que se les puso el primer día. También se puede observar que se presta a diferentes combinaciones fáciles que dan resultados muy dispares con apenas movimientos.

La Figura 10 muestra las diferentes construcciones que los estudiantes realizaron con las baldosas.

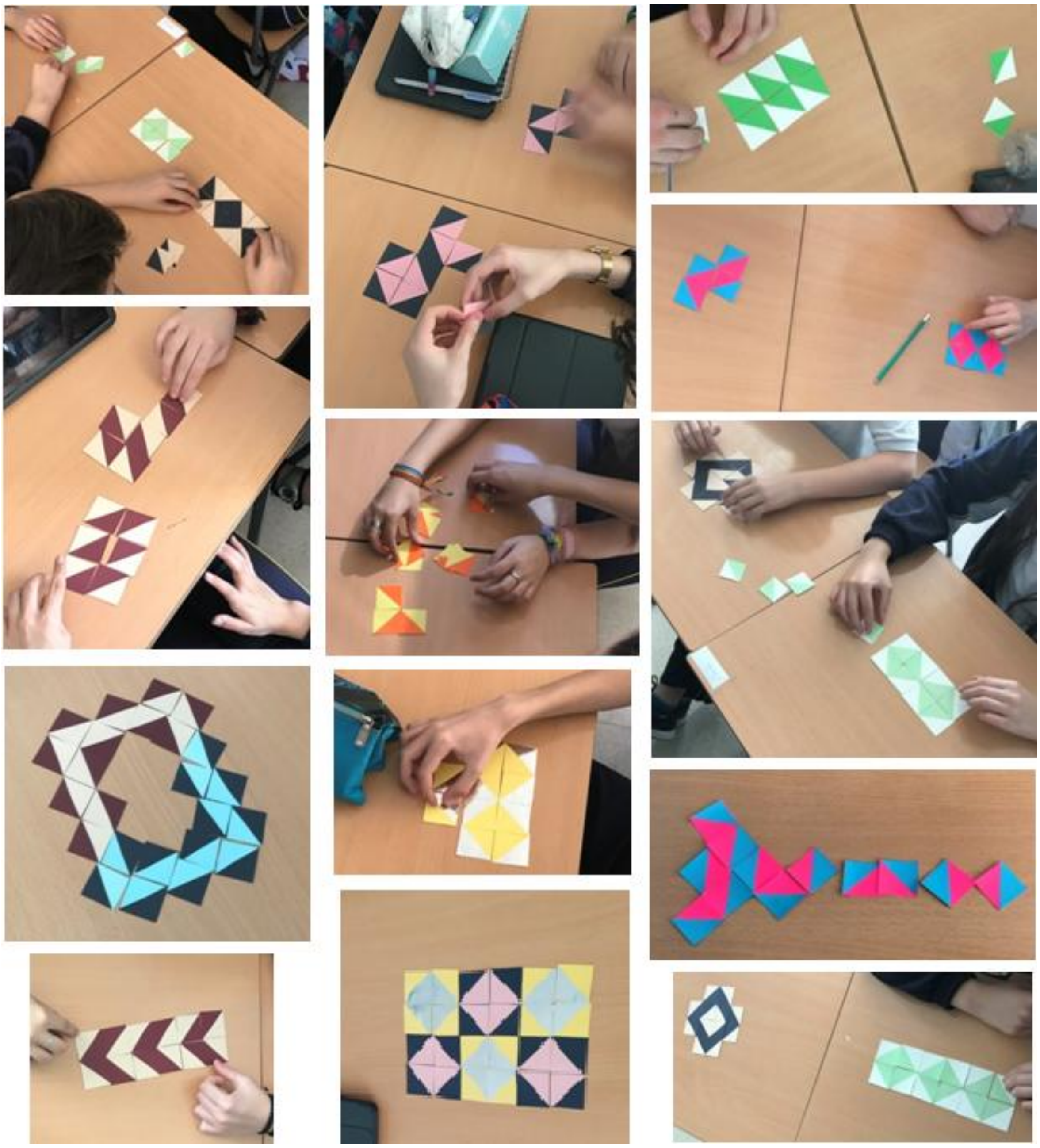


Figura 10. Imagen de mosaicos realizados en el aula por los alumnos.

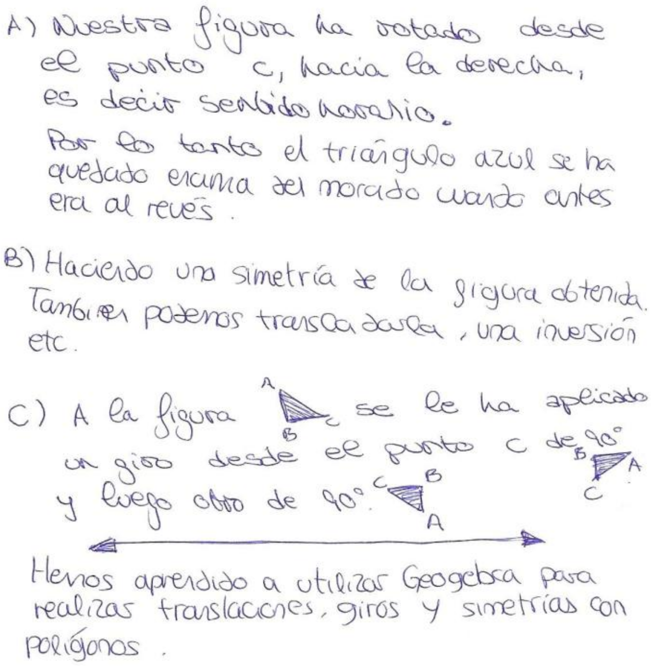
El resultado fue divertido, enriquecedor y motivador al poder aplicar lo aprendido. Se acabaron juntando distintas parejas para ampliar sus respectivos mosaicos, así como enseñarse unos a otros cómo lo habían construido.

Hacer hincapié que en esta actividad los estudiantes no tuvieron problemas con los giros, siendo donde más fallaban en los ejercicios y pruebas escritas. La visión espacial e imaginación del alumnado fue ampliamente ejercitada.

4. En días posteriores se realizó una actividad con Geogebra a través del seguimiento de un guion de elaboración propia (incluido en Anexo 4). La causa de crear esta actividad tan guiada es que no se había utilizado nunca este programa en esa aula y así se veían las aplicaciones prácticas que puede ofrecer, tanto de cara a esta unidad como en su curriculum.

Esta actividad podría encuadrarse en el ***momento del trabajo de la técnica***, pues se busca que el aprendiz domine las técnicas y sea capaz de expresarlas y crear otras nuevas. Se pedía que practicasen con los comandos de Geogebra y que realizasen diferentes construcciones con esas herramientas dadas.

Por parejas, un miembro leía el guion y luego juntos lo plasmaban en el archivo Geogebra. Se propuso unas preguntas (ver Anexo 4) en las que debían analizar lo que habían hecho con el programa (Figuras 11, 12 y 13).



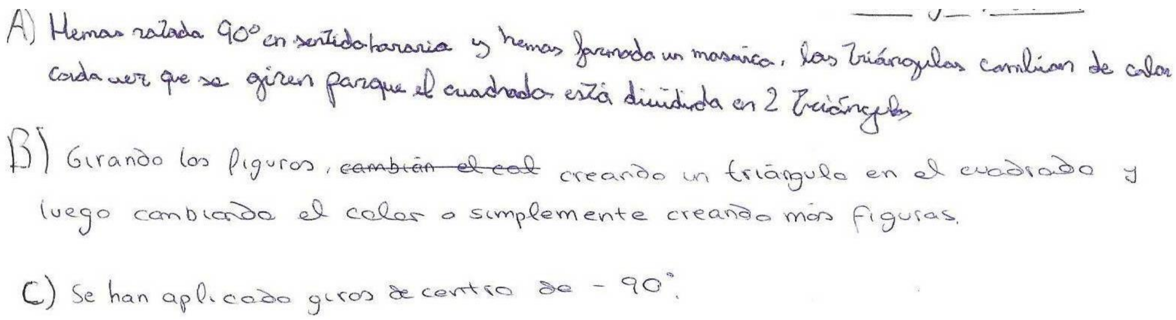
A) Nuestra figura ha rotado desde el punto C, hacia la derecha, es decir sentido horario.
Por lo tanto el triángulo azul se ha quedado encima del morado cuando antes era al revés.

B) Haciendo una simetría de la figura obtenida. También podemos trasladarla, una inversión etc.

C) A la figura se le ha aplicado un giro desde el punto C de 90° y luego otro de 90°.

Hemos aprendido a utilizar Geogebra para realizar traslaciones, giros y simetrías con polígonos.

Figura 11. Imagen de respuestas a actividad con Geogebra.

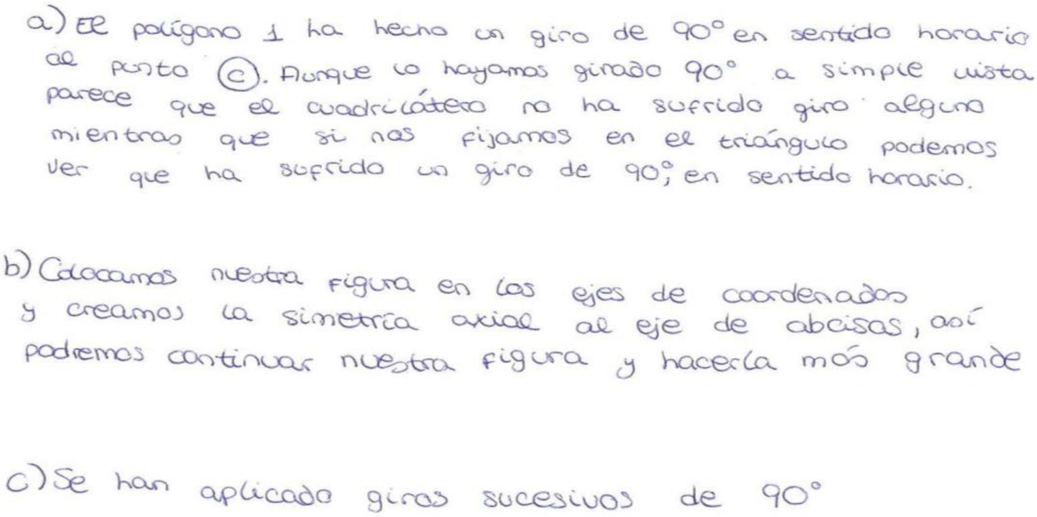


A) Hemos rotado 90° en sentido horario y hemos formado un mosaico, los triángulos cambian de color cada vez que se giran porque el cuadrado está dividido en 2 triángulos

B) Girando las figuras, ~~cambian el col~~ creando un triángulo en el cuadrado y luego cambiando el color o simplemente creando más figuras.

C) Se han aplicado giros de centro de -90°.

Figura 12. Imagen de respuestas a actividad con Geogebra.



a) El polígono 1 ha hecho un giro de 90° en sentido horario al punto C. Aunque lo hayamos girado 90° a simple vista parece que el cuadrilátero no ha sufrido giro alguno mientras que si nos fijamos en el triángulo podemos ver que ha sufrido un giro de 90°, en sentido horario.

b) Colocamos nuestra figura en los ejes de coordenados y creamos la simetría axial al eje de abcisas, así podremos continuar nuestra figura y hacerla más grande

c) Se han aplicado giros sucesivos de 90°

Figura 13. Imagen de respuestas a actividad con Geogebra.

Se buscaba, de esta forma, conseguir un ***momento tecnológico-teórico***, en el que deben justificar y explicar las técnicas nuevas.

Los grupos se dieron cuenta que las “baldosas virtuales” giradas cambian de posición y lo justificaron con las respuestas. Aunque sean baldosas cuadradas se puede observar el giro implementado por el cambio en la posición del triángulo de distinto color que lo parte en dos mitades.

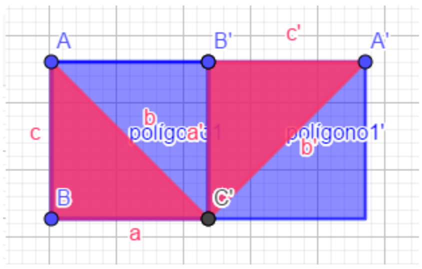


Figura 14. Imagen de detalle de baldosas implementadas en Geogebra.

Gracias a que la baldosa era bicolor los estudiantes entendieron mucho mejor el sentido de giro y los distintos mosaicos que se pueden ir creando. De nuevo, esta actividad recuerda al trabajo manipulativo anterior con cartulina.

5. En otra sesión se propusieron los siguientes ejercicios con el fin de potenciar la visión espacial y la visión gráfica de la noción de vector (Figura 15).

1. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas a (-5, 2), B (-1, 6) y C (2, -3). Halla las coordenadas de los vectores fijos AB, AC, BC, CA y CB. Comprueba en un dibujo que esas son las coordenadas.

2. El vector AB tiene coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen A sabiendo que las coordenadas de su extremo B son (-1, 1). Represéntalo gráficamente.

3. Las coordenadas de A son (2, 3) y las del vector AB son (4, -2). Calcula las coordenadas del punto B. Represéntalo gráficamente.

4. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices A (3, 1), B (3, 3) y C (1. 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados A', B' y C'?

Figura 15. Imagen de ejercicios propuestos de visualización de vectores.

En dicha actividad se pide que se resuelva el ejercicio de dos formas, con ecuaciones y de forma gráfica. Se pudo comprobar que la resolución de los vectores con ecuaciones fue satisfactoria y sin mayores dificultades, pero gráficamente fue problemático en algunos casos por las coordenadas colocadas erróneamente. Era común que no coincidiesen los resultados de ambas resoluciones.

Esta actividad se encuadra en el ***momento de evaluación***. En él, debe ser evaluado el resultado y determinar si está bien definido, así como realizar una reflexión de lo aprendido.

6. Al finalizar la unidad se les realiza un examen en papel (Anexo 5), y a la siguiente semana un examen a través de la plataforma Socrative (Anexo 6). Ambos exámenes sirven de feedback para conocer lo que no ha quedado claro y poder realizar una sesión posterior aclaratoria. Los resultados de estas pruebas se encuentran en el siguiente epígrafe.

Estas dos pruebas se encuadran como ***momento de evaluación*** comentado antes y como **momento de institucionalización**, en el que se da un carácter oficial a todo lo construido.

7. Por último, se les propone un test final de la unidad (consultar Anexo 3) con el objetivo de recapitular su aprendizaje y volver a realizar esa introspección que se pedía en el test previo a la unidad.

Se ha encuadrado cada actividad en la ***teoría de momentos*** (Chevallard, 1999). Estos momentos pueden darse de forma simultánea o repetidamente. Aquí se ha hecho una teorización, pero es posible que dos alumnos se encuentren en diferente momento en la misma actividad.

6.2 APORTACIÓN A LA DOCENCIA ONLINE

Se propone la siguiente adaptación al Curriculum de este tema a la docencia online. Se utiliza Geogebra por la facilidad de los comandos y por ser un programa en línea que no representa ningún problema a la hora de trabajar con él. Con un simple guion adaptado, como el elaborado en el Anexo 4, es posible llevar a cabo actividades muy visuales y dinámicas. En este caso, se ha tomado como base el trabajo de Aína Martínez para CIDEAD en 2009.

A tener en cuenta: Se ha diseñado este apartado para los alumnos. Las actividades propuestas al alumnado aparecen en cursiva. Representan una motivación-extra respecto a la teoría que se pretende enseñar. El registro de estos ejercicios es más coloquial que en el resto de la redacción.

Para empezar, abrir la aplicación Geogebra y activar la vista gráfica, vista algebraica y protocolo de construcción. Así se puede ver claramente lo que se va haciendo.

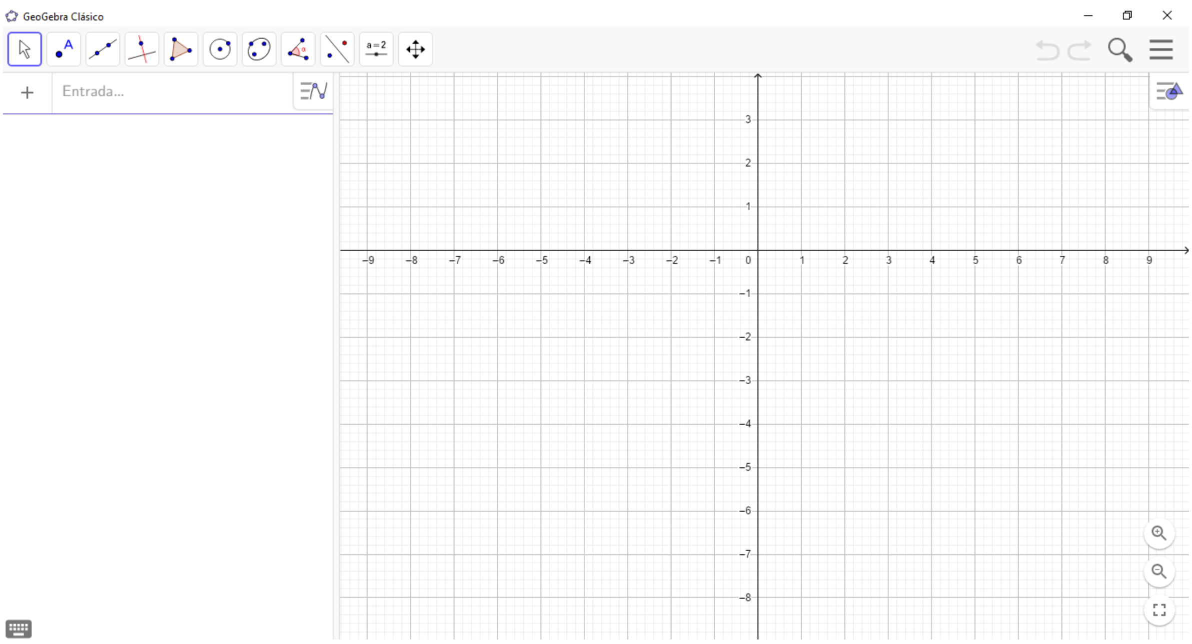


Figura 16. Imagen de la pantalla de Geogebra.

1. Vectores. Concepto de vector. Coordenadas

Un vector AB está determinado por dos puntos del plano, A(x_1, y_1) que es su **origen** y B(x_2,y_2) que es su **extremo**.

En la Figura 17, A = (1,3), B = (2,5).

El vector **ū** = (2 - 1,5 – 3) = (1,2), es decir, avanza 2 a la derecha (coordenada x) y avanza 5 hacia arriba (coordenada y).

Practica con Geogebra y la herramienta **vector**.

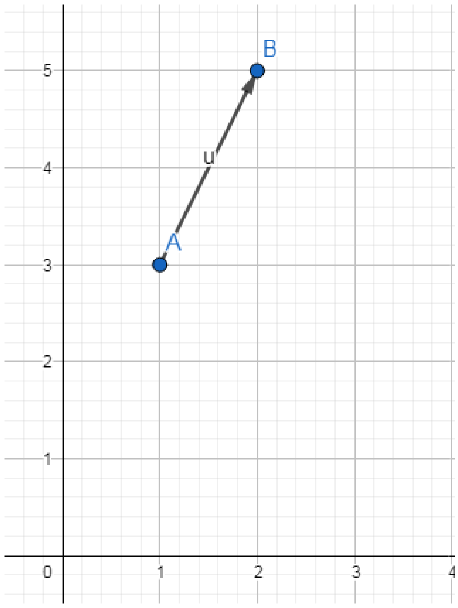


Figura 17. Imagen del vector u.

<u>Ejercicio propuesto 1</u>: Los triángulos amarillo y verde de la Figura 18 son iguales, ¿qué distancia hay entre los puntos A y D?

Si ahora te fijas en las figuras verde oscuro, ¿Sabrías decir cómo hemos pasado de una a otra?

Abre el archivo ejercicio1.ggb para comprobar tus respuestas.

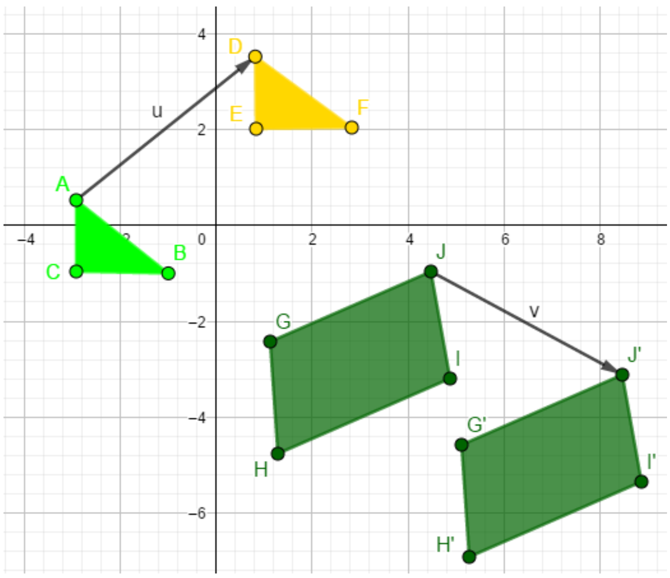


Figura 18. Imagen del ejercicio propuesto 1.

2. Traslaciones. Traslación según un vector

Una traslación de vector u es un movimiento que transforma cada punto **A** del plano, en otro punto **B** de manera que el vector AB es igual al vector **ū**.

En la Figura 19, el punto B = A + ū = (1,-1) + (3,2) = (4,1).

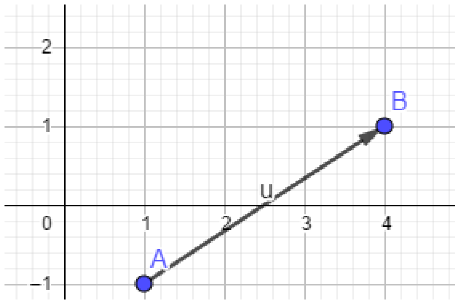


Figura 19. Imagen de la traslación.

¿Sabrías crear otros puntos C y D tales que el punto D fuera la traslación del vector u en C?

Si te fijas en el ejercicio 1 anterior, el triángulo amarillo es la traslación del triángulo verde. ¿Sabrías decir por qué? ¿Y las figuras verdes oscuro?

Composición de traslaciones

Dos traslaciones, de vectores u y v se pueden componer para formar una traslación de vector u + v. Mediante la composición de traslaciones es posible componer interesantes **frisos** o **cenefas**, que se pueden ampliar a **mosaicos**, como puedes apreciar en las imágenes siguientes de la Figura 20.

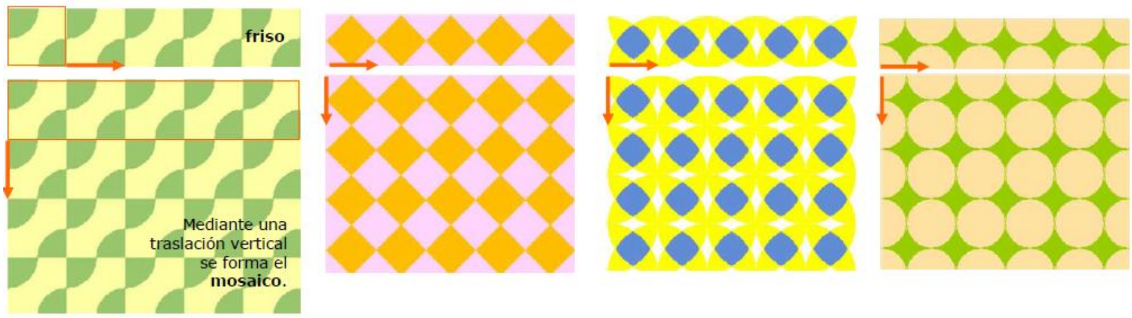


Figura 20. Imagen de ejemplos de mosaicos. Aína Martínez, 2009.

3. Giros. Giro de centro O y ángulo α

Un giro, de centro un punto **O** y amplitud un ángulo α, transforma cada punto **P** del plano en otro punto **P'** de modo que el ángulo **POP'** es igual a α y las distancias **OP** y **OP'** son iguales. Ver Figura 21.

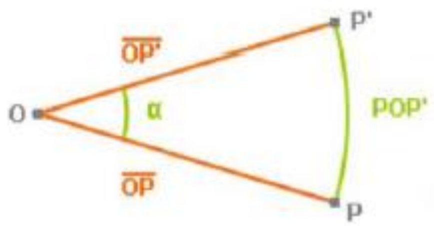


Figura 21. Imagen de un giro. Aína Martínez, 2009

Ejercicio propuesto 2: Abre el archivo giros.ggb. ¿Sabrías decir qué giro se ha aplicado para pasar de la figura azul a la morada en cada caso? Juega con los polígonos y averígualo.

4. Simetrías.

- Simetría central

Una **simetría central**, o simetría respecto a un punto O, es un **giro** de centro O y amplitud 180º. Transforma cada punto **P** en otro punto **P'** siendo O el punto medio del segmento de extremos P y P', O se dice que es su **centro de simetría**. Ver la Figura 22. El ángulo **POP'** es igual a 180º y las distancias **OP** y **OP'** son iguales.

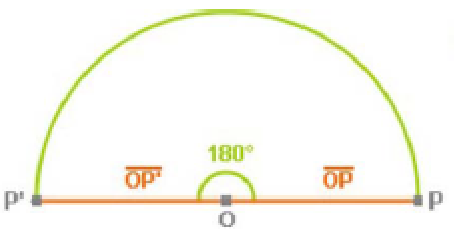


Figura 22. Imagen de una simetría central. Aína Martínez, 2009

- Simetría axial o reflexión

Una **simetría axial** respecto a un eje es una transformación por la cual a todo punto A del plano le corresponde otro punto A'. En la Figura 23, el eje es la recta verde.

Además, es la mediatriz del segmento AA'.

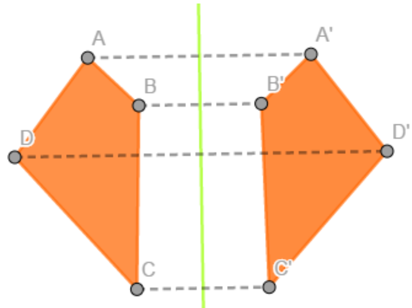


Figura 23. Imagen de una simetría central.

Ejercicio propuesto 3: Abre el archivo simetrías.ggb. ¿Sabrías decir qué figura está construida por simetría axial (respecto a un eje) y cuál por simetría central (respecto a un punto)?

Juega con los polígonos y averígualo.

<u>ACTIVIDAD FINAL: APLICA LO APRENDIDO</u>

Se va a construir un mosaico con Geogebra.

Abre el archivo mosaicos.ggb. ¿Sabrías decir si se han aplicado giros, traslaciones, simetrías…?

Si se empieza desde el hexágono rojo con vértices negros, ¿cómo contruirías los demás hexágonos rojos?

Continúa haciendo el mosaico.

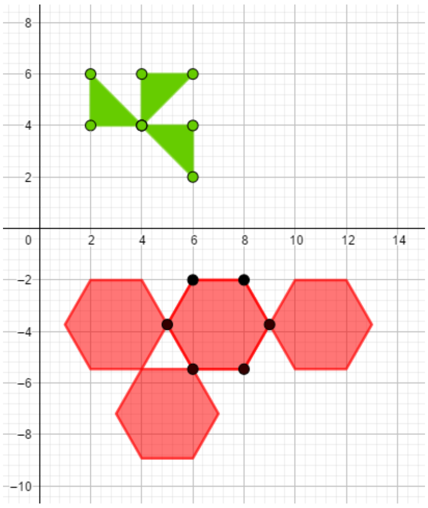


Figura 24. Imagen del archivo “mosaicos”.

Con estas actividades para la docencia online se busca que el alumno recorra el ***momento de primer encuentro***, (Chevallard, 1999) y se enfrente por primera vez al contacto con un programa dinámico y fácil de usar como es Geogebra.

Conforme hace la lectura y el desarrollo de las actividades se pasa al ***momento exploratorio***, donde busca técnicas para resolver las tareas encomendadas. Y finalmente, en el ***momento del trabajo de la técnica*** y ***momento tecnológico-teórico*** será cuando domine las técnicas y sea capaz de expresarlas y justificarlas a partir de las diferentes preguntas que se incluyen en esta actividad guiada.

6.3 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Se comenta a continuación las diferentes limitaciones del estudio realizado en este Trabajo Fin de Máster.

- Los alumnos en esta etapa presentan una tipología muy diferente. A estas alturas de su escolarización algunos de ellos ya tienen muy claro en qué especializarse el año próximo y si hacer Bachillerato o una formación profesional. En cambio, otros están ligeramente perdidos y no saben sencillamente si “ciencias o letras”. Solamente disponen de la información de “lo que se les da bien” con relación a las notas obtenidas en exámenes y distintas pruebas, pero no tienen una idea clara de sus puntos fuertes y sus inteligencias múltiples. Esto conlleva que no desarrollen todo su potencial durante las actividades y no se pueda obtener unos resultados más satisfactorios.

- Desde un punto de vista práctico, hubiera sido muy interesante trabajar con dos grupos del mismo curso, en el que en uno se realizaran las actividades complementarias mientras que en el otro no, para valorar el alcance de las actividades y las diferencias de cara a la nota y al aprendizaje inmediato.

- Otra limitación es que, aunque los resultados obtenidos pueden ser suficientemente significativos, el libro elegido en el aula difiere de ser el más idóneo. La limitación importante es tenerse que ceñir al libro que se use en el centro escolar en el que demos clase. Como ya se dijo, hay otros libros más idóneos que el de SM. Es más recomendable el libro de Anaya por tener más aplicaciones al arte, dedicar una sección del libro a cenefas y rosetones, y proponer ejercicios en esa línea. Sería una buena manera de fijar conceptos.

- También el tiempo del que se disponía para impartir esta unidad ha sido limitado. En términos generales, y pese a la progresión demostrada en aquellos contenidos trabajados a través de estas actividades complementarias, los resultados obtenidos de la prueba final (ver anexo 5) no parecen apuntar a que haya existido un gran aprendizaje significativo.

- Ser examinados de forma escrita ha repercutido en sus notas, mientras que con la utilización de otras estrategias como plataformas de evaluación digitales ha supuesto una mejora general. Además, con la opción de alterar el orden de las preguntas y las posibles respuestas en cada alumno se evita que se copie.

A continuación, se adjunta imágenes con ejemplos reales de los estudiantes del centro que muestran estas limitaciones.

- Podemos ver en la Figura 25 un gráfico con las calificaciones de la prueba escrita:

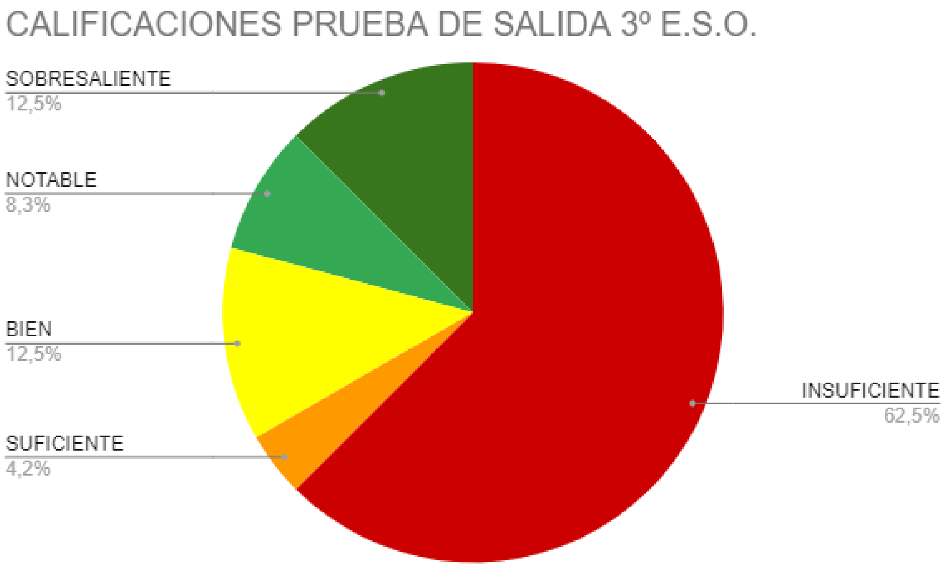


Figura 25. Imagen de las calificaciones prueba final escrita de 3º ESO.

Como se puede ver en la Figura 25, ha suspendido el 62,5 % de la clase. Esto contrasta con la poca cantidad de suficientes frente a sobresalientes, de lo que se desprende lo siguiente: si han trabajado, la nota es más probable que se acerque al sobresaliente que a un simple aprobado. Es decir, si tienen los conceptos claros, es una unidad didáctica que recompensa el esfuerzo mediante unos resultados muy satisfactorios.

Por ejemplo, a estos alumnos de las Figuras 26, 27 y 28 les hubiera beneficiado practicar más y más tiempo con material manipulativo y visual, para comprender que un segmento no se deforma al trasladarlo o al realizar una simetría:

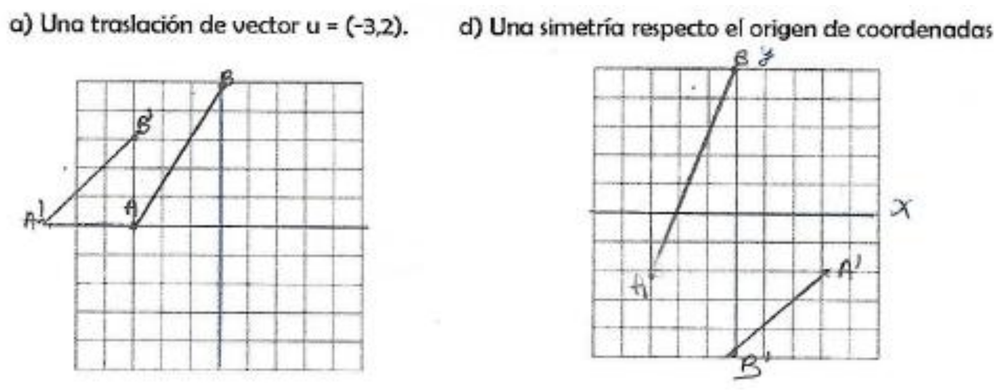


Figura 26. Imagen de la noción de traslación y simetría central en la prueba final escrita.

De igual forma, el hecho de deformar un triángulo salta a la vista en una simetría axial:

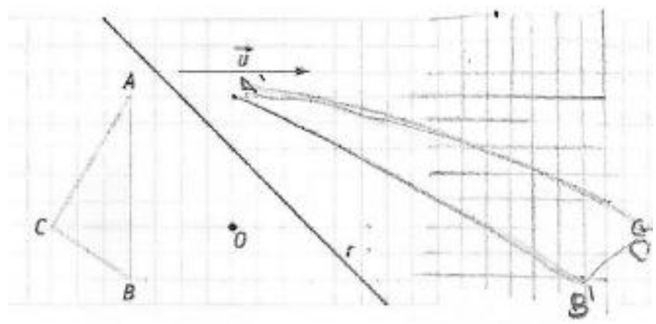


Figura 27. Imagen de la noción de simetría axial en la prueba final escrita.

Es muy positivo que la noción de giro quedó grabada de forma muy manipulativa gracias al uso del compás sugerido en el aula (Ver Figura 28):

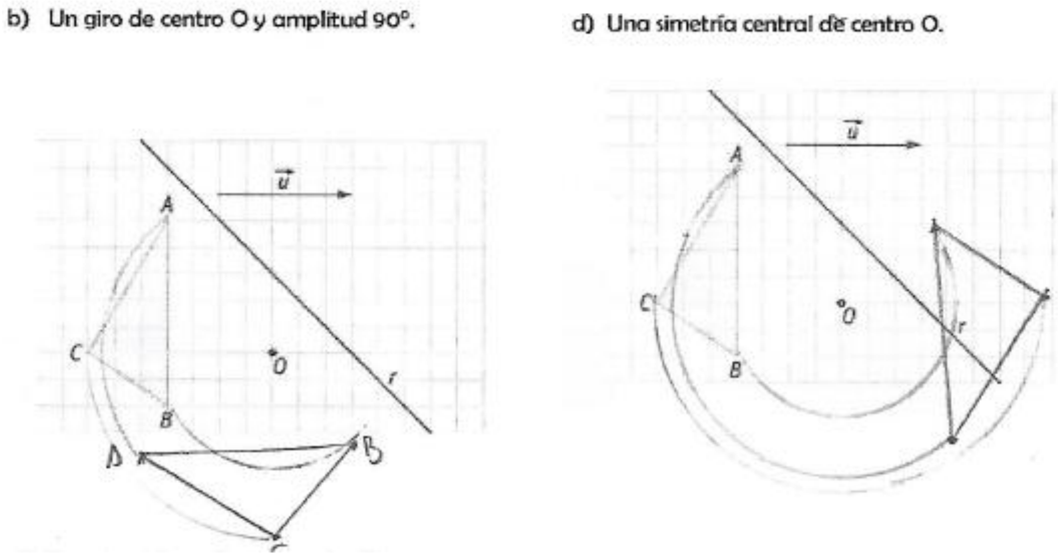


Figura 28. Imagen de la noción de giro en la prueba final escrita.

- Sin embargo, como se puede ver en la Figura 29, en la segunda prueba final realizada con el programa de evaluación interactiva Socrative (ver Anexo 6 para consultar enunciados) se obtuvieron mejores calificaciones:

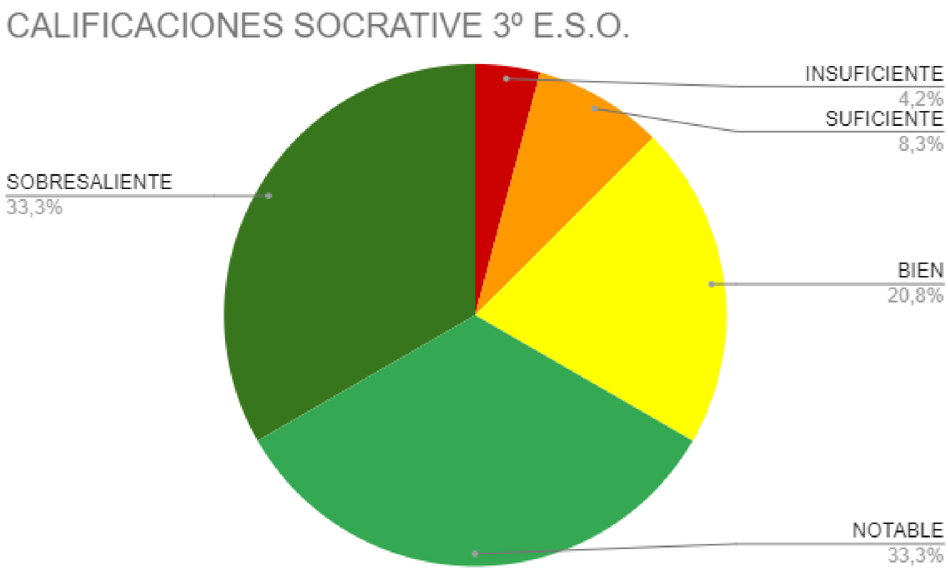
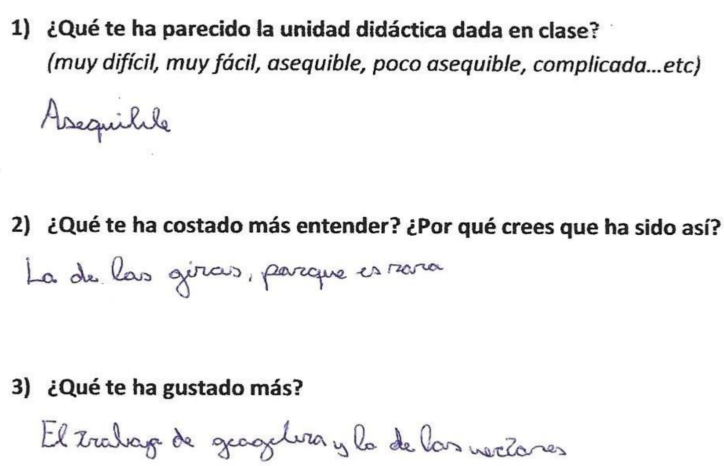


Figura 29. Imagen de las calificaciones prueba final con Socrative de 3º ESO.

Se observa una mejora considerable en la Figura 29. Se pasa del 62,5% de suspensos al 4,2%.

Una de las razones es que atraiga más el método de evaluación, visto como un juego más que como un examen y eso les haga estar más concentrados. Además, la plataforma no permite contestar a una pregunta sin haber respondido todas las anteriores. Esto fue un gran adelanto, puesto que en el examen escrito dejaban muchas cuestiones sin contestar y eso repercutió en las notas. Aquí, en esta plataforma, al estar obligados a contestar, se esforzaban en pensar una respuesta coherente.

- A continuación, veamos ejemplos del test final, en el que aproximadamente 85% de la clase tiene la opinión de que la unidad ha sido asequible o fácil, que lo que más costaba eran los giros, y que lo que más ha gustado han sido las actividades diseñadas.



1) **¿Qué te ha parecido la unidad didáctica dada en clase?**
(muy difícil, muy fácil, asequible, poco asequible, complicada...etc)

Asequible

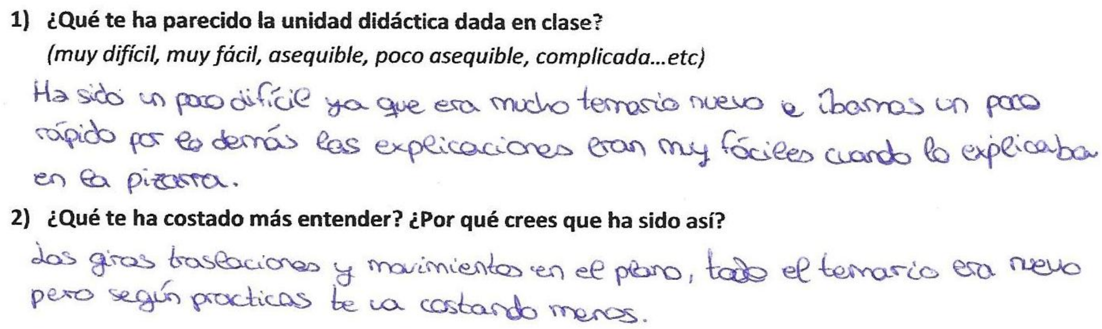
2) **¿Qué te ha costado más entender? ¿Por qué crees que ha sido así?**

La de las giras, porque es rara

3) **¿Qué te ha gustado más?**

El trabajo de geogebra y lo de los vectores

Figura 30. Imagen de la respuesta a test final.



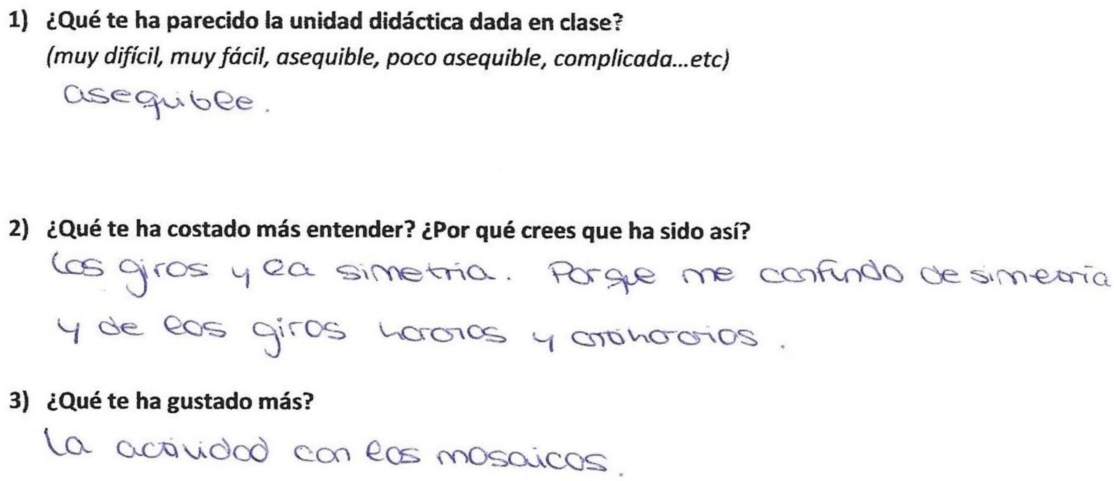
1) **¿Qué te ha parecido la unidad didáctica dada en clase?**
(muy difícil, muy fácil, asequible, poco asequible, complicada...etc)

Ha sido un poco difícil ya que era mucho temario nuevo e íbamos un poco rápido por lo demás las explicaciones eran muy fáciles cuando lo explicaba en la pizarra.

2) **¿Qué te ha costado más entender? ¿Por qué crees que ha sido así?**

Los giros traslaciones y movimientos en el plano, todo el temario era nuevo pero según practicas te va costando menos.

Figura 31. Imagen de la respuesta a test final.



1) **¿Qué te ha parecido la unidad didáctica dada en clase?**
(muy difícil, muy fácil, asequible, poco asequible, complicada...etc)

asequible.

2) **¿Qué te ha costado más entender? ¿Por qué crees que ha sido así?**

Los giros y la simetria. Porque me confundo de simetria y de los giros horarios y antihorarios.

3) **¿Qué te ha gustado más?**

La actividad con los mosaicos.

Figura 32. Imagen de la respuesta a test final.

Como se ha comentado, se realizaron a los alumnos varias pruebas como sistema de feedback, intentando crear un diálogo entre el alumnado y el profesor. De esta manera los profesores pueden mejorar las dinámicas realizadas, mientras que los estudiantes ven como sus propuestas pueden ser implementadas, sintiéndose partícipes de las clases y de su propia tarea educativa.

Para actividad del final de la unidad didáctica se puede proponer una búsqueda de mosaicos en su entorno diario, en su casa o en su trayecto al instituto, y que expliquen la construcción encontrada. Así se podría complementar esta carencia en el libro de texto en cuanto al arte y la visión espacial. Se amplía esta propuesta en el siguiente apartado.

6.4 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

De cara a la ampliación del estudio realizado en este trabajo, se proponen las siguientes líneas de investigación:

- Sería bueno enlazar las propuestas con alguna dinámica que albergase componentes de gamificación, con el objetivo de hacer aún más atractiva al alumnado. Los juegos y sus elementos son herramientas de aprendizaje que funcionan también para la educación secundaria. No se debe olvidar que los adolescentes dedican gran parte de su tiempo libre a los videojuegos, y sería una buena forma de memorizar conceptos sin un gran esfuerzo.

- Otra línea sería continuar investigando métodos didácticos para incentivar y motivar a la clase. Se ha comprobado en el presente trabajo que ha habido una mejora considerable en la nota al promover en clase el uso de las tecnologías y diferentes sistemas de evaluación. Por ello, se anima a realizar distintos estudios respecto a trabajar en un aula con estos métodos, en otra aula sin ellos, y comparar carencias de ambos.

- También, en esta línea, se propone estudiar el uso en clase de Geogebra 3D, en especial en cursos superiores, para que puedan conocer una herramienta más de apoyo en sus ejercicios. Analizar los mosaicos de La Alhambra por su variedad sería una buena forma de empezar. Como se puede comprobar, algunas de las actividades propuestas en este trabajo se pueden utilizar en otras unidades del bloque de geometría con pequeñas modificaciones.

7. CONCLUSIONES

Al inicio del presente trabajo se expusieron unos objetivos que han servido para orientar la realización de este proyecto. Llegados a este punto, debe concluirse.

1. Lograr motivar a los estudiantes en el campo de las matemáticas.
   Este ha sido el objetivo más ambicioso y el que más se ha intentado abordar. El segundo día se puso un vídeo de divulgación realizado por un excelente matemático sobre simetrías y mosaicos en el arte como motivación inicial a la unidad, pues ya el primer día de clase, al dar los vectores, preguntaban que cuál es la utilidad de ello. Es importante centrar a los alumnos en lo que se les quiere enseñar y por qué.
   La actividad manipulativa fue una motivación extra al ser una sesión fuera de lo cotidiano.
2. Afianzar los conceptos de simetría, rotaciones y traslaciones.
   En la gran mayoría se ha conseguido, aunque los resultados en las calificaciones no hayan sido muy esperanzadores. Aprobó un 40% de la clase. Cierto es que apenas ha habido variaciones en las calificaciones que venían obteniendo en otras unidades didácticas.
3. Ampliar la visión espacial y las estrategias de resolución de problemas de los alumnos.
   Esto se ha conseguido ampliamente, pues, por ejemplo, se les propuso el uso de compás para los giros de figuras y varios alumnos lo usaron en su examen final como se puede ver en las imágenes del presente trabajo.
4. Realizar un análisis de distintos libros de texto acerca de su enfoque de la unidad didáctica de movimientos en el plano.
   Objetivo completado. Se puede ver la comparativa a partir de imágenes de los propios libros, gráficos y tablas de elaboración propia. Se ha llegado a la conclusión que el de Anaya es el que más posibilidades ofrece, aunque la elección del libro de SM es acertada.
5. Proponer actividades y problemas prácticos que resulten atractivos a los alumnos.
   Se ha podido cumplir en parte, pues como ya se ha comentado, el tiempo previsto para esta unidad didáctica era limitado. Se han trabajado actividades manipulativas y con programas informáticos. Se ha complementado las clases con las TIC en la medida de lo posible.

Es claro que resulta más fácil cumplir los objetivos cuanta mayor motivación tenga el estudiante, cuanta mayor sea la predisposición que tenga, a pesar de un nivel bajo de conocimiento previo. Los objetivos de actitud son difíciles de cumplir cuando la motivación del estudiante es baja. A pesar de esto, el ambiente de trabajo era bastante bueno y la investigación ha resultado satisfactoria.

BIBLIOGRAFÍA

Aína Martínez, J. M. (2009). *Movimientos en el plano.* [en línea] Disponible en https://www.matematicasonline.es/cidead/3esomatematicas/impresos3/3eso_quincena7.pdf [abril 2020]

Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, A. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 3º E.S.O.* Editorial SM.

Baeza Alba, M. A., Sordo Juanena, J. M. (2016) *Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD): El nuevo paradigma en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.*

Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid (2015). *Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.* Publicado el 20 de mayo de 2015, Núm. 118, pp. 108-119.

Boletín Oficial del Estado (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Publicado el 3 de enero de 2015, Núm. 3, Sec. I, pp. 391-395.

Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico*. Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 19, pp.221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE/Horsori.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., et ál. (2015) *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.* Editorial Anaya.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Dialnet.

Ocaña Fernández, J., M., Romero Torralba, R., Mejía Sánchez-Bermejo, D. (2015) *Matemáticas académicas 3º ESO.* Editorial Luis Vives (Edelvives).

Quero Grande, A. (2016) *Aprueba tus exámenes Matemáticas Académicas 3º ESO*. Editorial Oxford University Press España.

Sáenz de Cabezón, E. (2015) *¿Qué es simetría?* Derivando. [en línea] Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=beq1odpZXdg [2020, febrero]

ANEXO 1: ÍNDICES DE LA UNIDAD DE GEOMETRÍA PLANA EN LOS TEXTOS

Libro de SM. **UNIDAD 8: MOVIMIENTOS EN EL PLANO**

1. Vectores

   1.1 Suma de dos vectores en el plano

2. Traslaciones

   2.2 Producto de traslaciones

3. Giros

   3.2 Producto de dos giros

4. Simetrías axial y central

   4.1 Simetría axial

   4.2 Simetría central

   4.3 Producto de simetrías

5. Ejes y centro de simetría en figuras planas

   5.1 Ejes de simetrías

   5.2 Centro de simetría

6. Movimientos inversos

Libro de Anaya. **UNIDAD 12: TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS**

1. Transformaciones geométricas

2. Movimientos en el plano

   2.1 Movimientos directos y movimientos inversos

3. Estudio de las traslaciones

   3.1 Vectores

   3.2 Concepto de traslación

   3.3 Las traslaciones son movimientos directos

   3.4 Elementos dobles (invariantes) en una traslación

4. Estudio de los giros

   4.1 Los giros son movimientos directos

   4.2 Elementos dobles en un giro

   4.3 Figuras con centro de giro

5. Simetrías axiales

    5.1 Las simetrías son movimientos inversos

    5.2 Elementos dobles en una simetría

6. Composición de movimientos

    6.1 Composición de simetrías axiales

7. Mosaicos, cenefas y rosetones

    7.1 Mosaicos

    7.2 Frisos o cenefas

    7.3 Rosetones

Libro de Oxford. **UNIDAD 9: MOVIMIENTOS EN EL PLANO**

1. Traslaciones
2. Giros
3. Simetrías

Libro de Edelvives. **UNIDAD 9: MOVIMIENTOS EN EL PLANO**

1. Movimientos en el plano
2. Traslaciones

    2.1 Vector

    2.2 Traslaciones

3. Simetrías

    3.1 Simetría axial respecto de un eje

    3.2 Simetría central

4. Giros
5. Composición de movimientos

    5.1 Traslaciones sucesivas

    5.2 Simetrías axiales sucesivas

    5.3 Giros sucesivos de igual centro

ANEXO 2: TEST PREVIO A LA UNIDAD

1.) ¿Sabes qué se forma cuando vas de un punto a otro?

a) Una línea recta b) Un vector c) Un ángulo d) Otra respuesta, ¿cuál?

2.) ¿Qué **movimientos** explican cómo nos desplazamos?

Sugerencias: caminar en línea recta, hacer giros, movernos en diagonal… ¿Se te ocurren más?

3.) ¿Cómo es la imagen que ves en un **espejo**?

a) Igual a la original b) Al revés de la original c) Reflejada de la original

4.) ¿A qué te suena **mosaico**?

5.) ¿A qué te suena **simetría**?

6.) ¿Qué significa para ti que una figura es **simétrica** respecto a otra? ¿Puedes dar un ejemplo?

7.) ¿Qué significa para ti que un elemento (un punto, una recta…) es **invariante** respecto a un movimiento? Los movimientos serían giros, traslaciones, simetrías… Explica lo que sepas.

8.) Si giramos 90° un cuadrado, ¿qué le ocurre? ¿Y si le giramos 180°? Puedes contestar con un dibujo como el de la pregunta siguiente.

9.) Si te dan esta figura  ¿cómo pasarías a esta  ?

ANEXO 3: PREGUNTAS PARA ÚLTIMO DÍA, 3º ESO

1) ¿Qué te ha parecido la unidad didáctica dada en clase?

(muy difícil, muy fácil, asequible, poco asequible, complicada…etc)

2) ¿Qué te ha costado más entender? ¿Por qué crees que ha sido así?

3) ¿Qué te ha gustado más?

4) ¿Qué recuerdas del vídeo de mosaicos y simetrías que se puso en clase?

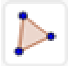
5) ¿Crees que la unidad hubiera necesitado más tiempo? ¿En qué exactamente?

6) ¿Qué mejorarías de cómo se ha explicado la unidad?

ANEXO 4: ACTIVIDAD CON GEOGEBRA. GUIÓN PARA LOS ALUMNOS

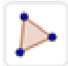
ACTIVIDAD CON GEOGEBRA EN 3º DE ESO

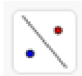
PRIMERA ACTIVIDAD: ABRIMOS GEOGEBRA.

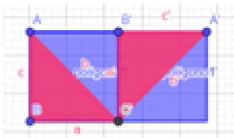
Pulsamos en  y seleccionamos POLÍGONO REGULAR. Pinchamos en dos puntos diferentes en la pantalla y cuando nos pidan número de vértices, escribimos 4. Así, se nos construirá un CUADRADO.

Tocamos en  en ELIGE Y MUEVE para moverlo. Si queremos hacerle más grande, podemos arrastrar desde el punto A o desde el punto B. Practicad a ver qué pasa.

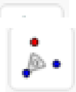
Para cambiar el color, toca en el interior de la figura pulsando durante un rato, en CONFIGURACIÓN, sale la opción de COLOR.

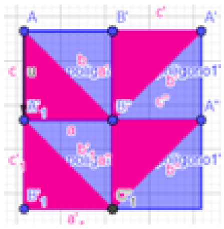
Después, pulsamos en  y seleccionamos POLÍGONO. Vamos a nuestra figura y pinchamos en A, en B, en C y en A. Así se nos forma un triángulo dentro del cuadrado. Cambiamos el color.

Ahora vamos a rotar el polígono 90°. Tocamos en el botón  y pulsamos en **ROTACIÓN**. Seleccionamos todo el cuadrado, pulsamos en C y en la ventana que nos sale ponemos 90° y sentido horario.

Debería quedaros algo como esto: 

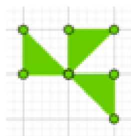
- **PREGUNTA A) ¿Puedes explicar lo que ha ocurrido? Observa que así podemos construir un mosaico girando y girando el cuadrado en el sentido y los grados que queramos.**

Vamos ahora a ver las traslaciones. Pulsamos en el botón  y pulsamos en **TRASLACIÓN**. Seleccionamos toda la figura, pulsamos en A y después en B.

Debería quedaros algo como esto: 

- **PREGUNTA B): ¿Qué más formas hay de construir un mosaico?**

SEGUNDA ACTIVIDAD: Vamos a construir un mosaico con Geogebra. Abre el archivo mosaicos.



Observa la construcción verde. Se ha comenzado con el triángulo rectángulo de arriba a la izquierda.

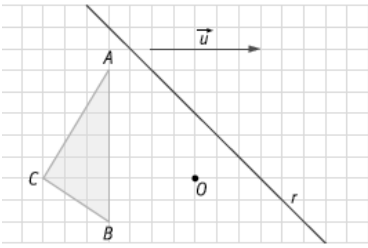
- **PREGUNTA C): ¿Sabrías decir si se han aplicado giros, traslaciones o simetrías al primer triángulo verde para conseguir los demás?**

Continúa haciendo el mosaico.

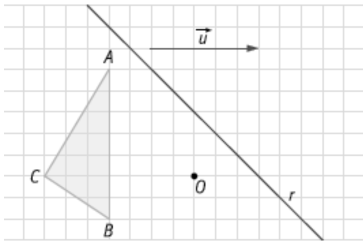
ANEXO 5: PRUEBA FINAL DE LA UNIDAD

1.- Halla de forma gráfica la figura homóloga al triángulo ABC en cada uno de los siguientes casos: [4 puntos]

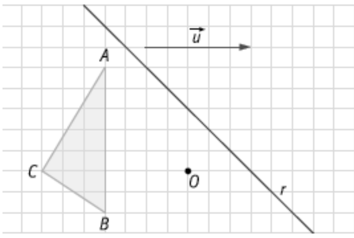
a) Una traslación de vector u.



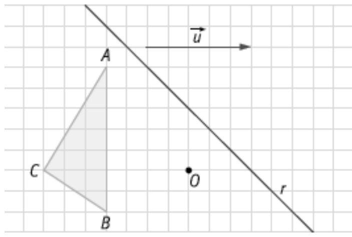
b) Un giro de centro O y amplitud 90°.



c) Una simetría axial de eje r.



d) Una simetría central de centro O.



2.- Dado el segmento de extremos A (-3,-2) y B (0,5), halla las coordenadas del segmento A'B' homólogo del anterior en los siguientes casos: [3 puntos]

a) Una traslación de vector u = (-3,2).

b) Una simetría respecto del eje X.

c) Una simetría respecto del eje Y.

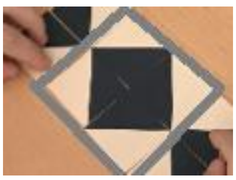
d) Una simetría respecto el origen de coordenadas

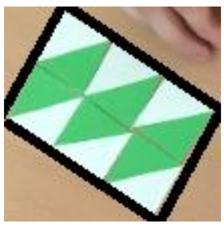
3.- Dados los puntos A (−1, 2); B (3, 4) y C (−2, −3) halla las coordenadas del punto D: [2 puntos]

a) Si D es el homólogo de A en una traslación de vector BC.

b) Si al trasladar D según el vector AC se obtiene el punto A.

4.- Indica los ejes de simetría de los siguientes mosaicos construidos la semana pasada. [1 punto]





ANEXO 6: EVALUACIÓN FINAL CON SOCRATIVE

1. Un vector tiene...

A módulo y dirección C módulo, dirección y sentido

B sentido y dirección D ninguna de las anteriores

2. ¿Qué tipo de movimiento se ve en la imagen?

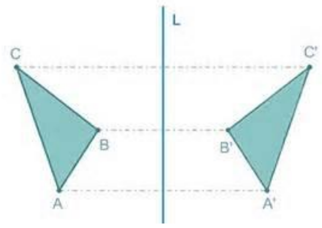
A Rotación o giro C Simetría axial

B Traslación D Simetría central

3. ¿Es lo mismo hacer una traslación de vector U y después otra de vector V, que hacer la traslación de vector U+V?

T True F False

4. Este movimiento es...



A Traslación C Simetría central

B Giro D Simetría axial E Ninguno de los anteriores

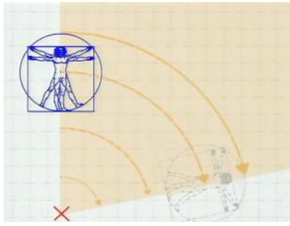
5. Si el ángulo de giro es negativo, ¿en qué sentido va?

A No se gira C En el sentido de las agujas del reloj

B Hacia la izquierda D Ninguna es correcta

6. ¿Un cuadrado tiene 4 ejes de simetría?

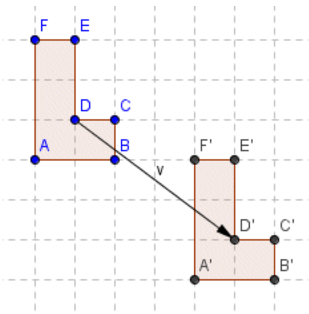
T True F False



7. ¿Cómo se llama este movimiento en el plano?

A Traslación B Giro C Simetría

8. ¿Las coordenadas del vector v son (4,3)?

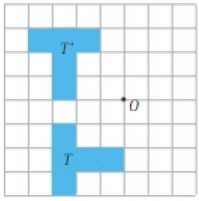


T True F False

9. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero?

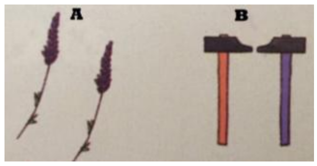
A 1 B 2 C 3 D 4 E 6

10. ¿El ángulo de rotación para pasar de T (abajo) a T'(arriba) es...?



A 90º B 180º C 360º D −90º

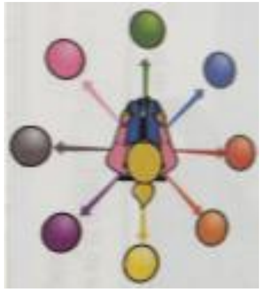
11. ¿Cuál de estas figuras se ha trasladado?



A Las dos B Ninguna C Figura A D Figura B

12. El punto (0,4) está situado en el eje horizontal.

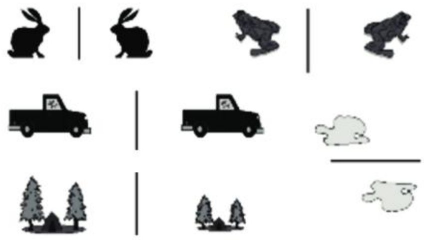
T True F False



13. ¿Qué balón verá si gira 90º positivos?

A Gris B Roja C Amarilla D Verde

14. ¿Y qué balón verá si gira 45º negativos?

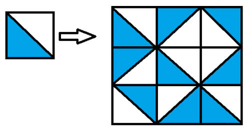


A Rosa B Naranja C Amarillo D Azul

15. ¿Cuántas de estas figuras son simétricas?

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4 F 5

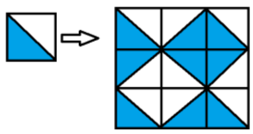
16. Si empiezo con la baldosa de la izquierda, ¿con qué ÚNICO MOVIMIENTO he construido el mosaico?



A Con traslaciones. B Con giros de −90º.

C Con giros de 180º. D Con simetría de eje. E Con simetría central.

17. Si empiezo con la baldosa de la izquierda, ¿con qué ÚNICO MOVIMIENTO he construido el mosaico?



A Con traslaciones. B Con giros de −90º.

C Con giros de 180º. D Con simetría de eje. E Con simetría central