Documento de Trabajo
9 0 1 9

LA ECUACION DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS

Manuel Morán Cabré

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES.- UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
Campus de Somosaguas. 28023 - MADRID

Esta publicación de Documentos de Trabajo pretende ser cauce de expresión y comunicación de los resultados de los proyectos de investigación que se llevan a cabo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid. No obstante, la publicación está abierta a investigadores de otras instituciones que deseen difundir sus trabajos en ella.

Los Documentos de Trabajo se distribuyen gratuitamente a las Universidades e Instituciones de Investigación que lo solicitan. Asímismo, las peticiones personales pueden ser atendidas en la medida en que se disponga de ejemplares en existencia.

Se ruega a las personas e instituciones interesadas en solicitar ejemplares que utilicen el boletín de pedido que figura seguidamente.

DOCUMENTOS DE TRABAJO

Boletín de Pedido.

Nombre de la persona o institución: ....

....

Calle: .... nº ....

Ciudad: ....Distrito Postal:.........País: ....

Solicita una suscripción permantente ....[ ]
(sólo Universidades e Instituciones de Investigación)

Solicita los Documentos de Trabajo cuyos números se relacionan a continuación: ____

____

Enviar a:
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Vicedecano
Campus de Somosaguas. 28023 MADRID. ESPAÑA.

LA ECUACION DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS

Datos personales.

Manuel Morán Cabré. Doctor en Matemáticas por la U.C.M. Profesor del departamento de Análisis Económico de la Facultad de Económicas de la U.C.M.

RESUMEN.

Este trabajo tiene como centro el estudio de la ecuación recurrente que rige la formación de los números combinatorios. Las mismas técnicas que permiten encontrar su solución con condiciones iniciales arbitrarias, van abriendo puertas para sucesivas generalizaciones que permiten el tratamiento de la ecuación general en diferencias parciales, lineal y de primer orden con dos variables. Se muestran ejemplos de aplicación para resolver problemas combinatorios: problemas de ortópolis, problema de los hiperplanos, aplicaciones sobreyectivas entre conjuntos...La particularidad del trabajo es que se encuentran explícitamente las soluciones, a partir de ciertos polinomios que hemos llamado polinomios combinatorios. La redacción de este artículo concluyó en Marzo de 1986, aunque las ideas que condujeron al mismo habían surgido varios años antes.

1- LA ECUACION DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS

Sea $f(m,n)$ una función real de dos variables enteras no negativas ($m, n \in \mathbb{Z}_+$) que verifica la siguiente ley de recurrencia:

$$f(m,n) = f(m-1,n) + f(m-1,n-1)$$

Si además se imponen las condiciones iniciales

$$(1)\quad \begin{array}{l} f(i,0) = 1 \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}_+ \\ f(0,i) = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}_+ ,\quad i \neq 0 \end{array}$$

Tenemos una ecuación recurrente que caracteriza a los números combinatorios $\binom{m}{n} = f(m,n)$

Escribiendo el cuadro:

$m \downarrow$ \ $n \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Cuadro 1

Se observa como a partir de las condiciones iniciales $f(0,i)$, ---- $f(i,0)$ escritas en la primera fila y primera columna del cuadro -- se puede obtener de manera única cualquier elemento del mismo a -- partir de la ley de recurrencia como se puede demostrar facilmente por doble inducción sobre los valores de m y n .

Este hecho no depende de cuales sean los valores particulares que tome f en $(0,i)$ e $(i,0)$. Así podemos afirmar que:

P-1 : Existe una única función

$$f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando

a) $f(m,n) = f(m-1,n) + f(m-1,n-1)$

b) $f(k,0) = a_k \ \forall\, k$

c) $f(0,k) = b_k \ \forall\, k \quad , k \neq 0$

donde a_k y b_k son números reales arbitrarios

A la condición a) la llamaremos ecuación de los números combinatorios, e.n.c., mientras que b) y c) son las condiciones iniciales.

P-2 : Si f_1 y f_2 cumplen la e.n.c. , entonces tambien la cumple la función $f= c_1f_1+ c_2f_2$. Es decir, las soluciones de la e.n.c. forman una variedad lineal . (c_1 , $c_2\in \mathbb{R}$)

Tenemos:

$$\begin{aligned}(c_1f_1+ c_2f_2)(m,n) &= c_1f_1(m,n)+ c_2f_2(m,n) = \\ &= c_1f_1(m-1,n)+ c_1f_1(m-1,n-1)+ \\ &+ c_2f_2(m-1,n)+ c_2f_2(m-1,n-1) = \\ &= (c_1f_1+ c_2f_2)(m-1,n)+ (c_1f_1+ c_2f_2)(m-1,n-1)\end{aligned}$$

Nuestra tarea consiste en encontrar una base de dicha variedad lineal, es decir un sistema de soluciones linealmente independientes y tal que toda solución pueda expresarse como combinación lineal - del citado sistema.

P-3 : El sistema formado por las soluciones α_k y β_k que cumplen las condiciones iniciales:

$$\forall k \left| \begin{array}{l} \alpha_k(i,0)= 0 \forall i\neq k \\ \alpha_k(k,0)= 1 \\ \alpha_k(0,i)= 0 \forall i \end{array}\right. \qquad \forall k\neq 0 \left| \begin{array}{l} \beta_k(i,0) = 0 \forall i \\ \beta_k(0,k) = 1 \\ \beta_k(0,i) = 0 \forall i\neq k \end{array}\right.$$

Es una base de la variedad lineal de las soluciones de la e.n.c. - A estas condiciones iniciales y base llamaremos condiciones iniciales y base canónicas.

a) : Independencia lineal.

Como el elemento neutro es la función $\phi(m,n)= 0 \forall m,n$, si :

$$\sum\lambda_i\alpha_i+ \sum\mathcal{N}_i\beta_i = \phi$$

teniendo en cuenta las condiciones iniciales para α_k y $\beta_k, \forall k$:

$$\sum\lambda_i\alpha_i\ (k,0)+\sum\mathcal{N}_i\beta_i\ (k,0)= \lambda_k = \phi(k,0) = 0$$

Por lo mismo se ve que $\mathcal{N}_k= 0 \forall k\neq 0$ y esto prueba la i. l.

b) : La base canónica es sistema de generadores del espacio de soluciones.

Basta tomar $f=\sum_0^\infty a_i\alpha_i +\sum_0^\infty b_i\beta_i$ para que sean satisfechas las condiciones iniciales arbitrarias $f(k,0)= a_k \forall k$, $f(0,k)= b_k \forall k\neq 0$.

Es necesario asegurarse de que las sumas infinitas que figuran en esta expresión están bién definidas. Procedemos para ello a identificar α_k y β_k

α_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮									
K	1	0	0	0	0	0	0	0	0
K+1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
K+2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
K+3	0	1	2	1	0	0	0	0	0
K+4	0	1	3	3	1	0	0	0	0
K+5	0	1	4	6	4	1	0	0	0

Cuadro 2

Comparando este cuadro con el cuadro 1, se observa que en él, todos los elementos de índice de fila mayor que k, y de columna mayor que 0, resultan de someter a los elementos del cuadro 1 a una traslación $\vec{V}$ (k+1,1). Así:

$$\forall\, m>k \;,\; n\geqslant 1 \quad \alpha_k(m,n)=\binom{m-k-1}{n-1}$$

$$\forall\, m\leqslant k \;,\; n\neq 0 \quad \alpha_k(m,n)= 0$$

$$m= k \;,\; n= 0 \quad \alpha_k(m,n)= 1$$

(Si se desea demostración, por inducción).

Procediendo de igual manera con β_k

β_K	0	1	2	3	....	K								
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	6	15	20	15	6	1	0	0
7	0	0	0	0	0	1	7	21	35	35	21	7	1	0
8	0	0	0	0	0	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0

Cuadro 3

Obtenemos $\forall$ m y $n\geqslant k$ los elementos de este cuadro resultan de someter los del cuadro 1 a una traslación según $\vec{V}(0,k)$. Así

$$\forall\, m \text{ y } n\geqslant k,\; \beta_k=\binom{m}{n-k}$$

$$\forall\, m \text{ y } n< k,\; \beta_k(m,n)= 0$$

(Prueba por inducción).

Ahora en la expresión $f(m,n)=\sum_0^\infty a_i\alpha_i(m,n)+\sum_0^\infty b_i\beta_i(m,n)$, ambas sumas son finitas pues los únicos sumandos no nulos se producen cuando $m\geqslant k$ y $n>k$ respectivamente.

Mas concretamente , sabiendo que también existen las siguientes limitaciones impuestas por las características de los números combinatorios (que a su vez dependen de la forma particular de la ley de recurrencia) :

$$k > m-n, \binom{m-k-1}{n-1} = 0 \; ; \; k < n-m, \binom{m}{n-k} = 0$$

quedará:

$$(2) \qquad m \neq 0 \text{ y } n \neq 0 \, , \quad f(m,n) = \sum_{0}^{m-n} a_k \binom{m-k-1}{n-1} + \sum_{k_0}^{n} b_k \binom{m}{n-k}$$

donde k_o será igual al máximo de 1 y n-m. El valor de f(m,n) cuando m ó n son nulos vendrá dado por las condiciones iniciales, aunque al caso m= 0 y n $\neq$ 0 también puede aplicársele la fórmula (2)

<u>Observación</u> : Si es m< n entonces desaparecen todos los términos del sumatorio primero. Ello es debido a que la forma particular de la ley de recurrencia causa que los elementos del cuadro de soluciones situados por encima de la diagonal principal son independientes de las condiciones iniciales a_k.

2 - PROBLEMA DE LOS HIPERPLANOS

Vamos a ver un caso de aplicación de lo expuesto en el anterior -- apartado :

El número máximo de regiones determinadas en $\mathbb{R}^n$ por m hiperplanos satisface la ecuación recurrente:

$$(3) \qquad \mathcal{C}_n(m) = \mathcal{C}_n(m-1) + \mathcal{C}_{n-1}(m-1)$$

Si ponemos $\mathcal{C}_n(m) = f(m,n)$, entonces la ecuación (3) se escribe --- como la e.n.c. .Es natural partir de las condiciones iniciales:

$$\mathcal{C}_k(0) = 1 = a_k \; ; \quad \mathcal{C}_0(k) = 1 = b_k \text{ si } k \neq 1$$

Según P-1, las soluciones para $\mathcal{C}_n(m)$ existen y son únicas. Sus valores se desarrollan con arreglo al siguiente cuadro:

$\mathcal{C}_n(m)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	1	4	7	8	8	8	8	8	8	8	8
4	1	5	11	15	16	16	16	16	16	16	16
5	1	6	16	26	41	32	32	32	32	32	32
6	1	7	22	42	67	73	64	64	64	64	64
7	1										

Cuadro 4

Sustituyendo las condiciones iniciales en (2) quedará:

$$\mathcal{C}_n(m) = \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-1-k}{n-1} + \sum_{k=k_0}^{n} \binom{m}{n-k}$$

Si $m \geqslant n$, $k_0 = 1$ y el segundo sumando se escribirá:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{m}{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i}$$

mientras el primero, debido a una conocida propiedad de los números combinatorios será:

$$\sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-1-k}{n-1} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = \binom{m}{n}$$

y queda en total

$$\mathcal{C}_n(m) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i}$$

Si $m < n$, según la observación del final del apartado primero, el - primer sumatorio sera nulo y en el segundo $k_0 = n-m$:

$$\mathcal{C}_n(m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$$

Esta expresión también es válida para m=n, caso incluido en $n \leqslant m$.

3 - GENERALIZACION DE LA E.N.C. : E.N.C. CON COEFICIENTES CONSTANTES

La ecuación que ahora se pretende resolver es la:

$$f(m,n) = qf(m-1,n) + pf(m-1,n-1) \quad , \quad p,q \in \mathbb{R}$$

Ecuación que vamos a llamar binomial.

Las P-1,P-2 y P-3 son satisfechas por esta ecuación. Naturalmente es necesaria una caracterización de las α_k y β_k que cumplen las -- condiciones iniciales canónicas, y serán nuestra base para el es-- pacio de soluciones.

α_K	0	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0	0
⋮	0	0	0	0	0	0	0
⋮	0	0	0	0	0	0	0
K	1	0	0	0	0	0	0
	0	p	0	0	0	0	0
	0	pq	p^2	0	0	0	0
	0	pq^2	$2p^2q$	p^3	0	0	0
	0	pq^3	$3p^2q^2$	$3p^3q$	$1p^4$	0	0
	0	pq^4	$4p^2q^3$	$6p^3q^2$	$4p^4q$	p^5	0
	0	pq^5	$5p^2q^4$	$10p^3q^3$	$10p^4q^2$	$5p^5q$	p^6

Cuadro 5

Se tiene para α_k

$$\alpha_k(m,n) = \binom{m-1-k}{n-1} p^n q^{m-n-k} \quad \text{(prueba por inducción)}$$

En relación a β_k :

β_K			K					
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	q	p	0	0	0	0
	0	0	q^2	$2qp$	p^2	0	0	0
	0	0	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3	0	0
	0	0	q^4	$4q^3p$	$6q^2p^2$	$4qp^3$	p^4	0
	0	0	q^5	$5q^4p$	$10q^3p^2$	$10q^2p^3$	$5qp^4$	p^5
	0	0	q^6	$6q^5p$	$15q^4p^2$	$20q^3p^3$	$15q^2p^4$	$6qp^5$
	0	0	q^7	$7q^6p$	$21q^5p^2$	$35q^4p^3$	$35q^3p^4$	$21q^2p^5$
	0	0	q^8	$8q^7p$	$28q^6p^2$	$56q^5p^3$	$70q^4p^4$	$56q^3p^5$
	0	0	q^9	$9q^8p$	$36q^7p^2$	$84q^6p^3$	$126q^5p^4$	$84q^4p^5$

Cuadro 6

Es decir:

$$\beta_k(m,n) = \binom{m}{n-k} q^{m-n+k} p^{n-k} .$$

La solución general para condiciones iniciales a_k y b_k será:

(4) $$f(m,n) = \sum_0^{\infty} a_k \binom{m-1-k}{n-1} p^n q^{m-n-k} + \sum_0^{\infty} b_k \binom{m}{n-k} p^{n-k} q^{m-n+k} =$$

$$= \sum_0^{m-n} a_k \binom{m-1-k}{n-1} p^n q^{m-n-k} + \sum_{k_0}^{n} b_k \binom{m}{n-k} p^{n-k} q^{m-n+k}$$

donde como sabemos $k_0 = \max(1,n-m)$.

3.1 - Casos particulares

Vamos a destacar dos casos particulares de interés:

a) $P = -1$ y $q = 1$

La ecuación binomial es ahora :

$$f(m,n) = f(m-1,n) - f(m-1,n-1)$$

La fórmula (4) toma ahora la expresión:

$$f(m,n) = \sum_{0}^{m-n} (-1)^n a_k \binom{m-1-k}{n-1} + \sum_{k_0}^{n} (-1)^{n-k} b_k \binom{m}{n-k}$$

b) La probabilidad de n aciertos en m pruebas de un mismo experimento, si es p la probabilidad de acierto en una prueba y $q = 1-p$ será:

$$P(m,n) = f(m,n) = qf(m-1,n) + pf(m-1,n-1)$$

Esto es, satisface la recurrencia binomial.

La probabilidad de ningún acierto en k pruebas será:

$$f(k,0) = a_k = q^k$$

La probabilidad de k aciertos en 0 pruebas será :

$$f(0,k) = b_k = 0 \text{ si } k \neq 0$$

Aplicando (4) tendremos :

$$f(m,n) = \sum_{0}^{m-n} q^k \binom{m-1-k}{n-1} p^n q^{m-n-k} = p^n q^{m-n} \left(\sum_{0}^{m-n} \binom{m-1-k}{n-1} \right) =$$

$$= p^n q^{m-n} \binom{m}{n}$$

Que es la conocida fórmula de la distribución binomial.

4 - PROBLEMAS EN ORTOPOLIS : EL METODO DE CAMBIO DE VARIABLE

4.1 Planteamiento del problema

Ortópolis es una ciudad de calles perpendiculares. Deseamos encontrar el número $f(m,n)$ de caminos de mínimo recorrido posibles para llegar desde una esquina a otra, si ambas se hallan separadas por m manzanas verticales y n manzanas horizontales. este número verifica como se comprueba facilmente la siguiente recurrencia:

(6) $$f(m,n) = f(m,n-1) + f(m-1,n)$$

con condiciones iniciales

$$f(k,0) = f(0,k) = 1 \ \forall k$$

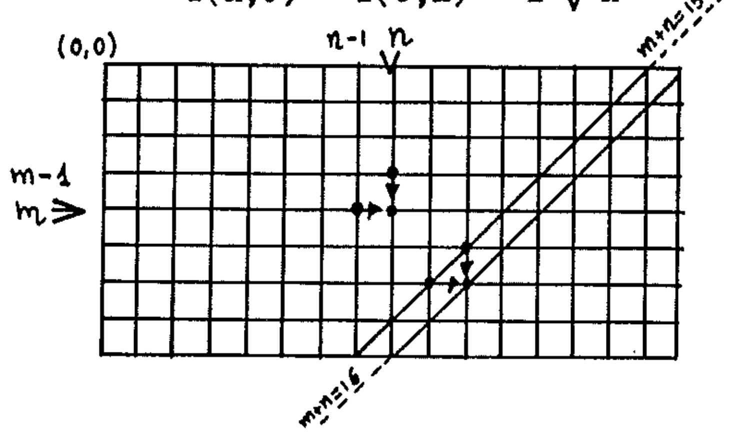


fig 7

Veamos como puede reducirse esta ecuación a la e.n.c.

Se observa en la fig 7 que sumando dos términos consecutivos de la diagonal $m+n = \hat{m}$ donde $\hat{m}$ es cualquier número, resulta el término de la diagonal $m+n+1= \hat{m}+1$ correspondiente a n. Es por tanto de esperar que si tomamos como variables de (6) $\hat{m} = m+n$ y $\hat{n} = n$, dicha ecuación se transforme en la e.n.c. Veamos que así es.

Definimos una nueva función g por la relación :

(7) $$g(m+n,n) = f(m,n)$$

haciendo $m+n = \hat{m}$ y $n = \hat{n}$, (7) se escribe:

$$f(m,n) = g(\hat{m},\hat{n})$$

Como $m = \hat{m}-\hat{n}$ y $n = \hat{n}$, también tendremos:

(8) $$f(\hat{m}-\hat{n},\hat{n}) = g(\hat{m},\hat{n})$$

Utilizando (7) la ecuación (6) se reescribe:

$$g(m+n,n) = g(m+n-1,n-1) + g(m+n-1,n),$$ o bién :

(9) $$g(\hat{m},\hat{n}) = g(\hat{m}-1,\hat{n}-1) + g(\hat{m}-1,\hat{n})$$

Que es la e.n.c.

Si conseguimos encontrar una solución que tome valores a_k en los - puntos (k,k) y, si $k = 0$, valga b_k en $(k,0)$ tendremos:

$$f(0,k) = g(k,k) = a_k$$
$$f(k,0) = g(k,0) = b_k \text{ si } k \neq 0$$

Si además conseguimos que esté definida y sea única en todo punto de la forma $(m+n,n)$, tal solución g de la ecuación (9) nos devuelve a través de la relación (7) una función f verificando las condiciones iniciales definida y única en todo (m,n) que satisface la ecuación (6) y las condiciones iniciales. Antes de ocuparnos de encontrar tal función g, vamos a generalizar el método expuesto.

4.2 Método del cambio de variable. Definiciones.

En el punto anterior ha aparecido una nueva ecuación (6) y se ha - puesto de manifiesto la necesidad de hallar soluciones de la e.n.c. que la satisfagan en dominios especiales, y con condiciones iniciales definidas en conjuntos diferentes al habitual $\{(k,0),(0,k)\}_{k\in Z_+}$
Por ello como punto previo, se hace necerario precisar nuevas definiciones que den un marco adecuado a estos problemas.

Def 1 - Ecuación en diferencias finitas es una expresión de la for

$$(10) \qquad f(m,n) = H(m,n,f(m-m_1,n-n_1),f(m-m_2,n-n_2),\dots\dots,f(m-m_r,n-n_r))$$

Donde:

a) m_i , n_i son números enteros
b) H es una función real de $r+2$ variables reales

Si además de estas condiciones se impone:

c) $m_i, n_i \in Z_+$ con m_i ó n_i distintos de 0

Entonces en el segundo miembro no puede figurar $f(m,n)$, que queda despejado en función de los valores de f en puntos de coordenadas menores que las de (m,n) por lo que la ecuación (10) se llamará ecuación recurrente (en dos variables)

Def 2 - Dado un conjunto $M \subset Z_+ \times Z_+$, que llamaremos dominio, y un conjunto $I \subset M$, que llamaremos frontera , se dice que $f: M \longrightarrow R$ es solución de (10) en M con condiciones iniciales $a_{k,j}$ si :

a) $\forall (k,j) \in I$, $f(k,j) = a_{k,j}$ donde $a_{k,j} \in \mathbb{R}$

b) $\forall (m,n) \in M-I$, $f(m,n)$ satisface (10)

Podemos ahora pasar a desarrollar el método de cambio de variable, que por la misma elección de definición de ecuación en diferencias que hemos elegido se va a ver limitada a sustituciones afines.

Supondrenos dada la ecuación (10)

La función f es una solución de (10) en M con condiciones iniciales $a_{k,j}$ en I

A es una transformación afín inversible $A: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$

Es decir: $A(m,n) = L(m,n) + (m_o,n_o)$, siendo m_o y n_o constantes y enteros, y L una transformacion lineal

Supondremos además que $A(M) = M' \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$

Se hace:

(11) $$\begin{cases} A(m,n) = (m',n') \\ A(I) = I' \\ g = f \circ A^{-1}; f = g \circ A \end{cases}$$

Si llamamos A_1^{-1} y A_2^{-1} a las funciones coordenadas de A^{-1} tendremos:

(12) $$\begin{cases} (m,n) = A^{-1}(m', n') = (A_1^{-1} (m',n'), A_2^{-1}(m',n')) \text{ o sea} \\ m = A_1^{-1} (m', n') \\ n = A_2^{-1} (m', n') \end{cases}$$

Tambien tendremos:

(13) $$\begin{aligned} f(m-m_i,n-n_i) &= g \circ A(m-m_i,n-n_i) = \\ g(L(m,n)-L(m_i,n_i) + (m_o,n_o)) &= g(A(m,n) - L(m,n)) = \\ &= g((m',n')-(m_i',n_i')) = g(m'-m_i',n'-n_i') \end{aligned}$$

Donde se ha hecho $(m_i',n_i') = L(m_i,n_i)$

Ahora podemos sustituir en el segundo miembro de (10) teniendo en cuenta (12) y (13) y este quedará convertido en una función H' de r+2 variables que a su vez dependen exclusivamente de m', n' y g , mientras que sustituyendo en el primer miembro de (10) teniendo en cuenta (11):

$$f(m,n) = f \circ A^{-1}_o A (m,n) = g(m',n')$$

Así la ecuación (10) se reescribe

(14) $$g(m',n') = H'(m',n',\ldots,g(m'-m_i',n'-n_i'),\ldots,\ldots)$$

En relación a las condiciones iniciales si hacemos:

$$\forall (k,j)\in I,\ A(k,j) = (k',\ j')\in I'$$

$$g(k',j') = f\circ A^{-1}(k',j') = f(i,j) = a_{k,j}$$

LLamando $a'_{k',j'} = a_{k,j}$, la función g satisface las condiciones iniciales $a'_{k',j'}$ en I'. Evidentemete si f hace verdadera (10), g - hará verdadera (14) . Como todas las correspondencias utilizadas son biunívocas, la recíproca también es cierta . Asi :

P- 4 En las condiciones enunciadas la existencia y unicidad de soluciones de (10) en M con condiciones iniciales $a_{k,j}$ en I , es equivalente a la existencia y unicidad de soluciones de (14) en M' con condiciones iniciales $a'_{k',j'}$ en I'

4.3 - Un teorema de existencia y unicidad.

Vamos a ocuparnos de las condiciones en las que puede asegurarse - la existencia y unicidad de soluciones en el caso de una ecuación recurrente. Es necesario por tanto que se verifique la condición c) de la def. 1 del anterior apartado.

Para un punto $(m,n)\in M$, parece natural que la existencia y unicidad de soluciones dependa de la existencia y unicidad de soluciones en los puntos $(m-m_i,n-n_i)$ que intervienen en el segundo miembro de la ecuación (10). Por ejemplo en el caso de la e.n.c., de la existencia y unicidad en (m-1,n) y (m-1,n-1).

En general vamos a llamar primer conjunto antecedente de (m,n) al conjunto de todos los $(m-m_i,n-n_i)$ que figuran en el segundo miembro de nuestra ecuación y pertenecen a M :

$$P_1(m,n) = \Big(\bigcup_{i\in\mathcal{J}}(x_i,y_i)\Big)\cap M$$

Donde $\mathcal{J}$ es el conjunto de índices que figuran en el segundo miembro de (10) y $(x_i,y_i) = (m-m_i,n-n_i)\ \forall\ i\in\mathcal{J}$

Igualmente se define:

$$P_j(m,n) = \Big(\bigcup_{(x_i,y_i)\in P_{j-1}} P_1(x_i,y_i)\Big)$$

La reunión de todos los P_n se llamará $\mathcal{P}(m,n)$, o cono del pasado de -- (m,n):

$$\mathcal{P}(m,n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j(m,n).$$

En la figura 8 se muestra el cono del pasado para un (m,n) en el caso de la e.n.c y tomando $M = Z_+\times Z_+$

Vamos a necesitar también una función auxiliar que asigna a cada subconjunto finito $B \subset Z_+ \times Z_+$ un número definido como:

$$|B| = \max (m+n) \ \forall (m,n) \in B \quad (\text{ si } B = \emptyset \ , \ |B| = 0 \ )$$

Tenemos las siguientes propiedades:

a) $C \subset B \qquad |C| < |B|$

b) $|(m,n)| = m+n > P_1(m,n)$

Esto es una consecuencia de la condición c) de def-1, puesto que $\forall i \in \mathcal{J} \ m_i$ ó $n_i \neq 0 \Rightarrow x_i + y_i = m+n - m_i - n_i < m+n$

c) $P_j (m,n) \neq \emptyset \Longrightarrow |P_j(m,n)| < |P_{j-1}(m,n)|$

En primer lugar $P_j(m,n)$ es una unión finita de conjuntos finitos, por tanto es finito y cabe hablar de $|P_j(m,n)|$

Luego, si $P_j(m,n) \neq \emptyset$, tomamos (x_i,y_i) verificando:

$$x_i + y_i = |P_j(m,n)|.$$

Por la definición de $P_j(m,n)$ existe $(x_i', y_i') \in P_{j-1}(m,n)$ verificando :

$$(x_i,y_i) \in P_1(x_i',y_i') \ . \text{ Por b) sabemos:}$$

$$|(x_i',y_i')| > |P_1(x_i',y_i')| \geqslant x_i + y_i = |P_j(m,n)|. \text{ Además como:}$$

$$|(x_i',y_i')| < |P_{j-1}(m,n)| \text{ porque } (x_i',y_i') \in P_{j-1}(m,n) \ .$$

En conclusión:

$$|P_j(m,n)| < |P_{j-1}(m,n)|$$

Se puede afirmar entonces que para algún $j, P_j(m,n) = \emptyset$, ya que la sucesión decreciente de $|P_j \ (m,n)|$ debe terminar en 0 y si ----- $|P_j(m,n)| = 0$ entonces es $P_j \ (m,n) = (0,0 \ )$ ó $P_j(m,n) = \emptyset$ y en el -- primer caso $P_{j+1}(m,n) = \emptyset$

Esto demuestra que $\mathcal{P}$ es también un conjunto finito.

Vamos a demostrar ahora el siguiente

<u>P-5</u> Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones recurrentes

Una condición suficiente para la existenia y unicidad de soluciones de la ecuación (10) en M y con condiciones iniciales $a_{k,j}$ en I si se verifican las tres hipótesis de def-1 es:

(15) $\qquad (m,n) \in \mathring{M} = M - I \Longleftrightarrow P_1(m,n) \subset M$ y $P_1(m,n) \neq \emptyset$

a) Sea (m_o,n_o) verificando $m_o + n_o = \min (m+n) \ \forall (m,n) \in \mathcal{M}$

Entonces sabemos que $|P_1(m_o,n_o)| < m_o + n_o$ Si se supone que $P_1 \ (m_o,n_o) \neq \emptyset$

entonces $P_1(m_o,n_o)\not\subset M$, porque si $(x,y)\in P_1(m_o,n_o)$, $x+y < m_o+n_o$ y $(x,y)\notin M$. Luego según (15) como $(m_o,n_o)\in M$ y $P_1(m_o,n_o)\not\subset M \Rightarrow (m_o,n_o)\in I$. Tomando ahora $f(m_o,n_o)= a_{m_o,n_o}$, tendremos el único -- valor de f que satisface la condición a) de def-2, y la condición b) no necesita ser verificada, por $(m_o,n_o)\in I$

Como si es $m+n<m_o+n_o$, $(m,n)\notin M$, tenemos garantizada la condición primera para la demostración por inducción:

$$f \text{ está definida} \forall (m,n)\in M / m+n \leqslant m_o+n_o \text{ (y es única)}$$

b) Hipótesis de inducción:

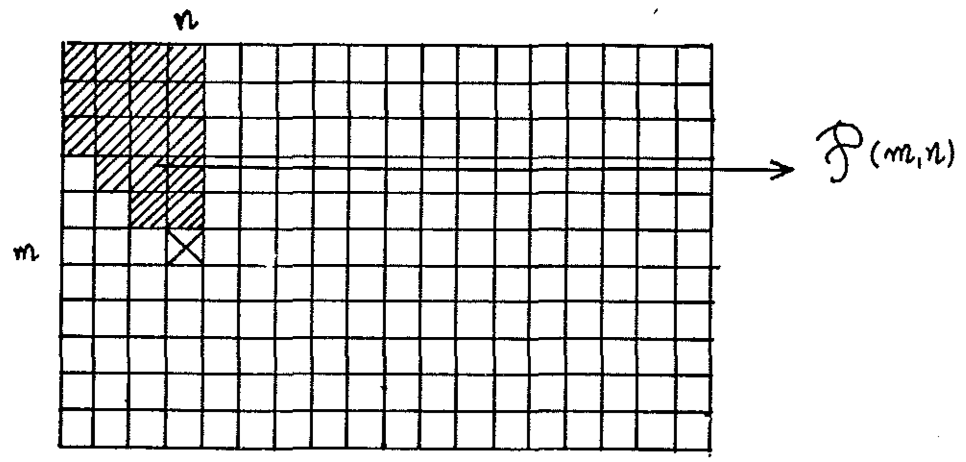
$$f \text{ esta bién definida y es única} \forall (x,y)/ x+y\leqslant r$$

Tomamos ahora (m,n) con $m+n = r+1$, $(m,n)\in M$

Si $(m,n)\in I$ hacemos $f(m,n) = a_{m,n}$, único valor que puede satis-- facer la condición a) de def-2. Por (15) $P_1(m,n)\not\subset M$ y la condición b) de def-2 resulta satisfecha automáticamente.

Si $(m,n)\in \mathring{M}$ entonces $P_1(m,n)\subset M$ y $|P_1(m,n)|< r+1$, a todos los puntos de $P_1(m,n)$ les puede ser aplicada la hipótesis de inducción y el segundo miembro de (10) estará bién definido. Dando este valor a f(m,n) tenemos el único valor que satisface (10) en (m,n) y el - teorema queda demostrado.

Se puede observar que por recurrencia todos los valores de los --- (m,n) dependen finalmente de los valores de f en I, mas en concreto son función de $\mathcal{P}(m,n)\cap I$.



4.4 Solución al problema de ortópolis

Con lo anteriormente expuesto, el problema de ortópolis se puede reducir a la e.n.c. La ecuación

(16) $$f(m,n) = f(m,n-1) + f(m-1,n)$$

Haciendo el cambio $m + n = p$, $n = q$, según lo visto en 4.1 , da lugar a la ecuación

(17) $$g(p,q) = g(p-1,q-1) + g(p-1,q)$$

donde se ha hecho $f(m,n) = g(p,q) = g(m+n,n)$

El dominio de definición de (16) es todo $Z_+ x Z_+$ y el conjunto frontera $I = \{(k,0) \cup (0,k)\}_{k \in Z_+}$

Dicho dominio y conjunto frontera se transforman por el cambio de variable en $M' = \{(i + k, k)\}_{k,i \in Z_+}$; $I' = \{(k,k) \cup (k,0)\}_{k \in Z_+}$

Según P-4, si encontramos una solución de (17) en M'que satisfaga las condiciones iniciales $a'_{k,k} = a_{k,0} = 1$; $a'_{k,0} = a_{k,0} = 1$, entonces $f(m,n) = g(p,q) = g(m+n,n)$ será la solución buscada. Ahora bien, siendo (17) la e.n.c. con las condiciones iniciales descritas en el apartado 1, se tiene:

$$g(p,q) = \binom{p}{q}$$

Es la solución requerida de (17) , y por tanto la solución al problema de ortópolis será:

$$f(m,n) = g(p,q) = \binom{p}{q} = \binom{m+n}{n}$$

En la fig. 9 se describe gráficamente el cambio de variable efectuado.

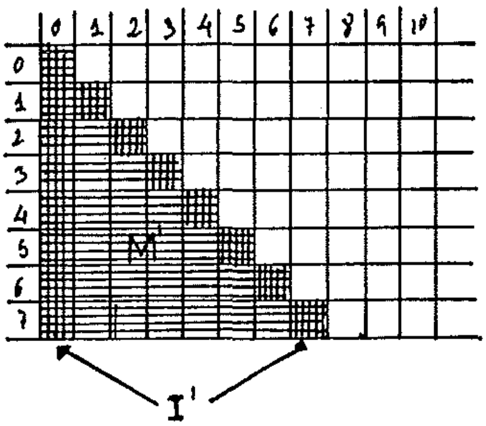


Fig. 9

4.5 Otro problema en ortópolis

Se pueden ahora plantear y resolver otros problemas en ortópolis . Por ejemplo el siguiente problema : Averiguar el número de caminos entre dos vértices si se impone la condición de que el número de - calles verticales recorrido sea siempre de h o más unidades superior al de calles horizontales en cada camino.

Naturalmente la recurrencia (16) se sigue cumpliendo, pero ahora las condiciones iniciales vendrán dadas por:

$$a_{h+k,0} = 1$$
$$a_{h+k-1,k} = 0$$

Según se pone de manifiesto en fig. 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	3	5	5	0	0	0	0	0	0	0
6	1	4	9	14	14	0	0	0	0	0	0

$(h = 2)$

Fig. 10

El conjunto frontera es ahora $I = \{(h+k,0) \cup (h+k-1,k)\}_{k \in Z_+}$

y el dominio $M = \{(m,n)/ \ m-n \geqslant h\}$

Realizando el cambio:

$$\begin{cases} m+n-h = p \\ m-h = q \\ f(m,n) = g(p,q) = g(m+n-h,m-h), \text{ (16) queda:} \end{cases}$$

$$g(m+n-h,m-h) = g(m+n-h-1,m-h) + g(m+n-h-1,m-h-1), \text{ luego:}$$

$$g(p,q) = g(p-1,q) + g(p-1,q-1)$$

El conjunto frontera será $I' = \{(k,k) \cup (2k-1,k-1)\}_{k \in Z_+}$

Y las condiciones iniciales :

$$a'_{k,k} = a_{k+h,0} = 1$$
$$a'_{2k-1,k-1} = a_{h+k-1,k} = 0$$

Estas condiciones són satisfechas por $g(p,q) = \binom{p}{q} - \binom{p}{q+1}$

Efectivamente, debido a la simetría de las filas del triángulo de los números combinatorio, o triángulo de Tartaglia, resulta:

$$g(2k-1,k-1) = \binom{2k-1}{k-1} - \binom{2k-1}{k} = 0$$

Ya que los dos términos que se restan son los centrales de una fila

También:

$$g(k,k) = \binom{k}{k} - \binom{k}{k+1} = 1 - 0 = 1$$

De esta forma, la solución a este nuevo problema en ortópolis es :

$$f(m,n) = g(p,q) = \binom{p}{q} - \binom{p}{q+1} = \binom{m+n-h}{m-h} - \binom{m+n-h}{m-h+1}$$

En realidad los métodos expuestos en este apartado permiten resolver cualquier problema en ortópolis, siempre que las condiciones que se imponen a los caminos conduzcan a conjuntos dominio y frontera compatibles con la condición (15) de P-5 (ap. 4.3). Pero en general será necesario el cálculo individual de las soluciones de la e.n.c que verifiquen $a'_{k,1}$ en los puntos del conjunto frontera, y expresar la solución como combinación lineal de dichas soluciones.

5 - COEFICIENTES VARIABLES

Nos proponemos ahora encontrar la solución de la ecuación

(18) $f(m,n) = h_1(m,n)f(m-1,n-1) + h_2(m,n)f(m-1,n)$

Donde f,h_1,h_2 son funciones de dos variables enteras no negativas. Esta ecuación puede ser considerada como el caso mas general de -- ecuación en diferencias en dos variables, lineal de primer orden y homogénea, siempre dentro de las ecuaciones de tipo recurrente. De hecho, si en el primer miembro figurase una expresión lineal en - $f(m,n)$, del tipo $h(m,n)f(m,n)$, o bien $h(m,n) \neq 0$ para todo (m,n),- en cuyo caso podremos dividir ambos miembros por $h(m,n)$ y volver a una ecuación del tipo (18), o bien $h(i,j) = 0$, en cuyo caso (18) - se convierte en una relación de dependencia nueva entre $f(m-1,n-1)$ y$f(m-1,n)$, mintras que no da ningún valor determinado a $f(m,n)$, y por lo tanto no tenemos garantizada la existencia de soluciones. Por otra parte los cambios de variable expuestos en el ap. 5.3 aseguran que cualquier otra ecuación homogénea de primer orden puede ser reducida a una del tipo (18) .

5.1 Polinomios combinatorios.

En la base de la solución de las ecuaciones que nos ocupan se hallan ciertos polinomios que llamaremos polinomios combinatorios y que tienen cierta relación con los polinomios simétricos elementales.

Para poder expresar las soluciones necesitaremos una notación suficientemente precisa, que a continuación vamos a convenir.

Entenderemos por combinaciones de los elementos de un conjunto A finito y totalmente ordenado, tomados de k en k, todas las sucesiones estrictamente crecientes que puedan formarse con los elementos de A.

Cuando las sucesiones sean crecientes, pero no estrictamente, tendremos entonces combinaciones con repetición de los elementos de - A, tomados de k en k.

Como el conjunto A es totalmente ordenado y mas en particular en - este trabajo se tratará de un intervalo de números enteros, para designarlo pondremos $[p,q]$ donde p y q representan respectivamente el primer y el último elementos de A. A es entonces $\{p\ ,\ p+1,$

$p+2, \dots, q\}$

Escribiremos las combinaciones de los elementos de $A = [p,q]$ tomados de k en k asi:

$$C^{1,k}_{p,q}$$

Y las combinaciones con repetición, asi:

$$CR^{1,k}_{p,q}$$

Más en general utilizaremos estos símbolos para expresar también - las aplicaciones crecientes estrictamente entre dos intervalos de números enteros $[i,k]$ y $[p,q]$. Para indicar este conjunto escribiremos $C^{i,k}_{p,q}$ mientras que para indicar el conjunto de aplicacio-- nes crecientes no estrictas entre los mismos conjuntos escribire-- mos $CR^{i,k}_{p,q}$

Más adelante vamos a utilizar un hecho conocido: La correspondencia biunívoca entre $C^{1,k}_{p,q+k-1}$ y $CR^{1,k}_{p,q}$, correspondencia que se puede poner de manifiesto asi:

Dada $c \in C^{1,k}_{p,q+k-1}$ se le hace corresponder $c' \in CR^{1,k}_{p,q}$ definiendo $c'_j = c'(j) = c_j - j + 1$, de manera que el valor mínimo de c'_j, que se producirá cuando $c_j = c_1 = p$, será $c_1 - 1 + 1 = p$, y el valor máximo que se producirá cuando $c_j = c_k = q + k - 1$, será $c'_k = q + k - 1 - k + 1 = q$, y de esta forma se ve que $c' \in CR^{1,k}_{p,q}$ ya que, como se comprueba facilmente, c' sigue siendo creciente, pero no estrictamente. Estudiando la correspondencia $c'_i \longrightarrow c_i$ con $c_i = c'_i + i - 1$, que es inversa de la anterior nos podemos asegurar de que estas dos correspondencias son biunívocas. De la misma forma es posible establecer una correspondencia biunívoca entre -- $C^{1,k}_{p+r+1,\, q+k+r}$ y $CR^{1,k}_{p,q}$.

Sean pues $c \in C^{1,q}_{1,p}$. Sea $h(i,j)$ una función real de dos varia-- bles enteras no nulas. Consideremos la siguiente expresión, o polinomio combinatorio

$$(19) \qquad P(q,p) = \sum_{c} h(1,c_1)h(2,c_2)\dots\dots h(q,c_q), \quad c \in C^{1,q}_{1,p}$$

Donde como $c_i = c(i)$, las segundas variables de esta expresión - forman una sucesión estrictamente creciente de elementos de $[1,p]$, es decir, una combinación de elementos de $[1,p]$ tomados de q en q

Vamos a demostrar que $P(q,p)$ satisface la ecuación:

(20) $$f(q,p) = f(q,p-1) + h(q,p)f(q-1,p-1)$$

En efecto, los términos que sumados forman $P(q,p)$ se dividen en dos bloques:

a) Aquellos en que interviene $h(q,p)$. Podemos sacar $h(q,p)$ factor común de todos ellos y este bloque se escribe entonces como el -- producto de $h(q,p)$ por una suma extendida a términos de la forma $h(1,c_1)h(2,c_2)\ldots.h(q-1,c_{q-1})$ donde $c_i \neq p$, puesto que c es estrictamente creciente y en todos estos términos es $c_q = p$. De esta forma las $c_1,c_2,\ldots.c_{q-1}$ forman una sucesión estrictamente creciente con los números del intervalo $[1,p-1]$ y deben figurar todas las - posibles sucesiones de estas carácteristicas entre los términos -- que multiplican a $h(q,p)$ ya que en (19) la suma está extendida a todas las $c \in C^{1,q}_{1,p}$. De esta forma , los términos de este bloque - se pueden expresar como $h(q,p) \sum h(1,c_1)\ldots\ldots h(q-1,c_{q-1})$ donde la suma se extiende a todas las $c \in C^{1,q-1}_{1,p-1}$, es decir todos estos términos suman $P(q-1,p-1)$ y este bloque vale $h(q,p)P(q-1,p-1)$.

b) Aquellos en los que no interviene $h(q,p)$, que serán al sumarlos , como se puede ver por un razonamiento similar al anterior, igual a $P(q,p-1)$.

De esta forma, si sumamos los dos bloques de términos que se han - señalado, obtenemos $P(q,p)$, es decir:

$$P(q,p)= P(q,p-1) + P(q-1,p-1).h(q,p)$$

Y queda demostrado que $P(q,p)$ cumple (20) siempre que esté definido, es decir cuando $q \neq 0$, $p \neq 0$ y $p \geqslant q$. Para los casos en que sea $p = 0$ ó $q = 0$ hay que hacer un estudio aparte en el que intervienen las condiciones iniciales que se le imponen a (20)

5.2 Condiciones iniciales

El polinomino combinatorio $P(q,p)$ cunple unas condiciones iniciales "naturales" como sucedia con los mismos números combinatorios (ver ap. 1). Estas condiciones iniciales se encuentran a partir - de los siguientes razonamientos:

Cuando q es mayor que p, entonces $C^{1,q}_{1,p}$ es vacio , ya que no habrá ninguna sucesión estrictamente creciente de q elementos de --- $[1,p]$, al agotarse los elementos de $[1,p]$

Es entonces natural definir:

(25) $P(q,p) = 0$ para todo q mayor que p

Por otra parte, si $q= 1$, $C^{1,1}_{1,p}$ resulta un conjunto de p aplicaciones , en el que cada una hace corresponder al 1 uno de los elementos de $[1,p]$. Es decir:

(21) $$f(1,p) = \sum_{i=1}^{i=p} h(1,i)$$

Si sustituimos en (20) los valores de f(1,p) y de f(1,p-1) se tiene

$$\sum_{i=1}^{i=p} h(1,i) = \sum_{i=1}^{i=p-1} h(1,i) + h(1,p)f(0,p-1)$$

y eliminando los términos iguales queda:

$$h(1,p) = h(1,p)f(o,p-1)$$

Si queremos que P(q,p) cumpla (20) para cualquier funcion h, habrá que suponer el caso mas general, es decir $h(1,p) \neq 0$ y entonces:

(23) $f(0,p-1) = 1$ para todo $p>1$

Por lo dicho al principio de esta página:

(24) $f(q,0) = 0$ para todo $q>0$

Vamos a verificar que estas condiciones iniciales en (q,0) son compatibles con el cumplimiento de (20). Si $q>1$

$$f(q,1) = f(q,0) + h(q,1)f(q-1,0)$$

Y esta igualdad es verdadera por ser los dos miembros idénticamente nulos con las definiciones hechas cuando q es mayor que p. Si q=1

$$f(1,1) = 0 + h(1,1)f(0,0) = h(1,1) \text{ (por (23))}$$

lo que coincide con el resultado obtenido en (21)

Hemos comprobado que los polinomios combinatorios definidos en (19) (23),(24),(25) verifican la ecuación (20) con condiciones iniciales

$$a_{k,0} = 0 \text{ si } k \neq 0$$

$$a_{0,k} = 1 \text{ para todo } K$$

Vamos a utilizar métodos muy similares a los del ap. 1 para obtener a partir de los polinomios combinatorios la solución de (20) con - condiciones iniciales arbitrarias.

Para empezar afirmamos que el conjunto de las soluciones de (20) es una variedad lineal, como sucedia en la e,n.c de ap. 1. En realidad esta propiedad solo depende del hecho de que en la ecuación en diferencias aparezcan las $f(m-m_i, n-n_i)$ en expresiones lineales, es decir , que se trate de ecuaciones en diferencias lineales.

Vamos a definir entonces unas condiciones iniciales canónicas que serán satisfechas por los polinomios combinatorios sometidos a un cambio de variable por traslación, y este sistema de polinomios combinatorios que cumple el sistema de condiciones iniciales canónico será una base del espacio de soluciones.

En primer lugar planteamos la solución α_k de (20) que satisfaga las condiciones iniciales:

$$\alpha_k(k,0) = 1$$
$$\alpha_k(j,0) = 0 \text{ si } j = k$$
$$\alpha_k(0,j) = 0$$

Esta solución α_k sabemos que existe, por el teorema de existencia. Vamos a caracterizarla explícitamente en función de los polinomios combinatorios. Formemos el siguiente cuadro:

	α_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K =	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	4	0										
	5	0										
	6	0										
	7	0										
	8	0										

I_3

Donde como se comprueba facilmente por inducción $\alpha_k(i,j) = 0$ si $i < k$, $\alpha_k(k,j) = 1$

Consideremos ahora el conjunto $I_k = \left\{(k,j) \cup (k+i,0)\right\}$ en donde α_k toma los valores $\alpha_k(k,j) = 1$, $\alpha_k(k+i,0) = 0$

Por otra parte si consideramos la ecuación:

(26) $\qquad g(m,n) = g(m,n-1) + h(m+k,n)g(m-1,n-1)$

con las condiciones iniciales naturales de los polinomios combinatorios:

$$a'_{j,0} = 0 \text{ si } j>0$$
$$a'_{0,j} = 1$$

Su solución será el polinomio combinatorio relativo a la función - $h(m+k, n)$, es decir

(27) $\alpha_k(m,n) = \sum_c h(1+k,c_1)\ldots\ldots h(m+k,c_m)$ donde la suma está extendida a $c \in C^{1,m}_{1,n}$.

Haciendo en esta ecuación el cambio de variable:

$$\left| \begin{array}{l} m+k = q \\ n = p \\ g(m,n) = f(q,p) \end{array} \right.$$

(26) se reescribe:

(28) $f(q,p) = f(q,p-1) + h(q,p)f(q-1,p-1)$

Ecuación que es la misma que (20)

Las condiciones iniciales de (26) se tranforman en las siguientes condiciones para (28):

(29) $$\begin{array}{l} a''_{k+i,\,0} = a'_{i,\,0} = 0 \text{ si } i>0 \\ a''_{k,j} = a'_{o,j} = 1 \end{array}$$

Por tanto según el terorema de existencia y unicidad, la única solución de (28), y por tanto de (20) que en el conjunto $I_k = \{(k,j) \cup (k+i,0)\}$ toma los valores dados en (29) será $f(q,p)$. La solución de (20) que toma los mismos valores en I_k, debe coincidir con $f(p,q)$ en el dominio de esta, que es $D' = \{(i,j)/ \ i \geqslant k\}$. Como además sabemos que fuera de este dominio la solución de (20) con las condiciones iniciales canónicas se anula, la solución α_k buscada será:

$$\alpha_k\,(q,p) = 0 \quad \text{si } q < k$$
$$\alpha_k\,(q,p) = f(q,p) = \sum_c h(1+k,c_1)\ldots\ldots h(q,c_{q-k})$$

Donde la suma se extiende a $c \in C^{1,\,q-k}_{1,p}$, si $q>k$

Vamos a caracterizar ahora las soluciones β_k de 20 que satisfacen las condiciones iniciales:

(30) $$\begin{array}{l} a_{0,j} = 0 \text{ si } j<k \\ a_{0,j} = 1 \text{ si } j \geqslant k \\ a_{j,0} = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \text{ y } j \neq 0 \end{array}$$

Hay que señalar que estas no son las condiciones iniciales canónicas que hemos considerado en anteriores ocasiones, en que (por ejemplo en ap. 1) $a_{j,0} = 0$ si $j \neq k$. No obstante, si encontramos β_k cumpliendo las condiciones iniciales (30), las funciones γ_k definidas por $\gamma_k = \beta_k - \beta_{k+1}$ verificanlas condiciones iniciales :

$$\begin{aligned} &\gamma_k(j,0) = 0 \text{ si } j \neq 0 \text{ y } k \neq 0 \\ (31) \qquad &\gamma_k(0,k) = 1 \\ &\gamma_k(0,j) = 0 \text{ si } j \neq k \end{aligned}$$

Que son las condiciones canónicas.

Vamos entonces a caracterizar las β_k

Según se refleja en el cuadro (10) , β_k toma en el conjunto $J_k =$ $= \left\{(0,j) \bigcup (0,k+j)\right\}$ los mismos valores que toma el polinomio combinatorio $P(q,p)$ en $\left\{(o,j) \bigcup (j,0)\right\}$. Considerando la ecuación:

(32) $$g(m,n) = g(m,n-1) + h(m,n+k)g(m-1,n-1)$$

Con condiciones iniciales:

(33) $$\begin{aligned} &a'_{0,j} = 1 \\ &a'_{j,0} = 0 \text{ si } j > 0 \end{aligned}$$

Existirá una solución de esta ecuación, precisamente $P(m,n)$

$$\beta'_k(m,n) = \sum_c h(1,c_1+k)\ldots h(m,c_m+k)$$

Con la suma extendida a $c \in C^{1,m}_{1,n}$

Haciendo el cambio de variable

$$\left| \begin{array}{l} m = q \\ n + k = p \\ g(m,n) = f(q,p) = f(m,n+k) \end{array} \right.$$

(32) se reescribe:

(34) $$f(q,p) = f(q,p-1) + h(q,p)f(q-1,p-1)$$

Sabemos que la única función que cumple (34), que es la misma que (2o), con condiciones iniciales en el transformado del conjunto frontera de (33), por el cambio de variable, es precisamente $\beta'_k(m,n) = \beta'_k(q,p-k)$. Pero es facil ver que el transformado en el cambio de variable del conjunto frontera de (33), es precisamente J_k , y las condiciones iniciales dadas por el cambio de variable son en J_k coincidentes con las (30). Luego la solución de (20) cumpliendo las condiciones iniciales (30) coincide con $\alpha'_k(q,p-k)$

en el dominio tranformado de (33), $D'=\{(i,k+j)\}_{j\geq 0}$. Ahora, sabemos que fuera de ese dominio la solución de (20) cumpliendo (30) se anula. Luego la solución que buscamos será:

$$\beta_k(q,p) = 0 \quad \text{si } p<k$$
$$\beta_k(q,p) = \beta'_k(q,p-k) = \sum_{c} h(1,c_1+k)\ldots\ldots h(q,c_q+k)$$

Donde ahora la suma se extiende a $c \in C^{1,q}_{1,p-k}$

Finalmente, para conseguir una solución de (20) cumpliendo condiciones iniciales arbitrarias $a_{k,0}$ y $a_{0,k}$ basta realizar la cobinación lineal de soluciones:

$$(35) \qquad f(q,p) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,0}\,\alpha_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k}\,\gamma_k\right)(q,p)$$

Donde $\gamma_k = \beta_k - \beta_{k+1}$ verifica las condiciones iniciales canónicas (30), y a pesar de que las sumas son infinitas, están bien definidas por ser $\beta_k(q,p) = 0$ cuando $k>q$ y $\beta_k(q,p) = 0$ si $k>p$.

β_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0									
2	0	0	0	0									
3	0	0	0	0									
4	0	0	0	0									
5	0	0	0	0									
6	0	0	0	0									
7	0	0	0	0									

γ_3

fig. 10

5.3 Otras ecuaciones de primer orden

Los cambios de variable que se señalan en este apartado, permiten la solución de las demás ecuaciones de primer orden y homogéneas que se pueden presentar, a partir de las soluciones halladas en el anterior apartado para la ecuación (20)

a) Dada la ecuación

(36) $$g(q,p) = g(q-1,p-1) + h(q,p)g(q,p-1)$$

haciendo el cambio:

$$\left| \begin{array}{l} n = p-q \\ m = p \\ g(q,p) = f(n,m) = f(p-q,p) \text{ resulta:} \end{array} \right.$$

$$f(n,m) = f(n,m-1) + h(m-n,n)f(n-1,m-1)$$

Esta ecuación es un caso particular de la (20) que tendrá por solución el polinomio combinatorio asociado a la función $h(m-n,m)$

$$f(n,m) = \sum_c h(c_1-1,c_1)\ldots\ldots\ldots h(c_n-n,c_n)$$

Con la suma extendida a $c \in C^{1,n}_{1,m} = C^{1,p-q}_{1,p}$

En esta expresión, mientras que las segundas variables forman combinaciones de $[1,p]$ tomadas de $p-q$ en $p-q$, las primeras forman combinaciones con repetición de los elementos 0 al $p-(p-q) = q$, de forma que se puede poner:

$$g(q,p) = \sum_c h(c'_1,c_1)\ldots\ldots h(c'_{p-q},c_{p-q})$$

Con la suma extendida a $c \in C^{1,p-q}_{1,p}$ y con $c'_i = c_i - i$, $c'_i \in CR^{1,p-q}_{0,q}$

b) Dada la ecuación:

(37) $$g(q,p) = g(q,p-1) + h(q,p)g(q-1,p)$$

Haciendo el cambio:

$$\left| \begin{array}{l} m = p+q \\ n = q \\ g(q,p) = f(n,m) = f(q,p+q) \text{ resulta:} \end{array} \right.$$

$$f(n,m) = f(n,m-1) + h(n,m-n)f(n-1,m-1)$$

Que es como antes un caso particular de la (20) cuyas soluciones serán el polinomio combinatorio asociado a $h(n,m-n)$

$$g(q,p) = f(n,m) = \sum_c h(1,c_1-1)\ldots\ldots h(n,c_n-n)$$

Con suma extendida a $c \in C^{1,n}_{1,m} = C^{1,q}_{1,p+q}$ que también se escribe:

$$g(q,p) = \sum_c h(1,c_1)h(2,c_2)\ldots\ldots h(q,c_q)$$

con $c \in CR^{1,q}_{1,p}$

c) Finalmente la ecuación general:

$$(38)\qquad f(n,m) = h_1(n,m)f(n-1,m-1) + h_2(n,m)f(n,m-1)$$

Si ponemos :

$$h_1!(n,m) = h_1(n,m).h_1(n-1,m-1).h_1(n-2,m-2)......$$
$$f(n,m) = h_1!\,(n,m).g(n,m)$$

La ecuación (38) queda:

$$h_1!(n,m)g(n,m) = h_1!(n,m)g(n-1,m-1) +$$
$$+ h_2(n,m)h_1(n,m-1)g(n,m-1).$$

Ahora, si es $h_1(n,m) \neq 0$, pueden dividirse ambos miembros por dicha expresión, quedando:

$$g(n,m) = g(n-1,m-1) + h_2(n,m).\frac{h_1!(n,m-1)}{h_1!(n,m)}.g(n,m-1)$$

Ecuación del tipo a) que se puede resolver. La única limitación -- que se ha encontrado para la resolución de (38), forma mas general de la ecuación homogénea de primer orden, es la no anulación de h_1 en el dominio de la ecuación. Mas concretamente, el cambio propuesto seguirá siendo correcto para un punto (n,m) , si, aunque se anule h_1 en algunos puntos, estos no pertenecen al cono del pasado de (n,m) (ver ap. 4.3)

6. - LA ECUACION COMPLETA

Hasta ahora hemos tratado exclusivamente de la ecuación homogénea. Vamos a ver como unos sencillos razonamientos nos permiten alcanzar también la solución de la ecuación competa. Partimos de la ecuación

$$f(q,p) = f(q,p-1) + h(q,p)f(q-1,p-1) + W(q,p) \tag{39}$$

Que con los cambios indicados en el anterior apartado y con las restricciones explicadas en ap. 5.3 c), puede ser considerada como la ecuación completa general.

En este caso no podemos asegurar que la suma de soluciones sea solución. Sin embargo, si f_1 y f_2 verifican:

$$f_1(q,p) = f_1(q,p-1) + h(q,p)f_1(q-1,p-1) + w_1(q,p)$$
$$f_2(q,p) = f_2(q,p-1) + h(q,p)f_2(q-1,p-1) + w_2(q,p)$$

Entonces sumando miembro a miembro, se tiene:

$$(f_1 + f_2)(q,p) = (f_1+f_2)(q,p-1) + h(q,p)(f_1+f_2)(q-1,p-1) + (w_1+w_2)(q,p)$$

Utilizaremos este hecho para construir una familia de funciones -- que verifiquen las ecuaciones

$$g_{i,j}(q,p) = g_{i,j}(q,p-1)+h(q,p)g_{i,j}(q-1,p-1)+ U_{i,j}(q,p) \tag{40}$$

Donde $U_{i,j}(q,p)=0$ si $(q,p)\neq(i,j)$ y $U_{i,j}(q,p) = 1$ si $(q,p)=(i,j)$ con cuya definición de $U_{i,j}$ se tiene:

$$W = \sum_{i,j} W(i,j)U_{i,j}$$

Con la suma extendida a todos los valores de i, j , suma infinita que esta bien definida por ser para cada (q,p) nula excepto para un sumando: $W(q,p)U_{q,p}(q,p) = W(q,p)$.

De esta forma, si en la ecuación (40)se multiplican ambos miembros por $W(i,j)$ y luego se suman miembro a miembro todas las ecuaciones con respecto a los índices i,j, se tiene:

$$\sum W(i,j)g_{i,j}(q,p) = \sum W(i,j)g_{i,j}(q,p-1) + h(q,p)\sum W(i,j)g_{i,j}(q-1,p-1) + W(q,p)$$

Es decir, siempre que las sumas estén definidas (sean finitas -- para todo (q,p)), $G(q,p) = \sum W(i,j)g_{i,j}(q,p)$ es solución de(39).

Resta pues encontrar $g_{i,j}$

Observando la ecuación (40) vemos que coincide con la ecuación homogénea en todos los puntos excepto en (i,j).

Afirmamos que $g_{i,j}$ es la siguiente función:

a) En $D_{i,j} = (i+k_1, j+k_2)$ es la solución de la ecuación homogénea resultado de suprimir W del segundo miembro de (39), que satisfaga las condiciones iniciales en el cojunto frontera $I_{i,j} = \{(i,j+k_2) \cup (i+k_1,j)\}$ dadas por

(41) $$a_{i,j+k_2} = 1$$

$$a_{i+k_1,j} = 0 \text{ si } k_1 > 0$$

b) Fuera de $D_{i,j}$

(42) $$g_{i,j}(q,p) = 0 \text{ si } q<i \text{ o } p<j$$

En el dibujo se representa n $D_{i,j}$ e $I_{i,j}$

$g_{3,4}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0								
5	0	0	0	0	0			$D_{3,4}$					
6	0	0	0	0	0								

$I_{3,4}$

Fuera de $D_{i,j}$, la ecuación (40) es satisfecha ya que al sustituir en ella $g_{i,j}$ ambos miembros son idénticamente nulos.

En $I_{i,j}$ sucede:

a) si $(q,p) = (i,j+k_2)$ al sustituir queda:

$$g_{i,j}(i,j+k_2) = g(i,j+k_2-1) + h(q,p).0 + 0$$

Igualdad verdadera por ser $g_{i,j}(i,j+k_2) = g_{i,j}(i,j+k_2-1) = 1$

b) $(q,p) = (i+k_1,j)$, ambos miembros son nulos.

En $D_{i,j} - I_{i,j}$, la ecuación (40) se torna homogénea, y como $g_{i,j}$ se construye precisamente como solución de esta ecuación en $D_{i,j}$, queda probada nuestra afirmación.

Falta ahora solamente caracterizar $g_{i,j}$ en función de los polinomios combinatorios. Ahora bien, $g_{i,j}$ se puede obtener realizando consecutivamente los dos cambios realizados para obtener las soluciones que forman la base canónica del espacio de soluciones de la ecuación homogénea. (ap. 5.2)

Veamos el cambio necesario:

(42) bis $f(n,m) = f(n,m-1)+h(n+i,m+j)f(n-1,m-1)$

Haciendo en esta ecuación

(43) $$\left| \begin{array}{l} n = q-i \\ m = p-j \\ f(n,m) = g(q,p) \end{array} \right.$$

Resulta:

(44) $$g(q,p) = g(q,p-1) + h(q,p)f(q-1,p-1)$$

Si consideramos la solución de (44) que verifica en $I_{i,j}$ las condiciones iniciales dadas en (41), es decir, $g_{i,j}$, esta solución se corresponde con la solución de (42) bis que cumple las condiciones naturales de los polinomios combinatorios relativos a la función $h(n+i,m+j)$. Así pues:

(45) $$g_{i,j}(q,p) = f(n,m) = \sum h(1+i,c_{1+i}+j)\ldots.h(n+i,c_{n+i}+j)$$

Donde la suma se extiende a $c \in C^{1,n}_{1,m}$

Teniendo en cuenta (43), si en lugar de tomar $c \in C^{1,n}_{1,m}$ lo hacemos-- tomando $c \in C^{1+i,n+i}_{1+j,m+j} = C^{i+1,q}_{1+j,p}$, entonces queda:

(46) $$g_{i,j}(q,p) = \sum_{C} h(k_1,c_{k_1})\ldots\ldots h(k_q\ ,\ c_{k_q})$$

Hay que tener en cuenta que (46) solo es válida en $D_{i,j}$. Los valores de $g_{i,j}$ fuera de $D_{i,j}$ vienen dados por (41) y (42).

Queda así finalizado el estudio de la solución de la ecuación completa, que adopta la forma:

(47) $$G(q,p)=\sum_{i,j} W(i,j)g_{i,j}(q,p)$$

Donde la suma está bien definida puesto que solamente se extiende a los índices (i,j) con $i \leqslant q$ y $j \leqslant p$ ya que en otro caso es sola-- mente $g_{i,j}(q,p) = 0$.

Si se desea una solución de la ecuación completa (39) que verifi-- que ciertas condiciones iniciales, basta con sumar a $G(q,p)$ una solución de la ecuación homogénea que lo haga.

Finalmente , se puede señalar que en (47) la suma se extiende solamente a aquellos índices (i,j) que pertenecen al cono del pasado de (q,p) y al propio (q,p).

7.- EJEMPLOS

En este apartado se verán dos ejemplos que ilustran algunos de los métodos expuestos

a) Si deseamos averiguar las posibles aplicaciones sobreyectivas de un conjunto con m elementos a un conjunto con n elementos- o bien el número de palabras de m letras que pueden escribirse utilizando todas las letras de un alfabeto de n letras-, surge la ecuación recurrente :

$$F(n,m) = nF(n-1,m-1) + nF(n,m-1)$$

Según lo explicado en ap. 5.3 c) se hace $F(n,m) = n!f(n,m)$ y resulta:

$$n!f(n,m) = n!f(n-1,m-1) + n.n!f(n,m-1)$$

Y dividiendo por n! :

$f(n,m) = f(n-1,m-1) + nf(n,m-1)$. Esta ecuación tiene por solución la indicada en 5.3 a):

$$(48) \qquad F(n,m) = \sum_{c} c_1 c_2 c_3 \ldots c_{m-n}$$

Donde la suma se extiende a $c \in CR^{1,m-n}_{1,n}$

Se da además la circunstancia de que , como se comprueba facilmente, $F(1,m) = 1$ y $F(n,n) = n!$, de donde será:

$$f(1,m) = 1$$

$$f(n,n) = 1$$

Condiciones que cumple el polinomio combinatorio descrito en (48), que será asi la solución al problema de las aplicaciones biyectivas

b) Sea h(p) una función que expresa el número primo que ocupa el lugar p en una tabla ordenada de números primos:

$$h(1) = 1 \; ; \; h(2) = 2 \; ; \; h(3) = 3 \; ; \; h(4) = 5 \; ; \; h(6) = 7 \; ;..$$

La suma de todos los números qué constan del producto de q factores primos de entre los p primeros números primos verifica la ecuación recurrente:

$$f(q,p) = f(q,p-1) + h(p)f(q-1,p-1)$$

Esta ecuación es del tipo 5.3b) y tendrá solución:

$$f(q,p) = \sum h(c_1)h(c_2) \qquad h(c_q)$$

Con suma para $c \in CR^{1,q}_{1,p}$

En esta ocasión se ve de forma especialmente clara el papel del polinomio combinatorio que interviene en la solución, ya que cada uno de sus términos es uno de los números cuya suma buscamos, y viceversa, todo número con q factores primos de entre los p -- primeros, esta en el polinomio combinatorio de la solución.
En el siguiente cuadro se desarrollan algunos de los valores de f(q,p).

q ↓ / p →	1	2	3	4	5	6	7	8
h(p) →	1	2	3	5	7	11	13	17
1	1	3	6	11	18	29		
2	1	7	25	80	185			
3	1	15	90	440				
4	1	31	301					
5	1	63						
6	1							