Documento de Trabajo
9227

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA PROBABILIDAD DE RUINA EN UN CASO DE REASEGURO CUOTA - PARTE CON VARIAS SUBCARTERAS

José A. Gil Fana
Antonio Heras Martínez
José L. Villar Zanon

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID.
Campus de Somosaguas. 28.223 MADRID,

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA PROBABILIDAD DE RUINA EN UN CASO DE REASEGURO CUOTA-PARTE CON VARIAS SUBCARTERAS

AUTORES:

JOSE ANTONIO GIL FANA

ANTONIO HERAS MARTINEZ

JOSE LUIS VILAR ZANON

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA FINANCIERA Y ACTUARIAL

1.- INTRODUCCION

En el seno de la empresa aseguradora se realizan diversas actividades cuyo comportamiento determina el resultado de cada ejercicio.

Considerando únicamente la actividad puramente aseguradora, esto es, el que podemos denominar negocio de seguros en sentido estricto (cobro de primas - pago de siniestros), entendemos que el riesgo para la empresa de seguros estriba en la posibilidad de que una siniestralidad excesiva le impida hacer frente a las obligaciones derivadas de los siniestros, esto es, caiga en un estado de insolvencia.

Ciertamente la siniestralidad X correspondiente a una cartera en un determinado periodo de tiempo es una variable aleatoria.

Para hacer frente a la siniestralidad la empresa aseguradora dispone de los ingresos por primas del periodo cuya cuantía es:

$$(1 + \lambda).P$$

en la expresión anterior tenemos la prima pura P, que coincide con la esperanza matemática de la siniestralidad E(X), mas un recargo de seguridad establecido habitualmente como un porcentaje λ de la prima pura.

Cuando los ingresos por primas no bastan para hacer frente a la siniestralidad se habrá de recurrir a las reservas de solvencia S.

Es importante disponer de alguna medida de la "peligrosidad" de la cartera. En la literatura y práctica actuarial se han empleado varias.

Algunas de ellas consideran sólo la siniestralidad, asi sucede con su varianza, desviación típica, semivarianza etc. Es claro que grandes valores de estas medidas indican la existencia de elevadas probabilidades de que se produzca una siniestralidad muy superior a la media siendo este hecho un síntoma claro de "peligrosidad".

Otras medidas, como la probabilidad de ruina, tienen en cuenta también los ingresos por primas y las reservas de solvencia. La *probabilidad de ruina* de un periodo no es más que la probabilidad de que la siniestralidad del mismo supere la cuantía de los ingresos por primas y las reservas de solvencia, esto es,

$$P(X > S + (1 + \lambda)P)$$

En el caso en que el empleo de cualquiera de estas medidas nos indique una elevada peligrosidad de la cartera, podemos recurrir al reaseguro.

El reaseguro supone, en principio, trasladar parte del riesgo a otra empresa de seguros (reaseguradora). Esta se hará cargo de una parte de la siniestralidad en función del tipo de tratado a cambio, evidentemente, de un precio.

En el presente trabajo estudiaremos, bajo hipótesis no excesivamente restrictivas, el efecto del reaseguro en su modalidad cuota-parte en la peligrosidad de la cartera, destacándose un sorprendente resultado en la probabilidad de ruina que intentaremos interpretar: **"en determinadas circunstancias al incrementar la cuota de reaseguro y, por tanto, el volumen de negocio retenido la probabilidad de ruina disminuye".**

2.- HIPOTESIS BASICAS.

Consideremos una entidad aseguradora con las siguientes características:

a) Su cartera total se encuentra dividida en dos subcarteras.[1] Representaremos por X_1 y X_2 la siniestralidad de cada una de ellas en un determinado periodo de tiempo, supondremos que son variables aleatorias independientes que siguen la distribución normal[2], $N(\mu_1,\sigma_1)$ y $N(\mu_2,\sigma_2)$ respectivamente. Es claro que la siniestralidad de la cartera total también será normal

$$N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

b) Los ingresos por primas recargadas cobradas son respectivamente

$$(1 + \lambda_1).P_1$$

y

$$(1 + \lambda_2).P_2$$

donde $P_1 = E(X_1)$, $P_2 = E(X_2)$ y λ_1 y λ_2 son los correspondientes recargos de seguridad.

c) La empresa dispone de unas reservas de solvencia de cuantía S.

d) Existe la posibilidad de reasegurar cada una de las subcarteras en la modalidad cuota-parte. Recordemos que esta modalidad de reaseguro se caracteriza porque una vez fijada la denominada cuota de reaseguro $a \in [0,1]$, acaecido un siniestro de cuantia X, aX correrá a cargo de la empresa cedente mientras que la aceptante se hará cargo de de (1-a)X.

Ciertamente, si a_1 y a_2 son las cuotas de reaseguro fijadas para cada subcartera, la siniestralidad de cada una de ellas será normal $N(a_1\mu_1, a_1\sigma_1)$ y $N(a_2\mu_2, a_2\sigma_2)$ respectivamente. La distribución de la cartera total despues de reaseguro será tambien normal

$$N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}\ )$$

Supondremos que las primas se reparten entre la cedente y la aceptante en función de la cuota de reaseguro, esto es, de las primas de la primera subcartera, $a_1(1 + \lambda_1).P_1$ quedarán en poder de la aceptante y $(1 - a_1)(1 + \lambda_1).P_1$ será para la cedente; igualmente de las primas de la segunda subcartera $a_2(1 + \lambda_2).P_2$ quedaran en poder de la cedente y $(1 - a_2)(1 + \lambda_2).P_2$será para la aceptante.

3.- ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL REASEGURO EN LA PELIGROSIDAD DE LA CARTERA.

Estudiaremos a continuación la relación existente entre las cuotas de reaseguro y la "peligrosidad" de la cartera.

Ciertamente si consideramos la varianza de la siniestralidad como medida de la misma no hay mas que fijarse en su expresión

$$\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2$$

para concluir que es creciente con a_1 y a_2 en $[0,1]x[0,1]$ lo que de alguna forma está de acuerdo con nuestra idea sobre la función del reaseguro. Podría recurrirse al estudio de evolución de la relación entre la varianza o la desviación típica y la media o los recursos disponibles pero entendemos que los resultados son de confusa interpretación.

Tomemos ahora como medida de la "peligrosidad" de la cartera la probabilidad de ruina cuya interpretación es bastante mas concreta y clara.

La probabilidad de ruina ψ en un periodo es la probabilidad del suceso "la cuantía de la siniestralidad total en un periodo supera a la suma de las reservas y de los ingresos por primas en ese mismo periodo" (consideradas todas las magnitudes después de reaseguro). Por tanto podemos expresar la probabilidad de ruina después de reaseguro de la siguiente forma:

$$\psi(a_1,a_2) = P\left\{X > S + \left(1 + \lambda_1\right)\mu_1 a_1 + \left(1 + \lambda_2\right)\mu_2 a_2\right\} =$$

$$= P\left\{ \frac{X - \mu_1 a_1 - \mu_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}} > \frac{S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}} \right\}.$$

Llamando

$$\varphi(a_1,a_2) = \frac{S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}},$$

y teniendo en cuenta que

$$Z = \frac{X - \mu_1 a_1 - \mu_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}}$$

es una v.a. distribuida N(0,1) podemos escribir:

$$\psi(a_1,a_2) = (1/\sqrt{2\pi}).\int_{\varphi(a_1,a_2)}^{+\infty} \exp\left\{-t^2/2\right\}.dt.$$

o bien,

$$\psi(a_1,a_2) = 1 - (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\varphi(a_1,a_2)} \exp\left\{-t\ /2^2\right\}.dt$$

La simplicidad de la hipótesis de normalidad de la siniestralidad total nos va a permitir realizar de forma muy sencilla el cálculo de las derivadas parciales de ψ respecto a las cuotas de reaseguro a_1 y a_2. En efecto, recordando que:

$$\varphi(a_1,a_2) = \frac{S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2}{\sqrt{\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2}}$$

y atendiendo al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^2} \arrow[r, "\varphi"'] & {[0,+\infty)} \arrow[r, "g"'] & {[0,1]} \\
(a_1,a_2) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\psi = g\circ\varphi"'] & \varphi(a_1,a_2) \arrow[r] & 1 - (1/\sqrt{2\pi})\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi(a_1,a_2)} \exp\left\{-t^2/2\right\}.dt = \psi(a_1,a_2).
\end{tikzcd}$$

podemos calcular $\frac{\partial\psi}{\partial a_1}$ mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} = \frac{dg}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left\{-(1/2).\varphi^2(a_1,a_2)\right\}.\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}$$

Teniendo en cuenta que es:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \frac{\mu_1\lambda_1\left(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2\right) - \left(S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2\right)\sigma_1^2 a_1}{\left(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2\right)^{3/2}},$$

sustituyendo obtenemos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left\{-(1/2).\varphi^2(a_1,a_2)\right\}.\frac{\left(S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2\right)\sigma_1^2 a_1 - \mu_1\lambda_1\left(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2\right)}{\left(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2\right)^{3/2}}$$

Es importante el estudio del signo de esta derivada y no resulta ser especialmente complicado.

Es claro que:

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} < 0$$

cuando

$$\left(S + \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2\right) \sigma_1^2 a_1 - \mu_1\lambda_1 \left(\sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2\right) < 0 ,$$

esto es cuando

$$a_1 < \frac{\mu_1\lambda_1\sigma_2^2 a_2^2}{\sigma_1^2\left(S + \mu_2\lambda_2 a_2\right)}$$

Evidentememte

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} > 0$$

cuando

$$a_1 > \frac{\mu_1 \lambda_1 \sigma_2^2 a_2^2}{\sigma_1^2 \left(S + \mu_2 \lambda_2 a_2 \right)}$$

Tenemos un resultado ciertamente interesante: puede suceder que fijada la cuota de reaseguro a_2 de una de las carteras, al aumentar la cuota de reaseguro a_1 de la otra y, por tanto, aumentar el negocio retenido, disminuya la probabilidad de ruina (intervalo en el que la derivada $\partial\psi/\partial a_1$ es negativa). Parece claro que este hecho se debe al efecto de la diversificación del riesgo. A partir de un determinado valor de a_1 la probabilidad de ruina aumenta al aumentar el negocio retenido (intervalo en el que la derivada $\partial\psi/\partial a_1$ es positiva).

Nos parece interesante establecer una función que asocia a cada valor de a_2 el correspondiente valor de a_1 para el que la derivada $\partial\psi/\partial a_1$ se hace cero (en este caso además pasa de ser negativa a ser positiva).

De

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} = 0$$

se obtiene fácilmente

$$a_1 = f_1(a_2) = \frac{\mu_1 \lambda_1 \sigma_2^2 a_2^2}{\sigma_1^2 \left(S + \mu_2 \lambda_2 a_2 \right)}$$

Análogamente puede calcularse $\partial\psi/\partial a_2$ obteniendose que

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_2} < 0 \quad \text{cuando} \quad a_2 < \frac{\mu_2\lambda_2\sigma_1^2 a_1^2}{\sigma_2^2\left(S + \mu_1\lambda_1 a_1\right)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_2} > 0 \quad \text{cuando} \quad a_2 > \frac{\mu_2\lambda_2\sigma_1^2 a_1^2}{\sigma_2^2\left(S + \mu_1\lambda_1 a_1\right)}$$

Igualmente de

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_2} = 0$$

tenemos

$$a_2 = f_2(a_1) = \frac{\mu_2\lambda_2\sigma_1^2 a_1^2}{\sigma_2^2\left(S + \mu_1\lambda_1 a_1\right)}$$

No es difícil analizar las expresiones

$$a_1 = f_1(a_2) = \frac{\mu_1\lambda_1\sigma_2^2 a_2^2}{\sigma_1^2\left(S + \mu_2\lambda_2 a_2\right)}$$

y

$$a_2 = f_2(a_1) = \frac{\mu_2\lambda_2\sigma_1^2 a_1^2}{\sigma_2^2\left(S + \mu_1\lambda_1 a_1\right)}$$

estudiando cómo los valores y las posibles variaciones en los parámetros del modelo: μ_i, σ_i, λ_i, a_i (i=1,2) y S, determinan los correspondientes valores de las cuotas de retención hasta los que la probabilidad de ruina es decreciente.

A modo de ejemplo considerando $a_1=f_1(a_2)$, si σ_1 aumenta y permanecen inalterados los valores del resto de los parámetros indicados, el valor a_1 decrece, con lo cual el intervalo a lo largo del cual la probabilidad de ruina es decreciente es de amplitud menor; esto puede entenderse si pensamos en que una σ_1^2 mayor indica una mayor dispersión de la siniestralidad en la primera subcartera por lo que al incrementar la retención en la misma la peligrosidad de la cartera total crece ahora mas rápidamente.

Esperamos profundizar más en este resultado analizando con mayor detenimiento las relaciones anteriores e intentando estudiar si se verifica en situaciones mas generales.

Concluimos este "papel" refiriéndolo a un caso particular.

4.- ESTUDIO DE UN CASO PARTICULAR

Supongamos que, manteniendo la hipótesis de normalidad y de independencia, la media y desviación típica de la siniestralidad de las dos subcarteras son

$$\mu_1 = 90 \ , \ \sigma_1 = 18 \quad ; \quad \mu_2 = 120 \ , \ \sigma_2 = 27$$

respectivamente; los recargos de seguridad $\lambda_1 = 0{,}05$, $\lambda_2 = 0{,}1$ y las reservas de solvencia $S = 20$.

La probabilidad de ruina en función de las cuotas de reaseguro viene dada por

$$\psi(a_1,a_2) = 1 - (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\varphi(a_1,a_2)} \exp\left\{-t\ /2^2\right\}.dt$$

donde

$$\varphi(a_1,a_2) = \frac{20 + 4{,}5\ a_1 + 12\ a_2}{\sqrt{324a_1^2 + 729a_2^2}}$$

Para los valores de nuestro ejemplo y considerando el caso en que $a_2=1$ (se retiene la totalidad de la segunda subcartera) obtenemos:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \frac{256.a_1 - 81}{18.\left(4a_1^2 + 9\right)^{3/2}}.$$

Por otra parte para la expresión $a_1=f_1(a_2)$ obtenemos (despues de sencillas simplificaciones):

$$a_1 = f_1(a_2) = \frac{81\ a_2^2}{32.(3a_2 + 5)}.$$

(También podría haberse expresado $a_2=f_2(a_1)$).

En las figuras No. 1 y 2 están representadas gráficamente las funciones $\partial\psi/\partial a_1$, $a_1 = f_1(a_2)$.

La primera función nos da directamente el signo de

$$\frac{\partial\psi(a_1,1)}{\partial a_1} \quad \text{para } a_1\in[0,1],$$

ya que los otros dos factores implicados en la derivada parcial resultan ser siempre positivos. Observemos que al ser esta derivada negativa para todo $a_1\in(0\ ,\ 0'31)$ la probabilidad de ruina será decreciente sobre dicho intervalo.

La segunda función nos proporciona los pares (a_1,a_2) para los cuales la derivada de la probabilidad de ruina después de reaseguro se anula. Así, el cuadrado $[0,1]^2$ queda dividido en tres regiones en las que sucede lo siguiente:

*Si fijamos un pleno $a_2^0 \in [0,1]$ en la segunda subcartera, los valores para los cuales la probabilidad de ruina disminuye serán aquellos correspondientes al segmento de la vertical que, elevada desde a_2^0, esté contenido en la región II. Es decir, los valores a_1 tales que:

$$0 < a_1 < \frac{81.\left(a_2^0\right)^2}{32.(3a_2^0 + 5)}$$

*Los valores de a_1 correspondientes al segmento contenido en la región I serán aquellos para los que la probabilidad de ruina aumenta. Es decir, los valores a_1 tales que:

$$\frac{81.\left(a_2^0\right)^2}{32.(3a_2^0 + 5)} < a_1 < 1$$

*Los pares pertenecientes a la curva $a_1=f_1(a_2)$ son aquellos plenos de retención para los cuales la probabilidad de ruina alcanza un punto crítico:

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} = 0.$$

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

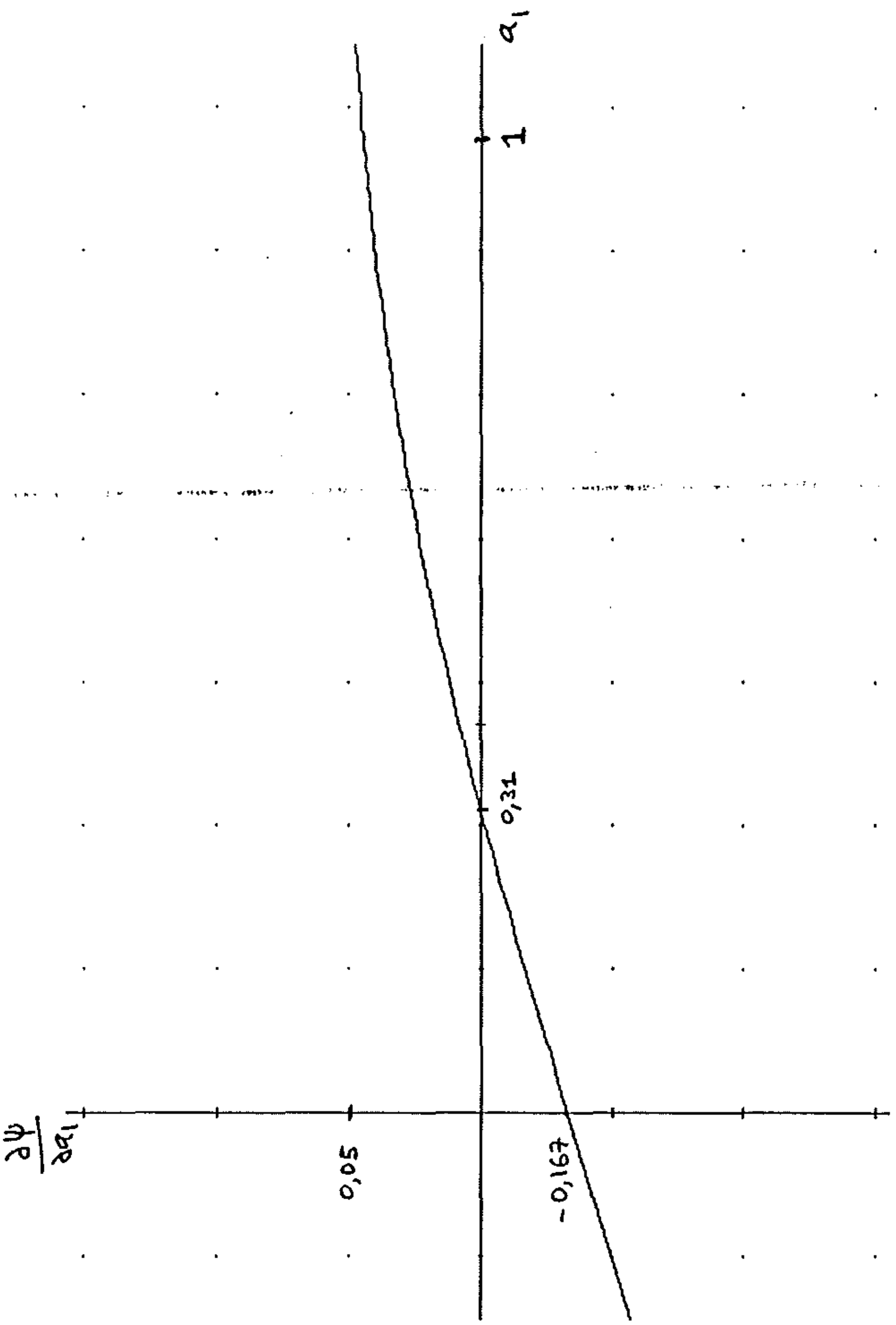

FIGURA No.1.

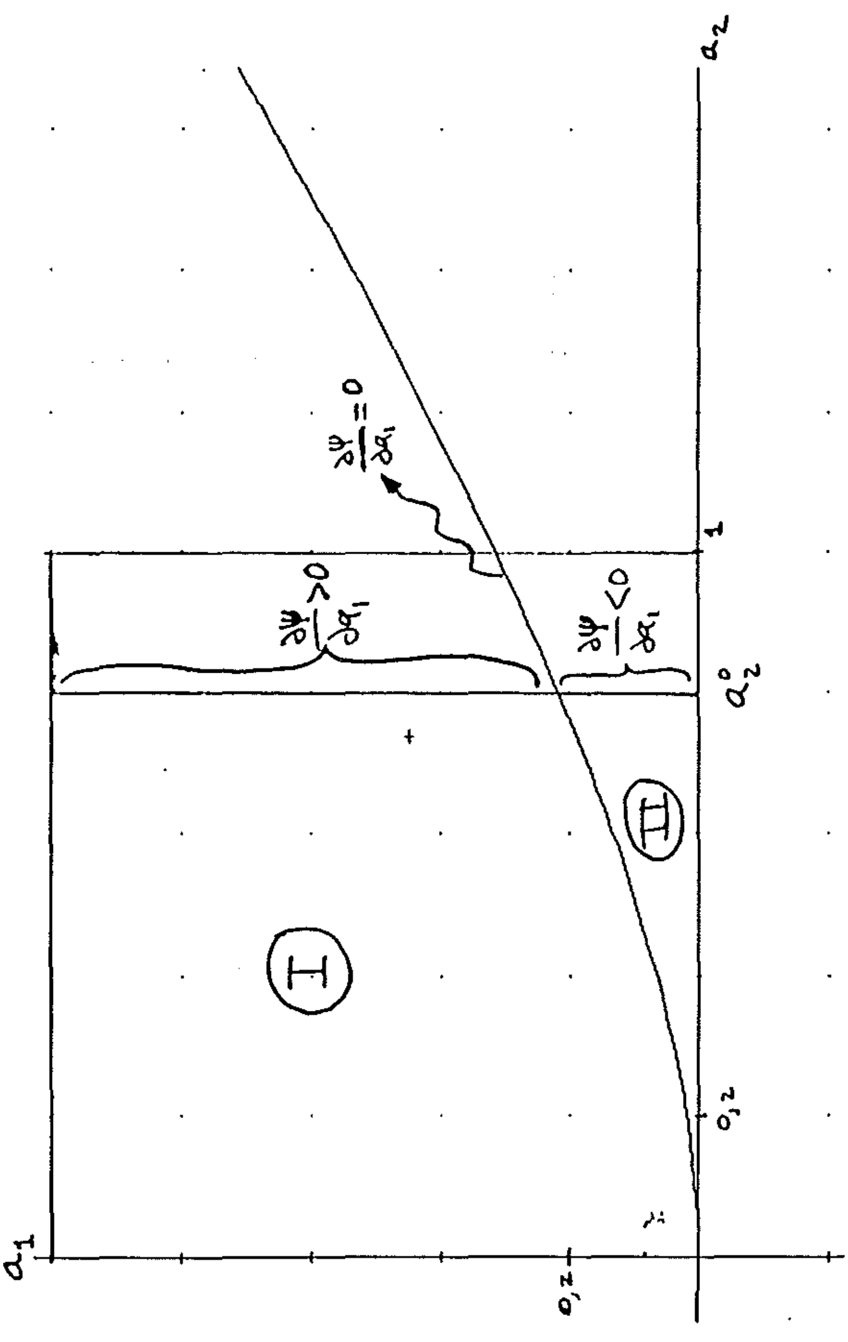

FIGURA No.2.

BIBLIOGRAFIA.

BALBAS,A./GIL FANA,J.A.:- UNA APLICACION DE LA PROGRAMACION MULTIOBJETIVO AL REASEGURO. ANALES DEL INSTITUTO DE ACTUARIOS ESPAÑOLES (1988), pp. 35-58.

BALBAS,A./GIL FANA,J.A./HERAS,A.:LA DESVIACION TIPICA Y LA VARIANZA COMO MEDIDAS DEL RIESGO EN UN PROBLEMA DE REASEGURO OPTIMO. PREVISION Y SEGURO 6 (1990), pp.63-80.

BEARD, PENTIKAINEN Y PESONEN.- RISK THEORY. METHUEN Y Co LTD. 1984.

BUHLMAN,H.: MATHEMATICAL METHODS IN RISK THEORY. SPRINGER VERLAG. 1970.

GERBER,H.: AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL RISK THEORY. S.S. HUEBNER FOUNDATION No.8.1979.

GRANDELL,J.: ASPECTS OF RISK THEORY. SPRINGER VERLAG.1991.

PESONEN,M.: OPTIMAL REINSURANCES. SCANDINAVIAN ACTUARIAL JOURNAL (1984), pp.65-90.

[1] La consideración de únicamente dos subcarteras no supone pérdida de generalidad, lo hacemos para dar mayor claridad a los calculos realizados.

[2] En relación con la aplicabilidad de la distribución normal para el estudio de la siniestralidad puede consultarse la obra de Beard, Pentikainen y Pesonen (1984).