



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente

Convocatoria 2014

Nº de proyecto 127

NEWTON 2.0: DISEÑO DE UN KIT Y METODOLOGIA DOCENTE
INNOVADORES PARA EL MODELADO DE "SISTEMAS CAMBIANTES" CON
LADRILLOS-N.

Responsable del proyecto:

Rafael Lahoz Beltrá

Facultad de CC. Biológicas

Departamento de Matemática Aplicada (Biomatemática)

1. OBJETIVOS PROPUESTOS EN LA PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

El mundo en el que nos desenvolvemos está habitado por ‘objetos’ cuyo *estado* o *comportamiento* cambia, y por tanto evoluciona con el tiempo, recibiendo esta clase de objetos o sus agrupaciones el nombre de *sistemas dinámicos*. Por ejemplo, una colonia de hormigas, un grupo de *brokers*, el tráfico en un calle de Madrid, la cuenta de resultados de una empresa o los organismos de un ecosistema. La predicción del estado futuro de estos sistemas requiere de la construcción de un modelo matemático. *Describir* con precisión el estado $X(t)$ o comportamiento de un sistema, *predecir* su estado futuro $X(t+1)$ y adoptar una cierta *decisión* en función del estado predicho, son tareas comunes en muchas disciplinas ya se trate de la economía, sociología, política, biología etc. En la actualidad la *gestión* y administración de una organización o sistema social se hace en los países más avanzados en función de un cierto modelo. Ahora bien, el modelo matemático es construido según nuestra visión del mundo. Curiosamente, esta visión no ha cambiado a lo largo de los siglos, adoptándose por lo general un enfoque clásico que se sustenta en dos pilares. Por un lado, el *Sensus communis* tal y como era entendido por Aristotéles o Descartes; de otro, la visión que del mundo tenemos desde el siglo XVII y en particular desde que Newton recogiera en la célebre obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* sus principales hallazgos en física y matemáticas.

En este PIMCD Núm. 127 se propuso como *objetivo principal* el diseño, creación y puesta a punto de *Newton 2.0*. Con este nombre nos referimos a una metodología docente innovadora, concretamente a un kit docente que combina elementos físicos de construcción, ladrillos y conectores, con elementos lógicos, programas de ordenador, escritos en el lenguaje visual BYOB 3.1. La idea es que manejando lo que hemos llamado como *ladrillos N* (en honor a la figura de Isaac Newton) los estudiantes de diferentes Grados, e incluso personas ya graduadas, puedan construir un modelo matemático de forma intuitiva, aplicando el sentido común y sin que sea necesaria una formación en matemáticas. Utilizando ladrillos N un estudiante debería ser capaz de representar en pocos pasos un sistema complejo como si se tratara de un juego al más puro estilo constructivista de Piaget¹. La finalidad es modelar un sistema sea de la naturaleza que sea, ya sea en fisiología, ecología, economía o en política, a partir del descubrimiento de las relaciones e interacciones entre ladrillos N. La construcción del modelo puede tener lugar de forma individual o por medio de la cooperación con otros miembros (“trabajo cooperativo” con otros compañeros) con los que se ha formado un equipo. Este no es un PIMCD de Matemáticas, siendo el objetivo el diseño de una metodología que ayude a enseñar cómo representar un sistema o fenómeno, promoviendo en el estudiante las siguientes habilidades:

- (a) El análisis de una situación.
- (b) La división de un problema (el sistema o fenómeno objeto de estudio) en partes menores.
- (c) El descubrimiento de las relaciones o interacciones entre las partes.

¹ R. Lahoz-Beltra. 2013. Jugando a la Evolución con el Ordenador. En: Jornadas sobre Investigación y Didáctica en ESO y Bachillerato. Actas del II Congreso de Docentes de Ciencias de la Naturaleza (M. González Montero de Espinosa y A. Baratas Díaz, Eds.), Santillana Educación: 55-62.

- (d) La representación de la solución en un modelo, entendiendo que el modelo representa una abstracción del sistema o problema objeto de estudio.

En resumen, la motivación del proyecto fue diseñar un producto orientado inicialmente a personas, ya sean estudiantes o no, que con escasos conocimientos de Matemáticas puedan construir un modelo matemático de un sistema dinámico. A partir del modelo será posible realizar experimentos de simulación, describir el 'funcionamiento' del sistema o fenómeno en estudio y contar con una herramienta para la toma de decisiones.

Entre otros objetivos, el uso docente de Newton 2.0 ayudará al profesor a reducir e incluso eliminar el “pánico” que los estudiantes tienen a las Matemáticas², educándoles en el manejo de metodologías basadas en conceptos y herramientas abstractas.

Finalmente, entre otros objetivos, también se propuso, una vez que el kit esté concluido y a punto, estudiar la posibilidad de *comercializar* Newton 2.0. Para conseguir este objetivo se propuso consultar a la OTRI de la UCM la fórmula más idónea y asequible en términos económicos, proteger los derechos, realizar los estudios de viabilidad comercial, etc. A este efecto, los profesores Elena Pérez-Urría, María Puelles Gallo y Rafael Lahoz-Beltrá han participado durante el año 2012-13 en el “II Laboratorio del Emprendedor”, Parque Científico de Madrid.

2. OBJETIVOS ALCANZADOS

A día de hoy, contamos con los componentes principales, es decir las “diferentes partes” o “piezas” de un **kit prototipo** de Newton 2.0. Hemos identificando cuáles deberían ser los principales elementos físicos de construcción, ladrillos y conectores, realizándose también los primeros programas en lenguaje BYOB 3.1 de los modelos resultantes. Asimismo, una vez obtenido el modelo, también disponemos de las bibliotecas de rutinas para el entorno de computación simbólica wxMaxima 12.04.0. Utilizando las bibliotecas los estudiantes pueden llevar a cabo los experimentos de simulación de una forma más sencilla, habiéndose utilizado con éxito durante los cursos 2013-14 y 2014-15 en la asignatura “Matemáticas Aplicadas a la Biología”³ del Grado en Biología, UCM.

El prototipo de Newton 2.0 permite modelar las siguientes clases de sistemas, eligiéndose ex profeso los ejemplos para el diseño del prototipo:

² R. Lahoz-Beltra et al. 2011. Adaptación de las Matemáticas para biólogos al plan Bolonia: dificultades y retos. En: Investigación y Didáctica para las Aulas del Siglo XXI. Actas del I Congreso de Docentes de Ciencias de la Naturaleza (M. González Montero de Espinosa y A. Baratas Díaz, Eds.), Santillana Educación: 155-164.

³ R. Lahoz-Beltrá, M. Gómez Flechoso. 2014. El “Laboratorio de Biomatemática” en la docencia de la Matemática Aplicada a la Biología. III Congreso de Docentes de Ciencias, Madrid 26 a 29 de marzo.

- *Modelo lineal abierto con tres compartimentos $A_{3 \times 3}$* . Por ejemplo, depuradoras conectadas entre sí, procesos en lotes o *batch*, biorreactores conectados entre sí, transferencia de biomasa en un ecosistema, etc.
- *Modelo lineal cerrado con tres compartimentos $A_{3 \times 3}$* . Por ejemplo, depuradoras conectadas entre sí, lagos conectados entre sí, etc.
- *Modelo lineal abierto $A_{2 \times 2}$* . Por ejemplo, el modelo de Richardson de guerra de armamentos.
- *Modelo lineal cerrado $A_{2 \times 2}$* . Por ejemplo, sistemas fisiológicos del tipo sangre-órgano-orina, tal es el caso del modelo de tratamiento de las arritmias con lidocaína; modelos en ciencias políticas por ej. en unas elecciones el caso de tres partidos políticos en litigio, etc.

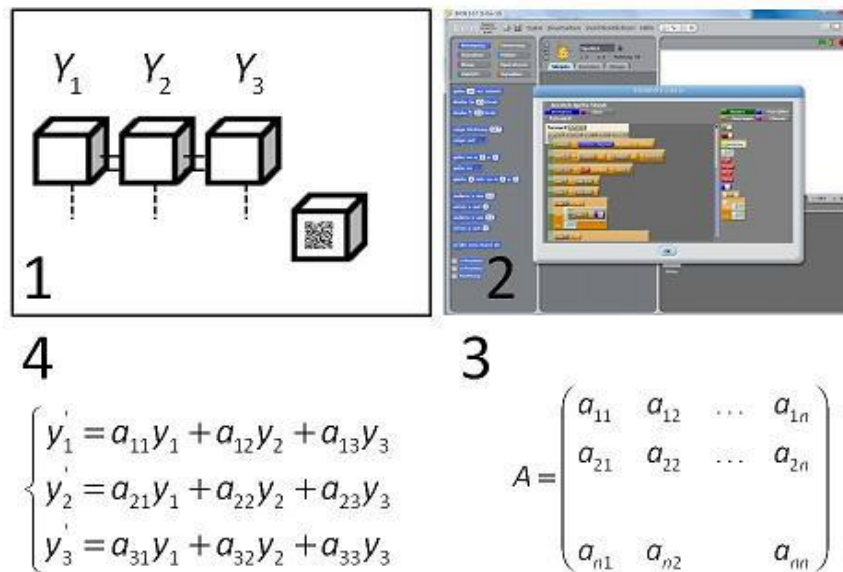
Algunos de los ejemplos han sido utilizados por los alumnos de “Matemáticas Aplicadas a la Biología”, en los cursos arriba indicados.

3. METODOLOGÍA EMPLEADA EN EL PROYECTO

En la actualidad disponemos de una colección de “sistemas cambiantes” elegidos *ad hoc* como *thinkertoys*. Los ejemplos han sido elegidos teniendo en cuenta tres factores: (i) que fueran de distintas disciplinas, y (ii) que su modelo matemático pudiera representarse por medio de una matriz de orden 2 o 3, esto es $A_{2 \times 2}$ o $A_{3 \times 3}$. En este PIMCD sólo hemos tratado con aquellos casos en los que la matriz representa a un *sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneo*. Finalmente, los sistemas estudiados debían cumplir que (iii) el número máximo de ladrillos N sea igual a 3. Es decir, que el sistema en estudio sea como máximo de tres compartimentos, y por tanto el modelo sea un sistema de tres ecuaciones diferenciales. Aunque no todos los sistemas han sido utilizados por ahora en este PIMCD, contamos con la siguiente colección de sistemas a modelar:

- Historia y Política (“Desaparición de la Civilización Maya”, “Modelo de carrera armamentística de Richardson”).
- Economía (“Modelo Oferta-Demanda”, “Intención de compra de medicamentos marca blanca en hipermercados”).
- Ingeniería (“Modelo central depuradora I”, “Modelo central depuradora II”, “Fermentación en lotes”).
- Biología (“Cadena alimentaria del plancton”, “Transferencia de biomasa en un bosque”, “Modelo fisiológico de una planta I”, “Modelo fisiológico de una planta II”, “Modelo de Streeter-Phelps de contaminación de un río”, “Modelo de contaminación en tres lagos conectados entre sí”).
- Biomedicina (“Tratamiento de las arritmias cardiacas con lidocaína”, “Modelos elementales del cáncer (I, II, III, IV)”, “Modelos fisiológicos sangre-órgano-orina”).
- Veterinaria (“Paso de la comida en los rumiantes”).

La metodología seguida en este PIMCD ha consistido en “*buscar y ensayar con algunos ejemplos la propia metodología que es Newton 2.0*” y que se resume en los pasos que se muestran en la Figura 1.



La metodología Newton 2.0 consta de las etapas (1), (2) y (3). La realización de experimentos de simulación (4) no forma parte de la metodología propuesta:

- (1) Dado un cierto sistema o fenómeno construimos su MODELO FÍSICO con ladrillos N. Un ladrillo N consta en su configuración más simple de *inputs* (I) y *outputs* (O) habiendo identificado en este proyecto un conjunto de ladrillos N que son comunes a todos los sistemas, siendo las "piezas básicas" de muchos sistemas dinámicos. Los ladrillos N se conectan entre sí con conectores (C), siendo la regla de conexión más sencilla: un conector va desde el *output* de un ladrillo N hasta el *input* de otro ladrillo N. Una vez identificadas las clases de ladrillos N, y establecidas las conexiones, representaremos el modelo físico de cada sistema.
- (2) El modelo físico es traducido a un MODELO LÓGICO o programa representándose los ladrillos N con bloques en lenguaje visual BYOB 3.1
- (3) Si se ejecuta este programa se obtiene la MATRIZ DE COEFICIENTES **A** del sistema de ecuaciones diferenciales (4), el MODELO que estamos construyendo. Finalmente, realizamos los EXPERIMENTOS DE SIMULACIÓN a partir de la matriz **A** obtenida, utilizando para tal fin las librerías de rutinas escritas para el entorno de computación simbólica wxMaxima 12.04.0.

Figura 1.- Metodología Newton 2.0.

4. RECURSOS HUMANOS

En este PIMCD Núm. 127 se ha contado con el siguiente equipo de profesores de la UCM:

- Juan Vicente Martín Zorrilla, Departamento de Ecología, Facultad de CC. Biológicas.

- Antonio Bru Espino, Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas.
- Elena Pérez-Urria Carril, Departamento de Biología Vegetal I (Botánica y Fisiología Vegetal), Facultad de CC. Biológicas.
- María Puelles Gallo, Departamento de Comercialización e Investigación de Mercados, Facultad de CC. Económicas y Empresariales.

y en calidad de Colaborador Honorífico:

- Jorge González Casanovas, Departamento de Ecología, Facultad de CC. Biológicas.

siendo responsable del proyecto:

- Rafael Lahoz-Beltrá, Departamento de Matemática Aplicada (Biomatemática), Facultad de CC. Biológicas.

5. DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

Según el enfoque clásico de la modelización un sistema es un conjunto de subsistemas que interactúan entre sí, pudiéndose representar los subsistemas como compartimentos. Bajo esta concepción de la realidad un ladrillo N es una “caja” que representa a un trocito de la realidad o sistema a modelar y que tiene un significado y operatividad que recuerda a una celda Excel. Así pues, y por ejemplo en el área de la biología, un ladrillo N podría representar según los casos el *número de elementos* de una cierta clase en un sistema (número de árboles, plancton, cantidad de fármaco, etc.) o su *estado* (árboles vivos/muertos, fitoplancton/zooplancton, sangre/hígado, etc.). En ciencias políticas un ladrillo N modelaría por ej. el número de votantes de un partido político o el número de personas que comparten una opinión, y en economía por ej. al número de unidades familiares con unos ciertos ingresos y gastos.

5.1. Metodología Newton 2.0

En una primera etapa se definió qué es un ladrillo N y se realizaron las siguientes tareas: (1) identificar las clases de ladrillos N, (2) sus posibles conexiones, y (3) se buscó una forma sencilla de representar el modelo físico de cada sistema. Las tareas (1), (2) y (3) se abordaron simultáneamente, probándose en primer lugar la posibilidad de representar el modelo por medio de *posits* de diferentes colores y formas, tal y como se muestra en la Figura 2. Pese a no ser un mal método para representar los ladrillos N y sus conexiones, se exploró una segunda posibilidad consistente en la utilización de bolas de poliuretano, conectores de madera y otros materiales (Figura 2). Esta segunda opción fue la elegida a lo largo del proyecto, rindiendo como modelo físico una

“representación molecular” del sistema en la que los ladrillos N recuerdan a átomos y los conectores a sus enlaces.

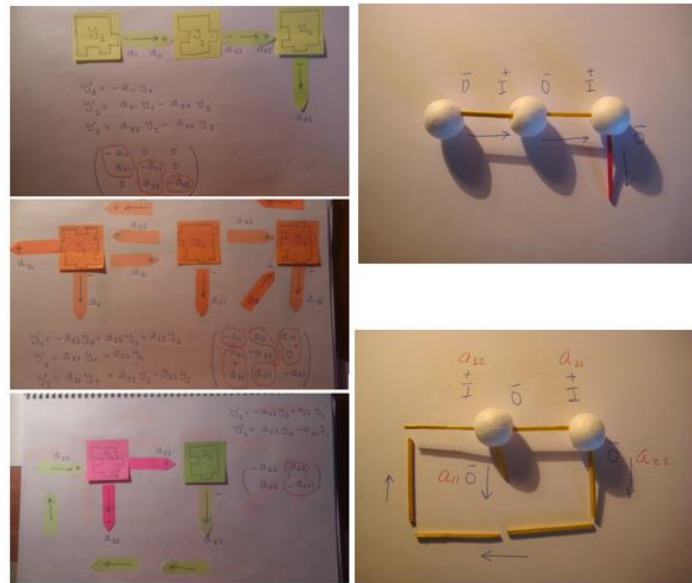


Figura 2. Ejemplos de modelo físico de un sistema representando a los ladrillos N con (izquierda) *posits* y (derecha) bolas.

A continuación, representando con bolas a los componentes de los sistemas elegidos para el proyecto, y comparando los modelos físicos obtenidos, concluimos que para sistemas formados por 2 o tres 3 subsistemas o compartimentos, el número posible de ladrillos N se reduce a los tres tipos canónicos representados en la Figura 3.

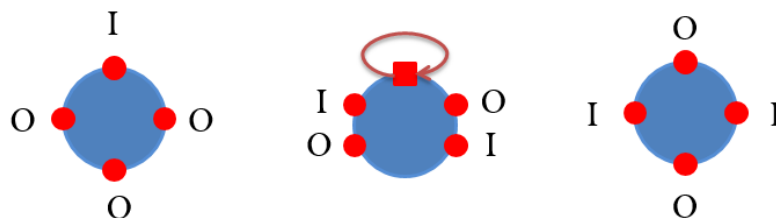


Figura 3. Clases de ladrillos N. (Izquierda) un input (I) y tres outputs (O), (centro) dos inputs, dos outputs y auto-alimentación, (derecha) dos inputs y dos outputs.

En una segunda etapa, y una vez construido el modelo físico con ladrillos N y conectores, el modelo es traducido a un modelo lógico o computacional representando los ladrillos N como *bloques de software* (Figura 4) en lenguaje BYOB 3.1. Finalmente, a partir del modelo lógico se obtiene de manera inmediata la matriz de coeficientes **A** del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, es decir el modelo matemático del sistema objeto de estudio.

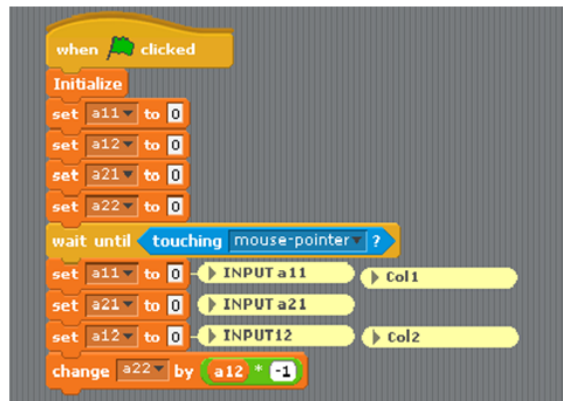


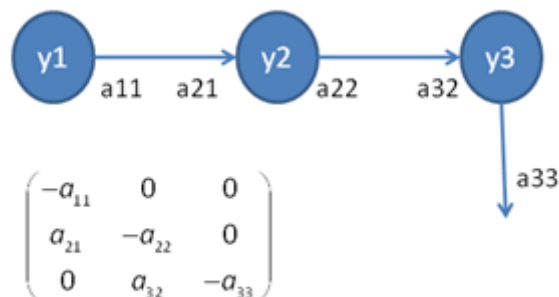
Figura 4. Ladrillos N en lenguaje BYOB 3.1

En una tercera, y última etapa, realizamos los experimentos de simulación a partir de la matriz **A** obtenida, utilizando para tal fin las librerías de rutinas escritas⁴ para el entorno de computación simbólica wxMaxima 12.04.0. La Tabla I (Apéndice) recoge las principales órdenes en wxMaxima que se han desarrollado y que facilitan considerablemente la realización de los experimentos de simulación.

5.2. ¿Cómo utilizar la metodología descrita? Ejemplos

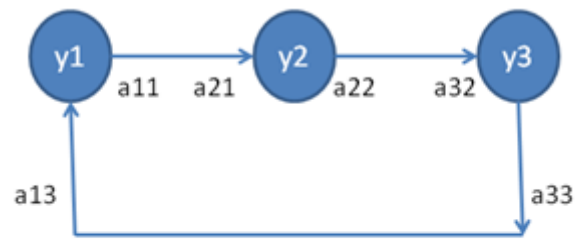
A continuación, se ilustra con distintos ejemplos la metodología introducida en este proyecto. En el APENDICE se recogen los detalles de cada uno de los ejemplos que hemos estudiado y que corresponden a los siguientes casos:

- Modelo lineal abierto con tres compartimentos $A_{3 \times 3}$:



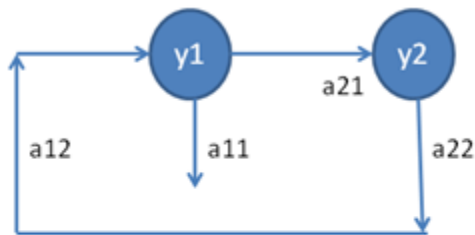
⁴ R. Lahoz Beltrá (2014) *Métodos en Biomatemática II: Ecuaciones Diferenciales con wxMaxima*. <http://eprints.ucm.es/26851/>

- Modelo lineal cerrado con tres compartimentos $A_{3 \times 3}$:



$$\begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

- Modelo lineal cerrado $A_{2 \times 2}$:



$$\begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

6. APENDICE

Un modelo lineal abierto $A_{3 \times 3}$ es aquel en el que los compartimentos se conectan en lotes, uno tras otro, tal y como se muestra en la Figura 5. En este caso tendremos que $a_{13}=0$, siendo la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y en la que se cumple que $-a_{11}=a_{21}$, $-a_{22}=a_{32}$, $-a_{33}$.

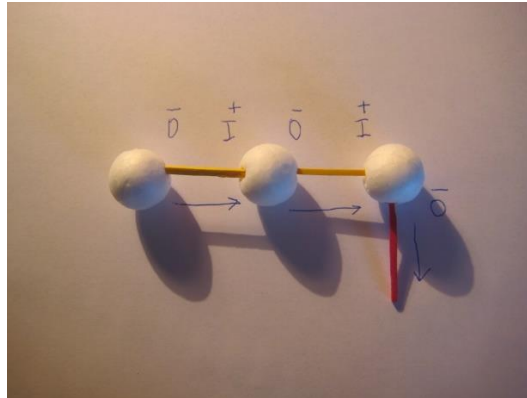


Figura 5.- Modelo lineal abierto $A_{3 \times 3}$.

Por el contrario cuando los compartimentos se conectan uno tras otro, conectándose el último con el primero (Figura 6), entonces se trata de un sistema lineal cerrado $A_{3 \times 3}$. En este caso se cumple que $a_{13} \neq 0$ y $-a_{11}=a_{21}$, $-a_{22}=a_{32}$, $-a_{33}=a_{13}$ siendo la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

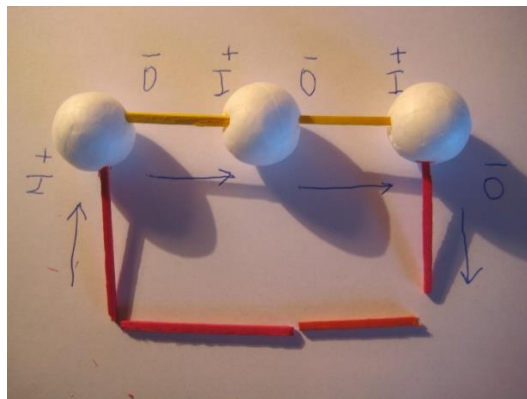


Figura 6.- Modelo lineal cerrado $A_{3 \times 3}$.

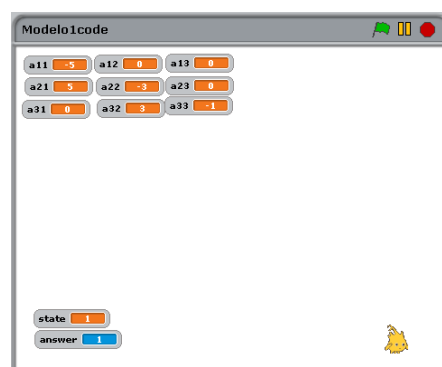
Con el fin de ilustrar el modelo de la Figura 5 consideraremos el siguiente ejemplo. Supóngase que un grupo de biólogos estudia la transferencia de biomasa en un bosque haciendo un seguimiento durante varios años (tiempo t en décadas) de los árboles vivos que se transforman en árboles muertos, y de estos últimos aquellos que se transforman en humus. Sea y_1 la variable que expresa la cantidad de biomasa del humus (y_1), en los

árboles muertos (y_2) y en los vivos (y_3). Supóngase que para dicho bosque la transferencia de biomasa es modelada por el siguiente programa en BYOB 3.1:

```

when clicked
  Initialize
  set a11 to 0
  set a12 to 0
  set a13 to 0
  set a21 to 0
  set a22 to 0
  set a23 to 0
  set a31 to 0
  set a32 to 0
  set a33 to 0
  wait until touching mouse-pointer ?
  set a11 to -5 INPUT a11 Col1
  change a21 by a11 * -1
  set a31 to 0
  set a12 to 0 Col2
  set a22 to -3 INPUT a22
  change a32 by a22 * -1
  ask ¿Estado del flujo? (1=open/0=closed) and wait Col3
  set state to answer
  if state = 1
    set a13 to 0
    set a23 to 0
    set a33 to -1 INPUT a33
  if state = 0
    set a33 to 0
    change a13 by a33 * -1
    set a23 to 0
  
```

Una vez que se ejecute el programa, si introducimos los datos relativos a las conexiones entre ladrillos N, se obtiene la matriz de coeficientes **A** que se mostrará como salida en la siguiente ventana:



A partir de la matriz **A**:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y con ayuda de las bibliotecas de rutinas para el entorno de computación simbólica wxMaxima 12.04.0, llevaremos a cabo el siguiente experimento de simulación. Si inicialmente un bosque cuenta con una cantidad de biomasa en los árboles vivos igual a 50:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

¿Cómo se transferirá la biomasa en el bosque a lo largo del tiempo?

```
(%i1) load("C:/Users/Rafa Lahoz-Beltra/Desktop/Working Area/Matematicas_BIOLOGOS/");
(%i2) A: matrix([-1,3,0],[0,-3,5],[0,0,-5]);
(%o2)  $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ 
(%i3) charpoly(A,%lambda);
(%o3)  $(-\lambda-5)(-\lambda-3)(-\lambda-1)$ 
(%i4) factor(%);
(%o4)  $-(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5)$ 
(%i5) eigenvectors(A);
(%o5)  $[[[-5,-3,-1],[1,1,1]], [[1,-\frac{4}{3},\frac{8}{15}], [1,-\frac{2}{3},0]], [[1,0,0]]]$ 
(%i6) v1:transpose([1,-4/3,8/15]);
(%o6)  $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{15} \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i7) z1:spah(-5,v1);
(%o7) 
$$\begin{bmatrix} e^{-5t} \\ \frac{4e^{-5t}}{3} \\ \frac{8e^{-5t}}{15} \end{bmatrix}$$

```

```
(%i8) v2:transpose([1,-2/3,0]);
(%o8) 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i9) z2:spah(-3,v2);
(%o9) 
$$\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ \frac{2e^{-3t}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i10) v3:transpose([1,0,0]);
(%o10) 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i11) z3:spah(-1,v3);
(%o11) 
$$\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i12) G:addcol(z1,z2,z3);
(%o12) 
$$\begin{bmatrix} e^{-5t} & e^{-3t} & e^{-t} \\ \frac{4e^{-5t}}{3} & \frac{2e^{-3t}}{3} & 0 \\ \frac{8e^{-5t}}{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i13) rank(G);
(%o13) 3
```

```
(%i14) determinant(G);
(%o14) 
$$\frac{16e^{-9t}}{45}$$

```

```
(%i15) sghec3(G);
(%o15) 
$$\begin{bmatrix} c3e^{-t} + c2e^{-3t} + c1e^{-5t} \\ \frac{2c2e^{-3t}}{3} - \frac{4c1e^{-5t}}{3} \\ \frac{8c1e^{-5t}}{15} \end{bmatrix}$$

```

```
(%i16) Y0:transpose([0,0,50]);
(%o16) 
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i17) sisconstec3(Y0),numer;
rat: replaced -1.3333333333333333 by -4/3 = -1.3333333333333333
rat: replaced -0.6666666666666667 by -2/3 = -0.6666666666666667
rat: replaced 0.5333333333333333 by 8/15 = 0.5333333333333333
(%o17) [c1=93.75, c2=-187.5, c3=93.75]

(%i18) sphec3(93.75, -187.5, 93.75);
(%o18) [ 93.75 %e^-t -187.5 %e^-3 t +93.75 %e^-5 t
        125.0 %e^-3 t -125.0 %e^-5 t
        50.0 %e^-5 t ]

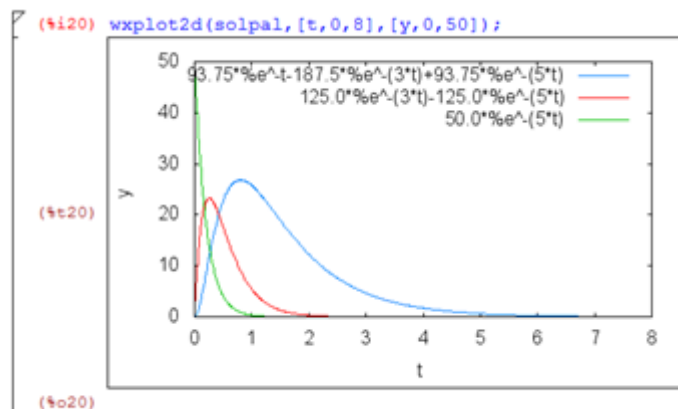
(%i19) solpal:list_matrix_entries(%);
(%o19) [93.75 %e^-t -187.5 %e^-3 t +93.75 %e^-5 t, 125.0 %e^-3 t -125.0 %e^-5 t, 50.0 %e^-5 t]

(%i17) sisconstec3(Y0),numer;
rat: replaced -1.3333333333333333 by -4/3 = -1.3333333333333333
rat: replaced -0.6666666666666667 by -2/3 = -0.6666666666666667
rat: replaced 0.5333333333333333 by 8/15 = 0.5333333333333333
(%o17) [c1=93.75, c2=-187.5, c3=93.75]

(%i18) sphec3(93.75, -187.5, 93.75);
(%o18) [ 93.75 %e^-t -187.5 %e^-3 t +93.75 %e^-5 t
        125.0 %e^-3 t -125.0 %e^-5 t
        50.0 %e^-5 t ]

(%i19) solpal:list_matrix_entries(%);
(%o19) [93.75 %e^-t -187.5 %e^-3 t +93.75 %e^-5 t, 125.0 %e^-3 t -125.0 %e^-5 t, 50.0 %e^-5 t]
```

Si ejecutamos el programa se obtendrá la siguiente figura:



representando las curvas verde, roja y azul la biomasa en los árboles vivos, muertos y humus, respectivamente.

Considérese ahora el caso de un modelo lineal cerrado $A_{2 \times 2}$ siendo la matriz de coeficientes **A**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

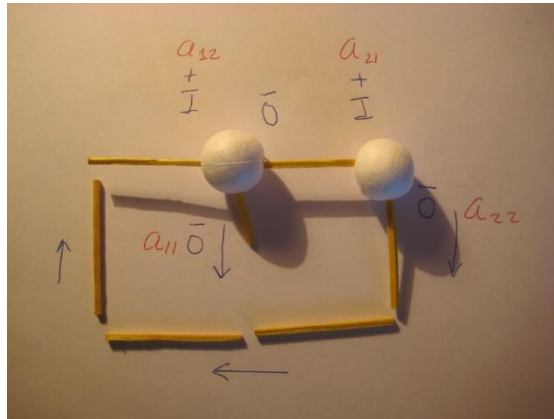
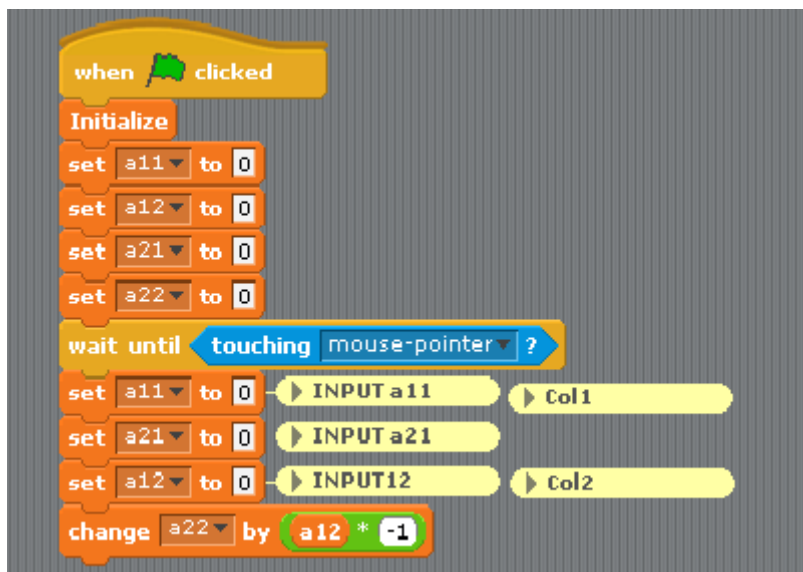
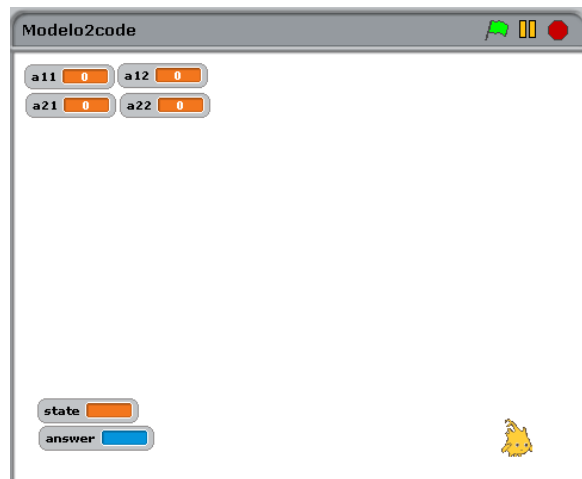


Figura 7.- Modelo lineal cerrado $A_{2 \times 2}$.

tal que $-a_{11}$ y a_{21} son independientes, y $a_{12} = -a_{22}$. En este caso el modelo físico es el representado en la Figura 7, siendo el programa en BYOB 3.1 o modelo lógico:



Una vez ejecutado se obtendrá el output (la matriz es nula al no haberse introducido valores en el ejemplo):



Un ejemplo de esta clase de modelo es el que sigue. La lidocaina es uno de los fármacos que es recetado a los pacientes para el tratamiento de la arritmia cardiaca. Si la concentración de lidocaina en la sangre (y_1) y los tejidos (y_2) del paciente es tal que supiéramos el valor de los coeficientes $a_{11}=-0.09$, $a_{12}=0.038$, $a_{21}=0.066$ y $a_{22}=-0.038$, entonces los pasos descritos serían válidos para dicha situación experimental.

No obstante, puede haber sistemas con **estructura libre**. Supóngase por ejemplo que estudiamos el flujo de nutrientes en el plancton, para lo que marcamos radioactivamente el medio, esto es el agua, en el que habita el plancton. En el ejemplo el modelo físico es tal que el átomo izquierdo representa el agua, el átomo central al fitoplancton y el átomo derecho al zooplancton (Figura 8). Sea y la variable que representa la concentración de isótopos radiactivos en el agua (y_1), fitoplancton (y_2) y zooplancton (y_3). El experimento estudia cómo el isótopo circula entre el agua y el plancton debido a que unos se alimentan de otros, modelando la cadena alimentaria, incluida la ingesta de agua por el plancton. De este estudio resultó los siguientes valores de los coeficientes $a_{11}=-3$, $a_{12}=6$, $a_{13}=5$, $a_{21}=2$, $a_{22}=-12$, $a_{23}=0$, $a_{31}=1$, $a_{32}=6$ y $a_{33}=-5$.

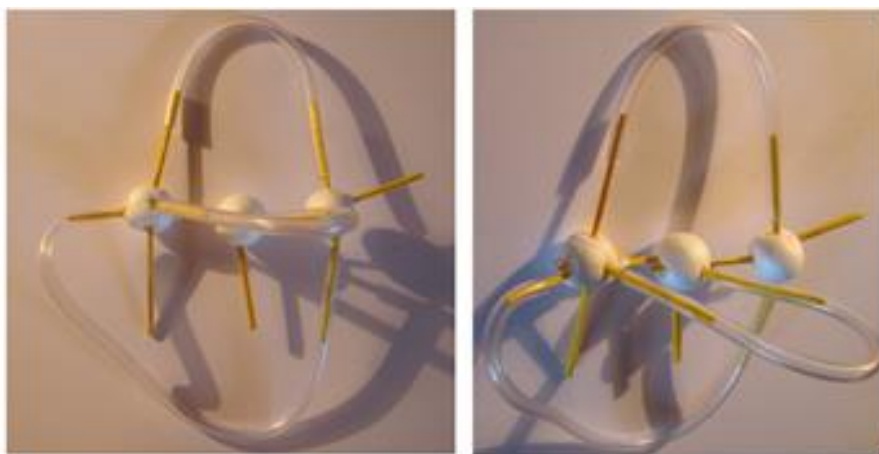
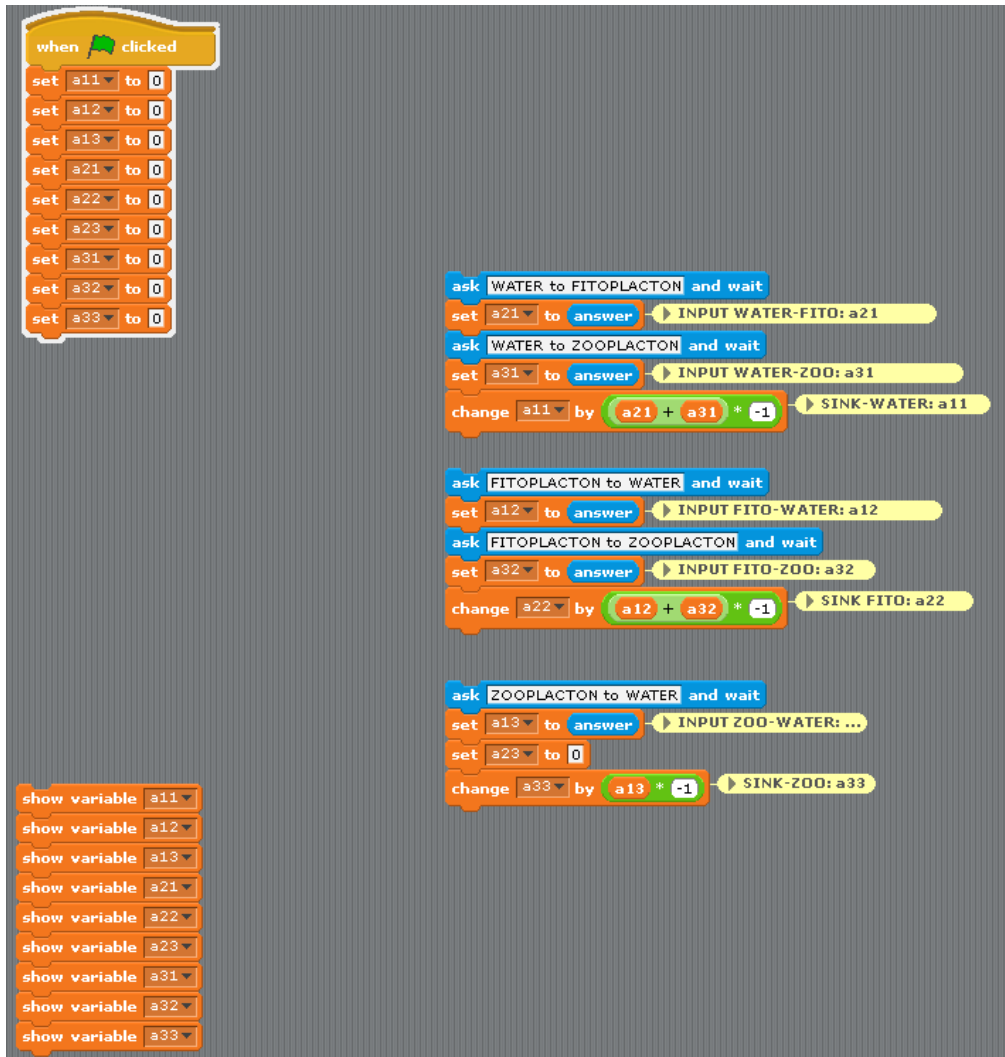


Figura 8.- Modelo de cadena alimentaria en el fitoplancton.

Desglosando en secciones el modelo lógico o programa en BYOB 3.1:



tendremos que una vez ejecutado, se obtiene la matriz de coeficientes (la matriz es nula al no haberse introducido valores en el ejemplo):

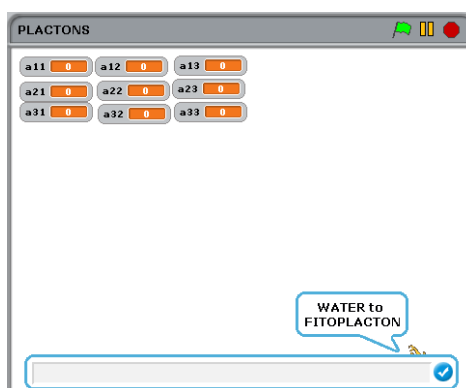


Tabla I. Órdenes de las librerías SEDLPOH.mac y SEDLPOHRC.mac

ORDEN	TAREA
spah(λ , v)	SEDLPOH.mac. $A_{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{R}$, bloque solución: $Z_i(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
spah2(A, λ , v)	SEDLPOH.mac. $A_{3 \times 3}$. $\lambda \in \mathbb{R}$, bloque solución: $Z_i(t) = e^{\lambda t} \left[\bar{v} + (A - \lambda I) \bar{v} t \right]$
spah3(A, λ , v)	SEDLPOH.mac. $A_{3 \times 3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, bloque solución: $Z_i(t) = e^{\lambda t} \left[\bar{v} + (A - \lambda I) \bar{v} t + (A - \lambda I)^2 \bar{v} \frac{t^2}{2!} \right]$
spahi	SEDLPOHRC.mac. $A_{2 \times 2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, bloques solución: $Z_i(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^{\text{Re}} \text{Cos}(\beta t) - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^{\text{Im}} \text{Sen}(\beta t) \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^{\text{Im}} \text{Cos}(\beta t) + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^{\text{Re}} \text{Sen}(\beta t) \end{bmatrix}$
M(A, λ , v)	SEDLPOH.mac. $A_{3 \times 3}$ no diagonalizable, $\lambda \in \mathbb{R}$: $(A - \lambda I)^n \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
sghec2(G)	SEDLPOH.mac. $A_{2 \times 2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dada la matriz fundamental G, obtiene la solución general de la homogénea para un sistema de dos ecuaciones.
sghec3(G)	SEDLPOH.mac. $A_{3 \times 3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dada la matriz fundamental G, obtiene la solución general de la homogénea para un sistema de tres ecuaciones.
sghi	SEDLPOHRC.mac. $A_{2 \times 2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Obtiene la solución general de la homogénea para un sistema de dos ecuaciones.
sphec2(c1, c2)	SEDLPOH.mac. $A_{2 \times 2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dados los coeficientes C, obtiene la solución particular de la homogénea para un sistema de dos ecuaciones.
sphec3(c1,c2,c3)	SEDLPOH.mac y SEDLPOHRC.mac. $A_{3 \times 3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Dados los coeficientes C, obtiene la solución particular de la homogénea para un sistema de tres ecuaciones.
sphi(c1,c2)	SEDLPOHRC.mac. $A_{2 \times 2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dados los coeficientes C, obtiene la solución particular de la homogénea para un sistema de dos ecuaciones.
sisconstec2(Y0)	SEDLPOH.mac. $A_{2 \times 2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcula los coeficientes C a partir del vector de condiciones iniciales Y0 en un sistema de dos ecuaciones. $\begin{cases} y_1(0) = c_1 e^{\lambda t} \bar{v}_1 + c_2 e^{\lambda t} \bar{w}_1 \\ y_2(0) = c_1 e^{\lambda t} \bar{v}_2 + c_2 e^{\lambda t} \bar{w}_2 \end{cases}$
sisconstec3(Y0)	SEDLPOH.mac y SEDLPOHRC.mac. $A_{3 \times 3}$. Calcula los coeficientes C a partir del vector de condiciones iniciales Y0 en un sistema de tres ecuaciones. Si $\lambda \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} y_1(0) = c_1 e^{\lambda t} \bar{u}_1 + c_2 e^{\lambda t} \bar{v}_1 + c_3 e^{\lambda t} \bar{w}_1 \\ y_2(0) = c_1 e^{\lambda t} \bar{u}_2 + c_2 e^{\lambda t} \bar{v}_2 + c_3 e^{\lambda t} \bar{w}_2 \\ y_3(0) = c_1 e^{\lambda t} \bar{u}_3 + c_2 e^{\lambda t} \bar{v}_3 + c_3 e^{\lambda t} \bar{w}_3 \end{cases}$ Si $\lambda_1(\alpha + i\beta) \in \mathbb{C}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} y_1(0) = c_1 e^{\alpha t} \bar{u}_1 \text{Cos}(\beta t) - c_2 e^{\alpha t} \bar{v}_1 \text{Sen}(\beta t) + c_3 e^{\lambda_2 t} \bar{w}_1 \\ y_2(0) = c_1 e^{\alpha t} \bar{u}_2 \text{Cos}(\beta t) - c_2 e^{\alpha t} \bar{v}_2 \text{Sen}(\beta t) + c_3 e^{\lambda_2 t} \bar{w}_2 \\ y_3(0) = c_1 e^{\alpha t} \bar{u}_3 \text{Cos}(\beta t) - c_2 e^{\alpha t} \bar{v}_3 \text{Sen}(\beta t) + c_3 e^{\lambda_2 t} \bar{w}_3 \end{cases}$