Fórmulas trigonométricas para poliedros esféricos e hiperbólicos

Raquel Díaz

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
E-28040 Madrid, Spain
radiaz@mat.ucm.es

Dedicado a Joan Tarrés en su 65 cumpleaños.

ABSTRACT

La matriz de Gram de un poliedro esférico o hiperbólico lo determina de forma única y contiene toda la información sobre los ángulos diédricos. En esta nota presentamos las fórmulas de los demás elementos del poliedro (longitudes de lados, alturas, ángulos planos) en función de su matriz de Gram. También hacemos lo mismo a partir de la matriz de longitudes.

The Gram matrix of a spherical or hyperbolic polyhedron uniquely determines it and contains all the information about the dihedral angles. In this note we present formulae for the edge lenghts, heights and planar angles of the polyhedron in term of its Gram matrix. We also do the same in terms of the length matrix.

Key words: Poliedros esféricos, poliedros hiperbólicos, matriz de Gram.

2010 Mathematics Subject Classification: Clasificación Primaria 51M10, Clasificación secundaria 51M20, 52B10.

1. Introducción

Un resultado básico de la trigonometría esférica e hiperbólica es que los triángulos están determinados unívocamente (salvo isometría) por sus ángulos. Para el resto de polígonos el resultado es falso: el espacio de polígonos de n lados tiene, salvo isometría, dimensión $2n-3$, luego n ángulos no son suficientes datos para determinar el polígono, salvo si $n = 3$.

Si pasamos a dimensión tres, ocurre que la dimensión del espacio de poliedros de un tipo combinatorio dado, salvo isometría, coincide con el número de aristas del poliedro. Luego ahora sí es natural preguntarse si los ángulos diédricos determinan el poliedro. La respuesta es afirmativa si el poliedro es simple o trivalente, es decir,

Parcialmente financiada por el Proyecto CCG10-UCM/ESP-5425.

en cada vértice inciden exactamente tres caras (es consecuencia de unos celebrados lemas de Cauchy, [1]), pero no se conoce en el caso general.

La matriz de Gram de un poliedro recoge toda la información de los ángulos entre las prolongaciones de cada dos caras del poliedro, en particular los ángulos diédricos, y determina unívocamente el poliedro (ver Sección 2). Si se lograra determinar la matriz de Gram a partir de los ángulos diédricos, se tendría una respuesta afirmativa al problema anterior. En esta nota vamos a determinar, en función de la matriz de Gram, los demás elementos del poliedro (longitudes de lados, alturas, ángulos planos).

Por otra parte, la matriz de longitudes de un poliedro recoge todas las distancias entre cada dos vértices del poliedro, en particular, las longitudes de las aristas. Daremos también fórmulas para los demás elementos del poliedro en términos de la matriz de longitudes.

Estas fórmulas generalizan las fórmulas clásicas para triángulos y tetraedros esféricos e hiperbólicos.

2. Preliminares

Nuestro interés original son los poliedros hiperbólicos. Sin embargo, la figura verticilar en cada vértice de un poliedro hiperbólico es un polígono esférico. De modo que estudiaremos polígonos y poliedros esféricos e hiperbólicos.

La geometría esférica y la hiperbólica se pueden estudiar conjuntamente. En efecto, $\mathbb{S}^d$ y $\mathbb{H}^d$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^{d+1}$ dotados de una cierta forma bilineal simétrica f. La diferencia esencial entre ambas geometrías es la signatura de esta forma bilineal. Los poliedros en ambas geometrías se pueden ver como intersección del correspondiente $\mathbb{S}^d$ o $\mathbb{H}^d$ con un cono poliedral de $\mathbb{R}^{d+1}$. Recordamos a continuación brevemente estas nociones.

La metodología será trabajar en $(\mathbb{R}^{d+1}, f)$ e interpretar al final los resultados en las geometrías esférica e hiperbólica.

2.1. Espacio geométrico. Geometrías esférica e hiperbólica

Llamamos *espacio geométrico* de dimensión d a $(\mathbb{R}^{d+1}, f)$, donde f es una forma bilineal simétrica no degenerada. Utilizamos la misma notación para la forma cuadrática asociada y a veces usaremos el término "producto escalar" para referirnos a f, aunque ésta no sea definida positiva.

Un vector $e \in \mathbb{R}^{d+1}$ determina el semiespacio $\hat{H}_e^- = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f(x, e) \leq 0\}$. Es claro que $\hat{H}_e^- = \hat{H}_{\lambda e}^-$, para todo $\lambda > 0$.

Para definir la geometría esférica, se toma la forma bilineal simétrica definida positiva $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_d^2 + x_{d+1}^2$, y el conjunto $\mathbb{S}^d = f^{-1}(1)$.

Para definir la geometría hiperbólica se toma f con signatura $(d, 1)$, $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_d^2 - x_{d+1}^2$. El *espacio hiperbólico* es el conjunto $\mathbb{H}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f(x) = -1, x_{d+1} > 0\}$. La *esfera de De Sitter* es el conjunto $S^{d-1,1} = f^{-1}(1)$, y adquiere una métrica semi-Riemanniana inducida por f.

Utilizaremos X^d para referirnos indistintamente a $\mathbb{S}^d$ o $\mathbb{H}^d$. Una *isometría* de X^d es una aplicación ortogonal de $\mathbb{R}^{d+1}$ para la forma cuadrática f que deja invariante X^d.

Los hiperplanos en X^d son intersecciones no vacías de hiperplanos de $\mathbb{R}^{d+1}$ con X^d. Dado un vector e con $f(e) = 1$, denotamos por H_e^- al semiespacio $H_e^- = \hat{H}_e^- \cap X^d$ (observemos que para que la intersección $\hat{H}_e \cap \mathbb{H}^d$ sea distinta del vacío se necesita que $f(e)$ sea positivo).

Las distancias y los ángulos se miden utilizando el producto escalar f. Así, para la geometría esférica tenemos:

1. Si $p, q \in \mathbb{S}^d$, entonces $f(p, q) = \cos d_{\mathbb{S}^d}(p, q)$.
2. Si H_{e_1}, H_{e_2} son dos hiperplanos en $\mathbb{S}^d$, entonces $f(e_1, e_2) = -\cos(H_{e_1}^- \cap H_{e_2}^-)$.
3. Si $p, e \in \mathbb{S}^d$, entonces $f(p, e) = -\operatorname{sen} d_{\mathbb{S}^d}(p, H_e)$.

Para la geometría hiperbólica tenemos:

1. Si $p, q \in \mathbb{H}^d$, entonces $f(p, q) = -\cosh d_{\mathbb{H}^d}(p, q)$.
2. Dos hiperplanos H_{e_1}, H_{e_2} hiperbólicos pueden cortarse o no, y tenemos las siguientes fórmulas:
   a) $f(e_1, e_2) = -\cos(H_{e_1}^- \cap H_{e_2}^-)$, si los hiperplanos H_{e_1}, H_{e_2} se cortan;
   b) $f(e_1, e_2) = -\cosh d_{\mathbb{H}^d}(H_{e_1}, H_{e_2})$, si los hiperplanos H_{e_1}, H_{e_2} no se cortan y ninguno de los semiespacios $H_{e_i}^-$ contiene al otro.
3. Dados un punto $p \in \mathbb{H}^d$ y un hiperplano H_e con $p \in \mathbb{H}_e^-$, entonces $f(p, e) = -\sinh d_{\mathbb{H}^d}(p, H_e)$.

A lo largo del texto utilizaremos "d" indistintamente para la distancia esférica o la hiperbólica.

2.2. Politopos. Matriz de Gram.

Una forma usual de definir un politopo es como la intersección finita de semiespacios. Así, llamamos *cono poliedral* $\hat{P}$ a un conjunto de la forma $\hat{P} = \cap_i \hat{H}_{e_i}^- \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Asumiremos siempre que el cono poliedral tiene interior no vacío y que es no degenerado, es decir, los vectores e_i que lo definen generan $\mathbb{R}^{d+1}$.

Dado un cono poliedral $\hat{P}$, siempre hay un hiperplano afín A tal que $\hat{P} \cap A$ es un politopo compacto P de dimensión d. El tipo combinatorio del cono poliedral $\hat{P}$ es, por definición, el tipo combinatorio de P. Así, un vértice de $\hat{P}$ será el rayo vectorial $[v]$ generado por un vértice v de P. En esta nota sólo trabajaremos con polígonos y poliedros, es decir, politopos de dimensión $d = 2$ ó 3, respectivamente.

Consideramos ahora en $\mathbb{R}^{d+1}$ la forma cuadrática f. Si f es definida positiva, la intersección $P = \hat{P} \cap \mathbb{S}^d$ es un *politopo esférico* . Si f tiene signatura $(d, 1)$, para que la intersección $P = \hat{P} \cap \mathbb{S}^d$ sea considerada un politopo hiperbólico pedimos que todas las caras de $\hat{P}$, salvo quizás los vértices, corten a $\mathbb{H}^d$. La condición $f(e_i) > 0$ asegura que las caras de $\hat{P}$ de dimensión máxima cortan a H^d. Un vértice $[v]$ de $\hat{P}$ corta a $\mathbb{H}^d$ si $f(v) < 0$, y en este caso se llama *vértice finito de $\mathcal{P}$*. Un vértice se llama *infinito o ultrainfinito* , si $f(v)$ es cero o positivo, respectivamente. Un politopo hiperbólico es compacto si y sólo si todos sus vértices son finitos.

Sea $\hat{P} = \cap_i \hat{H}_{e_i}^-$ un cono poliedral con los vectores e_i normalizados, es decir, $f(e_i) = 1$, para todo i. La *matriz de Gram* de $\hat{P}$ es $G = (f(e_i, e_j))_{i,j}$, que es una matriz simétrica y con 1's en la diagonal.

La matriz de Gram de un politopo P es la misma que la del cono poliedral $\hat{P}$. Nótese que la matriz de Gram contiene toda la información sobre los ángulos diédricos del poliedro. Las entradas que no son ángulos diédricos miden el ángulo en el que se cortan las prolongaciones de las caras correspondientes, o bien la distancia entre dichas prolongaciones, si éstas no se cortan (esto puede pasar en el caso hiperbólico).

Notación. Si G es una matriz simétrica, denotamos por $G\binom{i_1\ldots i_k}{j_1\ldots j_k}$ el determinante de la submatriz de G formada por las filas $i_1, \ldots, i_k$ y las columnas $j_1, \ldots, j_k$. Si $j_1 = i_1, \ldots, j_k = i_k$, abreviaremos la notación anterior por $G_{i_1\ldots i_k}$.

Lema 2.1. *La matriz de Gram de un cono poliedral lo determina unívocamente, salvo isomorfismo ortogonal para f. Como consecuencia, la matriz de Gram de un politopo esférico o hiperbólico lo determina unívocamente, salvo isometría.*

Demostración.

Para la primera afirmación, basta ver que la matriz de Gram $G = (g_{ij})$ determina los vectores e_i salvo isomorfismo ortogonal. Como $\hat{P}$ es no degenerado, G tiene rango $d+1$ y signatura igual a la signatura de f. Como G es simétrica, existe una matriz no singular A tal que $A^tJA = G$, donde J es la matriz diagonal con signatura igual a la de G. Sea B la matriz que se obtiene con las $d+1$ primeras filas de A, por lo que se tiene también que $B^tJB = G$. Los vectores e_i son las columnas de B. Sea ahora otro cono poliedral $\hat{P}' = \cap_i \hat{H}_{e_i'}^-$ cuya matriz de Gram es también igual a G. Supongamos que los vectores $e_1, \ldots, e_{d+1}$ son linealmente independientes. Entonces la submatriz de G formada por las $d+1$ primeras filas y columnas es no singular, y, como consecuencia, los vectores $e_1', \ldots, e_{d+1}'$ también son independientes y hay un isomorfismo ortogonal ϕ que transforma e_i en e_i', $i = 1, \ldots, d+1$. Para ver que $\phi(e_j) = e_j'$ para $j > d+1$, observemos que las coordenadas de e_j respecto de la base $\{e_1, \ldots, e_{d+1}\}$ son $(g_{j1}, \ldots, g_{jm})G_{1\ldots d+1}^{-1}$, y que éstas son también las coordenadas de e_j' respecto de la base $\{e_1', \ldots, e_{d+1}'\}$, de donde se tiene el resultado.

En el caso esférico, el isomorfismo ϕ sea una isometría esférica. En el caso hiperbólico, para que ϕ sea isometría hiperbólica, debe preservar $\mathbb{H}^d$. Pero esto es claro porque los dos conos poliedrales $\hat{P}, \hat{P}'$ son hiperbólicos. □

2.3. Matriz de longitudes y matriz de alturas.

Otra forma alternativa de dar un cono poliedral es como envoltura convexa de sus vértices, $\hat{P} = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_m\}$, es decir, un vector v está en $\hat{P}$ si es combinación lineal de los v_i con coeficientes no negativos. Denotamos por K a la matriz de productos escalares de los vértices, es decir, $K = (f(v_i, v_j))_{i,j}$. Observemos aquí que los elementos de la diagonal son iguales a 1 en el caso esférico, y a -1, en el caso hiperbólico. Debido a la interpretación geométrica de f, es claro que K contiene toda la información sobre las longitudes de las aristas de P, y por eso llamamos a K *matriz de longitudes* de P. Igual que la matriz de Gram, la matriz de longitudes determina el politopo salvo isometría. Finalmente, si $P = \cap_{i=1}^n H_{e_i}^-$ es un politopo con vértices $v_1, \ldots, v_m$, podemos considerar la matriz $H = (f(e_i, v_j))_{i,j}$, de tamaño $n \times r$, y que llamamos *matriz de alturas* de P porque contiene toda la información de las distancias de vértices a caras.

2.4. Cono poliedral dual.

Sea $\hat{P} = \cap_{i=1}^{n} \hat{H}_{e_i}^{-} \subset (\mathbb{R}^{d+1}, f)$ un cono poliedral y supongamos que $[v_i], \ldots, [v_m]$ son todos los vértices de $\hat{P}$. Llamamos *cono poliedral dual* (o *polar*) de $\hat{P}$ al cono poliedral $\hat{P}^* = \cap_{i=1}^{m} \hat{H}_{v_i}^{-}$. Si $\hat{P}$ es no degenerado y con interior no vacío entonces $\hat{P}^*$ también es no degenerado y con interior no vacío. Además $(\hat{P}^*)^* = \hat{P}$. Se tiene por tanto que $G(\hat{P}^*) = K(\hat{P})$ y $K(\hat{P}^*) = G(\hat{P})$. Obsérvese que el dual de un politopo esférico es de nuevo un politopo esférico. Sin embargo, el dual de un politopo hiperbólico compacto es un politopo en la esfera de De Sitter (ver [7] para más detalles).

3. Deducción de fórmulas a partir de la matriz de Gram.

En esta sección consideramos un cono poliedral $\hat{P} = \cap_i \hat{H}_{e_i}^{-}$ dado por sus caras, o equivalentemente por su matriz de Gram, y hallamos su matriz de longitudes. La clave para ello es encontrar los vértices de $\hat{P}$. No es difícil hallar los vértices salvo signo, sin embargo es más sutil averiguar correctamente los signos; para esto utilizamos los operadores de Hodge, junto con la orientabilidad del borde del politopo. Resumimos a continuación las propiedades que utilizaremos.

3.1. Operador de Hodge

La forma cuadrática f en $\mathbb{R}^{d+1}$ determina formas cuadráticas $\bigwedge^k f$ en los productos exteriores $\bigwedge^k \mathbb{R}^{d+1}$ de $\mathbb{R}^{d+1}$, definidas como

$$\bigwedge^k f(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \det\left(f(u_i, v_j)\right)_{i,j=1,\ldots,k}$$

Para simplificar la notación, en adelante utilizaremos $\langle , \rangle$ para todas las formas cuadráticas anteriores (incluida f).

Dada una orientación en $\mathbb{R}^{d+1}$, el operador de Hodge proporciona isomorfismos $*\colon \bigwedge^k f \to \bigwedge^{d+1-k} f$. Para $k = d+1$, se tiene que $*(u_1 \wedge \cdots \wedge u_{d+1})$ es el determinante de la matriz de coordenadas de los u_i respecto de una base ortonormal positivamente orientada. Para $k = d$, se tienen las siguientes propiedades, que determinan $*$ (ver por ejemplo [5]):

Lema 3.1. *Sean $u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_d, v \in \mathbb{R}^{d+1}$. Entonces:*

(a) $\langle *(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d), v \rangle = *(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d \wedge v)$

(b) $\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_d, v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \rangle = (\det f) * (u_1 \wedge \cdots \wedge u_d \wedge *(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d))$

(c) $\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_d, v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \rangle = (\det f) \langle *(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d), *(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) \rangle$

donde $\det f$ *es igual a* 1 *en el caso esférico y a* -1 *en el hiperbólico.*

En particular, del lema obtenemos que $*(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d)$ es ortogonal a $u_1, \ldots, u_d$ y tiene la misma norma que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_d$.

Aplicaremos las fórmulas anteriores a los vectores e_i que determinan un cono poliedral $\hat{P} = \cap \hat{H}^i_{e_i}$. Sea $G = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$ la matriz de Gram de este cono poliedral. Entonces:

(i) $\langle e_{i_1} \wedge \ldots e_{i_k}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \rangle = G\binom{i_1 \ldots i_k}{j_1 \ldots j_k}$, por la definición.

(ii) Sea E la matriz de coordenadas de $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{d+1}}$ respecto de una base ortonormal positivamente orientada, y sea J la expresión matricial de f en esta base ortonormal. Por definición, $*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{d+1}}) = \det E$. Por otra parte, se tiene que $\det(E^t J E) = G_{i_1 \ldots i_{d+1}}$. Se tiene por tanto que $*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{d+1}})^2 = (\det f) G_{i_1 \ldots i_{d+1}}$.

3.2. Ciclos orientados de caras. Vértices

El borde de un polígono P es topológicamente una circunferencia, que es orientable. Se define *ciclo orientado* incidente en un vértice V de P a los dos lados incidentes en V dados en un cierto orden. Un ciclo orientado determina una orientación en el borde del polígono ∂P, y decimos que dos ciclos orientados tienen la misma orientación si determinan la misma orientación en ∂P. Si denotamos por $C_1, \ldots, C_n$ las caras de un polígono orientadas cíclicamente, es inmediato que para cada i, k los ciclos C_i, C_{i+1} y C_k, C_{k+1} tienen la misma orientación.

Igualmente, el borde de un poliedro es topológicamente una esfera, que es una superficie orientable, y una orientación queda determinada por una terna ordenada de caras incidentes en un vértice. Llamamos *ciclo orientado* incidente en un vértice V a una terna ordenada de caras incidentes en V tal que las dos primeras sean adyacentes. Diremos que dos ciclos orientados tienen la misma orientación si determinan la misma orientación en el borde del poliedro.

El siguiente resultado permite calcular los vértices de un cono poliedral $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i}$ a partir de los vectores e_i cuando conocemos su tipo combinatorio (ver [2] o [3]). El resultado es válido para cualquier dimensión d, una vez definido convenientemente ciclo orientado.

Proposición 3.2. *Sea $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ con $d = 2$ o 3, un cono poliedral del tipo combinatorio de un politopo $\mathcal{P}$. Para cada vértice $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{P}$ consideramos un ciclo orientado de caras $\mathcal{C}_{i_1}, \ldots, \mathcal{C}_{i_d}$, de tal manera que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Consideramos los vectores $W_i = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})$. Entonces se tiene que los vértices de $\hat{P}$ son o bien todos los rayos vectoriales $[W_i]$, o bien todos los rayos vectoriales $[-W_i]$.*

Usando el Lema 3.1, es claro los vértices de $\hat{P}$ son los rayos generados por $\pm W_i$. El trabajo de la proposición anterior consiste en ver que, elegidos los ciclos orientados de la manera indicada, tenemos signo "+"para todos los vértices, o bien tenemos signo "−"para todos los vértices.

Salvo que estemos en el caso hiperbólico y el vértice $[\pm W_i]$ sea infinito, podemos normalizar. Así, hacemos la siguiente notación.

Notación. Si la norma de $W_i = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})$ es distinta de cero, denotamos $v_{i_1 \ldots i_d} = \frac{W_i}{\|W_i\|} = \frac{*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})}{\|*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})\|}$, donde $\|u\|$ la norma de u, es decir, $\|u\| = \sqrt{|f(u,u)|}$.

3.3. Fórmulas trigonométricas: longitudes de aristas y diagonales.

Para calcular las distancias entre dos vértices cualesquiera del politopo, sólo hay ahora que coger los vértices $v_{i_1\ldots i_d}$ correspondientes, hacer su producto escalar e interpretarlo. Así obtenemos la matriz de longitudes.

Teorema 3.3. Matriz de longitudes. *Sea $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i} \subset (\mathbb{R}^{d+1}, f)$ un cono poliedral del tipo combinatorio de un politopo $\mathcal{P}$. En el caso hiperbólico, supongamos que ningún vértice de $\hat{P}$ es infinito. Para cada vértice $\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{P}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, consideramos un ciclo $\mathcal{C}_{i_1}, \ldots, \mathcal{C}_{i_d}$ orientado, de tal manera que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Entonces la matriz de longitudes de $\hat{P}$ es*

$$\begin{aligned} K(\hat{P}) &= (\det f)\left(\langle \frac{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}}{\|e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\|}, \frac{e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d}}{\|e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d}\|}\rangle\right)_{i,j\in\{1,\ldots,m\}} \\ &= (\det f)\left(\frac{G\binom{i_1\ldots i_d}{j_1\ldots j_d}}{\sqrt{|G_{i_1\ldots i_d}|}\sqrt{|G_{j_1\ldots j_d}|}}\right)_{i,j\in\{1,\ldots,m\}} \end{aligned}$$

Demostración.

Usando la notación de la sección anterior y como consecuencia de la Proposición 3.2, los vértices finitos o ultrainfinitos del politopo geométrico $P = \hat{P} \cap X^d$ son $\epsilon v_{i_1\ldots i_d}$, donde $\epsilon = \pm 1$.

Sean $\epsilon v_{i_1\ldots i_d}$, $\epsilon v_{j_1\ldots j_d}$ dos vértices de P. Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \epsilon v_{i_1\ldots i_d}, \epsilon v_{j_1\ldots j_d}\rangle &= \langle \frac{*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d})}{\|*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d})\|}, \frac{*(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d})}{\|*(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d})\|}\rangle \\ &=_{(i)} \frac{(\det f)\langle e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}, e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d}\rangle}{\|e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_d}\|\|e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_d}\|} \\ &=_{(ii)} \frac{(\det f) G\binom{i_1\ldots i_d}{j_1\ldots j_d}}{\sqrt{|G_{i_1\ldots i_d}|}\sqrt{|G_{j_1\ldots j_d}|}}, \end{aligned}$$

donde en (i) hemos aplicado el Lema 3.1(b) y (ii) se sigue de la definición de $\wedge^d f$ y de las notaciones para la matriz de Gram. □

Observemos que en el caso esférico $G_{i_1\ldots i_d}$ es positivo, por ser el determinante de la expresión matricial de una forma bilineal simétrica definida positiva. En el caso hiperbólico, $G_{i_1\ldots i_d}$ es positivo si el vértice $\epsilon v_{i_1\ldots i_d}$ es finito y negativo si $\epsilon v_{i_1\ldots i_d}$ es ultrainfinito, pues en el primer caso es el determinante de la matriz de Gram de un $(d-1)$-politopo esférico (la figura verticilar del vértice $\epsilon v_{i_1\ldots i_d}$), y en el segundo caso es el determinante de la matriz de Gram de un $(d-1)$-politopo hiperbólico (la intersección de P con el hiperplano ortogonal a $\epsilon v_{i_1\ldots i_d}$).

Para calcular las longitudes de las aristas y de las diagonales del polígono o poliedro, basta ahora interpretar el anterior producto escalar según las fórmulas de la Sección 2.1. Así tenemos:

Corolario 3.4. *Sea $P = \cap_{i=1}^n H^-_{e_i} \subset X^2$ un polígono con caras $C_1, \ldots, C_n$ numeradas cíclicamente, y sea G su matriz de Gram. Se consideran dos vértices (finitos) $V_i =$*

$C_i \cap C_{i+1}, V_j = C_j \cap C_{j+1}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\cos\big(\mathrm{d}(V_i, V_j)\big) &= \frac{G\binom{i\,i+1}{j\,j+1}}{\sqrt{G_{i\,i+1}}\sqrt{G_{j\,j+1}}}, \quad \text{si } P \text{ es esférico;} \\
-\cosh\big(\mathrm{d}(V_i, V_j)\big) &= \frac{-G\binom{i\,i+1}{j\,j+1}}{\sqrt{G_{i\,i+1}}\sqrt{G_{j\,j+1}}}, \quad \text{si } P \text{ es hiperbólico.}
\end{aligned}$$

Si los vértices son consecutivos, es decir $j = i - 1$ se tienen las fórmulas para la longitud l_i del lado C_i:

(i) Si P es esférico, entonces

$$\cos l_i = \frac{\cos\alpha_{i\,i-1}\cos\alpha_{i\,i+1} + \cos\alpha_{i-1\,i+1}}{\operatorname{sen}\alpha_{i\,i-1}\operatorname{sen}\alpha_{i\,i+1}},$$

donde α_{ij} es el ángulo $H^-_{e_i} \cap H^-_{e_j}$

(ii) Si P es hiperbólico, entonces

$$\cosh l_i = \frac{\cos\alpha_{i\,i-1}\cos\alpha_{i\,i+1} + \cos\alpha_{i-1\,i+1}}{\operatorname{sen}\alpha_{i\,i-1}\operatorname{sen}\alpha_{i\,i+1}}.$$

Observación. Si P es un triángulo, se obtienen las fórmulas clásicas de los lados en función de los ángulos, ver por ejemplo [6]. Si partimos de un triángulo con uno, dos o los tres vértices ultrainfinitos e interpretamos convenientemente las entradas de la matriz de Gram y los productos $\langle \epsilon v_{i_1\ldots i_d}, \epsilon v_{j_1\ldots j_d}\rangle$ según las fórmulas de la Sección 2.1, obtendríamos las fórmulas para el cuadrilátero de Sacheri, el pentágono con cuatro ángulos rectos y el hexágono con todos los ángulos rectos.

Para polígonos con más de tres lados, la fórmula es exactamente la misma que para triángulos, aunque el ángulo $\alpha_{i-1\,i+1}$ no sea un ángulo del polígono.

Corolario 3.5. *Sea $P \in X^3$ un poliedro y sea G su matriz de Gram. Sean V_i, V_j dos vértices (finitos) de P y sean $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$ y $C_{j_1}, C_{j_2}, C_{j_3}$ ciclos orientados con la misma orientación. Entonces la distancia entre estos vértices viene dada por*

$$\begin{aligned}
\cos\big(\mathrm{d}(V_i, V_j)\big) &= \frac{G\binom{i_1 i_2 i_3}{j_1 j_2 j_3}}{\sqrt{G_{i_1 i_2 i_3}}\sqrt{G_{j_1 j_2 j_3}}}, \quad \text{si } P \text{ es esférico;} \\
-\cosh\big(\mathrm{d}(V_i, V_j)\big) &= \frac{-G\binom{i_1 i_2 i_3}{j_1 j_2 j_3}}{\sqrt{G_{i_1 i_2 i_3}}\sqrt{G_{j_1 j_2 j_3}}}, \quad \text{si } P \text{ es hiperbólico.}
\end{aligned}$$

3.4. Alturas.

Con las mismas notaciones que antes, consideremos ahora un vértice $\epsilon v_{i_1\ldots i_d}$ de P y un vector e_j y calculemos su producto escalar, utilizando las propiedades del operador de Hodge:

$$\langle \epsilon v_{i_1\ldots i_d}, e_j\rangle = \frac{\epsilon\langle *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}), e_j\rangle}{\| *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d})\|} = \frac{\epsilon * (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \wedge e_j)}{\sqrt{|G_{i_1\ldots i_d}|}};$$

por tanto,

$$\langle \epsilon v_{i_1\ldots i_d}, e_j\rangle^2 = \frac{(\det f) G_{i_1\ldots i_d i_j}}{|G_{i_1\ldots i_d}|}.$$

Basta ahora interpretar el primer término de la igualdad anterior según la Sección 2.1 para obtener las fórmulas para las alturas de un polígono o poliedro (lo enunciamos sólo para poliedros).

Teorema 3.6. *Sea $P \in X^3$ un poliedro y sea G su matriz de Gram. Sea V_{ijk} un vértice (finito), intersección de las caras C_i, C_j, C_k, y sea C_l una cara que no contiene ese vértice. Entonces la distancia entre ellos viene dada por*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\big(\mathrm{d}(V_{ijk}, C_l)\big) &= \frac{G_{ijkl}}{G_{ijk}}, \quad \text{si } P \text{ es esférico;} \\ \operatorname{senh}^2\big(\mathrm{d}(V_{ijk}, C_l)\big) &= \frac{-G_{ijkl}}{G_{ijk}}, \quad \text{si } P \text{ es hiperbólico.} \end{aligned}$$

3.5. Ángulos planos

La información sobre los ángulos planos queda recogida en la matriz de Gram de las caras.

Teorema 3.7. Matriz de Gram de las caras. *Sea $\hat{P} = \cap_i \hat{H}^-_{e_i} \subset (\mathbb{R}^4, f)$ un cono poliedral del tipo combinatorio de un poliedro $\mathcal{P}$ y sea $\mathcal{C}_i$ una cara de $\mathcal{P}$. Sean $\mathcal{C}_{j_1}, \ldots, \mathcal{C}_{j_r}$ todas las caras adyacentes a $\mathcal{C}_i$. Entonces la matriz de Gram de la cara $\hat{C}_i$ de $\hat{P}$ es*

$$G(\hat{C}_i) = \left(\langle \frac{e_i \wedge e_{j_k}}{\|e_i \wedge e_{j_k}\|}, \frac{e_i \wedge e_{j_l}}{\|e_i \wedge e_{j_l}\|}\rangle\right)_{k,l\in\{1,\ldots r\}} = \left(\frac{G\binom{i\, j_k}{i\, j_l}}{\sqrt{|G_{ij_k}|}\sqrt{|G_{ij_l}|}}\right)_{k,l\in\{1,\ldots r\}}.$$

Observemos que los determinantes G_{ij} que aparecen en la expresión anterior son siempre positivos porque los planos $\hat{H}_i, \hat{H}_j$ se cortan.

Demostración.

Las caras de $\mathcal{C}_i$ son $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{j_1}, \ldots, \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{j_r}$. Para simplificar la notación, llamamos $\hat{H}_k$ a $\hat{H}_{e_k}$. El hiperplano que contiene la cara $\hat{C}_i$ es $\hat{H}_i$. Sean $e'_{j_1}, \ldots, e'_{j_1} \in \hat{H}_i$ los vectores ortogonales exteriores a $\hat{H}_i \cap \hat{H}^-_{j_1}, \ldots, \hat{H}_i \cap \hat{H}^-_{j_r}$ y con norma 1, luego la matriz de Gram de $\hat{C}_i$ es la matriz de productos escalares de estos vectores.

Puesto que los vectores e'_{j_k} son ortogonales a e_i, se tiene que

$$\langle e'_{j_k}, e'_{j_l}\rangle = \langle e_i \wedge e'_{j_k}, e_i \wedge e'_{j_l}\rangle.$$

Sea $\hat{H}'_{j_k} \subset \mathbb{R}^4$ el hiperplano ortogonal a $\hat{H}_i$ que contiene a $\hat{H}_i \cap \hat{H}_{j_k}$, y sea $(H'_{j_k})^-$ el semiespacio que contiene $\hat{H}_i \cap \hat{H}^-_{j_k}$. Es decir, el vector e'_{j_k} es ortogonal exterior a $(H'_{j_k})^-$. Como H'_{j_k} está en el haz de hiperplanos generado por $\hat{H}_i$ y $\hat{H}_{j_k}$, se tiene que e'_{j_k} es combinación lineal de e_i y e_{j_k}, y por tanto los vectores $e_i \wedge e'_{j_k}$ y $e_i \wedge e_{j_k}$

son proporcionales. Además, el signo de la constante de proporcionalidad es positivo, porque ambos $(H'_{j_k})^-$ *y* $H^-_{j_k}$ *contienen* $\hat{H}_i \cap \hat{H}^-_{j_k}$*. Se sigue entonces que*

$$\langle e_i \wedge e'_{j_k}, e_i \wedge e'_{j_l} \rangle = \langle \frac{e_i \wedge e_{j_k}}{\|e_i \wedge e_{j_k}\|}, \frac{e_i \wedge e_{j_l}}{\|e_i \wedge e_{j_l}\|} \rangle,$$

de donde se obtiene la primera igualdad del resultado, y la segunda igualdad es sólo la definición del producto $\wedge^2 f$*.* □

Matriz de longitudes de las caras. La matriz de longitudes $K(\hat{C}_i)$ de la cara $\hat{C}_i$ no es más que la submatriz de $K(\hat{P})$ correspondiente a los índices de los vértices de $\hat{C}_i$. Por otra parte, $K(\hat{C}_i)$ se podría obtener también a partir de $G(\hat{C}_i)$, según el Teorema 3.3. Comprobamos a continuación que ambos métodos dan el mismo resultado.

Sean $\hat{V}_k, \hat{V}_l$ dos vértices de $\hat{C}_i$, determinados por las caras $\hat{C}_{j_k}, \hat{C}_{j_{k+1}}$ y $\hat{C}_{j_l}, \hat{C}_{j_{l+1}}$, respectivamente. Si los índices $j_k, j_{k+1}, j_l, j_{l+1}$ están ordenados cíclicamente (según el borde de la cara $\hat{C}_i$), se tiene que los ciclos orientados $\hat{C}_i, \hat{C}_{j_k}, \hat{C}_{j_{k+1}}$ y $\hat{C}_i, \hat{C}_{j_l}, \hat{C}_{j_{l+1}}$ tienen la misma orientación. Por tanto, la entrada (k, l) de la matriz $K(\hat{C}_i)$ es igual a

$$(\det f) \frac{G\binom{i\, j_k\, j_{k+1}}{i\, j_l\, j_{l+1}}}{\sqrt{|G_{ij_kj_{k+1}}|}\sqrt{|G_{ij_lj_{l+1}}|}}. \tag{1}$$

Por otra parte, del Teorema 3.3 aplicado a $G(\hat{C}_i)$, se tiene que la entrada (k, l) de la matriz $K(\hat{C}_i)$ es igual a

$$\det(f|_{\hat{H}_i}) \frac{G(\hat{C}_i)\binom{j_k\, j_{k+1}}{j_l\, j_{l+1}}}{\sqrt{|G(\hat{C}_i)_{j_kj_{k+1}}|}\sqrt{|G(\hat{C}_i)_{j_lj_{l+1}}|}}. \tag{2}$$

Tenemos que comprobar que las dos expresiones anteriores son iguales. Observemos que $\det(f|_{\hat{H}_i}) = \det f$, puesto que, en el caso hiperbólico, $\hat{H}_i$ corta al espacio hiperbólico. Para simplificar las expresiones, denotemos $\lambda_{j_k} = 1/\sqrt{|G_{ij_k}|}$. Aplicando ahora el Teorema 3.7, se tiene que los determinantes involucrados en (2) son:

$$\begin{aligned}
G(\hat{C}_i)\tbinom{j_k\, j_{k+1}}{j_l\, j_{l+1}} &= \lambda_{j_k}\lambda_{j_{k+1}}\lambda_{j_l}\lambda_{j_{l+1}} \begin{vmatrix} G\binom{ij_k}{ij_l} & G\binom{i\, j_k}{ij_{l+1}} \\ G\binom{ij_{k+1}}{i\, j_l} & G\binom{ij_{k+1}}{ij_{l+1}} \end{vmatrix} && (3)\\
G(\hat{C}_i)_{j_kj_{k+1}} &= \lambda^2_{j_k}\lambda^2_{j_{k+1}} \begin{vmatrix} G\binom{ij_k}{ij_k} & G\binom{i\, j_k}{ij_{k+1}} \\ G\binom{ij_{k+1}}{i\, j_k} & G\binom{ij_{k+1}}{ij_{k+1}} \end{vmatrix} && (4)\\
G(\hat{C}_i)_{j_lj_{l+1}} &= \lambda^2_{j_l}\lambda^2_{j_{l+1}} \begin{vmatrix} G\binom{ij_l}{ij_l} & G\binom{i\, j_l}{ij_{l+1}} \\ G\binom{ij_{l+1}}{i\, j_l} & G\binom{ij_{l+1}}{ij_{l+1}} \end{vmatrix}. && (5)
\end{aligned}$$

Ahora, la igualdad de las expresiones (1) y (2) se deduce directamente de la siguiente identidad de Sylvester (ver [4] para la expresión general de las identidades de Sylvester):

Lema 3.8. *Sea* $A = (a_{ij})$ *un matriz cuadrada de orden 3, y sea* B *la matriz que se obtiene orlando la entrada* a_{11} *con una fila y una columna del resto de filas y columnas de* A*. Entonces* $\det B = \det A$.

Para nuestro caso, aplicamos el lema anterior a la matriz $G\left[\begin{smallmatrix} i & j_k & j_{k+1} \\ i & j_l & j_{l+1}\end{smallmatrix}\right]$ (submatriz de G formada por las filas i, j_k, j_{k+1} y las columnas i, j_l, j_{l+1}). Se obtiene que $G\left(\begin{smallmatrix} i & j_k & j_{k+1} \\ i & j_l & j_{l+1}\end{smallmatrix}\right)$ es igual al determinante que aparece en el segundo miembro de la expresión (3). Igualmente, aplicando el lema a la matriz $G\left[\begin{smallmatrix} i & j_k & j_{k+1} \\ i & j_k & j_{k+1}\end{smallmatrix}\right]$, tenemos que $G_{ij_kj_{k+1}}$ es igual al determinante que aparece en el segundo miembro de (4), y si lo aplicamos a la matriz $G\left[\begin{smallmatrix} i & j_l & j_{l+1} \\ i & j_l & j_{l+1}\end{smallmatrix}\right]$, obtenemos que $G_{ij_lj_{l+1}}$ es igual al determinante que aparece en el segundo miembro de (5). Por tanto se tiene finalmente que las expresiones (1) y (2) son iguales.

Corolario 3.9. Ángulos planos. *Sea $P \subset X^3$ un poliedro esférico o hiperbólico. Sea α el ángulo plano de la cara C_i limitado por las caras C_i y C_k. Entonces*

$$-\cos\alpha = \frac{G\binom{i\,j}{i\,k}}{\sqrt{|G_{ij}|}\sqrt{|G_{ik}|}} = \frac{G\binom{i\,j}{i\,k}}{\sqrt{G_{ij}}\sqrt{G_{ik}}}.$$

4. Caras en función de vértices

En el otro sentido, consideramos ahora un cono poliedral como envoltura convexa de sus vértices, $\hat{P} = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_m\}$.

Para deducir las fórmulas trigonométricas a partir de la matriz de longitudes, realizamos un proceso totalmente análogo al de la sección anterior. En primer lugar definimos ciclo de vértices.

Para un polígono P, un *ciclo orientado de vértices* incidentes en un lado de P son los dos vértices de ese lado dados en un cierto orden.

Si P es un poliedro, llamamos *ciclo orientado (de vértices)* incidente en una cara C de P a tres vértices ordenados contenidos en esta cara tal que los dos primeros sean adyacentes. Es claro que un ciclo orientado de vértices induce una orientación del polígono o poliedro. Decimos que dos ciclos orientados tienen la misma orientación si inducen la misma orientación en el polígono o poliedro. Se tiene una proposición totalmente análoga a la Proposición 3.2, cambiando "vértices" por "caras" y viceversa.

Proposición 4.1. *Sea $\hat{P} = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ con $d = 2$ ó 3, un cono poliedral del tipo combinatorio de un politopo $\mathcal{P}$. Para cada cara $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{P}$ consideramos un ciclo orientado de vértices $\mathcal{V}_{i_1}, \ldots, \mathcal{V}_{i_d}$, de tal manera que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Consideramos los vectores $E_i = *(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d})$. Entonces se tiene que las caras de $\hat{P}$ son o bien todos los semiespacios $\hat{H}^-_{E_i}$, o bien todos los semiespacios $\hat{H}^-_{(-E_i)}$.*

Notación. Denotamos $e_{i_1\ldots i_d} = \frac{E_i}{\|E_i\|} = \frac{*(v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_d})}{\|*(v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_d})\|}$. Nótese que el denominador es siempre no nulo, incluso en el caso hiperbólico, si todos los vértices son finitos o infinitos (de hecho, tanto en el caso esférico como hiperbólico, $f(E_i) > 0$).

La proposición anterior se puede probar de forma idéntica a la demostración de la Proposición 3.2 (véase [2]). Alternativamente, se puede aplicar la Proposición 3.2 al cono poliedral dual.

Ahora, la matriz de Gram y las fórmulas trigonométricas para ángulos diédricos, alturas y ángulos planos se obtienen exactamente igual que en las Secciones 3.3, 3.4 y 3.5. Las enunciamos todas a continuación.

Matriz de Gram. Sea $\hat{P} = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_m\}$ un cono poliedral del tipo combinatorio de un politopo $\mathcal{P}$ y K su matriz de longitudes. Para cada cara $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{P}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideramos un ciclo $\mathcal{V}_{i_1}, \ldots, \mathcal{V}_{i_d}$ orientado, de tal manera que todos estos ciclos tengan la misma orientación. Entonces la matriz de longitudes de $\hat{P}$ es

$$\begin{aligned} G(\hat{P}) &= (\det f)\left(\langle \frac{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}}{\|v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_d}\|}, \frac{v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}}{\|v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_d}\|}\rangle\right)_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \\ &= (\det f)\left(\frac{K\binom{i_1\ldots i_d}{j_1\ldots j_d}}{\sqrt{|K_{i_1\ldots i_d}|}\sqrt{|K_{j_1\ldots j_d}|}}\right)_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \end{aligned}$$

Ángulos de polígonos. Sea $P \subset X^2$ un polígono con vértices $V_1, \ldots, V_m$ numerados cíclicamente, y denotemos por α_i el ángulo en el vértice V_i. Entonces:

(i) Si P es esférico, se tiene

$$-\cos\alpha_i = \frac{\cos l_{i\,i-1}\cos l_{i\,i+1} - \cos l_{i-1\,i+1}}{\operatorname{sen} l_{i\,i-1}\operatorname{sen} l_{i\,i+1}},$$

donde l_{ij} es la longitud del lado de vértices V_i, V_j.

(ii) Si P es hiperbólico, entonces

$$\cos\alpha_i = \frac{\cosh l_{i\,i-1}\cosh l_{i\,i+1} - \cosh l_{i-1\,i+1}}{\operatorname{senh} l_{i\,i-1}\operatorname{senh} l_{i\,i+1}}.$$

Obsérvese que se recuperan las fórmulas clásicas para los triángulos.

Ángulos diédricos de poliedros. Si P es un poliedro y C_i, C_j dos caras adyacentes, denotemos por α_{ij} el ángulo diédrico entre ellas. Sean $V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$ y $V_{j_1}, V_{j_2}, V_{j_3}$ ciclos orientados con la misma orientación incidentes en V_i, V_j respectivamente. Entonces:

(i) Si P es esférico, se tiene

$$-\cos\alpha_{ij} = \frac{K\binom{i_1 i_2 i_3}{j_1 j_2 j_3}}{\sqrt{K_{i_1 i_2 i_3}}\sqrt{K_{j_1 j_2 j_3}}}$$

(ii) Si P es hiperbólico,

$$-\cos\alpha_{ij} = \frac{-K\binom{i_1 i_2 i_3}{j_1 j_2 j_3}}{\sqrt{K_{i_1 i_2 i_3}}\sqrt{K_{j_1 j_2 j_3}}}.$$

Alturas. Sea V_l un vértice del poliedro $P \in X^3$ y sea C_{ijk} una cara que contiene los vértices V_i, V_j, V_k y no contiene V_l. Entonces la distancia entre ellos viene dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\big(\mathrm{d}(C_{ijk}, V_l)\big) &= \frac{K_{ijkl}}{K_{ijk}}, \quad \text{si } P \text{ es esférico;} \\ \operatorname{senh}^2\big(\mathrm{d}(C_{ijk}, V_l)\big) &= \frac{K_{ijkl}}{K_{ijk}}, \quad \text{si } P \text{ es hiperbólico.} \end{aligned}$$

Ángulos planos. La matriz de longitudes de una cara es simplemente una submatriz de la matriz de longitudes del poliedro. A partir de la matriz de longitudes de la cara se calcula la matriz de Gram de esa cara.

Referencias

[1] A.L. Cauchy, *Sur les polygones et polyèdres*, J. Ec: Polytechnique 16, 87-99, 1813.

[2] R. Díaz, *Matrices de gram y espacios de ángulos diédricos de poliedros*, tesis doctoral Univ. Complutense de Madrid, 1996.

[3] R. Díaz, *A Characterization of Gram Matrices of Polytopes* Discrete Comput. Geom. 21:581-601, 1999.

[4] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices* Vol. I. Chelsea Publishing Company, New york, 1959.

[5] B. Iversen, *Hyperbolic Geometry*, Cambridge University Press, 1992.

[6] J.G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag New York Inc., 1994.

[7] I. Rivin, C.D. Hodgson, *a Characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, Invent. Math. 111, 77-111, 1993.