

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I



**MODELADO EN INVERSIÓN EN 2D Y 3D DE ANOMALÍAS
GRAVIMÉTRICAS PRODUCIDAS POR CUERPOS CUYA
GEOMETRÍA Y DENSIDAD DE MASA SE DESCRIBEN
UTILIZANDO FUNCIONES POLINÓMICAS: APLICACIONES A
DATOS GRAVIMÉTRICOS DE CÁNADA Y MÉXICO**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Beatriz Martín Atienza

Bajo la dirección de los doctores

Juan García Abdeslem
María Luisa Osete López

Madrid, 2004

ISBN: 978-84-669-1747-6

©Beatriz Martín Atienza, 2001

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS



MODELADO E INVERSION EN 2D Y 3D
DE ANOMALIAS GRAVIMETRICAS PRODUCIDAS POR
CUERPOS CUYA GEOMETRIA Y DENSIDAD DE MASA
SE DESCRIBEN UTILIZANDO FUNCIONES
POLINOMICAS:
APLICACIONES A DATOS GRAVIMETRICOS DE
CANADA Y MEXICO.

TESIS DOCTORAL

BEATRIZ MARTIN ATIENZA

Año 2001

Para Antonio,
de cuyas canas me siento totalmente responsable.

Yo fui niño en una época de esperanza. Quise ser científico desde mis primeros días de escuela. El momento en que cristalizó mi deseo llegó cuando capté por primera vez que las estrellas eran soles poderosos, cuando constaté lo increíblemente lejos que debían de estar para aparecer como simples puntos de luz en el cielo. No estoy seguro de que entonces supiera siquiera el significado de la palabra “ciencia”, pero de alguna manera quería sumergirme en toda su grandeza. Me llamaba la atención el esplendor del universo, me fascinaba la perspectiva de comprender cómo funcionan realmente las cosas, de ayudar a descubrir misterios profundos, de explorar nuevos mundos... quizá incluso literalmente. He tenido la suerte de haber podido realizar este sueño al menos en parte. [...] Cuando uno se enamora, quiere contarlo al mundo. Este libro es una declaración personal que refleja mi relación de amor de toda la vida con la ciencia.

Carl Sagan,
“El mundo y sus demonios”

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que han participado directa o indirectamente en la realización de esta Tesis. Soy consciente de que es imposible recordar explícitamente en estas páginas los nombres de cada una de ellas, porque la lista sería realmente interminable. Trataré de nombrar a todos, aunque si omito a alguien no es por falta de agradecimiento y cariño, sino por despiste.

En primer lugar quiero agradecer su apoyo y comprensión a Juan García Abdeslem y a M^a Luisa Osete López, los directores de esta Tesis. Soy consciente de lo poco dócil que soy y de lo difícil que es trabajar conmigo, así que quiero darles también las gracias por la gran dosis de paciencia y cariño que han mostrado siempre conmigo. Sin Juan esta Tesis nunca se hubiera realizado porque es el auténtico artífice de la idea. Ha confiado en mí y me ha apoyado desde un principio. He disfrutado muchísimo de cada hora pasada con él delante de la pizarra discutiendo de Gravimetría y resolviendo integrales. Sin la amistad de Marisa nunca hubiese tenido la fuerza suficiente como para continuar con el doctorado a pesar de todos los problemas que han surgido en estos años. Me ha enseñado a ser independiente y a disfrutar de la investigación con profesionalidad. De mayor quiero ser como ella.

También quiero agradecer el apoyo incondicional y la amistad que siempre me ha brindado todo el personal de investigación, técnico y administrativo de la División de Ciencias de la Tierra del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Baja California, México, donde he realizado esta Tesis, y muy especialmente a los directores de esta División, José Manuel Romo Jones y Luis Munguía Orozco, por permitirme andar por los pasillos del edificio como si estuviera en mi propia casa.

Estoy en deuda con todos los miembros del Departamento de Geología del CICESE, especialmente con sus Jefes, Arturo Martín Barajas y Margarita López Martínez, por hacerme sentir un miembro más de este Departamento desde el primer día que entré por las puertas de esta institución, y por haber puesto a mi disposición los medios materiales de este Departamento para la realización de mi trabajo.

A todos los miembros del Departamento de Geofísica Aplicada del CICESE y a su Jefe, Enrique Gómez Treviño, por adoptarme como una estudiante de doctorado más dentro del Departamento. Por su apoyo incondicional, tanto a nivel profesional como a nivel personal, por haberme llevado a todas las reuniones de la UGM que se han celebrado estos

últimos años en Puerto Vallarta y por haberme proporcionado toda la infraestructura necesaria para realizar esta Tesis.

Por supuesto no me olvido de todos los profesores, compañeros y personal administrativo del Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I de la Universidad Complutense de Madrid, donde comencé mis andanzas como estudiante de doctorado en Geofísica, y en especial a sus directores, Agustín Udías Vallina y M^a del Carmen Hernández Lucendo, por poner a mi disposición todos los medios necesarios para poder continuar con mi trabajo en las breves estancias que he pasado en dicho Departamento durante los últimos años.

Este trabajo se ha financiado parcialmente en México por varios proyectos internos y las Jefaturas de los Departamentos de Geofísica Aplicada y Geología del CICESE, y en España por los proyectos CII-CT94-0114 (Unión Europea) y PB-98-0834 (DGICYT).

Mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que han tenido la paciencia necesaria para revisar y corregir las diferentes versiones de esta Tesis o algunas de sus partes: a Antonio González Fernández que ha estado ahí desde el principio; a Ronald Spelz Madero, sin cuya ayuda nunca hubiera podido escribir el marco geológico de la Laguna Salada; a Luis A. Delgado Argote, que corrigió lo que escribí acerca de dicho marco geológico y que me ayudó a depurar las ideas que aprendí acerca del marco tectónico-extensional del Golfo de California; a Enrique Gómez Treviño y a Carlos Flores, cuyos comentarios han mejorado significativamente la redacción y el contenido del Capítulo I de esta Tesis.

Quiero también agradecer a todos aquellos profesores de la División de Ciencias de la Tierra del CICESE que me permitieron asistir como oyente a los cursos de posgrado que imparten en esta División y que han sido vitales para la realización de esta Tesis: Edgardo Cañón Tapia, Luis A. Delgado Argote, Francisco Esparza, José Frez Cárdenas, Juan García Abdeslem, Enrique Gómez Treviño, Antonio González Fernández, Octavio Lázaro Mancilla y Francisco Suárez Vidal.

Muy especialmente agradezco el apoyo desinteresado y la amistad que siempre me ha brindado Luis A. Delgado Argote que, en los primeros meses de mi estancia en el CICESE, puso a mi disposición sus proyectos de investigación para proporcionarme el material de papelería necesario para la realización de mi trabajo.

Al personal administrativo de los Departamentos de Geología y Geofísica Aplicada del CICESE, muy especialmente a M^a Guadalupe Martínez Vázquez, M^a Eugenia García

Campuzano, M^a del Carmen Pérez, Guadalupe Zepeda y Bárbara Uribe, por su amistad desinteresada y sus buenos consejos.

A los técnicos José Mojarro, Humberto Benítez, Luis Gradilla y Víctor M. Frías Camacho, por su gran dosis de paciencia y por el tiempo que han invertido en resolver mis problemas existenciales con los ordenadores.

A Agustín Udías Vallina le agradezco de todo corazón su apoyo y el cariño con el que siempre me ha tratado. Su amistad es un gran tesoro para mí.

A Salvador Crespillo Maristegui, que a través de todos estos años ha mantenido intacta nuestra buena amistad.

A mis buenas amigas Lourdes y Rosa, por haber mantenido nuestra amistad a pesar del tiempo y la distancia.

A todos los amigos y compañeros que he tenido el gusto de conocer en CICESE, y muy especialmente a Raquel, Ronald, Lupita, Selene, Rosalía, Edgardo, Humberto, Margarita, Felipe, Irma, María Elena, Cristina, Marco, Maru, Víctor Moreno y Sarita. Gracias por vuestra amistad.

A Luis, Cristina y Diego, mi “familia” mexicana. Gracias por esos ricos desayunos los domingos por la mañana. Gracias también por ayudarme a depurar mi castellano.

A mis padres, mis hermanos, mis sobrinos y mis suegros, que, a pesar de todas las alegrías y disgustos que les he dado en mi vida, me quieren tanto y me apoyan incondicionalmente.

Y a mi esposo y mecenas Antonio, que ha puesto a mi disposición sus proyectos de investigación, y su propio sueldo, para proveerme del material necesario con el que hacer esta Tesis. El ha sido mi compañero de alegrías y penas, me ha apoyado, me ha sufrido, me ha discutido los asuntos de esta Tesis todo lo que ha querido, y me ha amado como nunca nadie lo ha hecho jamás.

A todos vosotros, muchas gracias por haber hecho posible el gran sueño de mi vida.

INDICE

INTRODUCCION	1
I. CONCEPTOS BASICOS	9
Introducción.....	11
1.1. Ley de Newton y aceleración de la gravedad.....	11
1.2. Problema directo y problema inverso en Gravimetría.....	14
1.2.1. Formulación del problema inverso no lineal.....	16
1.2.1.1. Método de Marquardt-Levenberg.....	21
1.2.1.2. Método de Marquardt-Levenberg considerando errores en los datos	24
1.2.2. Análisis de la solución	27
1.2.2.1. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	27
1.2.2.2. Análisis de la matriz de resolución de los parámetros.	31
1.2.2.3. Análisis de la matriz de covarianza de los parámetros.....	34
1.2.2.4. Análisis de la matriz de correlación de los parámetros.	36
II. PROBLEMA DIRECTO PARA FUENTES GRAVIMETRICAS EN 2D.....	37
Introducción.....	39
2.1. Planteamiento del problema directo en 2D.....	39
2.2. Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z.....	41
2.2.1. Contraste de densidad que depende de la distancia horizontal x.....	42
2.2.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z.....	45
2.2.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, z.....	46
2.2.4. Ejemplos	47
2.3. Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x... 50	50
2.3.1. Contraste de densidad que depende de la distancia horizontal x.....	51
2.3.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z.....	52
2.3.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, z.....	54
2.3.4. Ejemplos	56
2.4. Discusión	58
III. PROBLEMA DIRECTO PARA FUENTES GRAVIMETRICAS EN 3D.....	61
Introducción.....	63
3.1. Planteamiento del problema directo en 3D.....	63
3.2. Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y, z.....	64

3.2.1. Contraste de densidad que depende de las distancias horizontales x, y	65
3.2.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z	67
3.2.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, y, z	68
3.2.4. Ejemplos	69
3.3. Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables x, z	73
3.3.1. Contraste de densidad que depende de las distancias horizontales x, y	74
3.3.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z	75
3.3.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, y, z	75
3.3.4. Ejemplos	76
3.4. Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x, y	80
3.4.1. Contraste de densidad que depende de las distancias horizontales x, y	81
3.4.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z	81
3.4.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, y, z	83
3.4.4. Ejemplos	84
3.5. Discusion.....	87
IV. PROBLEMA INVERSO PARA FUENTES GRAVIMETRICAS EN 2D.....	89
Introducción.....	91
4.1. Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z	91
4.1.1. Ejemplo teórico con datos que no presentan errores numéricos.....	94
4.1.1.1. Evolución de los parámetros del modelo	98
4.1.1.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	101
4.1.1.3. Resolución de los parámetros.....	112
4.1.1.4. Covarianza de los parámetros.....	112
4.1.1.5. Correlación entre los parámetros	114
4.1.2. Ejemplo teórico con datos que presentan errores numéricos.....	116
4.1.2.1. Evolución de los parámetros del modelo.....	120
4.1.2.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	123
4.1.2.3. Resolución de los parámetros.....	133
4.1.2.4. Covarianza de los parámetros.....	135
4.1.2.5. Correlación entre los parámetros	135
4.2. Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x	139
4.2.1. Ejemplo teórico con datos que no presentan errores numéricos.....	140
4.2.1.1. Evolución de los parámetros del modelo.....	144
4.2.1.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	147

4.2.1.3. Resolución de los parámetros.....	155
4.2.1.4. Covarianza de los parámetros.....	156
4.2.1.5. Correlación entre los parámetros	157
4.2.2. Ejemplo teórico con datos que presentan errores numéricos	158
4.2.2.1. Evolución de los parámetros del modelo.....	162
4.2.2.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	164
4.2.2.3. Resolución de los parámetros.....	172
4.2.2.4. Covarianza de los parámetros.....	173
4.2.2.5. Correlación entre los parámetros	174
4.3. Discusión	176
V. PROBLEMA INVERSO PARA FUENTES GRAVIMETRICAS EN 3D	179
Introducción	181
5.1. Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y, z	181
5.1.1. Ejemplo teórico con datos que no presentan errores numéricos	184
5.1.1.1. Evolución de los parámetros del modelo.....	190
5.1.1.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	193
5.1.1.3. Resolución de los parámetros.....	207
5.1.1.4. Covarianza de los parámetros.....	207
5.1.1.5. Correlación entre los parámetros.....	207
5.1.2. Ejemplo teórico con datos que presentan errores numéricos	214
5.1.2.1. Evolución de los parámetros del modelo.....	219
5.1.2.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	223
5.1.2.3. Resolución de los parámetros.....	235
5.1.2.4. Covarianza de los parámetros.....	237
5.1.2.5. Correlación entre los parámetros.....	237
5.2. Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x, y	244
5.2.1. Ejemplo teórico con datos que no presentan errores numéricos	245
5.2.1.1. Evolución de los parámetros del modelo.....	251
5.2.1.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	253
5.2.1.3. Resolución de los parámetros.....	263
5.2.1.4. Covarianza de los parámetros.....	263
5.2.1.5. Correlación entre los parámetros.....	263
5.2.2. Ejemplo teórico con datos que presentan errores numéricos	269
5.2.2.1. Evolución de los parámetros del modelo.....	273
5.2.2.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad.....	275

5.2.2.3. Resolución de los parámetros.....	285
5.2.2.4. Covarianza de los parámetros.....	285
5.2.2.5. Correlación entre los parámetros.....	286
5.3. Discusión	292
VI. APLICACION A DATOS DE CAMPO	293
Introducción	295
6.1. Estudio gravimétrico del glaciar Salmon, British Columbia, Canada	295
6.1.1. Antecedentes	295
6.1.2. Inversión de los datos gravimétricos del glaciar Salmon	300
6.1.2.1. Caso 1: fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z	302
6.1.2.2. Caso 2: fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x	308
6.1.2.3. Discusión	314
6.2. Estudio gravimétrico de la cuenca Laguna Salada, Baja California, México	315
6.2.1. Marco geológico y antecedentes	315
6.2.2. Inversión de datos gravimétricos de la Laguna Salada en 2D	320
6.2.2.1. Perfil P1: subcuenca principal.....	322
6.2.2.1.1. Caso 1: fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z	323
6.2.2.1.2. Caso 2: fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x	335
6.2.2.2. Perfil 2: subcuenca secundaria.....	346
6.2.2.2.1. Caso 1: Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z	346
6.2.2.2.2. Caso 2: Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x	358
6.2.2.3. Discusión	370
6.2.3. Inversión de datos gravimétricos de la Laguna Salada en 3D	372
6.2.3.1. Caso 1: Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y, z	374
6.2.3.2. Caso 2: Fuente limitada superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x, y	385
6.2.3.3. Discusión	399

VII. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	401
Introducción.....	403
7.1. Problema directo.....	403
7.2. Problema inverso.....	404
7.3. Aplicación a datos de campo	405
7.3.1. Glaciar Salmon.....	405
7.3.2. Cuenca Laguna Salada.....	406
 APENDICE A	 409
Introducción	411
A.1. Cuadratura de Gauss.....	411
A.1.1. Cuadratura de Gauss para integrales simples.....	412
A.1.2. Cuadratura de Gauss para integrales dobles	415
 APENDICE B.....	 419
Introducción	421
B.1. Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z	421
B.2. Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x	424
 APENDICE C.....	 429
Introducción	431
C.1. Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y, z	431
C.2. Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x, y	436
 BIBLIOGRAFIA	 441

INTRODUCCION

La mayor parte del conocimiento que se tiene acerca de la estructura interna de la Tierra se ha obtenido mediante la interpretación de los datos geofísicos registrados en la superficie de la corteza terrestre y, en menor medida, mediante el muestreo directo del material procedente de su interior. En particular, en Prospección Gravimétrica se mide la componente vertical de la aceleración de la gravedad terrestre para detectar los cambios que tienen lugar en la distribución de la densidad de las rocas en el interior de la Tierra. Esto es posible debido a que el valor de la aceleración de la gravedad medido en un punto determinado de la superficie de la Tierra, y reducido al nivel del mar mediante las correcciones pertinentes, no siempre se ajusta exactamente al valor calculado mediante la fórmula internacional de la gravedad.

Hay dos métodos básicos para realizar la interpretación de los datos geofísicos y, en particular, de las anomalías de la gravedad de la Tierra. Por un lado tenemos el denominado *problema directo* en el cual, a partir de la información geológica y geofísica disponible para la zona de estudio, se construye un posible modelo de fuente anómala o distribución de masas considerada como responsable de la anomalía gravimétrica registrada. Posteriormente se calcula el efecto gravimétrico de dicho modelo y se compara con la gravedad observada. Si estos dos conjuntos de valores de la gravedad no se ajustan de manera satisfactoria, se modifica el modelo de fuente para conseguir un mejor ajuste entre ambos conjuntos. El otro método utilizado para realizar la interpretación de los datos de gravedad es el llamado *problema inverso*. Mediante este método se puede encontrar la distribución de masas responsable de una determinada anomalía, a partir de los valores de la gravedad observados en la superficie de la Tierra.

Se han publicado numerosos trabajos en los que se aborda tanto la metodología como la aplicación del problema directo para fuentes anómalas bidimensionales y tridimensionales, desde el trabajo clásico de Talwani et al. (1959) para fuentes bidimensionales con densidad constante, el cual ha proporcionado hasta el momento el algoritmo más utilizado para la interpretación de las anomalías de la gravedad, hasta los trabajos más actuales, en los que se supone que la densidad de las fuentes anómalas presenta variaciones laterales y/o en profundidad.

El interés en la interpretación y el modelado de anomalías gravimétricas, utilizando modelos de fuente cuyas densidades van a depender de la profundidad, proviene de la relevancia económica y geológica de las cuencas sedimentarias donde, normalmente, el contraste de densidad de este tipo de estructuras geológicas, con respecto al medio que les rodea, va a depender de la profundidad. Por ejemplo, si suponemos que la compactación diferencial simple es el proceso diagenético más importante en la evolución de una cuenca sedimentaria, la suposición de un decrecimiento exponencial del contraste de densidad con la profundidad puede dar resultados significativos en el modelado de cuencas sedimentarias. En este sentido hay que destacar varios trabajos, como por ejemplo Cordell (1973), que desarrolló un método para calcular el efecto gravimétrico producido por un prisma vertical bidimensional

con una densidad que decrece exponencialmente con la profundidad. Murthy y Rao (1979) extendieron el método integral de Hubert (1948) para obtener el efecto gravimétrico de un cuerpo con sección arbitraria y cuya densidad varía linealmente con la profundidad. Chai y Hinze (1988) derivaron una aproximación en el dominio de las frecuencias para calcular el efecto gravimétrico debido a un prisma vertical de base rectangular cuya densidad varía exponencialmente con la profundidad. Rao (1990) desarrolló una expresión para obtener el efecto gravimétrico producido por un cuerpo asimétrico de base trapezoidal cuya densidad viene expresada por una función polinomial cuadrática de la profundidad. García-Abdeslem (1992, 1996a) desarrolló métodos para calcular el efecto gravimétrico causado por un prisma rectangular vertical en 2D y 3D, donde la densidad puede variar como cualquier función que dependa de la profundidad. Rao et al. (1993) derivaron una aproximación bidimensional en el dominio de los números de onda para calcular el efecto gravitacional producido por varios cuerpos simétricos donde la densidad varía exponencialmente con la profundidad como un polinomio cuadrático. Sin embargo, además de la compactación diferencial simple que tiene lugar en la evolución de una cuenca, también pueden estar presentes otros procesos geológicos como, por ejemplo, la estratificación no uniforme en capas del material sedimentario, los cambios laterales de facies y la cementación química y estructural, los cuales pueden complicar la estructura geológica de una cuenca sedimentaria. Esto requiere una aproximación más general para acomodar las variaciones arbitrarias de densidad que pueden tener lugar dentro de este tipo de estructuras. En esta línea de trabajo Ruotoistenmäki (1992) desarrolló varias expresiones matemáticas para calcular las anomalías gravimétricas debidas a fuentes bidimensionales en las que la densidad viene dada por una función polinómica de quinto grado que depende o bien de la profundidad $[r(z)]$ o bien de la distancia horizontal $[r(x)]$, y en las que la geometría del cuerpo está descrita por funciones continuas.

En esta Tesis utilizaremos métodos analíticos y numéricos de integración para desarrollar nuevas expresiones matemáticas con las que calcular el efecto gravimétrico de varios tipos de fuente, tanto bidimensionales como tridimensionales, las cuales se caracterizan por tener un contraste de densidad que varía lateralmente con la distancia horizontal, o que presenta variaciones en profundidad, o con ambos tipos de cambio al mismo tiempo, y cuyas fronteras pueden ser descritas matemáticamente por funciones continuas. A diferencia de Ruotoistenmäki (1992), en el presente trabajo se ha supuesto que el contraste de densidad de las fuentes viene descrito por polinomios de segundo grado cuyos coeficientes son funciones continuas dentro del intervalo de integración, pero la naturaleza de estas funciones matemáticas puede ser de cualquier tipo, no sólo polinomios, dando complejidad a la expresión final, la cual va a depender tanto de la distancia horizontal $[Dr(x,y)]$ como de la profundidad $[Dr(z)]$ o de ambos tipos de coordenadas $[Dr(x,y,z)]$ a la vez, que sería el caso más general. Según esto, se puede modelar una gran variedad de fuentes geológicas, no importa lo complejas que éstas sean. En cuanto a la estructura, se van a presentar dos tipos principales de fuente anómala, tanto en el caso bidimensional como en el tridimensional. En el primer tipo se supone que el techo y la base de la

estructura son planos y que las fronteras laterales vienen descritas por funciones continuas en el intervalo de integración. En el segundo tipo de fuente se supone que las fronteras laterales son planas y que el techo y la base de la estructura vienen descritos por funciones también continuas. En ambos tipos de fuentes se va a considerar que el techo de la fuente anómala coincide con la superficie donde se encuentra el observador.

En este trabajo también se va a abordar el problema inverso no lineal utilizando el método iterativo de inversión de Marquardt-Levenberg (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963; 1970), el cual ha sido ampliamente utilizado en numerosos trabajos geofísicos, no sólo en Prospección Gravimétrica, sino también en otros campos de la Geofísica (Aki y Richards, 1980; Meju, 1994; Parker, 1994). Lo novedoso del proceso de inversión presentado en esta Tesis es la utilización de los modelos de densidad y estructura de fuentes anómalas, descritos anteriormente, para el cálculo de la solución del problema. Estos modelos deben ser parametrizados convenientemente puesto que, mediante el proceso de inversión de una anomalía gravimétrica, se deben de determinar una serie de parámetros que son las incógnitas de nuestro problema y que definen las características principales de la fuente responsable de dicha anomalía. Cada modelo de fuente presenta un número máximo de parámetros que describen tanto el contraste de densidad como su estructura geométrica. El método aquí presentado tiene la flexibilidad de calcular, mediante inversión, todos los parámetros del modelo a la vez, pero también se pueden dejar fijos unos pocos que se consideran conocidos, dependiendo de la información disponible en cada caso, y así calcular el resto de parámetros del modelo de los que no se tiene ninguna información. El hecho de que las estructuras desconocidas se conciben en términos de un pequeño número de parámetros es debido a razones de cálculo más que a razones geofísicas o geológicas.

Para cada tipo de fuente presentado en esta Tesis se va a considerar el caso teórico ideal en el que se supone que los datos gravimétricos que se van a invertir son conocidos exactamente y tan densamente como se necesite. También se va a tratar el caso teórico en el que el problema de inversión se realiza con datos contaminados con ruido para ver de qué manera puede afectar dicho ruido a la resolución del problema.

Se podría pensar que, debido a los buenos resultados de un determinado método de inversión de datos, éste probaría ser muy utilizable para cualquier caso práctico en el que el método se aplique a datos de campo, pero a menudo esto no es cierto, ya que cualquier problema inverso en Geofísica es siempre inestable. Esto es debido a que la solución de un problema inverso va a ser muy sensible a la forma en la que estén distribuidos los datos, a los errores numéricos que pueda haber en el proceso de resolución del problema y, sobre todo, al ruido que puede estar contaminando los datos. Para estudiar la posible inestabilidad de nuestro método y ver de qué manera afecta a la solución del problema, vamos a realizar estudios de *sensibilidad*, *existencia* y *estabilidad* para cada caso, basándonos en los trabajos de Aki y Richards (1980), García-Abdeslem (2000), Inman (1975), Inman et al. (1973) y Lanczos (1961), entre otros. Otro problema que se plantea en Teoría de Inversión es que los problemas inversos

en Geofísica nunca poseen solución única y que, a la hora de interpretar datos geofísicos, hay que decidir entre una gran variedad de soluciones compatibles con los datos. Por ello, también se va a realizar un estudio de la *unicidad* del problema para cada tipo de fuente anómala. Para estudiar cuantitativamente de qué manera la inestabilidad del proceso y el error en los datos pueden afectar a la solución del problema, se realizará también el estudio de las matrices de *resolución*, *covarianza* y *correlación* en cada caso.

Posteriormente se van a elegir dos conjuntos de datos de gravedad registrados en campo para estudiar la distribución de densidades y las geometrías de las fuentes anómalas responsables de las anomalías gravimétricas. Para ambos casos se realizará la inversión modelando dichas estructuras con los diferentes tipos de fuente presentados en esta Tesis, haciendo un análisis de cada solución mediante las matrices de resolución, covarianza y correlación de los parámetros calculados.

Según todo lo anterior, esta Tesis está estructurada esencialmente en cinco partes, con un total de 7 capítulos. La primera parte está formada exclusivamente por el Capítulo I, en el que se presentan los conceptos básicos de Prospección Gravimétrica y Teoría de Inversión utilizados en este trabajo. El material incluye un breve resumen de los conceptos de fuerza y aceleración de la gravedad, y los conceptos de problema directo y problema inverso, pasando a describir la formulación del método de Marquardt-Levenberg para el problema de inversión no lineal, con datos libres de ruido y con datos contaminados con ruido aleatorio. Posteriormente se describen los conceptos teóricos en los que se basa el proceso que se seguirá para el análisis de la solución obtenida, como el concepto de sensibilidad, de existencia, de unicidad, de estabilidad, matriz de resolución, matriz de covarianza y matriz de correlación.

La segunda parte de este trabajo se compone del Capítulo II y el Capítulo III que tratan el problema directo en Gravimetría para fuentes bidimensionales y tridimensionales, respectivamente. Para ello se supone, como ya adelantábamos anteriormente, que el contraste de densidad y la estructura de la fuente anómala van a venir descritos por funciones continuas que van a depender tanto de la profundidad como de la distancia horizontal. Para cada tipo de estructura y contraste de densidad se presenta un ejemplo en el que se han elegido, por simplicidad, funciones polinómicas para describir la fuente anómala.

La tercera parte del trabajo consta de los dos capítulos siguientes y en ellos se describe el proceso de inversión de datos de gravedad generados sintéticamente mediante modelos de fuente conocidos. En el Capítulo IV se calcula el problema inverso para el caso más general de cada uno de los tipos de fuentes bidimensionales que se encuentran descritos en el Capítulo II. En el Capítulo V se presenta el problema inverso de los casos más generales de fuentes tridimensionales del Capítulo III. En los ejemplos teóricos presentados tanto en el Capítulo IV como en el Capítulo V, la inversión se realiza calculando el número máximo de parámetros con los que se describe cada tipo de fuente anómala. Para todos estos ejemplos, primeramente se considera la inversión de datos exactos y, posteriormente, la

inversión de datos contaminados con ruido. También se realiza un análisis de la sensibilidad, la existencia, la unicidad y la estabilidad. Además, se hace un análisis de la resolución, la covarianza y la correlación de los parámetros obtenidos como solución del problema.

La cuarta parte de este trabajo está formada únicamente por el Capítulo VI. Este Capítulo está dividido en dos partes. En una primera parte se aplica el método desarrollado en los capítulos anteriores para realizar la interpretación de los datos de campo de un perfil registrado sobre el glaciar Salmon, British Columbia (Canadá), el cual es un caso clásico utilizado en la literatura para comprobar las ventajas y las limitaciones de métodos geofísicos de modelado e inversión de datos (Grant y West, 1965; Parker, 1994). Por ello se ha elegido este caso, para estudiar el comportamiento del método de interpretación desarrollado en este trabajo. En la segunda parte de este Capítulo se realiza la interpretación de los datos de gravedad registrados sobre la cuenca Laguna Salada, Baja California (México). Este caso se ha utilizado en esta Tesis para ilustrar tanto el modelado bidimensional, interpretando dos perfiles de datos que cruzan transversalmente la estructura de la cuenca, como el tridimensional.

En la quinta y última parte se incluye el Capítulo VII en el que se resumen los resultados y las conclusiones obtenidas y en el que también se analizan las ventajas y las limitaciones del método de interpretación de datos gravimétricos que se ha desarrollado en el presente trabajo.

Capítulo I:

CONCEPTOS BASICOS

INTRODUCCION

En este Capítulo se presentan los principios básicos de la teoría gravitacional de Newton, de los que se deducen las expresiones matemáticas necesarias para resolver el problema directo en Gravimetría. Así mismo, se plantean los fundamentos teóricos para calcular la solución del problema inverso a partir de datos gravimétricos, así como el análisis de los diferentes aspectos de la solución de este problema.

1.1. LEY DE NEWTON Y ACELERACION DE LA GRAVEDAD

En 1687 Newton publicó su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* en el que, entre otras leyes sobre el movimiento, presentó la Ley de la Gravitación Universal. Esta ley nos dice que la presencia de una partícula de masa m , situada en un punto P , genera un campo gravitacional alrededor de dicho punto tal que otra masa m_0 , situada en el punto de observación P_0 , es atraída hacia P con una fuerza F que es directamente proporcional a cada una de las masas de ambas partículas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa. Podemos expresar esta ley como:

$$\mathbf{F} = G \frac{m m_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.1)$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, en unidades de *Sistema Internacional (SI)*, es la constante de Gravitación Universal según las medidas realizadas por Heyl alrededor de 1930 (Heiskanen y Moritz, 1985); la distancia r viene dada por la expresión:

$$r = \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]^{1/2} \quad (1.2)$$

donde se ha supuesto un sistema de ejes cartesianos tradicional, con la parte positiva del eje x dirigida hacia el norte, la del eje y dirigida hacia el este y la del eje z dirigida hacia el nadir; $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ es un vector unitario cuya dirección coincide con la recta que une ambas masas y su sentido está dirigido desde la fuente gravitacional P hacia el punto de observación P_0 (figura 1.1).

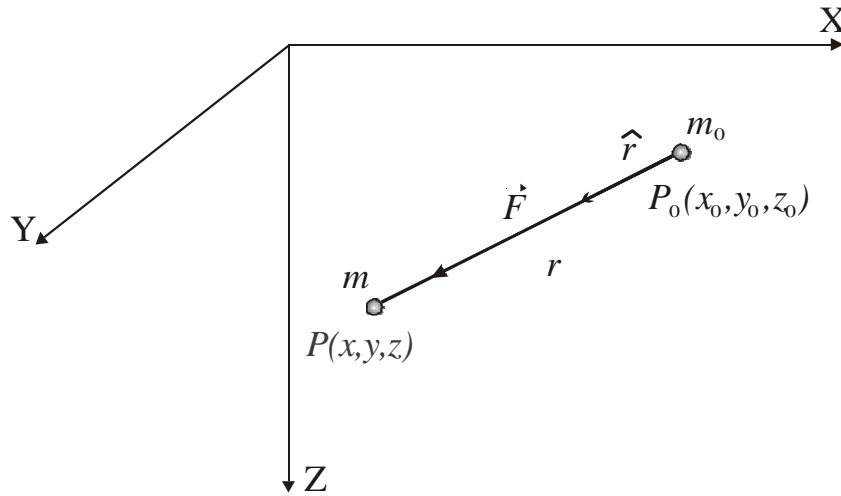


FIGURA 1.1. Fuerza de atracción gravitacional entre dos masas m y m_0 .

Si dividimos la fuerza de atracción \mathbf{F} por la masa atraída m_0 , la ecuación (1.1) queda como:

$$\mathbf{g}(P_0) = \frac{\mathbf{F}}{m_0} = G \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.3)$$

El vector \mathbf{g} se expresa en unidades de aceleración y se denomina *aceleración de la gravedad*. Este vector representa un campo vectorial cuyo significado físico es la atracción gravitatoria que ejerce la presencia de la masa m sobre un punto de observación P_0 .

Si en vez de una partícula de masa tenemos una distribución continua cuya densidad es \mathbf{r} , ocupando una región \mathbf{W} , el campo gravitacional producido por dicha distribución, en un punto P_0 situado fuera de \mathbf{W} , viene expresado por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{g}(P_0) = G \int_{\mathbf{W}} \mathbf{r} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathbf{W} \quad (1.4)$$

donde r es la distancia entre el punto P donde se encuentra el elemento $d\mathbf{W}$, y el punto P_0 , donde se encuentra el observador (figura 1.2).

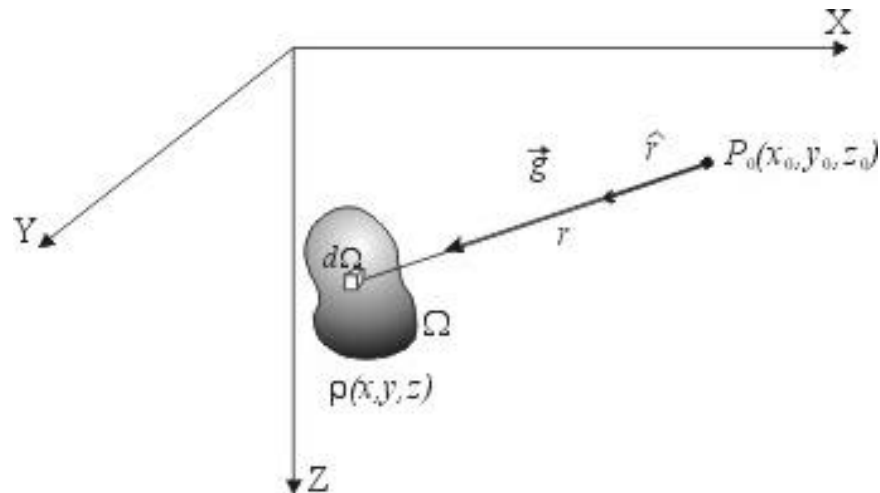


FIGURA 1.2. Aceleración de la gravedad producida en un punto P_0 por una distribución de masas (modificado de Blakely, 1996).

Los datos proporcionados por los gravímetros corresponden a medidas de la componente vertical de la aceleración de la gravedad, esto es, la componente del vector \mathbf{g} en la dirección del eje z . Si ahora llamamos g a dicha componente y la expresamos en coordenadas cartesianas, la ecuación (1.4) se convierte en:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \iiint_V dx dy dz \frac{(z - z_0)}{r^3} \mathbf{r}(x, y, z) \quad (1.5)$$

donde la distribución de masas es una distribución de densidad $\mathbf{r}(x, y, z)$ que ocupa un volumen V y donde r viene dado por la expresión (1.2). La solución de (1.5) nos proporciona el valor de g , conocido también como el efecto gravimétrico producido por dicha distribución de masas.

Galileo fue el que primero midió la aceleración de la gravedad en su famoso experimento en Pisa. En su honor, la unidad de aceleración de la gravedad en el sistema *cgs* (1 cm/s^2) se denomina Gal y en la literatura generalmente se presenta en unidades de mGal ($1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal}$). La conversión del sistema *cgs* a las unidades del *SI* es: $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$. En este trabajo se ha adoptado el *SI* para las unidades utilizadas, excepto para la aceleración de la gravedad (mGal) y la densidad (g/cm^3) para las que se utilizará el sistema *cgs*, ya que ambos son excepciones admitidas y las más utilizadas en la literatura.

1.2. PROBLEMA DIRECTO Y PROBLEMA INVERSO EN GRAVIMETRIA

La ecuación (1.5) es un caso particular de la expresión:

$$g(P_0) = \int_W \mathbf{r}(P) K(P, P_0) dW \quad (1.6)$$

donde $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es la posición del observador, $P(x, y, z)$ es el punto donde se encuentra el elemento fuente dW , W es la región finita que ocupa la fuente anómala, $g(P_0)$ es la componente vertical de la aceleración de la gravedad medida en el punto P_0 , $\mathbf{r}(P)$ es una función continua que describe una cantidad física propia de la fuente anómala, en nuestro caso la densidad, y $K(P, P_0)$ es el *núcleo de los datos* que describe la geometría existente entre la fuente y el observador situado en P_0 . La ecuación (1.6) es una *ecuación de Fredholm de primera clase* y la función $K(P, P_0)$ se denomina *función de Green*.

El cálculo del valor de $g(P_0)$, mediante métodos analíticos o numéricos, se puede realizar conociendo las funciones $\mathbf{r}(P)$, $K(P, P_0)$ y W , es lo que se denomina *problema directo* y tiene solución única, ya que la gravedad $g(P_0)$ está completamente determinada por dichas funciones. Sin embargo, hay que tener en cuenta que pueden existir varias combinaciones de $\mathbf{r}(P)$, $K(P, P_0)$ y W que proporcionen el mismo valor de $g(P_0)$.

Cuando se obtienen los valores de $g(P_0)$ experimentalmente y se desea calcular algún aspecto de $\mathbf{r}(P)$ o de W , se está realizando el cálculo del *problema inverso*. Si lo que se quiere obtener es la propiedad física de la fuente $\mathbf{r}(P)$, el problema es *lineal* debido a que la relación entre $\mathbf{r}(P)$ y $g(P_0)$ es lineal. Cuando se busca información acerca de la forma geométrica de la región W el problema es *no lineal*, pues la región que ocupa la fuente tiene una relación no lineal con la gravedad $g(P_0)$.

En el cálculo de un problema inverso hay que tener en cuenta varios aspectos acerca de las soluciones que se quieren obtener. Primero tenemos que considerar la *existencia* de la solución del problema. Para un problema inverso lineal en Gravimetría existe al menos una solución, cualesquiera que sean los datos observados (Parker, 1994). La condición que se tiene que cumplir para que esto ocurra es que los núcleos de los datos $K(P, P_0)$, para cada posición del observador, deben ser linealmente independientes y esto ocurre en prácticamente la mayoría de los problemas geofísicos lineales. No ocurre lo mismo en el problema inverso no lineal ya que, en general, no existe ninguna teoría que responda a la cuestión de la existencia de soluciones para este tipo de problemas.

Otro aspecto importante a estudiar es la *unicidad* de la solución. La solución del problema inverso lineal en Gravimetría no es única porque, como se dijo anteriormente, existen un gran número de combinaciones entre $\mathbf{r}(P)$, W y $K(P, P_0)$ que pueden tener el mismo efecto gravimétrico.

Para determinar la unicidad de la solución de un problema inverso lineal, se comprueba si existe una solución $a(P)$ de la ecuación (1.6) que sea distinta de la solución trivial:

$$\int_W a(P) K(P, P_0) dW = 0 \quad (1.7)$$

Si existe alguna solución $a(P)$, la función $r(P)$ no es única. La clase de las $a(P)$ existentes se denomina *aniquilador* o *espacio nulo* del núcleo de los datos $K(P, P_0)$ y la región W .

Debido a que el núcleo $K(P, P_0)$ suele ser de forma complicada, no es fácil establecer la unicidad de la solución (Blakely, 1996; Parker, 1977). Para el problema inverso lineal siempre es posible encontrar un modelo de fuente que cumpla con las condiciones de los datos (Parker, 1994), pero para el problema inverso no lineal esta cuestión queda sin resolver, pues no está clara la determinación de la existencia de sus soluciones, aunque si se comprueba que existe alguna solución, ésta nunca será única (Parker, 1977).

Tanto en el problema lineal como en el problema no lineal, a pesar de la gran cantidad de modelos posibles que se pueden estimar, se puede restringir su número imponiendo una serie de condiciones obtenidas a partir de un conocimiento previo, geológico o geofísico, de la fuente que queremos modelar. Con estas restricciones podemos acotar el número de soluciones posibles.

Otro de los aspectos a tener en cuenta es el de la *estabilidad*. La función $g(P_0)$ en el punto P_0 es un promedio ponderado del efecto gravimétrico de todas las partes de la fuente, por lo que depende de toda la distribución de masas de la misma. La función peso, en este caso, es el núcleo de los datos $K(P, P_0)$. Esta función peso suele ser una función que varía suavemente haciendo que $g(P_0)$ sea una función más suave que $r(P)$. Por tanto, el problema inverso lineal, por el que se calcula la solución $r(P)$ a partir de la ecuación (1.6), es un proceso en el que la función $g(P_0)$ se hace menos suave. Esto implica que pequeños cambios producidos en $g(P_0)$ pueden generar grandes variaciones en $r(P)$ y entonces se dice que la solución es inestable (Blakely, 1996). En el caso de problemas no lineales, aún no existe una teoría satisfactoria que realice inferencias a partir del problema inverso lineal (Parker, 1977). En general, la inversión, lineal y no lineal, en campos potenciales es inestable. Una posible forma de reducir la inestabilidad es introduciendo información adicional sobre la fuente en el problema (Blakely, 1996).

Cuando la existencia de la solución está garantizada, se procede a realizar la *construcción* de esa solución. En general, cuando se busca una solución para un problema de inversión, es recomendable hacer uso de la Ley de Occam y suponer que el modelo que describe la fuente es lo más suave o simple posible, para evitar la sobreinterpretación de los datos y para eliminar las discontinuidades arbitrarias que pueden aparecer en el modelo, pero que no son esenciales para reproducir los datos observados (Constable, et al., 1987). Si para alcanzar la solución a un problema

inverso se utilizan los métodos recursivos, es necesario hacer un estudio sobre la convergencia de las iteraciones (Parker, 1977). En problemas no lineales, el principal obstáculo es la falta de capacidad que hay para asegurar la existencia de la solución. Si en la búsqueda de una solución se obtienen resultados, la existencia está asegurada. Si no se obtienen resultados, no se puede saber si esto es debido a la no existencia o a que el método de búsqueda no es el apropiado.

1.2.1. Formulación del problema inverso no lineal

Por razones técnicas, las observaciones experimentales de las anomalías de la gravedad se registran en intervalos finitos y la descripción de las propiedades físicas de un modelo de fuente gravimétrica se suele realizar mediante un número finito de parámetros. Esto significa que debemos reducir el problema continuo de la ecuación (1.6) al cálculo de un conjunto de parámetros que se realiza a partir de un conjunto finito de datos. Este procedimiento se denomina *parametrización del problema*.

Si suponemos que el conjunto de los parámetros está representado por un vector $\mathbf{p} = \{p_j\} \in E^N$, que pertenece a un espacio vectorial lineal normado con norma euclídea de dimensión N , y el conjunto de los datos observados está representado por un vector $\mathbf{g} = \{g_i\} \in E^M$, perteneciente a un espacio euclídeo de dimensión M , la ecuación (1.6) para el problema directo se puede reducir a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$g_i = F_i[\mathbf{p}] \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (1.8)$$

donde $F_i[\mathbf{p}] \in \mathbb{H}$ es un funcional lineal continuo que pertenece a un espacio de Hilbert \mathbb{H} , que relaciona los parámetros del modelo \mathbf{p} con la medida i -ésima del vector de datos de gravedad $g_i \in \mathfrak{R}$, donde \mathfrak{R} es el espacio de los números reales.

El sistema de ecuaciones (1.8) se puede reescribir en su forma compacta, obteniéndose la ecuación:

$$\mathbf{g} = F[\mathbf{p}] \quad (1.9)$$

que es la expresión general de un problema directo. Para abordar el problema inverso, se debe realizar la inversión de dicha ecuación para obtener un estimador del vector de parámetros \mathbf{p} .

Para calcular una solución al problema inverso, es necesario tener en cuenta las dimensiones relativas del vector de los datos observados \mathbf{g} y del vector de los parámetros del modelo \mathbf{p} . Según esto,

el problema inverso se puede clasificar en *sobredeterminado*, cuando hay más datos que parámetros ($M > N$), en *indeterminado*, cuando hay menos datos que parámetros ($M < N$) y *determinado*, cuando hay el mismo número de datos que de parámetros ($M = N$). En general, la cantidad de datos registrados en un problema de Gravimetría es mayor que los parámetros necesarios para caracterizar la fuente anómala. Por ello, vamos a centrarnos en la resolución de problemas inversos sobredeterminados.

El funcional $F[\mathbf{p}]$ define el carácter lineal o no lineal de la relación existente entre los datos disponibles y el resultado del problema inverso. Según la linealidad del problema, hay diferentes métodos para abordar la inversión de la ecuación (1.9). El funcional $F[\mathbf{p}]$ más sencillo es el funcional lineal que transforma la expresión (1.9) en la ecuación matricial:

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (1.10)$$

donde $\mathbf{G} = \{G_{ij}\} \in \mathcal{M}(M \times N)$ es una matriz del espacio vectorial lineal de matrices de dimensiones $M \times N$ que describe la relación entre los vectores \mathbf{g} y \mathbf{p} . Si comparamos la ecuación anterior con la ecuación (1.6), la relación $\mathbf{r}(P)d\mathbf{W}$ es sustituida por el conjunto de parámetros representados por el vector \mathbf{p} y el núcleo de los datos $K(P, P_0)$ se ha convertido en la matriz \mathbf{G} . Con esto se ha realizado una *discretización* del problema, lo que facilita el cálculo de la solución buscada \mathbf{p} . El método más utilizado para invertir la ecuación (1.10) es *el método de los mínimos cuadrados* que está ampliamente descrito y utilizado en la literatura científica (Blakely, 1996; García-Abdeslem, 1996a; Inman et al., 1973; Last y Kubik, 1983; Lawson y Hanson 1974; Lines y Treitel, 1984; Meju, 1994; entre otros).

En general, en la mayor parte de los problemas geofísicos, la respuesta del modelo es una función no lineal de los parámetros de dicho modelo y, por tanto, se deben utilizar técnicas no lineales para calcular una estimación de los parámetros de la fuente. Estas técnicas no lineales han sido tratadas de manera exhaustiva en la literatura científica (Barbosa et al., 1999; Constable et al., 1987; Granser, 1987; Inman et al., 1973; Inman, 1975; Levenberg, 1944; Lawson y Hanson, 1974; Lines y Treitel, 1984; Marquardt, 1963, 1970; Meju, 1994; Parker, 1977, 1994; Tarantola y Valette, 1982; Thanassoulas et al., 1987; Vogel, 1987; entre otros).

En el cálculo de la densidad y la estructura de un cuerpo responsable de una anomalía gravimétrica nos enfrentamos al problema de que el funcional $F[\mathbf{p}]$ no sea lineal y el problema no va a estar expresado por una relación sencilla como la ecuación (1.10). Sin embargo, esto no significa que vayamos a prescindir de los espacios lineales. En este caso, se hace necesario reducir el carácter no lineal del funcional F convirtiéndolo en un funcional lineal. Este proceso se denomina *linealización* y se realiza convirtiendo F en una forma lineal aproximada mediante una expansión en una serie de Taylor. Para realizar dicha expansión vamos a suponer que conocemos la respuesta teórica de un modelo \mathbf{p}^0 :

$$\mathbf{g}^0 = F[\mathbf{p}^0] \quad (1.11)$$

Consideremos que el funcional i -ésimo $F_i[\mathbf{p}^0]$ es lineal alrededor de $\mathbf{p}^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_N^0)$, de forma que una pequeña perturbación $\mathbf{d}\mathbf{p}$ de la respuesta del modelo alrededor de \mathbf{p}^0 , se puede expresar utilizando el Teorema de Taylor:

$$\begin{aligned} F_i[\mathbf{p}] &= F_i[p_1^0 + \delta p_1, p_2^0 + \delta p_2, \dots, p_N^0 + \delta p_N] = \\ &= F_i[\mathbf{p}^0] + \frac{\partial F_i}{\partial p_1} \mathbf{d} p_1 + \frac{\partial F_i}{\partial p_2} \mathbf{d} p_2 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial p_N} \mathbf{d} p_N + o(\|\mathbf{d}\mathbf{p}\|^2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $\mathbf{d}\mathbf{p} = \{\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_N\}$ es un vector de dimensión N cuyas componentes son las perturbaciones de los parámetros. En la expresión (1.12) hemos despreciado términos de segundo orden y superiores.

La expresión anterior se puede escribir de forma compacta para los M funcionales de la ecuación (1.8) como:

$$F[\mathbf{p}] = F[\mathbf{p}^0] + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial F[\mathbf{p}^0]}{\partial p_j} \mathbf{d} p_j \right\} \bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0} + o(\|\mathbf{d}\mathbf{p}\|^2) \quad (1.13)$$

Con esto hemos realizado una expansión del funcional $F[\mathbf{p}]$ alrededor del punto $(p_1^0, p_2^0, \dots, p_N^0)$, convirtiendo nuestro problema no lineal en un problema lineal que puede ser resuelto mediante aproximaciones sucesivas.

Los datos observados utilizados para calcular el modelo \mathbf{p} de la fuente anómala por inversión, no son capaces de determinar con exactitud los parámetros que determinan dicho modelo. Por tanto, la relación entre el vector de datos observados \mathbf{g} y el vector de parámetros \mathbf{p} debe tener en cuenta la diferencia que tiene lugar entre \mathbf{g} y el resultado del problema directo $F[\mathbf{p}]$ calculado a partir de los parámetros del modelo. Por ello, la ecuación (1.9) debe ser de la forma:

$$\mathbf{g} = F[\mathbf{p}] + \mathbf{e} \quad (1.14)$$

donde $\mathbf{e} = \{e_i\} \in E^M$ es un vector denominado *residual*.

Sustituyendo el funcional descrito por la expresión (1.13) en la ecuación anterior y despejando el vector \mathbf{e} , obtenemos:

$$\mathbf{e} = \mathbf{g} - F[\mathbf{p}^0] - \left. \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial F[\mathbf{p}^0]}{\partial p_j} \delta p_j \right\} \right|_{\mathbf{p} = \mathbf{p}^0} \quad (1.15)$$

A partir de la ecuación (1.15), definimos el vector

$$\mathbf{y} = \mathbf{g} - F[\mathbf{p}^0] \in E^M \quad (1.16)$$

que representa la diferencia entre los datos de gravedad observados y el resultado del problema directo calculado para el modelo inicial \mathbf{p}^0 . También definimos la matriz

$$\mathbf{J} = \left\{ \frac{\partial F_i[\mathbf{p}_j^0]}{\partial p_j} \right\} \in \mathbb{M} \quad (M \times N) \quad (1.17)$$

llamada *Jacobiano*, cuyos elementos son las derivadas parciales de cada funcional F_i con respecto a cada uno de los parámetros p_j del modelo. Por tanto la expresión (1.15) se convierte en la ecuación:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{J}\delta\mathbf{p} \quad (1.18)$$

que es una ecuación de carácter lineal que nos proporciona el residual asociado con nuestras predicciones del modelo de fuente, ya que el modelo inicial propuesto no resolverá los datos de manera exacta.

El vector $\delta\mathbf{p} = \{\delta p_j\}$, que contiene las perturbaciones de los parámetros del modelo, es ahora la incógnita del problema. Su solución nos proporciona una estimación de las perturbaciones que deben ser aplicadas al modelo inicial propuesto \mathbf{p}^0 para obtener un modelo de fuente cuya respuesta sea capaz de ajustar los datos observados. Para obtener dicha solución, se minimiza una función f definida como el cuadrado de la norma euclídea del vector \mathbf{e} :

$$f = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \|\mathbf{g} - F[\mathbf{p}]\|^2 \quad (1.19)$$

obteniendo el estimador del vector perturbación de los parámetros:

$$\hat{\delta\mathbf{p}} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{y} \quad (1.20)$$

donde la matriz:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \quad (1.21)$$

se denomina *matriz inversa generalizada*. Esta perturbación se aplica a un modelo inicial determinado para obtener un nuevo modelo cuya respuesta se ajuste mejor a los datos. Si el nuevo modelo no resuelve el problema, puede ser necesario repetir el procedimiento utilizando el nuevo modelo como modelo inicial. Este método es un proceso iterativo que se repite todas las veces necesarias hasta conseguir que converja en un modelo solución cuya respuesta se ajuste a los datos observados. La expresión que describe este proceso iterativo es:

$$\hat{\mathbf{p}}^{k+1} = \hat{\mathbf{p}}^k + (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{y} \quad (1.22)$$

donde el jacobiano \mathbf{J} está evaluado en los parámetros del modelo $\hat{\mathbf{p}}^k$. Este método se denomina *el método de Gauss-Newton o Inversa Generalizada* y es, en realidad, una técnica basada en el método de los mínimos cuadrados (Meju, 1994).

Cuando la matriz $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ es singular o casi singular, el método puede ser divergente, por lo que no llegaríamos a ninguna solución. Se dice entonces que la matriz $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ está *mal condicionada*. Cuando ocurre esto, la solución es tan grande que físicamente no tiene sentido y se dice que ha sobrepasado el rango.

Por otro lado, en el caso en el que la matriz $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ no sea singular, para que el proceso iterativo del método de Gauss-Newton converja a una solución es necesario que el modelo inicial sea una buena aproximación al modelo real de la fuente. Cuando esto es imposible de obtener, se puede hacer uso de otro método de inversión denominado *método del gradiente*. En general, el método de Gauss-Newton es práctico cuando el modelo inicial \mathbf{p}^0 se aproxima a la solución del problema inverso, mientras que el método del gradiente lo es cuando el modelo inicial es bastante diferente de la solución real. Este método calcula el vector perturbación que se aplica al modelo inicial, en la dirección del gradiente negativo de la función \mathbf{e} que se quiere minimizar.

Con este método, el estimador de las perturbaciones de los parámetros viene dado por la expresión (Meju, 1994):

$$\Delta \hat{\mathbf{p}} = 2 \mathbf{c} \mathbf{J}^T \mathbf{y} \quad (1.23)$$

donde \mathbf{c} es una constante cuyo valor determina el tamaño del paso de las correcciones que hay que aplicar al modelo.

Puesto que el vector $\ddot{\mathbf{p}}$ está orientado en la misma dirección en la que la función ϕ decrece, se produce la convergencia del método pero, normalmente, es una convergencia lenta. Además, se pueden presentar problemas en dicha convergencia cuando el paso χ es muy pequeño (Lines y Treitel, 1984). Por tanto, una vez establecida la dirección del gradiente, es necesario controlar este paso cuidadosamente, pues una elección errónea de esta constante puede hacer que el método diverja.

En principio, el método del gradiente asegura la convergencia de la solución y el esquema no debe diverger aunque el modelo inicial \mathbf{p}^0 esté muy alejado del modelo real que se busca, lo que es una gran ventaja. Para el caso particular de que el paso $2c$ venga dado por $(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$, nos encontramos con la solución del método de Gauss-Newton y con una posible divergencia si la matriz $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ está mal condicionada.

Existe un tercer método de inversión para problemas no lineales que es un híbrido entre el método de Gauss-Newton y el método del gradiente. Este método reduce las dificultades que se producen cuando $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ es casi singular y evita una evolución no acotada de la solución del problema a través de las sucesivas iteraciones. Este método fue primeramente introducido por Levenberg (1944) que sugirió que se debían añadir pesos positivos a la diagonal principal de la matriz $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ para evitar el posible carácter singular de la misma. Posteriormente, Marquardt (1963; 1970) describió con mayor detalle este método, comparándolo con el de Gauss-Newton, concluyendo que el método propuesto por Levenberg es más estable que el de la inversa generalizada. En general, este método se conoce como *método de los mínimos cuadrados amortiguados*, *aproximación de Marquardt-Levenberg* o *“ridge regression”* y es el método que utilizaremos para el cálculo del problema inverso en este trabajo.

1.2.1.1. Método de Marquardt-Levenberg

El método de Marquardt-Levenberg está basado en la técnica de los mínimos cuadrados pero imponiendo una cota al tamaño de las perturbaciones de los parámetros $\ddot{\mathbf{p}}$ para que no se produzca divergencia en el cálculo de la solución. El efecto de esta restricción en los parámetros es prevenir las oscilaciones incontroladas que se puedan producir en el cálculo de la solución en las sucesivas iteraciones, es decir, se suaviza el vector de perturbaciones $\ddot{\mathbf{p}}$ (Lines y Treitel, 1984). Según esto, se debe minimizar no sólo el vector residual \mathbf{e} , sino también el tamaño de las perturbaciones de los parámetros $\ddot{\mathbf{p}}$, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. Por ello, la función que debemos minimizar es:

$$\mathbf{f} = \|\mathbf{d}\mathbf{p}\|^2 + b \|\mathbf{e}\|^2 \quad (1.24)$$

donde el primer término de la suma nos proporciona el tamaño de las perturbaciones y el segundo término es el tamaño del residual ponderado por el multiplicador de Lagrange \mathbf{b} . Este factor determina la importancia relativa entre el tamaño de las perturbaciones $\mathbf{\ddot{a}p}$ y el residual \mathbf{e} .

Haciendo uso de la ecuación (1.18) y de la definición de norma, la ecuación anterior se transforma en la siguiente expresión:

$$\mathbf{f} = \mathbf{\ddot{a}}^T \mathbf{p} + \mathbf{b}(\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{\ddot{a}}\mathbf{p})^T(\mathbf{y} - \mathbf{J}\mathbf{\ddot{a}}\mathbf{p}) \quad (1.25)$$

El siguiente paso es minimizar la expresión anterior calculando la derivada de ϕ con respecto a las perturbaciones $\mathbf{\ddot{a}p}$ e igualando a cero:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{\ddot{a}p}} = 2\mathbf{p} + 2\mathbf{b}(\mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{p} - \mathbf{J}^T \mathbf{y}) = 0 \quad (1.26)$$

Despejando el vector $\mathbf{\ddot{a}p}$ obtenemos una estimación para las perturbaciones de los parámetros:

$$\mathbf{\ddot{a}\hat{p}} = (\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{y} \quad (1.27)$$

donde se ha introducido la matriz identidad \mathbf{I} de dimensiones $N \times N$ para mantener las dimensiones de la ecuación y la matriz:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \quad (1.28)$$

es ahora la nueva *inversa generalizada*.

El resultado obtenido con la ecuación (1.27) se utiliza para calcular una estimación de los parámetros del modelo de fuente en un proceso iterativo mediante la expresión:

$$\hat{\mathbf{p}}^{k+1} = \hat{\mathbf{p}}^k + (\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{y} \quad (1.29)$$

donde la matriz \mathbf{J} está evaluada en el modelo $\hat{\mathbf{p}}^k$ para $k + 1$ iteraciones y al factor \mathbf{b}^{-1} se le denomina *factor de amortiguación* (Levenberg, 1944), puesto que amortigua los cambios producidos en el vector de perturbaciones de los parámetros $\mathbf{\ddot{a}p}$.

Al haber sumado el término \mathbf{b}^{-1} a la diagonal principal de la matriz $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$, se está eliminando el carácter singular de dicha matriz, pues se está añadiendo una determinada cantidad a sus valores

característicos, impidiendo que éstos sean nulos y haciendo que la inversión de la matriz $(\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T\mathbf{J})$ sea más estable. La elección de este factor es subjetiva. En el algoritmo de Marquardt (1963), se utilizan diferentes valores para el factor \mathbf{b}^{-1} a lo largo de todo el proceso iterativo. Es conveniente comenzar eligiendo un número positivo de valor elevado aprovechando la ventaja del método del gradiente que proporciona una buena convergencia inicial. Posteriormente, en cada iteración, se multiplica \mathbf{b}^{-1} por un factor menor que la unidad, haciéndolo cada vez más pequeño a medida que el método se acerca a la solución del problema hasta llegar prácticamente al valor cero, consiguiendo que el método de la inversa generalizada predomine cerca de la solución.

Como vemos, el método de Marquardt-Levenberg determina el estimador del vector perturbación de los parámetros $\mathbf{d}\hat{\mathbf{p}}$ en cada paso de un proceso iterativo. Este vector debe estar comprendido entre el vector perturbación calculado mediante el método de Gauss-Newton y el vector perturbación calculado con el método del gradiente, de manera que haya un compromiso entre ambos extremos (Lines y Treitel, 1984). Para ilustrar lo anterior, en la figura 1.3 se han representado los contornos de la función $\mathbf{f} = \mathbf{e}^T\mathbf{e}$ para un modelo con dos parámetros $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. Si suponemos que comenzamos con un modelo inicial $\mathbf{p}^0 = (p_1^0, p_2^0)$ y suponemos que hay un sólo mínimo $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2)$, podemos ver, en dicha figura, el primer paso que se debe dar para alcanzar la solución del problema cuando usamos cada uno de los tres métodos mencionados. Las sucesivas aplicaciones de cualquiera de los tres métodos deberían alcanzar la solución buscada pero, en general, el método de Marquardt-Levenberg lo realiza de manera más efectiva (Lines y Treitel, 1984).

Para poder aceptar una solución de nuestro problema inverso no lineal, debemos comprobar que hay un buen ajuste entre los datos observados y los valores de la gravedad predichos por el modelo final obtenido después de cierto número de iteraciones $k+1$. Para medir dicho ajuste, se hace uso del parámetro estadístico q , denominado *desajuste*, definido mediante la ecuación:

$$q = \sum_{i=1}^M (g_i - F_i[\hat{\mathbf{p}}_{k+1}])^2 \quad (1.30)$$

donde $\{g_i\}$ son los datos observados y $F_i[\hat{\mathbf{p}}_{k+1}]$ es el funcional no lineal que nos proporciona la solución al problema directo calculado para el modelo $\hat{\mathbf{p}}_{k+1}$.

En los métodos de inversión iterativos, es muy útil realizar un análisis del valor del desajuste alcanzado en cada iteración, pues nos puede dar una visión clara de la convergencia del proceso.

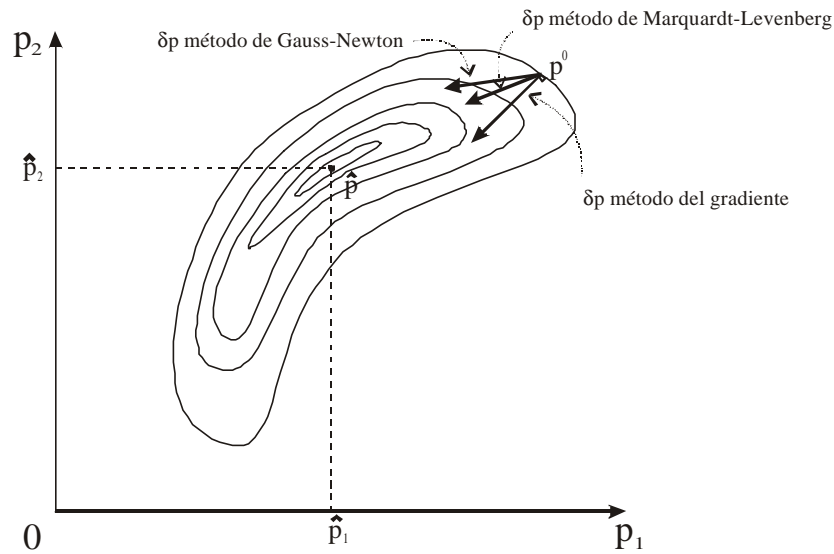


FIGURA 1.3. Relación geométrica entre las soluciones de los métodos de Newton-Gauss, Marquardt-Levenberg y el método del gradiente para un modelo de dos parámetros. Nótese que el vector perturbación, calculado mediante el método de los gradientes, es perpendicular al contorno de la función f (modificado de Lines y Treitel, 1984).

1.2.1.2. Método de Marquardt-Levenberg considerando errores en los datos

Un proceso de inversión es incompleto si no se realiza un análisis de la influencia que ejerce el error de los datos sobre la construcción de las soluciones. Necesitamos saber la precisión con la que la solución del problema inverso ajusta a los datos observados cuando éstos presentan errores experimentales o incertidumbres.

Hasta ahora hemos considerado la existencia de errores en el problema de inversión mediante la definición del vector e , pero los hemos considerado residuales del problema y hemos intentado minimizarlos, sin introducirlos directamente en el proceso de inversión. Para realizar la estimación de nuestro modelo, nos interesa conseguir una solución que sea estable tanto numéricamente como estadísticamente. La estabilidad estadística es necesaria debido a la existencia de los errores experimentales que están asociados a los datos observados. Nos interesa incluir estos errores directamente en la formulación del problema inverso, pesando cada dato de acuerdo al error experimental que presente y obteniendo una solución ponderada por las incertidumbres de los datos. La matriz de ponderación que se utiliza normalmente es:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^2 & \mathbf{r}_{12}\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{r}_{1m}\mathbf{s}_1\mathbf{s}_m \\ \mathbf{r}_{12}\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_2^2 & \cdots & \mathbf{r}_{2m}\mathbf{s}_2\mathbf{s}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_{1m}\mathbf{s}_1\mathbf{s}_m & \mathbf{r}_{2m}\mathbf{s}_2\mathbf{s}_m & \cdots & \mathbf{s}_m^2 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

donde $\mathbf{s}_i^2 = E[\mathbf{e}_i^2]$ es la varianza del dato g_i y $\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j \mathbf{r}_{ij} = E[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j]$ son las covarianzas, siendo \mathbf{e} el vector de los errores experimentales presentes en los datos y \mathbf{r}_{ij} el coeficiente de correlación entre el dato g_i y el dato g_j . La matriz anterior se denomina *matriz de varianza-covarianza de los datos* (Inman, 1975). En primera aproximación, se puede decir que los errores en los datos son independientes entre sí, por tanto, los términos que se encuentran fuera de la diagonal principal son nulos y la matriz de varianza-covarianza se convierte en una matriz diagonal cuyos elementos son las varianzas de los datos.

Para incorporar la ponderación por los errores en el problema inverso, definimos la matriz diagonal de dimensiones $M \times M$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\mathbf{s}_1}, \frac{1}{\mathbf{s}_2}, \dots, \frac{1}{\mathbf{s}_M} \right\} \quad (1.32)$$

Con esta matriz, podemos redefinir nuestro problema inverso introduciéndola en el funcional f de la ecuación (1.25) que queremos minimizar:

$$f = \mathbf{d}\mathbf{p}^T \mathbf{d}\mathbf{p} + \mathbf{b} (\mathbf{S} \mathbf{y} - \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{d}\mathbf{p})^T (\mathbf{S} \mathbf{y} - \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{d}\mathbf{p}) \quad (1.33)$$

Realizando la minimización de la función anterior y despejando el vector $\mathbf{d}\mathbf{p}$ de las perturbaciones del modelo obtenemos:

$$\mathbf{d}\hat{\mathbf{p}} = [\mathbf{b}^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{y} \quad (1.34)$$

Con este resultado, podemos calcular los parámetros del modelo estimado mediante el proceso iterativo dado por la expresión:

$$\hat{\mathbf{p}}^{k+1} = \hat{\mathbf{p}}^k + (\mathbf{b}^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{y} \quad (1.35)$$

Para determinar las varianzas, es necesario conocer los errores que presentan los datos observados, pero en muchos problemas geofísicos esto no es posible y sólo se puede realizar una estimación de dichos errores. En este trabajo, vamos a suponer que los datos observados se encuentran normalmente distribuidos sobre sus valores esperados, poseen incertidumbres conocidas estadísticamente independientes que se presentan en una distribución gaussiana de promedio cero y desviación estándar \mathbf{s} . Por tanto, en este caso la matriz \mathbf{S} viene dada por la expresión:

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^{-1} \mathbf{I} \quad (1.36)$$

Teniendo en cuenta la desviación estándar correspondiente \mathbf{s} , el desajuste entre la respuesta del modelo-solución y los datos observados se puede definir por la expresión:

$$q_{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^M \frac{(g_i - F_i[\hat{\mathbf{p}}_{k+1}])^2}{\mathbf{s}^2} \quad (1.37)$$

Basándonos en el valor del desajuste, podemos aceptar o rechazar un determinado modelo. Para M observaciones independientes y N parámetros independientes, el desajuste presenta una distribución *c-cuadrada* con $(M-N)$ grados de libertad y con un valor esperado $E[q_{\mathbf{s}}] = M$, el número de datos, según la estadística para las distribuciones *c-cuadradas* (Constable et al., 1987). Al valor esperado del desajuste, definido de la forma anterior, se le denomina *tolerancia* $T = E[q_{\mathbf{s}}]$. Si la tolerancia es mucho menor que M , el modelo está sobredeterminando los datos. Esto significa que podemos encontrar un modelo satisfactorio que ajuste a los datos pero también puede ocurrir que se acepten modelos que pueden contener errores de cálculo introducidos por la computadora. Si la tolerancia es mucho mayor que M , el modelo no puede ajustar a los datos observados y, por tanto, no es satisfactorio (Meju, 1994). Sin embargo, hay que tener en cuenta que debido a problemas de no-unicidad, un buen ajuste entre la respuesta de un modelo y los datos observados no es una garantía de que dicho modelo sea la solución correcta a nuestro problema (Lines y Treitel, 1984).

Una vez calculada la solución del problema inverso, debemos analizar la validez y la precisión de dicha solución. Para ello, se utiliza una serie de parámetros que nos ayudan a aceptar o desechar la solución obtenida.

1.2.2. Análisis de la solución

1.2.2.1. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

Para analizar la calidad con la que los datos observados pueden determinar los parámetros del modelo de fuente anómala, es necesario analizar la *sensibilidad* que presenta el conjunto de datos observados a la resolución de los parámetros del modelo-solución. Es necesario determinar en qué medida los parámetros de la fuente pueden sufrir variaciones sin afectar el ajuste de la respuesta del modelo a los datos observados.

Para pequeñas perturbaciones $\ddot{a}p$ en los parámetros, las variaciones esperadas y en los datos vienen dadas por la expresión del problema directo linealizado:

$$y = J \ddot{a}p \quad (1.38)$$

donde J es el operador jacobiano del sistema, también llamado *matriz de sensibilidad*.

Como ya vimos anteriormente, el jacobiano es una matriz cuyos elementos son las derivadas parciales de cada funcional F_i con respecto a cada uno de los parámetros p_j del modelo (ecuación 1.19). Observando dichas derivadas podemos obtener información acerca de la sensibilidad de cada dato a un cambio en los diferentes parámetros de la fuente, esto es, cuanto mayor sea el valor de los elementos del jacobiano, mayor será la información que poseen los datos acerca de cada uno de los parámetros del modelo (Edwards et al., 1981).

Para estudiar no sólo la sensibilidad, sino también la existencia, la unicidad y la estabilidad de la solución de un problema inverso, aplicamos *la descomposición en valores singulares* al jacobiano del problema. Este método ha sido ampliamente descrito y utilizado en numerosos libros y artículos que tratan de problemas inversos, como por ejemplo: Aki y Richards (1980), Edwards et al. (1981), García-Abdeslem (2000), Glenn et al. (1973), Inman et al. (1973), Inman (1975), Lanczos (1961), Lines y Treitel (1984), Meju (1994).

La descomposición en valores singulares de una matriz rectangular J , de dimensiones $M \times N$ y cuyo rango es $h \leq N < M$, es una descomposición ortogonal relacionada con la descomposición en valores y vectores característicos de las matrices $J^T J$ y $J J^T$, las cuales son simétricas y definidas positivas. Esta descomposición transforma la matriz jacobiano del sistema en el producto de tres matrices:

$$J = U L V^T \quad (1.39)$$

donde \mathbf{U} es una matriz ortogonal de dimensiones $M \times M$ cuyas columnas \mathbf{u}_i forman una base del espacio M -dimensional de datos, \mathbf{V} es otra matriz también ortogonal de dimensiones $N \times N$ cuyas columnas \mathbf{v}_i forman una base del espacio N -dimensional de los parámetros y \mathbf{L} es una matriz de dimensiones $M \times N$ de la forma:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

donde \mathbf{L}_h es una matriz diagonal cuadrada de dimensiones $h \times h$ cuyos elementos no nulos son los h valores singulares del jacobiano (I_1, I_2, \dots, I_h).

Todo el espacio de los datos está generado por las columnas de la matriz \mathbf{U} y todo el espacio de los parámetros está generado por las columnas de la matriz \mathbf{V} . La matriz \mathbf{J} está asociada a ambos espacios mediante la relación (1.39). Si tenemos únicamente r valores característicos no nulos, podemos dividir \mathbf{U} en la matriz \mathbf{U}_h , cuyas columnas son los vectores característicos asociados a los h valores singulares no nulos, y en la matriz \mathbf{U}_0 , formada por los vectores característicos asociados a los valores singulares nulos. De la misma manera, se puede dividir la matriz \mathbf{V} en las matrices \mathbf{V}_h y \mathbf{V}_0 .

Las matrices \mathbf{U}_h y \mathbf{V}_h se relacionan entre sí a través de la matriz de los valores característicos mediante las expresiones:

$$\mathbf{J} \mathbf{V}_h = \mathbf{L}_h \mathbf{U}_h \quad (1.41)$$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{U}_h = \mathbf{L}_h \mathbf{V}_h$$

Y las matrices \mathbf{U}_0 y \mathbf{V}_0 cumplen las relaciones:

$$\mathbf{J} \mathbf{V}_0 = 0 \quad (1.42)$$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{U}_0 = 0$$

Con esto vemos que, para los valores característicos nulos, los vectores $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_0$ ($i=h+1, \dots, M$) y $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_0$ ($i=h+1, \dots, N$), quedan desacoplados y son independientes. Por tanto, el espacio de los datos y el espacio de los parámetros se encuentran acoplados solamente mediante los valores característicos no nulos, y la matriz \mathbf{J} puede ser reconstruida por h vectores característicos $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_h$ y h vectores característicos $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_h$:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{U}_h \mathbf{U}_0) \begin{bmatrix} \mathbf{L}_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_h^T \\ \mathbf{V}_0^T \end{pmatrix} = \mathbf{U}_h \mathbf{L}_h \mathbf{V}_h^T \quad (1.43)$$

La ecuación anterior demuestra que se puede generar el operador jacobiano \mathbf{J} sin tener ningún conocimiento de los espacios generados por las columnas de las matrices \mathbf{U}_0 y \mathbf{V}_0 asociados con los valores singulares nulos y, por tanto, sin tener ningún conocimiento de las soluciones de los sistemas homogéneos (1.42). Dichas soluciones nos proporcionan información acerca de la compatibilidad y las deficiencias del sistema (1.38), pero esas mismas soluciones son ignoradas por el operador \mathbf{J} . Es cierto que este operador está asociado con un espacio \mathbf{U} y otro espacio \mathbf{V} , pero ocurre que \mathbf{J} no está activado como operador en todas las dimensiones de esos espacios, sólo en los subespacios \mathbf{U}_h y \mathbf{V}_h (Lanczos, 1961).

Al estudiar la naturaleza del subespacio \mathbf{U}_0 , podemos tener una idea acerca de la *existencia* de la solución de nuestro problema, pues este subespacio es la fuente de discrepancia entre los datos observados \mathbf{y} y la respuesta del modelo. Este subespacio cumple la relación $\mathbf{U}_0 \mathbf{J} \ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p} = 0$ que es similar a la ecuación (1.7), por lo que \mathbf{U}_0 es el aniquilador del jacobiano \mathbf{J} , que es el núcleo de los datos. Por tanto, si la respuesta del modelo $\mathbf{J} \ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p}$ no tiene ninguna componente en dicho subespacio, estará restringida totalmente en el subespacio \mathbf{U}_0 y siempre se puede encontrar un modelo que satisfaga la ecuación (1.38). Sin embargo, si existe alguna componente de los datos en el aniquilador \mathbf{U}_0 , la respuesta del modelo $\mathbf{J} \ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p}$ no puede describir los datos para cualquier elección de $\ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p}$ (Aki y Richards, 1980).

Por su parte, el subespacio \mathbf{V}_0 nos da información acerca de la *unicidad* de la solución. De hecho, este subespacio es el causante de la falta de unicidad en la solución cuando se busca un modelo de fuente a partir de los datos observados. Esto es debido a que \mathbf{V}_0 es el espacio nulo de \mathbf{J} debido a la relación $\mathbf{J} \mathbf{V}_0 = 0$, por tanto se pueden añadir vectores en el subespacio \mathbf{V}_0 sin contradecir los datos observados. Para que haya unicidad en la solución, es conveniente que \mathbf{J} no posea valores singulares nulos y así el subespacio \mathbf{V}_0 es un espacio vacío. Cuando ocurre esto, la solución es única para un determinado modelo inicial, independientemente de si el espacio \mathbf{U}_0 existe o no (Aki y Richards, 1980).

La descomposición en valores singulares del jacobiano también nos puede dar una idea de la *estabilidad* de la solución mediante la relación existente entre el vector \mathbf{y} , que es la diferencia entre los datos de gravedad observados y el resultado del problema directo calculado para el modelo inicial \mathbf{p}^0 , las perturbaciones de los parámetros del modelo $\ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p}$, los vectores característicos $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_h$, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_h$ y los valores singulares $\lambda_i \in \mathbf{L}_h$ del jacobiano del sistema:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{v}_i^T \ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p} = \mathbf{u}_i^T \mathbf{y} \quad i = 1, 2, \dots, \mathbf{h} \quad (1.44)$$

en donde $v_i^T \tilde{a} p$ es la magnitud de la proyección del vector $\tilde{a} p$ sobre el i -ésimo vector propio asociado a los parámetros del modelo y $u_i^T y$ es la proyección del vector y sobre el i -ésimo vector propio asociado a los datos observados. Ambas proyecciones están relacionadas mediante el correspondiente valor propio no nulo I_i , por lo que no son independientes. Como se desprende de la relación (1.44), si la magnitud de la proyección $u_i^T y$ es pequeña y la magnitud de la proyección $v_i^T \tilde{a} p$ es grande, el valor singular I_i es muy pequeño. La existencia de valores singulares pequeños puede afectar de manera significativa a la estabilidad numérica del problema. Esto se resuelve en parte al introducir el factor de amortiguación de Marquardt en el sistema, pues añadiendo el factor de amortiguación b^{-1} a la diagonal principal de la matriz $J^T J$ en la ecuación (1.30), se está aumentando la magnitud de los valores singulares. No obstante, para cuantificar la posible inestabilidad numérica existente en el problema es necesario estudiar la relación existente entre las amplitudes de los valores singulares del jacobiano mediante el número de condición de la matriz J :

$$k = \frac{I_{max}}{I_{min}} \quad (1.45)$$

siendo I_{max} el valor singular de mayor magnitud y I_{min} el de menor magnitud. Aunque los valores singulares no sean nulos, si alguno de ellos es muy pequeño se puede producir la amplificación del error existente en los datos observados en la dirección de los vectores característicos asociados a dicho valor singular, esto significa que un pequeño error en el vector de datos observados puede producir un error grande en el vector solución del problema (Lanczos, 1961).

Una característica importante de los vectores característicos U_h es que forman combinaciones lineales de los datos observados y su análisis puede indicar cuáles de esos datos afectan a un determinado parámetro o a una combinación de ellos:

$$y^* = U_h^T y \quad (1.46)$$

donde y^* es llamado el vector de datos característicos (Edwards et al., 1981). El estudio de este subespacio nos ayuda a discriminar entre los elementos del conjunto de datos, desechando aquéllos que nos proporcionan una información redundante acerca de los parámetros. Esto es útil para optimizar el proceso y hacerlo más rápido (Inman et al., 1973) pero en la actualidad, con el uso de las computadoras, esta discriminación no es necesaria.

Por otro lado, cada vector característico de V_h representa una combinación lineal de los parámetros del modelo que presentan cierta correlación entre sí:

$$\ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p}^* = \mathbf{V}_h^T \boldsymbol{\phi} \quad (1.47)$$

donde $\ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p}^*$ se llama vector de los parámetros característicos. Aquellos vectores asociados con los valores singulares más altos son las combinaciones de parámetros del modelo que tienen mayor efecto sobre la anomalía de la gravedad resultante y, por tanto, están bien determinadas por los datos. Los vectores característicos que estén asociados a los valores singulares más bajos representan las combinaciones de parámetros que menos afectan a la anomalía gravimétrica producida por el modelo y las que peor quedan resueltas por los datos de gravedad (Edwards et al., 1981).

Suponiendo que los datos presentan errores estándar independientes iguales a la unidad y que se cumple la relación (1.46), el error estándar en \mathbf{y}^* es también igual a la unidad. Por otro lado, de (1.44), (1.46) y (1.47) se cumple la relación:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{L}_h \mathbf{d} \mathbf{p}^* \quad (1.48)$$

por lo que cualquier cambio en \mathbf{y}^* está asociado a un cambio en $\ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p}^*$. Así pues, el error estándar en $\ddot{\mathbf{a}} \mathbf{p}^*$ está asociado al error unitario en \mathbf{y}^* mediante el inverso del valor singular correspondiente:

$$e_i^* = \frac{1}{\mathbf{L}_i} \quad (1.49)$$

Cuando este error es mayor que la unidad, hay inestabilidad en el cálculo de los parámetros de la combinación lineal correspondiente y éstos quedan indeterminados (Edwards et al., 1981; Gómez-Treviño y Edwards, 1983).

Como hemos visto, la descomposición en valores singulares del jacobiano y el análisis e interpretación de sus elementos permiten describir de forma física, sin recurrir al análisis estadístico de errores, las ambigüedades presentes en el proceso de ajuste de un modelo a datos de gravedad.

1.2.2.2. Análisis de la matriz de resolución de los parámetros

Para determinar la calidad de una solución que en principio puede ser satisfactoria, se puede utilizar la *matriz de resolución* \mathbf{R} . La expresión general de esta matriz se puede encontrar en numerosos libros y artículos relacionados con el método de inversión de datos (Aki y Richards, 1980; Meju, 1994; Jackson, 1972; entre otros). Esta matriz se define, de manera general, como el producto

entre la matriz inversa generalizada \mathbf{H} del problema, que en nuestro caso viene dada por la ecuación (1.29), y la matriz del sistema \mathbf{J} :

$$\mathbf{R} = (\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^T\mathbf{J} \quad (1.50)$$

Los elementos de la diagonal principal de esta matriz son una medida de la resolución de los parámetros, ya que relaciona la solución estimada $\hat{\mathbf{p}}^{k+1}$, obtenida mediante la inversión, con la solución real del problema \mathbf{p} mediante la expresión:

$$\hat{\mathbf{p}}^{k+1} = \mathbf{R}\mathbf{p} \quad (1.51)$$

Si el factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} es nulo y la matriz inversa resultante en la ecuación anterior existe, la matriz de resolución es $\mathbf{R} = \mathbf{V}_H\mathbf{V}_H^T$, que es la matriz identidad, y su traza es igual al número de valores singulares del jacobiano. Esto indica una resolución perfecta, ya que cada uno de los parámetros del modelo se puede determinar de manera única en el proceso de inversión. No obstante, esto no garantiza la unicidad del modelo final, pues éste dependerá del modelo inicial con el que comenzó el proceso de inversión (Inman et al., 1973). Si \mathbf{b}^{-1} no es nulo, la matriz \mathbf{R} ya no es la matriz identidad y su traza es:

$$\text{Traza}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^r \frac{l_i^2}{l_i^2 + \mathbf{b}^{-1}} < \mathbf{h} \quad (1.52)$$

La diferencia entre los elementos de una determinada fila de \mathbf{R} y los elementos de la fila correspondiente en la matriz \mathbf{I} es una medida de la falta de resolución para la determinación del parámetro del modelo correspondiente. En nuestro caso, el propio planteamiento del método de Marquardt-Levenberg obliga a que \mathbf{b}^{-1} sea distinto de cero en las primeras iteraciones del proceso, disminuyendo progresivamente a medida que se va acercando a la solución de problema. Si en el proceso iterativo el factor de amortiguamiento llega a ser cero, se ha alcanzado la solución del problema en el sentido del método de mínimos cuadrados y la matriz de resolución de la solución obtenida coincide con la matriz identidad, lo que nos indica que se ha alcanzado una resolución perfecta de los parámetros del modelo. Si el factor de amortiguación no llega a alcanzar el valor cero, la matriz de resolución será distinta de la matriz identidad para la solución final del proceso.

Si hacemos uso de la descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{J} de la ecuación (1.39), la ecuación (1.50) se convierte en la expresión (Aki y Richards, 1980):

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_h \frac{\mathbf{L}_h^2}{\mathbf{L}_h^2 + \mathbf{b}^{-1}\mathbf{I}} \mathbf{V}_h^T \quad (1.53)$$

Como se ve, la existencia del factor de amortiguación dificulta la resolución de los parámetros del modelo. Esto nos demuestra que, en general, el método de Marquardt-Levenberg no tiene una resolución perfecta. No obstante, la matriz \mathbf{R} nos puede proporcionar una idea de los parámetros que han sido resueltos con mayor resolución.

Si tenemos la solución del problema inverso pesada mediante la matriz \mathbf{S} , dada por la expresión (1.33), la ecuación (1.50) se convierte en:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{J} \quad (1.54)$$

por lo que si realizamos la descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{J} y sustituimos en la ecuación anterior, obtenemos la expresión:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_h \frac{\mathbf{s}^{-2} \mathbf{L}_h^2}{\mathbf{s}^{-2} \mathbf{L}_h^2 + \mathbf{b}^{-1}\mathbf{I}} \mathbf{V}_h^T \quad (1.55)$$

El valor de la varianza \mathbf{s}^2 de los datos en la ecuación anterior se puede estimar a partir de la ecuación:

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}{M - N} \quad (1.56)$$

donde \mathbf{y} viene dado por la expresión (1.17) y $M - N$ son los grados de libertad. $\hat{\mathbf{s}}^2$ se denomina *varianza residual* y depende del ajuste entre los datos reales observados y los datos de gravedad calculados mediante el modelo teórico. Cuando $\hat{\mathbf{s}}^2$ es bastante mayor que \mathbf{s}^2 , el modelo teórico no explica satisfactoriamente los datos observados, pero también puede significar que el valor de \mathbf{s}^2 ha sido subestimado. Si ocurre que \mathbf{s}^2 es mayor que $\hat{\mathbf{s}}^2$, o bien el valor del primero ha sido sobreestimado o bien la curva de la anomalía obtenida está ajustando el ruido que contamina los datos (Inman, 1975).

1.2.2.3. Análisis de la matriz de covarianza de los parámetros

Otro aspecto importante a tener en cuenta en el análisis de la bondad de la solución de un problema inverso es la determinación de los límites del intervalo de confianza en los parámetros del modelo. La forma más simple de determinar esto es haciendo uso de los métodos estadísticos estándar para determinar los errores existentes en los parámetros de un modelo dado a partir de los errores presentes en los datos de gravedad (Lawson y Hanson, 1974). Para ello, definimos la *matriz de covarianza de los parámetros* que depende de la varianza \mathbf{s}^2 de los errores experimentales y de la forma en la que las incertidumbres de los datos observados se introducen en los errores de los parámetros del modelo. La deducción de la expresión de la matriz de covarianza de los parámetros, para los distintos métodos de inversión existentes, ha sido ampliamente tratada en la literatura (Inman, 1975; Meju, 1994; entre otros).

La expresión general de la matriz de covarianza del estimador de las perturbaciones de los parámetros $\ddot{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{p}}$, en el caso de que los datos experimentales no estén correlacionados y que tengan la misma varianza \mathbf{s}^2 , es de la forma:

$$\mathbf{Cov}(\ddot{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{p}}) = \mathbf{H} [\mathbf{Cov}(\mathbf{e})] \mathbf{H}^T \quad (1.57)$$

donde $\mathbf{Cov}(\mathbf{e}) = \mathbf{s}^2 \mathbf{I}$ es la matriz de covarianza de los errores \mathbf{e} de las observaciones.

Como ya vimos, cada componente del vector $\ddot{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{p}}$ es una pequeña perturbación de la respuesta del modelo $\hat{\mathbf{p}}$ alrededor del modelo inicial \mathbf{p}^0 . Como las componentes de \mathbf{p}^0 son conocidas, una varianza grande en $\ddot{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{p}}$ corresponde a una gran varianza en $\hat{\mathbf{p}}$ (Glenn et al., 1973). Así, la matriz de covarianza de los parámetros es:

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{p}}) = \mathbf{H} [\mathbf{Cov}(\mathbf{e})] \mathbf{H}^T \quad (1.58)$$

Para el método de Marquardt-Levenberg, la inversa generalizada viene dada por la expresión (1.29), por lo que sustituyendo en la ecuación (1.57), se obtiene la matriz de covarianza de los parámetros:

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{p}}) = \left[(\mathbf{b}^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \right] [\mathbf{s}^2 \mathbf{I}] \left[(\mathbf{b}^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \right]^T \quad (1.59)$$

Como en el caso de la matriz de resolución, sustituyendo la expresión (1.39) de la descomposición en valores singulares de la matriz \mathbf{J} en la ecuación (1.59), obtenemos la matriz de covarianza en la forma (Aki y Richards, 1980):

$$Cov(\hat{p}) = s^2 V_h \frac{\mathbf{L}_h^2}{(\mathbf{L}_h^2 + b^{-1}I)^2} V_h^T \quad (1.60)$$

donde s^2 se sustituye por la varianza residual \hat{s}^2 , dada por la ecuación (1.55), para aquellos casos en los que los datos están libres de ruido.

Los elementos de la diagonal principal de una matriz de covarianza son las *varianzas* de la estimación de los parámetros del modelo. Los elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal son las *covarianzas* entre parámetros e indican la posible existencia de correlaciones entre los parámetros del modelo. Si hay poca correlación entre parámetros, las desviaciones estándar correspondientes son buenas medidas de las incertidumbres de los parámetros. Si dos parámetros están fuertemente correlacionados, las desviaciones estándar de los mismos serán mayores que las incertidumbres que poseen y la matriz de covarianza de los parámetros no es un buen estimador de la calidad de la solución obtenida en el proceso de inversión (Inman, 1975).

Si tenemos nuestro problema inverso pesado por la matriz S , la ecuación (1.59) se transforma en la expresión:

$$Cov(\hat{p}) = [(\mathbf{b}^{-1}I + J^T S^2 J)^{-1} J^T S^T] [s^2 I] [(\mathbf{b}^{-1}I + J^T S^2 J)^{-1} J^T S^T]^T \quad (1.61)$$

y haciendo la descomposición en valores singulares obtenemos la expresión:

$$Cov(\hat{p}) = s^2 V_h \frac{s^{-2} \mathbf{L}_h^2}{(s^{-2} \mathbf{L}_h^2 + b^{-1}I)^2} V_h^T \quad (1.62)$$

donde la varianza de los datos s^2 se puede sustituir por la varianza residual \hat{s}^2 dada por la ecuación (1.55), quedando la matriz de covarianza como:

$$Cov(\hat{p}) = \hat{s}^2 V_h \frac{\hat{s}^{-2} \mathbf{L}_h^2}{(\hat{s}^{-2} \mathbf{L}_h^2 + b^{-1}I)^2} V_h^T \quad (1.63)$$

que es la expresión que vamos a utilizar para calcular la covarianza a lo largo del presente trabajo en aquellos casos en los que los datos estén contaminados con ruido.

1.2.2.4. Análisis de la matriz de correlación de los parámetros

Cuando existe dependencia lineal entre los parámetros del modelo, el problema puede presentar inestabilidad. Una forma de comprobar la dependencia o independencia lineal entre parámetros es estudiando *la matriz de correlación*, cuyos elementos vienen dados por la expresión (Jenkins y Watts, 1968):

$$[Cor(\hat{\boldsymbol{p}})]_{ij} = \frac{[Cov(\hat{\boldsymbol{p}})]_{ij}}{[Cov(\hat{\boldsymbol{p}})]_{ii}^{1/2} [Cov(\hat{\boldsymbol{p}})]_{jj}^{1/2}} \quad (1.64)$$

donde si el valor del elemento $[Cor(\hat{\boldsymbol{p}})]_{ij}$ es cercano a la unidad, los parámetros correspondientes p_i y p_j se encuentran fuertemente correlacionados y, por tanto, son linealmente dependientes.

Capítulo II:

PROBLEMA DIRECTO PARA FUENTES GRAVIMETRICAS EN 2D

INTRODUCCION

En este Capítulo se presenta el desarrollo de las expresiones matemáticas necesarias para realizar el modelado directo de las anomalías gravimétricas producidas por fuentes bidimensionales cuyas fronteras están descritas por funciones continuas y en las que la frontera superior coincide con la superficie donde se encuentra el observador que realiza la medida de dichas anomalías. Se ha supuesto que la distribución de densidad que caracteriza a estas fuentes puede presentar cambios laterales, cambios en profundidad o cambios en todas las direcciones simultáneamente. También se presenta un modelo teórico para cada tipo de fuente y la anomalía gravimétrica que produce. Los resultados que se obtienen son útiles para modelar una amplia variedad de estructuras geológicas presentes en la corteza terrestre.

A continuación vamos a presentar el cálculo de la solución de la ecuación (1.5), para el caso de distribuciones bidimensionales, dependiendo de las funciones que describen dichos contrastes de densidad y las fronteras que limitan la distribución de masas. Para realizar las integraciones necesarias para dicho cálculo, se utilizan los métodos de integración analíticos habituales y, en el caso de que este tipo de integración no sea posible, se utiliza la *cuadratura de Gauss-Legendre*, que se encuentra descrita en el apéndice A.

2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DIRECTO EN 2D

Ciertas estructuras geológicas tales como diques y algunas cuencas sedimentarias, presentan una de sus dimensiones horizontales más alargada que la otra. Generalmente, las anomalías gravimétricas de estos cuerpos también presentan alargamiento en la misma dirección. Si esta dimensión es mayor que la otra, con una razón mínima de 5 a 1 (García-Abdeslem, 1996b), es posible considerar que la fuente anómala no presenta cambios en la dirección paralela a su dimensión más larga. Así podemos modelar su anomalía gravimétrica reduciendo la fuente a una región bidimensional obtenida a partir de la intersección de un plano, perpendicular a la dimensión más larga, con el cuerpo anómalo (figura 2.1). En este caso, podemos considerar el cuerpo como bidimensional. Esto es una ventaja, pues tanto el concepto como la formulación de este tipo de problemas son más fáciles de abordar que el caso en el que la anomalía y el cuerpo que la produce son de forma tridimensional. Por ello, cuando el problema geológico lo permite, se suele realizar el modelado de las fuentes considerando sólo el problema bidimensional.

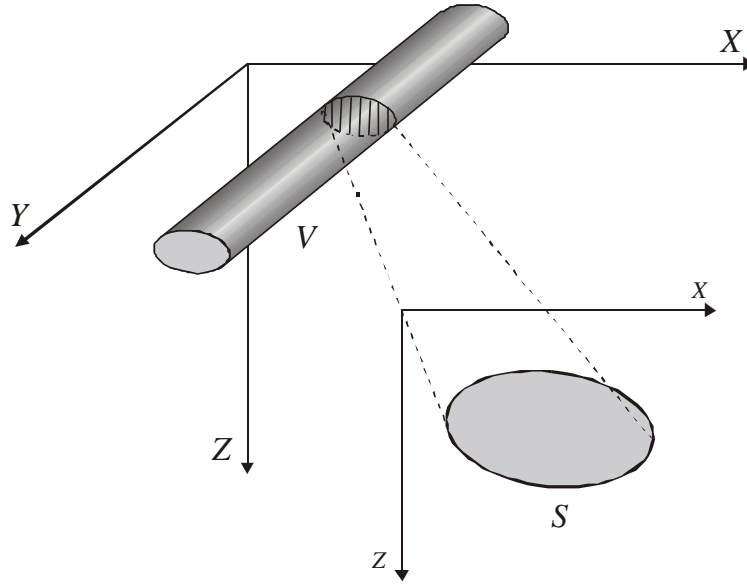


FIGURA 2.1. Reducción de una dimensión en cuerpos geométricos tridimensionales alargados.

Para el modelado directo de la anomalía de una fuente bidimensional, vamos a considerar que dicha fuente se encuentra en el plano (x, z) , con un contraste de densidad con el medio circundante descrito por una función continua que depende únicamente de las variables x y z , $\mathbf{Dr}(x, z)$, y que el observador se encuentra en (x_0, z_0) . Según lo anterior, la ecuación (1.5) se puede reescribir como:

$$g(x_0, z_0) = G \iint_S dx dz \mathbf{Dr}(x, z) (z - z_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{r^3} \quad (2.1)$$

donde S representa al cuerpo bidimensional y r viene dada por la expresión (1.2). Integrando esta ecuación con respecto a la variable y , obtenemos:

$$g(x_0, z_0) = 2G \iint_S dx dz \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \mathbf{Dr}(x, z) \quad (2.2)$$

La ecuación anterior representa el efecto gravimétrico que produce un cuerpo bidimensional S , caracterizado por un contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x, z)$, sobre un observador situado en un punto P_0 de coordenadas (x_0, z_0) .

Teniendo en cuenta cómo van a ser las fronteras de la región S y qué función continua va a describir el contraste de densidad, vamos a considerar varios casos para realizar el cálculo de la solución de la ecuación (2.2). Debido a que no existe una solución analítica para resolver la segunda integral de dicha ecuación, vamos a utilizar la aproximación de García-Abdeslem (1992, 1996a, 1996c) basada en el método numérico de integración de la Cuadratura de Gauss-Legendre.

2.2. FUENTE ANOMALA LIMITADA LATERALMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LA VARIABLE Z

Supongamos que las fronteras laterales de la fuente S vienen expresadas por dos funciones continuas que dependen de la variable z : $f_1(z)$ y $f_2(z)$, y que los límites superior e inferior de S son dos funciones constantes: $z = z_1$ y $z = z_2$. La geometría general de la fuente anómala S viene representada en la figura 2.2 y su expresión matemática es:

$$S = \{[x, z]: f_1(z) \leq x \leq f_2(z), z_1 \leq z \leq z_2\} \quad (2.3)$$

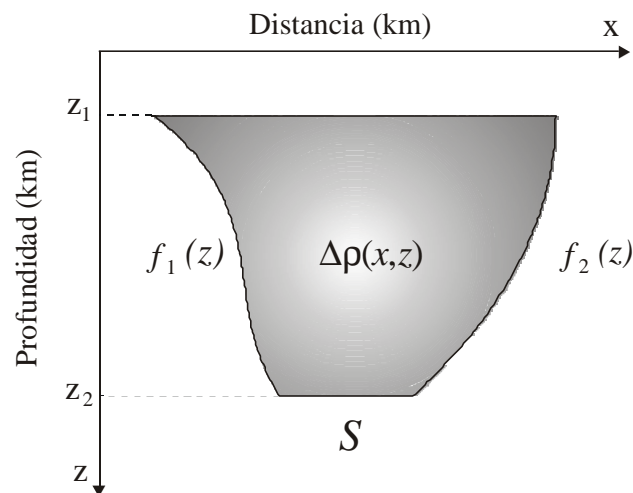


FIGURA 2.2. Geometría general de fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z .

Teniendo en cuenta las fronteras que limitan la región S , la ecuación (2.2) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx dz \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \mathbf{Dr}(x, z) \quad (2.4)$$

Para calcular la solución de la ecuación (2.4), se realiza una separación de variables, resultando la siguiente expresión:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \left\{ \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{\mathbf{Dr}(x, z)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \quad (2.5)$$

Consideraremos tres casos para el contraste de densidad. En el primero se considerará que la densidad va a depender sólo de la distancia horizontal x a lo largo del perfil. En el segundo caso, consideraremos que \mathbf{Dr} va a depender de la profundidad z y en el tercero dependerá de ambas variables x y z , simultáneamente.

2.2.1. Contraste de densidad que depende de la distancia horizontal x

Consideremos en este caso que el contraste de densidad que presenta la fuente viene descrito por una función continua que varía sólo con respecto a la variable x , $\mathbf{Dr}(x)$. De esta manera, la ecuación (2.5) queda de la forma:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \left\{ \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{\mathbf{Dr}(x)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \quad (2.6)$$

Vamos a elegir una función polinómica de segundo grado para describir la densidad:

$$\mathbf{Dr}(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 \quad (2.7)$$

donde los coeficientes del polinomio: a_1 , b_1 y c_1 son constantes. Este tipo de función representa una variación de la densidad lo suficiente sencilla como para permitir realizar simples operaciones de integración analítica y lo suficientemente complicada como para permitir el modelado directo de distribuciones de densidad complejas presentes en la naturaleza.

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (2.6), obtenemos:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \left\{ \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{a_1 + b_1 x + c_1 x^2}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \quad (2.8)$$

Para realizar la integración analítica de la expresión anterior, podemos separar la integral con respecto a x en tres integrales y calcularlas separadamente:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \left\{ \underbrace{a_1 \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{1}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_I + \right. \\ \left. + b_1 \underbrace{\int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{x}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{II} + c_1 \underbrace{\int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{x^2}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{III} \right\} \quad (2.9)$$

La integral I de la ecuación anterior se puede resolver directamente realizando el siguiente cambio de variables: $x - x_0 = w$ y $z - z_0 = a$, obteniéndose:

$$I = \int_{f_1(a+z_0)}^{f_2(a+z_0)} dw \frac{1}{w^2 + a^2} \quad (2.10)$$

La solución de esta integral, una vez deshecho el cambio de variables, es:

$$I = \left[\frac{1}{(z - z_0)} \arctan \left(\frac{x - x_0}{z - z_0} \right) \right]_{f_1(z)}^{f_2(z)} \quad (2.11)$$

La integral II de la ecuación (2.9) se resuelve de la misma manera que la integral I , realizando el mismo cambio de variables, con lo que se obtiene:

$$II = \int_{f_1(a+z_0)}^{f_2(a+z_0)} d\mathbf{w} \frac{\mathbf{w} + x_0}{\mathbf{w}^2 + a^2} \quad (2.12)$$

Separando la integral anterior en la suma de dos integrales, resolviendo ambas y deshaciendo el cambio de variables, obtenemos:

$$II = \left[\frac{1}{2} \ln \left\{ (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\} + \frac{x_0}{(z - z_0)} \arctan \left(\frac{x - x_0}{z - z_0} \right) \right] \quad (2.13)$$

Para calcular la solución de la integral III se realiza el mismo cambio de variables que para las integrales anteriores, llegando a la expresión:

$$III = \int_{f_1(a+z_0)}^{f_2(a+z_0)} d\mathbf{w} \frac{\mathbf{w}^2 + 2\mathbf{w}x_0 + x_0^2}{\mathbf{w}^2 + a^2} \quad (2.14)$$

Separando esta integral en la suma de tres integrales, resolviendo cada una de ellas por separado y deshaciendo el cambio de variable, se obtiene la solución de la integral III :

$$III = \left[x_0 \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] + \left(\frac{x_0^2 - (z - z_0)^2}{z - z_0} \right) \arctan \left(\frac{x - x_0}{z - z_0} \right) + (x - x_0) \right] \quad (2.15)$$

Sustituyendo los resultados obtenidos para las integrales I , II y III en la ecuación (2.9) y agrupando términos, obtenemos:

$$g(x_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ (b_1 + 2c_1 x_0)(z - z_0) \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] + 2 \left[\mathbf{D}\mathbf{r}(x_0) - c_1 (z - z_0)^2 \right] \arctan \left(\frac{x - x_0}{z - z_0} \right) + 2c_1 (x - x_0)(z - z_0) \right\} \left. \begin{array}{l} f_2(z) \\ f_1(z) \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

Resolviendo numéricamente la integral con respecto a z de la ecuación anterior, se obtiene la anomalía gravimétrica de una fuente anómala bidimensional S , cuya expresión matemática viene dada por la ecuación (2.3), y que presenta un contraste de densidad que depende sólo de la distancia horizontal x como el polinomio de segundo grado de la ecuación (2.7).

2.2.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z

Supongamos que el contraste de densidad de la región S con respecto al medio circundante viene descrito por una función continua de la variable z . Debido a la dependencia con la profundidad de la función que describe el contraste de densidad $\mathbf{Dr}(z)$, ésta no participa en la integración analítica, sino tan sólo en la integración numérica. Por ello, no hay restricciones en cuanto a la elección del tipo de función que vaya a describir al contraste de densidad, siempre que sea una función continua de la variable z .

En este caso, se puede realizar una separación de variables en la ecuación (2.4), quedando ésta como:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \mathbf{Dr}(z) \left\{ \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} \frac{dx}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \quad (2.17)$$

El cálculo de la solución de la ecuación anterior conlleva la resolución analítica de la integral con respecto a la variable x . Realizando dicha integración se obtiene:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ \mathbf{Dr}(z) \arctan \left(\frac{x - x_0}{z - z_0} \right) \right\}_{f_1(z)}^{f_2(z)} \quad (2.18)$$

Posteriormente, se realiza la integral con respecto a la variable z , o bien analíticamente o bien mediante la cuadratura de Gauss-Legendre, dependiendo del tipo de funciones que sean $\mathbf{Dr}(z)$, $f_1(z)$ y $f_2(z)$, para calcular el efecto gravimétrico de una fuente anómala bidimensional S que está limitada lateralmente por funciones continuas que dependen de la profundidad y cuyo contraste de densidad varía también en función de z .

2.2.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, z

En este caso, vamos a suponer que el contraste de densidad \mathbf{Dr} es una función continua que varía con respecto a las variables x y z . Consideraremos que la función densidad es un polinomio de segundo grado con respecto a x dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{Dr}(x, z) = A_1(z) + B_1(z)x + C_1(z)x^2 \quad (2.19)$$

donde $A_1(z)$, $B_1(z)$ y $C_1(z)$ son funciones continuas de la variable z .

Si sustituimos esta expresión en la ecuación (2.5), obtenemos:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \left\{ \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{A_1(z) + B_1(z)x + C_1(z)x^2}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \quad (2.20)$$

Para calcular una solución de esta ecuación, podemos realizar la integración con respecto a la variable x de forma analítica. Para ello, separamos la integral en tres integrales distintas, llegando a la expresión:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \left\{ A_1(z) \underbrace{\int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{1}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{I'} + \right. \\ \left. + B_1(z) \underbrace{\int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{x}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{II'} + C_1(z) \underbrace{\int_{f_1(z)}^{f_2(z)} dx \frac{x^2}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{III'} \right\} \quad (2.21)$$

La integral I' de la expresión anterior es la misma que la integral I de la ecuación (2.9). Por tanto, el resultado viene dado por la expresión (2.11). Lo mismo sucede con las integrales II' y III' . Los resultados de ambas integrales se corresponden con los resultados de las integrales II y III y vienen dados por las expresiones (2.13) y (2.15), respectivamente. Por tanto, sustituyendo las expresiones (2.11), (2.13) y (2.15) en la ecuación (2.21) y agrupando términos, llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned}
 g(x_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz & \left\{ [B_1(z) + 2C_1(z)x_0](z - z_0) \ln[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2] \right. \\
 & \left. + 2 \left[\mathbf{Dr}(x_0, z) - C_1(z)(z - z_0)^2 \right] \arctan \left(\frac{x - x_0}{z - z_0} \right) + 2 C_1(z)(x - x_0)(z - z_0) \right\} \begin{matrix} f_2(z) \\ f_1(z) \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Para obtener el efecto gravimétrico de la fuente anómala bidimensional que estamos considerando, se debe resolver la integral sobre la variable z de la ecuación anterior o bien numéricamente o bien analíticamente, eligiendo este último caso si las funciones $A_1(z)$, $B_1(z)$, $C_1(z)$, $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son lo suficientemente sencillas como para permitir este tipo de integración.

2.2.4. Ejemplos

La ecuación (2.22) y su resolución numérica nos proporcionan la solución general del cálculo de la anomalía gravimétrica de una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z y cuya densidad varía con respecto a las variables x y z . A partir de esta ecuación podemos obtener el resultado para el caso particular 2.1.1. si las funciones $A_1(z)$, $B_1(z)$ y $C_1(z)$ son constantes, obteniéndose la ecuación (2.16). En el caso de que las funciones $B_1(z)$ y $C_1(z)$ sean nulas, se obtiene el resultado para el caso 2.1.2. con la ecuación (2.18). Para ilustrar el tipo de geometrías y densidades que se pueden tratar, se presentan a continuación tres ejemplos (Martín-Atienza y García-Abdeslem, 1999). En cada uno de ellos consideraremos que el observador se encuentra situado en la topografía, $z_0 = 0$ km, y la fuente se encuentra comprendida entre las profundidades $z_1 = 0$ y $z_2 = 3$ km. También consideraremos que las funciones $f_1(z)$, $f_2(z)$, $A_1(z)$, $B_1(z)$ y $C_1(z)$ son funciones polinómicas, debido a que cualquier función continua puede ser reducida a un polinomio mediante una expansión en series de Taylor. Además, los polinomios son funciones suaves que pueden modelar una amplia variedad de geometrías y distribuciones de densidad presentes en la naturaleza.

En el primer ejemplo, consideramos una fuente anómala limitada lateralmente por las funciones polinómicas: $f_1(z) = -2 - 0.6z$ y $f_2(z) = 1 + 1.2z$. El contraste de densidad para este primer caso viene dado por el polinomio: $\mathbf{Dr}(x) = 0.5 + 0.02x - 0.02x^2$. La geometría de este cuerpo se puede ver en la figura 2.3(a) y la anomalía gravimétrica que produce viene representada en la figura 2.3(b).

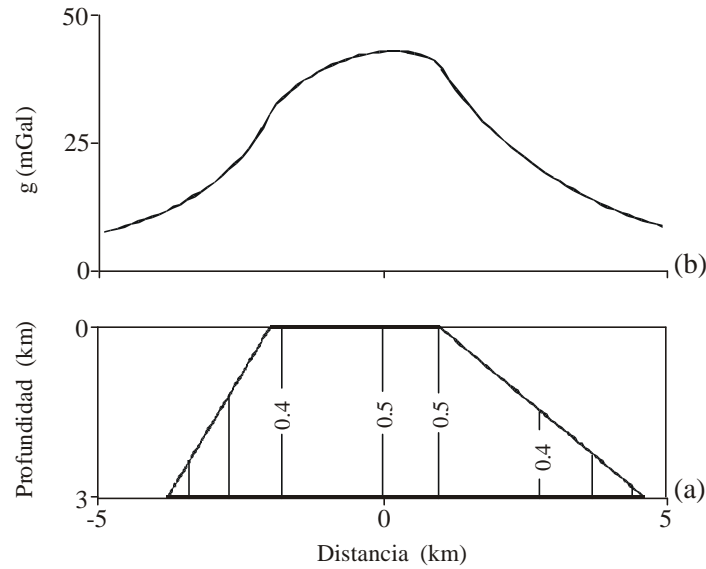


FIGURA 2.3. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 .

En el segundo ejemplo se han elegido las funciones: $f_1(z) = -5 - 0.09z + 0.4z^2 + 0.01z^3$ y $f_2(z) = 5 - 0.5z + 0.01z^2$ como fronteras laterales de la fuente anómala, cuya densidad es un polinomio que depende de la variable z : $\mathbf{Dr}(z) = -0.5 + 0.01z + 0.05z^2$. La figura 2.4 nos muestra la geometría, la densidad y la anomalía que produce este cuerpo.

El tercer ejemplo que se presenta a continuación es el caso más general, en el que el contraste de densidad varía con las variables x y z como el polinomio de la ecuación (2.19), cuyos coeficientes son las funciones polinómicas: $A_1(z) = -0.7 + 0.06z^2$, $B_1(z) = -0.05z$ y $C_1(z) = 0.04$, siendo el polinomio resultante de la forma $\mathbf{Dr}(x, z) = -0.7 - 0.05xz + 0.04x^2 + 0.06z^2$. Las fronteras laterales del cuerpo son: $f_1(z) = -4 - 0.07z + 0.3z^2 + 0.01z^3$ y $f_2(z) = 4.5 + 0.5z - 0.2z^2$. La figura 2.5 nos muestra la fuente y la anomalía gravimétrica que produce.

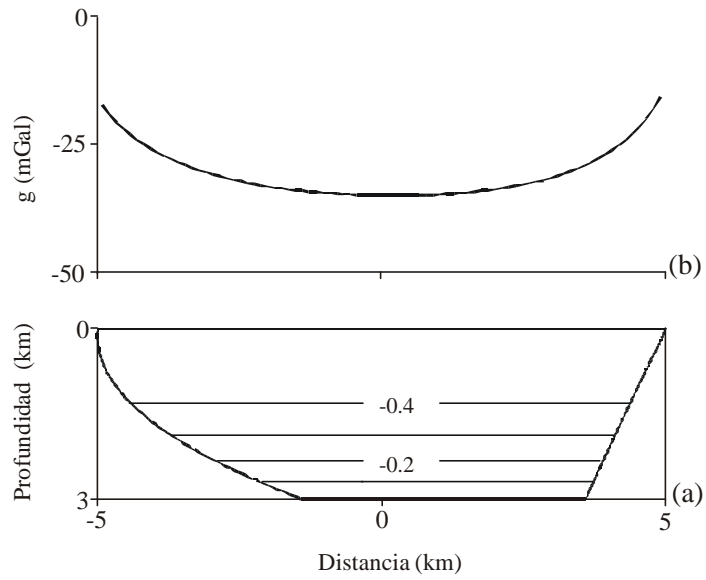


FIGURA 2.4. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 .

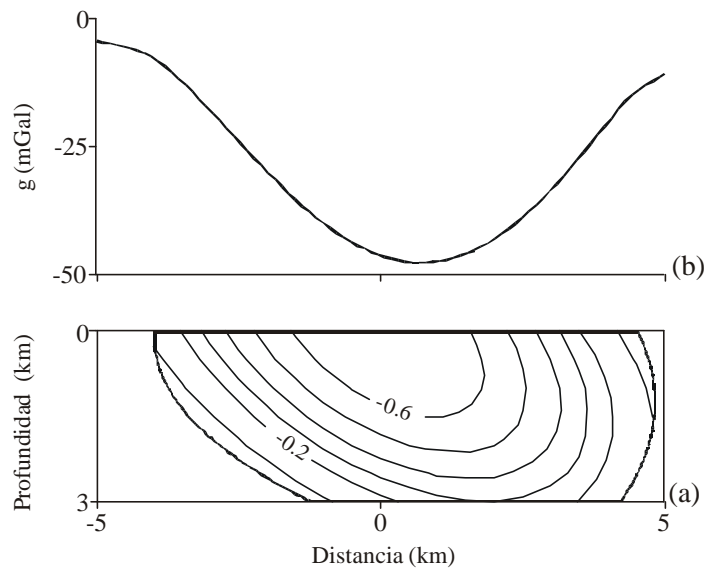


FIGURA 2.5. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 .

2.3. FUENTE ANOMALA LIMITADA SUPERIOR E INFERIORMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LA VARIABLE X

En esta sección vamos a considerar que las fronteras superior e inferior de la región anómala S vienen descritas por dos funciones continuas que dependen de la variable x , $g_1(x)$ y $g_2(x)$, y que las fronteras laterales son dos funciones constantes, $x = x_1$ y $x = x_2$. La expresión matemática que define esta región es de la forma:

$$S = \{[x, z]: x_1 \leq x \leq x_2, g_1(x) \leq z \leq g_2(x)\} \quad (2.23)$$

y su representación gráfica se puede ver en la figura 2.6.

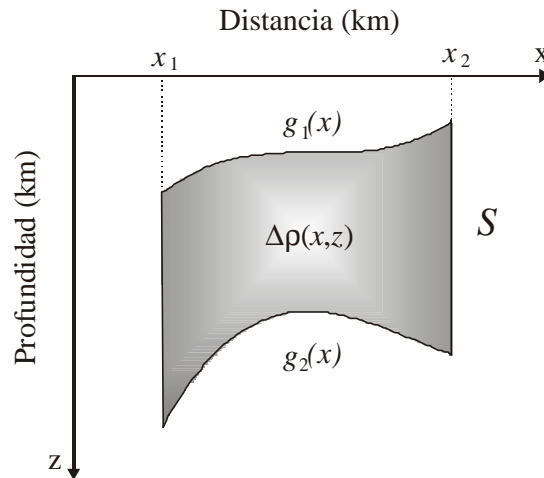


FIGURA 2.6. Geometría general de fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x .

En este caso, sustituyendo los límites de integración correspondientes a la región S en la ecuación general para el caso bidimensional (2.2), obtenemos:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx dz \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \mathbf{Dr}(x, z) \quad (2.24)$$

Para calcular la solución de la ecuación anterior hacemos una separación de variables, obteniendo:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \mathbf{Dr}(x, z) \right\} \quad (2.25)$$

Al igual que para el tipo de geometría anterior, consideraremos tres casos para el contraste de densidad. El primero presenta una densidad que depende de la variable x , en el segundo la densidad depende de la variable z y en el tercero de ambas variables x y z .

2.3.1. Contraste de densidad que depende de la distancia horizontal x

En el caso de que el contraste de densidad varíe sólo con la coordenada horizontal x , podemos separar la ecuación (2.25) de la siguiente manera:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \mathbf{Dr}(x) \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \quad (2.26)$$

Debido a la dependencia con la distancia horizontal x del contraste de densidad $\Delta\rho$, esta función no participa en la integración analítica, pues esta operación se realiza con respecto a la variable z . Por ello, exceptuando el carácter continuo que debe tener $\mathbf{Dr}(x)$, no tenemos restricciones para elegir el tipo de función con la que queremos describir el contraste de densidad de la fuente anómala.

La integral con respecto a z de la ecuación (2.26) es una integral inmediata. Sustituyendo su solución en dicha ecuación se obtiene:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \mathbf{Dr}(x) \left\{ \text{Ln} \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (2.27)$$

Integrando numéricamente la expresión anterior mediante el método de Gauss-Legendre, se obtiene el efecto gravimétrico de una fuente anómala bidimensional S cuyo contraste de densidad y sus fronteras superior e inferior vienen descritos por funciones continuas que dependen de la distancia horizontal x .

2.3.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z

Consideremos que el contraste de densidad varía como una función continua que depende únicamente de la profundidad z . Con esta dependencia, la ecuación (2.27) es de la forma:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \mathbf{Dr}(z) \right\} \quad (2.28)$$

Para ser consistentes con los casos vistos anteriormente, en donde la densidad tenía la forma de un polinomio de segundo grado, vamos a considerar en este caso que el contraste de densidad también es una función polinómica cuadrática de la forma:

$$\mathbf{Dr}(z) = a_2 + b_2 z + c_2 z^2 \quad (2.29)$$

donde a_2 , b_2 y c_2 son constantes.

Sustituyendo la expresión anterior para la densidad en la ecuación (2.28), obtenemos:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{(a_2 + b_2 z + c_2 z^2)(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \quad (2.30)$$

La integral con respecto a z , en la ecuación anterior, se puede resolver analíticamente. Para ello separamos dicha integral en la suma de tres integrales para operar con cada una de ellas por separado:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \underbrace{a_2 \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{i'} + \right. \\ \left. + b_2 \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{z(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{ii'} + c_2 \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{z^2(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{iii'} \right\} \quad (2.31)$$

La integral I'' de la ecuación anterior es una integral que se convierte en una integral inmediata mediante el siguiente cambio de variables: $x - x_0 = a, z - z_0 = \omega$. Aplicando este cambio la solución es:

$$I'' = \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (2.32)$$

Para calcular la solución de la ecuación II'' , se utiliza *el método de integración por partes*, obteniendo:

$$II'' = \left\{ \frac{z}{2} \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} - \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{1}{2} \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \quad (2.33)$$

Para resolver la integral contenida en la expresión anterior, se le aplica el mismo cambio de variable utilizado en la resolución de la integral I'' resultando una integral conocida. Sustituyendo su solución en la ecuación anterior se obtiene la solución total para II'' :

$$II'' = \left\{ \frac{z_0}{2} \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] - (x - x_0) \left(\arctan \frac{z - z_0}{x - x_0} \right) + (z - z_0) \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (2.34)$$

El cálculo de la solución de la ecuación III'' requiere los mismos pasos que para la resolución de la integral II'' . Una vez realizados se obtiene:

$$III'' = \left\{ \frac{z_0^2 - (x - x_0)^2}{2} \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] - 2z_0(x - x_0) \arctan \left(\frac{z - z_0}{x - x_0} \right) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 + 2z_0(z - z_0) \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (2.35)$$

Haciendo la sustitución de las integrales (2.32), (2.33) y (2.35) en la ecuación (2.31) y agrupando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 g(x_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\mathbf{Dr}(z_0) - c_2(x - x_0)^2 \right] \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \right. \\
 \left. - 2(b_2 + 2c_2 z_0)(x - x_0) \arctan \left(\frac{z - z_0}{x - x_0} \right) + [2b_2 + c_2(z + 3z_0)](z - z_0) \right\} \Bigg|_{g_1(x)}^{g_2(x)}
 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Haciendo uso de la cuadratura de Gauss-Legendre, se calcula numéricamente la integral anterior con respecto a la variable x . Con ello se obtiene el efecto gravimétrico que produce la región plana S , con un contraste de densidad que depende únicamente de la profundidad z , en el observador $P_0(x_0, z_0)$.

2.3.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, z

Consideramos el caso en el que la función que describe el contraste de densidad es un polinomio cuadrático que varía en función de las variables x y z de la forma:

$$\mathbf{Dr}(x, z) = A_2(x) + B_2(x)z + C_2(x)z^2 \quad (2.37)$$

Si sustituimos la expresión anterior en la ecuación (2.25), obtenemos:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz (z - z_0) \frac{A_2(x) + B_2(x)z + C_2(x)z^2}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \quad (2.38)$$

Para calcular la solución de esta ecuación, primeramente se separa la integral con respecto de z en tres integrales de fácil resolución, obteniéndose:

$$g(x_0, z_0) = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \underbrace{A_2(x) \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{I''} + \right. \\ \left. + B_2(x) \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{z(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{II''} + C_2(x) \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dz \frac{z^2(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}}_{III''} \right\} \quad (2.39)$$

Las integrales I'' , II'' y III'' de la ecuación anterior son las mismas integrales que I'' , II'' y III'' de la ecuación (2.31), respectivamente. Las soluciones son:

$$I'' = \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (2.40)$$

$$II'' = \left\{ \frac{z_0}{2} \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] - (x - x_0) \arctan \left(\frac{z - z_0}{x - x_0} \right) + (z - z_0) \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (2.41)$$

$$III'' = \left\{ \frac{z_0^2 - (x - x_0)^2}{2} \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] - 2z_0(x - x_0) \left(\arctan \frac{z - z_0}{x - x_0} \right) + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 + 2z_0(z - z_0) \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (2.42)$$

Haciendo la sustitución de las integrales (2.40), (2.41) y (2.42) en la ecuación (2.39) y agrupando términos, se obtiene:

$$g(x_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[D(x, z_0) - C_2(x)(x - x_0)^2 \right] \ln \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] - 2 \left[B_2(x) + 2C_2(x)z_0 \right] (x - x_0) \arctan \left(\frac{z - z_0}{x - x_0} \right) + \left[2B_2(x) + C_2(x)(z + 3z_0) \right] (z - z_0) \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (2.43)$$

Para calcular el efecto gravimétrico del cuerpo bidimensional S , definido por la expresión (2.23) con contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x,z)$, expresado por la ecuación (2.37), se calcula numéricamente las integrales que aparecen en la expresión (2.43) mediante la cuadratura de Gauss-Legendre.

2.3.4. Ejemplos

La resolución numérica de la ecuación (2.43) es la solución general para la anomalía gravimétrica de un cuerpo anómalo limitado, superior e inferiormente, por funciones continuas de la distancia horizontal x , con una densidad que depende de las variables x y z . El caso particular 2.3.1. se puede obtener de la ecuación (2.43), si las funciones $B_2(x)$ y $C_2(x)$ son nulas, llegando a la ecuación (2.27). Si las funciones $A_2(x)$, $B_2(x)$ y $C_2(x)$ son constantes, se obtiene la ecuación (2.35) del caso 2.3.2. A continuación presentamos tres modelos teóricos para ilustrar el tipo de geometrías y densidades que se pueden tratar, en los que se ha supuesto que las funciones continuas que describen tanto las fronteras del cuerpo como su contraste de densidad son funciones polinómicas (Martín-Atienza y García-Abdeslem, 1999). En los tres ejemplos se considera que el observador está situado en la topografía y ésta coincide con el techo de la estructura de la fuente ($z_0 = z_1$). Lateralmente, la fuente está comprendida entre $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$ km.

Para el primer modelo, vamos a considerar una fuente anómala cuya frontera superior viene representada por el polinomio: $g_1(x) = -0.1 + 0.01x + 0.09x^2$ y la frontera inferior viene por el polinomio: $g_2(x) = 2 + 0.04x + 0.03x^2$. El contraste de densidad es $\mathbf{Dr}(x) = 0.5 + 0.01x - 0.05x^2$. La figura 2.7 presenta la geometría y el contraste de densidad de este cuerpo y la anomalía gravimétrica que produce.

En el segundo ejemplo, la fuente anómala tiene por fronteras las funciones $g_1(x) = 0.05x - 0.003x^2 - 0.005x^3$, $g_2(x) = 2.5 - 0.01x - 0.07x^2$. La densidad es una función que depende de la variable z mediante la función polinómica: $\mathbf{Dr}(z) = -0.4 + 0.01z + 0.08z^2$. La figura 2.8(a) nos muestra la geometría y el contraste de densidad del cuerpo y la figura 2.8 (b) nos muestra la anomalía gravimétrica que produce.

En el caso más general para este tipo de geometrías, donde el contraste de densidad viene dado por la expresión (2.36), las funciones $A_2(x)$, $B_2(x)$ y $C_2(x)$ son de la forma: $A_2(x) = -0.3 - 0.05x - 0.01x^2$, $B_2(x) = 0.09$ y $C_2(x) = 0.01$, de forma que el contraste de densidad es: $\mathbf{Dr}(x,z) = -0.3 - 0.05x + 0.09z - 0.01x^2 + 0.01z^2$. Las fronteras superior e inferior del cuerpo son $g_1(x) = -0.1 + 0.03x + 0.001x^2 + 0.005x^3$ y $g_2(x) = 3 - 0.02x - 0.001x^2 - 0.007x^3$.

En la figura 2.9 podemos ver la geometría del cuerpo anómalo y la anomalía gravimétrica que produce.

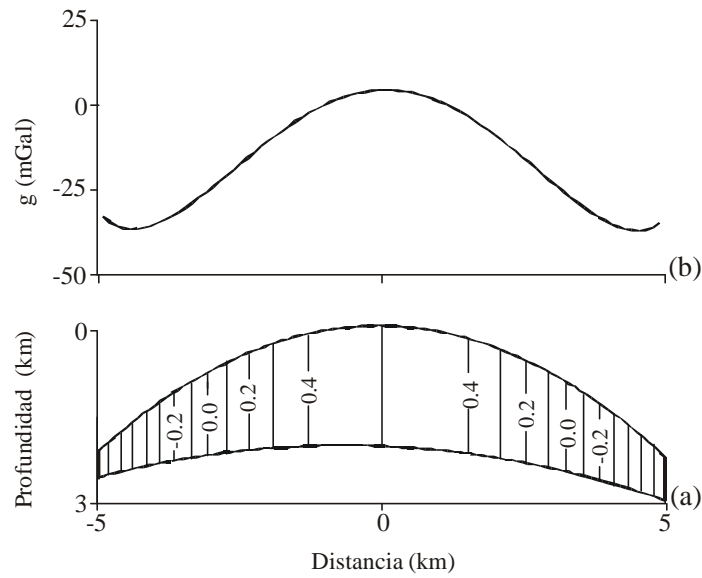


FIGURA 2.7. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 .

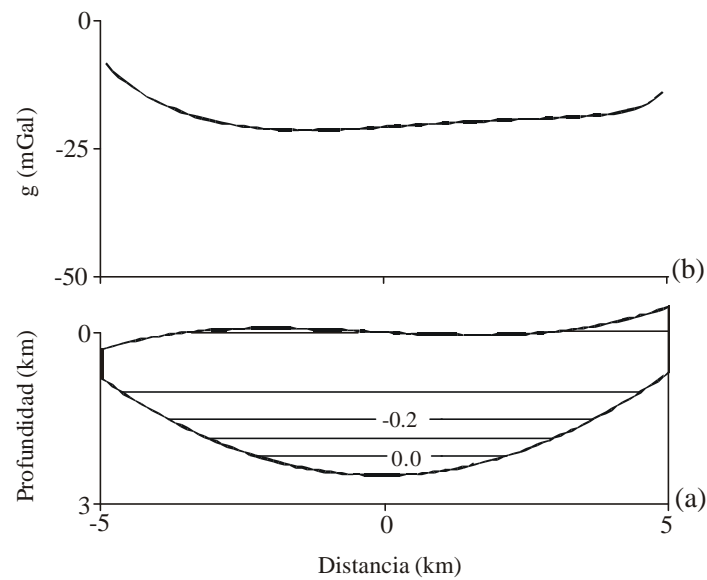


FIGURA 2.8. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 .

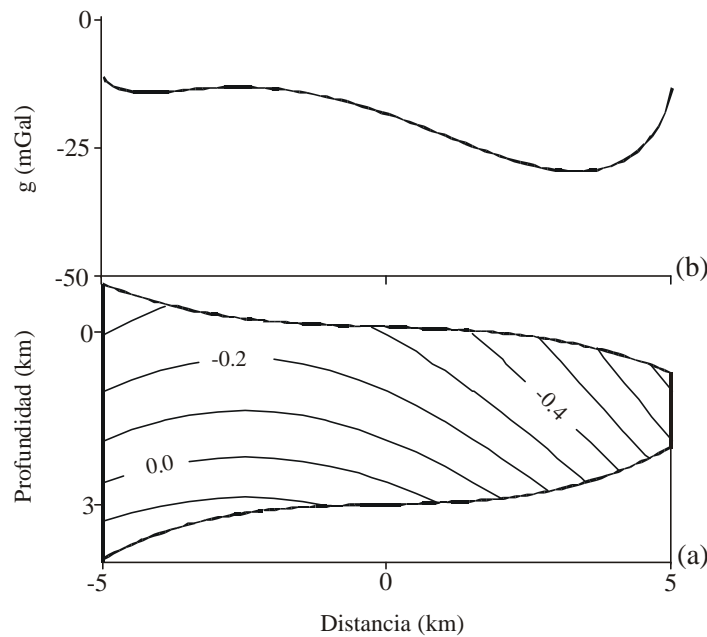


FIGURA 2.9. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 .

2.4. DISCUSION

En este Capítulo se ha presentado un nuevo método para realizar el modelado directo de anomalías gravimétricas en 2D. Para ello se han utilizado métodos de integración analíticos y numéricos para calcular el efecto gravimétrico de las fuentes responsables de dichas anomalías.

Tanto los contrastes de densidad de estas fuentes, como las fronteras que las delimitan, se han descrito mediante funciones continuas que dependen de la profundidad y de la distancia horizontal a lo largo del perfil de datos. Dichas funciones pueden ser de cualquier tipo, con la condición de que sean continuas en el intervalo de integración. Esto hace que con este método no se puedan modelar directamente discontinuidades presentes en el interior del cuerpo anómalo que se está modelando, como por ejemplo, cambios de densidad bruscos provocados por la presencia de fallas en el interior de la fuente. Esta limitación se puede salvar utilizando el principio de superposición en Gravimetría, que nos dice que el efecto gravimétrico de una distribución de masas es igual a la suma de los efectos gravimétricos de las masas individuales. Esto se puede aplicar dividiendo el modelo total de la fuente anómala en varios modelos más pequeños, cada uno de ellos descritos por funciones continuas y calculados mediante el método descrito en este Capítulo, cuyas fronteras sean de tal manera que simulen la discontinuidad en cuestión.

En este método de modelado se ha supuesto que los techos de las estructuras de las fuentes anómalas coinciden con la topografía. Esto hace que, en el caso en el que dichas fuentes estén limitadas superior e inferiormente por funciones continuas que dependen de la distancia horizontal, los integrandos de las ecuaciones (2.27), (2.35) y (2.43), utilizadas para calcular las respectivas anomalías gravimétricas, sean singulares en los puntos donde se encuentra el observador. Como se describe en el Apéndice A, el método de integración numérica de la Cuadratura de Gauss-Legendre maneja de manera eficaz estas singularidades cuando se encuentran en los extremos de los intervalos de integración, haciendo posible el cálculo del efecto gravimétrico de las fuentes.

Para ilustrar el método, en los ejemplos de este Capítulo se han elegido funciones polinómicas tanto para describir el contraste de densidad como para describir las fronteras de la fuente. Esta elección es debida al carácter general de dichas funciones, puesto que es posible reducir cualquier otro tipo de función continua a un polinomio mediante la aplicación del Teorema de Taylor. Por otro lado, el carácter suave de los polinomios hace posible su utilización para el modelado de un gran número de estructuras y de distribuciones de masa presentes en la naturaleza, como es el caso de las cuencas sedimentarias. Para mostrar ésto, los valores numéricos de los coeficientes de los polinomios se han elegido de manera que den como resultado modelos en los que el orden de magnitud de los contrastes de densidad y de las dimensiones de los cuerpos sean coherentes con estructuras geológicas que se pueden encontrar de forma natural en la corteza terrestre.

Capítulo III:

PROBLEMA DIRECTO PARA FUENTES GRAVIMETRICAS EN 3D

INTRODUCCION

En este Capítulo se presenta el desarrollo de las ecuaciones que se van a utilizar en el cálculo del modelado directo de las anomalías gravimétricas producidas por cuerpos tridimensionales cuyas fronteras son funciones continuas y cuya distribución de masa presenta cambios laterales, cambios en profundidad o cambios en todas las direcciones simultáneamente. Para todos los casos presentados se va a suponer que la frontera superior del cuerpo anómalo coincide con la superficie donde se encuentra el observador que registra los datos de gravedad. Para realizar las integraciones necesarias para dicho cálculo, se utilizan los métodos de integración analíticos habituales, así como la *Cuadratura de Gauss-Legendre*, descrita en el Apéndice A, en el caso en el que la integración deba ser realizada numéricamente. Para cada tipo de fuente se presenta un modelo teórico y la anomalía gravimétrica que produce. Los resultados que se obtienen para tres dimensiones son útiles para modelar una amplia variedad de estructuras geológicas presentes en la naturaleza.

3.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DIRECTO EN 3D

En general, la anomalía gravimétrica producida por una fuente que ocupa un volumen V y que tiene un contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x, y, z)$ con respecto al medio circundante, viene expresada por la ecuación (1.5), cuya solución se puede calcular dependiendo de las fronteras que limitan al volumen V y de cómo sea la función que describe la distribución de densidades $\mathbf{Dr}(x, y, z)$.

Como ya se hizo en el Capítulo II para fuentes anómalas en dos dimensiones, vamos a considerar diferentes casos, dependiendo de la forma de las fronteras del cuerpo y de la dirección en la que el contraste de densidad del mismo presenta variaciones. En general, para tres dimensiones, consideraremos que la estructura de la fuente anómala se encuentra limitada por fronteras descritas por funciones continuas de dos variables y por planos, y que la distribución de densidad puede presentar cambios suaves laterales [$\mathbf{Dr}(x, y)$], en profundidad [$\mathbf{Dr}(z)$] o en las tres direcciones del espacio simultáneamente [$\mathbf{Dr}(x, y, z)$].

3.2. FUENTE ANOMALA LIMITADA LATERALMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LAS VARIABLES Y,Z

Vamos a suponer que las fronteras laterales del volumen V vienen expresadas por dos funciones continuas $h_1(y, z)$ y $h_2(y, z)$, y por dos funciones constantes y_1 e y_2 . Las fronteras superior e inferior de este volumen también son dos funciones constantes z_1 y z_2 . La geometría general del volumen V viene representada en la figura 3.1 y su expresión matemática es:

$$V = \{[x, y, z] : h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z), y_1 \leq y \leq y_2, z_1 \leq z \leq z_2\} \quad (3.1)$$

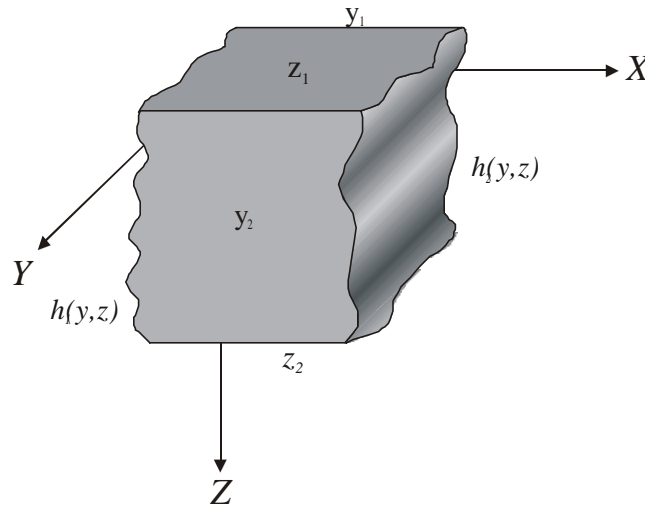


FIGURA 3.1. Geometría general de fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y, z .

Teniendo en cuenta los límites que describen la región V , la ecuación (1.5) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} dx dy dz \frac{(z - z_0)}{r^3} \mathbf{Dr}(x, y, z) \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{Dr}(x, y, z)$ es el contraste de densidad que presenta el volumen V con respecto al medio que lo rodea.

Vamos a considerar diferentes tipos de distribuciones de densidad. Primeramente, consideraremos que la densidad varía lateralmente como una función continua de las coordenadas horizontales x e y . Posteriormente, consideraremos el caso en el que la densidad varía con la profundidad z . Y por último, presentaremos el caso en el que el contraste de densidad varía en función tanto de la profundidad z como lateralmente, en función de las variables horizontales x e y .

3.2.1. Contraste de densidad que depende de las distancias horizontales x, y

Por consistencia con los casos vistos en el problema de modelado directo de estructuras bidimensionales, supongamos que la estructura dada por la expresión presenta una distribución de densidades que varía lateralmente con respecto a las variables x e y , como un polinomio de segundo grado:

$$Dr(x, y) = A_3(y) + B_3(y)x + C_3(y)x^2 \tag{3.3}$$

donde los coeficientes $A_3(y)$, $B_3(y)$ y $C_3(y)$ son funciones continuas de la variable y . Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (3.2) y haciendo una separación de variables, obtenemos:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx \frac{A_3(y) + B_3(y)x + C_3(y)x^2}{r^3} \tag{3.4}$$

Separando la integral con respecto a x en la suma de tres integrales, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \underbrace{A_3(y) \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx \frac{1}{r^3}}_{I^{iv}} + \right. \tag{3.5}$$

$$\left. + B_3(y) \underbrace{\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx \frac{x}{r^3}}_{II^{iv}} + C_3(y) \underbrace{\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx \frac{x^2}{r^3}}_{III^{iv}} \right\}$$

Las tres integrales con respecto a la variable x de la ecuación anterior se pueden calcular aplicando el cambio de variables: $(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$, $x - x_0 = \omega^2$, resultando integrales de solución conocida. Aplicando el cambio de variables a la integral I^{iv} , ésta se convierte en:

$$I^{iv} = \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} d\mathbf{w} \frac{1}{(\mathbf{w}^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.6)$$

Su solución, después de deshacer el cambio de variables, es:

$$I^{iv} = \frac{(x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] r} \Big|_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \quad (3.7)$$

En cuanto a la integral II^{iv} , al hacer el cambio de variables se obtiene:

$$II^{iv} = \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} d\mathbf{w} \frac{\mathbf{w} + x_0}{(\mathbf{w}^2 + a^2)^{3/2}} = \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} d\mathbf{w} \frac{\mathbf{w}}{(\mathbf{w}^2 + a^2)^{3/2}} + x_0 \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} \frac{1}{(\mathbf{w}^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.8)$$

con lo que la solución final para la integral II^{iv} es:

$$II^{iv} = \left[-\frac{1}{r} + \frac{x_0(x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] r} \right] \Big|_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \quad (3.9)$$

Y aplicando el cambio de variables a la tercera integral III^{iv} de la ecuación (3.5), obtenemos:

$$III^{iv} = \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} d\mathbf{w} \frac{\mathbf{w}^2}{(\mathbf{w}^2 + a^2)^{3/2}} + 2x_0 \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} d\mathbf{w} \frac{\mathbf{w}}{(\mathbf{w}^2 + a^2)^{3/2}} + x_0^2 \int_{h_1(a)}^{h_2(a)} \frac{1}{(\mathbf{w}^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.10)$$

Una vez deshecho el cambio de variables, la solución para la integral III^{iv} es:

$$III^{iv} = \left[\frac{-(x - x_0)}{r} + \ln [(x - x_0) + r] - \frac{2x_0}{r} + \frac{x_0^2(x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] r} \right] \Big|_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \quad (3.11)$$

Sustituyendo los resultados (3.7), (3.9) y (3.11) en la ecuación (3.5) y agrupando términos, se obtiene el resultado para el cálculo de la integración con respecto a x de dicha ecuación:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{D\mathbf{r}(x_0, y)(x - x_0)}{\left[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] r} - \frac{B_3(y) + C_3(y)(x + x_0)}{r} + C_3(y) \ln[(x - x_0) + r] \right\} \quad (3.12)$$

$\left. \begin{array}{l} h_2(y, z) \\ h_1(y, z) \end{array} \right\}$

Por muy sencillas que sean las funciones continuas $A_3(y, z)$, $B_3(y, z)$, $C_3(y, z)$, $h_1(y, z)$ y $h_2(y, z)$, la solución a la integral de la ecuación anterior, con respecto a las variables y y z , debe ser resuelta numéricamente mediante la cuadratura de Gauss-Legendre para integrales multidimensionales (Apéndice A).

Con la solución numérica de la ecuación (3.12) obtenemos la anomalía gravimétrica producida por el volumen V que tiene un contraste de densidad descrito mediante la expresión (3.3).

3.2.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z

En este caso vamos a considerar que la estructura descrita en la expresión (3.1) está caracterizada por una distribución de densidades que varía con respecto a la profundidad z . Como la densidad no depende de la variable x , no hay restricciones para elegir el tipo de función que la va a representar, pues sólo va a intervenir en la integración numérica.

Si hacemos una separación de variables en la ecuación (3.2), teniendo en cuenta que el contraste de densidad es de la forma $\Delta\rho(z)$, obtenemos:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) D\mathbf{r}(z) \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} dx \frac{1}{r^3} \quad (3.13)$$

La integral con respecto a x de la ecuación anterior se resuelve de forma inmediata haciendo uso del mismo cambio de variables que para el caso anterior. El resultado es:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{(x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \right\} \Bigg|_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \quad (3.14)$$

La solución numérica de la ecuación (3.14) nos proporciona la anomalía gravimétrica producida por el volumen V con una distribución de densidad que varía en función de la profundidad.

3.2.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, y, z

Vamos a suponer que el contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x, y, z)$ viene representado por una función polinómica cuadrática de la forma:

$$\mathbf{Dr}(x, y, z) = A_4(y, z) + B_4(y, z)x + C_4(y, z)x^2 \quad (3.15)$$

donde los coeficientes $A_4(y, z)$, $B_4(y, z)$ y $C_4(y, z)$ son funciones continuas de las variables y y z . Sustituyendo este polinomio en la ecuación (3.2), obtenemos:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx \frac{A_4(y, z) + B_4(y, z)x + C_4(y, z)x^2}{r^3} \quad (3.16)$$

donde separando la integral con respecto a x en la suma de tres integrales, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ A_4(y, z) \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx \frac{1}{r^3} + \right. \\ \left. + B_4(y, z) \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx \frac{x}{r^3} + C_4(y, z) \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} dx \frac{x^2}{r^3} \right\} \quad (3.17)$$

Las tres integrales con respecto a la variable x , I^v , II^v y III^v , de la ecuación anterior, son las mismas integrales que I^{iv} , II^{iv} y III^{iv} del caso 3.2.1, respectivamente. Por tanto, tienen los mismos resultados. Sustituyendo las expresiones correspondientes (3.7), (3.9) y (3.11) en la ecuación (3.17) y agrupando términos, se obtiene:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{Dr(x_0, y, z)(x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] r} - \frac{B_4(y, z) + C_4(y, z)(x + x_0)}{r} + C_4(y, z) \ln[(x - x_0) + r] \right\} \begin{matrix} h_2(y, z) \\ h_1(y, z) \end{matrix} \quad (3.18)$$

donde $\Delta\rho(x_0, y, z) = A_4(y, z) + B_4(y, z)x_0 + C_4(y, z)x_0^2$.

La solución de la ecuación (3.18) se calcula numéricamente, con lo que obtenemos el efecto gravimétrico del volumen V dado por la expresión (3.1) y que presenta un contraste de densidad con respecto al medio circundante descrito por la función continua (3.15).

3.2.4. Ejemplos

Presentamos a continuación tres ejemplos que ilustran los resultados expuestos anteriormente, en los que las fuentes anómalas se encuentran limitadas por funciones continuas de las variables y y z . Para los tres ejemplos vamos a considerar una geometría común representada en la figura 3.2, donde las fronteras laterales a lo largo del eje x vienen descritas por las funciones polinómicas: $h_1(y, z) = -4 - 0.001y - 0.06z - 0.0008yz + 0.02y^2 + 0.4z^2 + 0.003y^2z + 0.004yz^2 - 0.003y^3 + 0.006z^3$ y $h_2(y, z) = 4 + 0.003y - 0.02z + 0.001yz - 0.07y^2 - 0.01z^2 + 0.004y^2z + 0.002yz^2 + 0.001y^3 - 0.0003z^3$. Las fronteras laterales a lo largo del eje y son $y_1 = -6$ e $y_2 = 6$ km. La frontera superior es $z_1 = 0$ km, que coincide con la coordenada z_0 del observador, y la inferior es $z_2 = 3$ km.

El contraste de densidad elegido para el primero de los ejemplos es: $Dr(x, y) = 0.3 + 0.05x + 0.02y - 0.04x^2$. En la figura 3.3(a) se puede ver el cuerpo anómalo con su contraste de densidad y en la figura 3.3(b) podemos observar la anomalía gravimétrica que produce, calculada a partir de la ecuación (3.12).

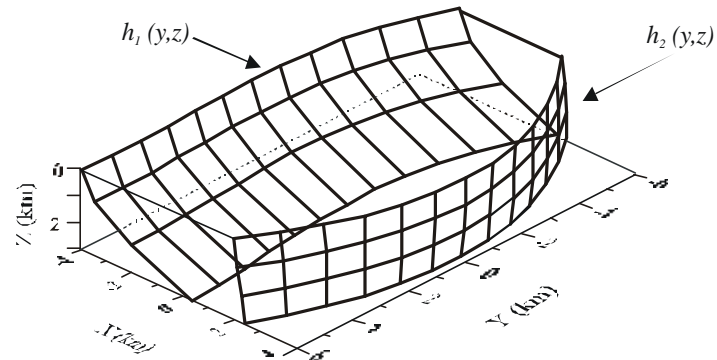


FIGURA 3.2. Geometría del ejemplo de fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y , z .

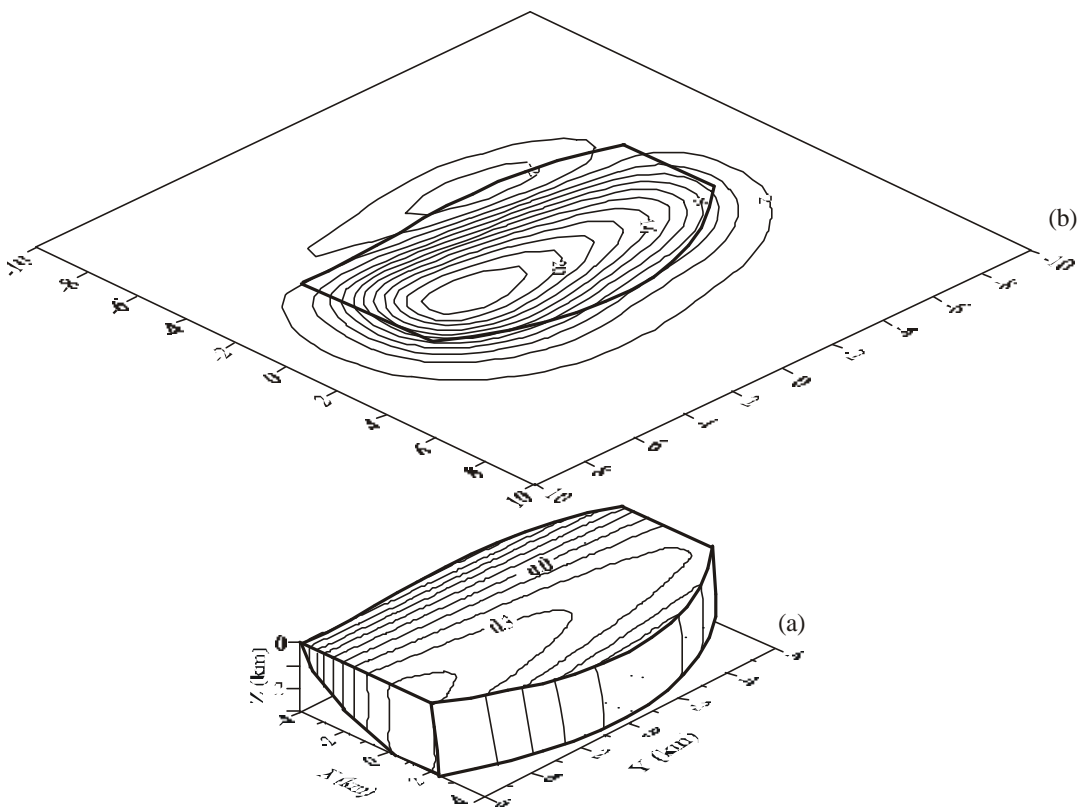


FIGURA 3.3. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

En el segundo ejemplo, el contraste de densidad del cuerpo anómalo es una función que depende de la profundidad z mediante la función polinómica: $\mathbf{Dr}(z) = -0.1 + 0.4z - 0.03z^2$. La figura 3.4(a) nos muestra la geometría de este cuerpo y su contraste de densidad y la figura 3.4(b) nos presenta su anomalía gravimétrica calculada mediante la ecuación (3.14).

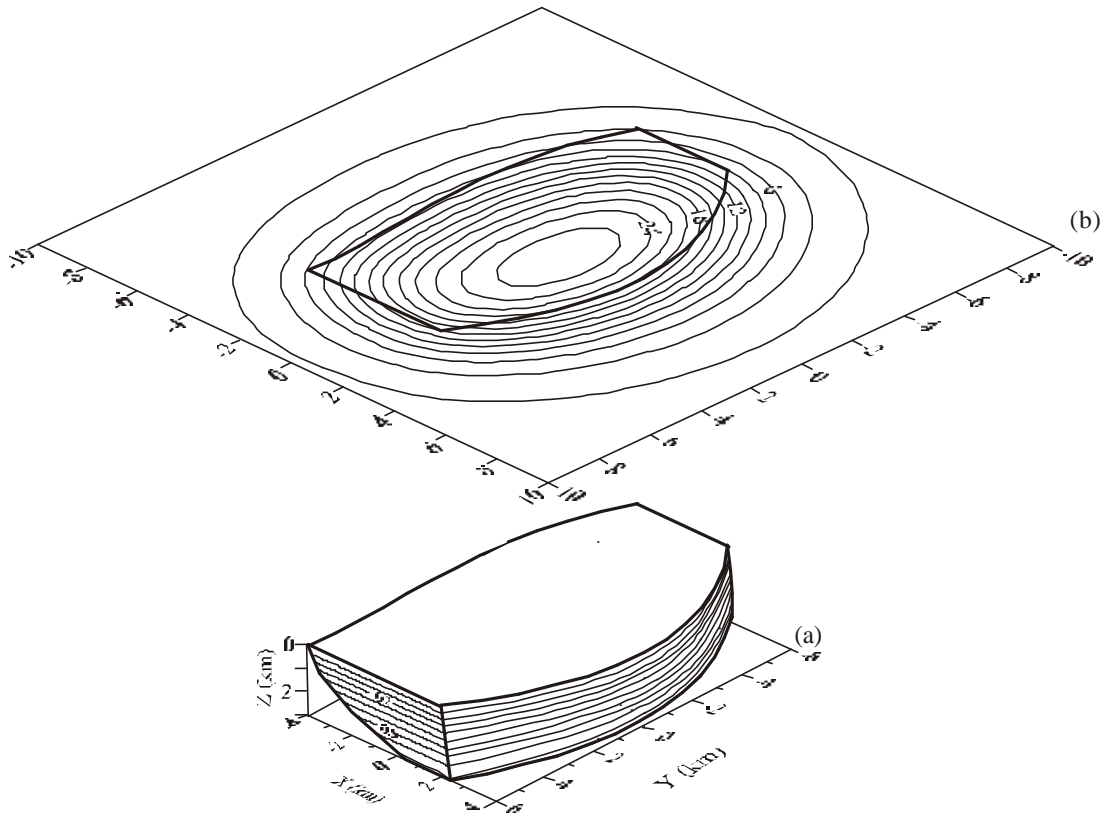


FIGURA 3.4. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

El caso más general para este tipo de geometrías, donde el contraste de densidad depende de las tres variables x , y y z , viene ilustrado en la figura 3.5(a) mediante el cuerpo cuyo contraste de densidad viene descrito por la función continua $\mathbf{Dr}(x, y, z) = -0.7 + 0.1x - 0.004xy + 0.01yz - 0.07xz + 0.01x^2 - 0.03y^2 + 0.005z^2$. La anomalía gravimétrica correspondiente se ha calculado mediante al ecuación (3.18) y se puede observar en la figura 3.5(b).

En estos tres ejemplos se ha supuesto que el techo de la estructura del cuerpo anómalo coincide con la topografía. Por ello, los integrandos de las ecuaciones (3.12), (3.14) y (3.18) son singulares en los puntos donde se encuentra el observador. Como se describe en el Apéndice A, la cuadratura de Gauss-Legendre maneja de manera eficaz estas singularidades cuando se encuentran en los extremos de los intervalos de integración, haciendo posible el cálculo de las anomalías gravimétricas.

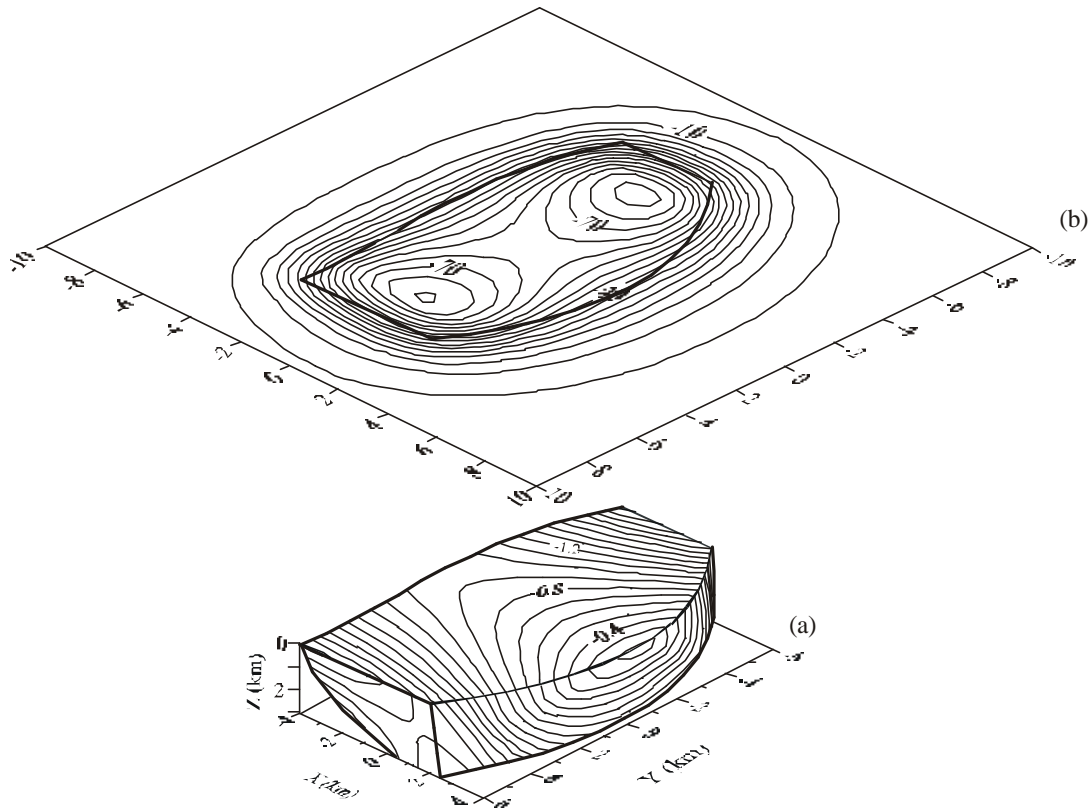


FIGURA 3.5. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

3.3. FUENTE ANOMALA LIMITADA LATERALMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LAS VARIABLES X,Z

En este caso supondremos que los límites laterales del volumen V vienen expresados por dos funciones continuas que dependen de las variables x y z , $k_1(x, z)$ y $k_2(x, z)$, y por dos funciones constantes x_1 y x_2 . De la misma manera que en la sección 3.2, las fronteras superior e inferior del volumen también son dos funciones constantes, z_1 y z_2 . La geometría general del volumen V está representada en la figura 3.6 y viene expresada por:

$$V = \{[x, y, z]: x_1 \leq x \leq x_2, k_1(x, z) \leq y \leq k_2(x, z), z_1 \leq z \leq z_2\} \quad (3.19)$$

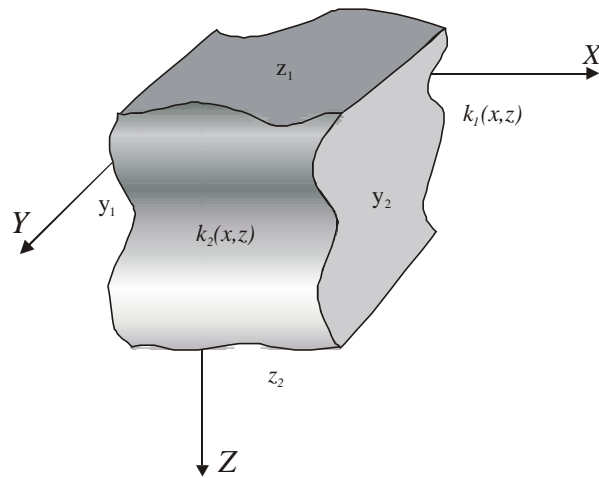


FIGURA 3.6. Geometría general de fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables x, z .

Teniendo en cuenta las fronteras que limitan la región V , la ecuación (1.5) se puede escribir como:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{k_1(x, z)}^{k_2(x, z)} dy dx dz \frac{(z - z_0)}{r^3} \mathbf{Dr}(x, y, z) \quad (3.20)$$

donde $\mathbf{Dr}(x, y, z)$ es la distribución de densidades del volumen V con respecto al medio circundante.

La geometría del cuerpo es, básicamente, la misma que la de la fuente considerada en la sección 3.2, considerando que ha habido una rotación de 90° en el plano x - y . Por tanto, las soluciones a los casos considerados en la presente sección, son las mismas que las de la sección 3.2, pero haciendo una sustitución de la variable x por la variable y .

Vamos a considerar los mismos tipos de distribuciones de densidad. Primero, vamos a suponer que la densidad varía lateralmente como una función continua de las variables horizontales x e y . Segundo, supondremos que la densidad varía en función de la profundidad z . Y por último, consideraremos que el contraste de densidad varía en función de las tres variables: x , y y z , simultáneamente.

3.3.1. Contraste de densidad que depende de las distancias horizontales x , y

Consideremos que el contraste de densidad de la estructura representada por la expresión (3.19) varía con respecto a las variables x e y de la forma:

$$Dr(x, y) = A_5(x) + B_5(x)y + C_5(x)y^2 \quad (3.21)$$

donde $A_5(x)$, $B_5(x)$ y $C_5(x)$ son funciones continuas que dependen de la variable x . Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.20), se obtiene:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} dy \frac{A_5(x) + B_5(x)y + C_5(x)y^2}{r^3} \quad (3.22)$$

El resultado de la integral con respecto a y de la ecuación anterior se corresponde con la solución del caso 3.2.1. La solución obtenida es:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{Dr(x, y_0)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2] r} - \frac{B_5(x) + C_5(x)(y + y_0)}{r} + C_5(x) \ln[(y - y_0) + r] \right\} \quad (3.23)$$

$\left. \vphantom{\int_{x_1}^{x_2}} \right\} \begin{matrix} k_2(x,z) \\ k_1(x,z) \end{matrix}$

La solución de la ecuación anterior se calcula numéricamente, obteniendo el efecto gravimétrico producido por el volumen V , que presenta un contraste de densidad descrito mediante la ecuación (3.21).

3.3.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z

Consideraremos que el volumen V presenta un contraste de densidad, respecto al medio circundante, que varía con la profundidad z , $\mathbf{Dr}(z)$. Sustituyendo esta función densidad en la ecuación (3.20) y haciendo una separación de variables, obtenemos:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \mathbf{Dr}(z) \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} dy \frac{1}{r^3} \quad (3.24)$$

La integral con respecto a la variable y de la ecuación anterior es del mismo tipo que la integral con respecto a x de la ecuación (3.13), por tanto, la solución para este caso es:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \mathbf{Dr}(z) \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2] r} \right\}_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} \quad (3.25)$$

A partir de la ecuación anterior se obtiene la anomalía gravimétrica producida por el volumen V que presenta un contraste de densidad descrito por una función continua que varía con la profundidad.

3.3.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, y, z

Vamos a suponer que el contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x, y, z)$ viene expresado por:

$$\mathbf{Dr}(x, y, z) = A_6(x, z) + B_6(x, z)y + C_6(x, z)y^2 \quad (3.26)$$

donde los coeficientes $A_6(x, z)$, $B_6(x, z)$ y $C_6(x, z)$ son funciones continuas que dependen de las variables x y z . Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (3.20), tenemos:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} dy \frac{A_6(x, z) + B_6(x, z)y + C_6(x, z)y^2}{r^3} \quad (3.27)$$

que es una expresión muy parecida a la de la ecuación (3.16), por lo que su solución es:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{Dr(x, y_0, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2] r} - \frac{B_6(x, z) + C_6(x, z)(y + y_0)}{r} + C_6(x, z) \ln[(y - y_0) + r] \right\} \left. \begin{array}{l} k_2(x, z) \\ k_1(x, z) \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

Con esta ecuación se puede calcular numéricamente la anomalía gravimétrica que produce el volumen V con un contraste de densidad que varía con las variables x , y y z .

3.3.4. Ejemplos

Vamos a presentar tres ejemplos para ilustrar el tipo de geometrías y densidades que se pueden tratar en el caso en el que la fuente anómala esté lateralmente limitada por funciones continuas de las variables x y z . Como en los ejemplos de la sección 3.2, vamos a suponer la misma

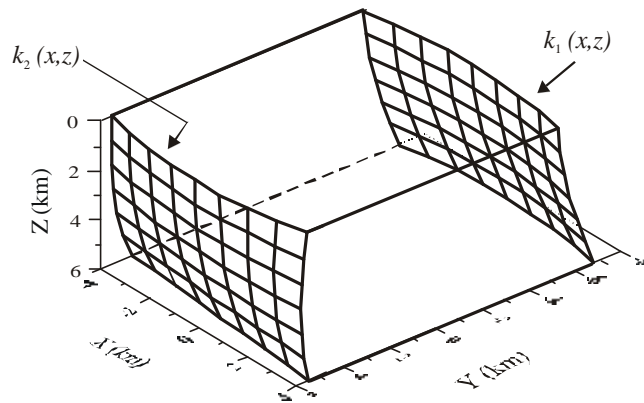


FIGURA 3.7. Geometría del ejemplo de fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables x , z .

estructura geométrica para el cuerpo anómalo en cada uno de estos tres ejemplos. Esta geometría se puede observar en la figura 3.7., donde las fronteras laterales a lo largo del eje y vienen descritas por los polinómios: $k_1(x, z) = -6 + 0.03x^2 - 0.05z^2 + 0.002z^3$ y $k_2(x, z) = 6 - 0.02z + 0.01xz - 0.04x^2 + 0.007x^2z + 0.001xz^2 - 0.004z^3$. Las fronteras a lo largo del eje x son $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$ km. La frontera superior es $z_1 = 0$ km y la inferior es $z_2 = 6$ km.

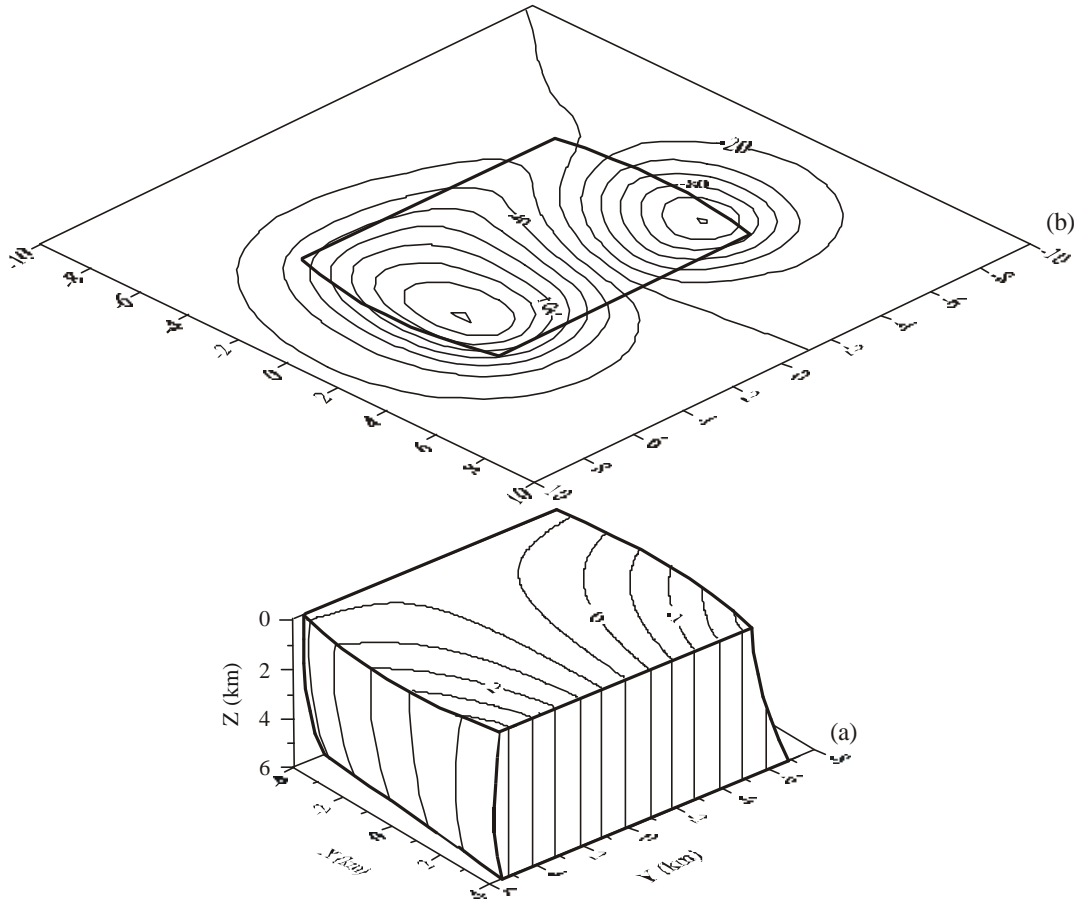


FIGURA 3.8. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

Para el primer ejemplo que vamos a presentar, el contraste de densidad elegido es $\mathbf{Dr}(x, y) = 0.4 - 0.1x + 0.3y + 0.07xy$. En la figura 3.8(a) se puede ver el cuerpo anómalo con su contraste de densidad y en la figura 3.8(b) podemos observar la anomalía gravimétrica producida por dicho cuerpo y calculada mediante la ecuación (3.23).

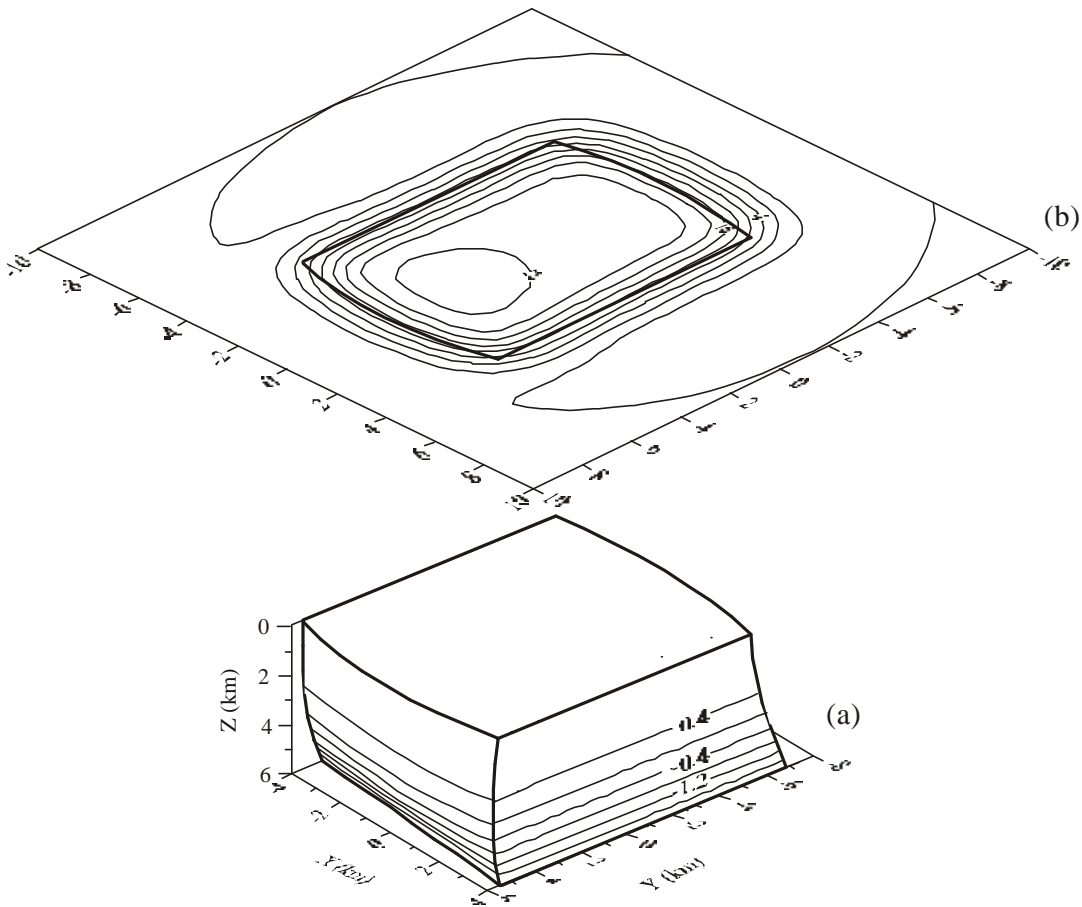


FIGURA 3.9. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

En el segundo ejemplo, el contraste de densidad es $\mathbf{Dr}(z) = 0.7 + 0.1z - 0.09z^2$. En la figura 3.9(a) podemos observar el cuerpo anómalo con su correspondiente contraste de densidad y en la figura 3.9(b) su anomalía gravimétrica calculada a partir de la ecuación (3.25).

El tercer ejemplo es el caso más general, pues el contraste de densidad depende de x , y y z . Para este caso, la función que describe el contraste de densidad es el polinomio: $\mathbf{Dr}(x, y, z) = -0.6 - 0.03x + 0.01y - 0.04z - 0.01xy + 0.07yz + 0.005z^3$ y se encuentra representado en la figura 3.10(a). La anomalía gravimétrica que produce este cuerpo se puede observar en la figura 3.10(b) y ha sido calculada mediante la ecuación (3.28).

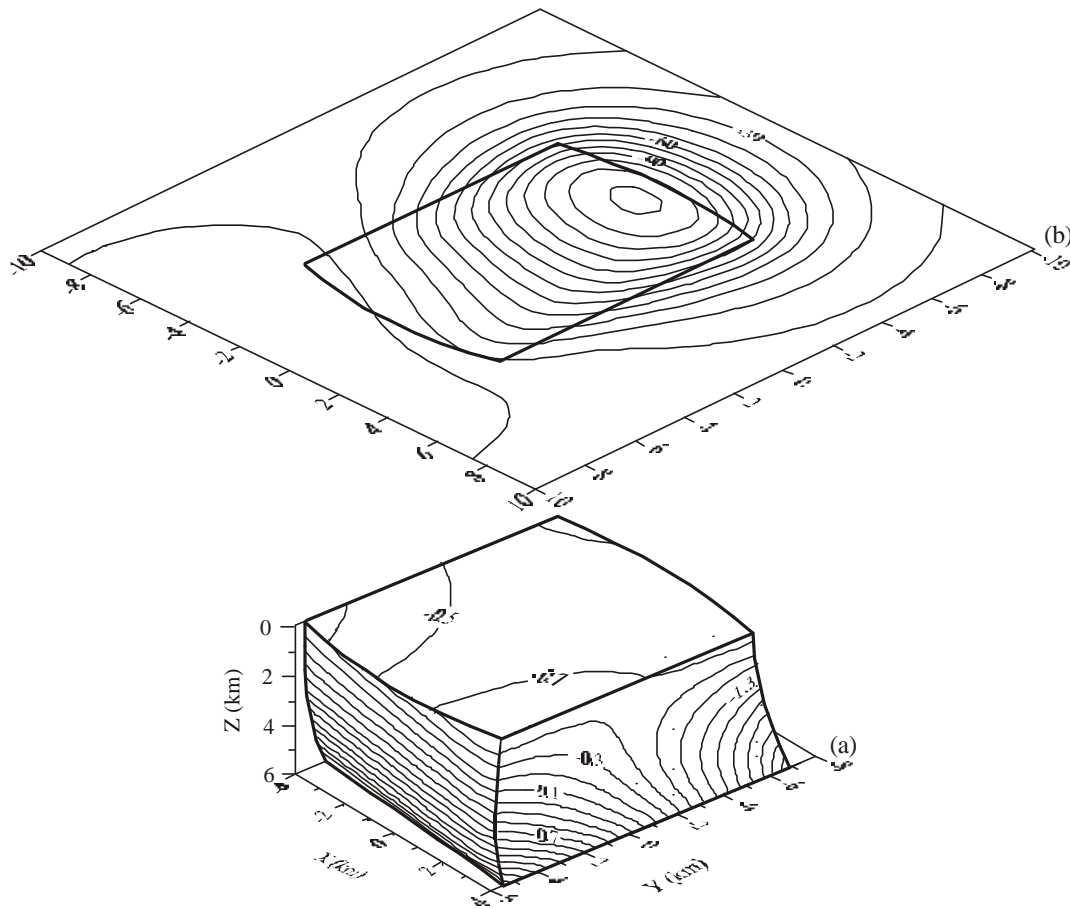


FIGURA 3.10. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

En estos ejemplos hemos supuesto que el techo de la estructura representada en la figura 3.7 coincide con la superficie donde se encuentra el observador, lo que hace que los integrandos de las ecuaciones (3.23), (3.25) y (3.28) sean singulares en el punto (x_0, y_0, z_0) . Esto se puede evitar de la forma descrita en el Apéndice A.

3.4. FUENTE ANOMALA LIMITADA SUPERIOR E INFERIORMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LAS VARIABLES X,Y

Supongamos que el volumen V se encuentra limitado, en su parte superior y en su parte inferior, por dos funciones continuas que dependen de las variables x e y , $l_1(x, y)$ y $l_2(x, y)$. Lateralmente, las fronteras de este volumen vienen descritas por cuatro funciones constantes x_1, x_2, y_1 e y_2 . La forma geométrica del volumen V viene representada en la figura 3.11 y su expresión matemática es la siguiente:

$$V = \{[x, y, z]: x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2, l_1(x, y) \leq z \leq l_2(x, y)\} \quad (3.29)$$

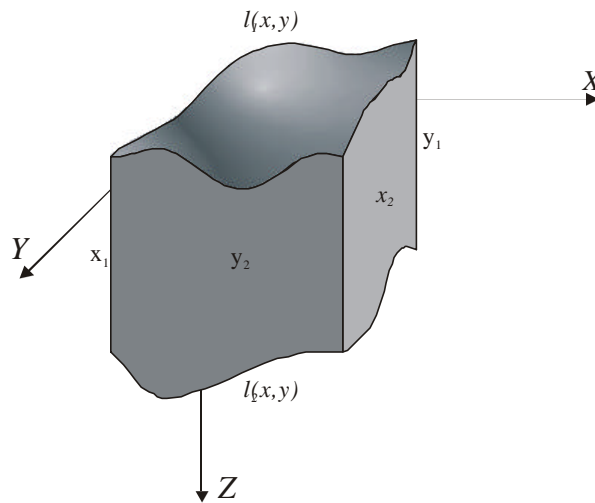


FIGURA 3.11. Geometría general de fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables x, z .

Teniendo en cuenta la forma del volumen V , la ecuación (1.5) se puede escribir como:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{l_1(x, y)}^{l_2(x, y)} dz dy dx \frac{(z - z_0)}{r^3} \mathbf{Dr}(x, y, z) \quad (3.30)$$

donde $\mathbf{Dr}(x, y, z)$ representa el contraste de densidades del volumen V con respecto al medio que lo rodea.

Como en los casos anteriores, vamos a plantear las diferentes soluciones que se obtienen de la ecuación general (3.30) considerando diferentes tipos de distribuciones de densidad.

3.4.1. Contraste de densidad que depende de las distancias horizontales x, y

Consideremos que el contraste de densidad del volumen dado por la expresión (3.29) varía con respecto a las variables x y y como una función continua $\mathbf{Dr}(x, y)$. Sustituyendo en la ecuación (3.30) se obtiene:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \mathbf{Dr}(x, y) \int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{z - z_0}{r^3} \quad (3.31)$$

Aplicando el cambio de variable: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$, $z - z_0 = \omega$, integrando de forma inmediata con respecto a ω y deshaciendo el cambio, se obtiene:

$$g(x_0, y_0, z_0) = -G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{\mathbf{Dr}(x, y)}{r} \right\} \Big|_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} \quad (3.32)$$

La solución numérica de la ecuación anterior nos proporciona el efecto gravimétrico producido por el volumen V que presenta un contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x, y)$.

3.4.2. Contraste de densidad que depende de la profundidad z

En este caso, el volumen descrito en la expresión (3.29) presenta un contraste de densidad, respecto al medio circundante, que varía con la profundidad z según el polinomio:

$$\mathbf{Dr}(z) = a_3 + b_3 z + c_3 z^2 \quad (3.33)$$

donde los coeficientes a_3, b_3 y c_3 son constantes. Con esta función densidad, la ecuación (3.30) es de la forma:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{(a_3 + b_3 z + c_3 z^2)(z - z_0)}{r^3} \quad (3.34)$$

La integral anterior se puede separar en tres integrales para facilitar su resolución:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left[\underbrace{a_3 \int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{(z - z_0)}{r^3}}_{I^{vi}} + \underbrace{b_3 \int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{z(z - z_0)}{r^3}}_{II^{vi}} + \underbrace{c_3 \int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{z^2(z - z_0)}{r^3}}_{III^{vi}} \right] \quad (3.35)$$

De la misma manera que en los casos anteriores, estas integrales se pueden calcular mediante un cambio de variable: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$, $z - z_0 = \omega$. Aplicando este cambio, las integrales I^{vi} , II^{vi} y III^{vi} se convierten en:

$$I^{vi} = \int_{l_1(a)}^{l_2(a)} d\omega \frac{\omega}{(\omega^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.36)$$

$$II^{vi} = \int_{l_1(a)}^{l_2(a)} d\omega \frac{(\omega + z_0)\omega}{(\omega^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.37)$$

$$III^{vi} = \int_{l_1(a)}^{l_2(a)} d\omega \frac{(\omega + z_0)^2 \omega}{(\omega^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.38)$$

cuyas soluciones son conocidas. Estas soluciones, de haciendo el cambio de variable, son:

$$I^{vi} = \left[\frac{-1}{r} \right] \Big|_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} \quad (3.39)$$

$$II^{vi} = \left[\frac{-(z - z_0)}{r} + \ln[(z - z_0) + r] - \frac{z_0}{r} \right] \Big|_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} \quad (3.40)$$

$$III^{vi} = \left[\frac{-(z - z_0)^2}{r} + 2r + 2z_0 \left(\frac{-(z - z_0)}{r} + \ln[(z - z_0) + r] \right) - \frac{z_0^2}{r} \right] \Bigg|_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} \quad (3.41)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.35) y agrupando términos se obtiene:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{-Dr(z)}{r} + (b_3 + 2z_0c_3) \ln[(z - z_0) + r] + 2c_3r \right\} \Bigg|_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} \quad (3.42)$$

La solución de la ecuación anterior se calcula numéricamente mediante el método de la cuadratura de Gauss-Legendre multidimensional, obteniendo la anomalía gravimétrica producida por el volumen de la expresión (3.29) con una distribución de densidad descrita mediante la expresión (3.33).

3.4.3. Contraste de densidad que depende de las variables x, y, z

En este caso, el contraste de densidad $Dr(x, y, z)$ tiene la forma:

$$Dr(x, y, z) = A_7(x, y) + B_7(x, y)z + C_7(x, y)z^2 \quad (3.43)$$

donde los coeficientes del polinomio anterior son funciones continuas que dependen de las variables x e y.

Sustituyendo la expresión (3.43) en la ecuación (3.30), obtenemos:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{[A_7(x, y) + B_7(x, y)z + C_7(x, y)z^2](z - z_0)}{r^3} \quad (3.44)$$

Separando la integral con respecto a la dirección z en la suma de tres integrales, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy & \left\{ A_7(x, y) \underbrace{\int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{(z-z_0)}{r^3}}_{I^{vii}} + \right. \\
& \left. + B_7(x, y) \underbrace{\int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{z(z-z_0)}{r^3}}_{II^{vii}} + C_7(x, y) \underbrace{\int_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} dz \frac{z^2(z-z_0)}{r^3}}_{III^{vii}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Las tres integrales con respecto a la variable z de esta ecuación se calculan de la misma manera que las integrales I^{vi} , II^{vi} y III^{vi} . El resultado final es:

$$\begin{aligned}
g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy & \left\{ \frac{-D\mathbf{r}(x, y, z)}{r} \right. \\
& \left. + [B_7(x, y) + 2z_0 C_7(x, y)] \ln[(z - z_0) + r] + 2C_7(x, y)r \right\} \Bigg|_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

La solución numérica de la ecuación anterior nos proporciona la anomalía gravimétrica que produce el volumen V que tiene un contraste de densidad que varía con las variables x, y y z .

3.4.4. Ejemplos

Para ilustrar el tipo de geometría y los diferentes contrastes de densidad presentados en esta sección, vamos a presentar tres modelos teóricos cuya geometría se puede ver en la figura 3.12. Las fronteras laterales de este cuerpo vienen descritas por las funciones $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $y_1 = -6$ e $y_2 = 6$. La frontera superior es $l_1(x, y) = -0.1 - 0.02x + 0.01y - 0.002xy - 0.001x^2 + 0.005y^2 - 0.003x^2y + 0.001xy^2 - 0.007x^3 - 0.002y^3$ y coincide con la superficie donde se encuentra el observador. La frontera inferior viene descrita por la función $l_2(x, y) = 4 + 0.03x - 0.01y + 0.05xy + 0.001x^2 + 0.003y^2 - 0.003x^2y + 0.008xy^2 + 0.005x^3 - 0.001y^3$. Para el primer ejemplo la densidad depende de las variables x e y según la función polinómica $D\mathbf{r}(x, y) = -0.1 + 0.05xy$. El cuerpo anómalo correspondiente se puede observar en la figura 3.13(a) y calculando a partir de la ecuación (3.32) se puede obtener la anomalía gravimétrica que produce (figura 3.13(b)).

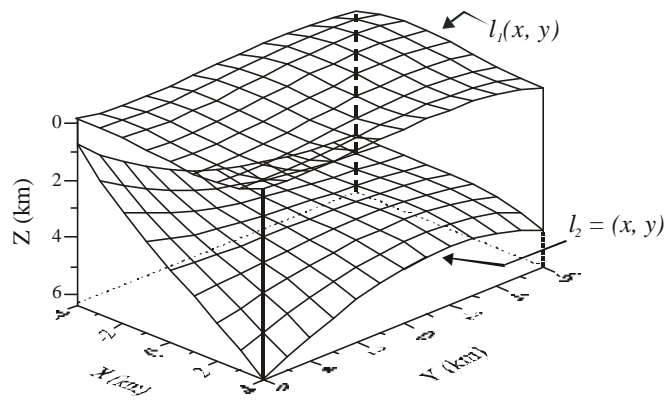


FIGURA 3.12. Geometría del ejemplo de fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables x , y .

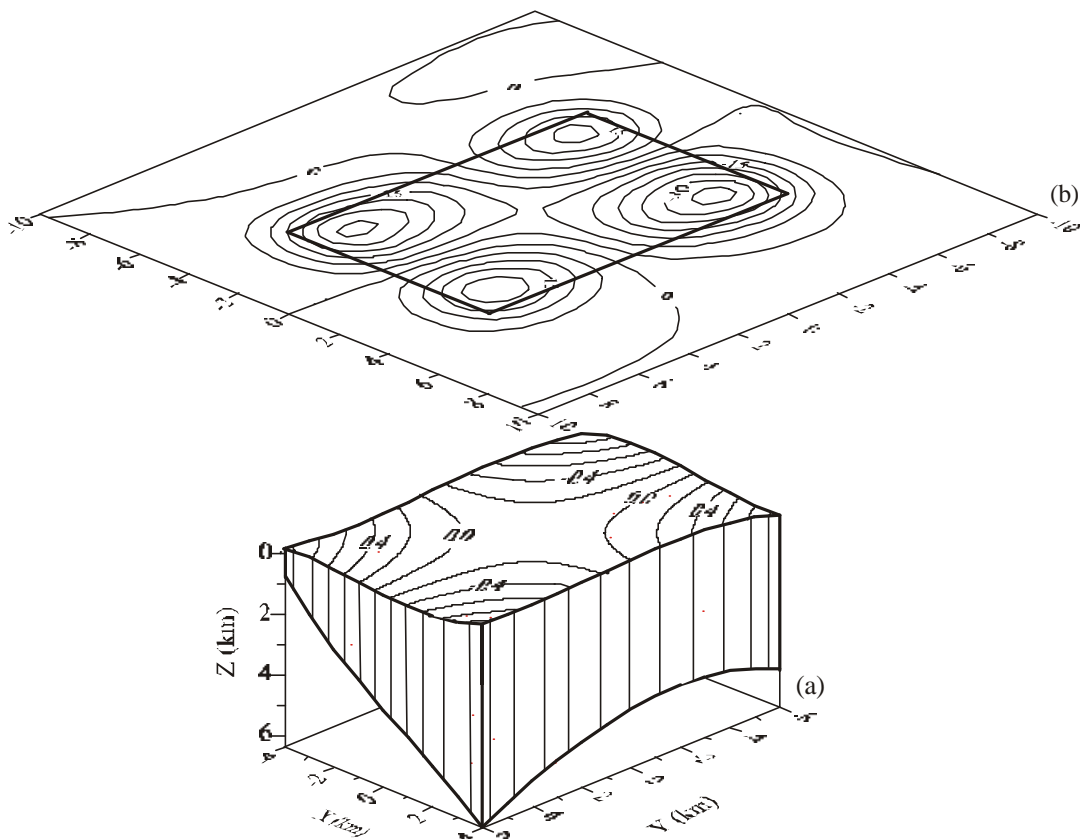


FIGURA 3.13. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

Para el segundo ejemplo la densidad elegida es un polinomio de segundo grado en la variable z : $\mathbf{Dr}(z) = -0.4 + 0.05z - 0.01z^2$. La figura 3.14(a) nos muestra el contraste de densidad del cuerpo anómalo, el cual es responsable de la anomalía que aparece en la figura 3.14(b) y que está calculada mediante la ecuación (3.42).

El tercer ejemplo ilustra el caso más general de la sección 3.4. En este caso la densidad viene dada por la función $\mathbf{Dr}(x, y, z) = -0.3 - 0.05x + 0.01y + 0.09z - 0.002xy - 0.003yz - 0.004xz - 0.01x^2 + 0.03y^2 + 0.01z^2$. Podemos ver una representación del cuerpo anómalo en la figura 3.15(a) y la anomalía que produce en la figura 3.15(b). Dicha anomalía ha sido calculada a partir de la ecuación (3.46).

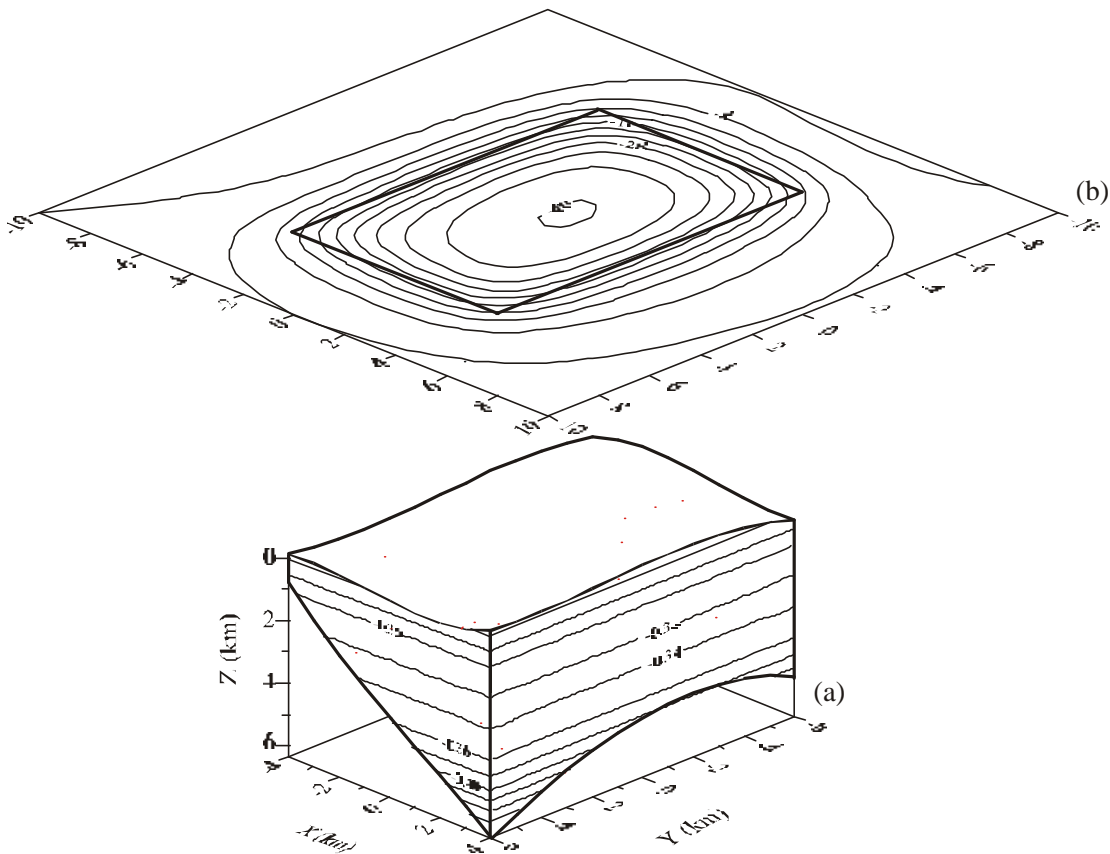


FIGURA 3.14. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

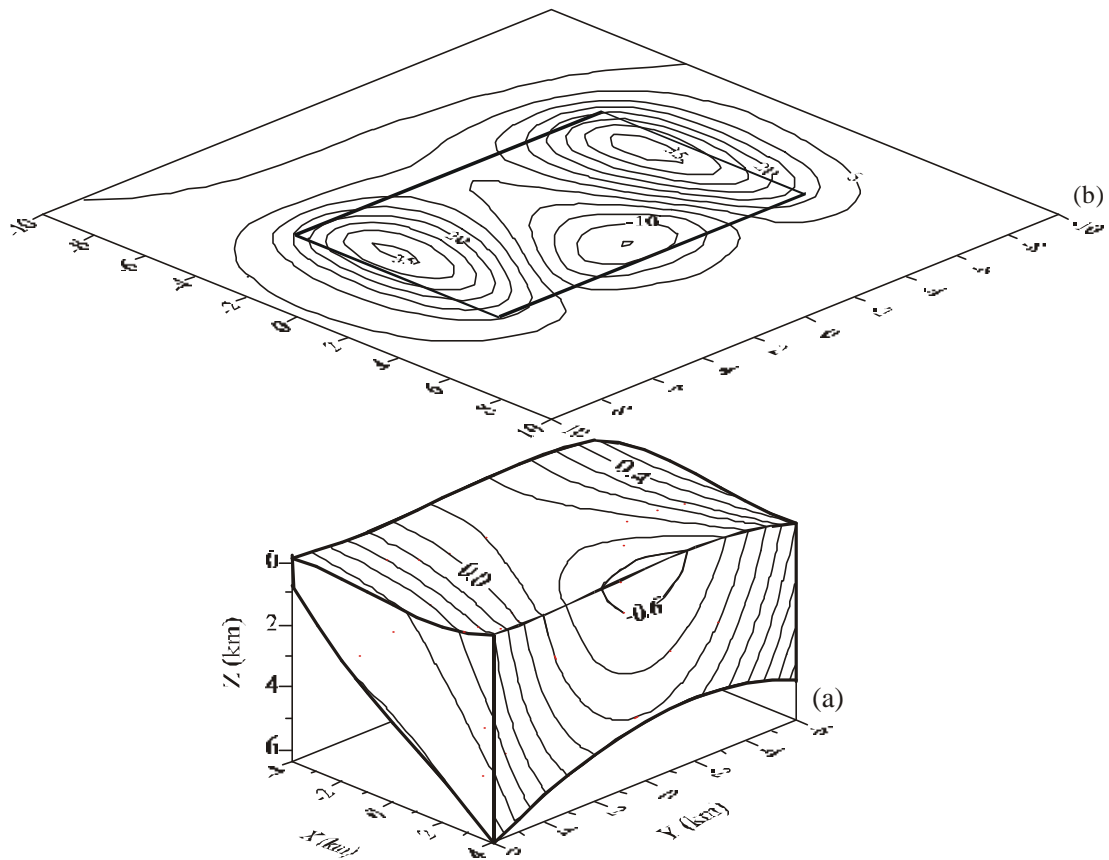


FIGURA 3.15. (a) Fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica de la figura (b). Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . Las isolíneas en la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

3.5. DISCUSION

Este Capítulo presenta una ampliación a 3D del método de modelado directo de anomalías gravimétricas desarrollado en el Capítulo II. Se puede observar cómo es posible dicha ampliación sin que haya aumentado demasiado la complejidad de las ecuaciones utilizadas, lo que hace que el método sea de fácil utilización.

De la misma manera que en el Capítulo II, las características generales de los contrastes de densidad y de las fronteras de las fuentes anómalas vienen descritas por funciones continuas en los intervalos de integración por lo que, para calcular el efecto gravimétrico de un cuerpo que contenga una

discontinuidad en su interior, como por ejemplo una falla que produzca un cambio brusco de densidad, es necesario aplicar el principio de superposición, dividiendo dicho cuerpo en cuerpos más pequeños, cuyas fronteras asemejen la discontinuidad, y sumando los efectos gravimétricos correspondientes para dar el efecto gravimétrico de todo el cuerpo completo.

En los ejemplos presentados en este Capítulo también se ha considerado el caso particular de funciones polinómicas para describir tanto el contraste de densidad como las fronteras de las fuentes anómalas. En la elección de los valores numéricos de los coeficientes de estos polinomios se han tenido en cuenta los órdenes de magnitud de los contrastes de densidad y de las fronteras de las fuentes anómalas presentes en la naturaleza para obtener modelos realistas.

En este método de modelado en 3D también se ha supuesto que las fronteras superiores de los cuerpos anómalos coinciden con la topografía. Por este motivo, en el caso de fuentes limitadas superior e inferiormente por funciones que dependen de las distancias horizontales, las integrales de las ecuaciones (3.32), (3.42) y (3.46), que calculan los efectos gravimétricos de dicho tipo de fuentes, son integrales impropias en los puntos donde se encuentra situado el observador, por lo que se ha procedido de la manera descrita en el Apéndice A para su resolución.

La necesidad de un método de modelado para tres dimensiones de estas características es debida a que hay en realidad una amplia variedad de estructuras geológicas que por su naturaleza no se les puede aplicar métodos de modelado bidimensional.

Capítulo IV:

PROBLEMA INVERSO PARA FUENTES GRAVIMETRICAS EN 2D

INTRODUCCION

En el Capítulo II presentamos las expresiones matemáticas necesarias para calcular las anomalías gravimétricas producidas por fuentes bidimensionales cuyas fronteras están definidas por funciones continuas y que se encuentran caracterizadas por contrastes de densidad que dependen de las variables x y z .

En el presente Capítulo se plantea el problema inverso, mediante el cual se realiza una estimación de los parámetros que determinan el contraste de densidad y la estructura geométrica de las fuentes anómalas a partir de datos gravimétricos conocidos. El método de inversión se aplica a los tipos de estructura y contraste de densidad que se desarrollaron en el Capítulo II, abordando el problema no lineal mediante el método de los mínimos cuadrados amortiguados de Marquardt-Levenberg, presentado en el Capítulo I.

Para comprobar la eficacia del método de inversión elegido, éste se ha aplicado a varios ejemplos, en los que los datos gravimétricos han sido generados sintéticamente a partir de modelos de estructura y contraste de densidad conocidos. Además, en dichos ejemplos se han realizado estudios de sensibilidad, unicidad, estabilidad, resolución, covarianza y correlación.

4.1. FUENTE ANOMALA LIMITADA LATERALMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LA VARIABLE Z

La estructura geométrica de este tipo de fuentes viene representada matemáticamente mediante la ecuación (2.3) y se puede observar su forma general en la figura 2.2. Vamos a suponer que el contraste de densidad de la fuente anómala viene descrito por el caso más general, dado por la ecuación (2.19), en el que este contraste varía en función de las variables x y z , puesto que dentro de este caso se encuentran englobados los otros dos tipos de contrastes de densidad considerados en el Capítulo II, el que considera la densidad como función de la variable x y el que considera la densidad como función de la variable z . El problema directo mediante el que se calcula el efecto gravimétrico correspondiente a esta fuente, en una estación de coordenadas (x_0, z_0) , viene dado por la ecuación (2.22). Para facilitar la inversión de dicha ecuación, consideraremos que la función $D_r(x,z)$ es una función polinómica de la forma:

$$D_r(x,z) = p_1 + p_2 x + p_3 z + p_4 xz + p_5 x^2 + p_6 z^2 \quad (4.1)$$

donde se ha supuesto que las funciones $A_1(z)$, $B_1(z)$ y $C_1(z)$ de la ecuación (2.19) son los polinomios:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= p_1 + p_3 z + p_6 z^2 \\ B_1(z) &= p_2 + p_4 z \\ C_1(z) &= p_5 \end{aligned} \quad (4.2)$$

y donde $p_j \in \mathfrak{R}$ con $j=1, \dots, 6$, siendo \mathfrak{R} el espacio de los números reales.

Sustituyendo las funciones polinómicas $A_1(z)$, $B_1(z)$ y $C_1(z)$ anteriores en la ecuación (2.22) del problema directo y reagrupando los términos del integrando, se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} g(x_0, z_0) &= G \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ (p_2 + p_4 z + 2p_5 x_0)(z - z_0) \ln \left\{ (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left[\mathbf{Dr}(x_0, z) - p_5 (z - z_0)^2 \right] \left\{ \arctan \left(\frac{x - x_0}{z - z_0} \right) \right\} + 2 p_5 (z - z_0) [x - x_0] \right\}_{f_1(z)}^{f_2(z)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{Dr}(x_0, z) = p_1 + p_2 x_0 + p_3 z + p_4 x_0 z + p_5 x_0^2 + p_6 z^2$, siendo x_0 la abcisa del observador.

La resolución numérica de la ecuación (4.3), mediante el método de integración numérica de Gauss-Legendre, nos proporciona el problema directo de un cuerpo bidimensional cuya estructura geométrica viene dada por la expresión (2.2) y cuyo contraste de densidad viene descrito por el polinomio (4.1).

Al igual que hicimos anteriormente con la función que describe el contraste de densidad de la fuente, supondremos que las fronteras $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones polinómicas de la forma:

$$f_1(z) = p_7 + p_8 z + p_9 z^2 + p_{10} z^3 \quad (4.4)$$

$$f_2(z) = p_{11} + p_{12} z + p_{13} z^2 + p_{14} z^3$$

donde cada p_j es un número real. La función constante z_2 va a ser renombrada como el parámetro p_{15} para homogeneizar la notación.

Para realizar la inversión de la ecuación (4.3) consideraremos que dicha ecuación tiene la forma de la expresión (1.9) del Capítulo I. Si conocemos experimentalmente los valores de la gravedad en un perfil de M estaciones sobre la fuente anómala, a partir de la ecuación (4.3) podemos plantear la inversión para calcular las incógnitas de nuestro problema, que son los coeficientes de los

polinomios que describen el contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x,z)$, las fronteras laterales $f_1(z)$ y $f_2(z)$ y la frontera inferior p_{15} . En cuanto a la frontera superior z_1 , supondremos que es conocida ya que, como vimos en el Capítulo II, coincide con la topografía. Por tanto, el vector de parámetros \mathbf{p} se puede construir con dichos coeficientes, obteniendo:

$$\mathbf{p} = \{p_j\} \quad j = 1, \dots, 15 \quad (4.5)$$

que es un vector columna perteneciente al espacio euclídeo de dimensión $N = 15$.

El funcional $F[\mathbf{p}]$ de la ecuación (4.3) es un funcional no lineal, ya que la mayoría de los parámetros que queremos calcular están relacionados de forma no lineal con los datos observados a través de la integral de dicha ecuación. Para calcular el vector de parámetros \mathbf{p} , vamos a utilizar el método de Marquardt-Levenberg, descrito en el Capítulo I mediante la ecuación (1.30). Para evitar los problemas que conlleva la inversión de la matriz $(\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}$ en dicha ecuación, vamos a definir el vector:

$$\mathbf{Dp}^k = \mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k \quad (4.6)$$

y así convertimos la expresión (1.30) en un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$(\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T\mathbf{J})\mathbf{Dp}^k = \mathbf{J}^T\mathbf{y} \quad (4.7)$$

donde el vector incógnita es ahora \mathbf{Dp}^k y \mathbf{J} es el operador jacobiano del sistema. En este caso, \mathbf{J} es de dimensiones $M \times 15$ y sus componentes son las derivadas de la ecuación (4.3) con respecto a cada uno de los parámetros que componen el vector \mathbf{p} y para cada una de las M estaciones donde se registran las medidas de la gravedad. Dichas derivadas se calculan mediante la *regla de Leibnitz* para integrales (Kaplan, 1981) y sus expresiones matemáticas se pueden consultar en el Apéndice B.

Si definimos el vector de los parámetros del modelo con el que se inicia el proceso de inversión iterativo como:

$$\mathbf{p}^0 = (p_j^0) \quad j = 1, \dots, 15 \quad (4.8)$$

la respuesta gravimétrica de dicho modelo, dada por la ecuación (4.3), y el jacobiano nos proporcionan los elementos necesarios para calcular la solución de nuestro problema no lineal a partir del sistema de ecuaciones (4.7), cuya solución se calcula mediante *el método de descomposición LU con sustitución directa y eliminación gaussiana* (Press et al., 1996).

A continuación se presentan dos ejemplos ilustrativos con datos de gravedad sintéticos obtenidos a partir de un modelo de fuente anómala conocido. En el primer ejemplo, los datos de gravedad sintéticos son exactos y en el segundo se considera que estos datos se encuentran contaminados con errores aleatorios.

4.1.1. Ejemplo teórico con datos que no presentan errores numéricos

El ejemplo teórico que vamos a utilizar es el modelo de fuente anómala de la figura 2.5(a), cuya estructura está limitada lateralmente por las funciones polinómicas $f_1(z) = -4 - 0.07z + 0.3z^2 + 0.01z^3$ y $f_2(z) = 4.5 + 0.5z - 0.2z^2$, y cuya frontera inferior es $z_2 = 3$. La frontera superior z_1 de dicho cuerpo coincide con la altura $z_0 = 0$ del observador. El contraste de densidad viene dado por el polinomio: $Dr(x, z) = -0.7 - 0.05xz + 0.04x^2 + 0.06z^2$.

Vamos a suponer que no conocemos ninguna característica del modelo propuesto, al que consideraremos sólo como modelo generador de la anomalía gravimétrica que queremos estudiar. Vamos a considerar que tenemos 100 datos de gravedad igualmente espaciados. Intentaremos reproducir dichos datos calculando una estimación de los parámetros de la fuente mediante el método iterativo de inversión de Marquardt - Levenberg. Para ello partimos de un modelo inicial cuya estructura viene limitada lateralmente por los polinomios: $f_1^0(z) = -3.5 + 0.03z - 0.1z^2 + 0.02z^3$ y $f_2^0(z) = 4.4 + 0.5z$, y cuya frontera inferior es $z_2^0 = 2$. Supondremos también que el contraste de densidad de este modelo es: $Dr^0(x, z) = -0.5 + 0.05x - 0.03z - 0.01xz + 0.02x^2 - 0.03z^2$. En la figura 4.1(a) se presenta la forma geométrica de la estructura y el contraste de densidad de esta fuente. En la figura 4.1(b) se puede observar la anomalía gravimétrica que produce, en línea continua. En línea a trazos se representa el perfil de datos de gravedad que queremos invertir.

Con las características del modelo inicial anteriormente presentadas podemos formar el vector de parámetros iniciales:

$$\left(\mathbf{p}^0\right)^T = (-0.5, 0.05, -0.03, -0.01, 0.02, -0.03, -3.5, 0.03, -0.1, 0.02, 4.4, 0.5, 0, 0, 2)^T \quad (4.9)$$

y se calcula la solución del sistema de ecuaciones (4.7) para diferentes valores del factor de amortiguación, siguiendo un proceso iterativo en el que se pretende alcanzar la convergencia hacia la solución del problema.

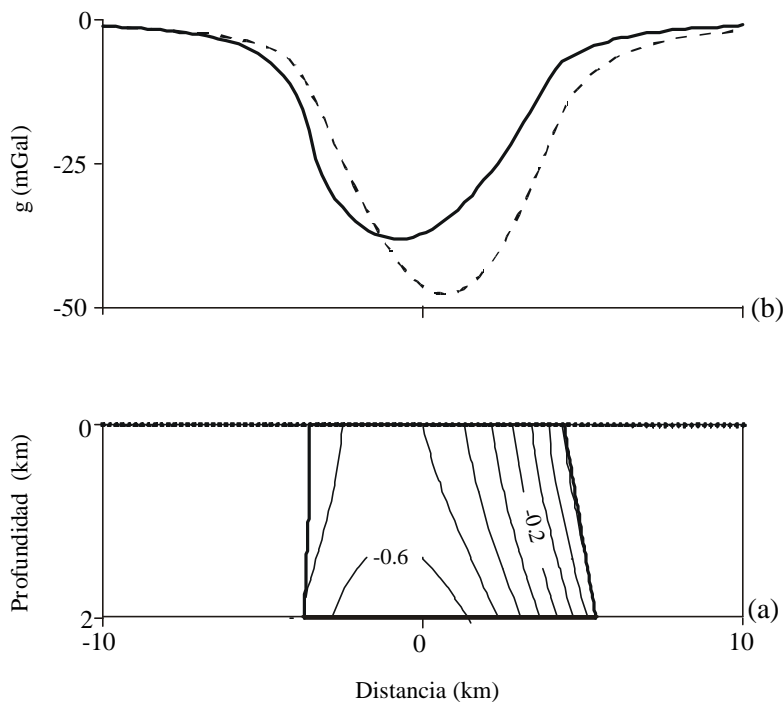


FIGURA 4.1. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas lateralmente por funciones continuas de la variable z . Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 . Los puntos en la frontera superior del cuerpo representan las posiciones del observador. (b) La línea a trazos corresponde a los datos de gravedad sintéticos generados por la fuente de la figura 2.5(a). La línea continua corresponde a la anomalía gravimétrica producida por la fuente (a).

La solución del problema planteado se obtiene en 16 iteraciones, cuando el desajuste dado por la ecuación (1.31) alcanza el valor $q = 2 \cdot 10^{-7} \text{ mGal}^2$, como se puede observar en la figura 4.2. El modelo de fuente resultante y su respuesta gravimétrica se pueden observar en las figuras 4.3(a) y (b), respectivamente.

El residual, obtenido al comparar la anomalía gravimétrica debida al modelo resultante con los datos de gravedad generados mediante el modelo sintético, se puede ver en la figura 4.4. Como vemos, este residual presenta valores muy pequeños, del orden de 10^{-4} mGal . También se observa una tendencia en toda la gráfica hacia los valores negativos, sobre todo en la posición de la frontera derecha, donde el residual es mayor. Esto indica que el promedio del residual no es cero y el peor ajuste entre las anomalías se alcanza en esta zona del perfil.

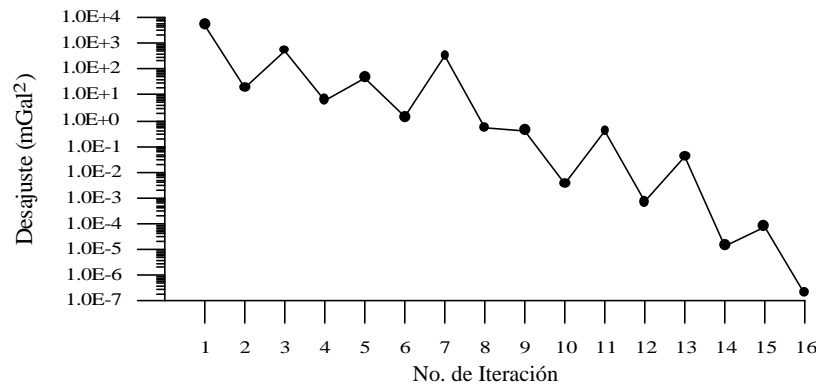


FIGURA 4.2. Evolución del desajuste q .

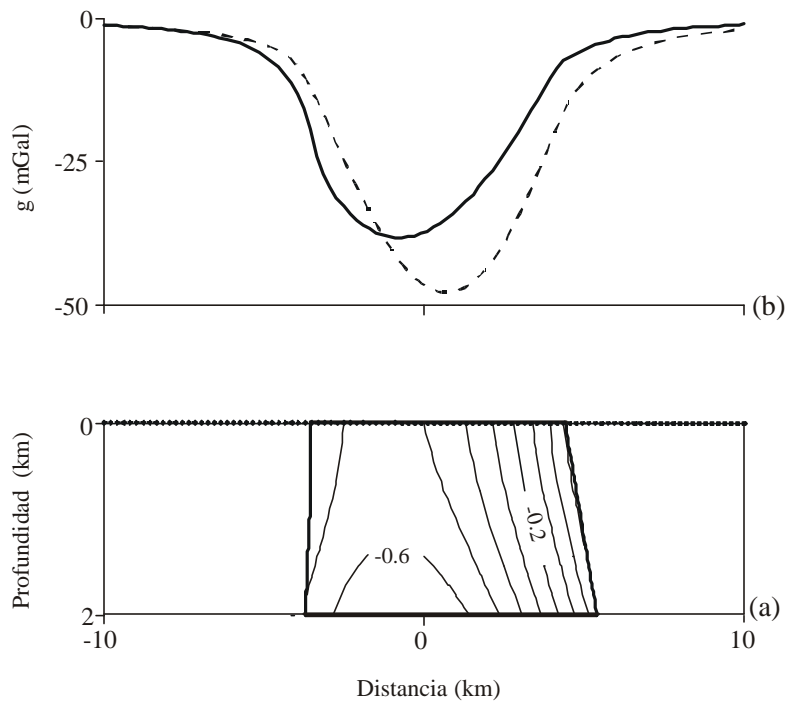


FIGURA 4.3. (a) Modelo resultante de fuente anómala obtenida en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas lateralmente por funciones continuas de la variable z . Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 . Los puntos en la frontera superior del cuerpo representan las posiciones del observador. (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a).

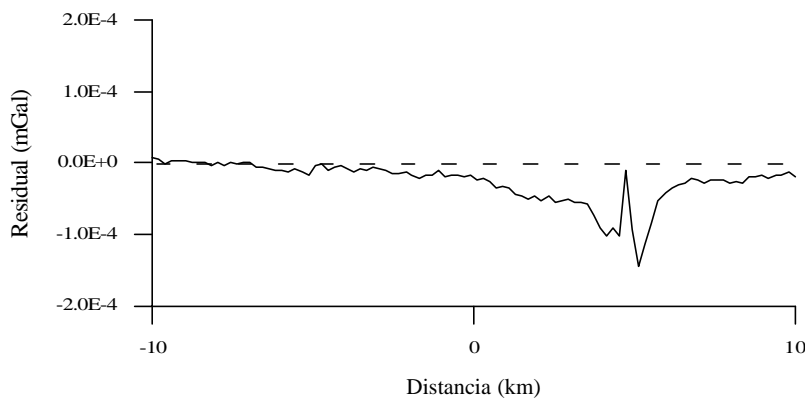


FIGURA 4.4. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad y la anomalía gravimétrica del modelo resultante.

En la tabla 4.1 se pueden comparar los parámetros que describen los contrastes de densidad del modelo inicial, del modelo resultante y del modelo sintético que se ha utilizado para generar los datos de gravedad. En esta tabla se puede apreciar que los parámetros del modelo resultante son iguales a los valores de estos mismos parámetros en el modelo sintético, considerando cuatro cifras decimales para dichos valores.

En la tabla 4.2 se pueden observar los parámetros que describen las estructuras de los tres modelos que intervienen en el proceso. Podemos ver que los parámetros que definen la frontera $f_1(z)$ y la frontera inferior del modelo resultante alcanzan prácticamente los mismos valores que los parámetros del modelo sintético con algunas pequeñas variaciones. En cuanto a los parámetros de la frontera $f_2(z)$, los valores de p_{12} , p_{13} y p_{14} presentan diferencias entre el modelo resultante y el sintético, siendo el p_{13} el parámetro peor ajustado con un error relativo del 3.85%. Estas variaciones en los parámetros de la estructura son debidos, probablemente, a errores numéricos producidos en el proceso de inversión, ya que los errores generados en el cálculo de los datos son prácticamente nulos.

DENSIDAD	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
Modelo Inicial	-0.5000	0.0500	-0.0300	-0.0100	0.0200	-0.0300
Modelo Resultante	-0.7000	0.0000	0.0000	-0.0500	0.0400	0.0600
Modelo Sintético	-0.7000	0.0000	0.0000	-0.0500	0.0400	0.0600

TABLA 4.1. Parámetros de los contrastes de densidad correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

ESTRUC- TURA	FRONTERA $f_1(z)$				FRONTERA $f_2(z)$				z_2
	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
Modelo Inicial	-3.5000	0.0300	-0.1000	0.0200	4.4000	0.5000	0.0000	0.0000	2.0000
Modelo Resultante	-4.0000	-0.0702	0.3003	0.0100	4.5003	0.4963	-0.1923	-0.0025	3.0000
Modelo Sintético	-4.0000	-0.0700	0.3000	0.0100	4.5000	0.5000	-0.2000	0.0000	3.0000

TABLA 4.2. Parámetros de las estructuras correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

4.1.1.1 Evolución de los parámetros del modelo

La evolución del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} a lo largo de todo el proceso iterativo se muestra en la figura 4.5, donde se puede ver que para la última iteración el valor de este parámetro es cero. También se puede observar que las variaciones que sufre este parámetro son muy parecidas a las variaciones que presenta el desajuste en la figura 4.2. Esto es debido a que el valor de \mathbf{b}^{-1} en una iteración $k + 1$ depende del valor del desajuste en la iteración anterior k , de manera que si el desajuste obtenido es mayor que el desajuste de la iteración anterior, el factor de amortiguación para la iteración $k + 1$ es $\mathbf{b}^{-1} = 1.5 q$, y si es menor entonces el factor de amortiguación para $k + 1$ será $\mathbf{b}^{-1} = \frac{q}{2}$. Esta elección es debida a que, si el modelo resultante en una iteración se aleja de la solución buscada, se aumenta el factor de amortiguación para que el método de Marquardt-Levenberg actúe de manera parecida al método de los gradientes y así se aprovechen las ventajas que proporciona dicho método. Si el resultado de dicha iteración se acerca a la solución esperada, se disminuye el factor de amortiguación para que el método de Marquardt-Levenberg actúe como el método de Gauss-Newton y así facilitar la convergencia hacia la solución buscada.

En la figura 4.6 se puede observar la evolución de los parámetros que describen el contraste de densidad de la fuente a lo largo de todo el proceso, desde el modelo inicial hasta el resultante. En la figura 4.7 se representan los parámetros de la frontera izquierda y en la figura 4.8 los de la frontera derecha. La evolución de la profundidad de la frontera inferior del cuerpo se puede ver en la figura 4.9. De estas cuatro gráficas se desprende que los parámetros del contraste de densidad alcanzan la convergencia antes que los parámetros que definen la estructura y, de estos últimos, los parámetros p_{12} y p_{13} alcanzan el valor esperado en la última iteración.

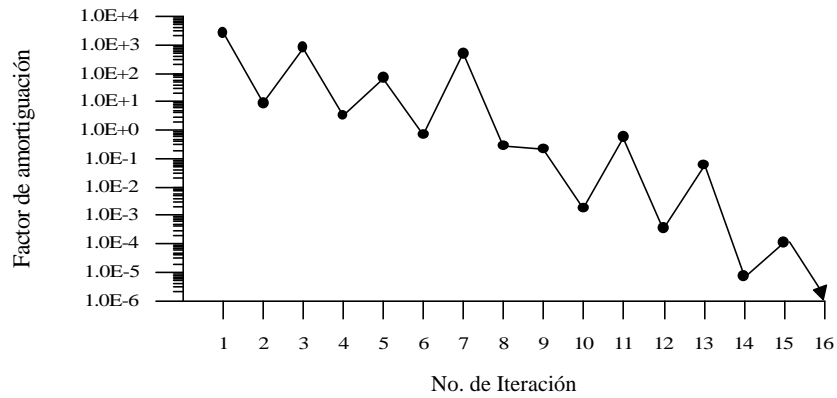


FIGURA 4.5. Evolución del factor de amortiguación b^{-1} .

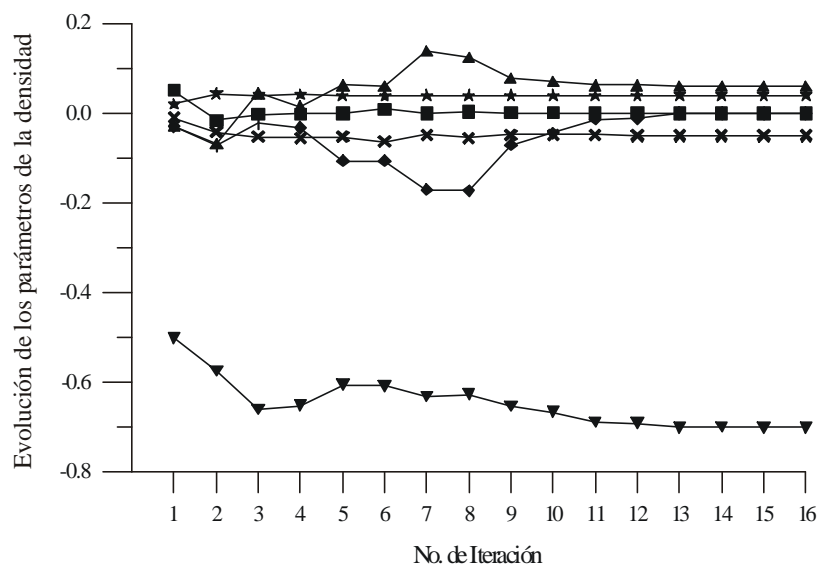


FIGURA 4.6. Evolución de los parámetros del contraste de densidad desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_1 (▼); p_2 (■); p_3 (◆); p_4 (✕); p_5 (★); p_6 (▲).

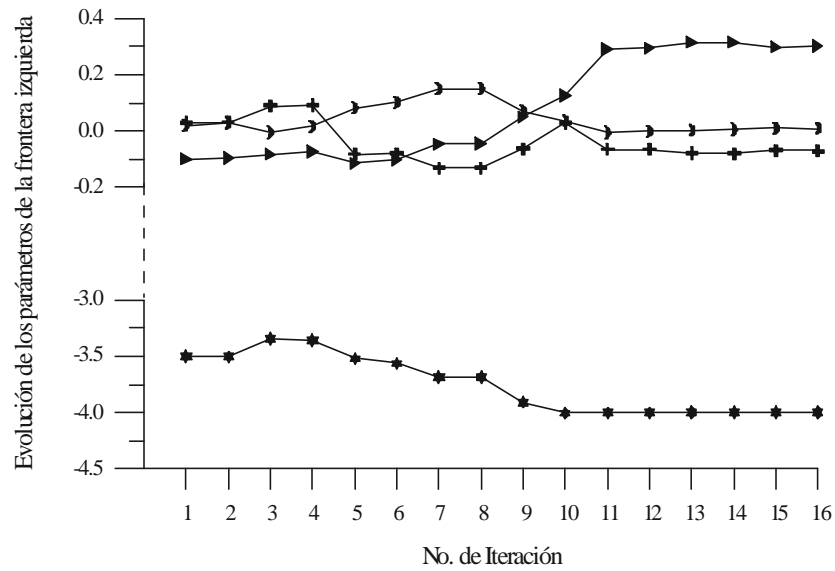


FIGURA 4.7. Evolución de los parámetros de la frontera izquierda desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_7 (★); p_8 (+); p_9 (▶); p_{10} (◼).

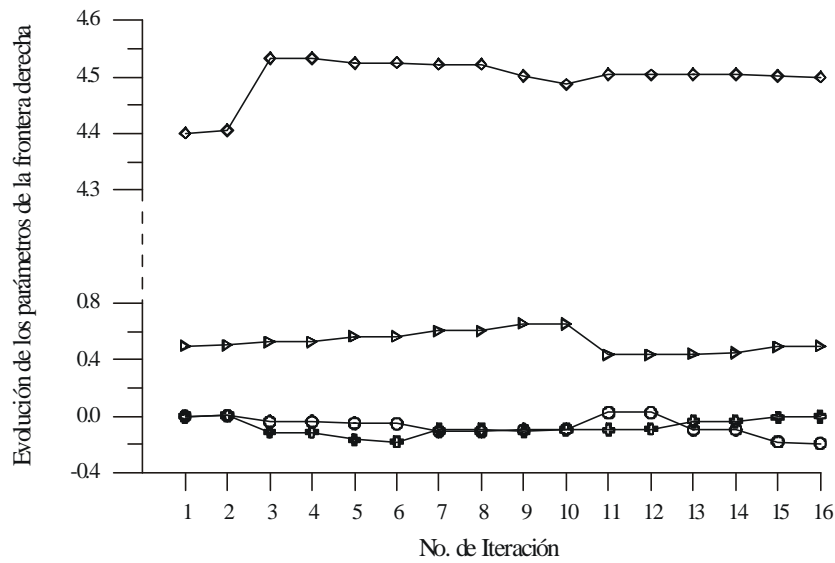


FIGURA 4.8. Evolución de los parámetros de la frontera derecha desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre símbolos y los parámetros son: p_{11} (◇); p_{12} (▷); p_{13} (○); p_{14} (+).

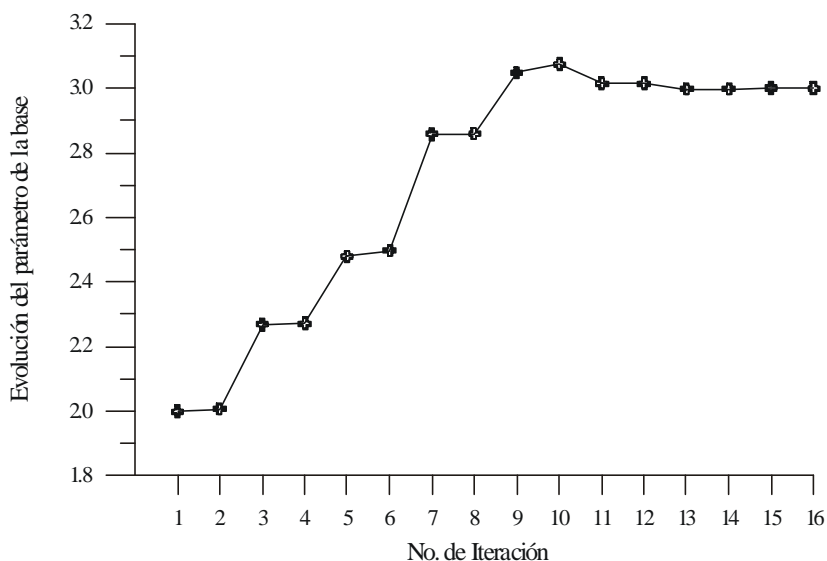


FIGURA 4.9. Evolución del parámetro de la frontera inferior desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión.

4.1.1.2 Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

A continuación vamos a analizar la sensibilidad de los datos de gravedad con respecto a los parámetros de la fuente, graficando los vectores columna del operador jacobiano J .

En la figura 4.10 podemos observar las gráficas de las derivadas parciales del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los seis parámetros que describen el contraste de densidad de la fuente. La gráfica (a) nos muestra la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_1 , cuya intensidad máxima es $95.8 \frac{\text{mGal}}{\text{g/cm}^3}$ en el centro del perfil. Esto indica que los datos situados en esta zona son los más sensibles a variaciones en el valor del parámetro p_1 , de forma que si el parámetro aumenta su valor se produce un aumento en la anomalía gravimétrica.

En la gráfica (b) podemos observar la derivada parcial de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_2 , que presenta dos picos de intensidad. Uno de ellos tiene una intensidad negativa de $-127.1 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$ y se encuentra cerca de la posición de la frontera izquierda del cuerpo, lo que indica que los datos gravimétricos situados en esta zona del perfil son sensibles a variaciones negativas del parámetro p_2 : cuando el valor del parámetro aumenta, su efecto hace disminuir la anomalía de la gravedad y viceversa. El otro pico de intensidad que aparece en esta gráfica se encuentra cercano a la posición de la frontera

derecha del cuerpo y presenta una intensidad positiva de $234.5 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$. Los datos situados en esta zona son sensibles a los cambios del parámetro p_2 de la densidad.

La gráfica (c) de la figura 4.10 nos muestra la representación gráfica de la derivada $\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_3}$, que presenta una intensidad máxima de $127.6 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$ y cuya interpretación es similar a la de la gráfica (a). La gráfica (d) tiene una forma similar a la (b) pero con valores de intensidad extremos de $-89.4 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y $267.1 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ para la derivada parcial de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_4 .

En la gráfica (e) de la figura 4.10, la derivada $\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_5}$ presenta dos picos de intensidad máxima situados aproximadamente en la localización de las fronteras laterales del cuerpo. El máximo situado a la izquierda presenta un valor de $456.0 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y el de la derecha tiene un valor de $890.9 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$.

Por último, la gráfica (f) tiene un máximo central de $238.0 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ para la derivada parcial del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_6 , con la misma interpretación que para la gráfica (a).

Comparando los valores absolutos de todos los máximos y mínimos de las seis gráficas llegamos a la conclusión de que el parámetro del contraste de densidad que mayor efecto tiene sobre la anomalía gravimétrica es el parámetro p_5 , y este efecto es mayor sobre la posición de las fronteras laterales del cuerpo anómalo. De la misma forma concluimos que el parámetro que menos afecta a la anomalía es el parámetro p_1 , que es el término independiente del polinomio que describe el contraste de densidad de la fuente.

Para estudiar el efecto de los parámetros que describen la frontera izquierda del cuerpo podemos observar el comportamiento de las cuatro gráficas de la figura 4.11. En la primera gráfica se puede ver la derivada parcial del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_7 . El pico de intensidad negativa es de -2.4 mGal/km y está situado sobre la frontera izquierda del cuerpo. La gráfica (b) también presenta un pico negativo de intensidad -3.6 mGal , situado en la misma zona, correspondiente a la derivada parcial del funcional con respecto a p_8 . Lo mismo ocurre con la gráfica (c) que presenta una intensidad negativa máxima de -6.6 mGal Km , y con la (d) que tiene un valor de -13.6 mGal km^2 . Como vemos, el parámetro más significativo de la frontera izquierda es el parámetro p_{10} y el menos significativo el p_7 .

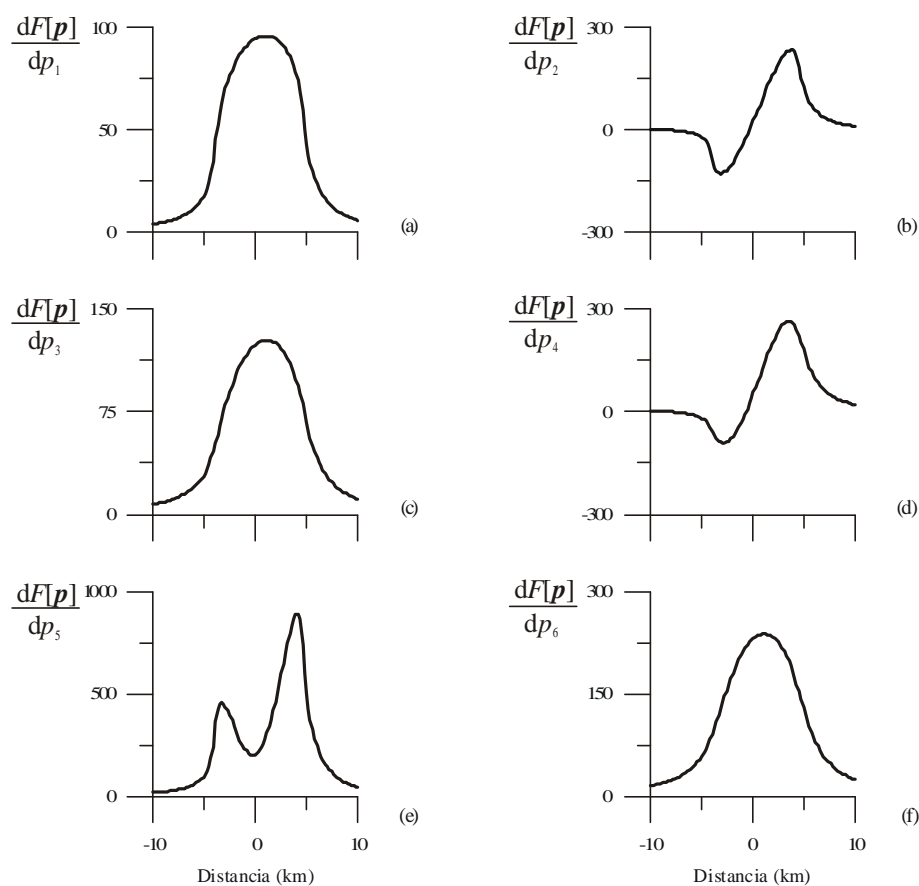


FIGURA 4.10. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen el contraste de densidad de la fuente.

La figura 4.12 nos da información del efecto que producen los parámetros de la frontera derecha sobre la anomalía gravimétrica. El efecto del parámetro p_{11} se puede estudiar en la gráfica (a), mediante la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto dicho parámetro. Como podemos observar, aparece un máximo de intensidad de 4 mGal km^{-1} sobre la frontera derecha. La gráfica (b) de la figura 4.12 nos presenta la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_{12} y tiene una forma peculiar. Tiende a presentar un mínimo de alrededor de -0.8 mGal sobre la localización de la frontera derecha del cuerpo, pero en medio del mínimo aparece un máximo local muy agudo de -0.1 mGal . Por último, en las gráficas (c) y (d) de la misma figura aparecen sendos picos de intensidad negativa de -2.4 mGal km y -6.6 mGal km^2 correspondientes a las derivadas de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_{13} y p_{14} , respectivamente. Observando las cuatro figuras anteriores, podemos decir que el parámetro de mayor efecto es el parámetro p_{14} y el de menor efecto el p_{12} .

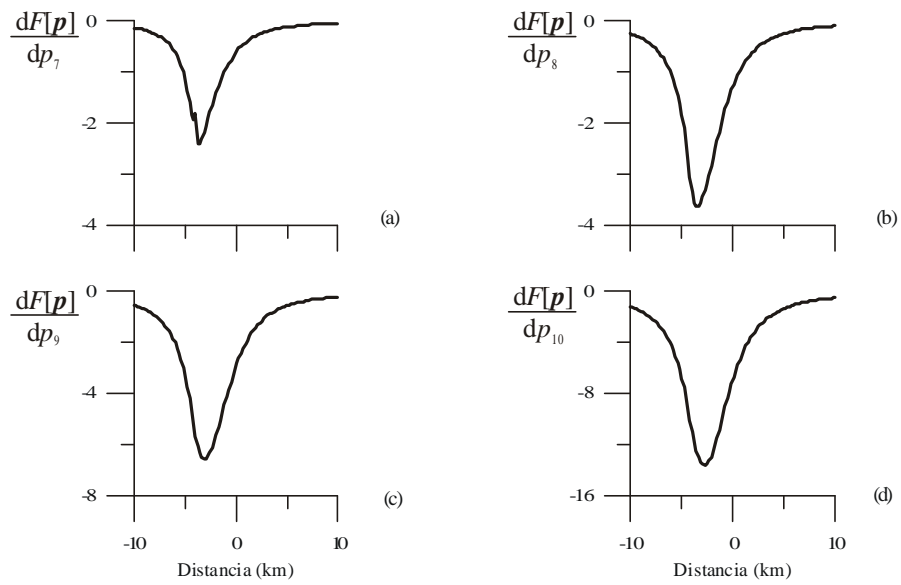


FIGURA 4.11. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera izquierda de la fuente.

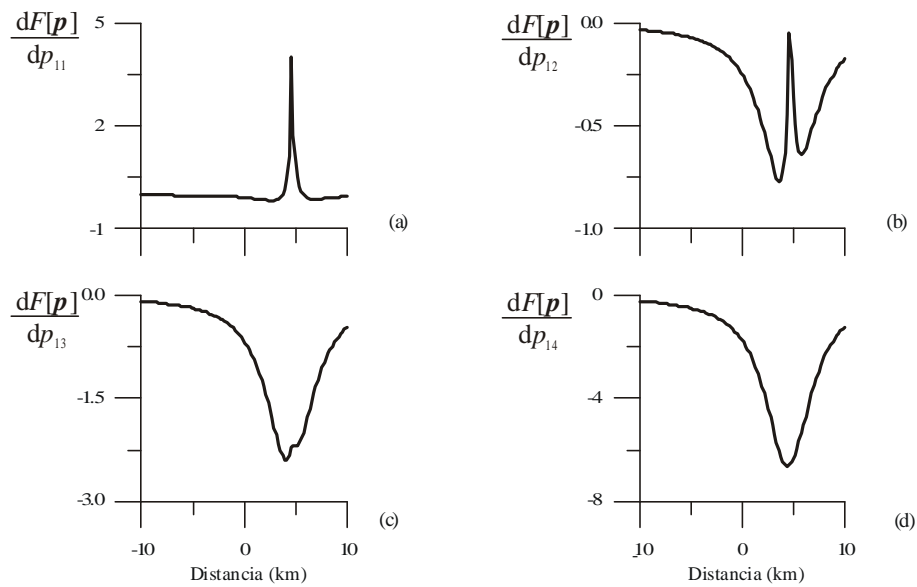


FIGURA 4.12. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera derecha de la fuente.

Por último, la figura 4.13 nos proporciona información acerca del efecto que ejerce la frontera inferior sobre la respuesta gravimétrica del cuerpo mediante la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_{15} . Como se puede ver en dicha figura, aparece un máximo negativo de -4.2 mGal km⁻¹ de intensidad casi centrado en la posición del cuerpo, aunque desviado ligeramente hacia la derecha.

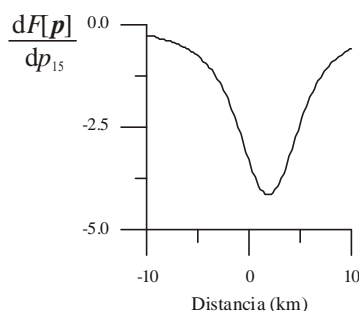


FIGURA 4.13. Representación gráfica de la columna del jacobiano correspondiente a la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto al parámetro que define la frontera inferior de la fuente.

Con todo esto podemos concluir que, para el ejemplo propuesto, la respuesta gravimétrica del cuerpo anómalo es más sensible a variaciones en los valores de la mayoría los parámetros que definen el contraste de densidad que a variaciones sufridas por los parámetros que definen la estructura geométrica del cuerpo. En cuanto a esta última, podemos decir que cambios en la frontera inferior producirán pequeños efectos en la respuesta gravimétrica general del cuerpo y que la frontera izquierda tiene un efecto mayor que la frontera derecha. Esta es una de las razones por las que los parámetros de $f_1(z)$ quedan mejor determinados en el proceso de inversión que los parámetros de $f_2(z)$. Esto es debido a que, como se desprende de las figuras 4.11 y 4.12, la zona del perfil que presenta valores significativos de sensibilidad de los datos con respecto al efecto de la frontera izquierda es más ancha que para la frontera derecha, pues el número de datos necesarios para calcular $f_1(z)$ está distribuido a lo largo de una zona más amplia del perfil. Esto se puede inferir también de la forma que presenta el cuerpo anómalo (figura 2.5(a)). La frontera izquierda presenta una pendiente más suave que la frontera derecha, ejerciendo influencia en una zona más amplia del perfil. Si queremos alcanzar un ajuste mejor para los parámetros que determinan $f_2(z)$, sería conveniente aumentar el número de datos en la zona del perfil correspondiente a dicha frontera.

Después de analizar la sensibilidad del problema, calculamos la descomposición en valores singulares del jacobiano. Los valores singulares vienen representados en la gráfica de la figura 4.14, donde se han colocado en orden de mayor a menor. Como se puede ver, se han obtenido 15 valores singulares distintos de cero, por lo que el rango del jacobiano es $\mathbf{h} = 15$ y coincide con el número de

columnas N de dicho operador. Esto implica que el subespacio V_0 no tiene ninguna componente, por lo que está asegurada la unicidad y la existencia de la solución del problema para un modelo inicial, independientemente de si el subespacio U_0 existe o no (Aki y Richards, 1980). Por otro lado, la condición de la matriz jacobiano, dada por la ecuación (1.45), es $k=3.062 \cdot 10^5$, que presenta un valor muy grande. De esto se deduce que, aunque no haya ningún valor singular nulo, se puede producir la propagación de las inestabilidades producidas en el cálculo de la solución del problema. Estas inestabilidades afectan a las combinaciones de parámetros asociadas a los valores singulares más pequeños, ya que se van a propagar en la dirección de los vectores característicos correspondientes en el espacio de los parámetros.

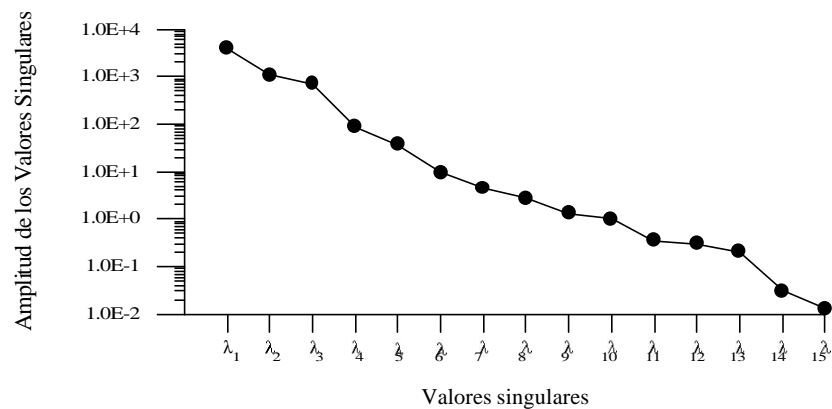


FIGURA 4.14. Valores singulares del jacobiano del problema.

En la tabla 4.3 se presentan las componentes de los vectores-columna traspuestos de la matriz V_h junto con los valores singulares correspondientes. Las filas de coeficientes proporcionan los pesos con los que los parámetros del modelo vienen incluidos en las combinaciones. En dicha tabla se han resaltado en color gris las componentes de los vectores v_i^T cuyo valor absoluto es mayor de 0.5, pues representan los parámetros que tienen mayor resolución dentro de cada combinación. Como se puede ver, los parámetros del contraste de densidad están presentes en las primeras cinco combinaciones, que corresponden a los valores singulares más elevados, siendo el parámetro mejor resuelto el p_5 . Los parámetros de la estructura se encuentran en las combinaciones de parámetros asociadas a los valores singulares más bajos. El parámetro p_{13} de la frontera derecha tiene el mayor peso en la última combinación, de lo que se deduce que éste es el parámetro peor resuelto en el proceso y el último que alcanza la solución, como se desprende de la tabla 4.2, en la que vemos que este parámetro se aleja más del valor dado en el modelo sintético que los demás.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	I_i
\mathbf{v}_1^T	1.284 10 ⁻¹	1.628 10 ⁻¹	1.689 10 ⁻¹	2.260 10 ⁻¹	8.829 10⁻¹	3.127 10 ⁻¹	-1.090 10 ⁻³	-1.995 10 ⁻³	-4.066 10 ⁻³	-9.008 10 ⁻³	3.138 10 ⁻⁴	-7.558 10 ⁻⁴	-2.517 10 ⁻³	-6.830 10 ⁻³	-5.098 10 ⁻³	3.956 10 ³
\mathbf{v}_2^T	-1.593 10 ⁻¹	6.621 10⁻¹	-1.802 10 ⁻¹	6.290 10⁻¹	-1.176 10 ⁻¹	-3.031 10 ⁻¹	6.206 10 ⁻³	1.067 10 ⁻²	2.051 10 ⁻²	4.325 10 ⁻²	8.133 10 ⁻⁴	-5.602 10 ⁻⁴	-2.376 10 ⁻³	-6.599 10 ⁻³	1.437 10 ⁻³	1.090 10 ³
\mathbf{v}_3^T	2.643 10 ⁻¹	1.846 10 ⁻¹	3.710 10 ⁻¹	2.346 10 ⁻¹	-4.535 10 ⁻¹	7.054 10⁻¹	1.141 10 ⁻³	5.939 10 ⁻⁴	-1.379 10 ⁻³	-7.212 10 ⁻³	-1.913 10 ⁻³	-7.859 10 ⁻⁴	-7.996 10 ⁻⁴	-1.570 10 ⁻³	-1.155 10 ⁻²	7.109 10 ²
\mathbf{v}_4^T	-3.585 10 ⁻¹	-6.565 10⁻¹	-9.506 10⁻²	6.333 10⁻¹	-1.890 10 ⁻²	1.327 10 ⁻¹	-5.198 10 ⁻³	-6.449 10 ⁻³	-7.669 10 ⁻³	-8.928 10 ⁻³	1.851 10 ⁻³	-1.123 10 ⁻²	-3.768 10 ⁻²	-1.024 10 ⁻¹	-1.552 10 ⁻²	8.922 10 ¹
\mathbf{v}_5^T	7.688 10⁻¹	-2.598 10 ⁻¹	1.322 10 ⁻¹	2.916 10 ⁻¹	-1.954 10 ⁻²	-3.963 10 ⁻¹	3.674 10 ⁻²	5.975 10 ⁻²	1.115 10 ⁻¹	2.315 10 ⁻¹	-1.338 10 ⁻²	7.928 10 ⁻³	3.412 10 ⁻²	9.492 10 ⁻²	1.320 10 ⁻²	3.742 10 ¹
\mathbf{v}_6^T	-1.270 10 ⁻¹	4.392 10 ⁻²	2.590 10 ⁻²	-1.037 10 ⁻¹	1.202 10 ⁻²	7.147 10 ⁻²	2.171 10 ⁻¹	2.874 10 ⁻¹	4.040 10 ⁻¹	6.298 10⁻¹	1.515 10 ⁻¹	-1.502 10 ⁻²	-1.609 10 ⁻¹	-4.721 10 ⁻¹	6.129 10 ⁻²	9.542 10 ⁰
\mathbf{v}_7^T	1.374 10 ⁻¹	1.519 10 ⁻²	-3.540 10 ⁻¹	-2.278 10 ⁻²	1.585 10 ⁻³	1.355 10 ⁻¹	1.731 10 ⁻²	2.039 10 ⁻²	2.870 10 ⁻²	4.726 10 ⁻²	-8.573 10⁻¹	-2.254 10 ⁻¹	-1.328 10 ⁻¹	-1.539 10 ⁻¹	-7.638 10 ⁻²	4.470 10 ⁰
\mathbf{v}_8^T	-2.210 10 ⁻¹	-4.651 10 ⁻⁴	7.543 10⁻¹	1.473 10 ⁻²	-4.550 10 ⁻³	-3.224 10 ⁻¹	6.286 10 ⁻²	5.651 10 ⁻²	-2.050 10 ⁻²	-2.036 10 ⁻¹	-3.563 10 ⁻¹	-4.855 10 ⁻²	-8.441 10 ⁻²	-2.363 10 ⁻¹	1.914 10 ⁻¹	2.735 10 ⁰
\mathbf{v}_9^T	1.356 10 ⁻¹	2.031 10 ⁻²	-5.759 10 ⁻⁴	-8.293 10 ⁻³	-7.894 10 ⁻³	-5.877 10 ⁻²	-5.109 10⁻¹	-4.566 10 ⁻¹	-3.052 10 ⁻¹	1.050 10 ⁻¹	1.626 10 ⁻¹	-1.260 10 ⁻¹	-2.443 10 ⁻¹	-5.453 10⁻¹	-6.828 10 ⁻²	1.320 10 ⁰
\mathbf{v}_{10}^T	-2.119 10 ⁻¹	-4.059 10 ⁻³	1.500 10 ⁻¹	-2.011 10 ⁻²	9.132 10 ⁻³	2.464 10 ⁻²	-3.702 10 ⁻¹	-2.807 10 ⁻¹	5.746 10 ⁻⁴	5.909 10⁻¹	-2.620 10 ⁻¹	2.564 10 ⁻¹	2.587 10 ⁻¹	3.640 10 ⁻¹	1.809 10 ⁻¹	9.888 10 ⁻¹
\mathbf{v}_{11}^T	8.213 10 ⁻²	-3.879 10 ⁻³	-1.773 10 ⁻¹	1.240 10 ⁻²	-2.137 10 ⁻³	7.179 10 ⁻²	2.524 10 ⁻¹	-2.359 10 ⁻¹	-9.425 10 ⁻²	-3.095 10 ⁻²	6.141 10 ⁻²	-1.368 10 ⁻¹	-7.619 10 ⁻²	-7.475 10 ⁻³	8.938 10⁻¹	3.510 10 ⁻¹
\mathbf{v}_{12}^T	-1.789 10 ⁻²	3.219 10 ⁻³	5.600 10 ⁻²	-5.303 10 ⁻³	1.589 10 ⁻⁴	-2.599 10 ⁻²	6.936 10⁻¹	-4.755 10 ⁻¹	-3.390 10 ⁻¹	1.976 10 ⁻¹	-4.590 10 ⁻²	1.807 10 ⁻¹	6.958 10 ⁻²	-7.455 10 ⁻²	-2.992 10 ⁻¹	3.040 10 ⁻¹
\mathbf{v}_{13}^T	1.205 10 ⁻¹	2.449 10 ⁻³	-1.507 10 ⁻¹	7.945 10 ⁻³	-4.020 10 ⁻³	2.855 10 ⁻²	-6.454 10 ⁻²	1.384 10 ⁻¹	-2.729 10 ⁻²	-1.999 10 ⁻¹	-1.138 10 ⁻¹	7.915 10⁻¹	2.661 10 ⁻¹	-4.064 10 ⁻¹	1.498 10 ⁻¹	2.065 10 ⁻¹
\mathbf{v}_{14}^T	-6.079 10 ⁻³	-7.739 10 ⁻⁵	-3.521 10 ⁻³	-7.623 10 ⁻⁴	3.191 10 ⁻⁴	6.358 10 ⁻³	-1.315 10 ⁻²	5.650 10⁻¹	-7.746 10⁻¹	2.511 10 ⁻¹	9.869 10 ⁻³	-9.252 10 ⁻²	6.240 10 ⁻²	6.505 10 ⁻³	6.975 10 ⁻²	3.034 10 ⁻²
\mathbf{v}_{15}^T	3.880 10 ⁻³	1.667 10 ⁻⁴	-3.491 10 ⁻³	1.494 10 ⁻⁴	-1.390 10 ⁻⁴	-1.280 10 ⁻⁵	1.204 10 ⁻³	-5.187 10 ⁻²	7.038 10 ⁻²	-2.743 10 ⁻²	3.035 10 ⁻²	-4.224 10 ⁻¹	8.572 10⁻¹	-2.782 10 ⁻¹	-4.605 10 ⁻³	1.292 10 ⁻²

TABLA 4.3. Componentes de los vectores característicos de la matriz \mathbf{V}_n y los valores singulares asociados.

En la figura 4.15 se pueden comparar, para cada valor singular I_i , los correspondientes vectores característicos del espacio de los datos U_h y del espacio de los parámetros V_h . Con ello, se puede tener una idea acerca de qué conjunto de datos es mejor para resolver una determinada combinación de parámetros.

Para el valor singular más grande $I_1 = 3.956 \cdot 10^3$, la combinación de parámetros mejor resuelta corresponde a los parámetros que definen el contraste de densidad de la fuente. El mayor peso recae en los parámetros p_5 y p_6 , que son los que han sido resueltos más rápidamente en el proceso iterativo y pueden presentar correlación entre sí. Como se observa en la figura 4.15, los datos que participan en su resolución pertenecen a la parte central del perfil donde se encuentra situado el cuerpo anómalo, pero sobre todo tienen más efecto los datos que se encuentran sobre la localización de los bordes laterales de la estructura. Esto es debido a que el efecto de p_5 sobre la anomalía gravimétrica es mayor en estas dos posiciones del perfil, como se desprende de la figura 4.10(e) de la matriz de sensibilidad. Los elementos del vector característico v_1 , correspondientes a las posiciones de los seis parámetros del contraste de densidad, son todos positivos, lo mismo que los elementos del vector u_1 que corresponden a los datos que participan en la resolución de esta combinación de parámetros. Esto quiere decir que si hay un aumento en los valores de los parámetros del contraste de densidad, esto afectará a la anomalía gravimétrica con un incremento importante en la magnitud de la misma. Los parámetros que participan en esta combinación tienen muy buena resolución, son los más exactos y los que más rápidamente se determinan mediante el proceso de inversión iterativo.

El siguiente valor singular en tamaño es $I_2 = 1.090 \cdot 10^3$. En la figura 4.15 se observa que la combinación de parámetros dada por el vector v_2 corresponde también a los parámetros del contraste de densidad. Los datos responsables de su resolución se encuentran también en la parte del perfil de gravedad ocupada por la fuente, pero con predominio de los datos situados cerca de las fronteras de la misma. En este caso, los elementos de v_2 correspondientes a los parámetros p_2 y p_4 son positivos y tienen mayor magnitud, mientras que los elementos de este vector, correspondientes a las posiciones de p_1, p_3, p_5 y p_6 , son negativos y de menor magnitud que los otros dos. Según esta combinación, un aumento en las magnitudes de p_2 y p_4 , junto con una disminución de los otros cuatro parámetros de la densidad, tendrán un efecto importante en la anomalía, aunque el efecto será menor que el proporcionado por la combinación dada por v_1 ya que esta última está asociada a un valor singular mayor. Los valores de los elementos del vector u_2 correspondientes a la parte izquierda del perfil de datos son negativos y en la otra parte son positivos, siendo los valores de la parte negativa mayores en magnitud. Si ahora observamos las gráficas (b) y (d) de la figura 4.10, vemos que un aumento de p_2 y p_4 significa un decremento de la magnitud de la anomalía en la parte izquierda del perfil y un incremento en la derecha, por otro lado una disminución de los otros cuatro parámetros produce un decremento en la magnitud de la anomalía gravimétrica.

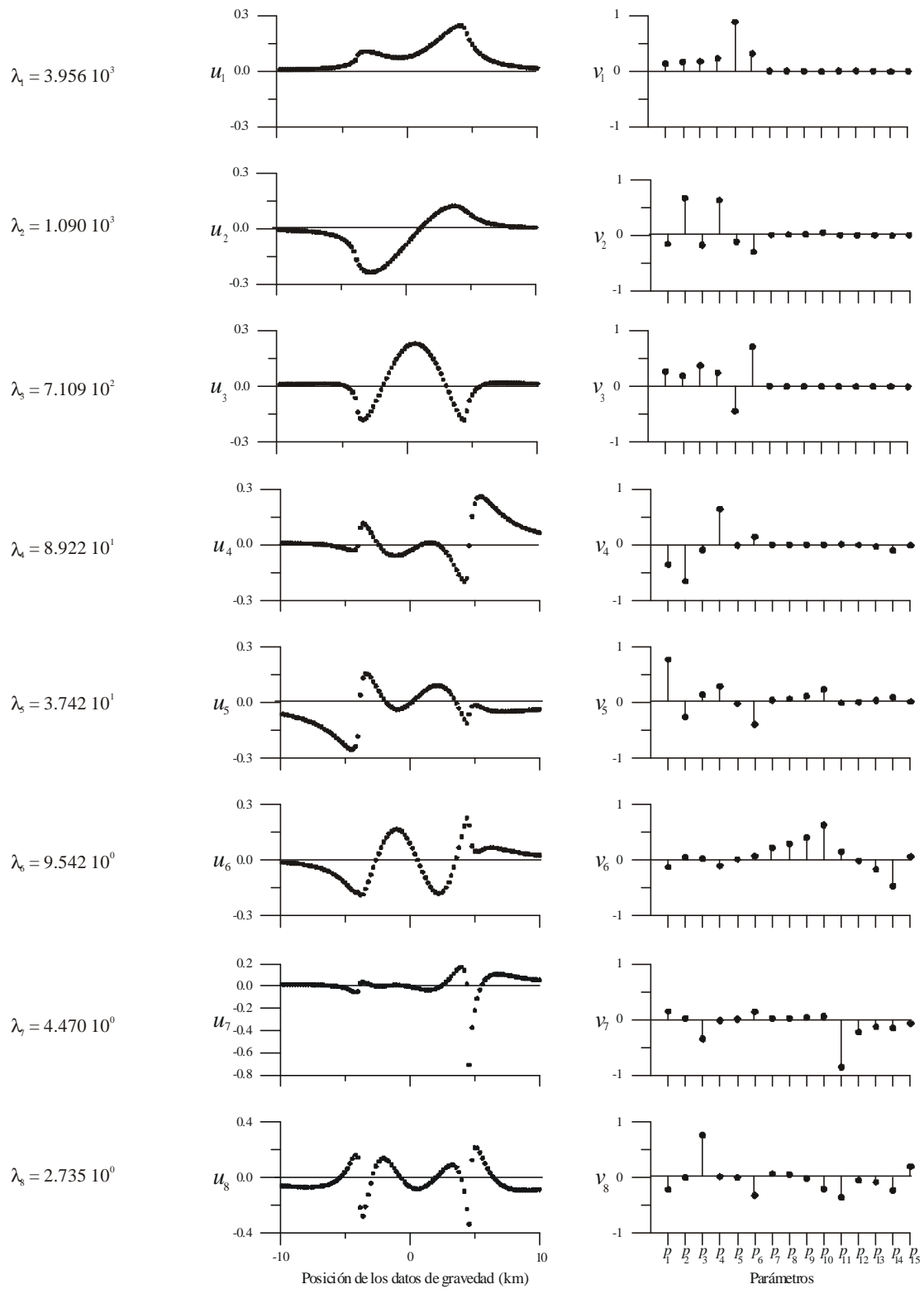


FIGURA 4.15. Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

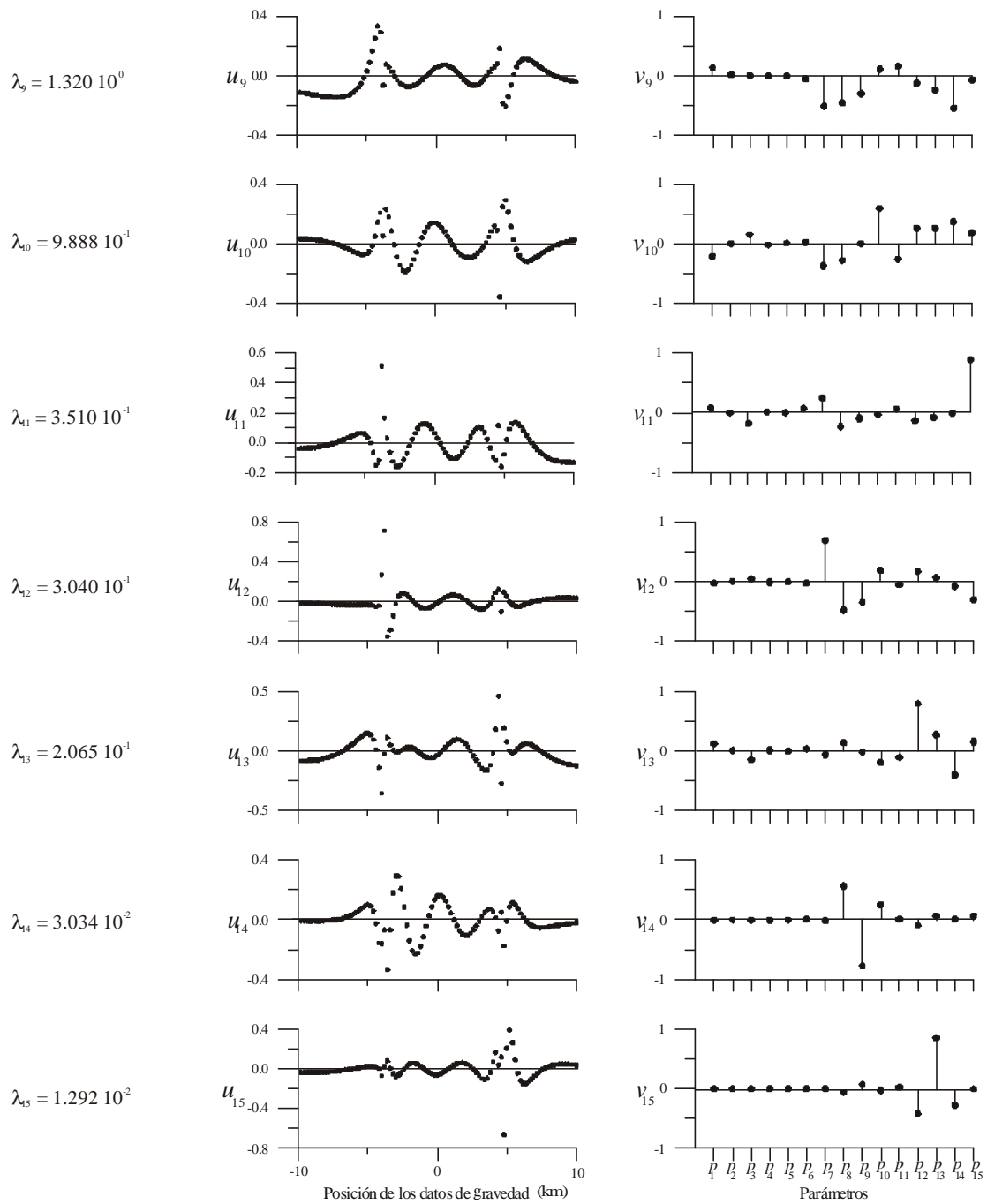


FIGURA 4.15 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

En las combinaciones de parámetros asociadas a los siguientes tres valores singulares también están presentes todos los parámetros del contraste de densidad. Según esto, el modelo resultante presenta una buena resolución en estos parámetros a partir de la información proporcionada por los datos de gravedad y, además, puede existir una fuerte correlación entre ellos.

En la sexta combinación aparecen todos los parámetros que determinan la frontera izquierda del cuerpo y parte de los de la derecha, siendo el parámetro p_{10} el que presenta mayor resolución. Esta combinación está asociada al valor singular $I_6 = 9.542 \cdot 10^0$. Los datos de gravedad que participan en la resolución de estos parámetros se encuentran repartidos en la zona del perfil que se encuentra sobre el cuerpo, como se observa en la figura 4.15.

El séptimo valor singular en tamaño es $I_7 = 4.470 \cdot 10^0$. En esta combinación los parámetros de mayor peso son los relacionados con la frontera derecha. El parámetro p_{11} es el que tiene mayor peso y es el que antes se resuelve en el proceso de inversión. Por ello, como se ve en la figura 4.15, los datos que resuelven esta combinación se encuentran sobre la frontera derecha del cuerpo.

Para la siguiente combinación, dada por el vector \mathbf{v}_8 , el valor singular es $I_8 = 2.735 \cdot 10^0$. Se puede ver que las componentes con mayor peso en esta combinación pertenecen tanto a la densidad como a la estructura de la fuente. Aquí hay que destacar que el parámetro p_{15} , el que nos proporciona la frontera inferior del cuerpo, comienza a destacar, aunque con un peso pequeño en comparación a los otros parámetros pertenecientes a esta combinación. De hecho, su valor dependerá de los valores tomados por los parámetros que presentan mayor peso, como el p_3 , el p_6 y el p_{11} . Esta información, junto con la gráfica de sensibilidad de los datos dada por la figura 4.13, nos dice que cualquier cambio en este parámetro afectará de manera poco significativa a la anomalía gravimétrica.

El valor singular $I_9 = 1.320 \cdot 10^0$ está asociado a la combinación de parámetros dada por el vector característico \mathbf{v}_9 . Estos parámetros corresponden a las fronteras izquierda y derecha, siendo los parámetros con mayor peso el p_7 y el p_{14} . Vemos cómo las componentes del vector \mathbf{u}_9 que tienen mayor participación en la resolución de estos parámetros se encuentran situadas sobre la posición de dichas fronteras en el perfil de datos.

Las combinaciones de parámetros correspondientes a los tres valores singulares siguientes están formadas por los parámetros que definen la estructura geométrica de la fuente. Los correspondientes vectores característicos en el espacio de los datos, presentan formas complejas y sus componentes más significativas se encuentran repartidos sobre la posición de la fuente.

Las tres últimas combinaciones de parámetros son aquellas que presentan peor resolución en sus parámetros, ya que están asociadas a los valores singulares más pequeños, por lo que los parámetros correspondientes son más susceptibles de presentar inestabilidades numéricas producidas durante el proceso. En la combinación dada por el vector \mathbf{v}_{13} el parámetro con mayor peso es el p_{12} . Este es uno de los parámetros que presenta variaciones numéricas importantes en su solución, como se ve en la tabla 4.2. En la combinación asociada a \mathbf{v}_{14} los parámetros de mayor peso son el p_8 y el p_9 .

Comparando con la combinación anterior, podríamos decir que estos parámetros quedan peor resueltos que el p_{12} , pero si vemos la tabla 4.2, vemos que no es así. Esto es debido a que los parámetros p_8 y p_9 tienen pesos importantes en combinaciones anteriores, como se desprende de la figura 4.15 y de la tabla 4.3. Esto no ocurre con el parámetro p_{12} , con lo que podemos concluir que este parámetro tiene peor resolución que los otros dos. La última combinación está asociada al valor singular más pequeño $I_{15} = 1.292 \cdot 10^{-2}$. El parámetro más importante en esta combinación es el p_{13} . Este parámetro es el peor resuelto en el proceso de inversión y el más susceptible de presentar inestabilidades.

Como conclusión de lo anteriormente descrito, se puede decir que las quince combinaciones de parámetros presentan estabilidad. La inestabilidad numérica inherente al proceso de inversión es muy pequeña y se propaga en la dirección de los vectores característicos asociados a los valores singulares más pequeños. No tiene sentido quitar ninguna de esas combinaciones en el afán de eliminar las inestabilidades, porque se perdería información importante indispensable para la resolución del problema que nos ocupa.

4.1.1.3. Resolución de los parámetros

La matriz de resolución \mathbf{R} coincide exactamente con la matriz identidad para este caso, ya que el valor del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} es cero y se cumple la relación $\mathbf{R} = \mathbf{V}_h \mathbf{V}_h^T = \mathbf{I}$. Como ya vimos en el Capítulo I, esto nos está diciendo que se ha resuelto el problema satisfactoriamente, y que el estimador del vector de los parámetros $\hat{\mathbf{p}}^{k+1}$ debe coincidir con la solución verdadera del problema \mathbf{p} a través de la relación (1.51). No obstante, debido a la precisión de la máquina con la que se realizan los cálculos numéricos de la inversión, esta coincidencia puede no ser exacta, como vimos en las tablas 4.1 y 4.2. Para ver esto vamos a analizar la matriz de covarianza de los parámetros para este problema.

4.1.1.4. Covarianza de los parámetros

La matriz de covarianza $\text{Cov}(\hat{\mathbf{p}})$ para este caso se calcula a partir de la expresión (1.60), donde la varianza residual, dada por la ecuación (1.56), es $\hat{\mathbf{S}}^2 = 1.8 \cdot 10^{-9} \text{ mGal}^2$, que como vemos es casi cero, lo mismo que la varianza de los datos del problema. Por otro lado, el factor de amortiguación utilizado para calcular el modelo resultante es $\mathbf{b}^{-1} = 0.0$, por lo que los valores numéricos de los elementos de esta matriz van a ser casi cero, como se puede ver en la tabla 4.4.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
1.069 10⁻⁹	1.890 10 ⁻¹¹	-1.206 10 ⁻⁹	7.857 10 ⁻¹¹	-3.713 10 ⁻¹¹	1.648 10 ⁻¹⁰	8.757 10 ⁻¹²	-8.256 10 ⁻⁹	1.197 10 ⁻⁸	-5.461 10 ⁻⁹	7.955 10 ⁻¹⁰	-1.288 10 ⁻⁸	3.621 10 ⁻⁸	-1.396 10 ⁻⁸	8.263 10 ⁻¹⁰	p_1
	1.686 10⁻¹²	-9.473 10 ⁻¹²	-1.672 10 ⁻¹³	-7.941 10 ⁻¹³	-4.753 10 ⁻¹²	1.892 10 ⁻¹¹	-1.880 10 ⁻¹⁰	2.188 10 ⁻¹⁰	-9.546 10 ⁻¹¹	3.927 10 ⁻¹¹	-6.487 10 ⁻¹⁰	1.559 10 ⁻⁹	-5.617 10 ⁻¹⁰	-7.562 10 ⁻¹¹	p_2
		1.825 10⁻⁹	-9.098 10 ⁻¹¹	3.597 10 ⁻¹¹	-4.953 10 ⁻¹⁰	4.679 10 ⁻¹⁰	-2.795 10 ⁻⁹	2.729 10 ⁻⁹	9.961 10 ⁻¹⁰	-8.050 10 ⁻¹⁰	1.211 10 ⁻⁸	-3.404 10 ⁻⁸	1.301 10 ⁻⁸	-3.815 10 ⁻⁹	p_3
			8.163 10⁻¹²	-2.776 10 ⁻¹²	1.366 10 ⁻¹¹	-8.195 10 ⁻¹²	-8.591 10 ⁻¹⁰	1.279 10 ⁻⁹	-5.365 10 ⁻¹⁰	2.035 10 ⁻¹¹	-3.281 10 ⁻¹⁰	1.348 10 ⁻⁹	-5.958 10 ⁻¹⁰	1.263 10 ⁻¹⁰	p_4
				1.384 10⁻¹²	-1.889 10 ⁻¹²	-6.870 10 ⁻¹²	4.117 10 ⁻¹⁰	-5.796 10 ⁻¹⁰	2.428 10 ⁻¹⁰	-2.747 10 ⁻¹¹	4.506 10 ⁻¹⁰	-1.281 10 ⁻⁹	5.003 10 ⁻¹⁰	-4.488 10 ⁻¹³	p_5
					2.336 10⁻¹⁰	-3.181 10 ⁻¹⁰	7.204 10 ⁻⁹	-9.579 10 ⁻⁹	2.790 10 ⁻⁹	6.470 10 ⁻¹¹	-3.526 10 ⁻¹⁰	8.939 10 ⁻¹⁰	-2.752 10 ⁻¹⁰	2.134 10 ⁻⁹	p_6
						1.136 10⁻⁸	-2.244 10 ⁻⁸	1.614 10 ⁻⁸	-4.173 10 ⁻⁹	1.430 10 ⁻¹⁰	-3.431 10 ⁻⁹	9.405 10 ⁻⁹	-3.672 10 ⁻⁹	-3.093 10 ⁻⁹	p_7
							6.597 10⁻⁷	-8.917 10 ⁻⁷	2.896 10 ⁻⁷	-6.459 10 ⁻⁹	1.372 10 ⁻⁷	-4.091 10 ⁻⁷	1.611 10 ⁻⁷	8.015 10 ⁻⁸	p_8
								1.229 10⁻⁶	-4.023 10 ⁻⁷	8.371 10 ⁻⁹	-1.821 10 ⁻⁷	5.551 10 ⁻⁷	-2.197 10 ⁻⁷	-1.085 10 ⁻⁷	p_9
									1.346 10⁻⁷	-3.623 10 ⁻⁹	7.379 10 ⁻⁸	-2.245 10 ⁻⁷	8.893 10 ⁻⁸	3.298 10 ⁻⁸	p_{10}
										1.101 10⁻⁸	-1.442 10 ⁻⁷	2.801 10 ⁻⁷	-8.909 10 ⁻⁸	8.059 10 ⁻¹¹	p_{11}
											1.967 10⁻⁶	-3.904 10 ⁻⁶	1.252 10 ⁻⁶	1.060 10 ⁻⁸	p_{12}
												7.931 10⁻⁶	-2.574 10 ⁻⁶	-3.366 10 ⁻⁸	p_{13}
													8.418 10⁻⁷	1.261 10 ⁻⁸	p_{14}
														2.418 10⁻⁸	p_{15}

TABLA 4.4. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	FRONTERA $f_1(z)$	FRONTERA $f_2(z)$	FRONT. INFERIOR
$p_1 = -0.69998 \pm 0.00008 \text{ g/cm}^3$	$p_7 = -4.000 \pm 0.003 \text{ km}$	$p_{11} = 4.5003 \pm 0.0003 \text{ km}$	$p_{15} = 3.0000 \pm 0.0004 \text{ km}$
$p_2 = 0.000002 \pm 0.000003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_8 = -0.070 \pm 0.002$	$p_{12} = 0.496 \pm 0.004$	
$p_3 = 0.0000 \pm 0.0001 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_9 = 0.300 \pm 0.003 \text{ km}^{-1}$	$p_{13} = -0.192 \pm 0.007 \text{ km}^{-1}$	
$p_4 = -0.050000 \pm 0.000007 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{10} = 0.010 \pm 0.001 \text{ km}^{-2}$	$p_{14} = -0.003 \pm 0.002 \text{ km}^{-2}$	
$p_5 = 0.039999 \pm 0.000003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$			
$p_6 = 0.06000 \pm 0.00004 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$			

TABLA 4.5. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

En la tabla 4.5, las incertidumbres de los parámetros se han calculado a partir de la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza, donde se ha supuesto un intervalo de confianza $\pm 2.58 \mathbf{s}$, esto es, la solución para cada parámetro tiene una probabilidad de existir del 99%.

4.1.1.5. Correlación entre los parámetros

La matriz de correlación de este ejemplo se ha calculado a partir de la matriz de covarianza mediante la expresión (1.64). Una imagen de esta matriz se puede ver en la figura 4.16 y en la tabla 4.6 se pueden ver los valores numéricos de sus elementos. Como se puede ver, los parámetros de la densidad presentan, en general, una fuerte correlación entre sí. También presentan correlación entre sí los parámetros p_8 , p_9 y p_{10} , de la frontera izquierda, así como los cuatro parámetros de la frontera derecha. El parámetro p_{15} de la frontera inferior presenta una fuerte correlación con el parámetro p_6 del contraste de densidad y correlación más débil con p_8 , p_9 y p_{10} de la frontera izquierda. El único parámetro que no tiene correlaciones importantes es el término independiente del polinomio de la frontera izquierda, esto es, el parámetro p_7 . La existencia de estas correlaciones ya fue observada al analizar las combinaciones de parámetros dadas por las columnas de la matriz \mathbf{V}_h y graficadas en la figura 4.15.



FIGURA 4.32. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
1.000 10⁺⁰	4.452 10 ⁻¹	-8.638 10 ⁻¹	8.412 10 ⁻¹	-9.655 10 ⁻¹	3.298 10 ⁻¹	2.514 10 ⁻³	-3.110 10 ⁻¹	3.304 10 ⁻¹	-4.554 10 ⁻¹	2.319 10 ⁻¹	-2.809 10 ⁻¹	3.933 10 ⁻¹	-4.656 10 ⁻¹	1.625 10 ⁻¹	p_1
	1.000 10⁺⁰	-1.708 10 ⁻¹	-4.505 10 ⁻²	-5.198 10 ⁻¹	-2.395 10 ⁻¹	1.367 10 ⁻¹	-1.783 10 ⁻¹	1.520 10 ⁻¹	-2.004 10 ⁻¹	2.882 10 ⁻¹	-3.562 10 ⁻¹	4.264 10 ⁻¹	-4.715 10 ⁻¹	-3.745 10 ⁻¹	p_2
		1.000 10⁺⁰	-7.455 10 ⁻¹	7.158 10 ⁻¹	-7.587 10 ⁻¹	1.028 10 ⁻¹	-8.056 10 ⁻²	5.763 10 ⁻²	6.356 10 ⁻²	-1.796 10 ⁻¹	2.022 10 ⁻¹	-2.830 10 ⁻¹	3.319 10 ⁻¹	-5.743 10 ⁻¹	p_3
			1.000 10⁺⁰	-8.260 10 ⁻¹	3.128 10 ⁻¹	-2.692 10 ⁻²	-3.702 10 ⁻¹	4.036 10 ⁻¹	-5.118 10 ⁻¹	6.789 10 ⁻²	-8.190 10 ⁻²	1.676 10 ⁻¹	-2.273 10 ⁻¹	2.842 10 ⁻¹	p_4
				1.000 10⁺⁰	-1.051 10 ⁻¹	-5.480 10 ⁻²	4.309 10 ⁻¹	-4.444 10 ⁻¹	5.625 10 ⁻¹	-2.226 10 ⁻¹	2.732 10 ⁻¹	-3.867 10 ⁻¹	4.635 10 ⁻¹	-2.453 10 ⁻³	p_5
					1.000 10⁺⁰	-1.953 10 ⁻¹	5.803 10 ⁻¹	-5.653 10 ⁻¹	4.976 10 ⁻¹	4.034 10 ⁻²	-1.645 10 ⁻²	2.077 10 ⁻²	-1.962 10 ⁻²	8.980 10 ⁻¹	p_6
						1.000 10⁺⁰	-2.593 10 ⁻¹	1.366 10 ⁻¹	-1.067 10 ⁻¹	1.279 10 ⁻²	-2.295 10 ⁻²	3.134 10 ⁻²	-3.755 10 ⁻²	-1.866 10 ⁻¹	p_7
							1.000 10⁺⁰	-9.903 10 ⁻¹	9.719 10 ⁻¹	-7.578 10 ⁻²	1.205 10 ⁻¹	-1.788 10 ⁻¹	2.162 10 ⁻¹	6.346 10 ⁻¹	p_8
								1.000 10⁺⁰	-9.891 10 ⁻¹	7.195 10 ⁻²	-1.171 10 ⁻¹	1.778 10 ⁻¹	-2.160 10 ⁻¹	-6.296 10 ⁻¹	p_9
									1.000 10⁺⁰	-9.410 10 ⁻²	1.434 10 ⁻¹	-2.173 10 ⁻¹	2.642 10 ⁻¹	5.780 10 ⁻¹	p_{10}
										1.000 10⁺⁰	-9.795 10 ⁻¹	9.477 10 ⁻¹	-9.254 10 ⁻¹	4.939 10 ⁻³	p_{11}
											1.000 10⁺⁰	-9.885 10 ⁻¹	9.727 10 ⁻¹	4.862 10 ⁻²	p_{12}
												1.000 10⁺⁰	-9.961 10 ⁻¹	-7.685 10 ⁻²	p_{13}
													1.000 10⁺⁰	8.839 10 ⁻²	p_{14}
														1.000 10⁺⁰	p_{15}

TABLA 4.6. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

4.1.2. Ejemplo teórico con datos que presentan errores numéricos

Cuando se trabaja con datos experimentales, como es el caso de las observaciones gravimétricas, existen muchas fuentes de error que pueden producir ruido numérico y que perturban la información contenida en dichos datos acerca del cuerpo anómalo que se quiere estudiar. En gravimetría, las fuentes de error más comunes son la precisión del gravímetro y los errores en la localización de los datos, entre otros. En muchos problemas experimentales el nivel de error se determina realizando varias veces las observaciones de un experimento, sin embargo, en la mayor parte de los problemas geofísicos esto no se puede realizar y el error debe ser estimado.

Vamos a estudiar el efecto que ocasiona la presencia de ruido en los datos de gravedad sintéticos utilizados en la sección 4.1.1. Vamos a añadirles un error aleatorio de tipo gaussiano con promedio cero, $E[e] = 0$, y desviación estándar $\sigma = 0.3$ mGal. En nuestro caso el ruido añadido corresponde a una incertidumbre del 0.6% que afecta a la información gravimétrica pero sin cambiar drásticamente la forma de la anomalía, como se puede ver en la figura 4.17.

Para realizar el proceso de inversión, vamos a considerar el modelo inicial de la figura 4.1. Por tanto, el vector de parámetros iniciales viene dado por la expresión (4.9). Utilizando la ecuación (4.6), podemos convertir la ecuación (1.36) en el sistema de ecuaciones:

$$(\mathbf{b}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{J}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{J}) \mathbf{D} \mathbf{p}^k = \mathbf{J}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{y} \quad (4.10)$$

cuya solución se calcula para diferentes valores del factor de amortiguación. El proceso iterativo llega a su fin cuando se alcanza un valor de tolerancia $T = E[q_s] = M$, donde M es el número de datos y q_s es el desajuste dado por la ecuación (1.37).

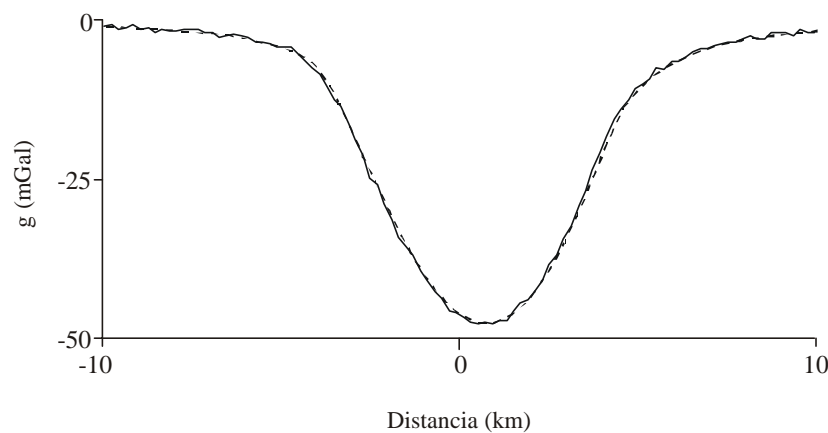


FIGURA 4.17. La línea punteada es la anomalía gravimétrica de la fuente de la figura 2.5(a). La línea sólida es la misma anomalía pero contaminada con ruido aleatorio.

En el caso que nos ocupa se ha realizado un proceso de inversión de 200 iteraciones. Para decidir cuál es la solución que aceptamos como válida, estudiamos la evolución del valor del desajuste q_s durante todo el proceso. Elegiremos aquella solución para la cual el desajuste alcance un valor estable. En la figura 4.18 podemos ver dicha evolución. Vemos que la solución con estas condiciones se alcanza en la iteración decimosexta, con un desajuste $q_s = 104.9$ que es muy cercano al valor de $M = 100$ datos.

El modelo resultante y su respuesta gravimétrica se pueden observar en las figuras 4.19(a) y (b), respectivamente. Si comparamos este modelo con el sintético generador de los datos sin ruido de la figura 2.5(a) observamos que, al añadirle ruido aleatorio a los datos, la frontera inferior del cuerpo se hace más somera pero la densidad del mismo se hace más negativa para mantener la forma e intensidad de la anomalía gravimétrica. No obstante podemos decir que se ha alcanzado una solución satisfactoria a nuestro problema de inversión.

El residual correspondiente se puede ver en la figura 4.20 y nos muestra que la diferencia entre los datos gravimétricos y la anomalía del modelo resultante es menor que 1 mGal, siendo la amplitud de la anomalía del orden de los 50 mGal. También se puede ver que no se aprecia ninguna tendencia general en la gráfica hacia valores positivos o negativos, siendo el promedio muy cercano a cero. Esto indica que se ha alcanzado un ajuste satisfactorio entre la anomalía del modelo resultante obtenido y los datos de gravedad.

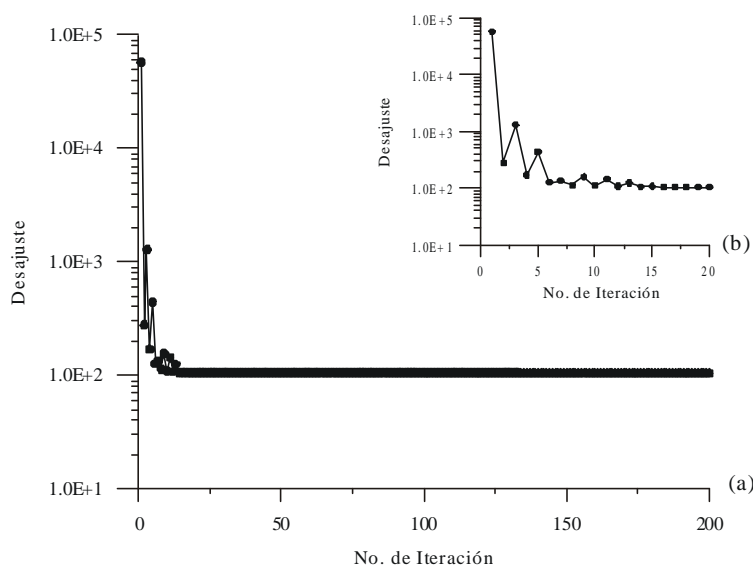


FIGURA 4.18. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso. (b) Detalle de la evolución del desajuste en las 20 primeras iteraciones.

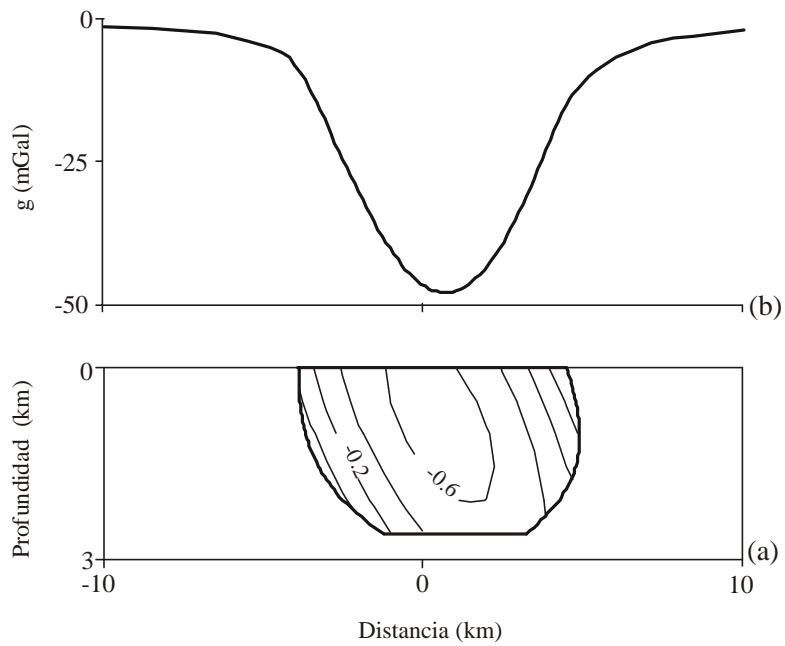


FIGURA 4.19. (a) Modelo resultante de fuente anómala obtenida en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas lateralmente por funciones continuas de la variable z , con datos contaminados con ruido aleatorio. Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 . Los puntos en la frontera superior del cuerpo representan las posiciones del observador. (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a).

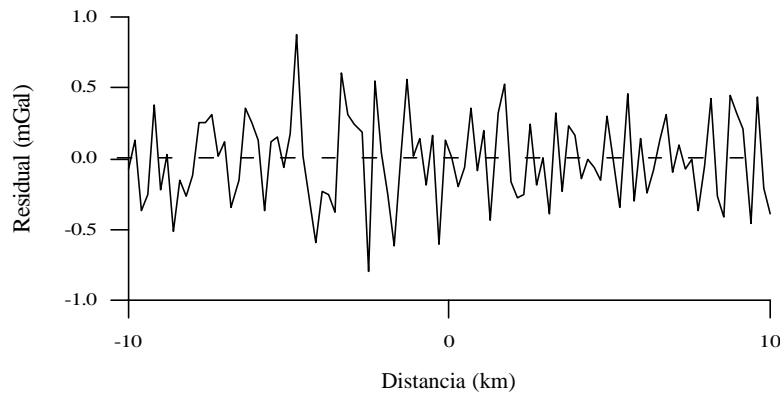


FIGURA 4.20. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad y la anomalía gravimétrica del modelo resultante.

En la tabla 4.7 se comparan los parámetros de los contrastes de densidad correspondientes al modelo inicial, al modelo resultante del proceso iterativo y al modelo sintético que se ha utilizado para generar los datos de gravedad sin ruido. Como se observa en esta tabla, el parámetro p_5 del modelo resultante presenta un valor muy parecido al del modelo sintético, mientras que el resto de los parámetros no alcanzan los valores esperados, llegando incluso a haber un error relativo del 50% para el parámetro p_6 .

Los valores de los parámetros que describen las estructuras de los tres modelos que intervienen en el proceso se presentan en la tabla 4.8. En este caso, los parámetros del modelo resultante cuyo valor se acerca a la solución del modelo sintético son el p_7 y p_{11} , que corresponden a los puntos de corte de las fronteras laterales $f_1(z)$ y $f_2(z)$ con la topografía. Otro parámetro cuyo valor se acerca al esperado es el parámetro p_{12} de la frontera derecha. El resto de los parámetros no alcanzan los valores utilizados en el modelo sintético.

DENSIDAD	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
Modelo Inicial	-0.5000	0.0500	-0.0300	-0.0100	0.0200	-0.0300
Modelo Resultante	-0.6579	-0.0052	-0.0340	-0.0367	0.0397	0.0297
Modelo Sintético	-0.7000	0.0000	0.0000	-0.0500	0.0400	0.0600

TABLA 4.7. Parámetros de los contrastes de densidad correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión cuando los datos se encuentran contaminados con ruido.

ESTRUC-TURA	FRONTERA $f_1(z)$				FRONTERA $f_2(z)$				z_2
	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
Modelo Inicial	-3.5000	0.0300	-0.1000	0.0200	4.4000	0.5000	0.0000	0.0000	2.0000
Modelo Resultante	-3.9671	0.1357	0.0997	0.2568	4.4186	0.7086	-0.0083	-0.0711	2.6516
Modelo Sintético	-4.0000	-0.0700	0.3000	0.0100	4.5000	0.5000	-0.2000	0.0000	3.0000

TABLA 4.8. Parámetros de las estructuras correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión cuando los datos se encuentran contaminados con ruido.

4.1.2.1 Evolución de los parámetros del modelo

En la figura 4.21 se presenta la evolución del factor de amortiguación a lo largo de las 16 iteraciones necesarias para alcanzar la solución en el proceso de inversión. Vemos cómo el valor de este parámetro sufre oscilaciones importantes, de la misma forma que el desajuste para estas mismas iteraciones, y tiende a converger alrededor del valor de 10^2 .

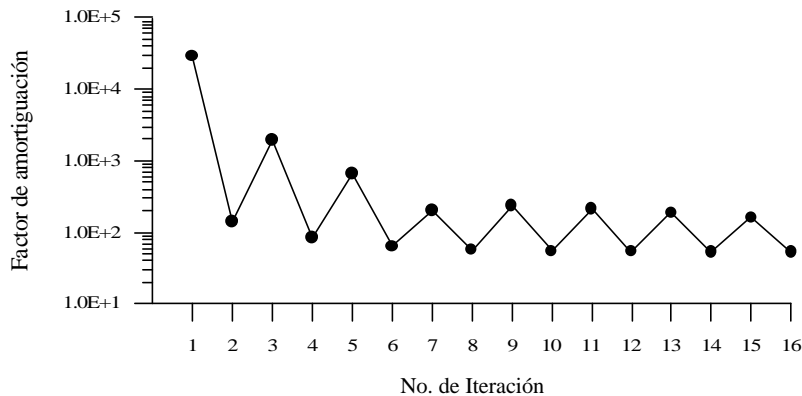


FIGURA 4.21. Evolución del factor de amortiguación b^{-1} .

En la figura 4.22 se observa la evolución de los parámetros que describen el contraste de densidad de la fuente. Podemos ver que algunos de los parámetros alcanzan la convergencia en las dos últimas iteraciones del proceso. En cuanto a los parámetros de la estructura, la evolución de los parámetros de la frontera izquierda se puede observar en la figura 4.23. Vemos cómo ninguno de estos cuatro parámetros alcanzan la convergencia en este proceso. La evolución de los parámetros de la frontera la derecha se presenta en la figura 4.24 que, al igual que los anteriores, no alcanzan convergencia. Por último, en la figura 4.25 se puede observar cómo la profundidad de la frontera inferior del cuerpo evoluciona a través de las 16 iteraciones, presentando convergencia hacia el final del proceso de inversión.

En resumen, observando estas cuatro gráficas, podemos ver que, en general, las evoluciones de la mayor parte de los parámetros no presentan convergencia hacia valores determinados, como ocurría en el caso en el que se utilizaron datos sintéticos libres de ruido.

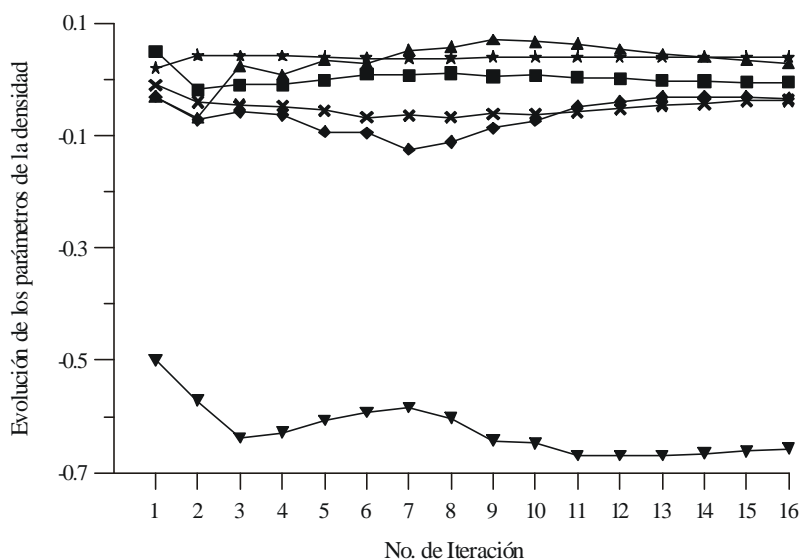


FIGURA 4.22. Evolución de los parámetros del contraste de densidad desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_1 (▼); p_2 (■); p_3 (◆); p_4 (×); p_5 (★); p_6 (▲).

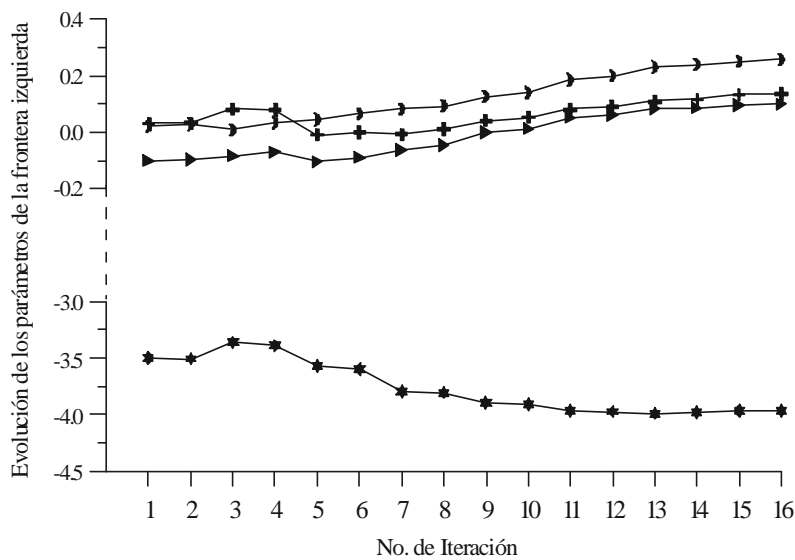


FIGURA 4.23. Evolución de los parámetros de la frontera izquierda desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_7 (★); p_8 (■); p_9 (▶); p_{10} (◼).

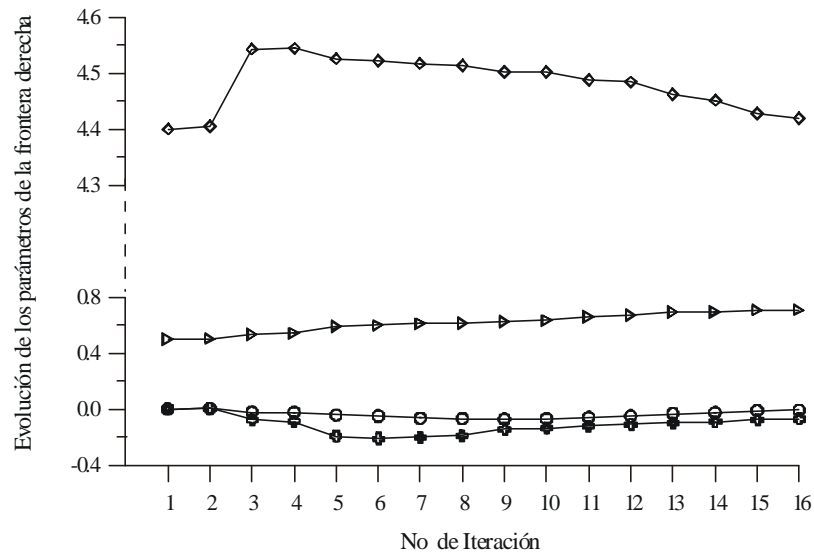


FIGURA 4.24. Evolución de los parámetros de la frontera derecha desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre símbolos y los parámetros son: p_{11} (◇); p_{12} (▶); p_{13} (●); p_{14} (+).

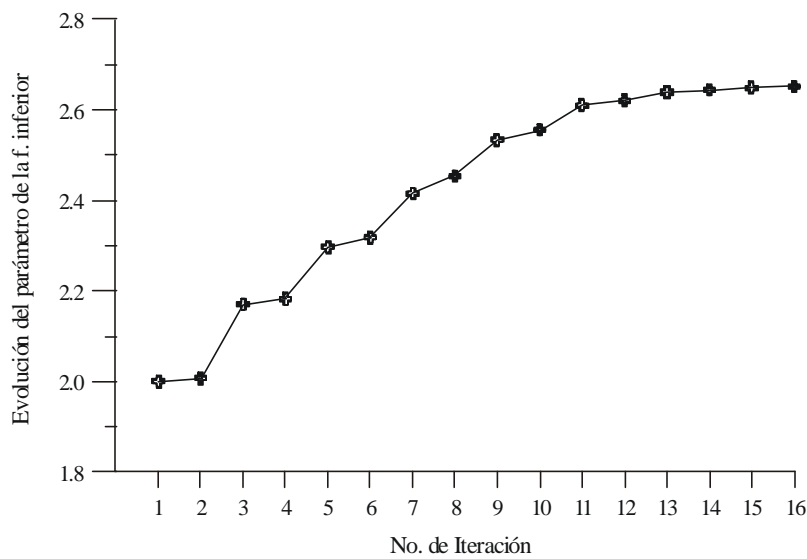


FIGURA 4.25. Evolución del parámetro de la frontera inferior desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión.

4.1.2.2 Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

Vamos a calcular los elementos del operador jacobiano \mathbf{J} para estudiar la sensibilidad de los datos, contaminados con ruido aleatorio, con respecto a los parámetros de la fuente. En la figura 4.26 se presentan las gráficas de las derivadas parciales del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a los seis parámetros que describen el contraste de densidad de la fuente anómala. Las formas de estas seis gráficas son similares a las de la figura 4.10, que fueron calculadas para el caso en el que los datos de gravedad sin ruido.

La figura 4.26(a) corresponde a la gráfica de la derivada del funcional del problema directo con respecto al parámetro p_1 . Esta gráfica presenta una intensidad máxima de $279.2 \frac{\text{mGal}}{\text{g/cm}^3}$ situada en el zona central del perfil.

La siguiente gráfica se puede ver en la figura 4.26 (b) y corresponde a la derivada parcial de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_2 . En esta gráfica se pueden observar dos picos de intensidad, uno negativo de $-327.0 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$, situado cerca de la frontera izquierda del cuerpo, y el otro positivo cuyo valor es $821.4 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$ y que se encuentra cerca de la frontera derecha del cuerpo.

La gráfica (c) presenta una intensidad máxima de $322.3 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$ en el centro del perfil y corresponde a la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_3 , mientras que la gráfica (d) presenta dos valores extremos de intensidad de $-146.9 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y $904.4 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$, para la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_4 .

La derivada del funcional con respecto al parámetro p_5 se puede ver en la figura 4.26(e). Esta gráfica presenta dos picos de intensidad máxima, el valor del pico de la izquierda es $1230.8 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y el de la derecha es $3238.9 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$. Por último, la gráfica (f) tiene un máximo central de $521.1 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ para la derivada con respecto a p_6 .

Al comparar los valores absolutos de todos los máximos y mínimos presentes en las seis gráficas observamos que, al igual que ocurría en la figura 4.10, las variaciones en el valor del parámetro p_5 tienen mayor efecto sobre la anomalía gravimétrica que las variaciones en el resto de los parámetros del contraste de densidad. También vemos que el parámetro que menos influye en la anomalía es el parámetro p_1 , lo mismo que ocurría para el caso sin ruido.

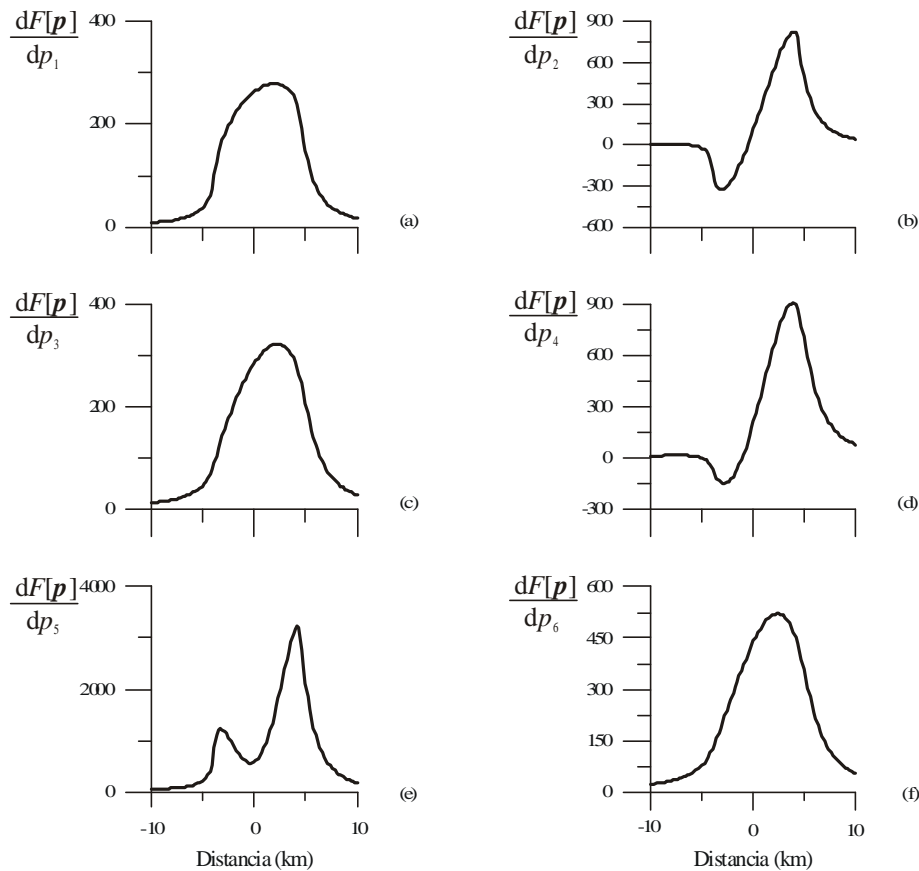


FIGURA 4.26. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen el contraste de densidad de la fuente.

El efecto de los parámetros que describen la frontera izquierda del cuerpo se puede ver en las gráficas de la figura 4.27. En cada una de ellas aparece un pico de intensidad máxima situado entre la posición de la frontera izquierda del cuerpo en el perfil de gravedad y la parte central del mismo, de manera que si se produce un aumento en la magnitud de cualquiera de los cuatro parámetros, eso repercutirá en un aumento en la anomalía gravimétrica. La gráfica (a) de esta figura corresponde a la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_7 y presenta el pico de intensidad más pequeño de las cuatro gráficas, con un valor de 9.2 mGal km^{-1} . Las gráficas (b) y (c) presentan máximos de 18.9 mGal y 40.8 mGal km y corresponden a las derivadas de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_8 y p_9 , respectivamente. La gráfica que presenta el máximo valor de intensidad es la (d), correspondiente a

la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_{10} y cuyo valor es de 91.3 mGal km^2 . De estas cuatro figuras se desprende que el parámetro más significativo de la frontera izquierda es el parámetro p_{10} y el menos significativo es el p_7 , lo mismo que ocurría para el caso de datos sin ruido.

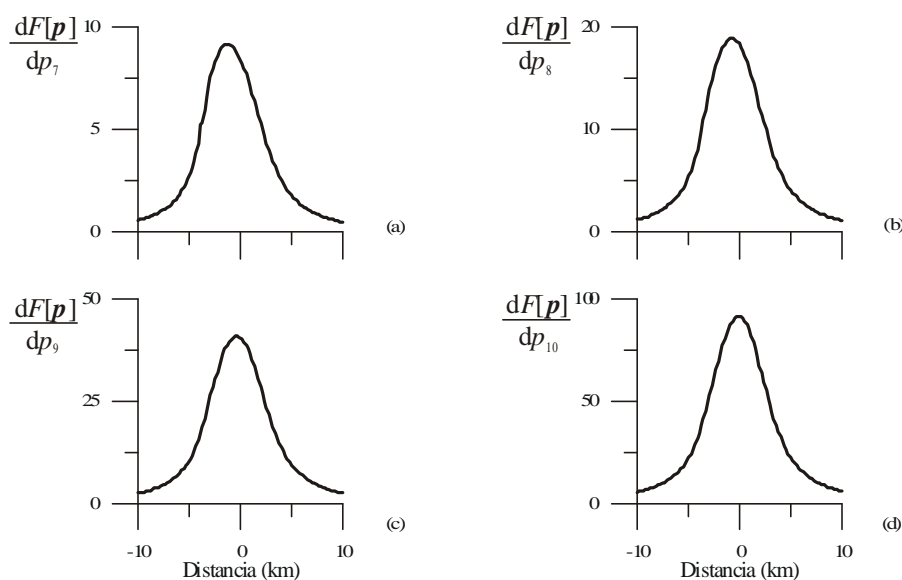


FIGURA 4.27. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera izquierda de la fuente.

La figura 4.28 nos proporciona información acerca de la sensibilidad de los datos ante la presencia de variaciones en la magnitud de los parámetros de la frontera derecha. En las cuatro gráficas de esta figura aparece un máximo de intensidad positivo situado sobre la posición de la frontera derecha en el perfil de gravedad. La gráfica (a) corresponde a la derivada parcial del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_{11} , en esta figura aparece un máximo de intensidad de $15.4 \text{ mGal km}^{-1}$. La gráfica (b) representa la derivada con respecto a p_{12} y tiene un máximo de 9.1 mGal . En la figura 4.28 (c) podemos ver la gráfica de la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_{13} , cuyo valor máximo es de 9.7 mGal km , y en la figura 4.28 (d) se representa la derivada del funcional con respecto a p_{14} , con un máximo de 12.0 mGal km^2 . Observando las cuatro figuras anteriores, podemos decir que el parámetro de mayor efecto es el parámetro p_{14} y el de menor efecto el p_{12} .

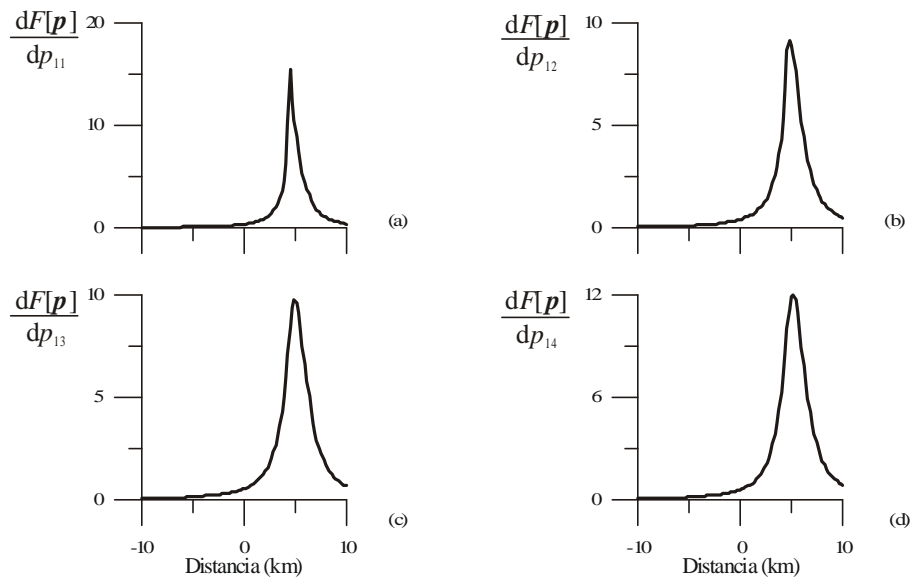


FIGURA 4.28. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera derecha de la fuente.

Por último, la figura 4.29 nos proporciona información acerca del efecto que ejerce la frontera inferior sobre la respuesta gravimétrica del cuerpo a través de la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_{15} . En la gráfica correspondiente aparece un mínimo de $-18.8 \text{ mGal km}^{-1}$ de intensidad situado entre la parte central del perfil de datos y el borde derecho del cuerpo.

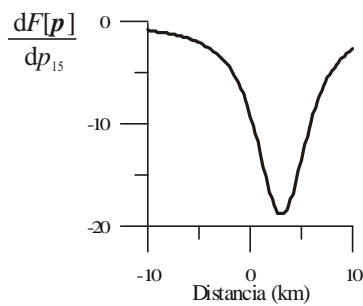


FIGURA 4.29. Representación gráfica de la columna del jacobiano correspondiente a la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto al parámetro que define la frontera inferior de la fuente.

Con el estudio de la sensibilidad de los datos de gravedad con respecto a los parámetros que definen la fuente anómala, podemos decir que dicha sensibilidad es mayor con respecto a las variaciones que se produzcan en los valores de los parámetros del contraste de densidad que las que se produzcan en los parámetros que definen la estructura geométrica del cuerpo. En cuanto a esta última, se puede decir que tanto la frontera izquierda como la frontera inferior tienen un efecto mayor sobre la anomalía gravimétrica que la frontera derecha, ya que la zona de sensibilidad que presenta valores significativos para $f_2(z)$ es muy estrecha (figura 4.28), de ahí que esta última sea la frontera peor determinada.

Como vemos, la adición de ruido aleatorio en los datos no cambia la sensibilidad de los mismos con respecto a las diferentes características del cuerpo. Los datos contaminados siguen siendo más sensibles a la densidad que a la estructura geométrica de la fuente anómala.

Después de analizar la sensibilidad del problema, calculamos la descomposición en valores singulares del jacobiano. Para realizar esto, vamos a dividir cada elemento $\frac{\partial F_i[p_j^k]}{\partial p_j}$ de la matriz de sensibilidad \mathbf{J} por el error en los datos \mathbf{s} , para normalizarlo por dicho error, y calculamos la descomposición en valores singulares de la matriz resultante.

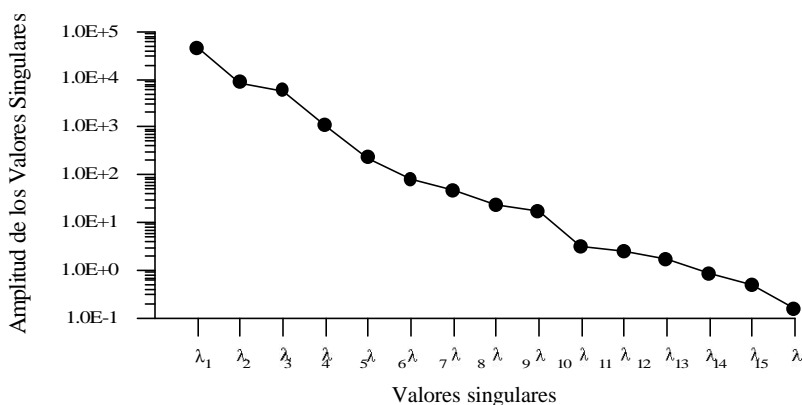


FIGURA 4.30. Valores singulares del jacobiano del problema.

Los valores singulares se pueden ver en la figura 4.30, donde se han colocado en orden de mayor a menor. Se han obtenido 15 valores singulares distintos de cero, por tanto el rango del jacobiano es $\mathbf{h} = 15$ y coincide con el número de columnas N del operador jacobiano. Esto implica que el subespacio \mathbf{V}_0 no tiene ninguna componente, por lo que está asegurada la unicidad y la existencia de la solución del problema para un determinado modelo inicial. Para este caso la

condición de la matriz jacobiano es $\mathbf{k} = 2.860 \cdot 10^5$, por lo que hay posibilidades de que se pueda producir una amplificación del error de los datos en dirección de aquellos vectores característicos de los parámetros que presenten un error característico e_i^* (ecuación (1.49)) mayor que la unidad. Esta amplificación del error de los datos da lugar a inestabilidades en la solución del problema de inversión. Para ver esto, en la tabla 4.9 se presentan los pesos de los parámetros que forman combinaciones, dados por las componentes de los vectores-columna traspuestos de la matriz \mathbf{V}_h , junto con los valores singulares y los errores característicos correspondientes. En color gris están marcadas las componentes de los vectores \mathbf{v}_i^T cuyo valor absoluto es mayor de 0.5 y que son los pesos de los parámetros con mayor resolución dentro de cada combinación. Como se puede ver, los parámetros del contraste de densidad están presentes en las combinaciones a las que les corresponden los errores más pequeños, siendo el parámetro que tiene mayor resolución el p_5 , mientras que los parámetros de la estructura se encuentran en las combinaciones de parámetros con errores más grandes. Las combinaciones correspondientes a los vectores \mathbf{v}_{13}^T , \mathbf{v}_{14}^T y \mathbf{v}_{15}^T presentan un error característico mayor que la unidad, por lo que a través de las mismas se va a propagar el error de los datos a aquellos parámetros que presenten mayores pesos en dichas combinaciones, que en este caso son p_8 , p_9 , y p_{13} . En la tabla 4.8 vimos que estos parámetros son los que se alejan más de la solución esperada.

En la figura 4.31 se comparan los vectores columna de las matrices \mathbf{U}_h y \mathbf{V}_h para cada valor singular \mathbf{I}_i . En esta figura vemos que la combinación de pesos dada por los elementos del vector \mathbf{v}_1 nos proporciona la combinación de parámetros con mayor resolución, pues corresponde al valor singular más grande $\mathbf{I}_1 = 4.412 \cdot 10^4$ y su error característico es muy pequeño, como se puede ver en la tabla 4.9. Esta combinación está formada por los parámetros del contraste de densidad de la fuente casi exclusivamente, y el mayor peso recae en el parámetro p_5 . Los datos que participan en su resolución se encuentran sobre la localización de los bordes laterales de la estructura, con mayor influencia de los datos situados sobre la frontera derecha. Esto también se infiere de la figura 4.26(e) para la matriz de sensibilidad de este caso.

La combinación de parámetros siguiente corresponde al valor singular $\mathbf{I}_2 = 8.585 \cdot 10^3$ y, como se ve en la tabla 4.9, presenta un error característico $e_2^* = 1.165 \cdot 10^{-4}$. En la figura 4.31 vemos que esta combinación también está formada por los parámetros del contraste de densidad y los datos que participan en su resolución se encuentran situados sobre la parte izquierda del cuerpo anómalo. Puede existir cierta correlación entre los parámetros p_2 y p_4 , que son los que tienen mayor peso dentro de esta combinación.

La tercera combinación corresponde al valor singular $\mathbf{I}_3 = 5.768 \cdot 10^3$. El parámetro que presenta mayor peso es el p_6 y puede estar correlacionado con los parámetros p_3 y p_1 . Los datos que participan de su resolución son aquellos que se encuentran situados en la parte central del perfil,

correspondiente al lugar que ocupa la fuente anómala. El error característico es $e_3^* = 1.734 \cdot 10^{-4}$, como se observa en la tabla 4.9.

El siguiente valor singular en tamaño es $I_4 = 1.061 \cdot 10^3$. En la figura 4.31 vemos que la combinación de parámetros correspondiente está formada, al igual que las combinaciones anteriores, por los parámetros de la densidad. Los parámetros de mayor peso son p_1, p_2 y p_4 . La forma del vector u_4 nos dice que los datos que participan en la resolución de esta combinación se encuentran sobre la frontera derecha. Esto es debido a que la sensibilidad de estos datos, ante la presencia de variaciones en los parámetros de esta combinación, es mayor que la del resto del perfil. En la tabla 4.9 vemos que su error característico es de $9.425 \cdot 10^{-4}$.

Estas cuatro combinaciones nos informan que los seis parámetros del contraste de densidad están bien resueltos por los datos gravimétricos de este problema y son los primeros que alcanzan la solución en el proceso iterativo, en comparación con los parámetros que determinan la estructura del cuerpo. Como se ha visto, para las cuatro combinaciones el error característico es del orden de 10^{-4} y aún menor. Esto nos dice que prácticamente no va a haber propagación de los errores que contaminan los datos en la dirección de los vectores característicos correspondientes, por lo que estas combinaciones de parámetros van a tener gran estabilidad.

La combinación correspondiente al quinto valor singular, $I_5 = 2.252 \cdot 10^2$, está formada por la mayoría de los parámetros del contraste de densidad y por los parámetros de la frontera izquierda. Los datos responsables de su resolución se encuentran cercanos a los bordes laterales del cuerpo pero con mayor importancia los que se encuentran sobre la frontera izquierda, como se desprende de la figura 4.31. En la tabla 4.9 vemos que el error característico es aún muy pequeño, del orden de 10^{-3} .

En la sexta combinación, que corresponde al valor singular $I_6 = 7.940 \cdot 10^1$, los mayores pesos recaen sobre los parámetros que determinan la frontera derecha del cuerpo y la frontera inferior, siendo el parámetro de mayor peso el p_{11} . En este caso, los datos que intervienen de manera significativa en la resolución de la combinación se encuentran situados sobre la frontera derecha del cuerpo, ya que estos son los datos más sensibles al efecto de dicha frontera. El error característico es $e_6^* = 1.259 \cdot 10^{-2}$.

La siguiente combinación corresponde al valor singular, $I_7 = 4.522 \cdot 10^1$ y tiene un error $e_7^* = 2.211 \cdot 10^{-2}$. De nuevo el parámetro con mayor peso es p_{11} , pero en esta combinación también presentan pesos elevados algunos parámetros del contraste de densidad, como el p_1, p_3 y p_6 , así como también los dos últimos parámetros de la frontera derecha. Por todo esto, los datos más significativos que resuelven esta combinación se encuentran a lo largo de todo el perfil, pero con mayor peso en los datos que se encuentran sobre la frontera izquierda del cuerpo, como se observa en la figura 4.31.

La combinación dada por el vector v_8 corresponde al valor singular $I_8 = 2.257 \cdot 10^1$. Está formada principalmente por los parámetros de la frontera derecha y los datos que participan en su resolución se encuentran situados sobre la misma. El error característico es $e_8^* = 4.431 \cdot 10^{-2}$.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	I_i	ERROR
\mathbf{v}_1^T	1.057 10 ⁻¹	2.024 10 ⁻¹	1.223 10 ⁻¹	2.653 10 ⁻¹	9.072 10⁻¹	1.966 10 ⁻¹	2.140 10 ⁻³	4.603 10 ⁻³	1.021 10 ⁻²	2.320 10 ⁻²	1.777 10 ⁻³	1.557 10 ⁻³	1.792 10 ⁻³	2.225 10 ⁻³	-6.491 10 ⁻³	4.412 10 ⁴	2.267 10 ⁻⁵
\mathbf{v}_2^T	-1.659 10 ⁻¹	7.319 10⁻¹	-1.186 10 ⁻¹	5.739 10⁻¹	-2.673 10 ⁻¹	-1.209 10 ⁻¹	-1.046 10 ⁻²	-1.929 10 ⁻²	-3.700 10 ⁻²	-7.336 10 ⁻²	2.042 10 ⁻³	1.816 10 ⁻³	2.111 10 ⁻³	2.700 10 ⁻³	-2.953 10 ⁻³	8.585 10 ³	1.165 10 ⁻⁴
\mathbf{v}_3^T	4.134 10 ⁻¹	6.022 10 ⁻²	4.492 10 ⁻¹	1.557 10 ⁻¹	-3.207 10 ⁻¹	6.826 10⁻¹	1.379 10 ⁻²	3.057 10 ⁻²	6.876 10 ⁻²	1.568 10 ⁻¹	-4.589 10 ⁻³	-3.091 10 ⁻³	-3.187 10 ⁻³	-4.028 10 ⁻³	-1.341 10 ⁻²	5.768 10 ³	1.734 10 ⁻⁴
\mathbf{v}_4^T	-3.644 10 ⁻¹	-6.134 10⁻¹	-6.758 10 ⁻²	6.705 10⁻¹	-4.123 10 ⁻²	1.572 10 ⁻¹	-2.236 10 ⁻³	-5.957 10 ⁻³	-1.456 10 ⁻²	-3.456 10 ⁻²	3.370 10 ⁻²	3.724 10 ⁻²	4.644 10 ⁻²	6.157 10 ⁻²	-2.327 10 ⁻²	1.061 10 ³	9.425 10 ⁻⁴
\mathbf{v}_5^T	7.109 10⁻¹	-1.904 10 ⁻¹	8.041 10 ⁻³	2.876 10 ⁻¹	-2.938 10 ⁻²	-3.798 10 ⁻¹	-5.436 10 ⁻²	-1.042 10 ⁻¹	-2.039 10 ⁻¹	-4.060 10 ⁻¹	-5.678 10 ⁻²	-4.103 10 ⁻²	-4.554 10 ⁻²	-5.725 10 ⁻²	1.075 10 ⁻²	2.252 10 ²	4.440 10 ⁻³
\mathbf{v}_6^T	-4.472 10 ⁻²	-5.199 10 ⁻³	-3.158 10 ⁻¹	-2.660 10 ⁻²	5.397 10 ⁻³	2.605 10 ⁻¹	1.008 10 ⁻²	-9.997 10 ⁻³	-4.858 10 ⁻²	-1.118 10 ⁻¹	-5.887 10⁻¹	-3.612 10 ⁻¹	-3.418 10 ⁻¹	-4.028 10 ⁻¹	-2.421 10 ⁻¹	7.940 10 ¹	1.259 10 ⁻²
\mathbf{v}_7^T	2.838 10 ⁻¹	-7.542 10 ⁻²	-2.762 10 ⁻¹	1.893 10 ⁻¹	-4.859 10 ⁻³	-2.368 10 ⁻¹	1.808 10 ⁻²	6.640 10 ⁻²	2.468 10 ⁻¹	7.821 10⁻¹	5.593 10 ⁻²	-6.321 10 ⁻²	-1.276 10 ⁻¹	-1.947 10 ⁻¹	8.354 10 ⁻²	4.522 10 ¹	2.211 10 ⁻²
\mathbf{v}_8^T	-1.531 10 ⁻¹	-1.553 10 ⁻²	3.464 10 ⁻¹	1.285 10 ⁻²	-3.705 10 ⁻⁴	-1.233 10 ⁻¹	7.018 10 ⁻²	5.989 10 ⁻²	1.222 10 ⁻²	-1.074 10 ⁻¹	5.436 10⁻¹	-1.013 10 ⁻¹	-3.577 10 ⁻¹	-5.927 10⁻¹	-1.893 10 ⁻¹	2.257 10 ¹	4.431 10 ⁻²
\mathbf{v}_9^T	1.690 10 ⁻¹	3.433 10 ⁻²	-6.393 10⁻¹	-7.890 10 ⁻²	1.901 10 ⁻³	3.836 10 ⁻¹	-1.302 10 ⁻¹	-1.613 10 ⁻¹	-1.724 10 ⁻¹	-9.131 10 ⁻²	5.512 10⁻¹	3.974 10 ⁻²	7.223 10 ⁻³	2.245 10 ⁻²	-1.457 10 ⁻¹	1.719 10 ¹	5.817 10 ⁻²
\mathbf{v}_{10}^T	-1.233 10 ⁻¹	2.796 10 ⁻⁴	9.971 10 ⁻²	-2.494 10 ⁻²	4.096 10 ⁻³	6.196 10 ⁻²	-4.273 10 ⁻¹	-4.197 10 ⁻¹	-3.777 10 ⁻¹	1.320 10 ⁻¹	-3.408 10 ⁻²	-4.890 10 ⁻²	-1.070 10 ⁻¹	-2.067 10 ⁻¹	6.276 10⁻¹	3.076 10 ⁰	3.251 10 ⁻¹
\mathbf{v}_{11}^T	3.772 10 ⁻³	-3.739 10 ⁻³	-5.447 10 ⁻²	7.810 10 ⁻³	-4.135 10 ⁻⁴	4.725 10 ⁻²	3.761 10 ⁻¹	1.553 10 ⁻¹	5.771 10 ⁻²	-1.202 10 ⁻¹	1.916 10 ⁻¹	-6.321 10⁻¹	-2.482 10 ⁻¹	3.298 10 ⁻¹	4.524 10 ⁻¹	2.489 10 ⁰	4.018 10 ⁻¹
\mathbf{v}_{12}^T	-1.536 10 ⁻²	-4.211 10 ⁻³	9.602 10 ⁻²	9.607 10 ⁻³	-1.239 10 ⁻⁴	-7.264 10 ⁻²	-7.713 10⁻¹	9.459 10 ⁻²	3.373 10 ⁻¹	-4.373 10 ⁻²	7.299 10 ⁻²	-3.770 10 ⁻¹	-7.909 10 ⁻²	2.563 10 ⁻¹	-2.148 10 ⁻¹	1.703 10 ⁰	5.872 10 ⁻¹
\mathbf{v}_{13}^T	4.533 10 ⁻²	-6.496 10 ⁻⁴	-1.848 10 ⁻¹	1.979 10 ⁻³	-6.499 10 ⁻⁴	1.137 10 ⁻¹	-9.406 10 ⁻²	1.797 10 ⁻¹	6.279 10⁻¹	-3.526 10 ⁻¹	-2.469 10 ⁻²	2.816 10 ⁻¹	4.875 10 ⁻²	-3.075 10 ⁻¹	4.630 10 ⁻¹	8.179 10 ⁻¹	1.223 10 ⁰
\mathbf{v}_{14}^T	-1.602 10 ⁻²	-6.425 10 ⁻⁴	5.998 10 ⁻²	4.489 10 ⁻⁴	2.439 10 ⁻⁴	-3.589 10 ⁻²	2.160 10 ⁻¹	-8.336 10⁻¹	4.451 10 ⁻¹	-3.583 10 ⁻²	1.457 10 ⁻²	-1.572 10 ⁻¹	1.077 10 ⁻¹	2.058 10 ⁻²	-1.304 10 ⁻¹	4.746 10 ⁻¹	2.107 10 ⁰
\mathbf{v}_{15}^T	2.206 10 ⁻³	-2.982 10 ⁻⁴	-2.995 10 ⁻³	1.101 10 ⁻³	-1.207 10 ⁻⁴	4.312 10 ⁻⁴	-3.234 10 ⁻³	1.316 10 ⁻¹	-8.215 10 ⁻²	1.180 10 ⁻²	5.183 10 ⁻²	-4.500 10 ⁻¹	8.009 10⁻¹	-3.589 10 ⁻¹	2.093 10 ⁻²	1.543 10 ⁻¹	6.481 10 ⁰

TABLA 4.9. Componentes de los vectores característicos de la matriz \mathbf{V}_h , los valores singulares y los errores característicos asociados.

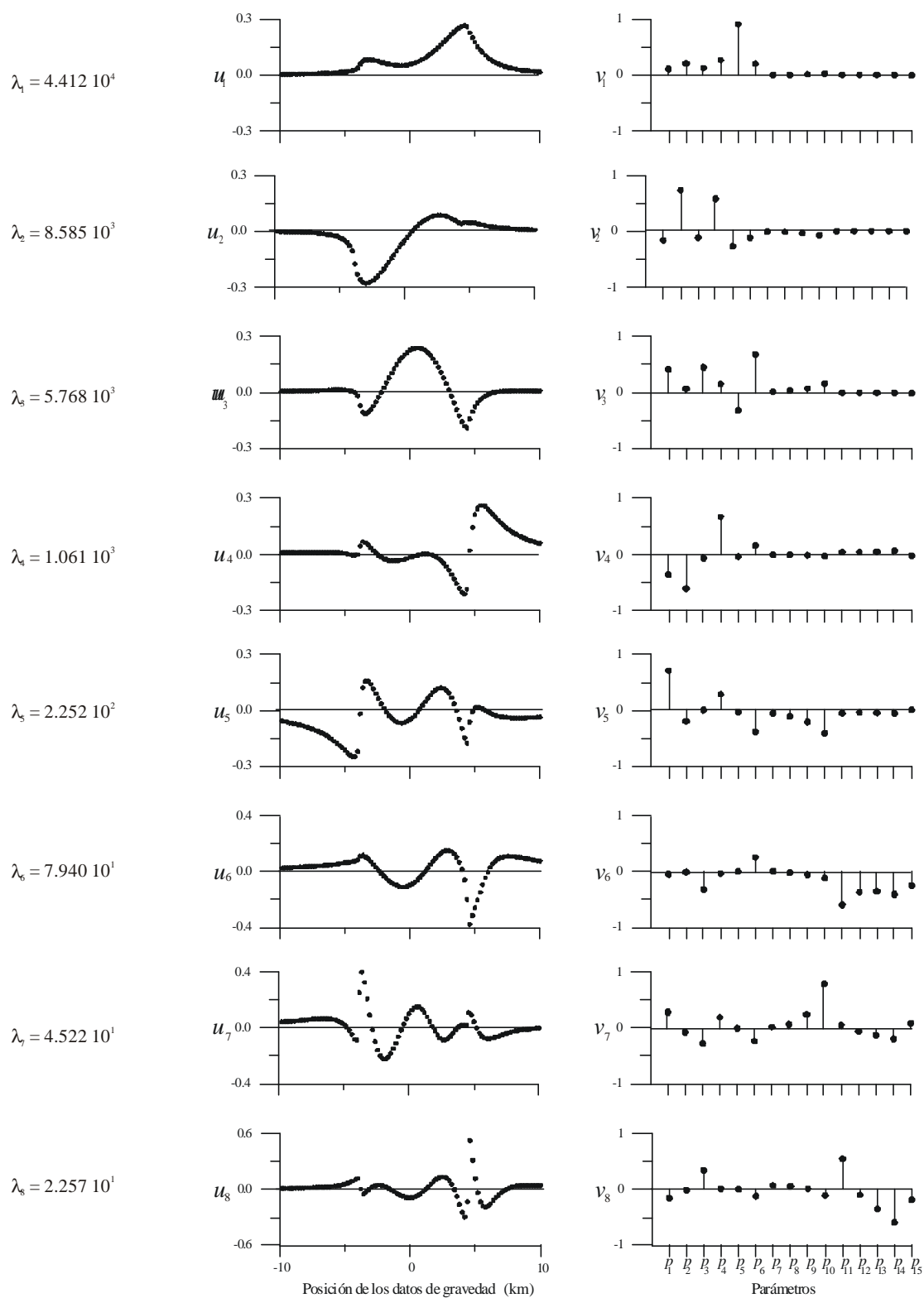


FIGURA 4.31. Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

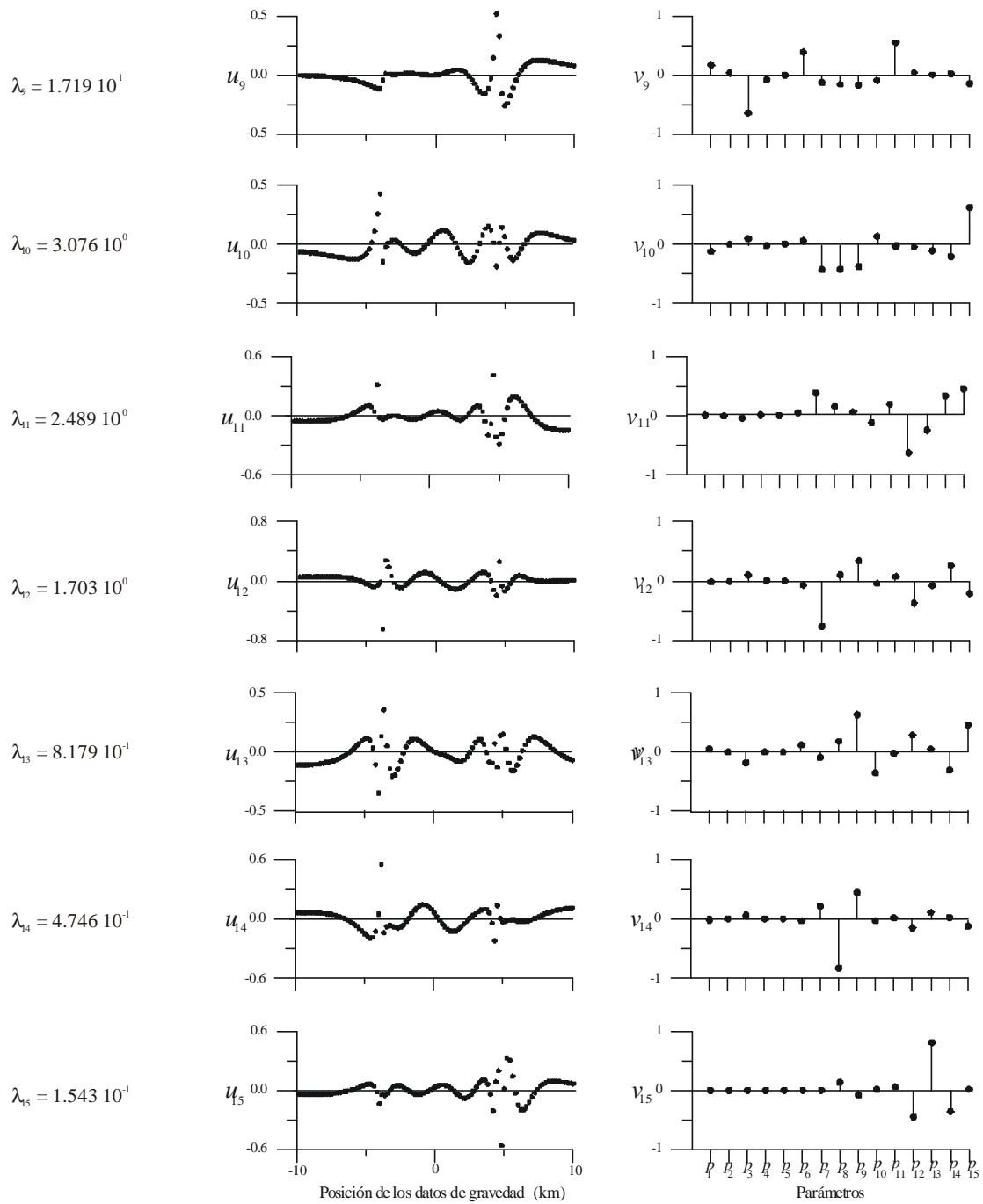


FIGURA 4.30 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

La siguiente combinación está asociada al valor singular $I_9 = 1.719 \cdot 10^1$. En ella los parámetros que presentan mayor peso son p_3, p_6 y p_{11} y los datos que participan en su resolución se encuentran sobre la frontera derecha. El error característico presenta el valor $e_9^* = 5.817 \cdot 10^{-2}$.

En las tres siguientes combinaciones los pesos significativos recaen en los parámetros de la estructura, incluyendo el correspondiente a la frontera inferior. Los datos más significativos, responsables de su resolución, se encuentran situados sobre las fronteras laterales de la fuente, aunque los datos que están en el centro del perfil también aportan información sobre los parámetros. Los errores característicos son menores que la unidad pero del orden de 10^{-1} . Con este orden de magnitud podemos suponer que las combinaciones correspondientes están influidas por inestabilidad, pero no lo suficiente como para desechar la información que proporcionan.

Las combinaciones asociadas a los tres valores singulares siguientes pueden no ser tenidas en cuenta, ya que los errores característicos correspondientes son mayores que la unidad. Por tanto, estas combinaciones presentan inestabilidades importantes, por lo que quedan indeterminadas por los datos de gravedad.

De nuevo vemos con este análisis que los parámetros del contraste de densidad son los parámetros que mejor se resuelven en el proceso de inversión, aunque no están exentos de inestabilidad pero ésta es pequeña y no afecta de manera significativa la resolución de dichos parámetros. En cuanto a los parámetros de la estructura, vemos que éstos sí están afectados por inestabilidades, haciendo difícil la obtención de la solución real del problema. No obstante, el modelo resultante obtenido en el proceso de inversión es muy parecido al modelo generador de los datos de gravedad, a pesar de la contaminación por errores de la que fueron objeto, como se observa al comparar las figuras 2.25 y 4.19.

4.1.2.3. Resolución de los parámetros

A continuación vamos a calcular la matriz de resolución \mathbf{R} de los parámetros a partir de la ecuación (1.55). Para calcular dicha matriz, primero se calcula la varianza residual mediante la expresión (1.56), obteniendo el valor $\hat{\mathbf{S}}^2 = 0.11 \text{ mGal}^2$. Como vemos, la varianza residual tiene un valor muy parecido al de la varianza de los datos $\mathbf{S}^2 = 0.09 \text{ mGal}^2$. Esto significa que el modelo resultante explica de manera satisfactoria los datos de gravedad. Es lógico que esto suceda porque los datos de gravedad se encuentran contaminados con ruido aleatorio de promedio cero y el modelo resultante presenta una anomalía gravimétrica suave, que se ajusta a la curva promedio de la anomalía observada.

La matriz de resolución \mathbf{R} nos da información acerca de cuál de los parámetros tiene mayor resolución y cuál es el peor resuelto en el proceso de inversión. Hay que tener en cuenta que en este

caso esta matriz no coincide con la matriz identidad, pues el factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} no es nulo, sino que su valor es $\mathbf{b}^{-1} = 52.4$.

La forma de la matriz de resolución se puede ver en la figura 4.32. Como se observa en la figura, los parámetros del contraste de densidad tienen muy buena resolución, siendo el p_3 el peor resuelto. Esto está en acuerdo con la información obtenida de la tabla 4.9, en la que se observa que este parámetro presenta el mayor peso en la combinación de parámetros dada por el vector \mathbf{v}_9 , mientras que los otros cinco parámetros del contraste de densidad presentan pesos importantes en combinaciones con errores característicos menores.

En cuanto a los parámetros de la estructura, éstos presentan peor resolución. Los parámetros de la frontera izquierda que tienen peor resolución son el p_8 y p_9 que, como se observa en la tabla 4.9, presentan un peso elevado en las combinaciones de parámetros \mathbf{v}_{14} y \mathbf{v}_{13} respectivamente, ambas con un error característico mayor que la unidad. El parámetro p_{10} presenta una resolución buena, ya que está asociado a una combinación de parámetros con un error característico pequeño, como se desprende de la tabla 4.9.

Tres de los parámetros de la frontera derecha presentan baja resolución. De ellos, los parámetros p_{12} y p_{13} son los peores resueltos ya que, como se aprecia en la tabla 4.9, ambos pertenecen a combinaciones que presentan errores característicos grandes, por lo que en su resolución hay inestabilidades debidas a la propagación de los errores de los datos. El parámetro de esta frontera que presenta mejor resolución es el parámetro p_{11} , ya que presenta pesos importantes en varias combinaciones de parámetros con errores característicos pequeños, como se puede ver en la tabla 4.9.

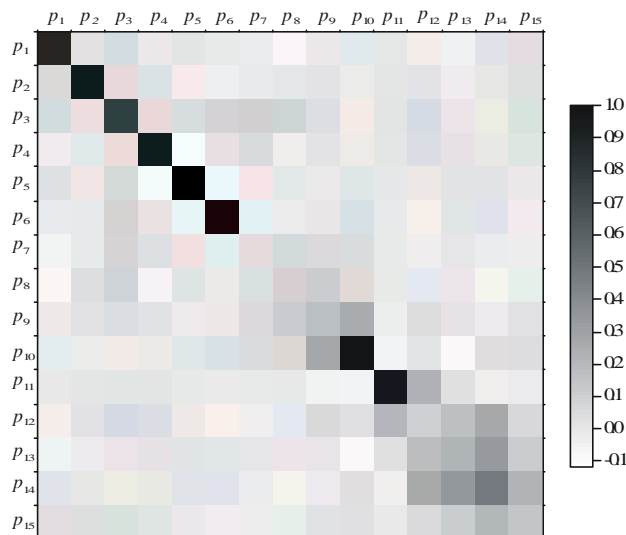


FIGURA 4.32. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

En líneas generales se puede concluir que, en este ejemplo, los datos de gravedad contaminados con ruido nos proporcionan suficiente información para resolver los parámetros que describen la densidad de la fuente anómala, pero la resolución de los parámetros de la estructura está influida por inestabilidades debidas a la propagación del error de los datos en el proceso de inversión.

4.1.2.4. Covarianza de los parámetros

La matriz de covarianza $Cov(\hat{\mathbf{p}})$ para soluciones pesadas por la matriz \mathbf{S} viene dada por la ecuación (1.63), donde la varianza residual es $\hat{\mathbf{S}}^2 = 0.11$ mGal y el factor de amortiguación utilizado para calcular el modelo resultante es $\mathbf{b}^{-1} = 52.4$. Como se dijo en el Capítulo I, esta matriz nos proporciona las varianzas de los parámetros del modelo mediante los elementos de su diagonal principal, y las covarianzas entre parámetros mediante el resto de los elementos de la matriz. Los valores numéricos de estos elementos se pueden ver en la tabla 4.10, donde se ha representado la parte triangular superior de dicha matriz.

A continuación, en la tabla 4.11, se presentan los parámetros del modelo resultante obtenido en el proceso de inversión y las incertidumbres correspondientes dadas por los intervalos de confianza ($\pm 2.58 \mathbf{s}$) en los que se considera que la solución para cada parámetro tiene una probabilidad de existir del 99%. Las desviaciones estándar \mathbf{s} correspondientes se calculan a partir de la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza de los parámetros.

4.1.2.5. Correlación entre los parámetros

La matriz de correlación de este ejemplo se puede ver en la figura 4.33 y ha sido obtenida a partir de la matriz de covarianza, cuyos elementos se pueden ver en la tabla 4.10, mediante la expresión (1.64). Como se observa en dicha figura, los parámetros p_1 y p_3 presentan una fuerte correlación, lo mismo que los parámetros p_2 , p_4 y p_6 , por tanto, es posible que las desviaciones estándar estimadas para estos parámetros sean mayores que las desviaciones estándar reales correspondientes. La tabla 4.12 muestra los elementos de esta matriz. En ella podemos observar que el coeficiente de correlación entre los parámetros p_1 y p_3 tiene un valor negativo, lo que significa que si el parámetro p_1 aumenta su valor y el parámetro p_3 disminuye, la anomalía gravimétrica cambia muy poco. Las correlaciones existentes entre los diferentes parámetros del contraste de densidad corroboran la información obtenida de la matriz \mathbf{V}_h , en las que se obtienen las diferentes combinaciones de parámetros que se resuelven en el proceso de inversión.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
2.368 10⁻⁵	6.222 10 ⁻⁷	-5.201 10 ⁻⁵	7.052 10 ⁻⁸	-1.534 10 ⁻⁷	1.717 10 ⁻⁵	4.769 10 ⁻⁶	3.128 10 ⁻⁶	5.765 10 ⁻⁶	7.558 10 ⁻⁶	1.370 10 ⁻⁵	6.253 10 ⁻⁶	1.286 10 ⁻⁵	2.247 10 ⁻⁵	-1.700 10 ⁻⁵	p_1
	9.104 10⁻⁷	-6.533 10 ⁻⁶	-1.957 10 ⁻⁶	6.130 10 ⁻⁸	5.701 10 ⁻⁶	-1.641 10 ⁻⁶	-2.310 10 ⁻⁶	-3.096 10 ⁻⁶	-3.938 10 ⁻⁶	3.736 10 ⁻⁶	1.630 10 ⁻⁶	2.062 10 ⁻⁶	2.818 10 ⁻⁶	-1.463 10 ⁻⁶	p_2
		1.618 10⁻⁴	1.278 10 ⁻⁵	-2.520 10 ⁻⁷	-8.198 10 ⁻⁵	1.080 10 ⁻⁵	2.336 10 ⁻⁵	2.198 10 ⁻⁵	2.788 10 ⁻⁶	-6.798 10 ⁻⁵	-1.132 10 ⁻⁵	-2.382 10 ⁻⁵	-4.569 10 ⁻⁵	2.202 10 ⁻⁵	p_3
			4.614 10⁻⁶	-1.578 10 ⁻⁷	-1.318 10 ⁻⁵	5.866 10 ⁻⁶	7.526 10 ⁻⁶	9.575 10 ⁻⁶	9.843 10 ⁻⁶	-1.045 10 ⁻⁵	-2.652 10 ⁻⁶	-2.228 10 ⁻⁶	-2.374 10 ⁻⁶	8.951 10 ⁻⁷	p_4
				1.029 10⁻⁸	4.176 10 ⁻⁷	-5.099 10 ⁻⁷	-5.324 10 ⁻⁷	-5.453 10 ⁻⁷	-1.200 10 ⁻⁷	1.544 10 ⁻⁷	9.158 10 ⁻⁹	-5.072 10 ⁻⁸	-1.447 10 ⁻⁷	4.457 10 ⁻⁷	p_5
					5.568 10⁻⁵	-1.595 10 ⁻⁵	-2.629 10 ⁻⁵	-3.008 10 ⁻⁵	-1.926 10 ⁻⁵	4.755 10 ⁻⁵	3.641 10 ⁻⁶	7.140 10 ⁻⁶	1.582 10 ⁻⁵	4.236 10 ⁻⁷	p_6
						1.254 10⁻⁴	5.147 10 ⁻⁵	2.584 10 ⁻⁵	-1.433 10 ⁻⁵	-3.393 10 ⁻⁶	-1.395 10 ⁻⁵	-5.337 10 ⁻⁶	1.535 10 ⁻⁵	-1.803 10 ⁻⁵	p_7
							6.117 10⁻⁵	5.108 10 ⁻⁵	-1.117 10 ⁻⁵	-1.135 10 ⁻⁵	-1.625 10 ⁻⁵	-2.228 10 ⁻⁶	2.063 10 ⁻⁵	-4.408 10 ⁻⁵	p_8
								6.707 10⁻⁵	-2.240 10 ⁻⁶	-1.958 10 ⁻⁵	-1.250 10 ⁻⁵	2.871 10 ⁻⁶	1.984 10 ⁻⁵	-4.314 10 ⁻⁵	p_9
									5.286 10⁻⁵	-2.852 10 ⁻⁵	9.624 10 ⁻⁶	4.091 10 ⁻⁶	-7.562 10 ⁻⁶	2.059 10 ⁻⁵	p_{10}
										1.693 10⁻⁴	-2.314 10 ⁻⁵	-4.315 10 ⁻⁵	-4.488 10 ⁻⁵	-3.485 10 ⁻⁵	p_{11}
											8.804 10⁻⁵	4.092 10 ⁻⁵	-2.641 10 ⁻⁵	-4.182 10 ⁻⁵	p_{12}
												4.439 10⁻⁵	3.771 10 ⁻⁵	-1.806 10 ⁻⁵	p_{13}
													1.153 10⁻⁴	1.016 10 ⁻⁵	p_{14}
														1.517 10⁻⁴	p_{15}

TABLA 4.10. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	FRONTERA $f_1(z)$	FRONTERA $f_2(z)$	FRONT. INFERIOR
$p_1 = -0.658 \pm 0.013 \text{ g/cm}^3$	$p_7 = -3.97 \pm 0.03 \text{ km}$	$p_{11} = 4.42 \pm 0.03 \text{ km}$	$p_{15} = 2.65 \pm 0.03 \text{ km}$
$p_2 = -0.005 \pm 0.003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_8 = 0.14 \pm 0.02$	$p_{12} = 0.71 \pm 0.02$	
$p_3 = -0.03 \pm 0.03 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_9 = 0.10 \pm 0.02 \text{ km}^{-1}$	$p_{13} = -0.01 \pm 0.02 \text{ km}^{-1}$	
$p_4 = -0.037 \pm 0.006 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{10} = 0.26 \pm 0.02 \text{ km}^2$	$p_{14} = -0.07 \pm 0.03 \text{ km}^2$	
$p_5 = 0.0397 \pm 0.0003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$			
$p_6 = 0.03 \pm 0.02 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$			

TABLA 4.11. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

Como se observa en la figura 4.31, las cuatro primeras combinaciones están formadas exclusivamente por pesos correspondientes a los parámetros del contraste de densidad, por lo que debe presentarse una correlación importante entre ellos. Esta dependencia lineal no impide que estos parámetros presenten muy buena resolución en el problema, ya que todos ellos están relacionados con combinaciones de parámetros cuyos errores característicos son muy pequeños, por lo que no están demasiado afectados por inestabilidades debidas a la propagación de los errores presentes en los datos.

En cuanto a los parámetros de la estructura vemos que existe una correlación fuerte positiva entre el p_8 y el p_9 . Estos parámetros están asociados a combinaciones cuyos errores característicos son mayores que la unidad. Otra correlación que se puede observar en la figura 4.33 tiene lugar entre los parámetros p_{12} y p_{13} , cuya resolución también está influenciada por inestabilidad debida a los errores que contaminan los datos de gravedad.

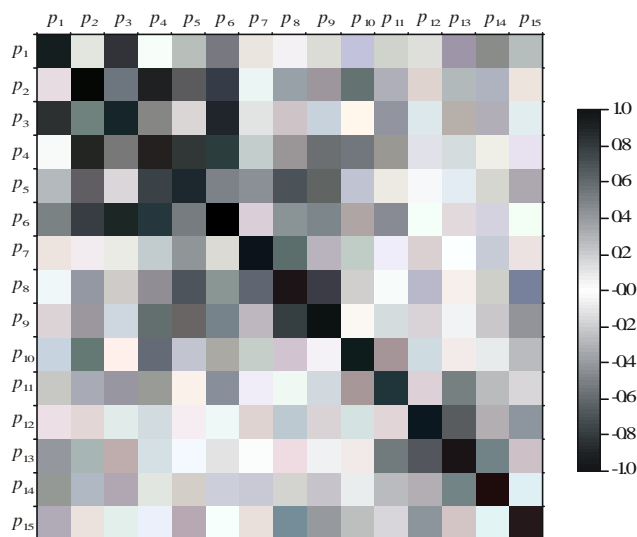


FIGURA 4.33. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

Por todo lo anterior, vemos que los valores de algunos de los parámetros del modelo resultante no coinciden con los valores de los parámetros del modelo sintético. Esto se debe primeramente a la naturaleza suave de las funciones polinómicas que describen las características de la fuente anómala. El método de inversión intenta ajustar los parámetros del modelo de forma que la anomalía correspondiente resulte lo más parecida a la curva promedio de los datos. Por otro lado, en este ejemplo se produce la propagación de los errores de los datos en ciertas combinaciones de parámetros relacionadas principalmente con la estructura de la fuente, produciendo inestabilidades y haciendo difícil la convergencia hacia la solución real del problema.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
1.000 10⁺⁰	1.340 10 ⁻¹	-8.404 10 ⁻¹	6.747 10 ⁻³	-3.108 10 ⁻¹	4.729 10 ⁻¹	8.752 10 ⁻²	8.221 10 ⁻²	1.447 10 ⁻¹	2.137 10 ⁻¹	2.164 10 ⁻¹	1.370 10 ⁻¹	3.967 10 ⁻¹	4.301 10 ⁻¹	-2.837 10 ⁻¹	p_1
	1.000 10⁺⁰	-5.384 10 ⁻¹	-9.547 10 ⁻¹	6.334 10 ⁻¹	8.007 10 ⁻¹	-1.536 10 ⁻¹	-3.095 10 ⁻¹	-3.962 10 ⁻¹	-5.677 10 ⁻¹	3.010 10 ⁻¹	1.820 10 ⁻¹	3.244 10 ⁻¹	2.750 10 ⁻¹	-1.245 10 ⁻¹	p_2
		1.000 10⁺⁰	4.679 10 ⁻¹	-1.953 10 ⁻¹	-8.638 10 ⁻¹	7.583 10 ⁻²	2.349 10 ⁻¹	2.110 10 ⁻¹	3.015 10 ⁻²	-4.108 10 ⁻¹	-9.483 10 ⁻²	-2.812 10 ⁻¹	-3.345 10 ⁻¹	1.406 10 ⁻¹	p_3
			1.000 10⁺⁰	-7.242 10 ⁻¹	-8.221 10 ⁻¹	2.438 10 ⁻¹	4.480 10 ⁻¹	5.443 10 ⁻¹	6.302 10 ⁻¹	-3.740 10 ⁻¹	-1.316 10 ⁻¹	-1.557 10 ⁻¹	-1.029 10 ⁻¹	3.383 10 ⁻²	p_4
				1.000 10⁺⁰	5.518 10 ⁻¹	-4.489 10 ⁻¹	-6.713 10 ⁻¹	-6.566 10 ⁻¹	-1.627 10 ⁻¹	1.170 10 ⁻¹	9.624 10 ⁻³	-7.506 10 ⁻²	-1.329 10 ⁻¹	3.568 10 ⁻¹	p_5
					1.000 10⁺⁰	-1.909 10 ⁻¹	-4.506 10 ⁻¹	-4.922 10 ⁻¹	-3.551 10 ⁻¹	4.898 10 ⁻¹	5.200 10 ⁻²	1.436 10 ⁻¹	1.975 10 ⁻¹	4.609 10 ⁻³	p_6
						1.000 10⁺⁰	5.877 10 ⁻¹	2.817 10 ⁻¹	-1.760 10 ⁻¹	-2.329 10 ⁻²	-1.328 10 ⁻¹	-7.153 10 ⁻²	1.276 10 ⁻¹	-1.307 10 ⁻¹	p_7
							1.000 10⁺⁰	7.976 10 ⁻¹	-1.964 10 ⁻¹	-1.116 10 ⁻¹	-2.215 10 ⁻¹	-4.276 10 ⁻²	2.457 10 ⁻¹	-4.576 10 ⁻¹	p_8
								1.000 10⁺⁰	-3.762 10 ⁻²	-1.838 10 ⁻¹	-1.627 10 ⁻¹	5.261 10 ⁻²	2.255 10 ⁻¹	-4.277 10 ⁻¹	p_9
									1.000 10⁺⁰	-3.015 10 ⁻¹	1.411 10 ⁻¹	8.445 10 ⁻²	-9.685 10 ⁻²	2.299 10 ⁻¹	p_{10}
										1.000 10⁺⁰	-1.895 10 ⁻¹	-4.978 10 ⁻¹	-3.213 10 ⁻¹	-2.175 10 ⁻¹	p_{11}
											1.000 10⁺⁰	6.545 10 ⁻¹	-2.621 10 ⁻¹	-3.619 10 ⁻¹	p_{12}
												1.000 10⁺⁰	5.271 10 ⁻¹	-2.201 10 ⁻¹	p_{13}
													1.000 10⁺⁰	7.681 10 ⁻²	p_{14}
														1.000 10⁺⁰	p_{15}

TABLA 4.12. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

4.2. FUENTE ANOMALA LIMITADA SUPERIOR E INFERIORMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LA VARIABLE X

La estructura geométrica de este tipo de fuentes viene representada matemáticamente mediante la ecuación (2.23) y su representación gráfica general se puede ver en la figura 2.6. Al igual que en la sección anterior, vamos a considerar el caso más general, en el que el contraste de densidad varía en función de las variables x y z según la ecuación (2.37). El problema directo, correspondiente a una fuente con una estructura geométrica y un contraste de densidad como los descritos anteriormente, viene expresado mediante la ecuación (2.43).

Por continuidad con el caso 4.1, supondremos que el contraste de densidad de la fuente va a venir determinado por el mismo polinomio cuadrático de la expresión (4.1) para facilitar la inversión de la ecuación (2.43). Para ello, se ha supuesto que las funciones $A_2(x)$, $B_2(x)$ y $C_2(x)$ de la densidad son los polinomios:

$$\begin{aligned} A_2(x) &= p_1 + p_2 x + p_5 x^2 \\ B_2(x) &= p_3 + p_4 x \\ C_2(x) &= p_6 \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $p_j \in \mathfrak{R}$, con $j = 1, \dots, 6$, siendo \mathfrak{R} el espacio de los números reales.

Sustituyendo los polinomios anteriores en la ecuación (2.43) y reagrupando los términos del integrando, obtenemos:

$$\begin{aligned} g(x_0, z_0) &= G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\mathbf{Dr}(x, z_0) - p_6 (x - x_0)^2 \right] \ln \left\{ (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\} - \right. \\ &\quad \left. - 2[p_3 + p_4 x + 2p_6 z_0](x - x_0) \arctan \left(\frac{z - z_0}{x - x_0} \right) + 2(p_3 + p_4 x + p_6 z_0)[z - z_0] + p_6 [z^2 - z_0^2] \right\} \Bigg|_{g_1(x)}^{g_2(x)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $\mathbf{Dr}(x, z_0) = p_1 + p_2 x + p_3 z_0 + p_4 x z_0 + p_5 x^2 + p_6 z_0^2$, siendo z_0 la ordenada del observador. La solución numérica de la ecuación anterior, calculada mediante la cuadratura de Gauss-Legendre, nos proporciona el problema directo para este tipo de fuentes anómalas.

En el problema de inversión que vamos a tratar, las funciones incógnitas son el contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x, z)$, dada por la ecuación (4.1), las fronteras laterales $x_1 = p_{11}$ y $x_2 = p_{12}$, y la frontera inferior $g_2(x)$ descrita por el polinomio de tercer grado:

$$g_2(x) = p_7 + p_8 x + p_9 x^2 + p_{10} x^3 \quad (4.13)$$

donde $p_j \in \mathfrak{R}$. Consideraremos para este problema que la frontera superior $g_1(x)$ es conocida y coincide con la topografía.

El vector de parámetros \mathbf{p} se construye con los coeficientes de los polinomios $\mathbf{Dr}(x,z)$ y $g_2(x)$, y las funciones constantes p_{11} y p_{12} , obteniendo:

$$\mathbf{p} = (p_j) \quad j = 1, \dots, 12 \quad (4.14)$$

que es un vector que pertenece al espacio euclídeo de dimensión $N = 12$. Con este conjunto de parámetros el funcional de la ecuación (4.12) no es lineal, por tanto utilizaremos el método de Marquardt-Levenberg, dado por el sistema de ecuaciones (4.7), para realizar la inversión del problema a partir de datos de gravedad conocidos. Las expresiones matemáticas de los elementos del jacobiano \mathbf{J} correspondientes a este problema se pueden ver en el Apéndice B. Una vez obtenidas estas expresiones se define un modelo inicial mediante el vector:

$$\mathbf{p}^0 = (p_j^0) \quad j = 1, \dots, 12 \quad (4.15)$$

del que conocemos su respuesta gravimétrica mediante la ecuación (4.12).

En las siguientes secciones se presentan dos ejemplos con datos de gravedad generados por un único modelo teórico de fuente anómala. En el primer ejemplo los datos están libres de ruido y en el segundo ejemplo los datos se presentan contaminados por ruido aleatorio de promedio cero.

4.2.1. Ejemplo teórico con datos que no presentan errores numéricos

Para este caso, consideraremos la anomalía de la gravedad de la figura 2.9 (b) producida por la fuente anómala de la figura 2.9(a), donde el contraste de densidad viene dado por la función polinómica: $\mathbf{Dr}(x,z) = -0.3 - 0.05x + 0.09z - 0.01x^2 + 0.01z^2$, las fronteras superior e inferior del cuerpo vienen dadas por los polinomios $g_1(x) = -0.1 + 0.03x + 0.001x^2 + 0.005x^3$ y $g_2(x) = 3 - 0.02x - 0.001x^2 - 0.007x^3$ y las fronteras laterales son $x_1 = -5$ y $x_2 = 5$. Como en el caso 4.1.1, vamos a suponer que no conocemos los coeficientes de los polinomios que describen este modelo, excepto los de la frontera superior $g_1(x)$, pero queremos calcularlos realizando el problema de inversión a partir de un perfil de 100 datos igualmente espaciados que nos proporcionan la anomalía

gravimétrica correspondiente. Para ello necesitamos plantear un modelo inicial del cual partir. Consideraremos que el contraste de densidad de este modelo inicial viene descrito por la función polinómica $\Delta\rho(x, z) = -0.1 - 0.07x + 0.07z - 0.08xz - 0.03x^2 + 0.008z^2$, su frontera inferior viene dada por el polinomio $g_2(x) = 3.5 - 0.009x - 0.001x^2 + 0.009x^3$ y sus fronteras laterales son $x_1 = -4.5$ y $x_2 = 4.5$. En la figura 4.34(a) podemos ver la forma de este cuerpo con su contraste de densidad y en la figura 4.34(b) se presenta la anomalía gravimétrica de este cuerpo y el perfil de datos gravimétricos.

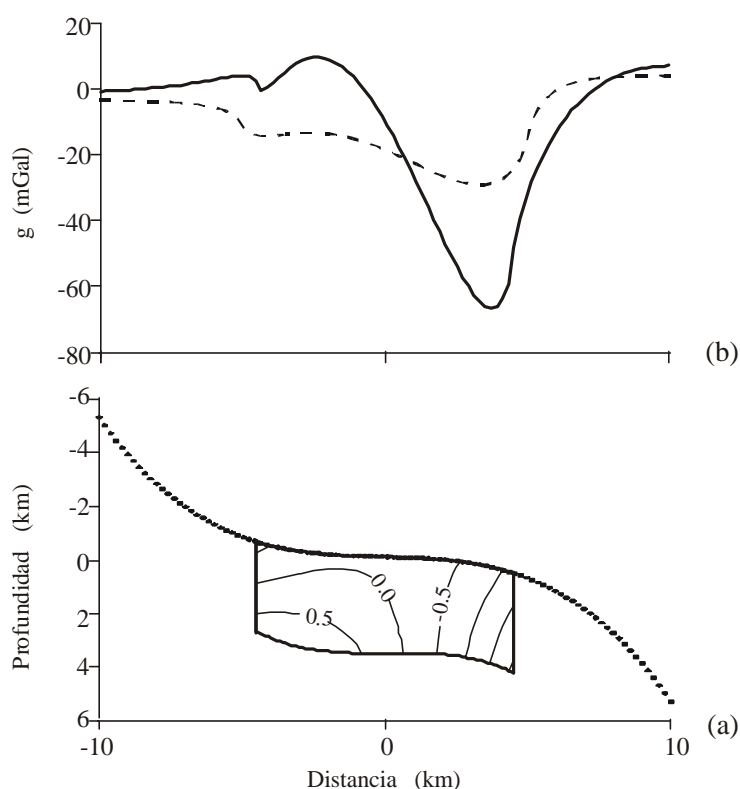


FIGURA 4.34. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x . Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 . Los puntos en la frontera superior del cuerpo representan las posiciones del observador. (b) La línea a trazos corresponde a los datos de gravedad sintéticos generados por la fuente representada en la figura 2.9(a). La línea continua corresponde a la anomalía gravimétrica producida por la fuente (a).

El vector de los parámetros del modelo inicial de la figura anterior es:

$$\left(\mathbf{p}^0\right)^T = (-0.1, -0.07, 0.07, -0.08, -0.03, 0.008, 3.5, -0.009, -0.001, 0.009, -4.5, 4.5)^T \quad (4.16)$$

y con este modelo se comienza el proceso de inversión por el que se calcula la solución del sistema (4.7) para diferentes valores del factor de amortiguación. La solución al problema se alcanza cuando el desajuste es $q = 10^{-10}$ mGal², prácticamente cero, como se observa en la figura 4.35. Esto significa que el ajuste entre los datos de gravedad del problema y la anomalía gravimétrica del modelo resultante es muy bueno. El modelo resultante del proceso de inversión, junto con su respuesta gravimétrica, se pueden ver en la figura 4.36.

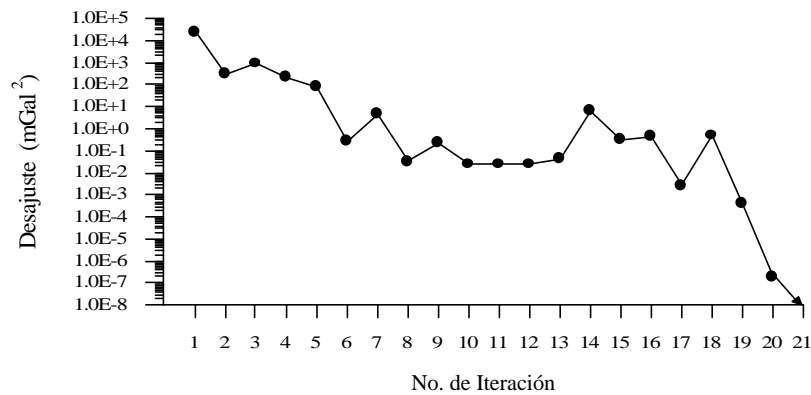


FIGURA 4.35. Evolución del desajuste q .

La figura 4.37 nos proporciona la gráfica del residual del problema donde se aprecia la diferencia tan pequeña existente entre ambas anomalías gravimétricas. Esta diferencia es del orden de 10^{-6} mGal y es debida a los errores numéricos producidos en los cálculos del problema.

Los parámetros que describen el contraste de densidad de este modelo se pueden comparar con los de los modelos sintético e inicial en la tabla 4.13. En esta tabla vemos que los parámetros del modelo resultante son los mismos que los del modelo sintético generador de los datos de gravedad del problema, considerando cuatro cifras decimales. Lo mismo sucede con los parámetros que describen la estructura del modelo resultante, que se pueden comparar con los de los otros dos modelos en la tabla 4.14.

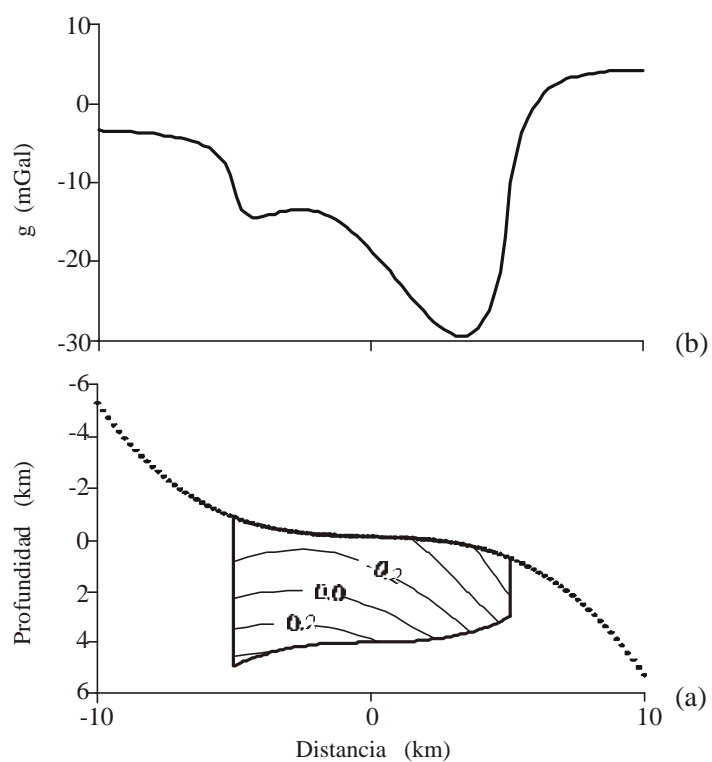


FIGURA 4.36. (a) Modelo resultante de fuente anómala obtenida en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x . Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 . Los puntos en la frontera superior del cuerpo representan las posiciones del observador. (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a).

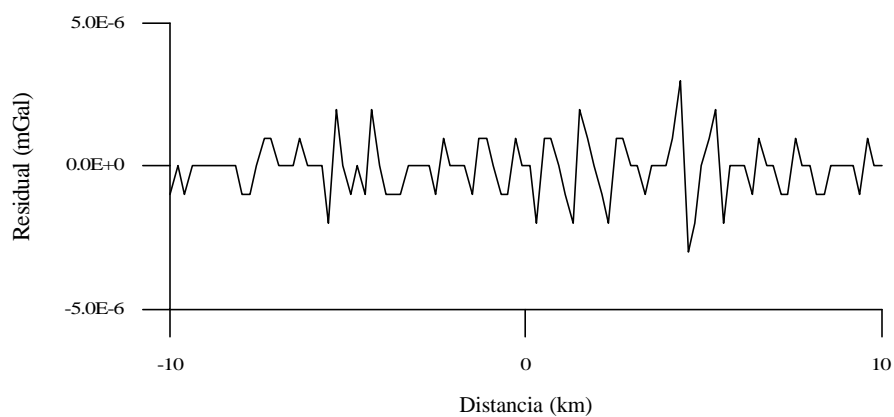


FIGURA 4.37. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad y la anomalía gravimétrica del modelo resultante.

DENSIDAD	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
Modelo Inicial	-0.1000	-0.0700	0.0700	-0.0800	-0.0300	0.0080
Modelo resultante	-0.3000	-0.0500	0.0900	0.0000	-0.0100	0.0100
Modelo sintético	-0.3000	-0.0500	0.0900	0.0000	-0.0100	0.0100

TABLA 4.13. Parámetros de los contrastes de densidad correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

ESTRUCTURA	FRONTERA INFERIOR $g_2(z)$				FRONTERA IZQUIERDA	FRONTERA DERECHA
	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
Modelo Inicial	3.5000	-0.0090	-0.0010	0.0090	-4.5000	4.5000
Modelo Resultante	3.0000	-0.0200	-0.0010	-0.0070	-5.0000	5.0000
Modelo Sintético	3.0000	-0.0200	-0.0010	-0.0070	-5.0000	5.0000

TABLA 4.14. Parámetros de las estructuras correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

4.2.1.1 Evolución de los parámetros del modelo

En la figura 4.38 se puede ver la evolución del factor de amortiguación utilizado en el proceso de inversión. Vemos cómo a lo largo de las 16 iteraciones este factor evoluciona experimentando saltos bruscos hasta llegar al valor $\mathbf{b}^{-1} = 0$ con el que se calculan las dos últimas iteraciones, llegando a la solución del problema. Si se compara esta figura con la 4.35, vemos que, debido a la dependencia de este factor con el desajuste, los comportamientos de ambos parámetros son similares.

La evolución de los parámetros del contraste de densidad a través de todo el proceso iterativo está representada en la gráfica de la figura 4.39. Vemos como estos seis parámetros alcanzan convergencia hacia la solución alrededor de la decimoctava iteración. Lo mismo ocurre con los parámetros de la frontera inferior, cuya evolución se puede ver en la figura 4.40.

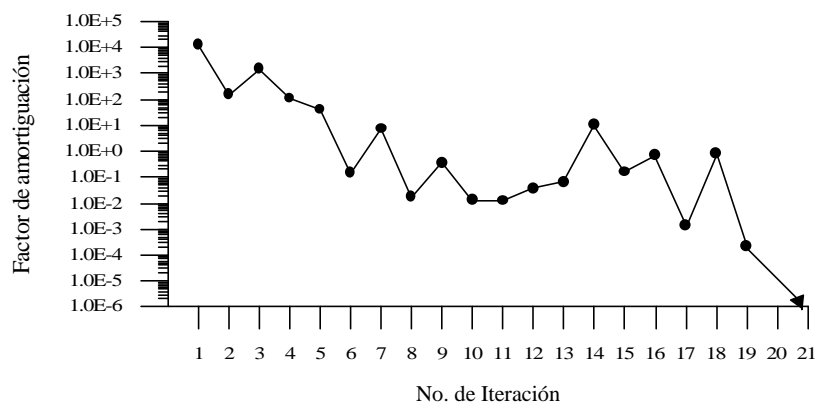


FIGURA 4.38. Evolución del factor de amortiguación b^{-1} .

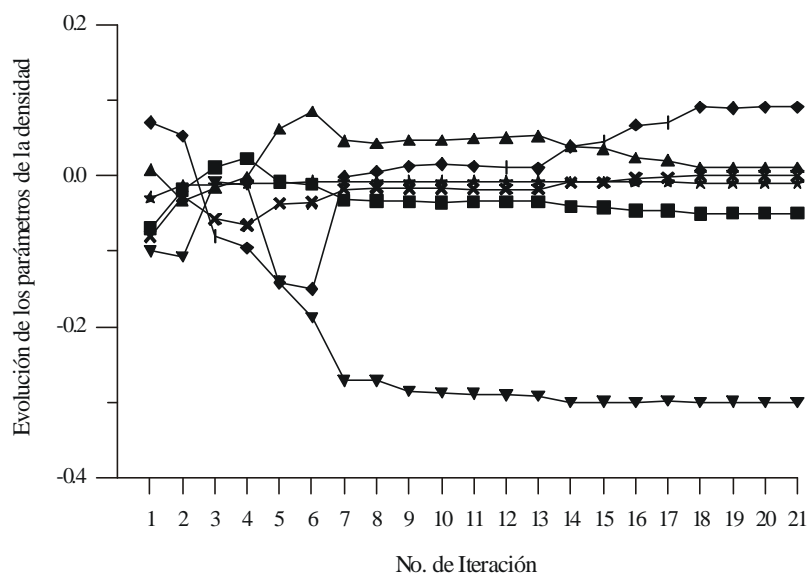


FIGURA 4.39. Evolución de los parámetros del contraste de densidad desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_1 (▼); p_2 (■); p_3 (◆); p_4 (✕); p_5 (★); p_6 (▲).

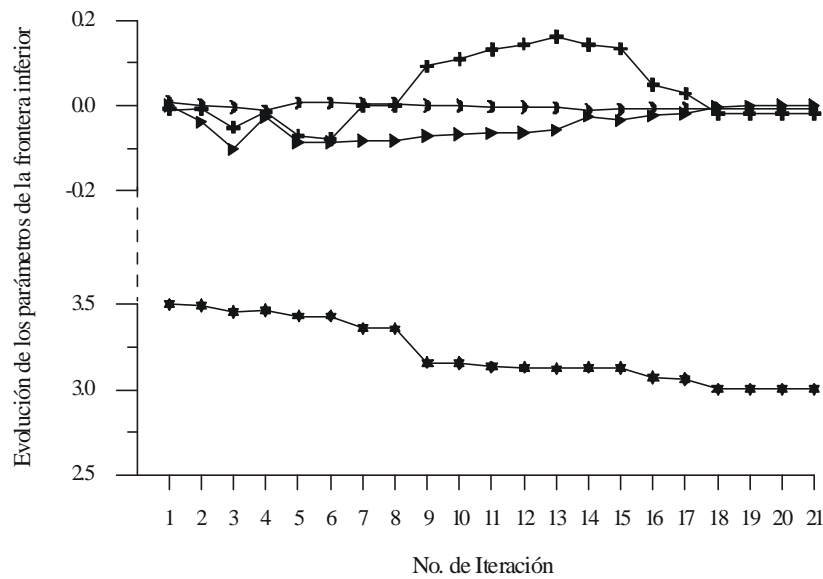


FIGURA 4.40. Evolución de los parámetros de la frontera inferior desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_7 (●); p_8 (■); p_9 (▴); p_{10} (◆).

En cuanto a los parámetros que determinan las fronteras laterales, su evolución está representada en la figura 4.41. Se observa que estos parámetros alcanzan la convergencia hacia la solución en la séptima iteración.

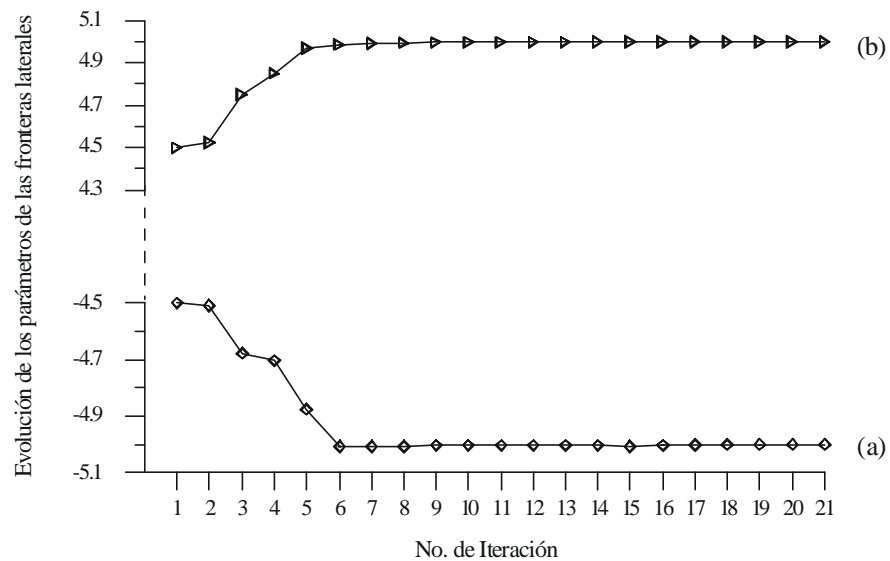


FIGURA 4.41. Evolución de los parámetros de las fronteras laterales desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión.(a) Frontera izquierda p_{11} (◇). (b) Frontera derecha p_{12} (▴).

4.2.1.2 Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

Como es habitual, vamos a analizar la sensibilidad que tienen los datos de gravedad con respecto a los parámetros del cuerpo anómalo. En la figura 4.42 se presentan las seis primeras columnas de la matriz jacobiano, las cuales corresponden a las derivadas del funcional de la ecuación (4.12) con respecto a los seis parámetros que describen el contraste de densidad de la fuente y cuyas expresiones se pueden ver en el Apéndice B. La intensidad máxima de la curva de la gráfica (a) es $106.9 \frac{\text{mGal}}{\text{g/cm}^3}$. Esta curva corresponde a la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_1 . Como se puede apreciar esta curva no es simétrica, en general es positiva, pero los datos situados en la parte derecha del perfil presentan sensibilidad negativa frente a dicho parámetro, esto es, cuando p_1 aumenta su valor, la anomalía gravimétrica disminuye en esta zona.

La figura 4.42(b) corresponde a la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_2 . Esta curva presenta un máximo de intensidad de $202.2 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$ en la posición del perfil que se encuentra sobre la frontera derecha de la fuente, por lo que los datos situados en esta zona son sensibles a variaciones positivas de p_2 . La curva también presenta un pico negativo de $-287.3 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$ sobre la frontera izquierda de la fuente, donde los datos son sensibles a variaciones negativas de este parámetro.

La gráfica (c) es la variación de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_3 . Su forma es parecida a la de la figura (a), pero su valor máximo es $144.3 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$. La gráfica (d) es parecida a la (b) con un máximo de $242.3 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y un máximo negativo de $-296.2 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y corresponde a la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_4 .

La curva de la figura 4.42(e) presenta dos máximos, uno de $1214.6 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y el otro de $845.1 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$, y corresponde a la derivada del funcional de la ecuación 4.12 con respecto al parámetro p_5 . La última gráfica es parecida a las gráficas (a) y (c) y su máximo de intensidad es $288.3 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$. Esta curva corresponde a la variación de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a p_6 .

De estas seis curvas la que presenta mayor intensidad es la de la gráfica (e). De esto se infiere que, para este ejemplo, los datos de gravedad son más sensibles al parámetro p_5 que a cualquier otro, mientras que para el parámetro p_1 los datos son menos sensibles, ya que la gráfica correspondiente es la que presenta el máximo menos intenso.

A continuación vamos a estudiar la sensibilidad de los datos frente a variaciones en los parámetros de la frontera inferior. Para ello graficamos las siguientes cuatro columnas de la matriz jacobiano y las presentamos en la figura 4.43. En las cuatro curvas graficadas aparece un pico negativo de intensidad en la zona correspondiente al perfil de datos que se encuentra situada sobre la frontera derecha. La presencia de estos máximos negativos es debida a que las posiciones del observador en la parte derecha del perfil se encuentran más cercanas a la frontera inferior que las situadas a en la parte izquierda. Por tanto, los datos registrados en esa zona deben ser más sensibles a variaciones producidas en los valores de los parámetros de la frontera inferior.

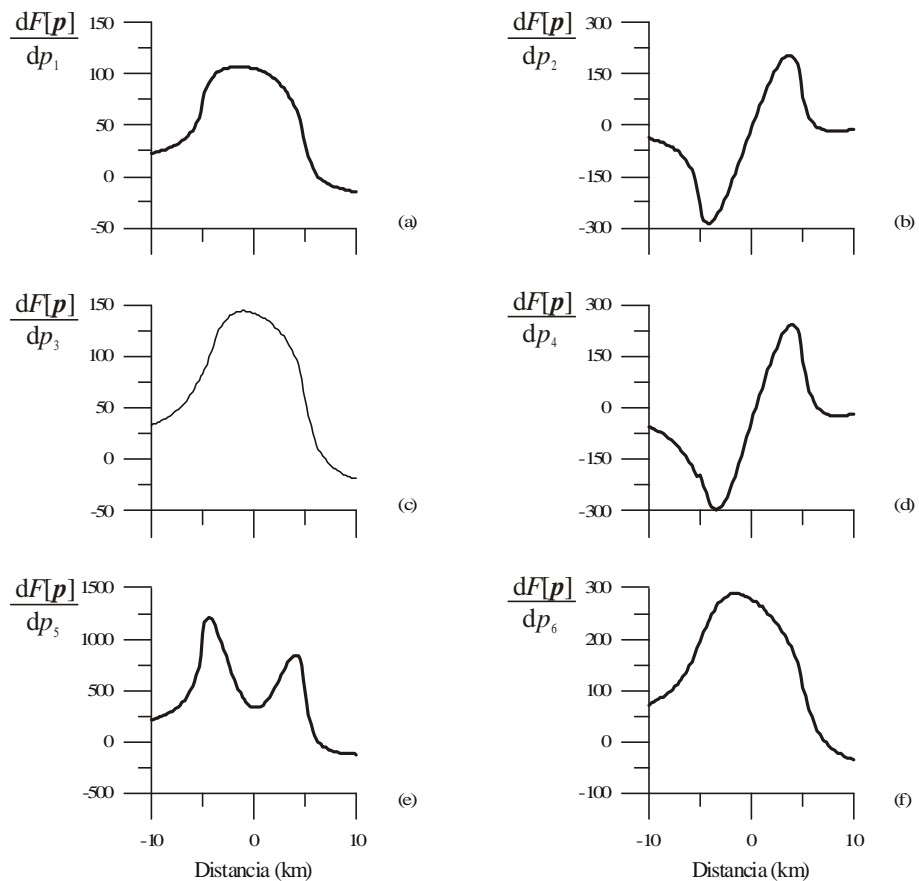


FIGURA 4.42. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen el contraste de densidad de la fuente.

De las cuatro gráficas de la figura 4.43, el pico negativo más intenso corresponde a la curva (d), con un valor de -456.8 mGal km^2 . Esta curva representa la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_{10} . Esto significa que los datos de gravedad son más sensibles a este parámetro que a los otros tres que definen la frontera inferior de la fuente. El parámetro con menos efecto es el p_7 , como se observa en la gráfica (a), con un pico negativo de intensidad de $-5.4 \text{ mGal km}^{-1}$. En cuanto a las curvas restantes, el pico negativo de la gráfica (b) es de -25.0 mGal y corresponde a la sensibilidad con respecto al parámetro p_8 , mientras que el de la gráfica (c) tiene un valor de -98.3 mGal km . Las curvas de las gráficas (a) y (c) presentan un máximo en la parte correspondiente a la frontera izquierda del perfil. Para la curva (a) este máximo tiene un valor de 1.7 mGal km^{-1} y para la gráfica (c) tiene un valor de 15.3 mGal km . En cuanto a las gráficas (b) y (d), éstas presentan un máximo negativo relativo sobre el borde izquierdo del cuerpo de valores -9.4 mGal y -125.2 mGal km^2 , respectivamente.

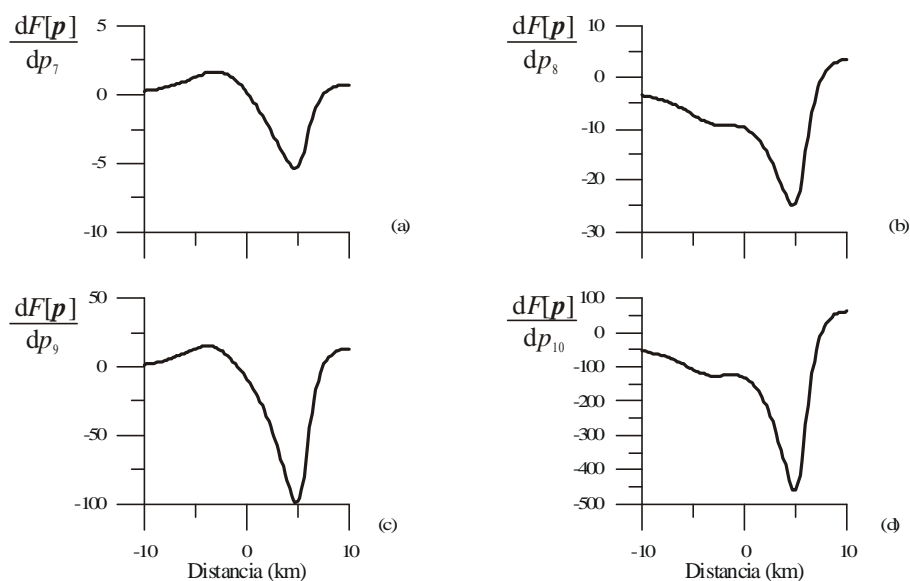


FIGURA 4.43. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera inferior de la fuente.

Por último vamos a ver la sensibilidad de los datos con respecto a los parámetros que describen las fronteras laterales. La curva correspondiente a la frontera izquierda se puede ver en la figura 4.44(a). Presenta un máximo de $15.9 \text{ mGal km}^{-1}$ de intensidad situado en la posición de esta

frontera, mientras que la curva (b) correspondiente a la frontera derecha presenta un pico negativo de intensidad $-29.4 \text{ mGal km}^{-1}$ ubicado sobre dicha frontera. Ambas gráficas presentan formas muy agudas, ocupando zonas muy estrechas en el perfil de datos. Esto se debe a que las fronteras laterales son funciones constantes y su proyección sobre el perfil es muy pequeña. Como se puede ver, los datos de gravedad son más sensibles a la frontera derecha que a la izquierda, debido a las posiciones del observador con respecto a dichas fronteras, como se puede ver en la figura 4.36.

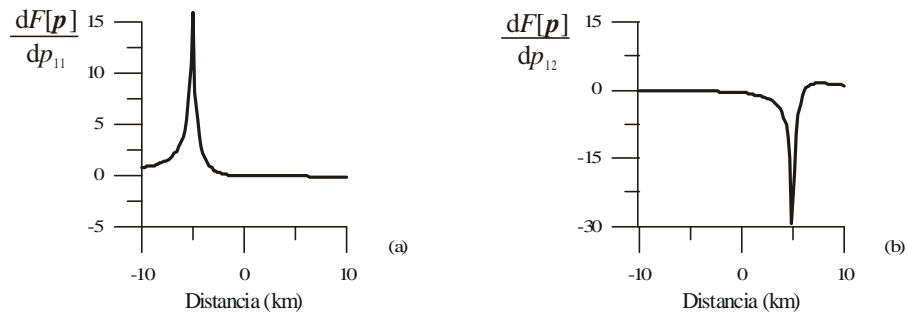


FIGURA 4.44. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen las fronteras laterales de la fuente.

El siguiente paso para estudiar la existencia la unicidad, la existencia y la estabilidad de la solución es hacer la descomposición en valores singulares del jacobiano. Los 15 valores singulares obtenidos de dicha descomposición vienen representados en la figura 4.45. Como el jacobiano es de rango completo ($\mathbf{h} = 15$) el subespacio \mathbf{V}_0 es un espacio vacío, por lo que está asegurada la existencia y la unicidad de la solución a partir del modelo inicial elegido, pero su resolución puede presentar inestabilidad numérica debido a que la condición de la matriz es $\kappa = 2.034 \cdot 10^4$, que es un valor elevado.

Las combinaciones de parámetros obtenidas de los vectores-columnas de la matriz \mathbf{V}_h se presentan en la tabla 4.15, junto con los valores singulares correspondientes, en la que se ha resaltado en color oscuro las componentes de \mathbf{V}_h cuyos valores absolutos son mayores que 0.5. Como se observa en dicha tabla, el parámetro con mayor peso en la primera combinación de los parámetros asociada al valor singular más grande es el p_5 . Este parámetro pertenece a la densidad de la fuente y es el que presenta mayor exactitud en su solución y el que antes se resuelve en el proceso iterativo. El parámetro con mayor peso en la combinación asociada al valor singular más pequeño es el p_7 y

pertenece a la frontera inferior de la fuente. El valor de este parámetro es el último que llega a la solución a lo largo de las 21 iteraciones.

En general, los pesos más grandes de los parámetros del contraste de densidad pertenecen a combinaciones de parámetros asociadas a valores singulares grandes, excepto el del parámetro p_3 , que pertenece a la combinación dada por el vector \mathbf{v}_{10}^T . Los pesos más grandes de los parámetros de la frontera inferior pertenecen a combinaciones asociadas a valores singulares pequeños, excepto el parámetro p_{10} , que pertenece a la combinación dada por \mathbf{v}_4^T . Según esto, tres de los parámetros de la frontera inferior pueden presentar inestabilidades de tipo numérico al calcular su solución, no obstante, como se observa en la tabla 4.14, vemos que si estas inestabilidades existieran, no serían importantes, ya que se han podido alcanzar las soluciones reales de los parámetros al final del proceso iterativo.

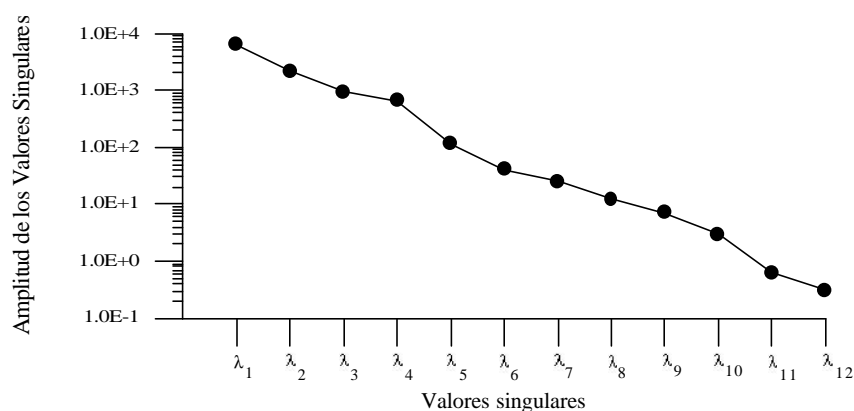


FIGURA 4.45. Valores singulares del jacobiano del problema.

En la figura 4.46 se comparan los vectores característicos del jacobiano en el espacio de los datos \mathbf{U}_h con los vectores característicos en el espacio de los parámetros \mathbf{V}_h . Primero consideraremos los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{v}_1 asociados al valor singular más grande $\lambda_1 = 6.220 \cdot 10^3$. En la combinación de parámetros destaca el peso correspondiente al parámetro p_5 , seguido por el peso correspondiente a p_6 . Los datos que participan en su resolución se encuentran situados principalmente en la parte central del perfil ubicada sobre el cuerpo anómalo, con mayor participación de los que se encuentran sobre las fronteras laterales.

La siguiente combinación de parámetros está asociada al valor singular $\lambda_2 = 2.164 \cdot 10^3$. En esta combinación destacan los pesos asociados a los parámetros p_4 , p_2 y p_{10} . Los datos que contienen información acerca de ellos se encuentran en la misma posición que para la combinación anterior, pero los que se encuentran situados en la parte derecha del perfil presentan sensibilidad negativa.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	\mathbf{l}_i
\mathbf{v}_1^T	1.027 10 ⁻¹	-8.513 10 ⁻²	1.354 10 ⁻¹	-9.416 10 ⁻²	9.083 10⁻¹	2.744 10 ⁻¹	-5.869 10 ⁻⁴	-1.501 10 ⁻²	-2.012 10 ⁻²	-2.324 10 ⁻¹	2.233 10 ⁻³	-2.702 10 ⁻³	6.220 10 ³
\mathbf{v}_2^T	-9.128 10 ⁻³	-5.695 10⁻¹	-3.775 10 ⁻²	-6.533 10⁻¹	1.963 10 ⁻²	-3.121 10 ⁻²	9.323 10 ⁻³	2.596 10 ⁻²	1.478 10 ⁻¹	4.725 10 ⁻¹	4.186 10 ⁻³	1.138 10 ⁻²	2.164 10 ³
\mathbf{v}_3^T	2.655 10 ⁻¹	3.181 10 ⁻³	3.845 10 ⁻¹	-2.165 10 ⁻¹	-3.835 10 ⁻¹	7.411 10⁻¹	2.311 10 ⁻³	-1.850 10 ⁻²	4.200 10 ⁻³	-1.952 10 ⁻¹	-8.140 10 ⁻³	4.510 10 ⁻³	9.396 10 ²
\mathbf{v}_4^T	-1.584 10 ⁻¹	-3.546 10 ⁻¹	-1.566 10 ⁻¹	-2.868 10 ⁻¹	-1.585 10 ⁻¹	-2.360 10 ⁻¹	-7.272 10 ⁻³	-3.590 10 ⁻²	-1.567 10 ⁻¹	-7.968 10⁻¹	1.079 10 ⁻³	-2.665 10 ⁻²	6.622 10 ²
\mathbf{v}_5^T	2.856 10 ⁻¹	-7.081 10⁻¹	3.167 10 ⁻²	6.099 10⁻¹	-4.549 10 ⁻²	5.656 10 ⁻²	-9.074 10 ⁻³	6.071 10 ⁻³	-1.859 10 ⁻¹	6.178 10 ⁻²	3.763 10 ⁻⁴	-1.488 10 ⁻²	1.147 10 ²
\mathbf{v}_6^T	-5.003 10⁻¹	-1.400 10 ⁻¹	-3.873 10 ⁻¹	2.015 10 ⁻¹	-8.929 10 ⁻³	4.208 10 ⁻¹	1.430 10 ⁻²	-1.704 10 ⁻²	4.577 10 ⁻¹	-5.235 10 ⁻²	3.439 10 ⁻¹	1.772 10 ⁻¹	4.039 10 ¹
\mathbf{v}_7^T	6.120 10 ⁻²	1.771 10 ⁻²	-3.313 10 ⁻³	-3.495 10 ⁻²	2.391 10 ⁻³	-3.462 10 ⁻²	-2.539 10 ⁻²	-4.703 10 ⁻²	-1.758 10 ⁻¹	7.188 10 ⁻³	-1.123 10 ⁻¹	9.732 10⁻¹	2.527 10 ¹
\mathbf{v}_8^T	-2.221 10 ⁻¹	-6.491 10 ⁻²	-9.991 10 ⁻²	8.371 10 ⁻²	1.759 10 ⁻³	1.405 10 ⁻¹	-3.496 10 ⁻³	-4.625 10 ⁻²	2.013 10 ⁻¹	-1.646 10 ⁻²	-9.297 10⁻¹	-5.031 10 ⁻²	1.236 10 ¹
\mathbf{v}_9^T	6.257 10⁻¹	3.619 10 ⁻²	-1.822 10 ⁻¹	2.542 10 ⁻³	-1.419 10 ⁻²	-1.874 10 ⁻¹	5.260 10 ⁻²	1.721 10 ⁻¹	6.796 10⁻¹	-1.920 10 ⁻¹	-2.333 10 ⁻²	8.402 10 ⁻²	7.116 10 ⁰
\mathbf{v}_{10}^T	-3.350 10 ⁻¹	-1.212 10 ⁻¹	7.524 10⁻¹	1.158 10 ⁻¹	-4.177 10 ⁻³	-2.553 10 ⁻¹	2.172 10 ⁻¹	2.162 10 ⁻¹	3.415 10 ⁻¹	-7.489 10 ⁻²	3.754 10 ⁻²	1.036 10 ⁻¹	2.948 10 ⁰
\mathbf{v}_{11}^T	5.239 10 ⁻²	-2.239 10 ⁻²	1.506 10 ⁻¹	2.402 10 ⁻²	-4.252 10 ⁻³	-1.166 10 ⁻¹	2.359 10 ⁻²	-9.566 10⁻¹	2.041 10 ⁻¹	-2.377 10 ⁻⁴	4.957 10 ⁻²	-8.668 10 ⁻³	6.187 10 ⁻¹
\mathbf{v}_{12}^T	-4.881 10 ⁻²	-2.405 10 ⁻²	1.577 10 ⁻¹	1.986 10 ⁻²	-1.663 10 ⁻³	-6.080 10 ⁻²	-9.739 10⁻¹	3.592 10 ⁻²	1.328 10 ⁻¹	-1.840 10 ⁻²	1.964 10 ⁻²	5.311 10 ⁻³	3.058 10 ⁻¹

TABLA 4.15. Componentes de los vectores característicos de la matriz \mathbf{V}_h y los valores singulares asociados.

La combinación asociada al valor singular $\lambda_3 = 9.396 \cdot 10^2$ está formada por casi todos los parámetros del contraste de densidad. Los datos sensibles a esta combinación se encuentran también ubicados sobre el cuerpo anómalo y tienen sensibilidad positiva, aunque los que se encuentran sobre las fronteras laterales presentan sensibilidad negativa, como se observa en la figura 4.46.

Para el valor singular $\lambda_4 = 6.622 \cdot 10^2$ la combinación asociada está compuesta por todos los parámetros del contraste de densidad y el parámetro p_{10} de la frontera inferior, siendo este parámetro el que presenta el mayor peso. Por esto mismo los parámetros que presentan mayor sensibilidad se encuentran sobre la parte derecha del cuerpo anómalo, como ya vimos en la figura 4.43 (d).

El siguiente valor singular es $\lambda_5 = 1.147 \cdot 10^2$ y la combinación de parámetros asociada está formada por tres parámetros del contraste de densidad y uno de la frontera inferior. La forma del vector \mathbf{u}_5 es más complicada que las de los anteriores vectores.

En la sexta combinación hay que destacar que los parámetros que describen las fronteras laterales ya tienen pesos significativos. Esta combinación está asociada al valor singular $\lambda_6 = 4.039 \cdot 10^1$. Los datos presentan en general sensibilidad negativa.

La séptima combinación está asociada al valor singular $\lambda_7 = 2.527 \cdot 10^1$. En ella destaca el peso correspondiente al parámetro p_{12} , que es la frontera izquierda. Los datos sensibles a esta combinación se encuentran situados sobre dicha frontera. Lo mismo ocurre con la octava combinación, que está asociada al valor singular $\lambda_8 = 2.735 \cdot 10^0$, en la que el mayor peso corresponde al p_{11} , que es la frontera izquierda.

La siguiente combinación corresponde a $\lambda_9 = 7.116 \cdot 10^0$. Tiene dos componentes cuyo valor es alto y corresponden a los parámetros p_1 y p_9 . Casi todos los datos del perfil son sensibles a esta combinación y la forma del vector \mathbf{u}_9 es bastante complicada, como se aprecia en la figura 4.46. Lo mismo ocurre con el vector \mathbf{u}_{10} asociado al valor singular $\lambda_{10} = 2.948 \cdot 10^0$, cuya combinación está formada por casi todos los parámetros del contraste de densidad y de la frontera inferior.

Las siguientes dos combinaciones corresponden a valores singulares pequeños, por tanto pueden presentar inestabilidades debido a la propagación de errores numéricos inherentes en el cálculo del proceso de inversión. En la combinación undécima destaca el peso del parámetro p_8 y en la duodécima destaca el parámetro p_7 . Ambos pertenecientes a la frontera inferior, haciendo que la determinación de esta fuente tenga peor resolución aunque, como se puede ver en la tabla 4.14, las posibles inestabilidades existentes en la resolución de estas dos combinaciones de parámetros no afectan significativamente a la solución final.

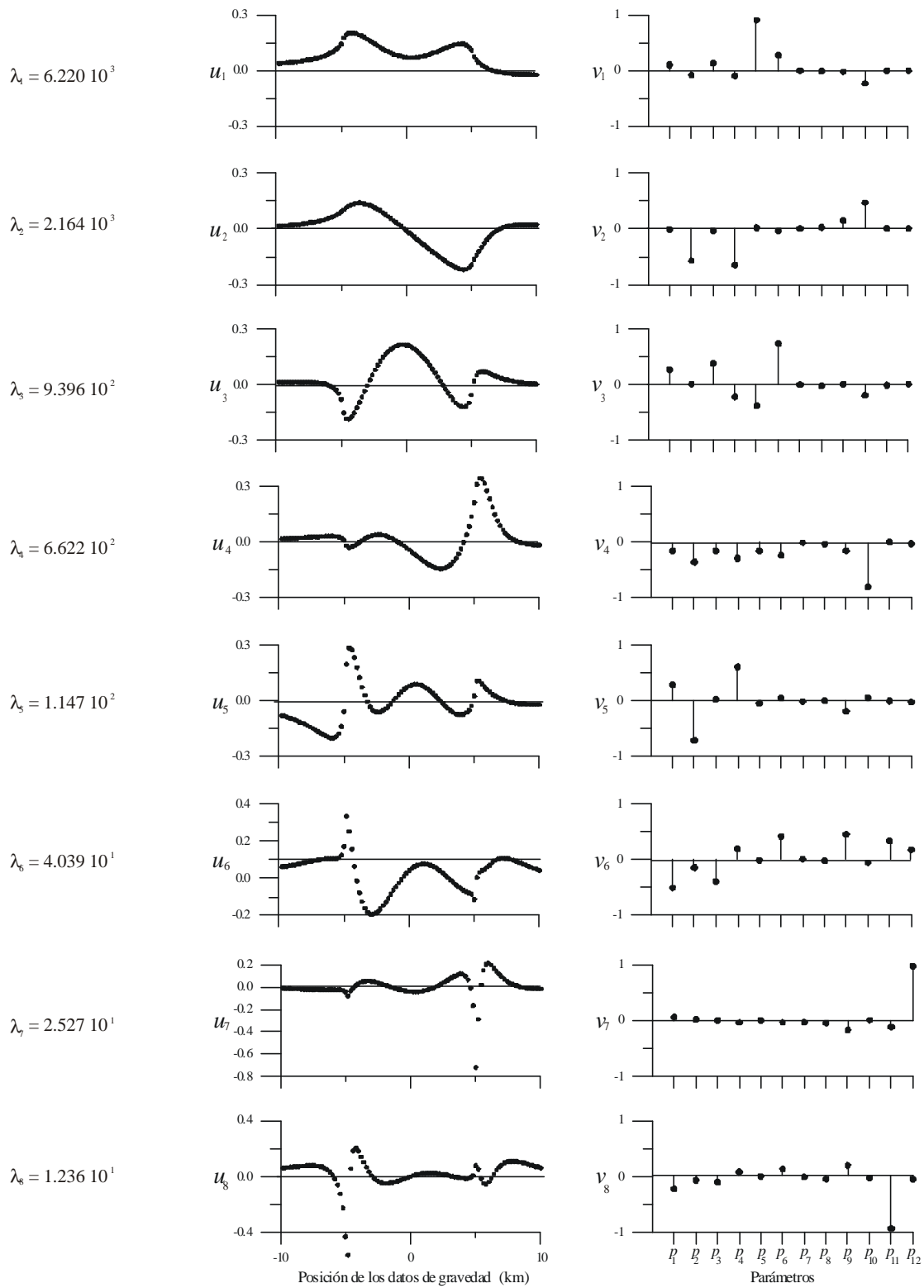


FIGURA 4.46 Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

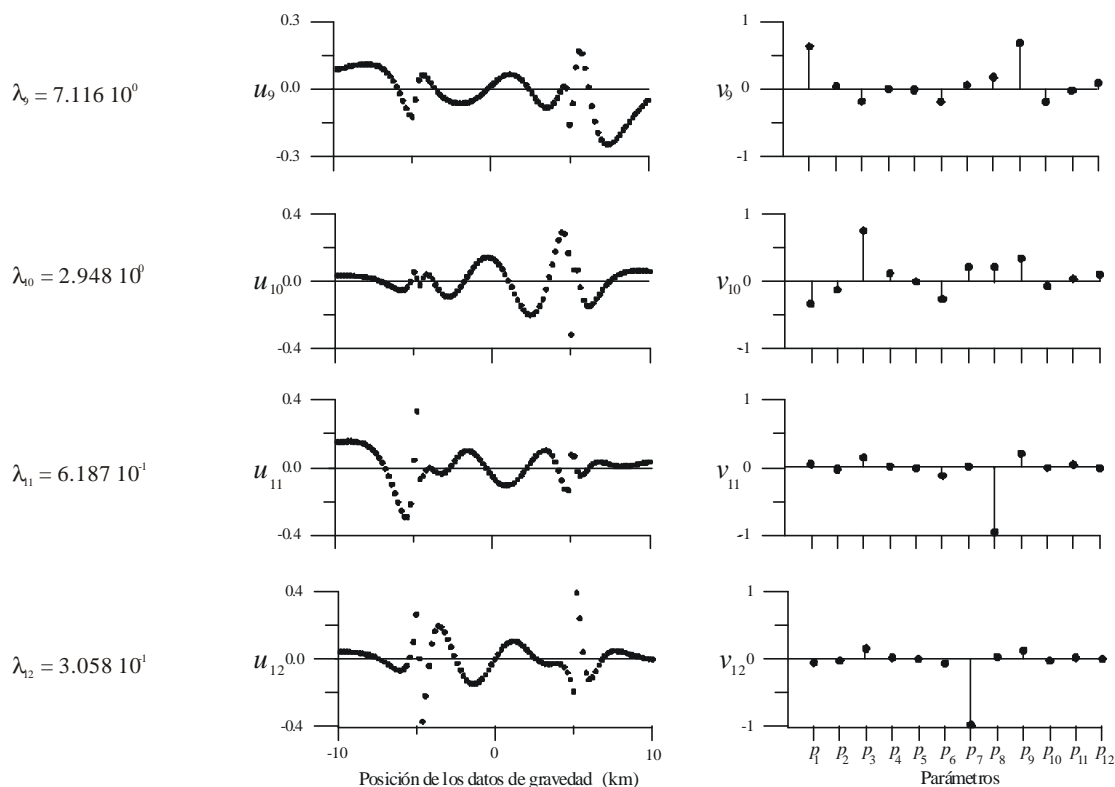


FIGURA 4.46 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

4.2.1.3. Resolución de los parámetros

La matriz de resolución para este caso coincide con la matriz identidad, ya que el valor del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} es cero para la última iteración del proceso. Por tanto, a partir de la ecuación (1.53) podemos ver que se cumple la relación $\mathbf{R} = \mathbf{V}_h \mathbf{V}_h^T = \mathbf{I}$. Esto significa que el estimador de los parámetros $\hat{\mathbf{p}}^{k+1}$, calculado mediante la inversión, debe coincidir con la solución real \mathbf{p} del problema. No obstante, debido a los cálculos numéricos que tienen lugar durante la inversión, es posible que esta coincidencia no sea del todo exacta. Para medir esta posible desviación de la solución real, a continuación vamos a calcular la matriz de covarianza y así obtendremos las incertidumbres de los parámetros.

4.2.1.4. Covarianza de los parámetros

Los elementos de la matriz de covarianza se presentan en la tabla 4.16. En ella podemos ver que los valores numéricos de dichos elementos son casi cero. Esta matriz ha sido calculada a partir de la ecuación (1.60) en la que la varianza residual es $\hat{S} = 1.1 \cdot 10^{-12}$.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
5.917 10⁻¹⁴	1.621 10 ⁻¹⁴	-1.020 10 ⁻¹³	-1.285 10 ⁻¹⁴	2.986 10 ⁻¹⁶	2.528 10 ⁻¹⁴	5.544 10 ⁻¹³	-1.714 10 ⁻¹³	-5.126 10 ⁻¹⁴	1.115 10 ⁻¹⁴	-4.367 10 ⁻¹⁵	-7.485 10 ⁻¹⁵	p_1
	1.022 10⁻¹⁴	-6.594 10 ⁻¹⁴	-9.034 10 ⁻¹⁵	8.000 10 ⁻¹⁶	2.836 10 ⁻¹⁴	2.708 10 ⁻¹³	4.822 10 ⁻¹⁴	-5.554 10 ⁻¹⁴	6.232 10 ⁻¹⁵	-8.943 10 ⁻¹⁵	-2.432 10 ⁻¹⁵	p_2
		4.305 10⁻¹³	5.816 10 ⁻¹⁴	-5.267 10 ⁻¹⁵	-1.871 10 ⁻¹³	-1.777 10 ⁻¹²	-3.273 10 ⁻¹³	3.643 10 ⁻¹³	-4.061 10 ⁻¹⁴	6.215 10 ⁻¹⁴	1.563 10 ⁻¹⁴	p_3
			8.106 10⁻¹⁵	-7.464 10 ⁻¹⁶	-2.586 10 ⁻¹⁴	-2.227 10 ⁻¹³	-5.448 10 ⁻¹⁴	5.033 10 ⁻¹⁴	-5.439 10 ⁻¹⁵	8.052 10 ⁻¹⁵	2.100 10 ⁻¹⁵	p_4
				9.159 10⁻¹⁷	2.805 10 ⁻¹⁵	1.864 10 ⁻¹⁴	1.082 10 ⁻¹⁴	-5.482 10 ⁻¹⁵	4.621 10 ⁻¹⁶	-1.017 10 ⁻¹⁵	-7.635 10 ⁻¹⁷	p_5
					9.181 10⁻¹⁴	6.815 10 ⁻¹³	2.870 10 ⁻¹³	-1.768 10 ⁻¹³	1.642 10 ⁻¹⁴	-3.261 10 ⁻¹⁴	-4.646 10 ⁻¹⁵	p_6
						1.117 10⁻¹¹	-4.703 10 ⁻¹³	-1.497 10 ⁻¹²	2.086 10 ⁻¹³	-2.207 10 ⁻¹³	-5.854 10 ⁻¹⁴	p_7
							2.652 10⁻¹²	-4.931 10 ⁻¹³	-9.886 10 ⁻¹⁵	-1.267 10 ⁻¹³	2.916 10 ⁻¹⁴	p_8
								3.524 10⁻¹³	-3.500 10 ⁻¹⁴	5.982 10 ⁻¹⁴	8.620 10 ⁻¹⁵	p_9
									5.502 10⁻¹⁵	-4.449 10 ⁻¹⁵	-2.465 10 ⁻¹⁵	p_{10}
										1.811 10⁻¹⁴	6.324 10 ⁻¹⁶	p_{11}
											3.731 10⁻¹⁵	p_{12}

TABLA 4.16. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

La raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de la matriz anterior nos proporciona las incertidumbres de los estimadores de los parámetros del problema. En la tabla 4.17 se presentan dichas incertidumbres considerando que el intervalo de confianza es $\pm 2.58 \sigma$. En dicha tabla podemos ver que las mayores incertidumbres corresponden, en general, a los cuatro parámetros que definen la frontera inferior, mientras que las menores corresponden a los parámetros del contraste de densidad.

DENSIDAD	FRONT.INFERIOR	FRONT.IZQUIERDA	FRONT. DERECHA
$p_1 = -0.3000010 \pm 0.0000006 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_7 = 2.999984 \pm 0.000009 \text{ km}$	$p_{11} = -5.0000000 \pm 0.0000003 \text{ km}$	$p_{12} = 5.0000000 \pm 0.0000002 \text{ km}$
$p_2 = -0.0500000 \pm 0.0000003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_8 = -0.020001 \pm 0.000004$		
$p_3 = 0.090003 \pm 0.000002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_9 = -0.000998 \pm 0.000002 \text{ km}^{-1}$		
$p_4 = 0.0000000 \pm 0.0000002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{10} = -0.0070000 \pm 0.0000002 \text{ km}^{-2}$		
$p_5 = -0.01000000 \pm 0.00000003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$			
$p_6 = 0.00999999 \pm 0.0000008 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$			

Tabla 4.17. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

4.2.1.5. Correlación entre los parámetros

Vamos a calcular la matriz de correlación de los parámetros a partir de la ecuación (1.64) utilizando la matriz de covarianza anterior. La forma de dicha matriz se presenta en la figura 4.47 y los valores numéricos de sus elementos se presentan en la tabla 4.18.

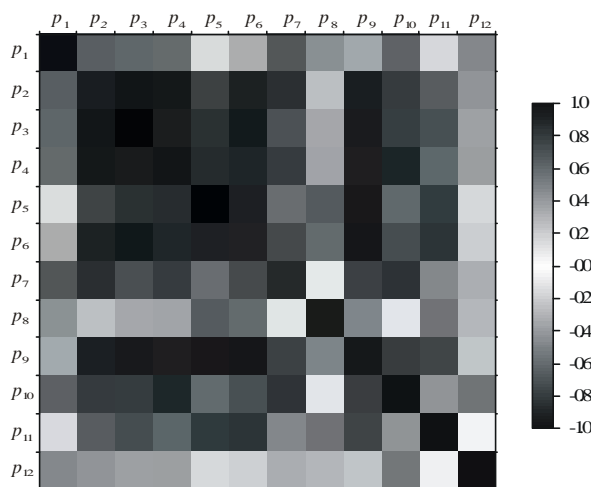


FIGURA 4.47. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$6.592 \cdot 10^{-1}$	$-6.392 \cdot 10^{-1}$	$-5.870 \cdot 10^{-1}$	$-1.283 \cdot 10^{-1}$	$3.430 \cdot 10^{-1}$	$6.820 \cdot 10^{-1}$	$-4.328 \cdot 10^{-1}$	$-3.550 \cdot 10^{-1}$	$6.178 \cdot 10^{-1}$	$-1.334 \cdot 10^{-1}$	$-5.038 \cdot 10^{-1}$	p_1
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-9.940 \cdot 10^{-1}$	$-9.925 \cdot 10^{-1}$	$8.268 \cdot 10^{-1}$	$9.259 \cdot 10^{-1}$	$8.016 \cdot 10^{-1}$	$2.929 \cdot 10^{-1}$	$-9.254 \cdot 10^{-1}$	$8.310 \cdot 10^{-1}$	$-6.572 \cdot 10^{-1}$	$-3.938 \cdot 10^{-1}$	p_2
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$9.845 \cdot 10^{-1}$	$-8.388 \cdot 10^{-1}$	$-9.409 \cdot 10^{-1}$	$-8.104 \cdot 10^{-1}$	$-3.064 \cdot 10^{-1}$	$9.354 \cdot 10^{-1}$	$-8.344 \cdot 10^{-1}$	$7.038 \cdot 10^{-1}$	$3.900 \cdot 10^{-1}$	p_3
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-8.663 \cdot 10^{-1}$	$-9.478 \cdot 10^{-1}$	$-7.404 \cdot 10^{-1}$	$-3.716 \cdot 10^{-1}$	$9.418 \cdot 10^{-1}$	$-8.144 \cdot 10^{-1}$	$6.645 \cdot 10^{-1}$	$3.819 \cdot 10^{-1}$	p_4
				$1.000 \cdot 10^{+0}$	$9.673 \cdot 10^{-1}$	$5.827 \cdot 10^{-1}$	$6.941 \cdot 10^{-1}$	$-9.649 \cdot 10^{-1}$	$6.510 \cdot 10^{-1}$	$-7.894 \cdot 10^{-1}$	$-1.306 \cdot 10^{-1}$	p_5
					$1.000 \cdot 10^{+0}$	$6.731 \cdot 10^{-1}$	$5.816 \cdot 10^{-1}$	$-9.829 \cdot 10^{-1}$	$7.304 \cdot 10^{-1}$	$-7.995 \cdot 10^{-1}$	$-2.510 \cdot 10^{-1}$	p_6
						$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-8.643 \cdot 10^{-2}$	$-7.548 \cdot 10^{-1}$	$8.415 \cdot 10^{-1}$	$-4.906 \cdot 10^{-1}$	$-2.868 \cdot 10^{-1}$	p_7
							$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-5.102 \cdot 10^{-1}$	$-8.185 \cdot 10^{-2}$	$-5.781 \cdot 10^{-1}$	$2.932 \cdot 10^{-1}$	p_8
								$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-7.949 \cdot 10^{-1}$	$7.488 \cdot 10^{-1}$	$2.377 \cdot 10^{-1}$	p_9
									$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-4.456 \cdot 10^{-1}$	$-5.441 \cdot 10^{-1}$	p_{10}
										$1.000 \cdot 10^{+0}$	$7.692 \cdot 10^{-2}$	p_{11}
											$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_{12}

TABLA 4.18. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

Como podemos ver en la figura 4.47, existe una fuerte correlación entre todos los parámetros de la fuente, en especial entre los parámetros del contraste de densidad. El único parámetro que presenta correlaciones más pequeñas es el parámetro p_{12} , que nos define la posición de la frontera izquierda del cuerpo.

4.2.2. Ejemplo teórico con datos que presentan errores numéricos

A continuación vamos a estudiar el mismo ejemplo de la sección anterior pero añadiendo a los datos de gravedad un error de tipo gaussiano de promedio cero y desviación estándar $\mathbf{s} = 0.2$ mGal, lo que corresponde a una incertidumbre del 0.6% para este ejemplo. La forma del perfil de datos de gravedad se puede ver en la figura 4.48. Para calcular la inversión de estos datos se utilizará como modelo inicial el ya empleado para el caso 4.2.1 y que viene representado en la figura 4.34. Comenzando con este modelo inicial se calcula la solución del sistema (4.10) para diferentes valores del factor de amortiguación, cortando el proceso iterativo cuando se alcance un valor de tolerancia $T = E[q_s] = M$, que como se recordará es el número de datos utilizados, y donde q_s es el desajuste dado por la ecuación (1.37).

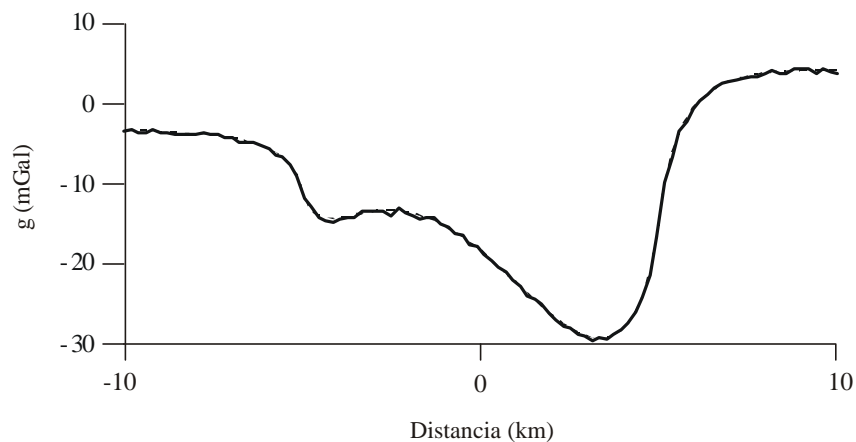


FIGURA 4.48. La línea punteada es la anomalía gravimétrica de la fuente de la figura 2.9(b). La línea sólida es la misma anomalía pero contaminada con error aleatorio.

En la inversión de este caso se han realizado un total de 200 iteraciones en las cuales no se llega a alcanzar exactamente el valor $q_s = T = 100$, que es el valor de la tolerancia permitida. Para decidir en cuál de estas iteraciones se ha alcanzado la solución, estudiamos el valor del desajuste. Como se observa en la figura 4.49, el desajuste disminuye bruscamente en las primeras siete iteraciones y, a partir de este punto lo hace progresivamente hasta alcanzar un valor constante de $q_s = 104.16$ en la iteración número 30. A partir de aquí las soluciones de los parámetros permanecen prácticamente constantes, salvo variaciones en la quinta o sexta cifra decimal, a lo largo del resto de las iteraciones. Podemos decir que se ha alcanzado una solución al problema. La representación gráfica del modelo resultante y su respuesta gravimétrica se puede ver en la figura 4.50.

El residual obtenido entre los datos de gravedad contaminados con ruido y la anomalía gravimétrica del modelo resultante se puede ver en la figura 4.51. El máximo no sobrepasa el valor de 0.6 mGal, siendo la amplitud de la anomalía del orden de 35 mGal. Además, vemos que el residual presenta un promedio cercano al cero, lo que indica un ajuste satisfactorio entre ambas anomalías.

En la tabla 4.19 se presentan los valores de los parámetros del contraste de densidad de los tres modelos que intervienen en este ejemplo, el modelo inicial, el resultante y el modelo generador de los datos gravimétricos libres de ruido. Como se observa en esta tabla, los valores de los parámetros correspondientes al modelo resultante alcanzan valores muy parecidos a los del modelo sintético, excepto el parámetro p_3 , en el que se obtiene un valor muy diferente del valor real, presentando un error relativo del 39%. De la misma manera, en la tabla 4.20 se comparan los parámetros de la estructura de los tres modelos. Los parámetros que mejor se ajustan a la solución esperada son los correspondientes a las fronteras laterales.

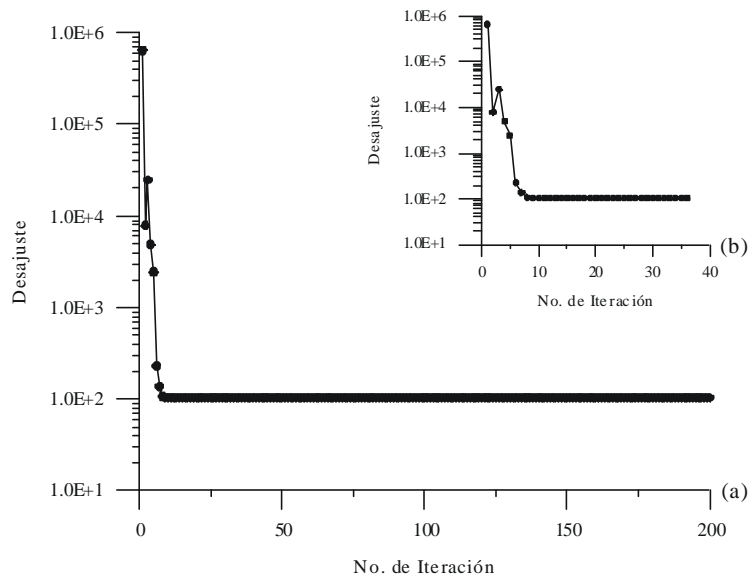


FIGURA 4.49. (a) Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión. (b) Detalle de la evolución del desajuste a lo largo de las 36 primeras iteraciones.

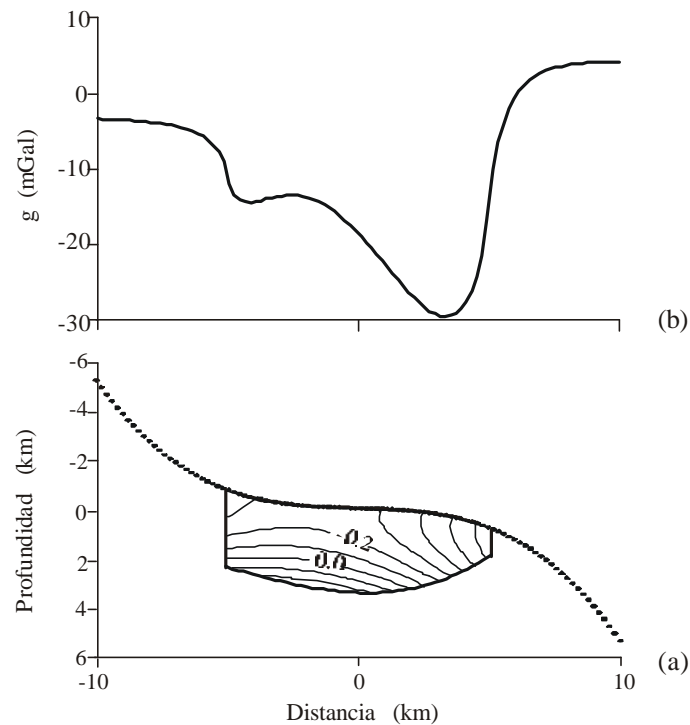


FIGURA 4.50. (a) Modelo resultante de fuente anómala obtenida en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x , con datos contaminados con ruido aleatorio. Las líneas de igual densidad se encuentran en unidades de g/cm^3 . Los puntos en la frontera superior del cuerpo representan las posiciones del observador. (b) Anomalia gravimétrica producida por la fuente (a).

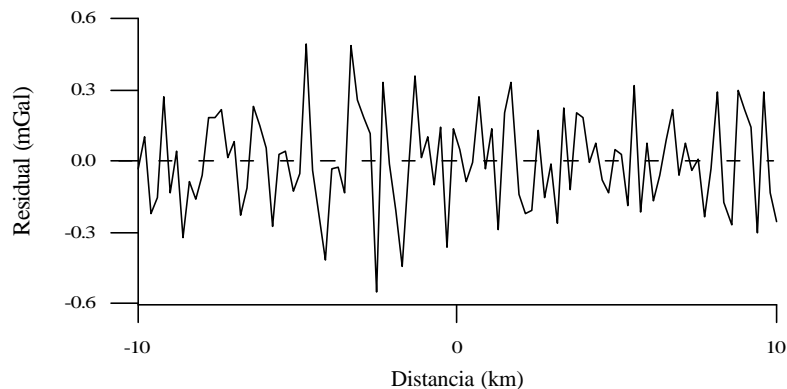


FIGURA 4.51. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad sintéticos, contaminados con ruido aleatorio, y la anomalía gravimétrica del modelo resultante en el proceso de inversión.

DENSIDAD	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
Modelo Inicial	-0.1000	-0.0700	0.0700	-0.0800	-0.0300	0.0080
Modelo resultante	-0.2715	-0.0333	-0.0549	-0.0156	-0.0086	0.0476
Modelo sintético	-0.3000	-0.0500	0.0900	0.0000	-0.0100	0.0100

TABLA 4.19. Parámetros de los contrastes de densidad correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

ESTRUCTURA	FRONTERA INFERIOR $g_2(z)$				FRONTERA IZQUIERDA	FRONTERA DERECHA
	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
Modelo Inicial	3.5000	-0.0090	-0.0010	0.0090	-4.5000	4.5000
Modelo Resultante	3.2876	0.0387	-0.0502	-0.0033	-4.9932	4.9898
Modelo Sintético	3.0000	-0.0200	-0.0010	-0.0070	-5.0000	5.0000

TABLA 4.20. Parámetros de las estructuras correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

4.2.2.1 Evolución de los parámetros del modelo

La evolución del factor de amortiguación se puede ver en la figura 4.52 para las 30 iteraciones del proceso. En esta figura se observa cómo el factor \mathbf{b}^{-1} sufre variaciones bruscas en las primeras siete iteraciones, al igual que el desajuste, convergiendo hacia el valor $\mathbf{b}^{-1} = 52.08$. En la figura 4.53 vemos la evolución de los parámetros del contraste de densidad, lo cuales convergen hacia la solución del problema alrededor de la décima iteración. Lo mismo sucede con los parámetros de la frontera inferior (figura 4.54), aunque éstos alcanzan la convergencia a partir de la iteración 20. En la figura 4.55 podemos ver que los parámetros correspondientes a las fronteras laterales alcanzan la convergencia rápidamente, en las primeras iteraciones del proceso.

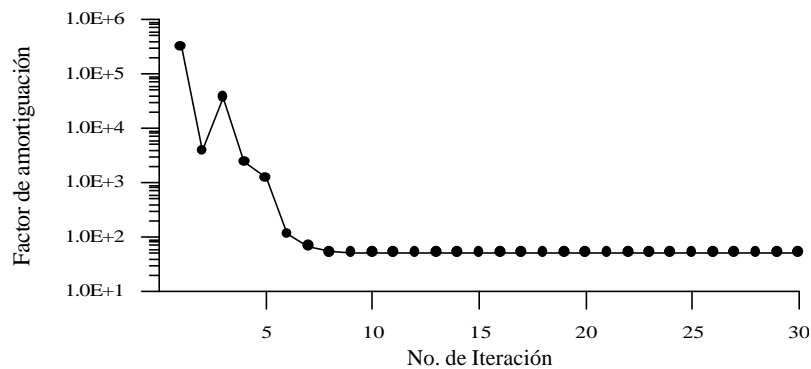


FIGURA 4.52. Evolución del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} .

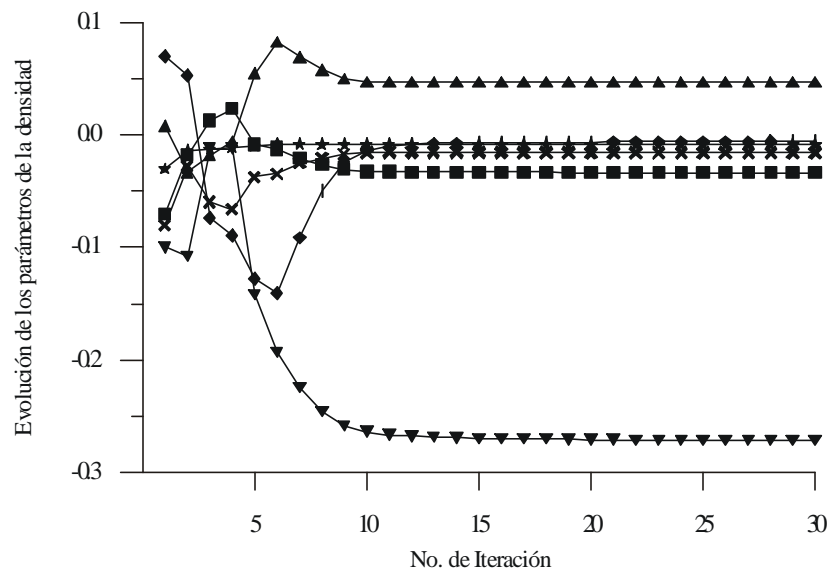


FIGURA 4.53. Evolución de los parámetros del contraste de densidad desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: $p_1(\nabla)$; $p_2(\blacksquare)$; $p_3(\blacklozenge)$; $p_4(\blacktimes)$; $p_5(\blackstar)$; $p_6(\blacktriangle)$.

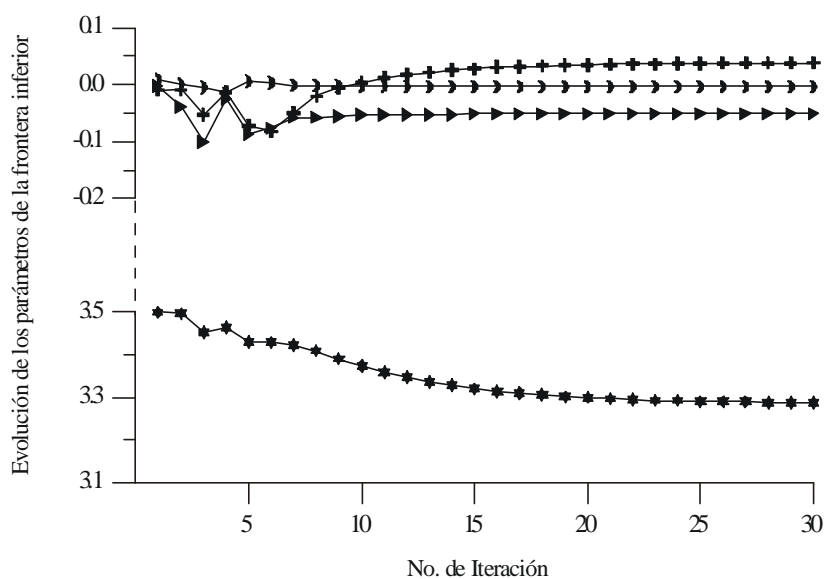


FIGURA 4.54. Evolución de los parámetros de la frontera inferior desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_7 (●); p_8 (+); p_9 (▶); p_{10} (◆).

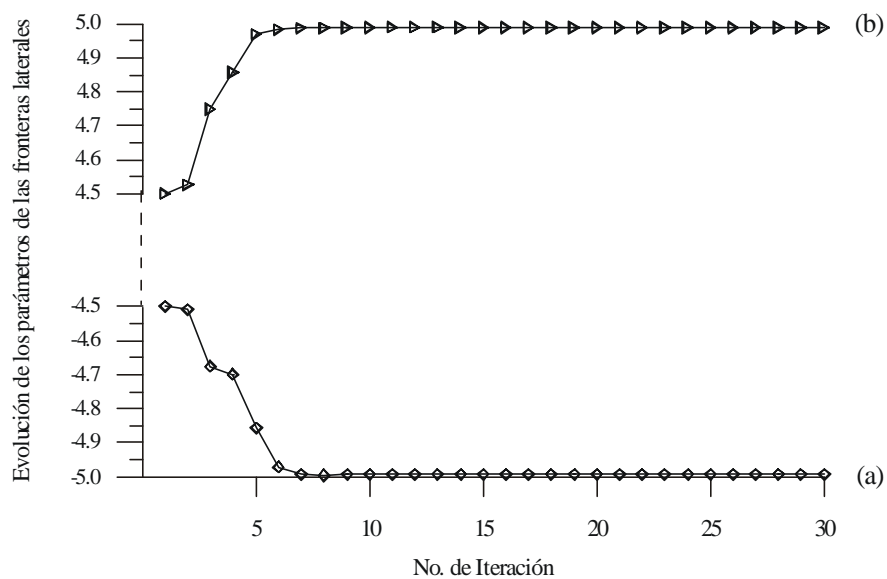


FIGURA 4.55. Evolución de los parámetros de las fronteras laterales desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. (a) Frontera izquierda p_{11} (◆). (b) Frontera derecha p_{12} (▶).

4.2.2.2 Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

Los vectores-columna traspuestos del jacobiano del sistema, correspondientes a los seis parámetros del contraste de densidad, se pueden ver en la figura 4.56. Si los comparamos con los de la figura 4.26 vemos que las formas de estos vectores son iguales, pero las intensidades han aumentado su valor.

La gráfica (a) nos da la sensibilidad de los datos de gravedad frente a variaciones en el parámetro p_1 y su valor máximo es de $527.4 \frac{\text{mGal}}{\text{g/cm}^3}$. La siguiente figura es la 4.56(b), corresponde a la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_2 y presenta dos picos de intensidad de valores: $1038.8 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$ y $-1267.8 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$. La curva (c) es parecida a la de la gráfica (a) pero con un máximo de intensidad de $716.1 \frac{\text{mGal km}}{\text{g/cm}^3}$ y es la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetros p_3 . La gráfica (d) presenta dos picos de distinto signo, uno con una intensidad negativa cuyo valor es $-982.2 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y el otro de intensidad positiva cuyo valor es $1296.4 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y corresponde a la sensibilidad de los datos con respecto al parámetro p_4 . La siguiente gráfica presenta dos picos de intensidad positiva, uno de $5388.4 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y el otro de $4091.1 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$. Esta gráfica corresponde a la derivada del funcional con respecto al parámetro p_5 de la densidad, y es la que presenta mayores valores de intensidad. La última figura es la 4.56(f), con un máximo de intensidad central de $1408.8 \frac{\text{mGal km}^2}{\text{g/cm}^3}$ y corresponde a la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_6 del contraste de densidad.

De las seis gráficas de la figura 4.56 la que presenta mayor intensidad es la (e), esto nos dice que los datos son más sensibles a variaciones producidas en el valor del parámetro p_5 que al resto de los parámetros. El caso contrario es el del parámetro p_1 , cuya curva correspondiente presenta la intensidad máxima más pequeña de las seis.

En la figura 4.57 podemos ver las cuatro gráficas correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a cada uno de los parámetros de la frontera inferior. Todas ellas presentan un pico negativo en la zona correspondiente al borde derecho del cuerpo anómalo, siendo el de mayor intensidad negativa el de la gráfica (d) con un valor de $-2672.7 \text{ mGal km}^2$, correspondiente a la derivada del funcional con respecto al parámetro p_{10} . La curva de menor intensidad es la de la gráfica (a), que presenta un valor de $-27.0 \text{ mGal km}^{-1}$. Tanto la gráfica (a) como la gráfica (c) presentan un máximo positivo en la parte correspondiente a la frontera izquierda del perfil. Para la gráfica (a) este máximo tiene un valor de $19.6 \text{ mGal km}^{-1}$ y para la gráfica (c) tiene un valor de 108.5 mGal km . En

cuanto a las gráficas (b) y (d), éstas presentan un máximo relativo negativo sobre el borde izquierdo del cuerpo anómalo de valores -59.4 mGal y -707.5 mGal km^2 , respectivamente.

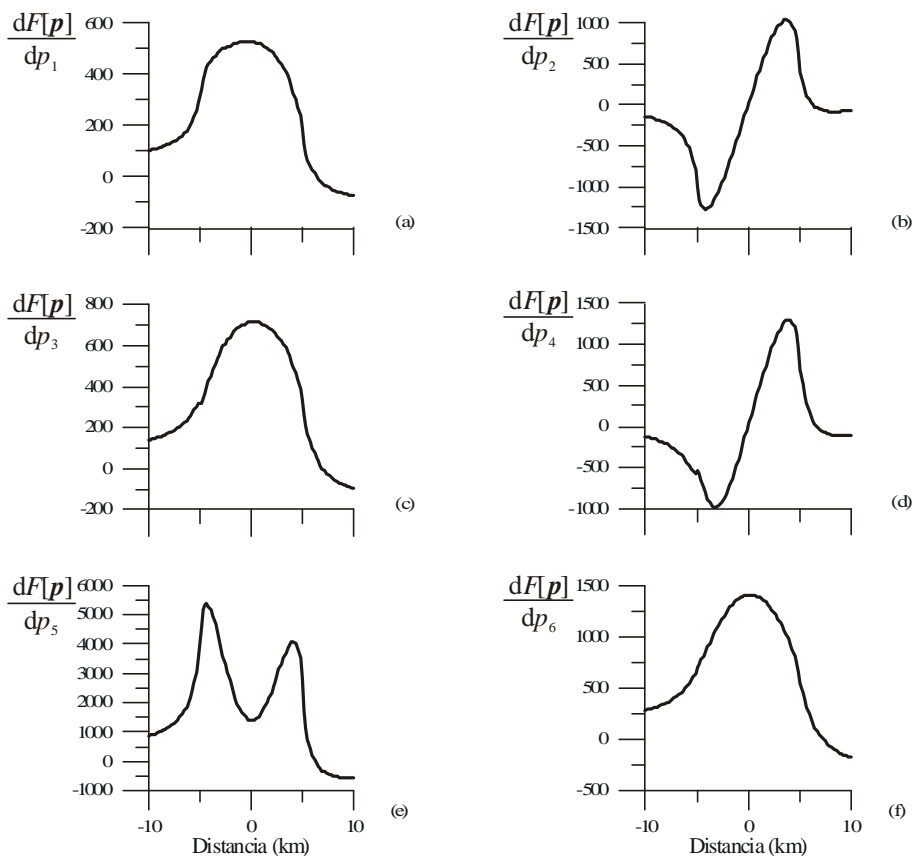


FIGURA 4.56. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[p]$ del problema con respecto a los parámetros que definen el contraste de densidad de la fuente.

La figura 4.58 nos muestra las dos gráficas correspondientes a la sensibilidad de los datos frente a variaciones en los parámetros p_{11} y p_{12} que describen las fronteras laterales de la fuente anómala. Como es de esperar, estas gráficas nos indican que los datos situados sobre los bordes laterales del cuerpo son más sensibles a cambios producidos en los valores de las fronteras laterales que el resto de los datos del perfil. Para la frontera izquierda la gráfica (a) presenta un máximo de 83.4 mGal km de intensidad positiva, mientras que para la frontera derecha, la gráfica (b) presenta un máximo de -149.1 mGal km de intensidad negativa.

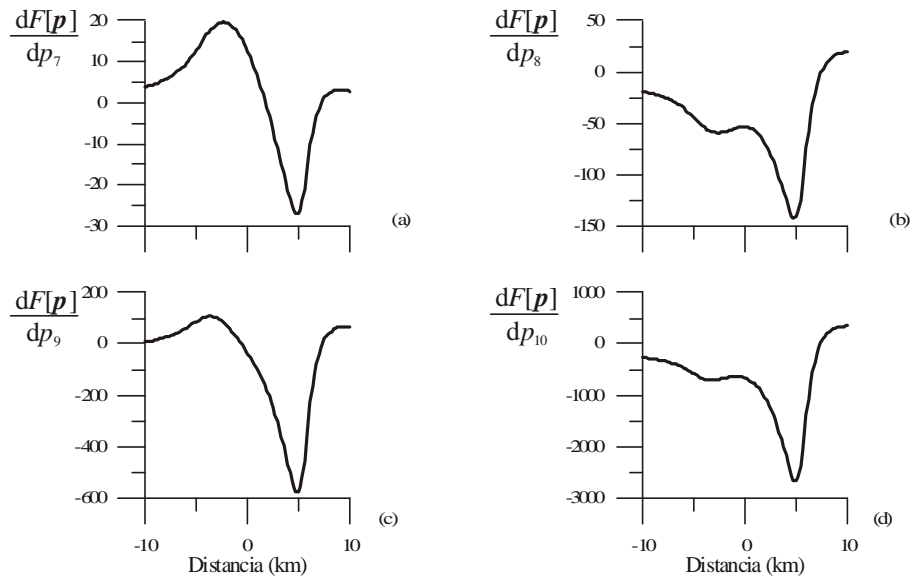


FIGURA 4.57. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera inferior de la fuente.

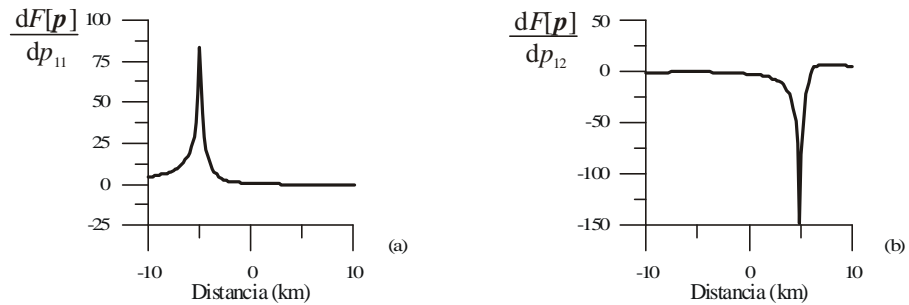


FIGURA 4.58. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen las fronteras laterales de la fuente.

Una vez estudiada la sensibilidad de los datos con respecto a los parámetros que describen la fuente anómala, vamos a realizar la descomposición espectral de la matriz jacobiano, pero antes de realizar esta operación, dividimos cada elemento de esta matriz por el error estimado en los datos $\mathbf{s} = 0.2$ mGal. Una vez normalizada \mathbf{J} por el error, realizamos su descomposición. Los valores singulares obtenidos se pueden ver en la figura 4.59, donde se han colocado en orden de mayor a menor. Como se puede ver en esta figura, se han obtenido 15 valores singulares y su número coincide con el número de columnas de la matriz \mathbf{J} , por lo que está asegurada la existencia y la unicidad de la solución para un determinado modelo inicial. Como se ve, ningún valor singular es menor que la unidad pero la condición de la matriz es $\mathbf{k} = 9.602 \cdot 10^3$ que es una condición relativamente pequeña, aunque es lo suficientemente elevada como para permitir la existencia de inestabilidades en la solución final de los parámetros de la fuente.

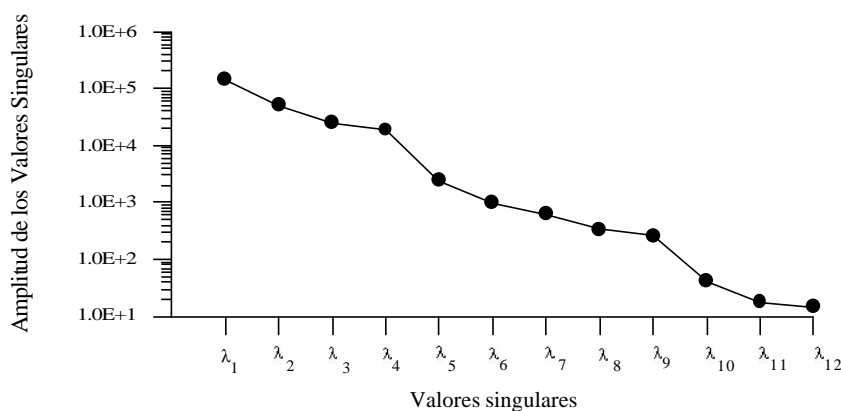


FIGURA 4.59. Valores singulares del jacobiano del problema.

En la tabla 4.21 se presentan los elementos de la matriz \mathbf{V}_h^T , junto con el valor singular y el error característico asociados a cada fila de dicha matriz. En color gris sólido se han marcado las componentes con valor absoluto mayor o igual que 0.5 y que corresponden a los pesos de los parámetros que tienen mayor resolución en cada combinación. Como vemos, el parámetro p_5 es el parámetro que presenta mayor peso en la primera combinación dada por el vector \mathbf{v}_1^T . Esta combinación está asociada al valor singular más grande y presenta un error característico $e_1^* = 7.141 \cdot 10^{-6}$. En la última combinación, dada por las componentes del vector \mathbf{v}_{12}^T , los parámetros que presentan mayores pesos son el p_7 y el p_8 , ambos pertenecientes a la frontera inferior. El error característico asociado a esta combinación es $e_{12}^* = 6.861 \cdot 10^{-2}$. Esto nos indica que la última combinación no debe ser demasiado ruidosa, pues su error es menor que la unidad, y se debe tener en

cuenta la información que proporciona acerca de los parámetros. No obstante, esta combinación está asociada al valor singular más pequeño, por lo que debe estar afectada por la inestabilidad producida por la propagación del error de los datos en la dirección del vector característico \mathbf{v}_{12} , de ahí que la solución dada por el modelo resultante no sea exactamente la solución esperada en el problema, como se ve en las tablas 4.19 y 4.20. En general, se observa que los parámetros del contraste de densidad presentan pesos importantes en las combinaciones con errores característicos pequeños, excepto el parámetro p_3 , y los parámetros de la estructura presentan pesos grandes en las últimas combinaciones que tienen errores característicos mayores, con excepción del parámetro p_{10} , que presenta pesos elevados en las primeras combinaciones.

Las gráficas de la figura 4.60 representan los vectores característicos correspondientes a la matriz \mathbf{U}_h y a la matriz \mathbf{V}_h . La combinación asociada al valor singular $\mathbf{I}_1 = 1.400 \cdot 10^5$ está formada principalmente por los pesos correspondientes a los parámetros p_5 , p_6 y p_{10} . Su error característico e_1^* es $7.141 \cdot 10^{-6}$, lo que nos garantiza que los parámetros de esta combinación tienen muy buena resolución puesto que el error de los datos no va a influir en ellos. Los datos con mayor sensibilidad se encuentran situados sobre los bordes laterales del cuerpo anómalo y presentan sensibilidad positiva.

La siguiente combinación está asociada al valor singular $\mathbf{I}_2 = 5.109 \cdot 10^4$ y en ella destacan los pesos correspondientes a los parámetros p_2 , p_4 y el p_{10} , además del p_5 y el p_9 con pesos más pequeños. Los datos que presentan sensibilidad positiva se encuentran situados sobre la zona derecha del cuerpo anómalo y los que presentan sensibilidad negativa se encuentran situados sobre la zona izquierda. El error característico de esta combinación es $e_2^* = 1.957 \cdot 10^{-5}$.

La tercera combinación está formada casi exclusivamente por los parámetros del contraste de densidad, siendo el parámetro p_6 el que presenta mayor peso. El valor singular asociado es $\mathbf{I}_3 = 2.440 \cdot 10^4$ por lo que el error característico tiene un valor $e_3^* = 4.099 \cdot 10^{-5}$, que es muy pequeño. Los datos sensibles a dicha combinación se encuentran situados sobre todo el cuerpo anómalo, con sensibilidad positiva los datos que se encuentran en el centro y con sensibilidad negativa los datos que está situados sobre sus fronteras laterales.

La combinación de parámetros dada por el vector \mathbf{v}_4 está asociada al valor singular $\mathbf{I}_4 = 1.881 \cdot 10^4$ y presenta un error característico de $5.315 \cdot 10^{-5}$. En esta combinación vuelven a aparecer juntos los pesos correspondientes a los parámetros p_2 , p_4 y p_5 , lo que nos hace suponer que existe cierta correlación entre alguno de estos cuatro parámetros. La forma del vector \mathbf{u}_4 es más complicada que las de los anteriores vectores del espacio de los datos, como se desprende de la figura 4.60. Lo mismo sucede con el vector \mathbf{u}_5 , que corresponde al valor singular $\mathbf{I}_5 = 2.408 \cdot 10^3$ y en cuya combinación de parámetros destacan de nuevo los parámetros p_2 y p_4 . El error característico en la quinta combinación es un orden de magnitud menor que el correspondiente a la anterior y de valor $e_5^* = 4.153 \cdot 10^{-4}$.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	I_i	e_i^*
v_1^T	1.100 10 ¹	-4.396 10 ²	1.406 10 ¹	5.620 10 ³	8.942 10⁴	2.737 10 ¹	9.791 10 ⁴	-1.988 10 ²	-2.884 10 ²	-3.008 10 ¹	2.489 10 ³	-3.172 10 ³	1.400 10 ⁵	7.141 10 ⁻⁶
v_2^T	-4.328 10 ³	5.817 10⁴	4.246 10 ²	5.942 10⁴	-1.748 10 ¹	7.380 10 ²	-1.076 10 ²	-2.337 10 ²	-1.728 10 ¹	-4.900 10 ¹	-5.560 10 ³	-1.052 10 ²	5.109 10 ⁴	1.957 10 ⁻⁵
v_3^T	2.841 10 ¹	-1.751 10 ²	4.016 10 ¹	-1.638 10 ¹	-3.279 10 ¹	7.865 10⁴	1.223 10 ²	-1.016 10 ²	6.149 10 ²	2.676 10 ²	-6.890 10 ³	8.753 10 ³	2.440 10 ⁴	4.099 10 ⁻⁵
v_4^T	-7.369 10 ²	-3.921 10 ¹	-6.394 10 ²	-3.625 10 ¹	-2.409 10 ¹	-8.817 10 ²	-5.385 10 ³	-3.964 10 ²	-1.359 10 ¹	-7.868 10⁴	-6.309 10 ⁴	-2.130 10 ²	1.881 10 ⁴	5.315 10 ⁻⁵
v_5^T	1.115 10 ¹	-6.937 10⁴	-1.054 10 ¹	6.650 10⁴	-5.575 10 ²	1.246 10 ¹	-9.695 10 ³	1.818 10 ²	-1.638 10 ¹	6.773 10 ²	4.921 10 ²	8.589 10 ³	2.408 10 ³	4.153 10 ⁻⁴
v_6^T	-5.688 10⁴	-2.425 10 ²	-2.657 10 ¹	9.369 10 ²	-1.559 10 ³	3.175 10 ¹	3.379 10 ²	-3.018 10 ²	5.753 10⁴	-9.522 10 ²	3.342 10 ¹	2.049 10 ¹	9.980 10 ²	1.002 10 ⁻³
v_7^T	2.046 10 ²	-1.276 10 ²	-3.576 10 ³	4.312 10 ²	-6.837 10 ³	-5.081 10 ³	2.752 10 ²	4.747 10 ²	2.403 10 ¹	-3.101 10 ²	1.849 10 ¹	-9.495 10⁴	6.174 10 ²	1.620 10 ⁻³
v_8^T	-4.881 10 ¹	-4.025 10 ²	-6.821 10 ²	2.288 10 ²	1.678 10 ²	2.220 10 ¹	-3.713 10 ³	-7.636 10 ²	-9.839 10 ²	5.762 10 ²	-8.047 10⁴	-1.974 10 ¹	3.397 10 ²	2.944 10 ⁻³
v_9^T	4.454 10 ¹	-4.399 10 ²	-3.399 10 ²	1.250 10 ¹	-2.844 10 ²	-1.831 10 ¹	1.570 10 ²	1.119 10 ¹	6.990 10⁴	-1.747 10 ¹	-4.503 10 ¹	1.182 10 ¹	2.582 10 ²	3.874 10 ⁻³
v_{10}^T	-3.456 10 ¹	-1.182 10 ¹	7.426 10⁴	1.098 10 ¹	-5.346 10 ³	-2.396 10 ¹	1.870 10 ¹	4.461 10 ¹	8.719 10 ²	-3.144 10 ²	2.057 10 ²	5.247 10 ²	4.073 10 ¹	2.455 10 ⁻²
v_{11}^T	9.552 10 ²	5.945 10 ²	-3.307 10 ¹	-5.907 10 ²	6.633 10 ³	1.287 10 ¹	8.218 10⁴	4.056 10 ¹	-1.312 10 ¹	-4.445 10 ³	-2.669 10 ²	4.933 10 ³	1.749 10 ¹	5.719 10 ⁻²
v_{12}^T	-1.303 10 ²	-5.106 10 ²	2.545 10 ¹	6.468 10 ²	-7.999 10 ³	-1.423 10 ¹	5.359 10⁴	-7.823 10⁴	9.184 10 ²	1.432 10 ²	1.173 10 ²	4.685 10 ³	1.458 10 ¹	6.861 10 ⁻²

TABLA 4.21. Componentes de los vectores característicos de la matriz V_r , los valores singulares y los errores característicos asociados.

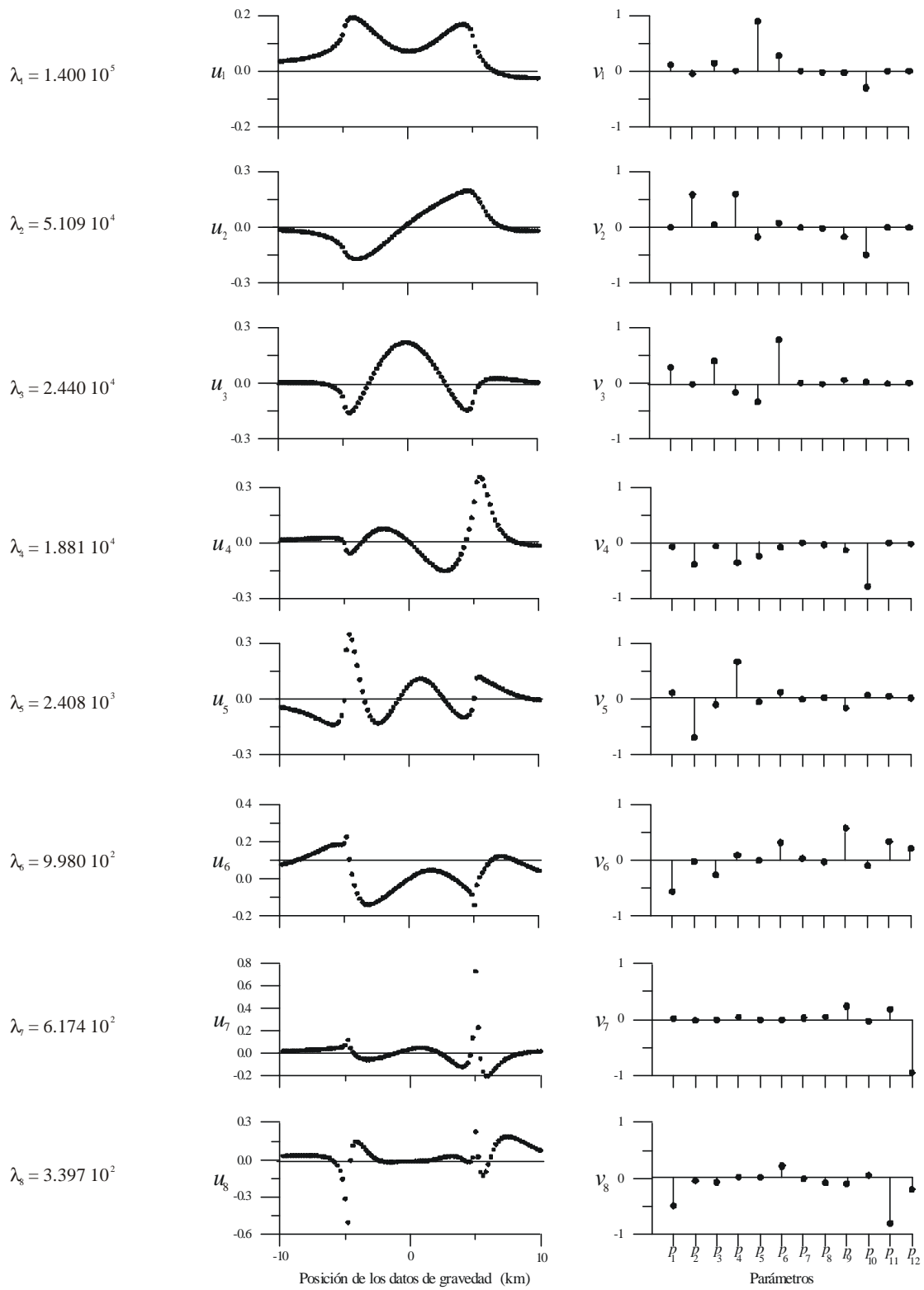


FIGURA 4.60. Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

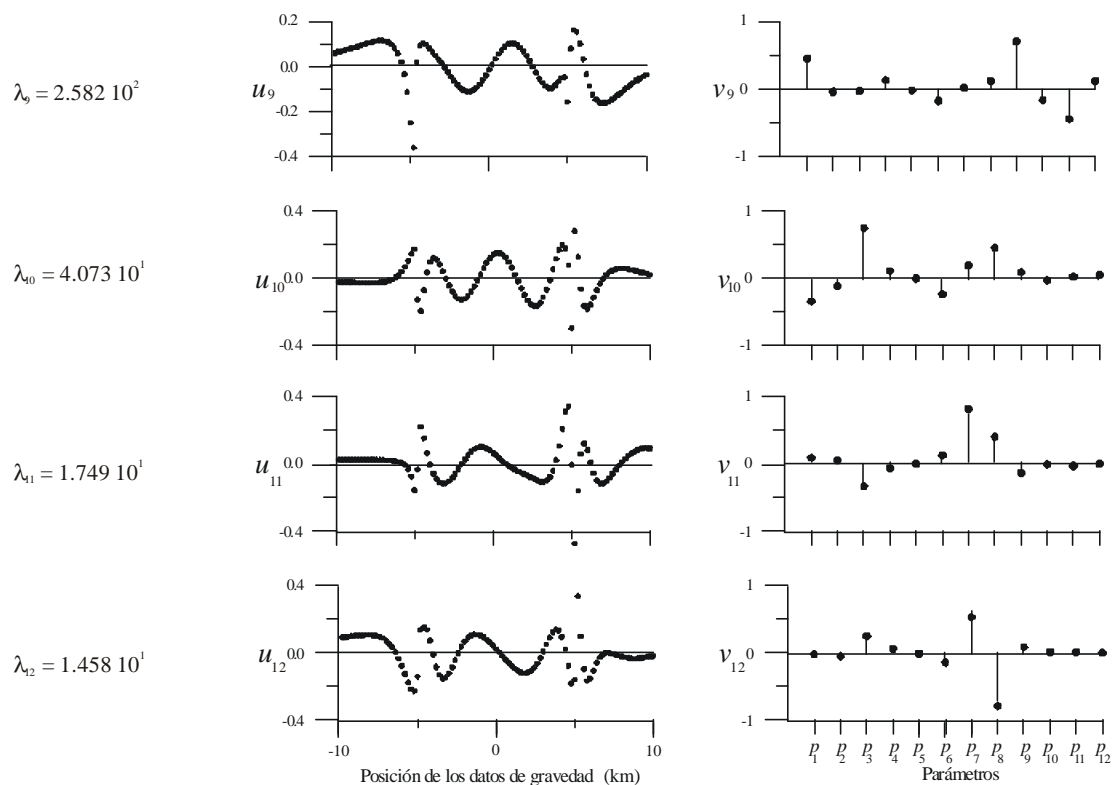


FIGURA 4.60 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

En la sexta combinación de parámetros comienzan a destacar los parámetros p_{11} y p_{12} que describen los bordes laterales de la fuente anómala. Los datos que aportan información de esta combinación se encuentran situados sobre la zona ocupada por el cuerpo. El error característico correspondiente es $e_6^* = 1.002 \cdot 10^{-3}$.

La siguiente combinación, asociada al valor singular $I_7 = 6.174 \cdot 10^2$, está formada por el peso correspondiente al parámetro p_{12} , por lo que los datos que presentan mayor sensibilidad están ubicados sobre el borde derecho del cuerpo anómalo. Su error característico es $e_7^* = 1.620 \cdot 10^{-3}$ como se puede ver en la tabla 4.21.

En la octava combinación el mayor peso recae sobre el parámetro p_{11} , aunque también destacan los pesos de los parámetros p_1 y p_{11} , por lo que la mayor sensibilidad se encuentra en ambos bordes del cuerpo, destacando los datos situados en la parte izquierda sobre los de la derecha. El valor singular es $I_8 = 3.397 \cdot 10^2$, por lo que su error característico es $e_8^* = 2.944 \cdot 10^{-3}$.

En la combinación correspondiente al valor singular $I_9 = 2.582 \cdot 10^2$ destaca el parámetro p_9 , perteneciente a la frontera inferior del cuerpo, junto con otros parámetros como el p_1, p_{10} y p_{11} . El vector característico de los datos presenta una forma complicada, indicando mayor sensibilidad sobre el borde lateral izquierdo del cuerpo. Su error característico es $e_9^* = 3.874 \cdot 10^{-3}$

En las siguientes tres combinaciones destaca la relación existente entre los pesos correspondientes a los parámetros p_3, p_7 y p_8 . Aunque estas combinaciones presentan errores característicos pequeños, pueden incluir cierta inestabilidad debido a los errores presentes en los datos de gravedad. Por tanto, estos parámetros son los últimos que llegan a alcanzar la solución del problema y presentan baja resolución. Como se puede ver en la tabla 4.19, el parámetro p_3 es el que alcanza un valor más alejado del valor real del modelo sintético. Lo mismo sucede con los parámetros p_7 y p_8 , como se puede ver en la tabla 4.20.

4.2.2.3. Resolución de los parámetros

La matriz de resolución para este caso presenta la forma de la figura 4.61. Esta matriz ha sido calculada a partir de la ecuación (1.55) con una varianza residual $\mathcal{S}^2 = 0.05 \text{ mGal}^2$ y un factor de amortiguación $\mathbf{b}^{-1} = 52.08$. Como vemos, la varianza residual presenta un valor muy parecido al de la varianza de los datos $\mathbf{s}^2 = 0.04 \text{ mGal}^2$, lo que significa que la anomalía producida por el modelo resultante se ajusta a los datos de gravedad.

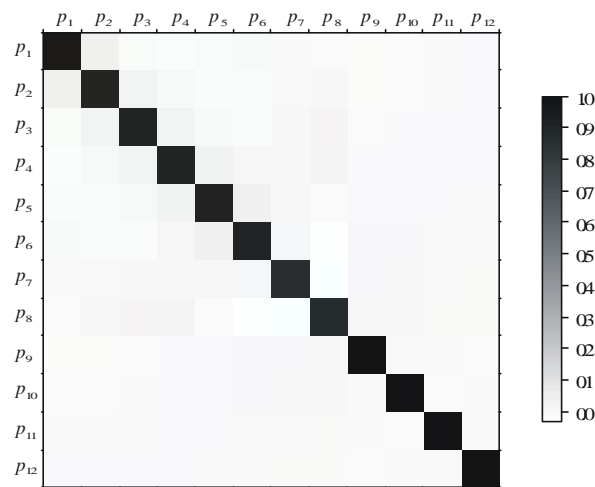


FIGURA 4.61. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

Como se puede ver en la figura anterior, todos los parámetros del modelo resultante presentan una resolución perfecta, excepto los parámetros p_7 y p_8 puesto que, como ya vimos anteriormente, están asociados a las combinaciones de parámetros que presentan los mayores errores característicos. Esto corrobora la existencia de inestabilidades, debidas a la presencia de ruido aleatorio en los datos de gravedad, en la solución de los parámetros del modelo resultante.

4.2.2.4. Covarianza de los parámetros

Los elementos de la matriz de covarianza para este ejemplo vienen dados en la tabla 4.22. Esta matriz ha sido calculada a partir de la ecuación (1.63), donde la varianza residual es $\hat{\mathbf{S}}^2 = 0.05$ mGal² y el factor de amortiguación es $\mathbf{b}^{-1} = 52.08$.

En la tabla 4.23 se presentan los parámetros del modelo resultante junto con las incertidumbres correspondientes para un intervalo de confianza del 99% ($\pm 2.58 \mathbf{s}$).

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
5.800 10⁻⁶	2.321 10 ⁻⁶	-1.390 10 ⁻⁵	-2.210 10 ⁻⁶	1.541 10 ⁻⁷	4.771 10 ⁻⁶	7.456 10 ⁻⁶	1.830 10 ⁻⁶	-2.701 10 ⁶	2.032 10 ⁻⁷	-6.151 10 ⁻⁷	-4.868 10 ⁷	p_1
	1.436 10⁻⁶	-8.030 10 ⁻⁶	-1.521 10 ⁻⁶	1.485 10 ⁻⁷	3.305 10 ⁻⁶	1.300 10 ⁻⁶	8.393 10 ⁻⁶	-2.278 10 ⁶	-2.743 10 ⁻⁸	-3.737 10 ⁻⁷	-2.158 10 ⁷	p_2
		4.561 10⁻⁵	8.390 10 ⁻⁶	-7.938 10 ⁻⁷	-1.837 10 ⁻⁵	-9.418 10 ⁻⁶	-4.140 10 ⁻⁵	1.229 10 ⁻⁵	2.296 10 ⁻⁸	2.312 10 ⁻⁶	1.339 10 ⁻⁶	p_3
			1.647 10⁻⁶	-1.677 10 ⁻⁷	-3.577 10 ⁻⁶	-5.150 10 ⁻⁸	-1.033 10 ⁻⁵	2.519 10 ⁻⁶	5.573 10 ⁻⁸	3.696 10 ⁻⁷	2.187 10 ⁻⁷	p_4
				1.912 10⁻⁸	3.663 10 ⁻⁷	-1.683 10 ⁻⁸	1.366 10 ⁻⁶	-2.835 10 ⁻⁷	-1.277 10 ⁻⁸	-4.019 10 ⁻⁸	-1.560 10 ⁻⁸	p_5
					7.859 10⁻⁶	-7.457 10 ⁻⁹	2.268 10 ⁻⁵	-5.448 10 ⁻⁶	-1.328 10 ⁻⁷	-9.497 10 ⁻⁷	-5.043 10 ⁻⁷	p_6
						1.446 10⁻⁴	-2.303 10 ⁻⁵	-5.916 10 ⁻⁶	6.070 10 ⁻⁷	-1.834 10 ⁻⁶	1.337 10 ⁻⁶	p_7
							1.353 10⁻⁴	-1.834 10 ⁻⁵	-2.692 10 ⁻⁶	-2.778 10 ⁻⁶	4.756 10 ⁻⁷	p_8
								4.604 10⁻⁶	8.998 10 ⁻⁸	5.022 10 ⁻⁷	2.016 10 ⁻⁷	p_9
									1.038 10⁻⁷	6.851 10 ⁻⁸	-7.089 10 ⁻⁸	p_{10}
										6.901 10⁻⁷	4.047 10 ⁻⁸	p_{11}
											2.878 10⁻⁷	p_{12}

TABLA 4.22. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	FRONT.INFERIOR	FRONT.IZQUIERDA	FRONT. DERECHA
$p_1 = -0.272 \pm 0.006 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_7 = 3.29 \pm 0.03 \text{ km}$	$p_{11} = -4.993 \pm 0.002 \text{ km}$	$p_{12} = 4.9898 \pm 0.0014 \text{ km}$
$p_2 = -0.033 \pm 0.003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_8 = 0.04 \pm 0.03$		
$p_3 = -0.055 \pm 0.017 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_9 = -0.050 \pm 0.006 \text{ km}^{-1}$		
$p_4 = -0.016 \pm 0.003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{10} = -0.0033 \pm 0.0008 \text{ km}^{-2}$		
$p_5 = -0.0086 \pm 0.0004 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$			
$p_6 = 0.048 \pm 0.007 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$			

Tabla 4.23. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

4.2.2.5. Correlación entre los parámetros

En la figura 4.62 se presenta una imagen global de la matriz de correlación de los parámetros, y sus elementos se presentan en la tabla 4.24. Como se observa en esta matriz, existe una fuerte correlación entre los parámetros del contraste de densidad. Debido a que el parámetro p_3 presenta una fuerte correlación con los otros cinco parámetros de la densidad, y además es el parámetro que presenta peor resolución de los seis, puede producirse cierta propagación de la inestabilidad debida al error de los datos a los parámetros del contraste de densidad a través del p_3 . La existencia de dicha inestabilidad puede ser la responsable de que no se alcance la solución exacta de la densidad del problema.

En cuanto a los parámetros de la estructura, el único que presenta correlación pequeña con el resto de los parámetros de la fuente es el parámetro p_7 . Teniendo en cuenta que éste es uno de los parámetros que presentan la peor resolución de todos ellos, la falta de correlación evita que se propague la inestabilidad presente en su solución al resto de los parámetros de la fuente. También hay que destacar que tanto el p_{11} como el p_{12} presentan coeficientes de correlación pequeños con el resto de los parámetros de la fuente. No ocurre lo mismo con el p_8 . Este parámetro, al igual que el p_7 , está asociado a la combinación de mayor error característico, por lo que está afectado por inestabilidad. Como este parámetro presenta valores altos de los coeficientes de correlación con los otros

parámetros, esto puede hacer que las inestabilidades se propaguen a los mismos. No obstante lo anterior no es motivo de preocupación, ya que todos los parámetros presentan muy buena resolución y los errores característicos asociados a las combinaciones de parámetros tienen valores menores que la unidad, por lo que la propagación del error de los datos no influye de manera determinante en la solución del problema.



FIGURA 4.62. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$8.044 \cdot 10^{-1}$	$-8.548 \cdot 10^{-1}$	$-7.150 \cdot 10^{-1}$	$4.629 \cdot 10^{-1}$	$7.067 \cdot 10^{-1}$	$2.575 \cdot 10^{-1}$	$6.533 \cdot 10^{-2}$	$-5.228 \cdot 10^1$	$2.619 \cdot 10^{-1}$	$-3.074 \cdot 10^1$	$-3.768 \cdot 10^{-1}$	p_1
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-9.923 \cdot 10^{-1}$	$-9.889 \cdot 10^{-1}$	$8.963 \cdot 10^{-1}$	$9.838 \cdot 10^{-1}$	$9.023 \cdot 10^{-2}$	$6.021 \cdot 10^{-1}$	$-8.861 \cdot 10^1$	$-7.103 \cdot 10^{-2}$	$-3.754 \cdot 10^1$	$-3.358 \cdot 10^{-1}$	p_2
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$9.679 \cdot 10^{-1}$	$-8.502 \cdot 10^{-1}$	$-9.704 \cdot 10^{-1}$	$-1.160 \cdot 10^1$	$-5.270 \cdot 10^{-1}$	$8.480 \cdot 10^1$	$1.055 \cdot 10^{-2}$	$4.121 \cdot 10^1$	$3.695 \cdot 10^{-1}$	p_3
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-9.449 \cdot 10^{-1}$	$-9.941 \cdot 10^{-1}$	$-3.337 \cdot 10^{-3}$	$-6.919 \cdot 10^{-1}$	$9.148 \cdot 10^1$	$1.348 \cdot 10^{-1}$	$3.466 \cdot 10^{-1}$	$3.177 \cdot 10^{-1}$	p_4
				$1.000 \cdot 10^{+0}$	$9.450 \cdot 10^{-1}$	$-1.012 \cdot 10^2$	$8.491 \cdot 10^{-1}$	$-9.558 \cdot 10^1$	$-2.866 \cdot 10^{-1}$	$-3.499 \cdot 10^1$	$-2.103 \cdot 10^{-1}$	p_5
					$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-2.210 \cdot 10^4$	$6.956 \cdot 10^{-1}$	$-9.058 \cdot 10^1$	$-1.471 \cdot 10^{-1}$	$-4.078 \cdot 10^1$	$-3.353 \cdot 10^{-1}$	p_6
						$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-1.647 \cdot 10^{-1}$	$-2.293 \cdot 10^1$	$1.567 \cdot 10^{-1}$	$-1.836 \cdot 10^1$	$2.072 \cdot 10^{-1}$	p_7
							$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-7.350 \cdot 10^1$	$-7.181 \cdot 10^{-1}$	$-2.875 \cdot 10^1$	$7.621 \cdot 10^{-2}$	p_8
								$1.000 \cdot 10^{+0}$	$1.302 \cdot 10^{-1}$	$2.817 \cdot 10^{-1}$	$1.752 \cdot 10^{-1}$	p_9
									$1.000 \cdot 10^{+0}$	$2.560 \cdot 10^{-1}$	$-4.101 \cdot 10^{-1}$	p_{10}
										$1.000 \cdot 10^{+0}$	$9.082 \cdot 10^{-2}$	p_{11}
											$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_{12}

TABLA 4.24. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

4.3 DISCUSION

En este Capítulo se ha utilizado el método iterativo de Marquardt-Levenberg para realizar la inversión no lineal de anomalías gravimétricas en 2D. Este método ha sido ampliamente utilizado en numerosos trabajos sobre inversión, pero la innovación del presente trabajo es haberlo utilizado conjuntamente con el nuevo método de sarrollado en el Capítulo II para calcular el modelo de fuente anómala en cada una de las iteraciones del proceso de inversión.

Para facilitar la parametrización del problema, se han utilizado funciones polinómicas para describir los contrastes de densidad de las fuentes anómalas y las fronteras de las mismas, por lo que el número máximo de parámetros a calcular es de 15, para el caso de fuentes con topografía plana y limitadas lateralmente por funciones continuas que dependen de la profundidad, y de 12, para el caso de funciones limitadas superior e inferiormente por funciones continuas que dependen de la distancia horizontal. Esto convierte al método de inversión en un método muy rápido, si lo comparamos con aquellos métodos que se basan en la teselación para realizar la parametrización del problema, donde el número de parámetros es tan elevado que hace que el proceso de inversión sea muy lento, por el número de cálculos involucrados.

Este tipo de parametrización presenta otra ventaja: permite calcular todos los parámetros que describen la fuente en un mismo proceso iterativo o bien permite dejar algunos de estos parámetros constantes e invariables a lo largo de todo el proceso mientras que se calcula la solución de los restantes. De esta manera se pueden calcular únicamente las soluciones de los parámetros que describen el contraste de densidad suponiendo conocidos los parámetros de la estructura, o también se pueden calcular los parámetros que definen la estructura suponiendo conocido el polinomio que describe el contraste de densidad. Una opción intermedia es mantener fijos algunos de los parámetros del contraste de densidad y de la estructura y dejar que evolucionen los restantes parámetros. La elección dependerá de la naturaleza del problema y, sobre todo, del conocimiento previo que se tenga acerca del contraste de densidad y la estructura de la fuente anómala que se esté estudiando.

Al haber elegido un polinomio cuadrático para describir el contraste de densidad y polinomios de tercer grado para las fronteras de la fuente, se ha limitado el modelado de altas frecuencias que pueden estar presentes en la anomalía de la gravedad. No obstante, la filosofía del método sería la misma si ampliamos los grados de dichos polinomios, pero hay que tener en cuenta que van a cambiar las ecuaciones finales utilizadas para calcular las anomalías gravimétricas de los modelos de fuente.

Respecto al problema de la no unicidad inherente en todos los problemas geofísicos, hay que decir que, en los casos presentados en este trabajo, debido a la naturaleza de los jacobianos, la unicidad del problema está garantizada para un determinado modelo inicial. Esto es, si se cambia el modelo inicial de cualquiera de los ejemplos presentados en este capítulo, es posible que lleguemos a una solución final distinta pero que también satisfaga los datos, o puede ocurrir que se llegue a la misma

solución alcanzada a partir del primer modelo inicial, con lo que queda reforzada la elección de la misma. No obstante, el problema sigue sufriendo de falta de unicidad, pues vendrá en función del modelo inicial elegido. No obstante, al imponer modelos descritos por funciones polinómicas de segundo y tercer grado, como mucho, se ha restringido el número de soluciones posibles. La falta de unicidad también dependerá de los puntos de estabilidad relativa que se encuentren dentro del espacio de soluciones para cada caso en particular. En nuestro caso no tiene sentido graficar dichos espacios debido a la presencia de las múltiples correlaciones que existen entre los distintos parámetros de la fuente y a que, en cada caso, el número de parámetros es demasiado elevado como para poder graficarlos juntos, ya que sólo podremos graficarlos en conjuntos de 2 o tres parámetros como mucho.

El estudio de la sensibilidad que presentan los datos con respecto a los parámetros de la fuente es de especial importancia, pues nos indica de qué manera deben ser registrados esos datos para facilitar la resolución de dichos parámetros. En general, se ha observado que los datos de gravedad utilizados en los ejemplos de este Capítulo son más sensibles a los parámetros del contraste de densidad, los cuales presentan mayor resolución que los parámetros de la estructura de la fuente. Hay que destacar la importancia de la forma y posición de las fronteras laterales de las fuentes anómalas, ya que si la frontera lateral en cuestión es muy vertical, la información que contienen los datos acerca de ella es reducida y los parámetros correspondientes presentarán peor resolución que el resto, puesto que el conjunto de datos necesario para determinar dicha frontera estará distribuido en una zona reducida del perfil. Esto sucede sobre todo en el caso en el que la fuente anómala está limitada superior e inferiormente por funciones polinómicas que dependen de la distancia horizontal, ya que sus fronteras laterales son totalmente verticales.

En todos los casos presentados, la adición de ruido aleatorio de tipo gaussiano produce una desviación del modelo resultante con respecto al modelo sintético que genera los datos de gravedad debido, principalmente, a la propagación de este error en algunas de las combinaciones de los parámetros relacionados con la estructura de la fuente. Por otro lado, las funciones polinómicas que describen dicha fuente son de naturaleza suave, mientras que los errores que contaminan los datos no lo son. Por tanto, el método iterativo de inversión intenta ajustar la anomalía correspondiente al modelo solución del problema no sólo a la curva promedio de los datos, sino que intentará ajustarse al error mismo. No obstante, esta desviación no es lo suficientemente importante como para que el modelo resultante obtenido difiera drásticamente del modelo de fuente que ha generado los datos de gravedad.

Capítulo V:

PROBLEMA INVERSO PARA FUENTES GRAVIMETRICAS EN 3D

INTRODUCCION

El efecto gravimétrico, producido por una fuente que ocupa un volumen V que está caracterizado por un contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x,y,z)$, sobre un observador situado en un punto P_0 de coordenadas (x_0, y_0, z_0) , viene expresado por la ecuación (1.5) del Capítulo I. Se pueden plantear diferentes tipos de fuentes dependiendo de cómo sean las funciones continuas que describen las fronteras del volumen V y el contraste de densidad, como ya se estudió en el Capítulo III.

El primer caso que estudiaremos es el de fuentes anómalas limitadas lateralmente por funciones continuas de las variables y y z . Los resultados obtenidos en este estudio se podrían aplicar al caso de fuentes limitadas lateralmente por funciones que dependen de x y z , presentado en el Capítulo III, pues las geometrías generales de ambos tipos de fuente son las mismas, considerando que ha habido una rotación de 90° en el plano x - y . El segundo caso es el de fuentes anómalas limitadas superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x e y . Para los dos tipos de fuentes tratados en este Capítulo, se considerarán datos sin errores y datos contaminados con errores aleatorios de tipo gaussiano. Para cada uno de ellos se va a calcular el problema inverso no lineal mediante el método de los mínimos cuadrados amortiguados de Marquardt-Levenberg y se van a realizar estudios de sensibilidad, unicidad, estabilidad, resolución y correlación para comprobar la eficacia del método de inversión.

5.1. FUENTE ANOMALA LIMITADA LATERALMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LAS VARIABLES Y,Z

Vamos a suponer que las fronteras laterales de este tipo de fuente son las funciones constantes y_1 e y_2 y las funciones continuas $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$. Supondremos también que las fronteras superior e inferior son dos funciones también constantes z_1 y z_2 . Con lo anterior, la geometría general del volumen V de la fuente viene expresada por la ecuación (3.1) y su representación gráfica se puede ver en la figura 3.1.

Vamos a considerar que el contraste de densidad de la fuente varía en función de las variables x , y y z mediante la expresión (3.15), que es el caso más general para este tipo de fuentes que se ha considerado en el Capítulo III. Al igual que se hizo en el Capítulo IV para fuentes bidimensionales, consideraremos el caso particular en el que las funciones continuas que componen los coeficientes del polinomio (3.5) también son funciones polinómicas de la forma:

$$\begin{aligned}
 A_4(y, z) &= p_1 + p_3 y + p_4 z + p_6 y z + p_9 y^2 + p_{10} z^2 \\
 B_4(y, z) &= p_2 + p_5 y + p_7 z \\
 C_4(y, z) &= p_8
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

con lo que se obtiene la siguiente expresión para el contraste de densidad:

$$\mathbf{Dr}(x, y, z) = p_1 + p_2 x + p_3 y + p_4 z + p_5 x y + p_6 y z + p_7 x z + p_8 x^2 + p_9 y^2 + p_{10} z^2 \tag{5.2}$$

donde $p_j \in \Re$ con $j=1, \dots, 6$, siendo \Re el espacio de los números reales.

Sustituyendo las funciones (5.1) en la ecuación (3.18) para el problema directo y reagrupando los términos del integrando obtenemos:

$$\begin{aligned}
 g(x_0, y_0, z_0) &= G \int_{z_1}^{z_2} dz (z - z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{\mathbf{Dr}(x_0, y, z) (x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] r} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{p_2 + p_5 y + p_7 z + p_8 (x + x_0)}{r} + p_8 \ln[(x - x_0) + r] \right\}_{h_1(y, z)}^{h_2(y, z)} \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Dr}(x_0, y, z) = p_1 + p_2 x_0 + p_3 y + p_4 z + p_5 x_0 y + p_6 y z + p_7 x_0 z + p_8 x_0^2 + p_9 y^2 + p_{10} z^2$, siendo x_0 una de las coordenadas horizontales de la posición del observador, y donde r viene dado por la expresión (1.2).

Con la solución numérica de la ecuación anterior, obtenida mediante el método de integración numérica de Gauss-Legendre, obtenemos el efecto gravimétrico que produce un cuerpo anómalo cuya estructura geométrica viene dada por la expresión (3.1) y cuyo contraste de densidad es el polinomio (5.2), con lo cual estaríamos realizando el problema directo.

En el problema inverso correspondiente se realiza la inversión de la ecuación (5.3) para calcular el contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x, y, z)$, las fronteras laterales y_1, y_2 , $h_1(y, z)$, $h_2(y, z)$ y la frontera inferior z_2 del cuerpo anómalo, a partir de los datos de gravedad observados. Para realizar dicha inversión, consideraremos que la frontera superior $z_1 = z_0$ es una función constante, conocida y que coincide con la topografía de la zona donde se encuentra la fuente anómala. También consideraremos que las funciones $h_1(y, z)$ y $h_2(y, z)$ son funciones continuas y polinómicas de la forma:

$$h_1(y, z) = p_{11} + p_{12}y + p_{13}z + p_{14}yz + p_{15}y^2 + p_{16}z^2 + p_{17}y^2z + p_{18}yz^2 + p_{19}y^3 + p_{20}z^3 \quad (5.4)$$

$$h_2(y, z) = p_{21} + p_{22}y + p_{23}z + p_{24}yz + p_{25}y^2 + p_{26}z^2 + p_{27}y^2z + p_{28}yz^2 + p_{29}y^3 + p_{30}z^3$$

donde los coeficientes p_j son números reales. Para homogeneizar la notación, vamos a sustituir las funciones constantes y_1 , y_2 y z_2 por los parámetros p_{31} , p_{32} y p_{33} , respectivamente, en la ecuación (5.3).

Según lo anterior, el vector \mathbf{p} se construye con los parámetros que describen los polinomios $\mathbf{Dr}(x, y, z)$, $h_1(y, z)$ y $h_2(y, z)$ y las constantes y_1 , y_2 y z_2 , obteniendo:

$$\mathbf{p} = \{p_j\} \quad j = 1, \dots, 33 \quad (5.5)$$

que es un vector columna euclídeo de dimensión $N = 33$.

En este caso, el funcional de la ecuación (5.3) no es lineal, ya que la relación existente entre los parámetros que determinan la estructura geométrica de la fuente y los datos observados es una relación no lineal. Para calcular el vector incógnita \mathbf{p} utilizamos el método de Marquardt-Levenberg calculando la solución del sistema de ecuaciones (4.7) en el que la matriz jacobiano \mathbf{J} tiene $M \times 33$ dimensiones y sus componentes son las derivadas de la ecuación (5.3) con respecto a cada una de las treinta y tres componentes del vector de parámetros \mathbf{p} y para cada una de las M estaciones donde se registran los datos. Las expresiones matemáticas que nos proporcionan las componentes del jacobiano \mathbf{J} en este caso se presentan en el Apéndice C.

Una vez definido el vector incógnita del problema se construye un modelo inicial cuyos parámetros son las componentes del vector:

$$\mathbf{p}^0 = \{p_j^0\} \quad j = 1, \dots, 33 \quad (5.6)$$

y cuya respuesta gravimétrica se calcula numéricamente a partir de la ecuación (5.3). Con este modelo se inicia el proceso iterativo de Marquardt-Levenberg, presentado en el Capítulo I, para obtener la solución de los treinta y tres parámetros que determinan la fuente anómala responsable de los datos de gravedad observados.

Para ilustrar el proceso anterior, a continuación presentamos dos ejemplos teóricos. En el primero no se ha tenido en cuenta la existencia de errores experimentales en los datos y en el segundo sí se han tenido en cuenta la presencia de dichos errores.

5.1.1. Ejemplo teórico con datos que no presentan errores numéricos

La estructura geométrica del modelo teórico, que vamos a utilizar para generar los datos de gravedad de este problema, se encuentra limitada lateralmente por las funciones polinómicas $h_1(y, z) = -4 - 0.001y - 0.06z - 0.0008yz + 0.02y^2 + 0.4z^2 + 0.003y^2z + 0.004yz^2 - 0.003y^3 + 0.006z^3$ y $h_2(y, z) = 4 + 0.003y - 0.02z + 0.001yz - 0.07y^2 - 0.01z^2 + 0.004y^2z + 0.002yz^2 + 0.001y^3 - 0.0003z^3$ y las funciones constantes $y_1 = -6$ e $y_2 = 6$ km. La frontera superior viene dada por $z_1 = 0$ km, y coincide con la coordenada z_0 del observador, y la frontera inferior es $z_2 = 3$ km. La forma geométrica de esta estructura se puede ver en la figura 3.2.

El contraste de densidad que vamos a considerar viene descrito por el polinomio $Dr(x, y, z) = -0.7 + 0.1x - 0.004xy + 0.01yz - 0.07xz + 0.01x^2 - 0.03y^2 + 0.005z^2$ y se puede observar, junto con la geometría del cuerpo, en la figura 3.5(a).

Vamos a suponer que no se conocen los coeficientes de las funciones que describen tanto la geometría como el contraste de densidad de esta fuente, pero sí se conoce la anomalía gravimétrica que produce y que se puede observar en la figura 3.5(b). Esta anomalía será considerada como el conjunto de datos de nuestro problema, los cuáles están distribuidos en una malla de dimensiones 20×20 .

Como ya se dijo anteriormente, vamos a hacer uso del método de inversión de Marquardt-Levenberg para alcanzar una solución satisfactoria de los parámetros de la fuente que explique los datos de gravedad. Para ello supondremos un modelo de fuente anómala, con el que vamos a iniciar el proceso iterativo, cuyas fronteras laterales vienen dadas por los polinomios: $h_1(y, z) = -4.5 + 0.0002y + 0.001z - 0.002yz + 0.1z^2 + 0.02y^2z$, $h_2(y, z) = 3.5 - 0.04z - 0.01y^2 - 0.03z^2 + 0.003yz^2$, $y_1 = -6.2$ km e $y_2 = 6.2$ km. La frontera inferior viene dada por el plano $z_1 = z_2 = 0$ km y el contraste de densidad viene descrito por la función polinómica $Dr(x, y, z) = -0.6 + 0.08x - 0.01y + 0.003z - 0.007xy - 0.001yz - 0.04xz + 0.05x^2 - 0.001y^2 + 0.01z^2$. Por tanto, el vector de parámetros p^0 con el que iniciamos la inversión es:

$$\begin{aligned} (p^0)^T = & (-0.6, 0.08, -0.01, 0.003, -0.007, -0.001, -0.04, 0.05, -0.001, 0.01, -4.5, 0.0002, 0.001, \\ & -0.002, 0, 0.1, 0.02, 0, 0, 3.5, 0, -0.04, 0, -0.01, -0.03, 0, 0.003, 0, 0, -6.2, 6.2, 2.5) \end{aligned} \quad (5.7)$$

con $N = 33$ elementos, teniendo un vector de datos de dimensión $M = 400$, por lo que el problema a calcular es un problema inverso no lineal sobredeterminado. La estructura geométrica de la fuente inicial se puede ver en la figura 5.1 y el contraste de densidad y la anomalía gravimétrica correspondiente se pueden ver en la figura 5.2.

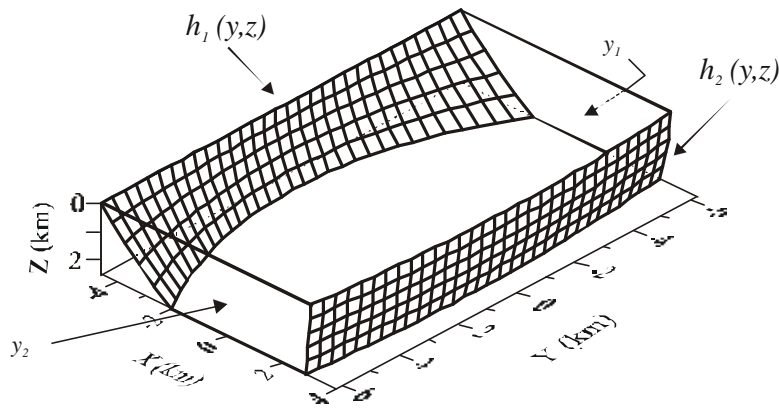


FIGURA 5.1. Geometría del modelo inicial utilizado en el proceso de inversión para el caso de una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y y z .

Con el vector \mathbf{p}^0 anterior se calcula el sistema de ecuaciones (4.7) para diferentes valores del factor de amortiguación, llegando a una posible solución después de 58 iteraciones, cuando el desajuste, dado por la ecuación (1.31), llega a un valor $q = 5.63 \cdot 10^{-5}$ mGal², como se puede ver en la figura 5.3.

El modelo de fuente anómala, que ha resultado del proceso de inversión, se puede observar en la figura 5.4(a). En la figura 5.4(b) se presenta al anomalía gravimétrica correspondiente. Se puede ver que el modelo obtenido es prácticamente el mismo que se ha utilizado para generar los datos de gravedad del problema y cuya representación gráfica se encuentra en la figura 3.5.

El residual de este caso se puede ver en la figura 5.5. Como se puede ver, este residual es del orden de 10^{-4} mGal en casi toda la malla, con un máximo en algunos puntos aislados del orden de $1.2 \cdot 10^{-3}$ mGal.

En la tabla 5.1 se presentan los parámetros del contraste de densidad de los modelos inicial, resultante y sintético para su comparación. Como se observa en esta tabla, si consideramos cuatro cifras decimales, los parámetros del modelo resultante son los mismos que los del modelo generador de los datos de gravedad con excepción de los parámetros p_1 , p_4 y p_{10} , pero sus errores relativos correspondientes no son mayores que el 2%.

Las tablas 5.2, 5.3 y 5.4 nos presentan los parámetros que determinan la estructura de la fuente anómala para cada uno de los tres modelos que intervienen en este problema. Como se puede observar, todos los parámetros de la estructura han sido solucionados satisfactoriamente, aunque algunos de ellos presentan variaciones en sus valores con respecto a los parámetros del modelo sintético. Entre estos parámetros se encuentran el p_{23} , con un error relativo del 5% y el p_{26} , con un error relativo del 14%. El parámetro que no ha sido ajustado es el p_{30} , el cual presenta un error relativo del 133%.

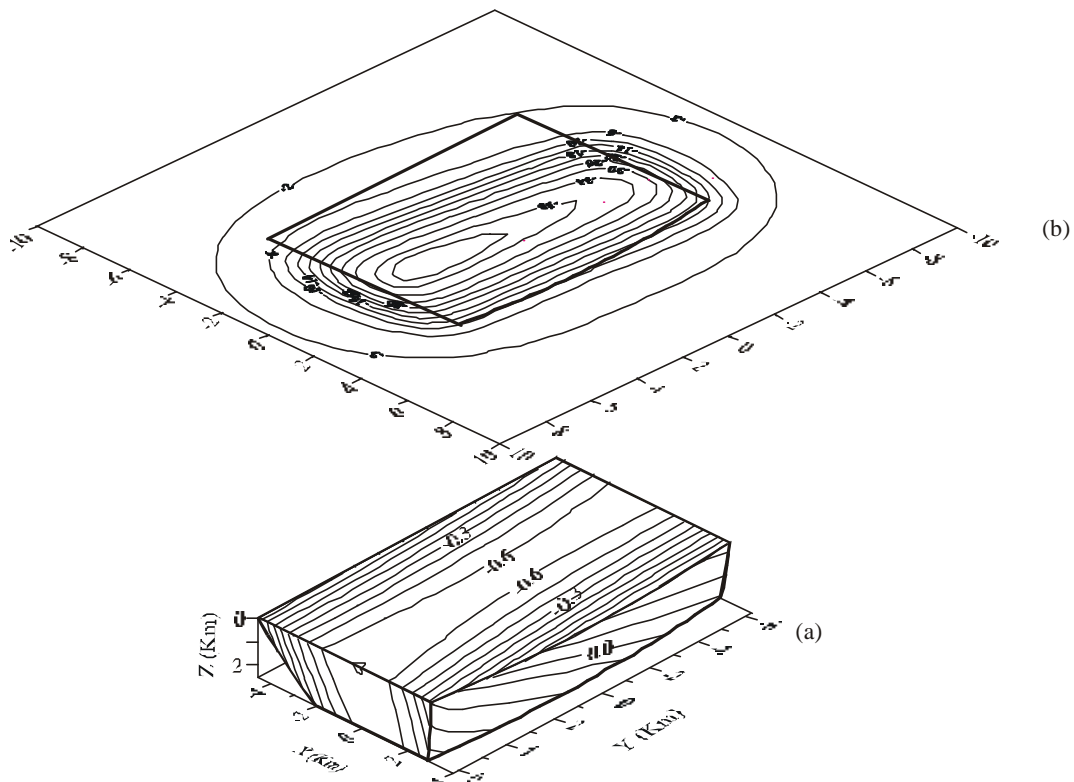


FIGURA 5.2. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas lateralmente por funciones continuas de las variables y y z . Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a). Las isolíneas de la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal . La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

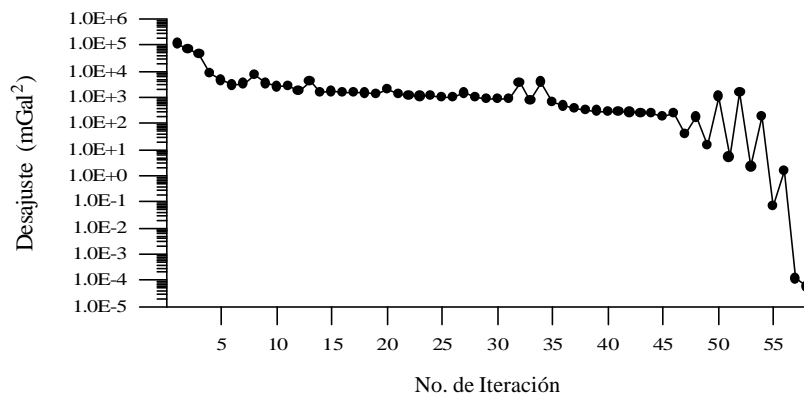


FIGURA 5.3. Evolución del desajuste q .

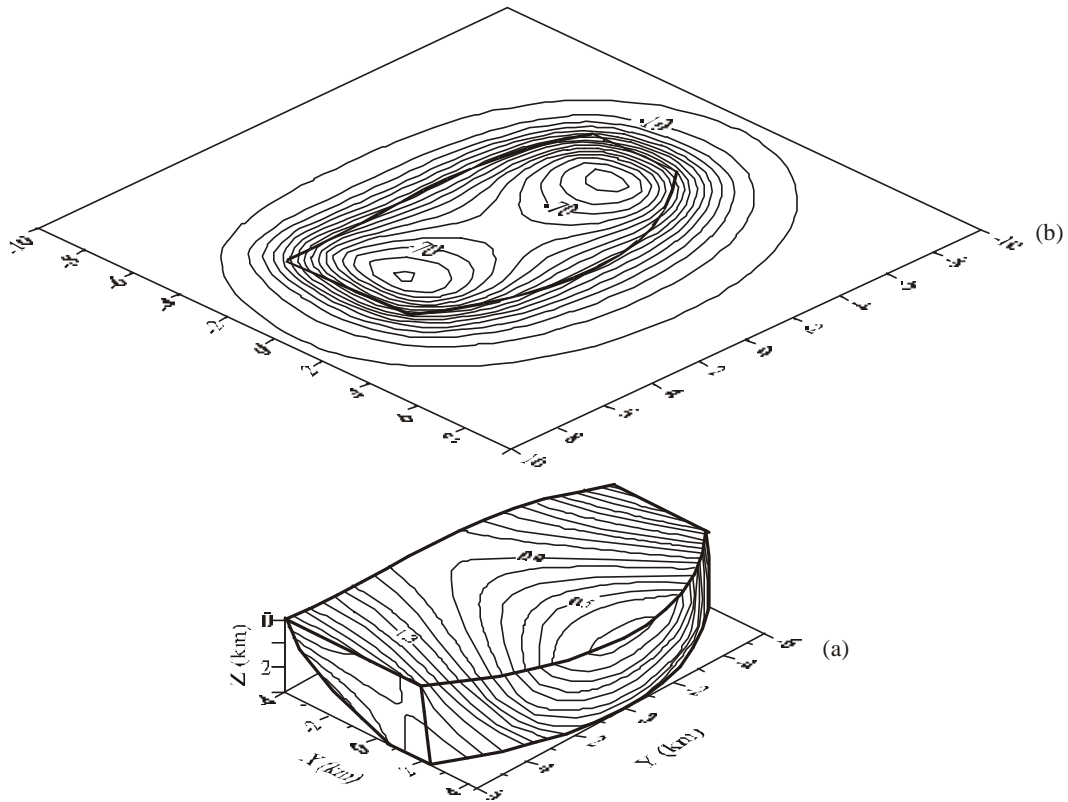


FIGURA 5.4. (a) Modelo resultante de fuente anómala obtenido en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas lateralmente por funciones continuas de las variables y y z . Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a). Las isolíneas de la anomalía gravimétrica vienen expresadas en $mGal$. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

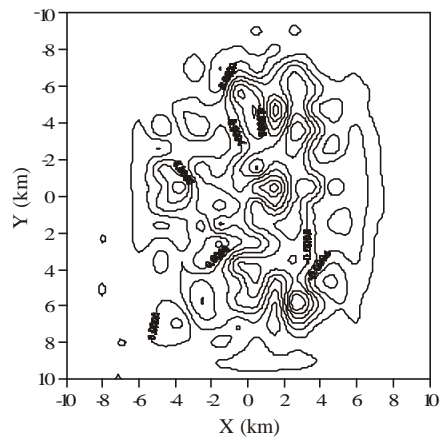


FIGURA 5.5. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad sintéticos y la anomalía gravimétrica del modelo resultante en el proceso de inversión.

DENSIDAD	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
Modelo Inicial	-0.6000	0.0800	-0.0100	0.0030	-0.0070	-0.0010	-0.0400	0.0500	-0.0010	0.0100
Modelo Resultante	-0.7002	0.1000	0.0000	-0.0003	-0.0040	0.0100	-0.0700	0.0100	-0.0300	0.0049
Modelo Sintético	-0.7000	0.1000	0.0000	0.0000	-0.0040	0.0100	-0.0700	0.0100	-0.0300	0.0050

TABLA 5.1. Parámetros del contraste de densidad correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

FRONTERA $h_1(y,z)$	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}
Modelo Inicial	-4.5000	0.0002	0.0010	-0.0020	0.0000	0.1000	0.0200	0.0000	0.0000	0.0000
Modelo Resultante	-3.9998	-0.0010	-0.0605	-0.0008	0.0200	0.4003	0.0030	0.0040	-0.0030	0.0059
Modelo Sintético	-4.0000	-0.0010	-0.0600	-0.0008	0.0200	0.4000	0.0030	0.0040	-0.0030	0.0060

TABLA 5.2. Parámetros de la frontera $h_1(y,z)$ de la estructura correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

FRONTERA $h_2(y,z)$	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}	p_{26}	p_{27}	p_{28}	p_{29}	p_{30}
Modelo Inicial	3.5000	0.0000	-0.0400	0.0000	-0.0100	-0.0300	0.0000	0.0030	0.0000	0.0000
Modelo Resultante	4.0000	0.0030	-0.0190	0.0010	-0.0700	-0.0114	0.0040	0.0020	0.0010	0.0001
Modelo Sintético	4.0000	0.0030	-0.0200	0.0010	-0.0700	-0.0100	0.0040	0.0020	0.0010	-0.0003

TABLA 5.3. Parámetros de la frontera $h_2(y,z)$ de la estructura correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

ESTRUCTURA	FRONTERA y_1	FRONTERA y_2	F.INFERIOR z_2
	p_{31}	p_{32}	p_{33}
Modelo Inicial	-6.2000	6.2000	2.5000
Modelo Resultante	-6.0000	6.0000	3.0000
Modelo Sintético	-6.0000	6.0000	3.0000

TABLA 5.4. Parámetros de las fronteras y_1 , y_2 y z_2 correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

Las variaciones numéricas encontradas en las soluciones a los parámetros de este problema son debidas, probablemente, a errores numéricos producidos en el desarrollo del proceso de inversión, puesto que los errores numéricos que podrían aparecer en el cálculo de los datos sintéticos, a partir de la ecuación (5.3), son insignificantes.

5.1.1.1. Evolución de los parámetros del modelo

En la figura 5.6 se muestra la evolución del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} utilizado, desde el modelo inicial hasta el modelo resultante. En esta figura se observa que el valor numérico de dicho parámetro disminuye de la misma forma que lo hace el desajuste q , puesto que el primero es función del segundo, al igual que ocurría en el Capítulo IV.

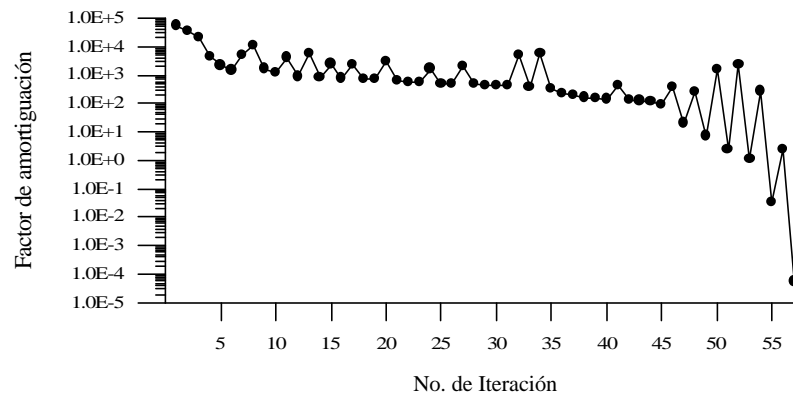


FIGURA 5.6. Evolución del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} .

En la figura 5.7 se presentan las evoluciones de los distintos parámetros del contraste de densidad a lo largo de todas las iteraciones del proceso. Vemos cómo en las cinco últimas iteraciones la evolución de estos parámetros converge hacia la solución, permaneciendo en ella hasta el final.

En las figuras 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11 se muestran las evoluciones de todos los parámetros que definen la estructura de la fuente a lo largo de las 58 iteraciones del proceso. En estas figuras se puede observar cómo se alcanza la convergencia alrededor de la iteración 55, permaneciendo estable hasta el final del proceso de inversión. El único parámetro que no llega a alcanzar la solución esperada es el parámetro p_{30} , pero esto no impide que la solución alcanzada sea satisfactoria.

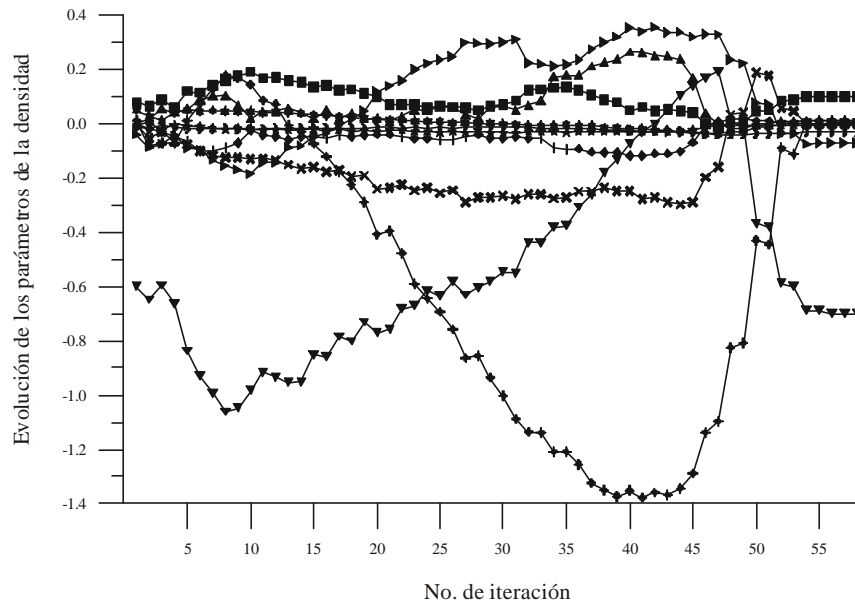


FIGURA 5.7. Evolución de los parámetros del contraste de densidad desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: $p_1(\blacktriangledown)$; $p_2(\blacksquare)$; $p_3(1)$; $p_4(\times)$; $p_5(\star)$; $p_6(\blacktriangle)$; $p_7(\blacktriangleright)$; $p_8(\star)$; $p_9(\bullet)$; $p_{10}(\blacklozenge)$.

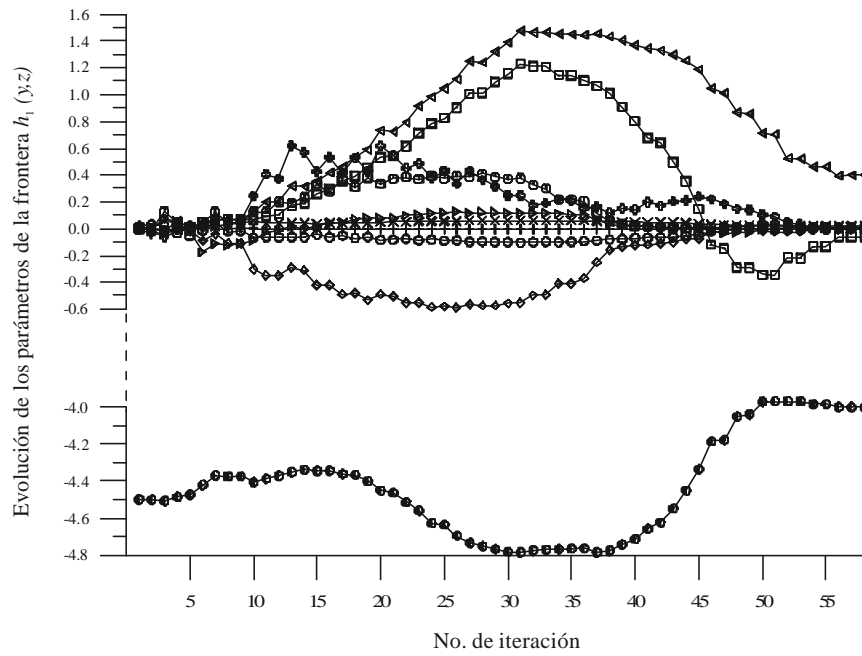


FIGURA 5.8. Evolución de los parámetros de la frontera lateral $h_1(y,z)$ desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: $p_{11}(\bullet)$; $p_{12}(\blacktriangleright)$; $p_{13}(\square)$; $p_{14}(\blacklozenge)$; $p_{15}(\times)$; $p_{16}(\blacktriangleleft)$; $p_{17}(\circ)$; $p_{18}(\blacksquare)$; $p_{19}(\blackplus)$; $p_{20}(\oplus)$.

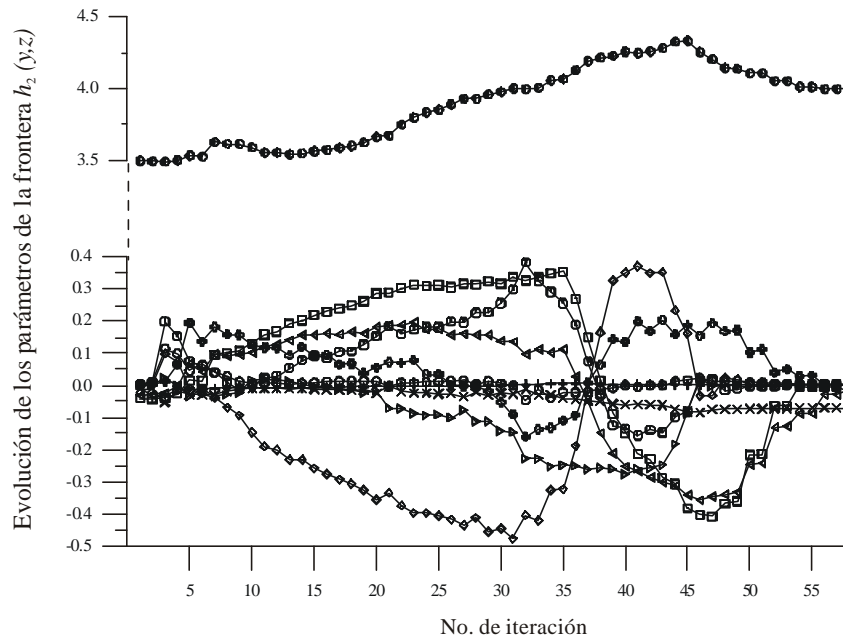


FIGURA 5.9. Evolución de los parámetros de la frontera lateral $h_2(y,z)$ desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_{11} (●); p_{12} (▶); p_{13} (□); p_{14} (◇); p_{15} (×); p_{16} (◀); p_{17} (⊙); p_{18} (⊠); p_{19} (+); p_{20} (⊕).

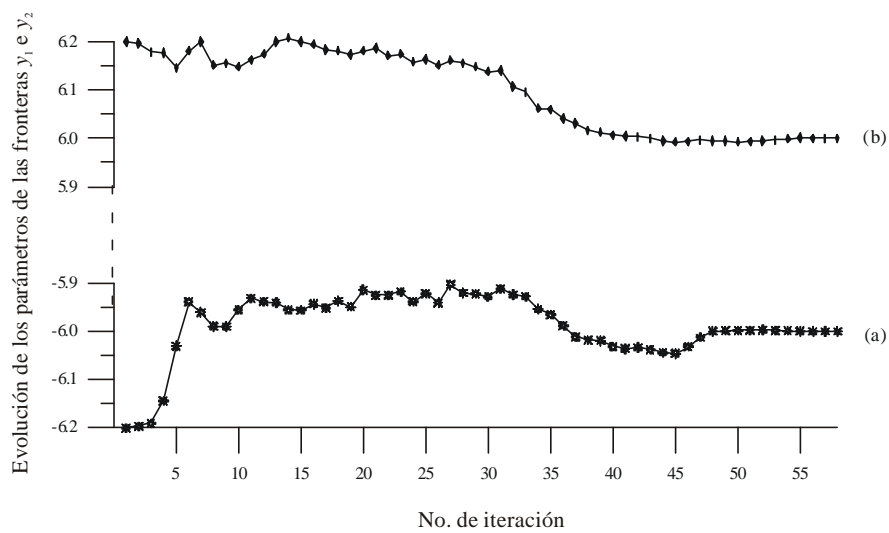


FIGURA 5.10. Evolución de los parámetros de las fronteras y_1 e y_2 desde el modelo inicial al modelo resultante de proceso de inversión. (a) Frontera y_1 . (b) Frontera y_2 .

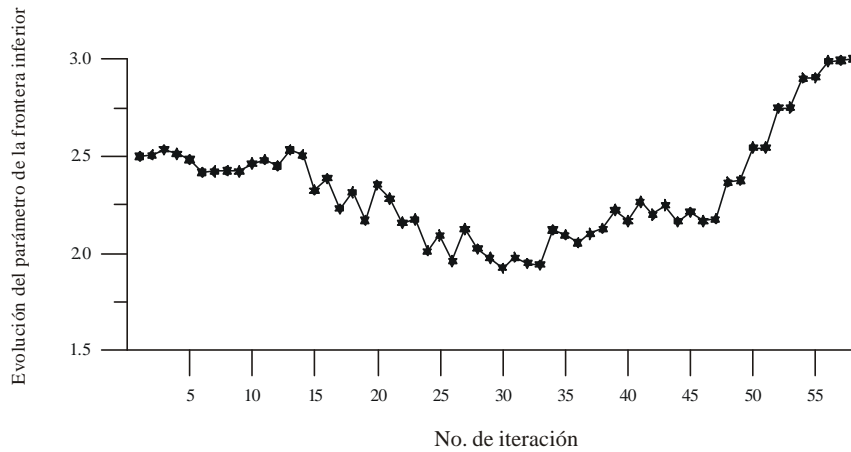


FIGURA 5.11. Evolución del parámetro de la frontera inferior z_2 desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión.

5.1.1.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

Para realizar este análisis, estudiamos la matriz jacobiano \mathbf{J} o matriz de sensibilidad de los datos de gravedad con respecto a los parámetros de la fuente. Para ello, graficamos cada uno de sus vectores columna, los cuales corresponden a las derivadas parciales del funcional $F[\mathbf{p}]$ de la ecuación (5.3) con respecto a cada uno de los 33 parámetros p_i del problema. Debido al alto número de parámetros, vamos a realizar una descripción general de las 33 gráficas en conjunto, utilizando el mismo criterio de interpretación que se siguió en el Capítulo IV para fuentes bidimensionales. El hecho de que cada gráfica esté distribuida en una superficie en vez de en un perfil, como ocurría en el caso bidimensional, no cambia la filosofía del problema. Esto es, cuando la sensibilidad de los datos es positiva, esto significa que un aumento en el valor del parámetro produce un aumento del valor de la anomalía gravimétrica del modelo resultante en la zona donde los datos son más sensibles. Y al contrario, una sensibilidad negativa significa que un aumento del valor del parámetro produce una disminución del valor de la anomalía en la zona donde se presenta mayor sensibilidad en los datos de gravedad.

En la figura 5.12 se han graficado las diez primeras columnas del jacobiano, aquellas que corresponden a la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a cada uno de los parámetros que describen el contraste de densidad.

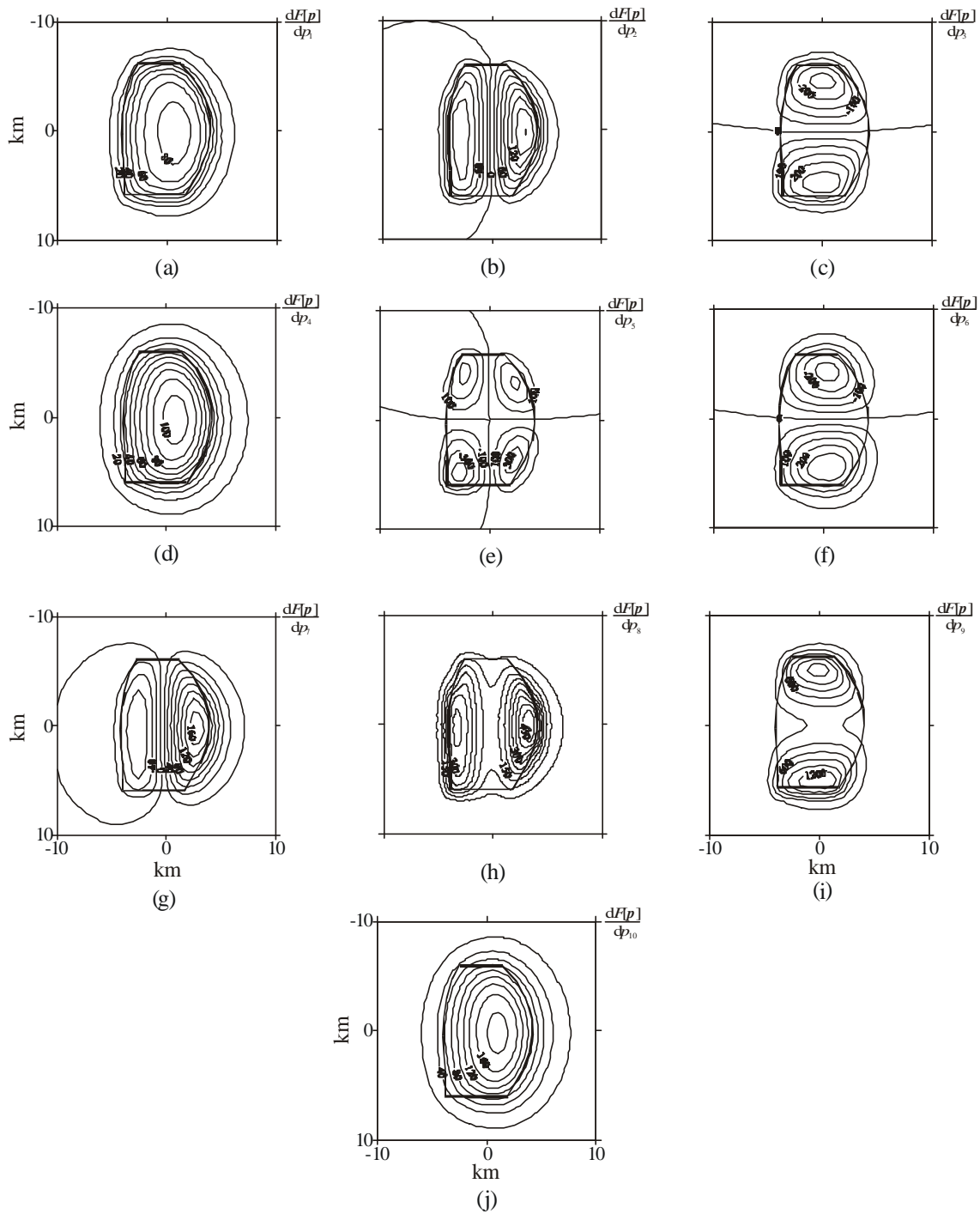


FIGURA 5.12. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen el contraste de densidad. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la malla de datos.

La gráfica (a) de dicha figura corresponde a las derivadas del funcional con respecto al término independiente p_1 del polinomio (5.2). Esta gráfica presenta un máximo centrado con respecto a la posición del cuerpo. Lo mismo sucede con las gráficas (d) y (j), correspondientes a los parámetros p_4 y p_{10} que acompañan los términos en la variable z y z^2 del polinomio (5.2).

Por otro lado, las gráficas (b), (g) e (h), correspondientes a los parámetros p_2 , p_7 y p_8 que acompañan a los términos en x , xz y x^2 del contraste de densidad, presentan dos lóbulos situados sobre las fronteras $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$. En las gráficas (b) y (g) el lóbulo situado sobre $h_1(y,z)$ presenta intensidad negativa, mientras que en la gráfica (h) ambos lóbulos son positivos. Lo mismo sucede con las gráficas correspondientes a p_3 , p_6 y p_9 los términos en la variable y , yz , y^2 (gráficas (c), (f) y (i), respectivamente), pero esta vez los lóbulos se encuentran situados sobre las posiciones de las fronteras laterales y_1 e y_2 .

La gráfica (e) representa la derivada del funcional de la ecuación (5.3) con respecto al parámetro p_5 . Este parámetro es el coeficiente del término xy en el polinomio (5.2) de la densidad. Se puede ver que aparecen cuatro lóbulos, dos positivos y dos negativos situados en las esquinas del cuerpo anómalo.

Si observamos los valores numéricos de las intensidades máximas y mínimas de las diez gráficas de la figura 5.12, podemos ver que la gráfica (i) es la que mayor intensidad presenta. Esto nos indica que los datos de gravedad son más sensibles a los posibles cambios que pueda sufrir el parámetro p_9 , que a los cambios que puedan experimentar el resto de los parámetros, por lo que es el mejor resuelto en el proceso de inversión, ya que los datos contienen mayor información sobre el efecto gravimétrico que produce una variación del mismo. Esta gráfica presenta dos máximos situados sobre las posiciones de las fronteras laterales y_1 e y_2 cuyas intensidades son $1276.5 \frac{\text{mGal km}^3}{\text{g/cm}^3}$ y $1346.3 \frac{\text{mGal km}^3}{\text{g/cm}^3}$, respectivamente. De la misma manera podemos ver que el parámetro p_1 es el que menor efecto ejerce sobre los datos de gravedad, por lo que será el peor resuelto de todos los parámetros del contraste de densidad. Su gráfica correspondiente es la gráfica (a), la cual presenta un máximo central de $84.2 \frac{\text{mGal}}{\text{g/cm}^3}$.

En la figura 5.13 se presentan las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a cada uno de los diez parámetros que describen la frontera lateral $h_1(y,z)$. Como se puede ver en las diez gráficas, la sensibilidad de los datos se centra principalmente sobre la posición que ocupa esta frontera con respecto a la malla de datos, siendo el parámetro p_{19} el que tiene mayor efecto sobre la anomalía con un mínimo y un máximo centrados en los límites de la frontera de intensidades $-6797.4 \text{ mGal km}^2$ y 4514.4 mGal km^2 , como se ve en la gráfica 5.13(i), y el que menor efecto tiene es el parámetro p_{13} , con dos máximos en las mismas posiciones pero de intensidades 25.5 mGal y 27.8 mGal , como se observa en la gráfica 5.13(c).

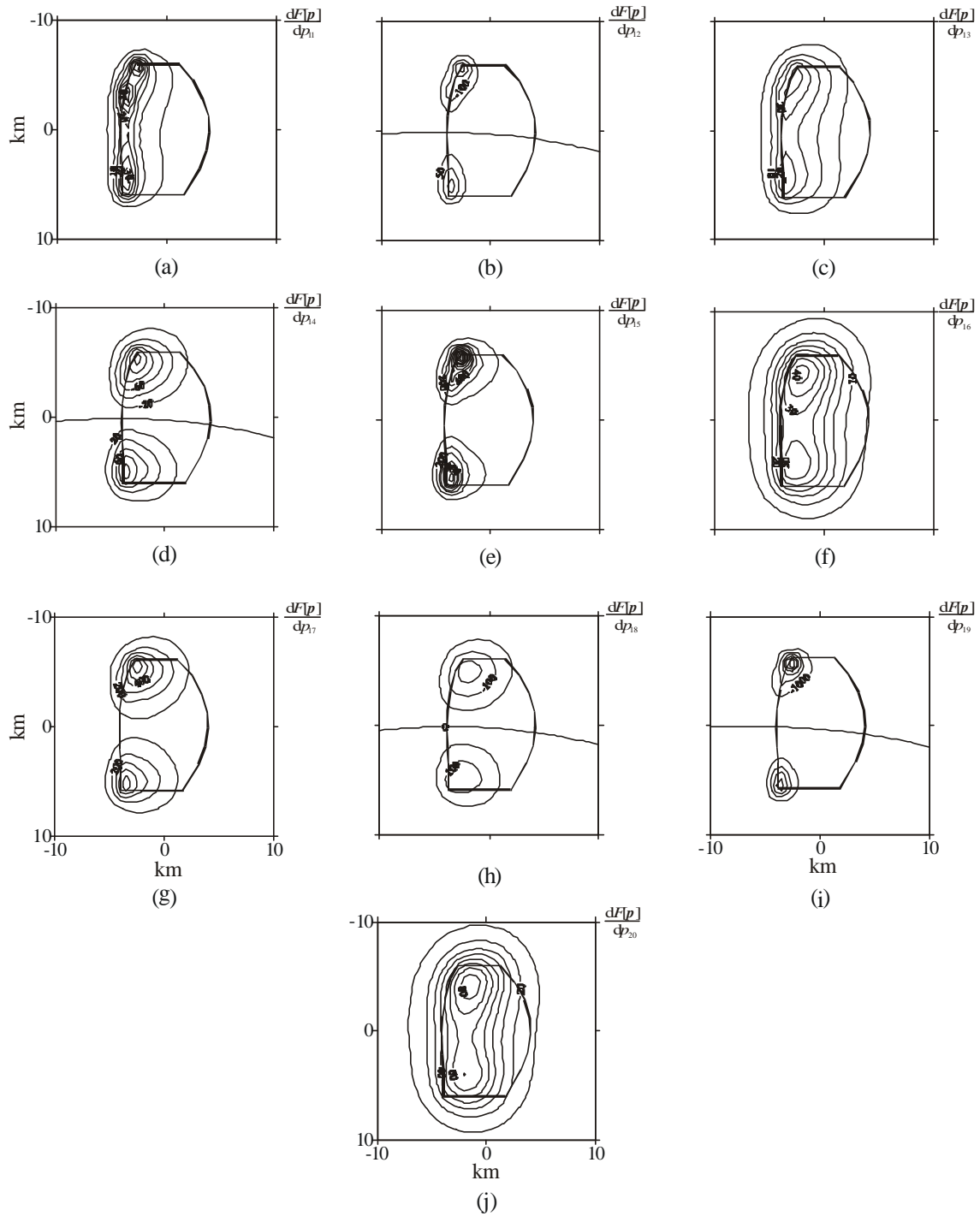


FIGURA 5.13. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera lateral $h_1(y,z)$. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la malla de datos.

En cuanto a la frontera $h_2(y,z)$, los efectos gravimétricos que ejercen los parámetros que la describen se pueden ver en las diez gráficas de la figura 5.14. Como se observa en dicha figura, la sensibilidad de los datos ante estos parámetros se produce sobre la posición de $h_2(y,z)$. El parámetro que tiene mayor efecto sobre los datos es el parámetro p_{29} , con un mínimo de -4220.0 mGal km^2 y un máximo de 5356.0 mGal km^2 de intensidad, como se puede ver en la gráfica 5.14(i). El parámetro que afecta en menor medida a los datos es el p_{23} , con dos mínimos de -32.1 mGal y -30.6 mGal, como se ve en la gráfica 5.14(c).

Si comparamos entre sí las figuras 5.13 y 5.14, vemos que hay un gran paralelismo entre las gráficas que se presentan en cada una de las figuras pero, mientras que en la figura 5.13 predominan los lóbulos de intensidad máxima, en la figura 5.14 predominan los de intensidad mínima. Esto es debido a la naturaleza y a la forma geométrica elegida para los polinomios $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$, que se pueden observar en la figura 5.1.

En la figura 5.15 se pueden ver las derivadas del funcional de la ecuación (5.3) con respecto a los parámetros p_{31} y p_{32} que definen las fronteras y_1 e y_2 , respectivamente. Vemos cómo la sensibilidad de los datos para cada una de las fronteras se centra sobre las posiciones de las mismas. En la gráfica 5.15(a) vemos la sensibilidad correspondiente a la frontera y_1 , con un máximo de intensidad de 47.1 mGal km^{-1} , lo que indica que el efecto de este parámetro sobre los datos es positivo, esto es, si el parámetro aumenta su valor, la anomalía sufrirá también un aumento sobre la posición de la frontera. De la misma manera, en la gráfica 5.15(b) observamos un lóbulo, esta vez de intensidad negativa -49.1 mGal km^{-1} , situado sobre la posición de y_2 con respecto a la malla de datos, indicando que el efecto de esta frontera es un efecto mayor que el de y_1 pero negativo.

En cuanto a la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto a la frontera inferior $z_2 = p_{33}$, en la figura 5.16 podemos ver que aparece un lóbulo de -12.2 mGal km^{-1} de intensidad centrado, aproximadamente, sobre la posición que ocupa el cuerpo con respecto a la malla de datos de gravedad. Si comparamos esta gráfica con las otras treinta y dos gráficas correspondientes a los parámetros que describen tanto el contraste de densidad como la estructura de la fuente, vemos que p_{33} es el parámetro que produce menor efecto sobre la anomalía de la gravedad.

En general no se puede decir que los datos de gravedad sean más sensibles a posibles variaciones sufridas por los parámetros del contraste de densidad que a las variaciones de los parámetros de la estructura puesto que, como se observa en las figuras anteriores, muchos de los parámetros pertenecientes a las fronteras laterales presentan un efecto cuya intensidad es mayor que el efecto de los parámetros del contraste de densidad. También hay que destacar que la sensibilidad de los datos es mucho mayor con respecto a aquellos parámetros que acompañan a los términos que dependen de y^2 e y^3 en los polinomios que describen el contraste de densidad y las fronteras laterales de la fuente. Este resultado es coherente con el análisis de sensibilidad realizado para fuentes bidimensionales en el Capítulo IV.

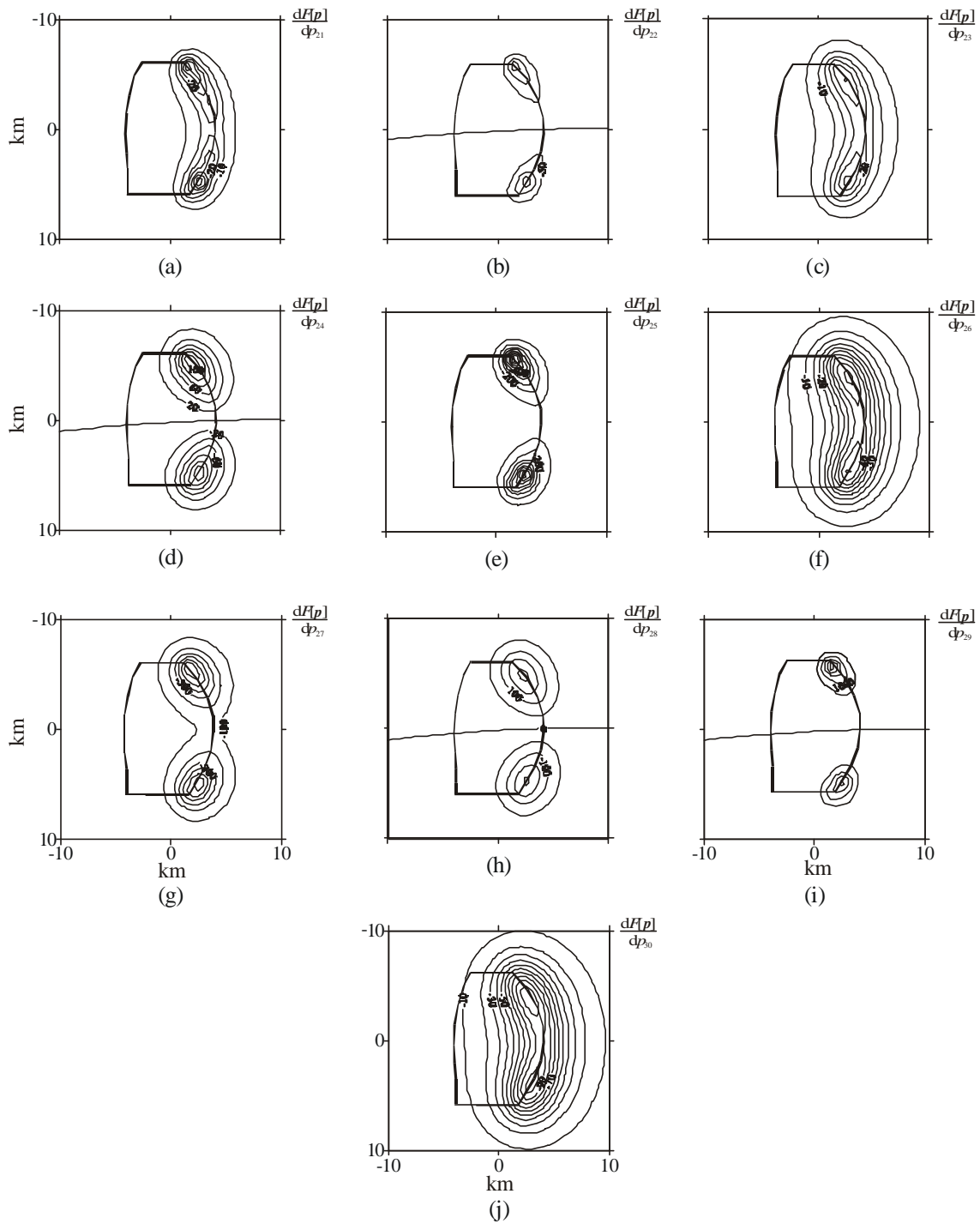


FIGURA 5.14. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera lateral $h_2(y,z)$. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la malla de datos.

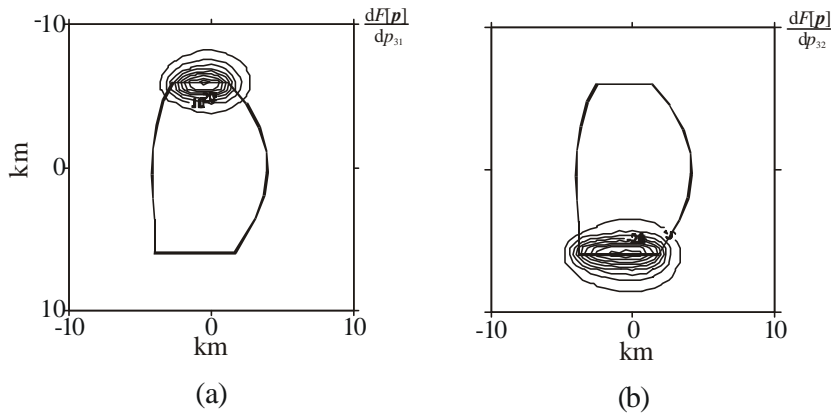


FIGURA 5.15. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen las fronteras laterales y_1 e y_2 . La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la malla de datos.

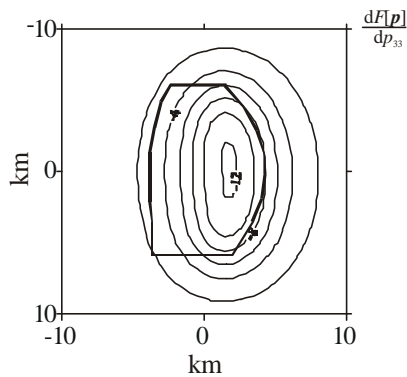


FIGURA 5.16. Representación gráfica de la columna del jacobiano correspondiente a la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto al parámetro que define la frontera inferior z_2 . La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la malla de datos.

A continuación vamos a calcular la descomposición en valores singulares de la matriz jacobiano del sistema. En la figura 5.17 se presentan dichos valores en orden de mayor a menor. En esta figura se puede ver que se han obtenido treinta y tres valores singulares diferentes de cero, lo que indica que la matriz jacobiano es una matriz de rango completo puesto que $\mathbf{h} = 33$ coincide con el número de columnas N de dicha matriz. De aquí se puede inferir que el subespacio \mathbf{V}_0 no tiene

ninguna componente, con lo que está asegurada la existencia y la unicidad de la solución para el modelo inicial elegido. Por otro lado, la condición de \mathbf{J} es $\mathbf{k} = 4.418 \cdot 10^4$, la cual es bastante elevada, lo que indica que se puede producir inestabilidad numérica en el cálculo del problema de manera que las combinaciones de parámetros, asociadas a los valores singulares más pequeños y menores que la unidad, se pueden ver afectadas por la propagación de dicha inestabilidad.

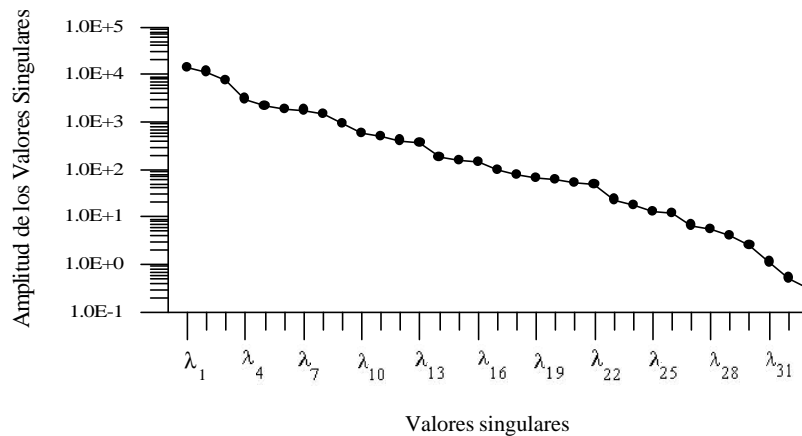


FIGURA 5.17. Valores singulares del jacobiano del problema.

En la figura 5.18 vemos las combinaciones de los parámetros asociadas a cada uno de los valores singulares de \mathbf{J} que han sido resueltas en este problema y que vienen dadas por los vectores columna de la matriz \mathbf{V}_h . Junto a cada una de las representaciones de dichos vectores, también se presentan las gráficas de los vectores columna de la matriz \mathbf{U}_h , que nos proporcionan los conjuntos de datos, que resuelven cada una de las combinaciones de los parámetros, y los valores singulares \mathbf{I}_i correspondientes.

La primera combinación de parámetros viene dada por las componentes del vector característico \mathbf{v}_1^T , entre las que destacan las componentes correspondientes a los parámetros p_{19} , de la frontera $h_1(y,z)$, y p_{29} , de la frontera $h_2(y,z)$. Estos dos parámetros son los mejor determinados por el proceso de inversión ya que la combinación a la que pertenecen está asociada al valor singular más grande $\mathbf{I}_1 = 1.374 \cdot 10^4$. Como el primer parámetro es el que presenta mayor peso de los dos, el conjunto de datos que mejor resuelve la combinación es el situado sobre la frontera $h_1(y,z)$, como nos muestra el vector \mathbf{u}_1 . Este resultado es coherente con el obtenido en el estudio de la sensibilidad de los datos en el que se pudo ver que la mayor sensibilidad correspondía al parámetro p_{19} .

En la siguiente combinación, asociada al valor singular $\mathbf{I}_2 = 1.152 \cdot 10^4$, vuelven a aparecer estos dos parámetros, pero esta vez es el parámetro p_{29} el que presenta mayor peso y, por tanto, el conjunto de datos que mejor resuelve esta combinación está situado sobre la frontera $h_2(y,z)$, como

muestra el vector \mathbf{u}_2 . A partir de estas dos combinaciones se puede suponer que existe correlación entre los parámetros p_{19} y p_{29} .

En la tercera combinación, con $I_3 = 7.723 \cdot 10^3$, destaca la componente de \mathbf{v}_3^T correspondiente al parámetro p_9 , que es el coeficiente que acompaña al término y^2 en el polinomio (5.2) del contraste de densidad. Por tanto, el conjunto de datos que describe esta combinación se encuentra sobre las fronteras laterales y_1 e y_2 , que es donde se presenta la mayor sensibilidad, como vimos en la figura 5.12(i). En esta combinación comienzan a destacar también los pesos correspondientes a los parámetros $p_8, p_{10}, p_{15}, p_{17}, p_{25}$ y p_{27} .

La cuarta combinación corresponde al valor singular $I_4 = 3.066 \cdot 10^3$. Las componentes que destacan corresponden a los parámetros p_{15} y p_{17} de la frontera $h_1(y,z)$, y a los parámetros p_{25} y p_{27} de la frontera $h_2(y,z)$, junto con algunos de los parámetros del contraste de densidad. Los datos que resuelven dicha combinación se encuentran situados sobre las cuatro esquinas del cuerpo, que es donde los datos presentan mayor sensibilidad. Los pesos correspondientes a estos parámetros también aparecía en la combinación anterior, de lo que se puede deducir la existencia de correlación entre los cuatro parámetros.

En la combinación asociada al valor singular $I_5 = 2.113 \cdot 10^3$ vuelven a destacar los parámetros p_{15}, p_{17}, p_{25} y p_{27} , pero esta vez acompañados de p_8 y p_9 . Lo mismo sucede en la sexta combinación, aunque aquí ya comienzan a destacar algunos de los pesos correspondientes a los parámetros del contraste de densidad. Esta combinación está asociada al valor singular $I_6 = 1.855 \cdot 10^3$. Los vectores característicos de los datos para ambas combinaciones nos muestra que los conjuntos de datos que resuelven estas combinaciones se encuentran situados en las posiciones correspondientes a las fronteras laterales del cuerpo.

En la siguiente combinación aparecen los pesos correspondientes a los parámetros p_3 y p_6 junto con el parámetro p_{18} . Esta combinación está asociada a $I_7 = 1.785 \cdot 10^3$ y el conjunto de datos que la resuelve se encuentra sobre las posiciones de las esquinas del cuerpo y las fronteras y_1 e y_2 .

En la octava combinación, asociada a $I_8 = 1.482 \cdot 10^3$, aparece destacado el peso correspondiente a un único parámetro, el p_5 . Por ello, el vector de datos \mathbf{u}_8 presenta cuatro lóbulos principales situados en la posición de las esquinas del cuerpo, lo mismo que la gráfica (e) de la sensibilidad presentada en la figura 5.12.

En las siguientes siete combinaciones los valores singulares son del orden de 10^{-2} , un orden de magnitud menor que los de las combinaciones anteriores. En dichas combinaciones destacan los pesos correspondientes a la mayoría de los parámetros que describen el contraste de densidad y las fronteras laterales $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$ y no es hasta la decimosexta combinación cuando comienzan a destacar los pesos correspondientes a los parámetros p_{31} y p_{32} , que son las fronteras laterales y_1 e y_2 , respectivamente, aunque de manera suave, ya que el parámetro que domina dicha combinación es el parámetro p_{12} , perteneciente a la frontera $h_1(y,z)$.

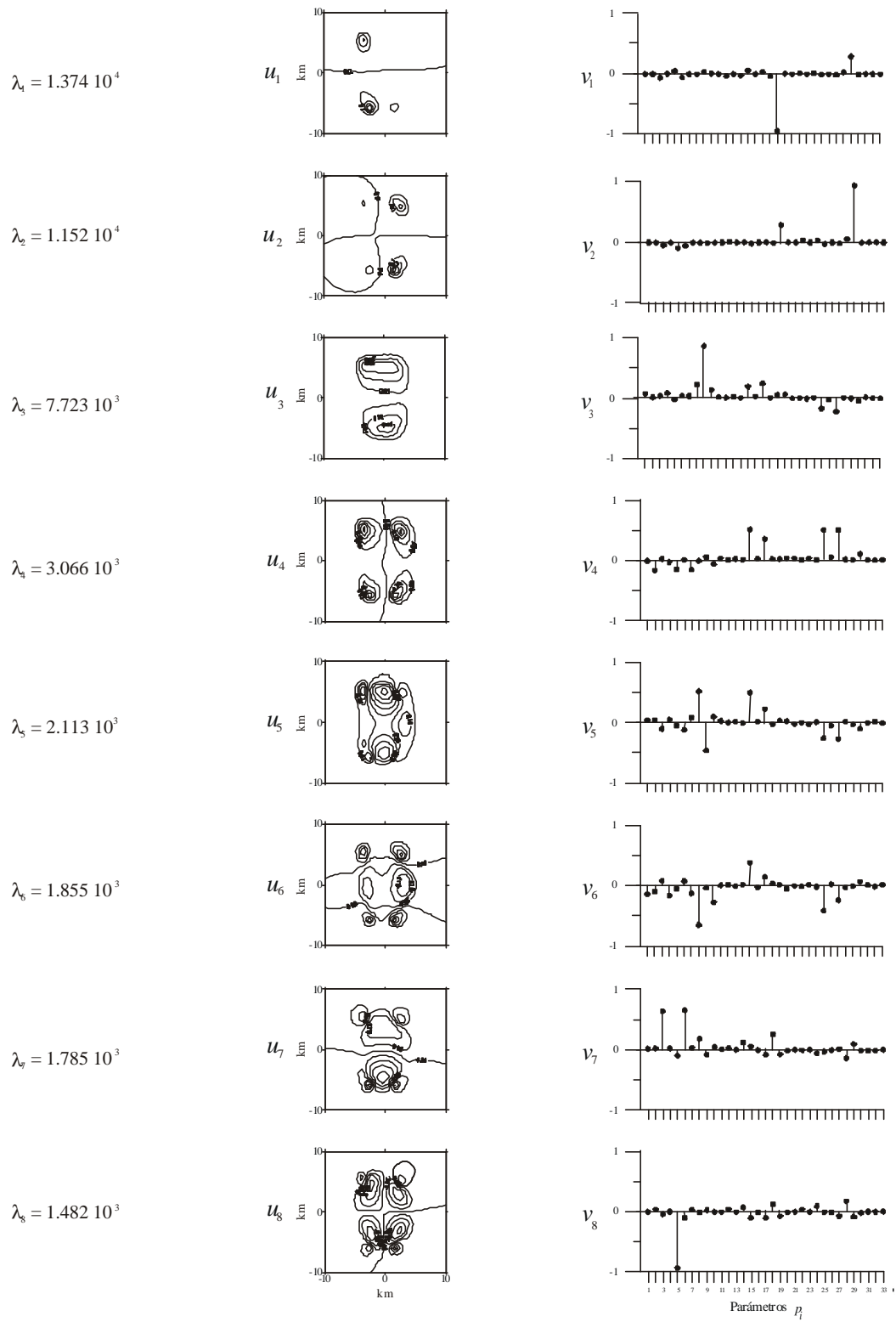


FIGURA 5.18. Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

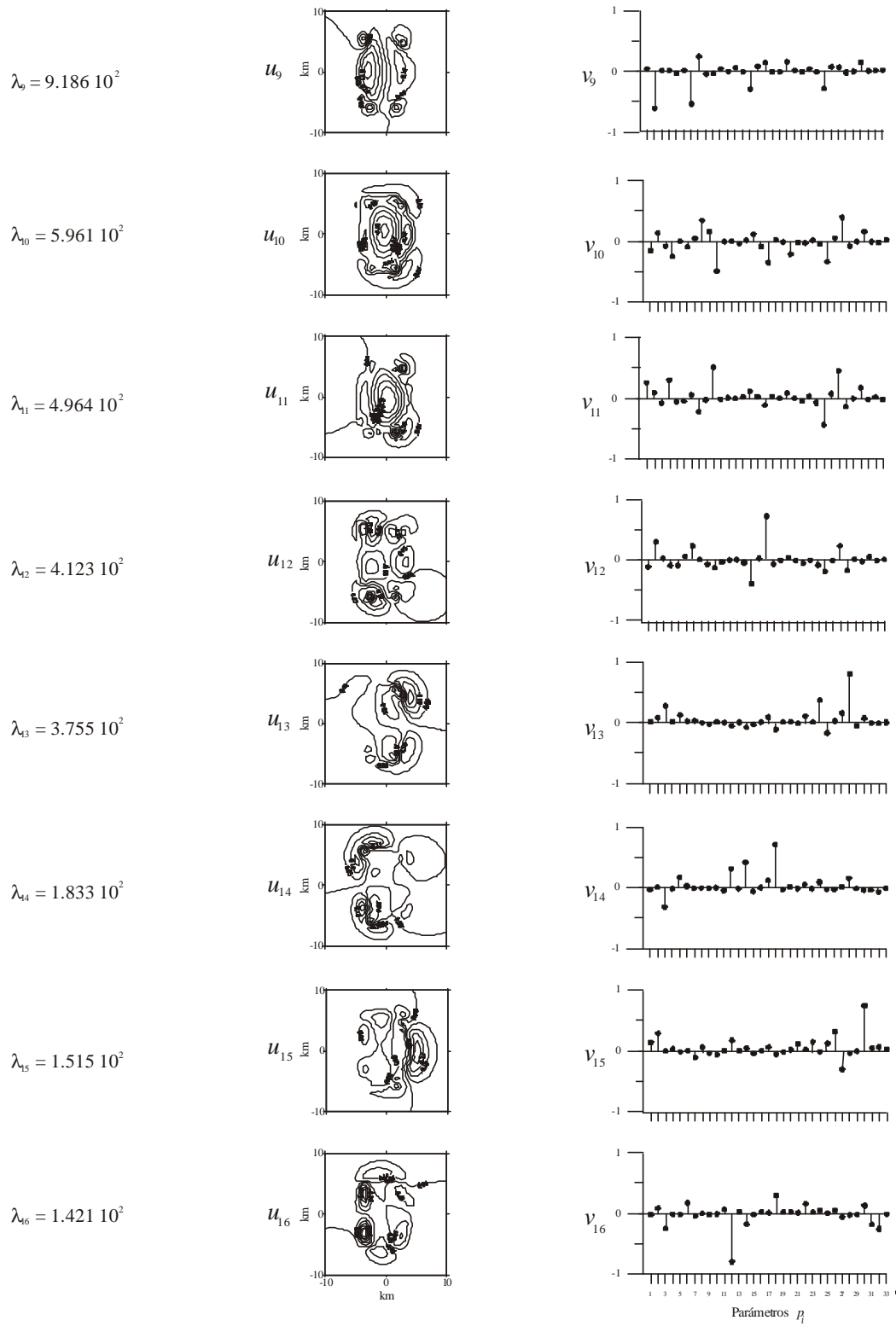


FIGURA 5.18 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

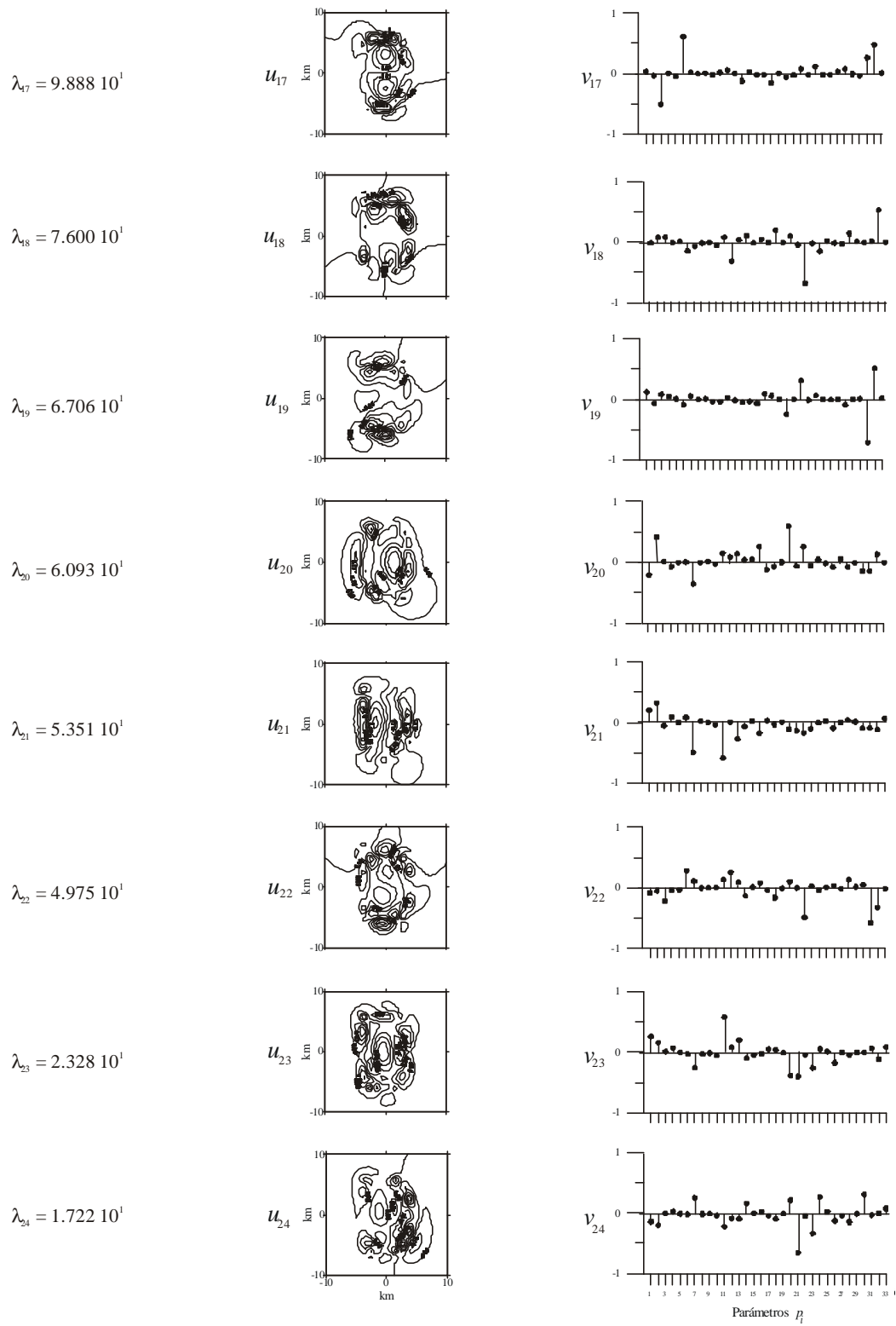


FIGURA 5.18 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

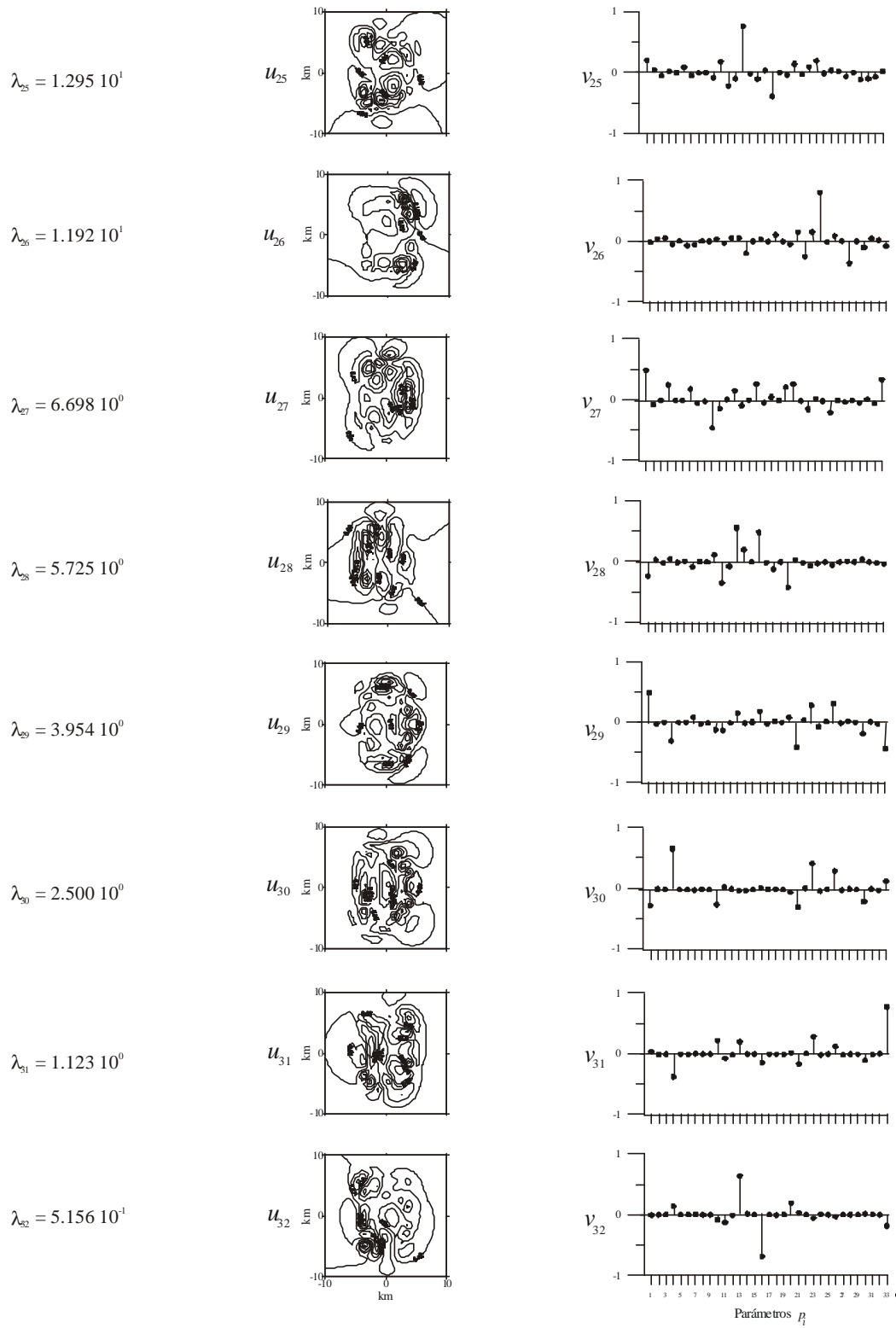


FIGURA 5.18 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

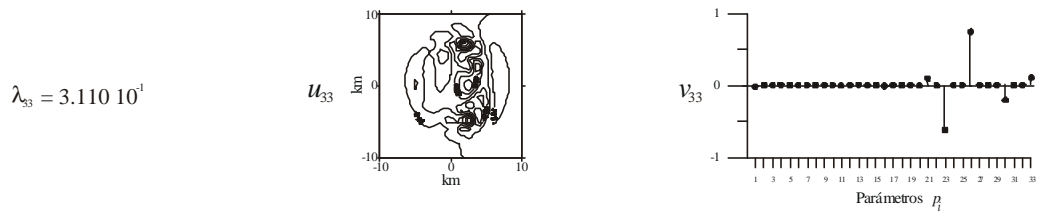


FIGURA 5.18 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

En las combinaciones 17, 18 y 19 siguen destacando, esta vez con mayor fuerza, los parámetros p_{31} y p_{32} , junto con algún que otro parámetro del contraste de densidad o de las fronteras $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$. Los conjuntos de los datos responsables de la resolución de todas estas combinaciones son más complejos que los correspondientes a las primeras, ya que en cada una de ellas participan más cantidad de parámetros y, por tanto, la sensibilidad de los datos estará más repartida en la posición que ocupa la fuente con respecto a la malla de datos.

El peso p_{33} , correspondiente a la frontera inferior, no destaca hasta la vigesimoséptima combinación. Este peso vuelve a aparecer en la vigesimonovena pero no es hasta la combinación número 31 cuando aparece como el peso dominante de la combinación. El valor singular correspondiente es $\mathbf{I}_{31} = 1.123 \cdot 10^0$, muy pequeño en comparación con el valor singular más grande del problema, lo que indica que este parámetro puede verse afectado por la propagación de los errores de redondeo cometidos en el cálculo de la inversión. Lo mismo puede suceder con las dos últimas combinaciones, ya que éstas están asociadas a valores singulares menores que la unidad, como se puede ver en la figura 5.18. En la iteración trigesimosegunda destacan, principalmente, los pesos de los parámetros p_{13} y p_{16} mientras que en la trigesimotercera destacan los pesos correspondientes a p_{23} , p_{26} y p_{30} . Los valores obtenidos en el proceso de inversión, para estos cinco parámetros, son los que más se desvían del modelo sintético, como se puede ver en las tablas 5.2 y 5.3. El hecho de que el parámetro p_{30} sea el que tenga el mayor error relativo de los tres, como se ve en la tabla 5.3, no significa que el método no haya llegado a una solución, sino que ha llegado a otra solución igualmente válida para el problema que nos ocupa, como se puede ver en las figuras 5.4(a) y 3.5(a).

Para este ejemplo en tres dimensiones, los parámetros de la fuente anómala mejor resueltos en el proceso de inversión son dos de los parámetros que describen su estructura, uno correspondiente a la frontera $h_1(y,z)$ y el otro correspondiente a $h_2(y,z)$ aunque, en líneas generales, el conjunto de los parámetros del contraste de densidad son los que mejor resolución presentan en la inversión, ya que aparecen representados en las primeras diez combinaciones asociadas a los valores singulares más grandes.

5.1.1.3. Resolución de los parámetros

La matriz de resolución se calcula mediante la expresión (1.53). Para este caso, dicha matriz es la matriz identidad, ya que el valor del factor de amortiguación para la última iteración del proceso es $\mathbf{b}^{-1} = 0.0$. Por tanto, la resolución del problema es excelente, y el estimador de los parámetros, calculado mediante la inversión, debe coincidir con la solución real del problema según la relación (1.51). Pero, debido a los cálculos numéricos realizados para llegar a la solución, esta coincidencia puede no ser tal. Por tanto, vamos a calcular las incertidumbres asociadas a las soluciones de los parámetros del modelo resultante.

5.1.1.4. Covarianza de los parámetros

La matriz de covarianza de los parámetros se calcula a partir de la ecuación (1.60) ya que se ha supuesto que los datos del problema carecen de errores. La varianza residual de este caso es $\hat{\mathbf{S}}^2 = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ mGal}^2$. Los valores numéricos de los elementos de esta matriz se pueden ver en la tabla 5.5, calculada mediante la ecuación (1.61).

En la tabla 5.6 se presentan los valores de los parámetros del modelo solución junto con las incertidumbres correspondientes, las cuáles han sido calculadas a partir de la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza y teniendo en cuenta un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \mathbf{s}$.

5.1.1.5. Correlación entre los parámetros

La matriz de correlación de los parámetros se puede ver en la figura 5.19 y los valores numéricos de sus elementos se presentan en la tabla 5.7. Esta matriz se ha calculado a partir de la matriz de covarianza haciendo uso de la ecuación (1.64). Se puede observar que existe fuerte correlación entre algunos de los parámetros del contraste de densidad, sobre todo entre los parámetros p_7, p_8, p_9 y p_{10} . También hay correlación entre los parámetros p_{11}, p_{12}, p_{13} y p_{14} de la frontera izquierda. Algunos de los parámetros de dicha frontera presentan correlación con los parámetros del contraste de densidad, mientras que con los de la frontera derecha apenas hay correlación.

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	D_{17}	
5.865 10⁻¹⁴	-2.750 10 ⁻¹⁵	3.965 10 ⁻¹⁶	-8.312 10 ⁻¹⁴	-2.024 10 ⁻¹⁷	-1.895 10 ⁻¹⁶	8.069 10 ⁻¹⁵	-2.014 10 ⁻¹⁵	-5.214 10 ⁻¹⁶	1.644 10 ⁻¹⁴	-3.860 10 ⁻¹⁵	-3.070 10 ⁻¹⁶	-1.404 10 ⁻¹⁴	-1.940 10 ⁻¹⁵	4.649 10 ⁻¹⁶	3.137 10 ⁻¹⁴	-1.125 10 ⁻¹⁵	D_1
	7.025 10⁻¹⁶	-3.659 10 ⁻¹⁷	1.991 10 ⁻¹⁵	-8.533 10 ⁻¹⁹	2.873 10 ⁻¹⁷	-1.355 10 ⁻¹⁵	1.446 10 ⁻¹⁶	3.745 10 ⁻¹⁷	5.200 10 ⁻¹⁶	1.897 10 ⁻¹⁵	3.465 10 ⁻¹⁷	-6.227 10 ⁻¹⁵	3.100 10 ⁻¹⁶	-6.682 10 ⁻¹⁷	6.587 10 ⁻¹⁵	1.355 10 ⁻¹⁶	D_2
		1.665 10⁻¹⁶	-8.247 10 ⁻¹⁶	1.357 10 ⁻¹⁷	-2.055 10 ⁻¹⁶	9.116 10 ⁻¹⁷	-1.063 10 ⁻¹⁷	-1.670 10 ⁻¹⁸	2.660 10 ⁻¹⁶	3.412 10 ⁻¹⁶	1.806 10 ⁻¹⁶	-1.611 10 ⁻¹⁵	-6.721 10 ⁻¹⁶	6.594 10 ⁻¹⁸	1.340 10 ⁻¹⁵	-1.295 10 ⁻¹⁷	D_3
			3.935 10⁻¹³	-4.182 10 ⁻¹⁷	1.765 10 ⁻¹⁵	-2.550 10 ⁻¹⁵	-1.571 10 ⁻¹⁵	-8.010 10 ⁻¹⁶	-2.078 10 ⁻¹³	-5.899 10 ⁻¹⁴	-2.724 10 ⁻¹⁵	3.998 10 ⁻¹³	1.068 10 ⁻¹⁴	-3.755 10 ⁻¹⁶	-4.691 10 ⁻¹³	1.058 10 ⁻¹⁵	D_4
				4.235 10⁻¹⁸	-2.066 10 ⁻¹⁷	-3.845 10 ⁻¹⁹	1.962 10 ⁻¹⁸	5.329 10 ⁻¹⁹	4.595 10 ⁻¹⁷	2.838 10 ⁻¹⁷	1.466 10 ⁻¹⁷	-3.811 10 ⁻¹⁷	-5.163 10 ⁻¹⁷	-1.085 10 ⁻¹⁸	-5.216 10 ⁻¹⁷	2.750 10 ⁻¹⁸	D_5
					2.740 10⁻¹⁶	-5.233 10 ⁻¹⁷	-1.500 10 ⁻¹⁷	-7.217 10 ⁻¹⁸	-1.045 10 ⁻¹⁵	-8.584 10 ⁻¹⁶	-2.888 10 ⁻¹⁶	4.063 10 ⁻¹⁵	1.016 10 ⁻¹⁵	-4.835 10 ⁻¹⁸	-3.751 10 ⁻¹⁵	8.731 10 ⁻¹⁸	D_6
						3.146 10⁻¹⁵	-4.806 10 ⁻¹⁶	-1.271 10 ⁻¹⁶	-3.470 10 ⁻¹⁵	-4.492 10 ⁻¹⁵	-9.062 10 ⁻¹⁸	1.509 10 ⁻¹⁴	-8.354 10 ⁻¹⁶	1.722 10 ⁻¹⁶	-1.371 10 ⁻¹⁴	-3.744 10 ⁻¹⁶	D_7
							1.495 10⁻¹⁶	4.275 10 ⁻¹⁷	2.358 10 ⁻¹⁵	1.059 10 ⁻¹⁵	4.235 10 ⁻¹⁷	-4.760 10 ⁻¹⁵	-1.522 10 ⁻¹⁷	-2.521 10 ⁻¹⁷	4.365 10 ⁻¹⁵	6.087 10 ⁻¹⁷	D_8
								1.376 10⁻¹⁷	8.769 10 ⁻¹⁶	3.938 10 ⁻¹⁶	2.044 10 ⁻¹⁷	-2.049 10 ⁻¹⁵	-2.834 10 ⁻¹⁷	-4.980 10 ⁻¹⁸	2.192 10 ⁻¹⁵	1.136 10 ⁻¹⁷	D_9
									1.287 10⁻¹³	4.179 10 ⁻¹⁴	2.039 10 ⁻¹⁵	-2.565 10 ⁻¹³	-5.834 10 ⁻¹⁵	-6.899 10 ⁻¹⁷	2.933 10 ⁻¹³	4.628 10 ⁻¹⁷	D_{10}
										1.047 10⁻¹³	7.805 10 ⁻¹⁵	-4.830 10 ⁻¹³	-1.603 10 ⁻¹³	-4.932 10 ⁻¹⁶	4.897 10 ⁻¹³	4.924 10 ⁻¹⁶	D_{11}
											1.403 10⁻¹⁵	-3.492 10 ⁻¹⁴	-3.489 10 ⁻¹⁴	3.861 10 ⁻¹⁸	3.426 10 ⁻¹⁴	-3.877 10 ⁻¹⁷	D_{12}
												2.377 10⁻¹²	7.460 10 ⁻¹⁵	1.078 10 ⁻¹⁵	-2.500 10 ⁻¹²	-2.654 10 ⁻¹⁷	D_{13}
													1.015 10⁻¹⁴	-9.296 10 ⁻¹⁷	-7.275 10 ⁻¹⁴	2.262 10 ⁻¹⁶	D_{14}
														2.319 10⁻¹⁷	-4.986 10 ⁻¹⁶	-4.340 10 ⁻¹⁷	D_{15}
															2.711 10⁻¹²	-1.383 10 ⁻¹⁵	D_{16}
																9.190 10⁻¹⁷	D_{17}

TABLA 5.5. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

D_{10}	D_{11}	D_{20}	D_{21}	D_{22}	D_{32}	D_{34}	D_{35}	D_{36}	D_{37}	D_{38}	D_{39}	D_{20}	D_{21}	D_{22}		
2.149 10 ⁻¹⁵	2.824 10 ⁻¹⁷	7.411 10 ⁻¹⁵	-3.192 10 ⁻¹⁴	1.806 10 ⁻¹⁵	1.671 10 ⁻¹³	-1.915 10 ⁻¹⁵	1.536 10 ⁻¹⁶	-1.945 10 ⁻¹³	3.407 10 ⁻¹⁷	3.851 10 ⁻¹⁶	-2.890 10 ⁻¹⁷	5.036 10 ⁻¹⁴	-1.918 10 ⁻¹⁶	-4.466 10 ⁻¹⁶	2.197 10 ⁻¹⁵	D_{11}
-2.801 10 ⁻¹⁶	-3.349 10 ⁻¹⁶	-3.564 10 ⁻¹⁶	4.216 10 ⁻¹⁶	-1.967 10 ⁻¹⁶	2.724 10 ⁻¹⁵	1.711 10 ⁻¹⁶	-3.406 10 ⁻¹⁷	-4.019 10 ⁻¹⁵	4.103 10 ⁻¹⁷	-3.255 10 ⁻¹⁷	4.396 10 ⁻¹⁸	1.257 10 ⁻¹⁵	-9.002 10 ⁻¹⁸	7.641 10 ⁻¹⁸	-2.504 10 ⁻¹⁵	D_{12}
3.988 10 ⁻¹⁶	-5.140 10 ⁻¹⁹	-9.890 10 ⁻¹⁷	-8.930 10 ⁻¹⁶	-4.149 10 ⁻¹⁷	4.101 10 ⁻¹⁵	3.629 10 ⁻¹⁶	1.191 10 ⁻¹⁷	-4.028 10 ⁻¹⁵	-1.534 10 ⁻¹⁷	-2.059 10 ⁻¹⁶	-1.083 10 ⁻¹⁸	1.014 10 ⁻¹⁵	1.286 10 ⁻¹⁶	9.991 10 ⁻¹⁷	4.695 10 ⁻¹⁶	D_{13}
-5.525 10 ⁻¹⁵	-1.532 10 ⁻¹⁷	1.287 10 ⁻¹³	7.985 10 ⁻¹⁴	-3.793 10 ⁻¹⁵	-2.226 10 ⁻¹³	5.487 10 ⁻¹⁵	-1.828 10 ⁻¹⁵	8.677 10 ⁻¹⁴	3.144 10 ⁻¹⁵	-1.650 10 ⁻¹⁵	4.715 10 ⁻¹⁷	-3.988 10 ⁻¹⁵	6.214 10 ⁻¹⁵	-7.237 10 ⁻¹⁵	-4.300 10 ⁻¹³	D_{14}
4.245 10 ⁻¹⁷	-1.619 10 ⁻¹⁹	1.893 10 ⁻¹⁷	-9.400 10 ⁻¹⁷	1.406 10 ⁻¹⁸	2.585 10 ⁻¹⁶	3.025 10 ⁻¹⁷	1.896 10 ⁻¹⁸	-6.197 10 ⁻¹⁷	-3.069 10 ⁻¹⁸	-1.518 10 ⁻¹⁷	-2.809 10 ⁻¹⁹	-1.564 10 ⁻¹⁷	1.349 10 ⁻¹⁷	1.373 10 ⁻¹⁷	2.497 10 ⁻¹⁶	D_{15}
-5.954 10 ⁻¹⁶	1.175 10 ⁻¹⁸	8.348 10 ⁻¹⁶	1.019 10 ⁻¹⁵	4.882 10 ⁻¹⁷	-3.120 10 ⁻¹⁵	-4.061 10 ⁻¹⁶	-2.458 10 ⁻¹⁷	1.573 10 ⁻¹⁵	3.923 10 ⁻¹⁷	2.368 10 ⁻¹⁶	1.032 10 ⁻¹⁸	-2.043 10 ⁻¹⁶	-1.520 10 ⁻¹⁶	-1.685 10 ⁻¹⁶	-2.874 10 ⁻¹⁵	D_{16}
7.513 10 ⁻¹⁶	7.434 10 ⁻¹⁸	8.367 10 ⁻¹⁵	-1.225 10 ⁻¹⁵	4.711 10 ⁻¹⁶	-6.219 10 ⁻¹⁵	-4.008 10 ⁻¹⁶	7.052 10 ⁻¹⁷	1.091 10 ⁻¹⁴	-6.797 10 ⁻¹⁷	5.883 10 ⁻¹⁷	-1.020 10 ⁻¹⁷	-4.114 10 ⁻¹⁵	1.362 10 ⁻¹⁶	-2.429 10 ⁻¹⁶	3.177 10 ⁻¹⁵	D_{17}
-5.978 10 ⁻¹⁷	-1.311 10 ⁻¹⁸	-2.132 10 ⁻¹⁵	5.403 10 ⁻¹⁶	-5.846 10 ⁻¹⁷	-4.695 10 ⁻¹⁵	5.494 10 ⁻¹⁷	1.343 10 ⁻¹⁷	7.560 10 ⁻¹⁵	-4.329 10 ⁻¹⁷	-7.283 10 ⁻¹⁸	1.037 10 ⁻¹⁸	-2.108 10 ⁻¹⁵	-9.398 10 ⁻¹⁷	1.531 10 ⁻¹⁶	5.688 10 ⁻¹⁵	D_{18}
-5.109 10 ⁻¹⁸	-3.642 10 ⁻¹⁹	-8.787 10 ⁻¹⁶	8.827 10 ⁻¹⁷	-1.088 10 ⁻¹⁷	-1.496 10 ⁻¹⁵	-7.336 10 ⁻²⁰	7.186 10 ⁻¹⁸	2.632 10 ⁻¹⁵	-1.674 10 ⁻¹⁷	3.735 10 ⁻¹⁸	3.026 10 ⁻¹⁹	-7.685 10 ⁻¹⁶	-3.165 10 ⁻¹⁷	5.209 10 ⁻¹⁷	2.192 10 ⁻¹⁵	D_{19}
2.306 10 ⁻¹⁵	-9.651 10 ⁻¹⁸	-9.145 10 ⁻¹⁴	-3.130 10 ⁻¹⁴	1.494 10 ⁻¹⁵	1.765 10 ⁻¹⁴	-2.578 10 ⁻¹⁵	1.191 10 ⁻¹⁵	1.054 10 ⁻¹³	-2.245 10 ⁻¹⁵	8.981 10 ⁻¹⁶	-1.558 10 ⁻¹⁷	-4.211 10 ⁻¹⁴	-4.040 10 ⁻¹⁵	4.984 10 ⁻¹⁵	3.009 10 ⁻¹³	D_{20}
6.239 10 ⁻¹⁵	-5.950 10 ⁻¹⁷	-1.351 10 ⁻¹³	-1.327 10 ⁻¹⁴	-8.246 10 ⁻¹⁶	3.448 10 ⁻¹⁴	-1.577 10 ⁻¹⁵	4.742 10 ⁻¹⁶	-7.454 10 ⁻¹⁵	-8.743 10 ⁻¹⁶	8.868 10 ⁻¹⁶	4.784 10 ⁻¹⁷	8.555 10 ⁻¹⁶	-1.256 10 ⁻¹⁵	1.461 10 ⁻¹⁵	6.774 10 ⁻¹⁴	D_{21}
1.623 10 ⁻¹⁵	-9.671 10 ⁻¹⁸	-8.662 10 ⁻¹⁵	-3.777 10 ⁻¹⁶	-1.390 10 ⁻¹⁶	-3.334 10 ⁻¹⁵	-2.048 10 ⁻¹⁷	5.206 10 ⁻¹⁷	7.837 10 ⁻¹⁵	-9.410 10 ⁻¹⁷	-1.547 10 ⁻¹⁷	5.684 10 ⁻¹⁸	-2.539 10 ⁻¹⁵	1.251 10 ⁻¹⁶	1.522 10 ⁻¹⁶	6.219 10 ⁻¹⁵	D_{22}
-2.936 10 ⁻¹⁴	2.190 10 ⁻¹⁶	6.897 10 ⁻¹³	9.623 10 ⁻¹⁴	1.578 10 ⁻¹⁵	-2.175 10 ⁻¹³	1.197 10 ⁻¹⁴	-3.243 10 ⁻¹⁵	2.161 10 ⁻¹⁴	5.569 10 ⁻¹⁵	-5.887 10 ⁻¹⁵	-2.063 10 ⁻¹⁶	8.325 10 ⁻¹⁵	6.986 10 ⁻¹⁵	-8.466 10 ⁻¹⁵	-4.575 10 ⁻¹³	D_{23}
-5.026 10 ⁻¹⁵	1.301 10 ⁻¹⁷	1.683 10 ⁻¹⁴	1.795 10 ⁻¹⁵	2.330 10 ⁻¹⁶	8.230 10 ⁻¹⁵	3.362 10 ⁻¹⁷	-1.646 10 ⁻¹⁶	-2.177 10 ⁻¹⁴	2.871 10 ⁻¹⁶	1.372 10 ⁻¹⁶	-1.121 10 ⁻¹⁷	7.344 10 ⁻¹⁵	-6.540 10 ⁻¹⁵	-6.869 10 ⁻¹⁶	-1.936 10 ⁻¹⁴	D_{24}
6.062 10 ⁻¹⁷	9.156 10 ⁻¹⁹	3.822 10 ⁻¹⁶	-1.540 10 ⁻¹⁶	2.531 10 ⁻¹⁷	-1.349 10 ⁻¹⁶	-3.879 10 ⁻¹⁷	6.018 10 ⁻¹⁸	5.388 10 ⁻¹⁶	-6.058 10 ⁻¹⁸	1.023 10 ⁻¹⁷	-3.448 10 ⁻¹⁹	-2.251 10 ⁻¹⁶	2.064 10 ⁻¹⁷	-5.339 10 ⁻¹⁸	3.351 10 ⁻¹⁶	D_{25}
2.842 10 ⁻¹⁴	-2.020 10 ⁻¹⁶	-7.542 10 ⁻¹³	-1.213 10 ⁻¹³	-1.246 10 ⁻¹⁷	2.338 10 ⁻¹³	-1.639 10 ⁻¹⁴	4.089 10 ⁻¹⁵	3.310 10 ⁻¹⁴	-6.654 10 ⁻¹⁵	7.711 10 ⁻¹⁵	2.091 10 ⁻¹⁶	-3.351 10 ⁻¹⁴	-7.267 10 ⁻¹⁵	8.066 10 ⁻¹⁵	5.605 10 ⁻¹³	D_{26}
-1.386 10 ⁻¹⁶	-1.358 10 ⁻¹⁸	-1.776 10 ⁻¹⁶	4.305 10 ⁻¹⁶	-5.741 10 ⁻¹⁷	1.662 10 ⁻¹⁶	9.926 10 ⁻¹⁷	-1.561 10 ⁻¹⁷	-1.245 10 ⁻¹⁵	1.537 10 ⁻¹⁷	-2.855 10 ⁻¹⁷	6.154 10 ⁻¹⁹	5.534 10 ⁻¹⁶	-3.812 10 ⁻¹⁷	2.788 10 ⁻¹⁷	-1.025 10 ⁻¹⁵	D_{27}
2.658 10⁻¹⁵	-5.053 10 ⁻¹⁸	-5.766 10 ⁻¹⁵	-1.464 10 ⁻¹⁵	-3.389 10 ⁻¹⁷	-2.493 10 ⁻¹⁵	2.300 10 ⁻¹⁷	8.917 10 ⁻¹⁷	9.725 10 ⁻¹⁵	-1.460 10 ⁻¹⁶	-1.168 10 ⁻¹⁶	2.892 10 ⁻¹⁸	-3.597 10 ⁻¹⁵	4.402 10 ⁻¹⁶	3.724 10 ⁻¹⁶	9.635 10 ⁻¹⁵	D_{28}
	1.995 10⁻¹⁹	6.364 10 ⁻¹⁷	-5.509 10 ⁻¹⁸	2.167 10 ⁻¹⁸	3.848 10 ⁻¹⁷	-2.356 10 ⁻¹⁸	-1.155 10 ⁻¹⁹	-6.386 10 ⁻¹⁷	3.464 10 ⁻¹⁹	8.103 10 ⁻¹⁹	-5.125 10 ⁻²⁰	1.865 10 ⁻¹⁷	1.359 10 ⁻¹⁸	6.255 10 ⁻¹⁹	-3.231 10 ⁻¹⁷	D_{29}
		2.199 10⁻¹³	3.022 10 ⁻¹⁴	4.224 10 ⁻¹⁶	-3.800 10 ⁻¹⁴	4.444 10 ⁻¹⁵	-1.182 10 ⁻¹⁵	-5.072 10 ⁻¹⁴	1.993 10 ⁻¹⁵	-2.270 10 ⁻¹⁵	-6.836 10 ⁻¹⁷	2.083 10 ⁻¹⁴	2.405 10 ⁻¹⁵	-2.674 10 ⁻¹⁵	-1.781 10 ⁻¹³	D_{30}
			2.193 10⁻¹³	-8.646 10 ⁻¹⁵	-1.027 10 ⁻¹²	1.091 10 ⁻¹⁴	-1.953 10 ⁻¹⁵	1.041 10 ⁻¹²	1.564 10 ⁻¹⁵	-3.477 10 ⁻¹⁵	1.212 10 ⁻¹⁶	-2.679 10 ⁻¹³	1.776 10 ⁻¹⁷	-5.753 10 ⁻¹⁶	-1.358 10 ⁻¹⁴	D_{31}
				1.496 10⁻¹⁵	2.718 10 ⁻¹⁴	-2.790 10 ⁻¹⁵	1.355 10 ⁻¹⁶	-1.999 10 ⁻¹⁴	-1.320 10 ⁻¹⁶	1.081 10 ⁻¹⁵	-1.947 10 ⁻¹⁷	3.967 10 ⁻¹⁵	-2.627 10 ⁻¹⁷	5.786 10 ⁻¹⁷	6.908 10 ⁻¹⁵	D_{32}
					6.127 10⁻¹²	-2.658 10 ⁻¹⁴	1.827 10 ⁻¹⁵	-7.046 10 ⁻¹²	2.397 10 ⁻¹⁵	7.600 10 ⁻¹⁵	-4.231 10 ⁻¹⁶	1.929 10 ⁻¹²	3.536 10 ⁻¹⁵	-6.885 10 ⁻¹⁶	-6.783 10 ⁻¹³	D_{33}
						8.646 10⁻¹⁵	-2.464 10 ⁻¹⁶	1.600 10 ⁻¹⁴	2.275 10 ⁻¹⁶	-3.707 10 ⁻¹⁵	7.169 10 ⁻¹⁸	-2.764 10 ⁻¹⁵	2.415 10 ⁻¹⁶	6.524 10 ⁻¹⁷	-8.142 10 ⁻¹⁵	D_{34}
							6.464 10⁻¹⁷	2.572 10 ⁻¹⁵	-7.640 10 ⁻¹⁷	8.579 10 ⁻¹⁷	-1.142 10 ⁻¹⁸	-1.237 10 ⁻¹⁵	-2.305 10 ⁻¹⁷	3.278 10 ⁻¹⁷	4.476 10 ⁻¹⁵	D_{35}
								8.622 10⁻¹²	-9.411 10 ⁻¹⁵	-4.195 10 ⁻¹⁵	3.082 10 ⁻¹⁶	-2.429 10 ⁻¹²	-7.532 10 ⁻¹⁵	4.424 10 ⁻¹⁵	1.350 10 ⁻¹²	D_{36}
									1.095 10⁻¹⁶	-7.646 10 ⁻¹⁷	1.331 10 ⁻¹⁸	3.357 10 ⁻¹⁵	5.979 10 ⁻¹⁷	-7.981 10 ⁻¹⁷	-8.508 10 ⁻¹⁵	D_{37}
										1.636 10⁻¹⁵	-5.334 10 ⁻¹⁹	7.104 10 ⁻¹⁶	-1.390 10 ⁻¹⁶	-5.700 10 ⁻¹⁷	2.247 10 ⁻¹⁵	D_{38}
											5.551 10⁻¹⁹	-5.652 10 ⁻¹⁷	-1.114 10 ⁻¹⁸	-2.402 10 ⁻¹⁸	-1.354 10 ⁻¹⁶	D_{39}
												6.944 10⁻¹³	2.410 10 ⁻¹⁵	-1.365 10 ⁻¹⁵	-4.458 10 ⁻¹³	D_{40}
													6.823 10⁻¹⁶	-1.056 10 ⁻¹⁶	-9.894 10 ⁻¹⁵	D_{41}
														6.132 10⁻¹⁶	1.021 10 ⁻¹⁴	D_{42}
															1.097 10⁻¹²	D_{43}

TABLA 5.5. (Continuación) Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	FRONTERA $h_1(y,z)$	FRONTERA $h_2(y,z)$	FRONTERAS LATERALES	FRONTERA INFERIOR
$p_1 = -0.7001804 \pm 0.0000006 \text{ g/cm}^3$	$p_{11} = -3.9997840 \pm 0.0000008 \text{ km}$	$p_{21} = 3.999973 \pm 0.000001 \text{ km}$	$p_{31} = -6.00002100 \pm 0.00000007 \text{ km}$	$p_{33} = 2.999647 \pm 0.000003 \text{ km}$
$p_2 = 0.10002670 \pm 0.0000007 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{12} = -0.0009827 \pm 0.0000001 \text{ km}^{-1}$	$p_{22} = 0.0029908 \pm 0.0000001 \text{ km}^{-1}$	$p_{32} = 6.00001100 \pm 0.00000006 \text{ km}$	
$p_3 = -0.00000522 \pm 0.00000003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{13} = -0.060503 \pm 0.000004 \text{ km}^{-1}$	$p_{23} = -0.018964 \pm 0.000006 \text{ km}^{-1}$		
$p_4 = 0.000308 \pm 0.000002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{14} = -0.0008207 \pm 0.0000003 \text{ km}^{-2}$	$p_{24} = 0.0010149 \pm 0.0000002 \text{ km}^{-2}$		
$p_5 = -0.004000980 \pm 0.00000005 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{15} = 0.01999486 \pm 0.00000001 \text{ km}^{-2}$	$p_{25} = -0.07000582 \pm 0.00000002 \text{ km}^{-2}$		
$p_6 = 0.01000670 \pm 0.00000004 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{16} = 0.400352 \pm 0.000004 \text{ km}^{-2}$	$p_{26} = 0.011428 \pm 0.000008 \text{ km}^{-2}$		
$p_7 = -0.0700469 \pm 0.0000002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{17} = 0.00300712 \pm 0.00000001 \text{ km}^{-3}$	$p_{27} = 0.00400626 \pm 0.00000003 \text{ km}^{-3}$		
$p_8 = 0.01000374 \pm 0.00000003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{18} = 0.0039971 \pm 0.0000001 \text{ km}^{-3}$	$p_{28} = 0.0019966 \pm 0.0000001 \text{ km}^{-3}$		
$p_9 = -0.02999896 \pm 0.00000001 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{19} = -0.003000070 \pm 0.000000001 \text{ km}^{-3}$	$p_{29} = 0.001000100 \pm 0.000000002 \text{ km}^{-3}$		
$p_{10} = 0.00490888 \pm 0.0000009 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{20} = 0.005874 \pm 0.000001 \text{ km}^{-3}$	$p_{30} = 0.000110 \pm 0.000002 \text{ km}^{-3}$		

TABLA 5.6. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

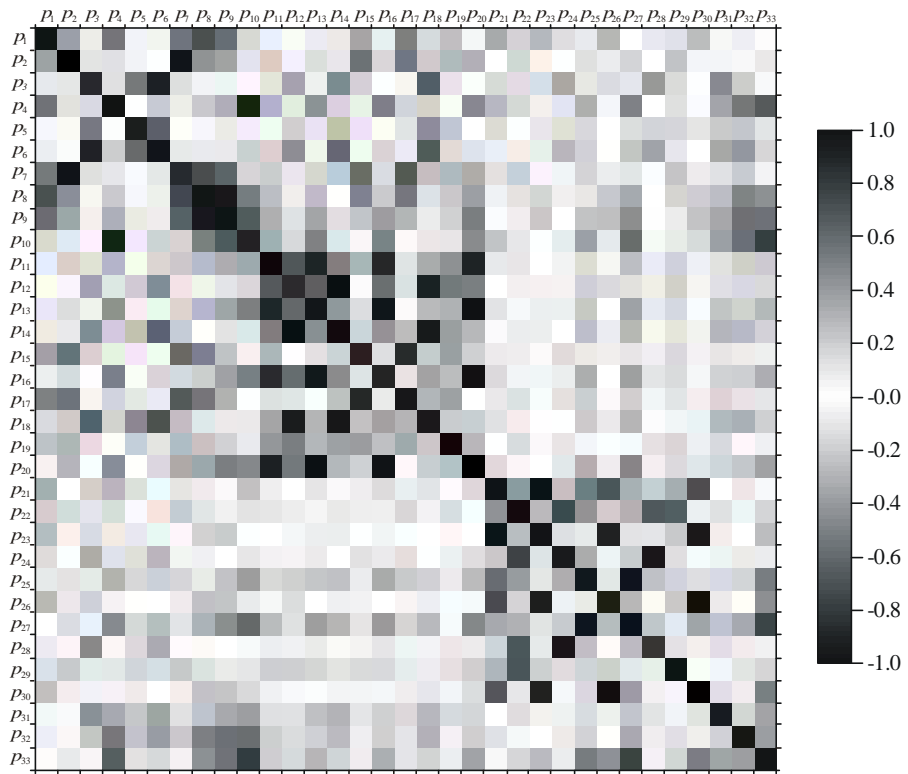


FIGURA 5.19. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

P_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	D_{17}	
1.000 10⁺⁰	-4.284 10 ⁻¹	1.269 10 ⁻¹	-5.471 10 ⁻¹	-4.061 10 ⁻²	-4.727 10 ⁻²	5.940 10 ⁻¹	-6.802 10 ⁻¹	-5.804 10 ⁻¹	1.892 10 ⁻¹	-4.925 10 ⁻²	-3.384 10 ⁻²	-3.761 10 ⁻²	-7.952 10 ⁻²	3.986 10 ⁻¹	7.866 10 ⁻²	-4.846 10 ⁻¹	D_1
	1.000 10⁺⁰	-1.070 10 ⁻¹	1.198 10 ⁻¹	-1.565 10 ⁻²	6.549 10 ⁻²	-9.115 10 ⁻¹	4.461 10 ⁻¹	3.810 10 ⁻¹	5.469 10 ⁻²	2.212 10 ⁻¹	3.490 10 ⁻²	-1.524 10 ⁻¹	1.161 10 ⁻¹	-5.235 10 ⁻¹	1.509 10 ⁻¹	5.333 10 ⁻¹	D_2
		1.000 10⁺⁰	-1.019 10 ⁻¹	5.109 10 ⁻¹	-9.622 10 ⁻¹	1.260 10 ⁻¹	-6.739 10 ⁻²	-3.489 10 ⁻²	5.747 10 ⁻²	8.171 10 ⁻²	3.735 10 ⁻¹	-8.098 10 ⁻²	-5.171 10 ⁻¹	1.061 10 ⁻¹	6.308 10 ⁻²	-1.047 10 ⁻¹	D_3
			1.000 10⁺⁰	-3.239 10 ⁻²	1.700 10 ⁻¹	-7.246 10 ⁻²	-2.048 10 ⁻¹	-3.442 10 ⁻¹	-9.232 10 ⁻¹	-2.906 10 ⁻¹	-1.159 10 ⁻¹	4.134 10 ⁻¹	1.691 10 ⁻¹	-1.243 10 ⁻¹	-4.542 10 ⁻¹	1.759 10 ⁻¹	D_4
				1.000 10⁺⁰	-6.067 10 ⁻¹	-3.331 10 ⁻³	7.798 10 ⁻²	6.981 10 ⁻²	6.225 10 ⁻²	4.261 10 ⁻²	1.902 10 ⁻¹	-1.201 10 ⁻²	-2.491 10 ⁻¹	-1.095 10 ⁻¹	-1.540 10 ⁻²	1.394 10 ⁻¹	D_5
					1.000 10⁺⁰	-5.637 10 ⁻²	-7.412 10 ⁻²	-1.176 10 ⁻¹	-1.760 10 ⁻¹	-1.603 10 ⁻¹	-4.657 10 ⁻¹	1.592 10 ⁻¹	6.092 10 ⁻¹	-6.065 10 ⁻²	-1.377 10 ⁻¹	5.502 10 ⁻²	D_6
						1.000 10⁺⁰	-7.008 10 ⁻¹	-6.109 10 ⁻¹	-1.725 10 ⁻¹	-2.475 10 ⁻¹	-4.313 10 ⁻³	1.746 10 ⁻¹	-1.479 10 ⁻¹	6.377 10 ⁻¹	-1.484 10 ⁻¹	-6.963 10 ⁻¹	D_7
							1.000 10⁺⁰	9.427 10 ⁻¹	5.377 10 ⁻¹	2.678 10 ⁻¹	9.247 10 ⁻²	-2.526 10 ⁻¹	-1.236 10 ⁻²	-4.281 10 ⁻¹	2.168 10 ⁻¹	5.193 10 ⁻¹	D_8
								1.000 10⁺⁰	6.590 10 ⁻¹	3.281 10 ⁻¹	1.471 10 ⁻¹	-3.583 10 ⁻¹	-7.586 10 ⁻²	-2.788 10 ⁻¹	3.589 10 ⁻¹	3.194 10 ⁻¹	D_9
									1.000 10⁺⁰	3.600 10 ⁻¹	1.517 10 ⁻¹	-4.638 10 ⁻¹	-1.615 10 ⁻¹	-3.993 10 ⁻²	4.965 10 ⁻¹	1.346 10 ⁻²	D_{10}
										1.000 10⁺⁰	6.439 10 ⁻¹	-9.682 10 ⁻¹	-4.919 10 ⁻¹	-3.165 10 ⁻¹	9.190 10 ⁻¹	1.587 10 ⁻¹	D_{11}
											1.000 10⁺⁰	-6.046 10 ⁻¹	-9.247 10 ⁻¹	2.140 10 ⁻²	5.555 10 ⁻¹	-1.080 10 ⁻¹	D_{12}
												1.000 10⁺⁰	4.804 10 ⁻¹	1.453 10 ⁻¹	-9.847 10 ⁻¹	-1.796 10 ⁻³	D_{13}
													1.000 10⁺⁰	-1.916 10 ⁻¹	-4.387 10 ⁻¹	2.343 10 ⁻¹	D_{14}
														1.000 10⁺⁰	-6.288 10 ⁻²	-9.400 10 ⁻¹	D_{15}
															1.000 10⁺⁰	-8.761 10 ⁻²	D_{16}
																1.000 10⁺⁰	D_{17}

TABLA 5.7. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

D_{18}	D_{10}	D_{20}	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}	D_{27}	D_{28}	D_{29}	D_{30}	D_{31}	D_{32}	D_{33}	
1.721 10 ⁻¹	2.611 10 ⁻¹	6.526 10 ⁻²	-2.814 10 ⁻¹	1.927 10 ⁻¹	2.788 10 ⁻¹	-8.503 10 ⁻²	7.889 10 ⁻²	-2.735 10 ⁻¹	1.345 10 ⁻²	3.932 10 ⁻²	-1.601 10 ⁻¹	2.495 10 ⁻¹	-3.032 10 ⁻²	-7.447 10 ⁻²	8.659 10 ⁻³	D_1
-2.050 10 ⁻¹	-2.829 10 ⁻¹	-2.867 10 ⁻¹	3.396 10 ⁻²	-1.919 10 ⁻¹	4.152 10 ⁻²	6.942 10 ⁻²	-1.598 10 ⁻¹	-5.164 10 ⁻²	1.479 10 ⁻¹	-3.036 10 ⁻²	2.226 10 ⁻¹	5.690 10 ⁻²	-1.300 10 ⁻²	1.164 10 ⁻²	-9.019 10 ⁻²	D_2
5.994 10 ⁻¹	-8.919 10 ⁻²	-1.635 10 ⁻²	-1.478 10 ⁻¹	-8.312 10 ⁻²	1.284 10 ⁻¹	3.024 10 ⁻¹	1.148 10 ⁻¹	-1.063 10 ⁻¹	-1.136 10 ⁻¹	-3.945 10 ⁻¹	-1.126 10 ⁻¹	9.427 10 ⁻²	3.817 10 ⁻¹	3.127 10 ⁻¹	3.474 10 ⁻²	D_3
-1.708 10 ⁻¹	-5.469 10 ⁻²	4.376 10 ⁻¹	2.718 10 ⁻¹	-1.563 10 ⁻¹	-1.434 10 ⁻¹	9.406 10 ⁻²	-3.624 10 ⁻¹	4.711 10 ⁻²	4.790 10 ⁻¹	-6.504 10 ⁻²	1.009 10 ⁻¹	-7.629 10 ⁻³	3.792 10 ⁻¹	-4.658 10 ⁻¹	-6.544 10 ⁻¹	D_4
4.001 10 ⁻¹	-1.761 10 ⁻¹	1.961 10 ⁻²	-9.754 10 ⁻²	1.766 10 ⁻²	5.074 10 ⁻²	1.581 10 ⁻¹	1.146 10 ⁻¹	-1.026 10 ⁻²	-1.425 10 ⁻¹	-1.824 10 ⁻¹	-1.832 10 ⁻¹	-9.119 10 ⁻³	2.510 10 ⁻¹	2.693 10 ⁻¹	1.158 10 ⁻¹	D_5
-6.977 10 ⁻¹	1.589 10 ⁻¹	1.076 10 ⁻¹	1.315 10 ⁻¹	7.625 10 ⁻²	-7.614 10 ⁻²	-2.639 10 ⁻¹	-1.847 10 ⁻¹	3.237 10 ⁻²	2.265 10 ⁻¹	3.537 10 ⁻¹	8.372 10 ⁻²	-1.481 10 ⁻²	-3.515 10 ⁻¹	-4.111 10 ⁻¹	-1.657 10 ⁻¹	D_6
2.598 10 ⁻¹	2.967 10 ⁻¹	3.181 10 ⁻¹	-4.662 10 ⁻²	2.171 10 ⁻¹	-4.479 10 ⁻²	-7.684 10 ⁻²	1.564 10 ⁻¹	6.625 10 ⁻²	-1.158 10 ⁻¹	2.593 10 ⁻²	-2.441 10 ⁻¹	-8.802 10 ⁻²	9.297 10 ⁻²	-1.749 10 ⁻¹	5.407 10 ⁻²	D_7
9.483 10 ⁻²	-2.402 10 ⁻¹	-3.719 10 ⁻¹	9.436 10 ⁻²	-1.236 10 ⁻¹	-1.551 10 ⁻¹	4.833 10 ⁻²	1.366 10 ⁻¹	2.106 10 ⁻¹	-3.384 10 ⁻¹	-1.473 10 ⁻²	1.139 10 ⁻¹	-2.069 10 ⁻¹	-2.943 10 ⁻¹	5.056 10 ⁻¹	4.441 10 ⁻¹	D_8
-2.672 10 ⁻²	-2.198 10 ⁻¹	-5.052 10 ⁻¹	5.081 10 ⁻²	-7.586 10 ⁻²	-1.630 10 ⁻¹	-2.130 10 ⁻⁴	2.410 10 ⁻¹	2.416 10 ⁻¹	-4.314 10 ⁻¹	2.489 10 ⁻²	1.095 10 ⁻¹	-2.486 10 ⁻¹	-3.266 10 ⁻¹	5.671 10 ⁻¹	5.642 10 ⁻¹	D_9
1.247 10 ⁻¹	-6.023 10 ⁻²	-5.436 10 ⁻¹	-1.863 10 ⁻¹	1.077 10 ⁻¹	1.988 10 ⁻²	-7.729 10 ⁻²	4.130 10 ⁻¹	1.001 10 ⁻¹	-5.982 10 ⁻¹	6.190 10 ⁻²	-5.830 10 ⁻²	-1.409 10 ⁻¹	-4.312 10 ⁻¹	5.610 10 ⁻¹	8.006 10 ⁻¹	D_{10}
3.740 10 ⁻¹	-4.117 10 ⁻¹	-8.904 10 ⁻¹	-8.753 10 ⁻²	-6.587 10 ⁻²	4.304 10 ⁻²	-5.240 10 ⁻²	1.823 10 ⁻¹	-7.845 10 ⁻³	-2.583 10 ⁻¹	6.776 10 ⁻²	1.984 10 ⁻¹	3.173 10 ⁻³	-1.485 10 ⁻¹	1.824 10 ⁻¹	1.998 10 ⁻¹	D_{11}
8.402 10 ⁻¹	-5.780 10 ⁻¹	-4.931 10 ⁻¹	-2.153 10 ⁻²	-9.593 10 ⁻²	-3.596 10 ⁻²	-5.881 10 ⁻³	1.729 10 ⁻¹	7.125 10 ⁻²	2.401 10 ⁻¹	-1.021 10 ⁻²	2.037 10 ⁻¹	-8.134 10 ⁻²	1.279 10 ⁻¹	1.640 10 ⁻¹	1.585 10 ⁻¹	D_{12}
-3.693 10 ⁻¹	3.181 10 ⁻¹	9.539 10 ⁻¹	1.333 10 ⁻¹	2.646 10 ⁻²	-5.700 10 ⁻²	8.353 10 ⁻²	-2.616 10 ⁻¹	4.774 10 ⁻³	3.453 10 ⁻¹	-9.441 10 ⁻²	-1.796 10 ⁻¹	6.480 10 ⁻³	1.735 10 ⁻¹	-2.218 10 ⁻¹	-2.833 10 ⁻¹	D_{13}
9.677 10 ⁻¹	2.891 10 ⁻¹	3.563 10 ⁻¹	3.806 10 ⁻²	5.979 10 ⁻²	3.301 10 ⁻²	3.590 10 ⁻³	-2.032 10 ⁻¹	-7.359 10 ⁻²	2.724 10 ⁻¹	3.368 10 ⁻²	-1.493 10 ⁻¹	8.749 10 ⁻²	-2.486 10 ⁻¹	-2.754 10 ⁻¹	-1.835 10 ⁻¹	D_{14}
2.441 10 ⁻¹	4.256 10 ⁻¹	1.692 10 ⁻¹	-6.827 10 ⁻²	1.358 10 ⁻¹	-1.132 10 ⁻²	-8.662 10 ⁻²	1.554 10 ⁻¹	3.810 10 ⁻²	-1.202 10 ⁻¹	5.253 10 ⁻²	-9.611 10 ⁻²	-5.608 10 ⁻²	1.641 10 ⁻¹	-4.477 10 ⁻²	6.642 10 ⁻²	D_{15}
3.348 10 ⁻¹	-2.747 10 ⁻¹	-9.768 10 ⁻¹	-1.573 10 ⁻¹	-1.960 10 ⁻⁴	5.736 10 ⁻²	-1.071 10 ⁻¹	3.089 10 ⁻¹	6.845 10 ⁻³	-3.863 10 ⁻¹	1.158 10 ⁻¹	1.704 10 ⁻¹	-2.442 10 ⁻²	-1.690 10 ⁻¹	1.978 10 ⁻¹	3.249 10 ⁻¹	D_{16}
-2.805 10 ⁻¹	-3.171 10 ⁻¹	-3.951 10 ⁻²	9.588 10 ⁻²	-1.548 10 ⁻¹	7.004 10 ⁻³	1.113 10 ⁻¹	-2.026 10 ⁻¹	-4.421 10 ⁻²	1.532 10 ⁻¹	-7.364 10 ⁻²	8.617 10 ⁻²	6.927 10 ⁻²	-1.522 10 ⁻¹	1.174 10 ⁻¹	-1.020 10 ⁻¹	D_{17}
1.000 10⁰	-2.194 10 ⁻¹	-2.385 10 ⁻¹	-6.062 10 ⁻²	-1.699 10 ⁻²	-1.953 10 ⁻²	4.798 10 ⁻³	2.151 10 ⁻¹	6.424 10 ⁻²	-2.706 10 ⁻¹	-5.601 10 ⁻²	7.529 10 ⁻²	-8.372 10 ⁻²	3.269 10 ⁻¹	2.917 10 ⁻¹	1.784 10 ⁻¹	D_{18}
	1.000 10⁰	3.039 10 ⁻¹	-2.634 10 ⁻²	1.254 10 ⁻¹	3.480 10 ⁻²	-5.674 10 ⁻²	-3.215 10 ⁻²	-4.870 10 ⁻²	7.413 10 ⁻²	4.485 10 ⁻²	-1.540 10 ⁻¹	5.010 10 ⁻²	1.165 10 ⁻¹	5.656 10 ⁻²	-6.907 10 ⁻²	D_{19}
		1.000 10⁰	1.376 10 ⁻¹	2.329 10 ⁻²	-3.274 10 ⁻²	1.019 10 ⁻¹	-3.134 10 ⁻¹	-3.684 10 ⁻²	4.063 10 ⁻¹	-1.197 10 ⁻¹	-1.957 10 ⁻¹	5.330 10 ⁻²	1.963 10 ⁻¹	-2.303 10 ⁻¹	-3.625 10 ⁻¹	D_{20}
			1.000 10⁰	-4.772 10 ⁻¹	-8.857 10 ⁻¹	2.506 10 ⁻¹	-5.187 10 ⁻¹	7.572 10 ⁻¹	3.191 10 ⁻¹	-1.836 10 ⁻¹	3.473 10 ⁻¹	-6.864 10 ⁻¹	1.452 10 ⁻³	-4.960 10 ⁻²	-2.769 10 ⁻²	D_{21}
				1.000 10⁰	2.839 10 ⁻¹	-7.755 10 ⁻¹	4.358 10 ⁻¹	-1.760 10 ⁻¹	-3.261 10 ⁻¹	6.911 10 ⁻¹	-6.754 10 ⁻¹	1.231 10 ⁻¹	-2.600 10 ⁻²	6.040 10 ⁻²	1.705 10 ⁻¹	D_{22}
					1.000 10⁰	-1.155 10 ⁻¹	9.180 10 ⁻²	-9.695 10 ⁻¹	9.257 10 ⁻²	7.590 10 ⁻²	-2.294 10 ⁻¹	9.350 10 ⁻¹	5.469 10 ⁻²	-1.123 10 ⁻²	-2.616 10 ⁻¹	D_{23}
						1.000 10⁰	-3.296 10 ⁻¹	5.860 10 ⁻²	2.338 10 ⁻¹	-9.857 10 ⁻¹	1.035 10 ⁻¹	-3.568 10 ⁻²	9.943 10 ⁻²	2.833 10 ⁻²	-8.359 10 ⁻²	D_{24}
							1.000 10⁰	1.090 10 ⁻¹	-9.082 10 ⁻¹	2.638 10 ⁻¹	-1.906 10 ⁻¹	-1.847 10 ⁻¹	-1.098 10 ⁻¹	1.646 10 ⁻¹	5.315 10 ⁻¹	D_{25}
								1.000 10⁰	-3.063 10 ⁻¹	-3.532 10 ⁻²	1.409 10 ⁻¹	-9.928 10 ⁻¹	-9.820 10 ⁻²	6.084 10 ⁻²	4.390 10 ⁻¹	D_{26}
									1.000 10⁰	-1.807 10 ⁻¹	1.708 10 ⁻¹	3.851 10 ⁻¹	2.188 10 ⁻¹	-3.080 10 ⁻¹	-7.763 10 ⁻¹	D_{27}
										1.000 10⁰	-1.770 10 ⁻²	2.108 10 ⁻²	-1.316 10 ⁻¹	-5.691 10 ⁻²	5.303 10 ⁻²	D_{28}
											1.000 10⁰	-9.104 10 ⁻²	-5.724 10 ⁻²	-1.302 10 ⁻¹	-1.734 10 ⁻¹	D_{29}
												1.000 10⁰	1.107 10 ⁻¹	-6.617 10 ⁻²	-5.106 10 ⁻¹	D_{30}
													1.000 10⁰	-1.633 10 ⁻¹	-3.616 10 ⁻¹	D_{31}
														1.000 10⁰	3.934 10 ⁻¹	D_{32}
															1.000 10⁰	D_{33}

TABLA 5.7. (Continuación) Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

5.1.2. Ejemplo teórico con datos que presentan errores numéricos

Al igual que se hizo en los ejemplos numéricos del Capítulo IV para fuentes anómalas bidimensionales, vamos a estudiar el efecto que produce la presencia de ruido aleatorio en los datos de gravedad. Para ello contaminamos los datos sintéticos, utilizados en la sección 5.1.1 de este Capítulo, con ruido aleatorio de tipo gaussiano con promedio cero, $E[e] = 0$, y con desviación estándar $\mathbf{s} = 0.36$ mGal, lo que corresponde a una incertidumbre del 0.42 %.

En la figura 5.20 se presenta la anomalía del modelo generador de los datos de gravedad de la sección anterior junto con la anomalía gravimétrica del mismo modelo pero contaminada con ruido. Como se puede observar en dicha figura, ambas anomalías son muy parecidas. El error afecta en cierta medida a la anomalía pero sin cambiar drásticamente su forma.

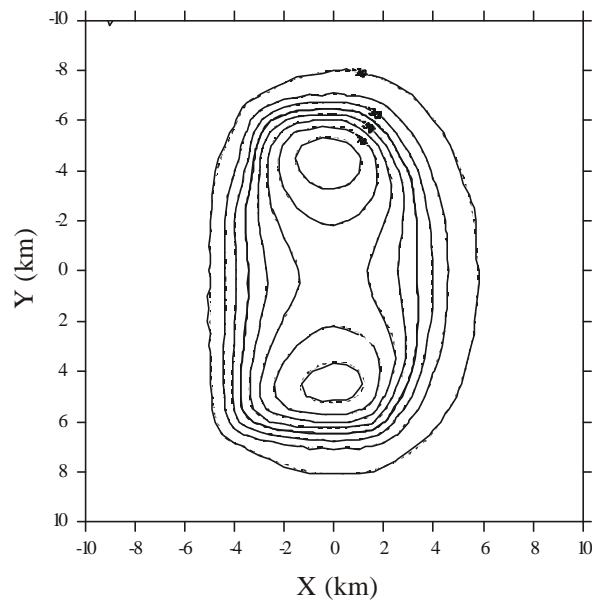


FIGURA 5.20. La línea a trazos es la anomalía gravimétrica de la fuente de la figura 3.5 (b). La línea continua es la misma anomalía pero contaminada con ruido aleatorio.

Para realizar la inversión de los datos de gravedad contaminados con ruido, calcularemos el sistema de ecuaciones (4.10) de manera iterativa con diferentes valores del factor de amortiguación, comenzando con el modelo inicial de la figura 5.2. Se obtiene el modelo resultante cuando se alcanza un valor de tolerancia $T = M$ para el desajuste q_s , siendo $M = 400$ el número de datos del problema. Para este caso, se ha realizado un proceso de 200 iteraciones y en la figura 5.21 se presenta la evolución del desajuste q_s a lo largo de todo el proceso. En esta figura vemos cómo el valor del desajuste disminuye desde las primeras iteraciones y alcanza la convergencia suavemente hacia el

valor $q_s = 368.5$ a partir de las primeras 55 iteraciones. La solución alcanzada sobredetermina los datos de gravedad, puesto que es menor que la tolerancia permitida. Por ello, vamos a elegir la solución dada por la iteración 56 con un desajuste $q_s = 396.0$ y un factor de amortiguación $\mathbf{b}^{-1} = 594.0$. El modelo resultante y su anomalía gravimétrica se pueden ver en la figura 5.22.

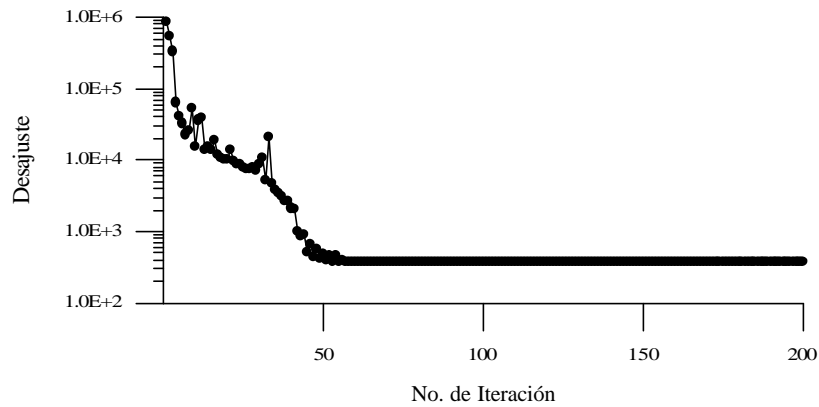


FIGURA 5.21. Evolución del desajuste q_s .

En la figura 5.23 se presenta el residual obtenido al comparar la anomalía gravimétrica debida al modelo resultante con los datos de gravedad contaminados con ruido. Como se puede ver en esta figura, la variación máxima alcanzada es de 0.9 mGal, siendo la amplitud de la anomalía de 86.4 mGal. También podemos ver que estas variaciones se encuentran distribuidas de manera más o menos uniforme en toda la malla. Además, el orden de magnitud del residual es comparable al error aleatorio con el que se han contaminado los datos de gravedad, y sus desviaciones estándar son casi del mismo valor. Todo esto nos indica que la solución del problema se puede considerar satisfactoria. No obstante, si comparamos la figura 5.22 del modelo resultante con la figura 3.5 del Capítulo III, correspondiente al modelo sintético, podemos descubrir algunas diferencias entre ambas fuentes. Para ver esto de manera cuantitativa, en las tablas 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11 se presentan los parámetros del modelo resultante y del sintético junto con los parámetros del modelo inicial. En estas tablas se puede ver que muchos de los parámetros del modelo resultante han alcanzado valores muy próximos a los de los correspondientes parámetros del modelo sintético, pero otros no han llegado al valor esperado.

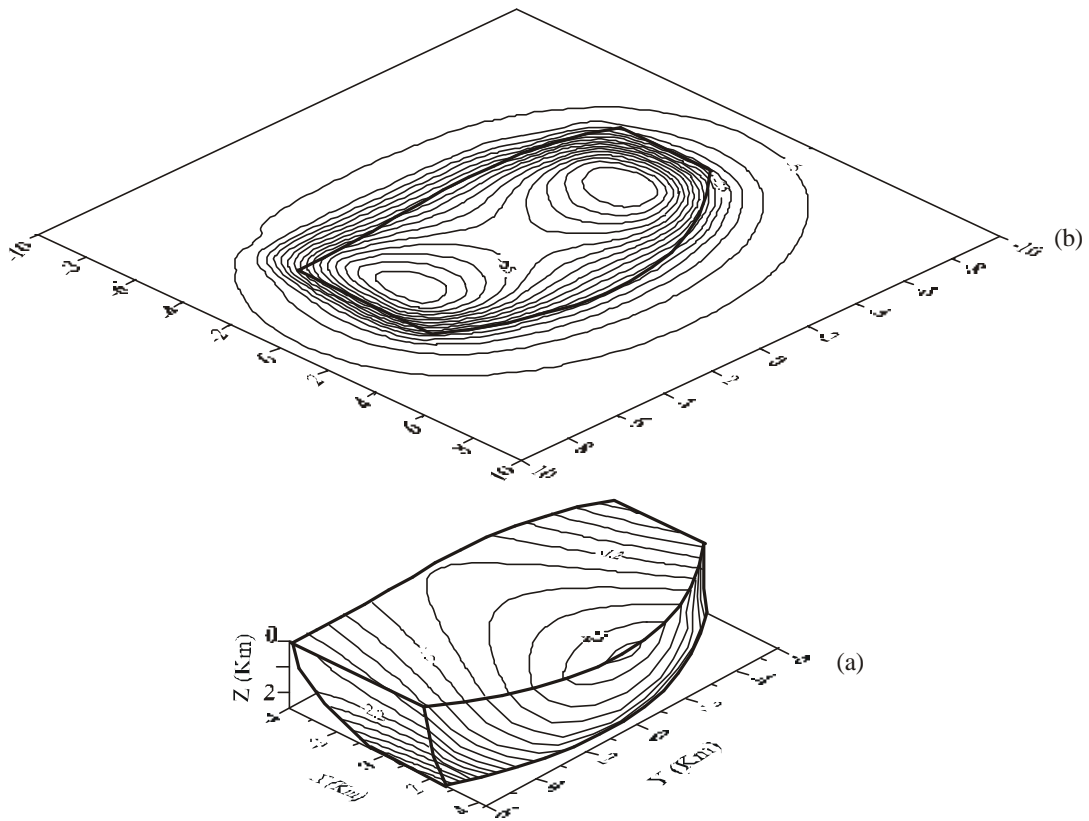


FIGURA 5.22. (a) Modelo resultante de fuente anómala obtenido en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas lateralmente por funciones continuas de las variables y y z , con datos contaminados con ruido aleatorio. Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a). Las isolíneas de la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal . La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

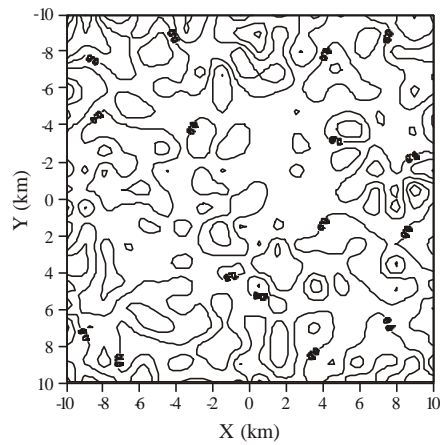


FIGURA 5.23. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad sintéticos y la anomalía gravimétrica del modelo resultante en el proceso de inversión.

DENSIDAD	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
Modelo Inicial	-0.6000	0.0800	-0.0100	0.0030	-0.0070	-0.0010	-0.0400	0.0500	-0.0010	0.0100
Modelo Resultante	-0.7078	0.1063	-0.0023	0.2361	-0.0040	0.0148	-0.0773	0.0076	-0.0308	-0.1576
Modelo Sintético	-0.7000	0.1000	0.0000	0.0000	-0.0040	0.0100	-0.0700	0.0100	-0.0300	0.0050

TABLA 5.8. Parámetros del contraste de densidad correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

FRONTERA $h_1(y,z)$	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}
Modelo Inicial	-4.5000	0.0002	0.0010	-0.0020	0.0000	0.1000	0.0200	0.0000	0.0000	0.0000
Modelo Resultante	-3.9752	0.0024	-0.1334	-0.0003	0.0202	0.4089	0.0034	0.0002	-0.0030	0.0221
Modelo Sintético	-4.0000	-0.0010	-0.0600	-0.0008	0.0200	0.4000	0.0030	0.0040	-0.0030	0.0060

TABLA 5.9. Parámetros de la frontera $h_1(y,z)$ de la estructura correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

FRONTERA $h_2(y,z)$	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{25}	p_{26}	p_{27}	p_{28}	p_{29}	p_{30}
Modelo Inicial	3.5000	0.0000	-0.0400	0.0000	-0.0100	-0.0300	0.0000	0.0030	0.0000	0.0000
Modelo Resultante	4.0011	0.0142	-0.0059	-0.0097	-0.0698	-0.1443	0.0053	0.0059	0.0008	0.0569
Modelo Sintético	4.0000	0.0030	-0.0200	0.0010	-0.0700	-0.0100	0.0040	0.0020	0.0010	-0.0003

TABLA 5.10. Parámetros de la frontera $h_2(y,z)$ de la estructura correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

ESTRUCTURA	FRONTERA y_1	FRONTERA y_2	F.INFERIOR z_2
	p_{31}	p_{32}	p_{33}
Modelo Inicial	-6.2000	6.2000	2.5000
Modelo Resultante	-6.0012	6.0067	2.6830
Modelo Sintético	-6.0000	6.0000	3.0000

TABLA 5.11. Parámetros de las fronteras y_1 , y_2 y z_2 correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

Entre los parámetros del contraste de densidad, los que peor se ajustan al modelo sintético son el p_3 , el p_4 , el p_8 y el p_{10} , como se puede ver en la tabla 5.8. El resto de los parámetros presentan algunas variaciones con respecto a sus correspondientes valores en el modelo sintético, pero se puede decir que han alcanzado la solución esperada.

Para la frontera $h_1(y,z)$, los parámetros que mejor se ajustan al modelo sintético son el $p_1, p_{15}, p_{16}, p_{17}$ y p_{19} , siendo este último el que mejor ajusta de todos, como muestra la tabla 5.9.

Para la frontera $h_2(y,z)$, en la tabla 5.10 se puede ver que sólo tres de sus parámetros han alcanzado la solución esperada. Estos parámetros son el p_1 , el p_5 y el p_9 .

Los parámetros que describen las fronteras laterales y_1 e y_2 han alcanzado los valores esperados del modelo sintético, mientras que el parámetro correspondiente a la frontera inferior se aproxima al valor esperado pero sin alcanzarlo, como se observa en la tabla 5.11.

5.1.2.1 Evolución de los parámetros del modelo

En las siguientes figuras presentamos la evolución de cada uno de los parámetros que intervienen en el cálculo de la solución de nuestro problema de inversión a lo largo de las 56 iteraciones realizadas en el proceso de inversión.

En la figura 5.24 se presenta el factor de amortiguación. Vemos cómo este factor evoluciona con oscilaciones importantes hasta la iteración 56.

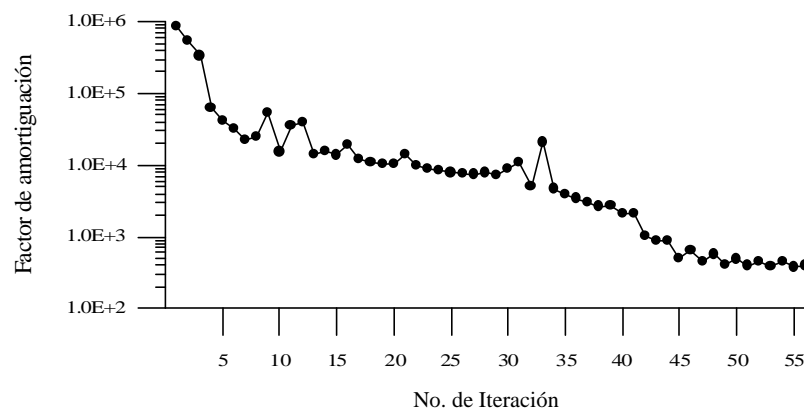


FIGURA 5.24. Evolución del factor de amortiguación b^{-1} .

En la figura 5.25 se pueden ver las evoluciones de los parámetros que describen el contraste de densidad de la fuente para las 56 iteraciones consideradas. Se puede ver cómo estos parámetros van cambiando a lo largo del proceso de inversión y algunos de ellos tienden a converger para alcanzar la solución del problema en las últimas iteraciones.

La figura 5.26 presenta la evolución de los parámetros de la frontera $h_1(y,z)$ en la que vemos también cómo la mayoría de los parámetros correspondientes tienden a converger en las últimas iteraciones. Lo mismo sucede con los parámetros de la frontera $h_2(y,z)$, como se observa en la figura 5.27.

En la figura 5.28 observamos las evoluciones de los parámetros p_{31} y p_{32} , correspondientes a las fronteras laterales y_1 y y_2 , respectivamente. Podemos ver cómo tanto la frontera y_1 como la frontera y_2 evolucionan hasta alcanzar la convergencia alrededor de la iteración 42.

Por último, la figura 5.29 presenta la evolución del parámetro p_{33} , que alcanza la solución en la última iteración.

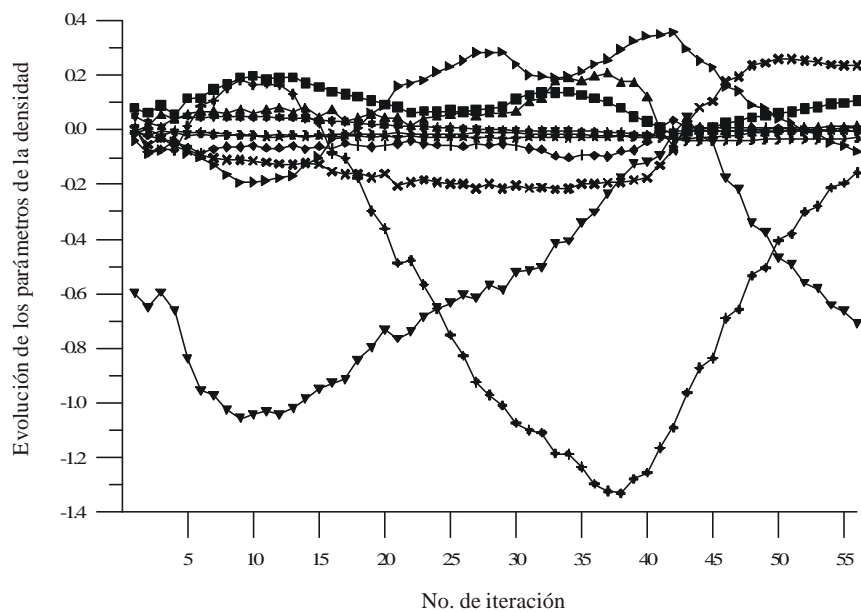


FIGURA 5.25. Evolución de los parámetros del contraste de densidad desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: $p_1(\nabla)$; $p_2(\blacksquare)$; $p_3(\lrcorner)$; $p_4(\otimes)$; $p_5(\star)$; $p_6(\blacktriangle)$; $p_7(\blacktriangleright)$; $p_8(\blacklozenge)$; $p_9(\blacktriangledown)$; $p_{10}(\blacktriangleleft)$.

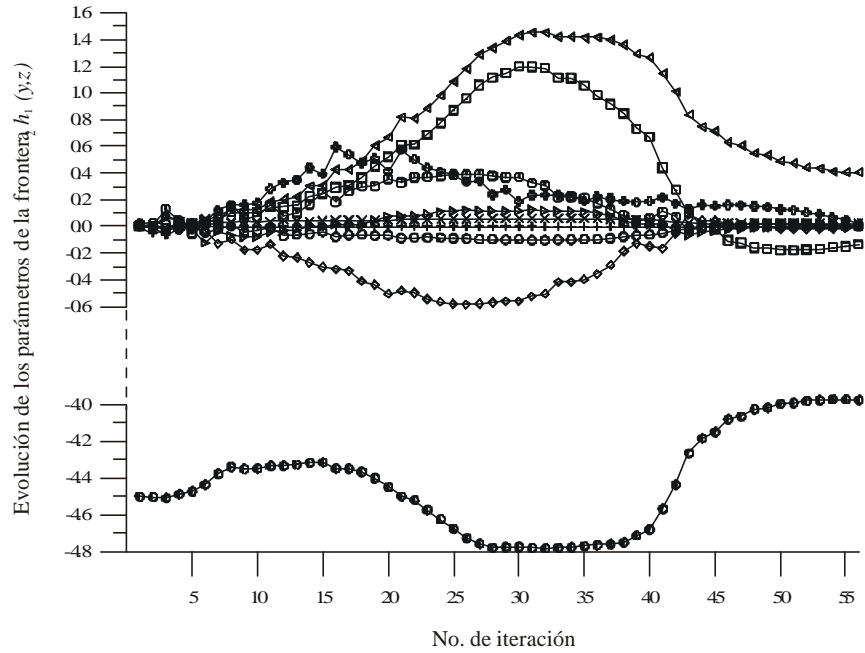


FIGURA 5.26. Evolución de los parámetros de la frontera lateral $h_1(y,z)$ desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_{11} (●); p_{12} (▶); p_{13} (□); p_{14} (◊); p_{15} (×); p_{16} (◀); p_{17} (○); p_{18} (◻); p_{19} (+); p_{20} (⊕).

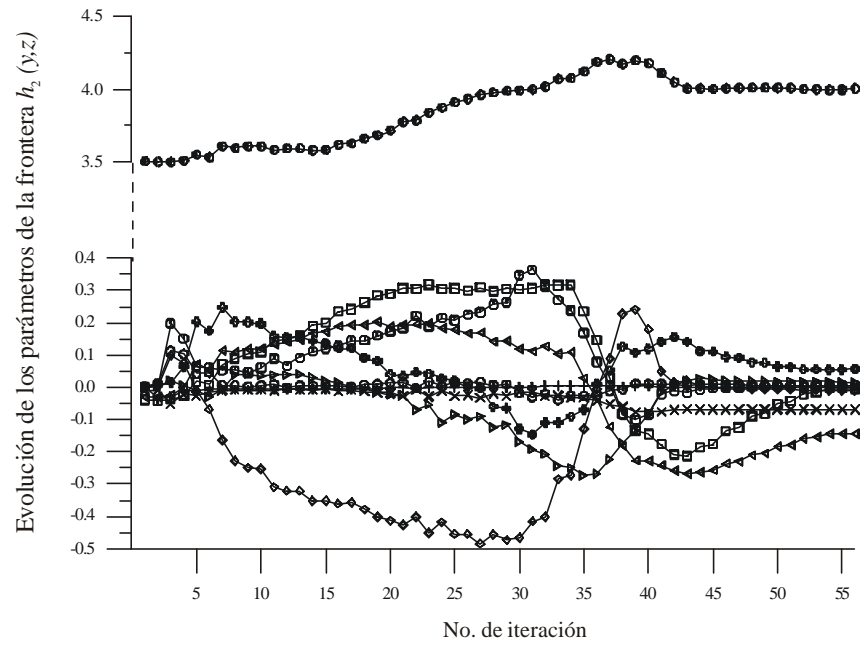


FIGURA 5.27. Evolución de los parámetros de la frontera lateral $h_2(y,z)$ desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_{11} (●); p_{12} (▶); p_{13} (□); p_{14} (◊); p_{15} (×); p_{16} (◀); p_{17} (○); p_{18} (◻); p_{19} (+); p_{20} (⊕).

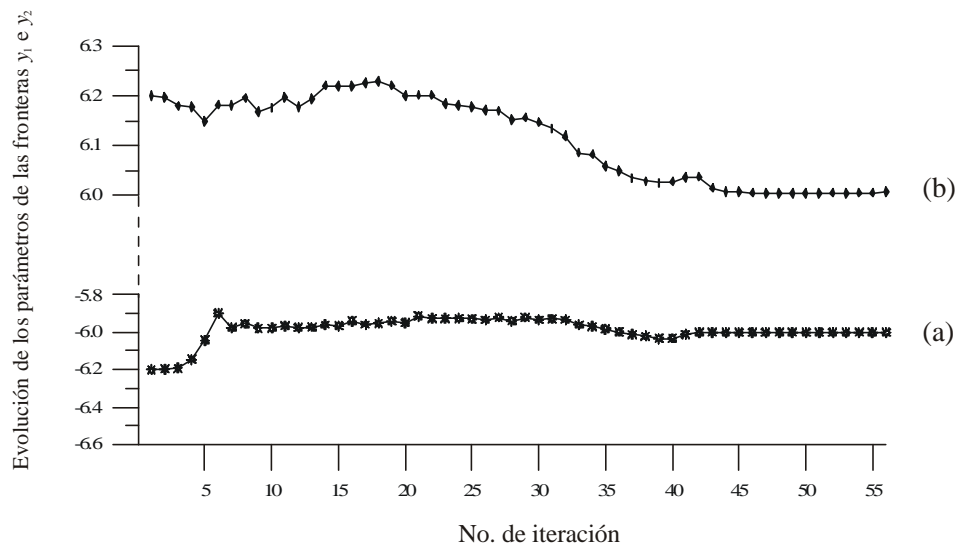


FIGURA 5.28. Evolución de los parámetros de las fronteras y_1 e y_2 desde el modelo inicial al modelo resultante de proceso de inversión. (a) Frontera y_1 . (b) Frontera y_2 .

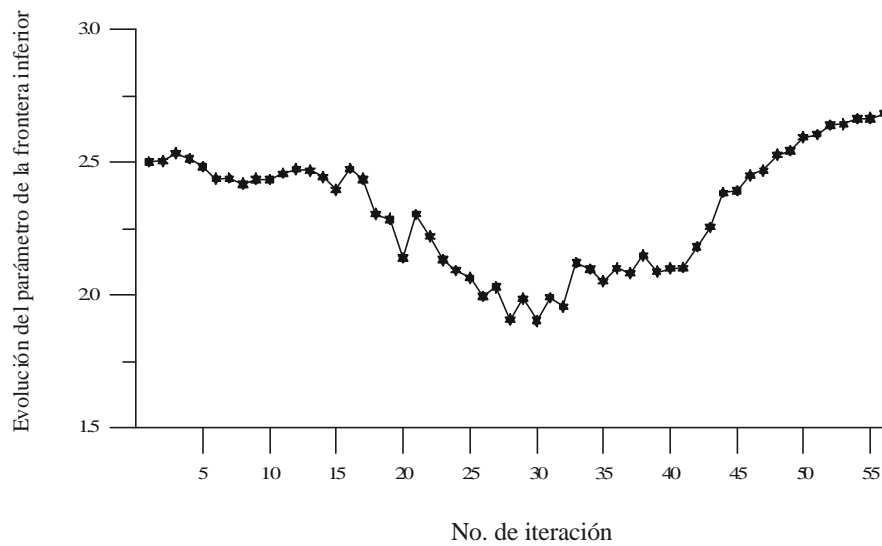


FIGURA 5.29. Evolución del parámetro de la frontera inferior z_2 desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión.

5.1.2.2 Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

Para estudiar la sensibilidad que presentan los datos de gravedad, contaminados con ruido, a las variaciones en cada uno de los parámetros que describen la fuente anómala, se grafican las treinta y tres columnas que componen el operador jacobiano.

Como ya se hizo en la sección 5.1.1.2, vamos a realizar una descripción general de las 33 gráficas, comenzando con la figura 5.30, donde se presentan las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a cada uno de los diez parámetros que describen el contraste de densidad. Como se observa en dicha figura, las gráficas (d) y (j), correspondientes a los parámetros p_4 y p_{10} que acompañan a los términos z y z^2 en el polinomio (5.2), se caracterizan por la presencia de un máximo central, indicando que los datos situados en el centro de la malla son más sensibles a estos parámetros que los localizados en la periferia. Lo mismo ocurre con la gráfica (a), que corresponde al término independiente de dicho polinomio. Así mismo, las gráficas correspondientes a los parámetros p_2, p_7 y p_8 , que acompañan a las variables x, xz y x^2 en la expresión (5.2), se caracterizan por la presencia de dos lóbulos situados en las posiciones de las fronteras $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$, como se puede ver en las gráficas (b), (g) e (h), respectivamente. Lo mismo sucede con las gráficas correspondientes a los parámetros p_3, p_6 y p_9 que acompañan a los términos y, yz, y^2 pero, en este caso, los lóbulos se ubican sobre las fronteras laterales y_1 e y_2 , como se observa en las gráficas ((c), (f) y (j)).

La gráfica (e), correspondiente a la variación del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_5 que acompaña al término xy en el polinomio (5.2), presenta dos lóbulos positivos y dos negativos situados en las posiciones de las esquinas del cuerpo anómalo.

De las diez gráficas de la figura 5.30, la (i) es la que presenta mayor intensidad, por lo que el parámetro p_9 es el mejor resuelto para el contraste de densidad en el proceso de inversión. Como se puede ver, esta gráfica presenta dos máximos ubicados sobre las fronteras laterales y_1 e y_2 , y las intensidades correspondientes son $3643.7 \frac{\text{mGal km}^3}{\text{g/cm}^3}$ y $3448.6 \frac{\text{mGal km}^3}{\text{g/cm}^3}$. Por otro lado, la gráfica (a) es la que presenta menor intensidad, con un lóbulo central de $220.2 \frac{\text{mGal}}{\text{g/cm}^3}$. Esta gráfica corresponde al parámetro p_1 , que es el que menor efecto ejerce sobre la anomalía gravimétrica del modelo.

La figura 5.31 presenta las diez gráficas correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a cada uno de los parámetros que describen la frontera lateral $h_1(y,z)$. En todas ellas, la sensibilidad de los datos es mayor en la posición que ocupa esta frontera con respecto a la malla de datos de gravedad. En este caso, el parámetro p_{19} es el que presenta mayor efecto sobre la sensibilidad de los datos, como se observa en la gráfica 5.31(i), con un mínimo de $-14969.6 \text{ mGal km}^2$ y un máximo de $11389.6 \text{ mGal km}^2$ centrados en los límites de dicha frontera. El parámetro con menor efecto es el p_{13} , que presenta dos máximos en las mismas posiciones con intensidades 64.0 mGal y 71.6 mGal , como se observa en la gráfica 5.31(c).

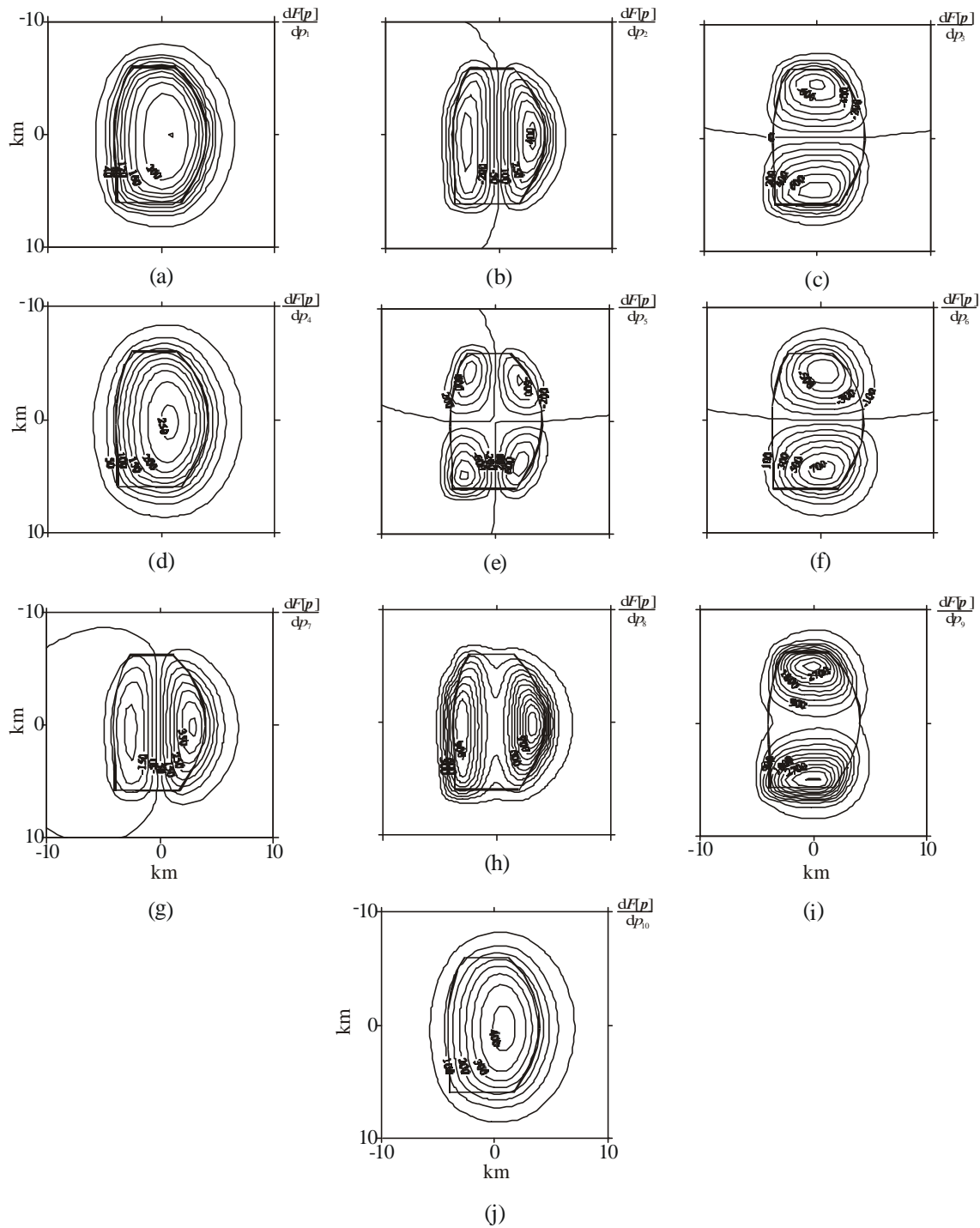


FIGURA 5.30. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen el contraste de densidad. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

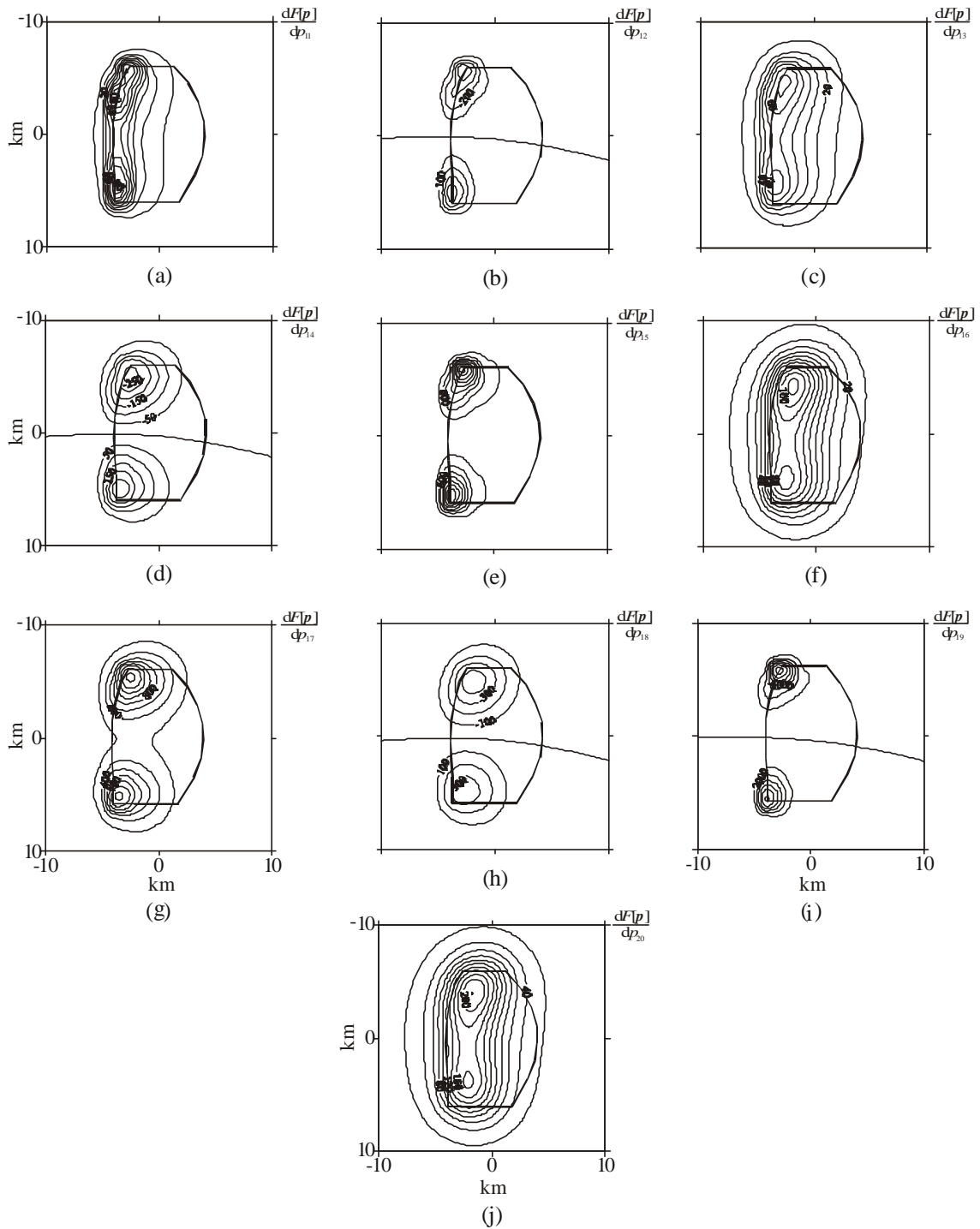


FIGURA 5.31. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[p]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera lateral $h_1(y,z)$. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

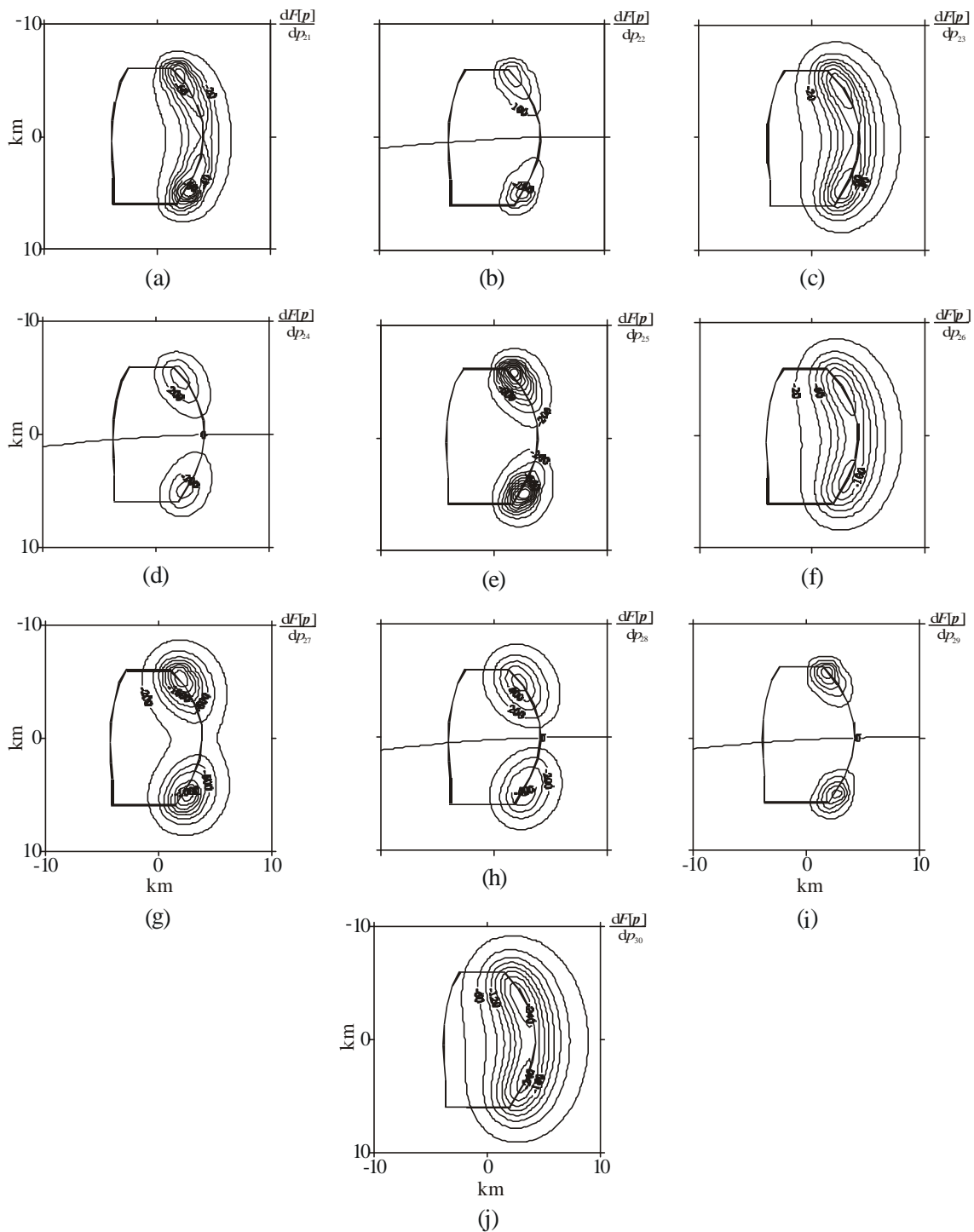


FIGURA 5.32. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[p]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera lateral $h_2(y,z)$. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

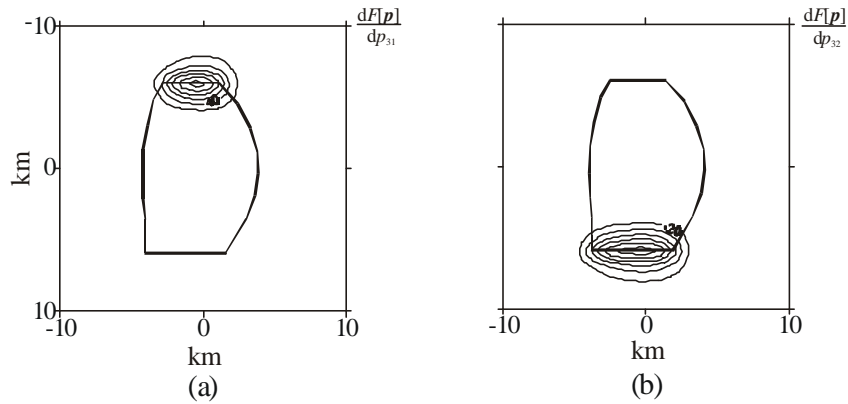


FIGURA 5.33. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen las fronteras laterales y_1 e y_2 . La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

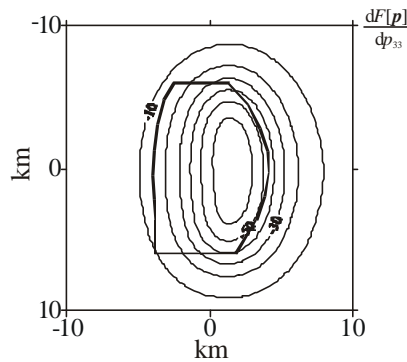


FIGURA 5.34. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera inferior z_2 . La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

En la figura 5.32 se presentan las diez columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional de la ecuación (5.3) con respecto a cada uno de los parámetros de la frontera $h_2(y,z)$. Dichas gráficas presentan una gran semejanza con las de la figura 5.31, pero con la sensibilidad de los datos centrada en la posición que ocupa la frontera $h_2(y,z)$ con respecto a la malla de datos. Como era de esperar, los datos presentan mayor sensibilidad al parámetro p_{29} , como se puede apreciar en la gráfica 5.32(i). Esta gráfica presenta un mínimo de -10513 mGal km^2 y un máximo de 11384.7 mGal km^2 de intensidad. Por otro lado, los datos son menos sensibles al parámetro p_{23} que presenta dos mínimos de -78.7 mGal y -79.2 mGal, como se puede ver en la gráfica 5.32(c).

En la figura 5.33 se pueden ver las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a los dos parámetros que definen las fronteras laterales y_1 e y_2 , en las que se observa que la sensibilidad de los

datos se centra sobre las posiciones de dichas fronteras. Para la frontera $y_1 = p_{31}$ hay un máximo de intensidad de $122.0 \text{ mGal km}^{-1}$, mientras que para la frontera $y_2 = p_{32}$ hay un mínimo de intensidad de $-126.9 \text{ mGal km}^{-1}$. Por último, en la figura 5.34 observamos la sensibilidad de los datos con respecto a la frontera inferior $z_2 = p_{33}$, con un lóbulo centrado sobre la posición del cuerpo de $-66.8 \text{ mGal km}^{-1}$ de intensidad.

A partir de estas cinco figuras no se puede concluir que los datos de gravedad sean más sensibles a los parámetros de la densidad que a los de la estructura, como ocurre en los casos de fuentes bidimensionales, ya que los datos de gravedad son más sensibles, en general, a los parámetros de las fronteras laterales que a los parámetros del contraste de densidad. Tampoco se puede decir que el parámetro que describe la frontera inferior sea el que tiene menor resolución, ya que el parámetro p_{23} de la frontera $h_1(y,z)$ es el que presenta el menor efecto en la sensibilidad de los datos.

Una vez estudiada la sensibilidad de los datos con respecto a los parámetros de la fuente, se calcula la descomposición en valores singulares de la matriz jacobiano del sistema. En la gráfica de la figura 5.35 se pueden ver dichos valores en orden de mayor a menor, normalizados por el error en los datos $\sigma = 0.36 \text{ mGal}$. Se han obtenido un total de treinta y tres valores singulares diferentes de cero. Esto indica que el jacobiano es una matriz con rango completo $\mathbf{h} = 33$ con lo que está asegurada la existencia y la unicidad de la solución.

Para este caso, la condición de la matriz \mathbf{J} es $\mathbf{k} = 4.648 \cdot 10^4$, lo que indica que se puede producir la propagación de inestabilidad numérica, producida por el cálculo de la solución del problema, en las direcciones de los vectores característicos \mathbf{v}_i que tengan un error característico e_i^* , dado por la expresión (1.49), mayor que la unidad. Las combinaciones de los parámetros, que están asociadas a dichos vectores, se pueden ver afectadas por el error presente en los datos de gravedad, que se puede propagar en las direcciones de dichos vectores haciendo que la solución alcanzada difiera de la solución real del problema.

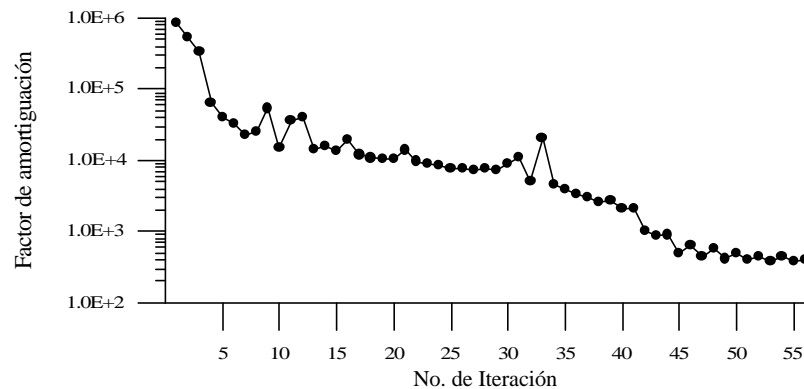


FIGURA 5.35. Valores singulares del jacobiano del problema.

En la figura 5.36 se presentan las combinaciones de los parámetros asociadas a los vectores columna de la matriz \mathbf{V}_h junto con las gráficas de los vectores columna de la matriz \mathbf{U}_h . En la misma figura se presentan cada uno de los valores singulares \mathbf{I}_i y los errores característicos e_i^* .

La primera combinación, dada por el vector característico \mathbf{v}_1^T , está compuesta principalmente por las componentes asociadas a los parámetros p_{19} y p_{29} . Ambos parámetros son los coeficientes del término y^3 en los polinomios $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$, respectivamente, siendo el p_{19} el que presenta mayor peso en la combinación. Esta combinación está asociada al valor singular normalizado más grande del jacobiano, $\mathbf{I}_1 = 1.100 \cdot 10^5$ y el error característico es $e_1^* = 9.091 \cdot 10^{-6}$, que tiene un valor muy pequeño, por lo que esta combinación está muy bien resuelta en la inversión. En la tabla 5.9 podemos ver que el valor alcanzado por el parámetro p_{19} , en el modelo resultante en la inversión, es el mismo que el del modelo sintético utilizado para generar los datos de gravedad. En cuanto al vector \mathbf{u}_1 se puede ver que el conjunto de datos que mejor resuelve esta combinación se encuentra sobre los vértices de la frontera $h_1(y,z)$, ya que es ahí donde los datos son más sensibles al parámetro p_{19} .

La segunda combinación de parámetros mejor resuelta está asociada al valor singular normalizado $\mathbf{I}_2 = 9.065 \cdot 10^4$ y su error característico es $e_2^* = 1.103 \cdot 10^{-5}$. En ella vuelven a aparecer los mismos parámetros que en la primera combinación, pero esta vez el mayor peso corresponde al parámetro p_{29} . En la tabla 5.10 vemos que este parámetro alcanza una solución muy próxima al valor del modelo sintético. El conjunto de datos que mejor resuelve la combinación está situado sobre la frontera $h_2(y,z)$.

De las dos combinaciones anteriores se deduce que puede existir cierta correlación entre los parámetros p_{19} y p_{29} . Esto mismo ocurría en el caso de la sección 5.1.1, como se ve en la figura 5.19.

La tercera combinación, asociada al valor singular $\mathbf{I}_3 = 5.740 \cdot 10^4$ y con un error característico $e_3^* = 1.742 \cdot 10^{-5}$, está formada por varias de las componentes de \mathbf{v}_3^T , entre las que destaca la correspondiente al parámetro p_9 , perteneciente al polinomio que describe el contraste de densidad. Como vemos en la representación gráfica del vector \mathbf{u}_3^T , los datos que participan en la resolución de esta combinación están situados, principalmente, sobre la frontera y_2 ya que, como se puede ver en las figuras 5.30(i) y 5.33(b), los datos de esta zona son muy sensibles a las variaciones de estos dos parámetros. En el vector \mathbf{v}_3^T también comienzan a destacar los pesos correspondientes a los parámetros p_{15}, p_{17}, p_{25} y p_{27} . Estos mismos pesos aparecen también en la cuarta combinación, que está asociada al valor singular $\mathbf{I}_4 = 2.414 \cdot 10^4$ y presenta un error $e_4^* = 4.143 \cdot 10^{-5}$, y en la quinta combinación, la cual está asociada a $\mathbf{I}_5 = 1.694 \cdot 10^4$ y presenta un error $e_5^* = 5.904 \cdot 10^{-5}$. Esto nos indica una posible correlación entre estos cuatro parámetros. En las tablas 5.9 y 5.10 podemos observar que estos parámetros alcanzan una solución satisfactoria al comparar el modelo resultante con el sintético. Los datos que resuelven estas combinaciones se encuentran situados en las posiciones que ocupan las esquinas del cuerpo con respecto a la malla de datos, ya que es aquí donde hay mayor sensibilidad a estos parámetros, como se puede ver en las figuras 5.31 y 5.32. En el vector \mathbf{u}_5 también

se pueden ver dos lóbulos situados sobre las fronteras y_1 e y_2 , ya que es donde los datos presentan sensibilidad al parámetro p_9 , cuyo peso comienza a destacar en la quinta combinación. También aparece la componente de \mathbf{v}_5^T correspondiente al parámetro p_8 , por lo que en el vector característico de los datos hay una cierta tendencia a formar lóbulos sobre las fronteras $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$. Esta componente vuelve a aparecer con más fuerza en el vector \mathbf{v}_6^T , que está asociado al valor singular normalizado $\mathbf{I}_6 = 1.387 \cdot 10^4$ y con un error $e_6^* = 7.210 \cdot 10^{-5}$. En la tabla 5.8 podemos ver que este parámetro también presenta una solución satisfactoria.

En la séptima combinación destacan los pesos correspondientes a p_3 y p_6 , por lo que el vector característico de los datos presenta dos lóbulos sobre las fronteras y_1 e y_2 , que es donde hay mayor sensibilidad. Las soluciones de ambos parámetros se desvían un poco más de la solución esperada en comparación a los anteriores parámetros, como se desprende de la tabla 5.8. Esta combinación está asociada al valor $\mathbf{I}_7 = 1.317 \cdot 10^4$, por lo que presenta un error característico $e_7^* = 7.595 \cdot 10^{-5}$.

El parámetro p_5 presenta un peso muy elevado en la octava combinación. Como prácticamente es la única componente de dicha combinación, el vector \mathbf{u}_8 presenta una forma muy parecida a la de la gráfica 5.30(e) de la sensibilidad. El error característico de esta combinación aún es pequeño, $e_8^* = 8.855 \cdot 10^{-5}$, puesto que corresponde al valor singular normalizado $\mathbf{I}_8 = 1.129 \cdot 10^4$. Es por todo ésto que el valor numérico de este parámetro en el modelo resultante es el mismo que el del modelo sintético generador de los datos de gravedad, como se ve en la tabla 5.8. A partir de esta combinación, y en las siguientes siete combinaciones que corresponden a los vectores característicos \mathbf{v}_9^T , \mathbf{v}_{10}^T , \mathbf{v}_{11}^T , \mathbf{v}_{12}^T , \mathbf{v}_{13}^T , \mathbf{v}_{14}^T y \mathbf{v}_{15}^T , aparecen las componentes asociadas a un gran número de parámetros tanto del contraste de densidad como de las fronteras laterales $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$.

La mayoría de las soluciones alcanzadas para los parámetros de estas últimas siete combinaciones se ajustan en mayor o menor medida a los valores utilizados en modelo sintético, aunque hay algunos parámetros, como el p_{10} , el p_{24} y el p_{28} , por ejemplo, que no alcanzan las soluciones esperadas, como se infiere de las tablas 5.8 y 5.10. Para estas combinaciones el error característico es del orden de 10^{-4} , que aún es un error aceptable, pero los valores singulares correspondientes son del orden de 10^3 , dos órdenes de magnitud menores que el mayor valor singular del jacobiano. Esto conlleva la posible existencia de inestabilidades numéricas en el cálculo de estas combinaciones, haciendo que algunos de los parámetros presenten problemas en su resolución. Los correspondientes vectores característicos de los datos, para estas combinaciones, presentan formas variadas, dependiendo del parámetro que presente mayor peso en cada combinación.

Los pesos correspondientes a las fronteras laterales y_1 e y_2 no aparecen hasta la decimosexta combinación. Esta combinación está asociada al $\mathbf{I}_{16} = 1.078 \cdot 10^3$ y su error característico es $e_{16}^* = 9.274 \cdot 10^{-4}$. Estos pesos vuelven a destacar en las combinaciones 17, 18 y 19, siendo esta última en donde son más grandes. Por ello, los vectores característicos de los datos presentan lóbulos sobre la posición de dichas fronteras, principalmente.

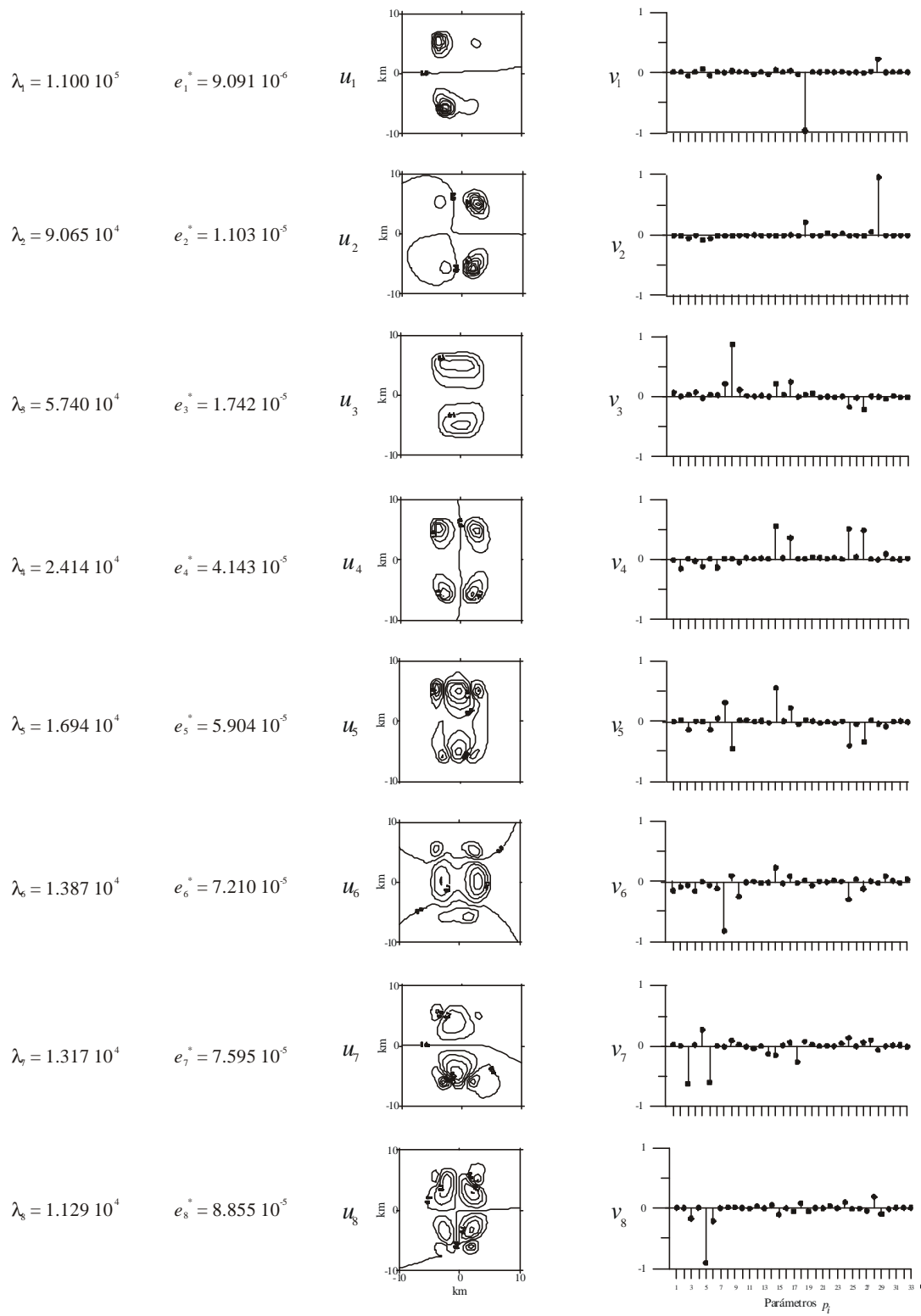


FIGURA 5.36. Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

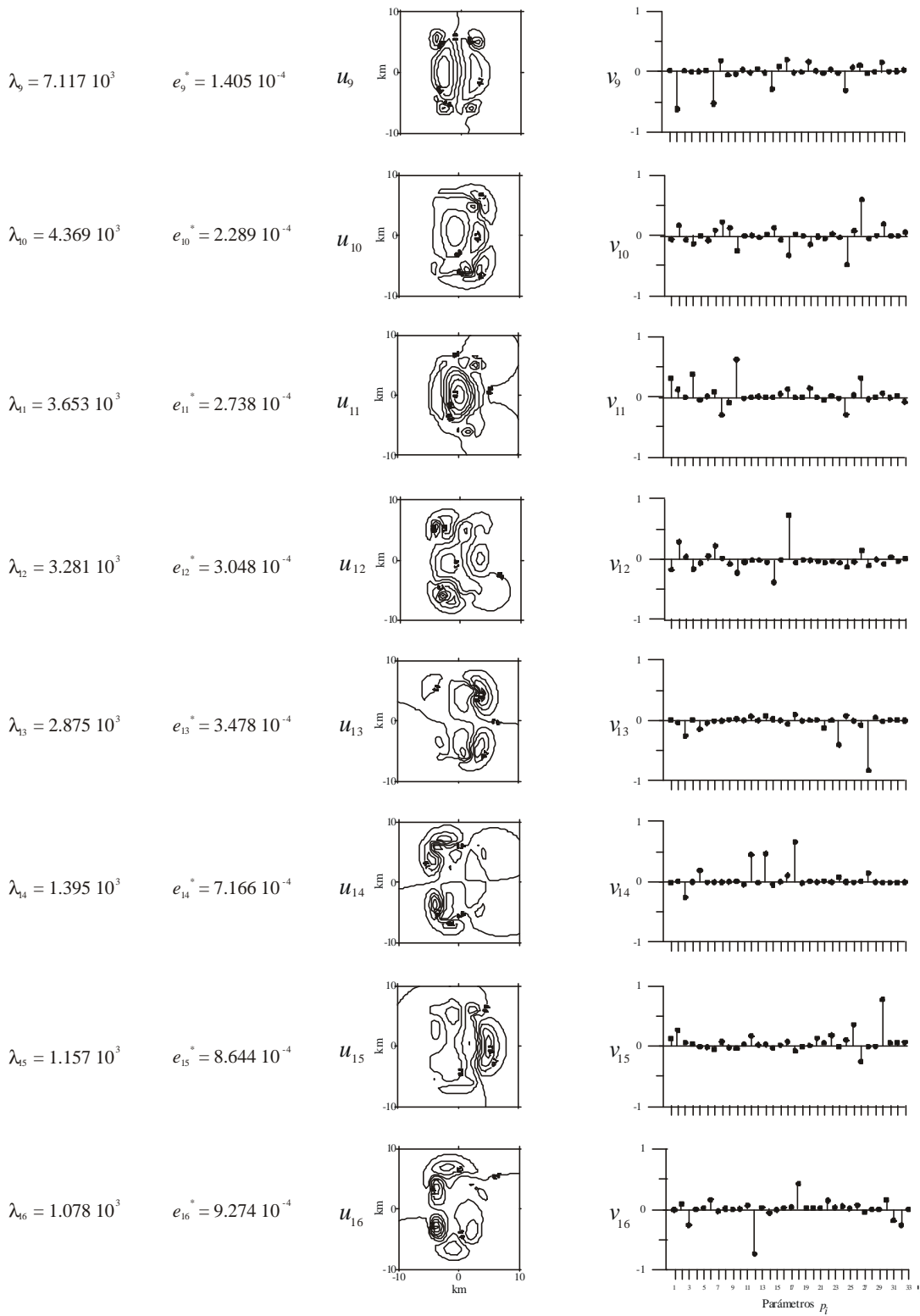


FIGURA 5.36 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

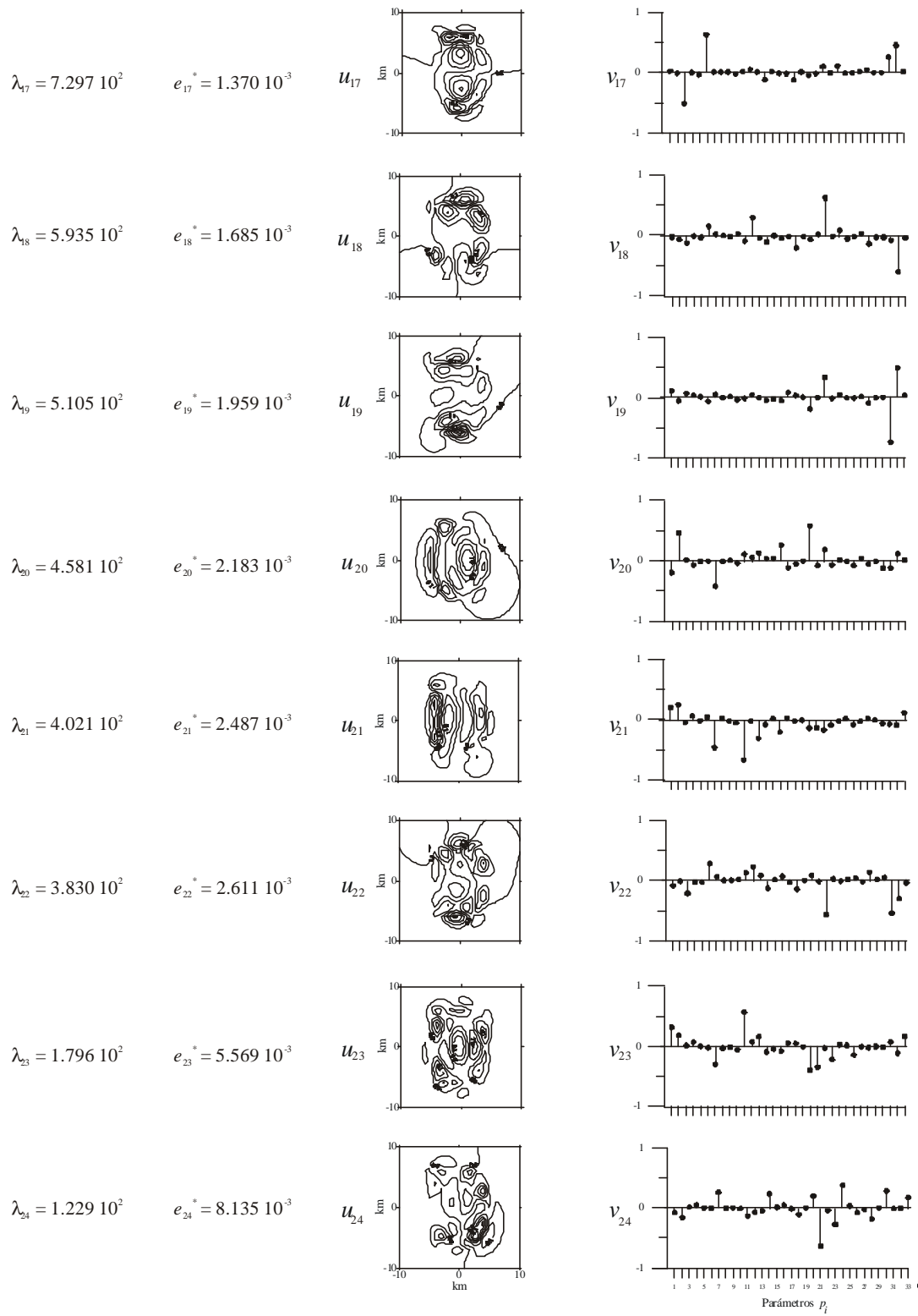


FIGURA 5.36 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

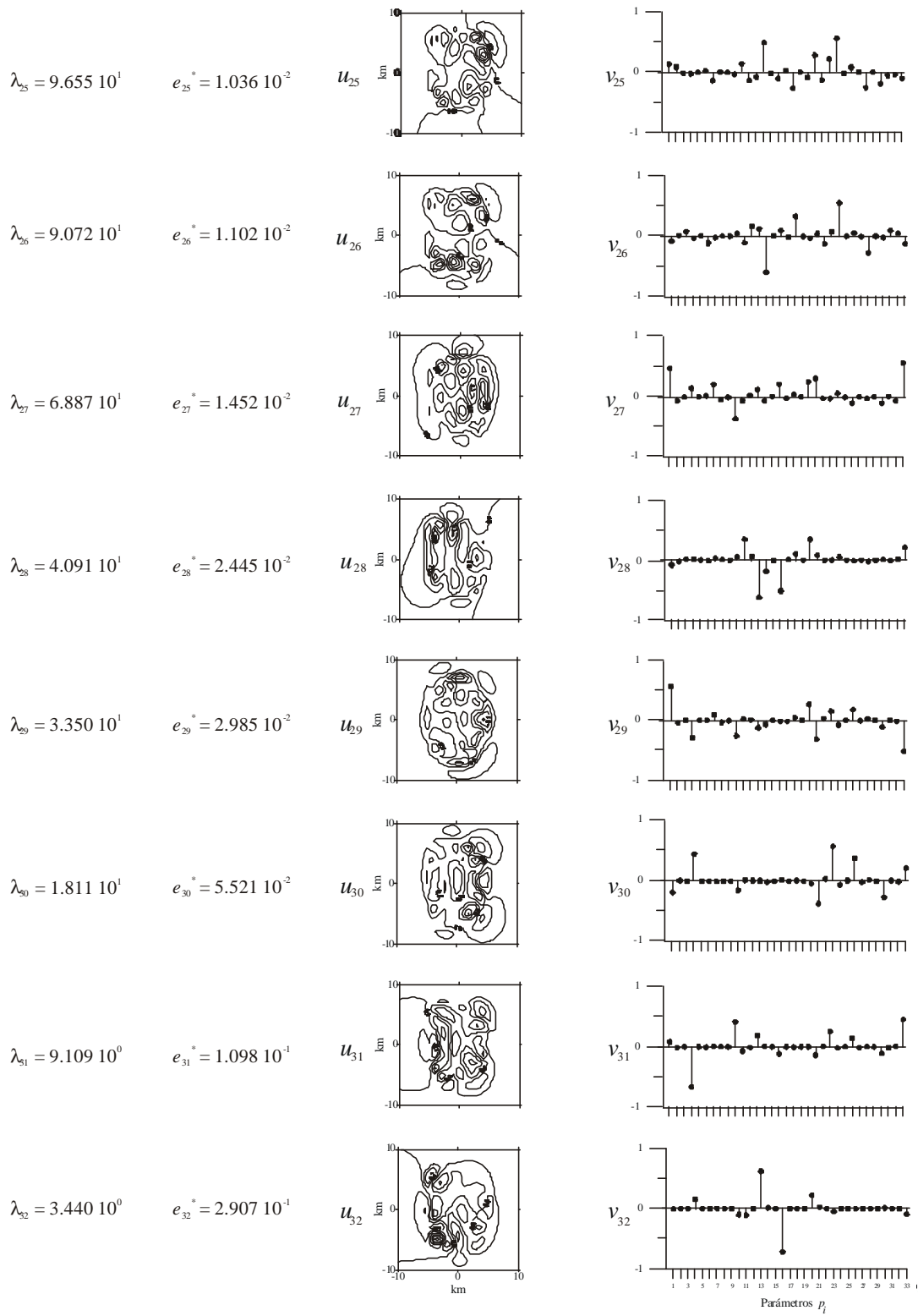


FIGURA 5.36 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

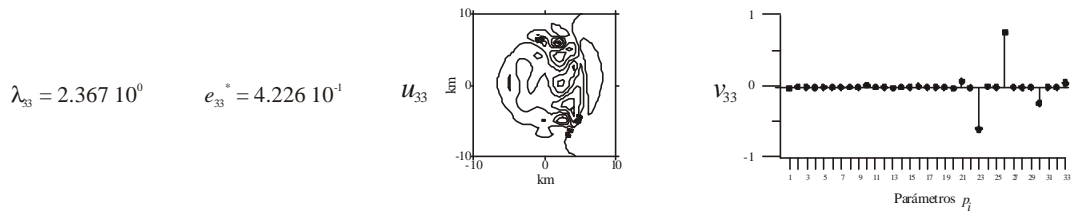


FIGURA 5.36 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

En cuanto al parámetro p_{33} , que describe la frontera inferior, su peso correspondiente no aparece hasta la iteración número 27, la cual está asociada al valor singular $I_{27} = 6.887 \cdot 10^1$ y con un error $e_{27}^* = 1.452 \cdot 10^{-2}$. También aparece en las combinaciones 28, 29, 30 y 31.

Las combinaciones trigesimosegunda y trigesimotercera son las que presenta los mayores errores característicos, pero éstos no llegan a ser mayores que la unidad. Esto nos indica que estas combinaciones no van a ser demasiado ruidosas dentro del conjunto de combinaciones, por lo que no deben ser rechazadas. No obstante, los valores singulares correspondientes son cinco órdenes de magnitud menores que el valor singular más grande, por lo que van a existir inestabilidades numéricas en el cálculo de la solución de los parámetros correspondientes.

En este ejemplo teórico para tres dimensiones, contaminado con ruido aleatorio, vemos que los parámetros de la fuente mejor resueltos en el proceso de inversión vuelven a ser dos de los parámetros que describen su estructura aunque, en general, los parámetros correspondientes al contraste de densidad aparecen representados en las primeras diez combinaciones.

5.1.2.3. Resolución de los parámetros

Una vez estudiadas cuáles son las combinaciones de parámetros mejor resueltas por los datos de gravedad, vamos a ver la resolución que presentan cada uno de los parámetros que describen la fuente anómala. Para ello es necesario calcular la varianza residual a partir de la ecuación (1.56), donde los grados de libertad en este caso son $M - N = 367$. El valor obtenido es $\hat{\mathbf{s}}^2 = 0.14 \text{ mGal}^2$, que es casi la misma que la varianza estimada para los datos, cuyo valor es $\mathbf{s}^2 = 0.13 \text{ mGal}^2$. Esto indica que el modelo de fuente obtenido explica los datos de manera satisfactoria, como se puede ver al comparar tanto las fuentes como las anomalías gravimétricas que producen el modelo resultante de la figura 5.22 y el modelo generador de los datos de gravedad sin ruido de la figura 3.5. Se puede ver

que las fuentes son lo suficientemente parecidas como para aceptar el modelo resultante de la inversión como solución del problema, aunque presenten algunas diferencias en la forma de sus fronteras.

La matriz de resolución de los parámetros para este caso, calculada mediante la ecuación (1.55), se puede ver en la figura 5.37, en la que se puede apreciar que la mayoría de los parámetros presentan muy buena resolución.

En particular, los parámetros peor resueltos son: el p_4 y el p_{10} para el contraste de densidad, que corresponden al término independiente y al coeficiente de z^2 en el polinomio (5.2); el p_{13} y el p_{16} , para la frontera $h_1(y,z)$, que corresponden a los términos z y z^2 , respectivamente; el p_{23} y el p_{26} para la frontera $h_2(y,z)$, correspondientes también a los mismos términos z y z^2 , respectivamente; y el p_{33} que es el parámetro de la frontera inferior. Hay otros parámetros que presentan una resolución intermedia, como p_1 , p_{10} , p_{20} , p_{21} y p_{30} . Corresponden, según el caso a los términos independientes y a los coeficientes que acompañan a la variable z^3 en los polinomios $\mathbf{Dr}(x,y,z)$, $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$.

En resumen, los parámetros que presentan peor resolución son aquellos relacionados con los términos que dependen de la profundidad del cuerpo anómalo, según los términos independientes y los términos en las variables z y z^2 , tanto en el contraste de densidad como en las funciones que describen la estructura de la fuente anómala.



FIGURA 5.37. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

5.1.2.4. Covarianza de los parámetros

Los elementos de la matriz de covarianza se pueden ver en la tabla 5.12, calculada mediante la ecuación (1.63) y con una varianza residual de $\hat{S}^2 = 0.14 \text{ mGal}^2$. Al ser una matriz simétrica sólo se presenta la parte triangular superior de la misma.

En la tabla 5.13 se presentan los parámetros del modelo resultante obtenido para la fuente anómala de este ejemplo junto con sus incertidumbres correspondientes, calculadas a partir de la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza, teniendo en cuenta un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \text{ s}$.

5.1.2.5. Correlación entre los parámetros

En la figura 5.38 se puede ver una imagen de la matriz de correlación de los parámetros de la fuente y en la tabla 5.14 se presentan los valores numéricos de sus elementos. Como se puede ver en la figura, existe correlación entre los parámetros p_3 y p_6 , entre p_2 y p_7 y entre p_1, p_7, p_8, p_9 y p_{10} , todos ellos pertenecientes al contraste de densidad.

En cuanto a los parámetros de la frontera $h_1(y, z)$, se puede ver que existe correlación entre todos ellos en mayor o menor medida, pero hay que destacar la correlación existente entre los parámetros p_{14} y p_{18} y entre los parámetros p_{15} y p_{17} , como ya se vio en el estudio de la resolución de las combinaciones de parámetros en la figura 5.36.

También existe correlación entre los parámetros de la frontera $h_2(y, z)$, aunque no tan evidente como en la frontera $h_1(y, z)$. Los pares de parámetros que se encuentran fuertemente correlacionados entre sí son el p_{24} y p_{28} , el p_{23} y p_{30} y el p_{25} y p_{27} , esta última correlación ya fue inferida de las combinaciones de parámetros de la figura 5.36.

Los parámetros correspondientes a las fronteras laterales y_1 e y_2 no presentan correlaciones fuertes con ninguno de los demás parámetros. Lo mismo ocurre con la frontera inferior, ésta no presenta correlaciones importantes con ninguno de los restantes parámetros que definen la fuente anómala.

P_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	D_{17}	
$2.633 \cdot 10^{-5}$	$-1.246 \cdot 10^{-6}$	$-1.556 \cdot 10^{-7}$	$-1.278 \cdot 10^{-5}$	$-4.923 \cdot 10^{-8}$	$4.978 \cdot 10^{-7}$	$4.716 \cdot 10^{-6}$	$-1.351 \cdot 10^{-6}$	$-3.360 \cdot 10^{-7}$	$-1.005 \cdot 10^{-5}$	$-4.505 \cdot 10^{-7}$	$-1.905 \cdot 10^{-8}$	$3.591 \cdot 10^{-7}$	$-4.952 \cdot 10^{-7}$	$1.471 \cdot 10^{-7}$	$3.024 \cdot 10^{-6}$	$-4.955 \cdot 10^{-7}$	D_1
	$9.317 \cdot 10^{-7}$	$-3.387 \cdot 10^{-9}$	$4.687 \cdot 10^{-7}$	$3.175 \cdot 10^{-9}$	$-1.488 \cdot 10^{-8}$	$-1.608 \cdot 10^{-6}$	$1.037 \cdot 10^{-7}$	$1.656 \cdot 10^{-8}$	$7.786 \cdot 10^{-7}$	$3.758 \cdot 10^{-7}$	$-5.516 \cdot 10^{-8}$	$8.336 \cdot 10^{-7}$	$4.466 \cdot 10^{-7}$	$-5.776 \cdot 10^{-8}$	$1.346 \cdot 10^{-7}$	$1.298 \cdot 10^{-7}$	D_2
		$2.552 \cdot 10^{-7}$	$-6.451 \cdot 10^{-8}$	$2.304 \cdot 10^{-8}$	$-3.242 \cdot 10^{-7}$	$-4.775 \cdot 10^{-9}$	$8.159 \cdot 10^{-9}$	$4.869 \cdot 10^{-9}$	$1.083 \cdot 10^{-7}$	$6.452 \cdot 10^{-8}$	$2.025 \cdot 10^{-7}$	$-1.830 \cdot 10^{-7}$	$-8.336 \cdot 10^{-7}$	$2.824 \cdot 10^{-9}$	$-1.655 \cdot 10^{-7}$	$-3.268 \cdot 10^{-9}$	D_3
			$2.613 \cdot 10^{-8}$	$1.097 \cdot 10^{-8}$	$1.870 \cdot 10^{-8}$	$-9.695 \cdot 10^{-7}$	$2.171 \cdot 10^{-7}$	$5.364 \cdot 10^{-8}$	$-7.643 \cdot 10^{-6}$	$1.066 \cdot 10^{-6}$	$1.368 \cdot 10^{-7}$	$-6.391 \cdot 10^{-7}$	$3.100 \cdot 10^{-7}$	$-5.838 \cdot 10^{-8}$	$2.515 \cdot 10^{-6}$	$1.271 \cdot 10^{-7}$	D_4
				$7.824 \cdot 10^{-9}$	$-3.661 \cdot 10^{-8}$	$-1.216 \cdot 10^{-8}$	$2.989 \cdot 10^{-9}$	$9.908 \cdot 10^{-10}$	$2.632 \cdot 10^{-8}$	$3.661 \cdot 10^{-8}$	$2.613 \cdot 10^{-8}$	$-5.905 \cdot 10^{-8}$	$-9.726 \cdot 10^{-8}$	$-1.408 \cdot 10^{-9}$	$-5.918 \cdot 10^{-8}$	$3.984 \cdot 10^{-9}$	D_5
					$4.399 \cdot 10^{-7}$	$7.403 \cdot 10^{-8}$	$-2.779 \cdot 10^{-8}$	$-1.122 \cdot 10^{-8}$	$-3.052 \cdot 10^{-7}$	$-1.368 \cdot 10^{-7}$	$-3.202 \cdot 10^{-7}$	$2.975 \cdot 10^{-7}$	$1.283 \cdot 10^{-6}$	$-1.324 \cdot 10^{-9}$	$3.212 \cdot 10^{-7}$	$-3.667 \cdot 10^{-9}$	D_6
						$3.312 \cdot 10^{-6}$	$-3.496 \cdot 10^{-7}$	$-6.690 \cdot 10^{-8}$	$-3.003 \cdot 10^{-6}$	$-7.524 \cdot 10^{-7}$	$1.933 \cdot 10^{-7}$	$-1.068 \cdot 10^{-6}$	$-1.073 \cdot 10^{-6}$	$1.341 \cdot 10^{-7}$	$5.746 \cdot 10^{-7}$	$-3.319 \cdot 10^{-7}$	D_7
							$8.978 \cdot 10^{-8}$	$1.959 \cdot 10^{-8}$	$7.768 \cdot 10^{-7}$	$7.002 \cdot 10^{-8}$	$-1.127 \cdot 10^{-8}$	$-1.751 \cdot 10^{-7}$	$5.498 \cdot 10^{-8}$	$-1.210 \cdot 10^{-8}$	$-3.793 \cdot 10^{-7}$	$4.087 \cdot 10^{-8}$	D_8
								$5.701 \cdot 10^{-9}$	$1.882 \cdot 10^{-7}$	$-1.685 \cdot 10^{-8}$	$2.746 \cdot 10^{-9}$	$2.093 \cdot 10^{-8}$	$-9.502 \cdot 10^{-9}$	$-5.044 \cdot 10^{-7}$	$-3.557 \cdot 10^{-8}$	$3.587 \cdot 10^{-9}$	D_9
									$1.231 \cdot 10^{-5}$	$-1.896 \cdot 10^{-8}$	$-1.630 \cdot 10^{-7}$	$8.994 \cdot 10^{-7}$	$6.096 \cdot 10^{-7}$	$-1.153 \cdot 10^{-7}$	$-3.684 \cdot 10^{-6}$	$3.600 \cdot 10^{-7}$	D_{10}
										$8.547 \cdot 10^{-6}$	$8.098 \cdot 10^{-7}$	$-1.077 \cdot 10^{-5}$	$-1.684 \cdot 10^{-6}$	$-2.592 \cdot 10^{-7}$	$-8.664 \cdot 10^{-6}$	$4.141 \cdot 10^{-7}$	D_{11}
											$1.198 \cdot 10^{-6}$	$-1.309 \cdot 10^{-6}$	$-3.412 \cdot 10^{-6}$	$2.212 \cdot 10^{-8}$	$-9.604 \cdot 10^{-7}$	$-5.609 \cdot 10^{-8}$	D_{12}
												$2.226 \cdot 10^{-8}$	$4.027 \cdot 10^{-6}$	$1.593 \cdot 10^{-7}$	$1.364 \cdot 10^{-5}$	$-3.375 \cdot 10^{-7}$	D_{13}
													$1.165 \cdot 10^{-5}$	$-1.213 \cdot 10^{-7}$	$2.756 \cdot 10^{-6}$	$2.448 \cdot 10^{-7}$	D_{14}
														$2.041 \cdot 10^{-8}$	$2.240 \cdot 10^{-7}$	$-3.849 \cdot 10^{-8}$	D_{15}
															$1.640 \cdot 10^{-5}$	$-4.917 \cdot 10^{-7}$	D_{16}
																$8.577 \cdot 10^{-8}$	D_{17}

TABLA 5.12. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

D_{18}	D_{19}	D_{20}	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}	D_{27}	D_{28}	D_{29}	D_{30}	D_{31}	D_{32}	D_{33}	
6.862 10 ⁻⁷	7.379 10 ⁻⁹	9.239 10 ⁻⁶	-2.621 10 ⁻⁶	4.844 10 ⁻⁷	-3.499 10 ⁻⁷	-1.106 10 ⁻⁶	7.324 10 ⁻⁸	1.047 10 ⁻⁶	-1.782 10 ⁻⁸	4.315 10 ⁻⁷	-2.026 10 ⁻⁹	-2.500 10 ⁻⁶	-1.558 10 ⁻⁹	-1.313 10 ⁻⁶	-1.087 10 ⁻⁵	D_1
-2.924 10 ⁻⁷	-1.999 10 ⁻⁹	-1.864 10 ⁻⁶	7.903 10 ⁻⁷	-1.650 10 ⁻⁷	4.884 10 ⁻⁷	2.622 10 ⁻⁷	-4.357 10 ⁻⁸	1.016 10 ⁻⁷	4.963 10 ⁻⁸	-1.095 10 ⁻⁷	2.992 10 ⁻⁹	-4.713 10 ⁻⁷	2.873 10 ⁻⁸	-5.177 10 ⁻⁹	-4.525 10 ⁻⁷	D_2
5.223 10 ⁻⁷	-8.686 10 ⁻¹⁰	1.276 10 ⁻⁷	-1.275 10 ⁻⁷	-4.118 10 ⁻⁸	6.482 10 ⁻⁸	6.370 10 ⁻⁷	8.748 10 ⁻⁹	6.614 10 ⁻⁸	-9.212 10 ⁻⁹	-3.635 10 ⁻⁷	-3.097 10 ⁻⁹	2.146 10 ⁻⁸	1.904 10 ⁻⁷	1.339 10 ⁻⁷	-1.274 10 ⁻⁷	D_3
-2.942 10 ⁻⁷	-6.088 10 ⁻⁹	-3.788 10 ⁻⁶	-1.263 10 ⁻⁶	7.008 10 ⁻⁸	6.657 10 ⁻⁶	-8.897 10 ⁻⁸	1.370 10 ⁻⁸	3.502 10 ⁻⁶	-7.268 10 ⁻⁸	5.252 10 ⁻⁸	-2.341 10 ⁻⁹	-3.314 10 ⁻⁶	3.025 10 ⁻⁷	-4.220 10 ⁻⁷	7.966 10 ⁻⁶	D_4
7.957 10 ⁻⁸	-2.503 10 ⁻¹⁰	1.369 10 ⁻⁸	-7.448 10 ⁻⁹	-1.367 10 ⁻⁹	2.507 10 ⁻⁸	7.401 10 ⁻⁸	3.821 10 ⁻¹⁰	1.503 10 ⁻⁸	-6.641 10 ⁻¹⁰	-3.674 10 ⁻⁸	-5.523 10 ⁻¹⁰	-6.659 10 ⁻⁹	2.744 10 ⁻⁸	2.018 10 ⁻⁸	1.018 10 ⁻⁸	D_5
-8.149 10 ⁻⁷	1.564 10 ⁻⁹	-8.336 10 ⁻⁸	1.334 10 ⁻⁷	5.331 10 ⁻⁸	-9.260 10 ⁻⁸	-7.837 10 ⁻⁷	-1.067 10 ⁻⁸	-7.946 10 ⁻⁸	1.229 10 ⁻⁸	4.529 10 ⁻⁷	3.721 10 ⁻⁹	-5.669 10 ⁻⁸	-2.721 10 ⁻⁷	-2.026 10 ⁻⁷	6.351 10 ⁻⁸	D_6
7.117 10 ⁻⁷	3.568 10 ⁻⁹	4.405 10 ⁻⁶	-1.463 10 ⁻⁶	3.116 10 ⁻⁷	-2.029 10 ⁻⁷	-4.761 10 ⁻⁷	7.246 10 ⁻⁸	2.348 10 ⁻⁷	-8.931 10 ⁻⁸	1.860 10 ⁻⁷	-5.492 10 ⁻⁹	9.590 10 ⁻⁸	-3.316 10 ⁻⁸	-1.812 10 ⁻⁷	7.783 10 ⁻⁷	D_7
-5.737 10 ⁻⁸	-3.003 10 ⁻¹⁰	-4.984 10 ⁻⁷	1.946 10 ⁻⁷	-3.828 10 ⁻⁸	-3.965 10 ⁻⁸	8.466 10 ⁻⁸	-5.912 10 ⁻⁹	-7.047 10 ⁻⁸	1.621 10 ⁻⁹	-3.279 10 ⁻⁸	2.637 10 ⁻¹⁰	1.890 10 ⁻⁷	-1.250 10 ⁻⁸	9.478 10 ⁻⁸	2.419 10 ⁻⁷	D_8
7.535 10 ⁻¹⁰	-5.713 10 ⁻¹¹	-1.279 10 ⁻⁷	3.636 10 ⁻⁸	-7.087 10 ⁻⁹	-2.144 10 ⁻⁸	1.724 10 ⁻⁸	-1.269 10 ⁻⁹	-2.525 10 ⁻⁸	1.564 10 ⁻⁹	-7.606 10 ⁻⁹	4.680 10 ⁻¹¹	5.166 10 ⁻⁸	-2.063 10 ⁻⁹	3.125 10 ⁻⁸	8.184 10 ⁻⁸	D_9
-5.405 10 ⁻⁷	-2.518 10 ⁻⁹	-4.854 10 ⁻⁶	3.386 10 ⁻⁶	-4.679 10 ⁻⁷	-3.707 10 ⁻⁶	9.244 10 ⁻⁷	-8.486 10 ⁻⁸	-3.154 10 ⁻⁶	7.112 10 ⁻⁸	-3.622 10 ⁻⁷	4.307 10 ⁻⁹	3.404 10 ⁻⁶	-1.690 10 ⁻⁷	9.742 10 ⁻⁷	5.273 10 ⁻⁶	D_{10}
8.367 10 ⁻⁷	-1.270 10 ⁻⁸	4.197 10 ⁻⁶	6.896 10 ⁻⁷	2.152 10 ⁻⁸	5.834 10 ⁻⁷	3.508 10 ⁻⁷	-3.986 10 ⁻⁸	1.556 10 ⁻⁷	2.346 10 ⁻⁸	-1.942 10 ⁻⁷	-4.110 10 ⁻⁹	-6.024 10 ⁻⁷	-1.923 10 ⁻⁷	-9.475 10 ⁻⁹	1.531 10 ⁻⁶	D_{11}
1.768 10 ⁻⁶	-9.591 10 ⁻⁹	1.148 10 ⁻⁶	-6.433 10 ⁻⁸	-8.110 10 ⁻⁸	2.374 10 ⁻⁷	2.390 10 ⁻⁷	1.055 10 ⁻⁸	1.587 10 ⁻⁷	-2.001 10 ⁻⁸	-1.603 10 ⁻⁷	1.192 10 ⁻⁹	-1.006 10 ⁻⁷	2.389 10 ⁻⁷	7.915 10 ⁻⁸	3.463 10 ⁻⁷	D_{12}
-2.092 10 ⁻⁶	7.850 10 ⁻⁹	-1.065 10 ⁻⁵	-2.109 10 ⁻⁷	-2.863 10 ⁻⁷	-1.307 10 ⁻⁹	-4.669 10 ⁻⁷	6.127 10 ⁻⁹	-3.248 10 ⁻⁷	6.891 10 ⁻⁸	2.935 10 ⁻⁷	1.437 10 ⁻⁸	-4.341 10 ⁻⁷	4.747 10 ⁻⁷	-5.707 10 ⁻⁷	5.258 10 ⁻⁷	D_{13}
-6.298 10 ⁻⁶	1.250 10 ⁻⁸	-4.126 10 ⁻⁶	5.870 10 ⁻⁷	1.517 10 ⁻⁷	-6.696 10 ⁻⁷	-7.710 10 ⁻⁷	-5.544 10 ⁻⁸	-6.138 10 ⁻⁷	9.353 10 ⁻⁸	5.824 10 ⁻⁷	-5.800 10 ⁻¹⁰	1.277 10 ⁻⁷	-1.174 10 ⁻⁶	-6.442 10 ⁻⁷	-3.315 10 ⁻⁷	D_{14}
6.449 10 ⁻⁸	5.491 10 ⁻¹⁰	1.401 10 ⁻⁷	-6.523 10 ⁻⁸	6.294 10 ⁻⁹	-9.306 10 ⁻¹⁰	-2.343 10 ⁻⁸	3.114 10 ⁻⁹	2.140 10 ⁻⁸	-3.121 10 ⁻⁹	9.291 10 ⁻⁹	3.619 10 ⁻¹¹	1.042 10 ⁻⁸	1.569 10 ⁻⁸	3.901 10 ⁻⁹	-5.665 10 ⁻⁸	D_{15}
-1.365 10 ⁻⁶	8.989 10 ⁻⁹	-7.438 10 ⁻⁶	-7.268 10 ⁻⁷	-1.017 10 ⁻⁷	-4.026 10 ⁻⁷	-6.176 10 ⁻⁷	2.826 10 ⁻⁸	-1.752 10 ⁻⁷	4.018 10 ⁻⁸	3.326 10 ⁻⁷	9.957 10 ⁻⁹	-4.232 10 ⁻⁷	4.241 10 ⁻⁷	-6.540 10 ⁻⁷	-2.555 10 ⁻⁶	D_{16}
-1.319 10 ⁻⁷	-7.168 10 ⁻¹⁰	-3.853 10 ⁻⁷	1.608 10 ⁻⁷	-1.648 10 ⁻⁸	-1.358 10 ⁻⁸	5.830 10 ⁻⁸	-6.652 10 ⁻⁹	-5.300 10 ⁻⁸	4.766 10 ⁻⁹	-2.249 10 ⁻⁸	-1.023 10 ⁻¹⁰	2.024 10 ⁻⁸	-3.432 10 ⁻⁸	1.987 10 ⁻⁸	7.974 10 ⁻⁸	D_{17}
3.592 10⁻⁶	-6.071 10 ⁻⁹	2.379 10 ⁻⁶	-4.641 10 ⁻⁷	-3.687 10 ⁻⁸	4.525 10 ⁻⁷	5.538 10 ⁻⁷	3.531 10 ⁻⁸	4.200 10 ⁻⁷	-5.593 10 ⁻⁸	-3.980 10 ⁻⁷	-2.119 10 ⁻⁹	-1.438 10 ⁻⁷	7.617 10 ⁻⁷	4.235 10 ⁻⁷	4.079 10 ⁻⁸	D_{18}
	2.369 10⁻¹⁰	1.411 10 ⁻¹⁰	-2.278 10 ⁻⁹	1.571 10 ⁻⁹	-2.093 10 ⁻⁹	-4.116 10 ⁻⁹	6.362 10 ⁻¹¹	-1.018 10 ⁻¹⁰	-5.425 10 ⁻¹¹	1.980 10 ⁻⁹	-2.132 10 ⁻¹¹	1.524 10 ⁻⁹	1.321 10 ⁻⁹	2.008 10 ⁻⁹	-7.882 10 ⁻⁹	D_{19}
		1.275 10⁻⁵	-1.560 10 ⁻⁶	5.016 10 ⁻⁷	4.943 10 ⁻⁷	-2.080 10 ⁻⁷	6.007 10 ⁻⁸	9.495 10 ⁻⁷	-1.092 10 ⁻⁷	-1.760 10 ⁻⁸	-1.356 10 ⁻⁸	-6.574 10 ⁻⁷	-2.185 10 ⁻⁷	-3.365 10 ⁻⁸	-6.630 10 ⁻⁷	D_{20}
			2.113 10⁻⁵	-1.825 10 ⁻⁶	-1.227 10 ⁻⁵	3.370 10 ⁻⁶	-7.132 10 ⁻⁷	-1.083 10 ⁻⁵	5.253 10 ⁻⁷	-1.258 10 ⁻⁶	1.510 10 ⁻⁸	4.302 10 ⁻⁶	-2.732 10 ⁻⁷	2.679 10 ⁻⁸	6.279 10 ⁻⁶	D_{21}
				1.300 10⁻⁶	9.889 10 ⁻⁷	-2.554 10 ⁻⁶	1.995 10 ⁻⁸	9.204 10 ⁻⁷	-5.563 10 ⁻⁹	1.069 10 ⁻⁶	-1.916 10 ⁻⁸	-4.099 10 ⁻⁷	6.334 10 ⁻⁸	1.322 10 ⁻⁷	-4.628 10 ⁻⁷	D_{22}
					2.277 10⁻⁵	-9.743 10 ⁻⁷	2.370 10 ⁻⁷	1.394 10 ⁻⁵	-3.404 10 ⁻⁷	2.707 10 ⁻⁷	-1.646 10 ⁻⁸	-1.060 10 ⁻⁵	1.253 10 ⁻⁷	-1.772 10 ⁻⁷	3.350 10 ⁻⁶	D_{23}
						1.133 10⁻⁵	-6.237 10 ⁻⁸	-1.255 10 ⁻⁶	2.023 10 ⁻⁸	-5.334 10 ⁻⁶	-1.184 10 ⁻⁸	3.855 10 ⁻⁷	3.621 10 ⁻⁷	1.022 10 ⁻⁷	1.135 10 ⁻⁶	D_{24}
							3.368 10⁻⁸	2.661 10 ⁻⁷	-2.751 10 ⁻⁸	2.146 10 ⁻⁸	4.231 10 ⁻¹⁰	-3.296 10 ⁻⁸	1.090 10 ⁻⁸	-3.034 10 ⁻⁹	-1.799 10 ⁻⁷	D_{25}
								1.191 10⁻⁵	-2.956 10 ⁻⁷	4.227 10 ⁻⁷	-1.220 10 ⁻⁸	-7.344 10 ⁻⁶	1.109 10 ⁻⁷	-5.526 10 ⁻⁸	-1.226 10 ⁻⁶	D_{26}
									3.134 10⁻⁸	-4.154 10 ⁻⁹	-3.216 10 ⁻¹⁰	8.319 10 ⁻⁸	-4.626 10 ⁻⁹	-1.296 10 ⁻⁹	-3.546 10 ⁻⁸	D_{27}
										2.570 10⁻⁶	8.533 10 ⁻⁹	-1.049 10 ⁻⁷	-2.293 10 ⁻⁷	-9.246 10 ⁻⁸	-4.232 10 ⁻⁷	D_{28}
											7.426 10⁻¹⁰	7.205 10 ⁻⁹	-4.901 10 ⁻⁹	-5.290 10 ⁻⁹	-2.086 10 ⁻⁹	D_{29}
												6.324 10⁻⁶	-7.434 10 ⁻⁸	3.686 10 ⁻⁸	-1.926 10 ⁻⁶	D_{30}
													8.812 10⁻⁷	4.835 10 ⁻⁸	-1.577 10 ⁻⁷	D_{31}
														6.980 10⁻⁷	-4.126 10 ⁻⁷	D_{32}
															3.215 10⁻⁵	D_{33}

TABLA 5.12. (Continuación) Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	FRONTERA $h_1(y,z)$	FRONTERA $h_2(y,z)$	FRONTERAS LATERALES	FRONTERA INFERIOR
$p_1 = -0.708 \pm 0.013 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{11} = -3.975 \pm 0.008 \text{ km}$	$p_{21} = 4.00 \pm 0.012 \text{ km}$	$p_{31} = -6.001 \pm 0.002 \text{ km}$	$p_{33} = 2.683 \pm 0.015 \text{ km}$
$p_2 = 0.106 \pm 0.003 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{12} = -0.002 \pm 0.003 \text{ km}^{-1}$	$p_{22} = 0.014 \pm 0.003 \text{ km}^{-1}$	$p_{32} = 6.007 \pm 0.002 \text{ km}$	
$p_3 = -0.0023 \pm 0.0013 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{13} = -0.133 \pm 0.012 \text{ km}^{-1}$	$p_{23} = -0.006 \pm 0.012 \text{ km}^{-1}$		
$p_4 = 0.236 \pm 0.013 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{14} = -0.000 \pm 0.009 \text{ km}^{-2}$	$p_{24} = -0.010 \pm 0.009 \text{ km}^{-2}$		
$p_5 = -0.0040 \pm 0.0002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{15} = 0.0202 \pm 0.0004 \text{ km}^{-2}$	$p_{25} = -0.0698 \pm 0.0005 \text{ km}^{-2}$		
$p_6 = 0.0148 \pm 0.0017 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{16} = 0.409 \pm 0.011 \text{ km}^{-2}$	$p_{26} = -0.144 \pm 0.009 \text{ km}^{-2}$		
$p_7 = -0.077 \pm 0.005 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{17} = 0.0034 \pm 0.0008 \text{ km}^{-3}$	$p_{27} = 0.0053 \pm 0.0005 \text{ km}^{-3}$		
$p_8 = 0.0076 \pm 0.0008 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{18} = 0.000 \pm 0.005 \text{ km}^{-3}$	$p_{28} = 0.006 \pm 0.004 \text{ km}^{-3}$		
$p_9 = -0.0308 \pm 0.0002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{19} = -0.00300 \pm 0.00004 \text{ km}^{-3}$	$p_{29} = 0.0008 \pm 0.0001 \text{ km}^{-3}$		
$p_{10} = -0.158 \pm 0.009 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{20} = -0.022 \pm 0.009 \text{ km}^{-3}$	$p_{30} = 0.057 \pm 0.007 \text{ km}^{-3}$		

TABLA 5.13. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

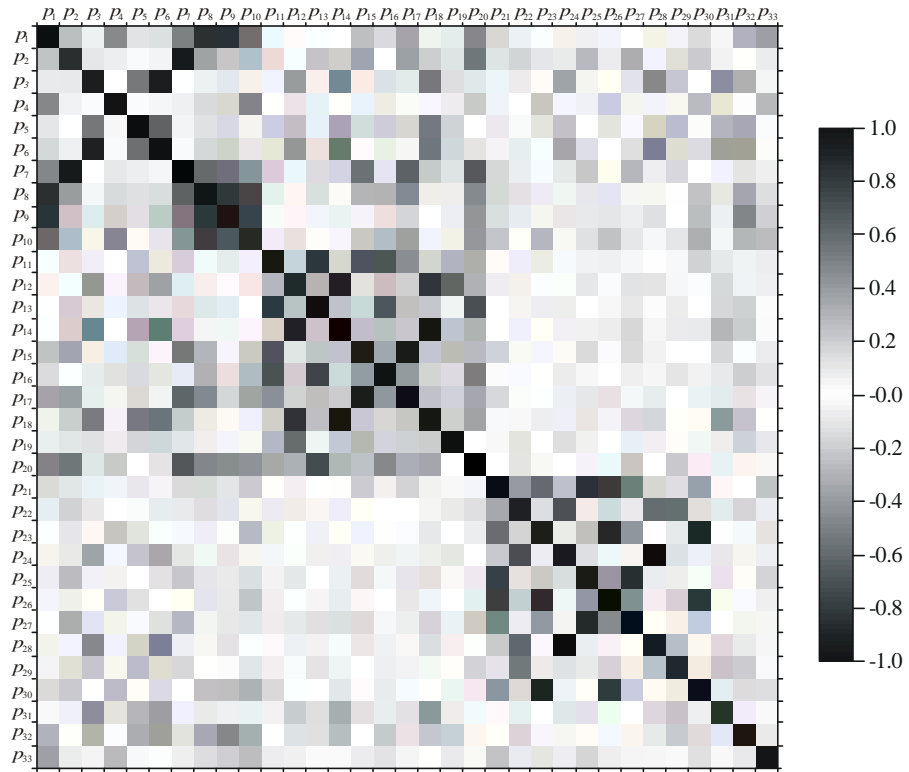


FIGURA 5.38. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

D_1	D_5	D_2	D_4	D_6	D_3	D_7	D_8	D_0	D_{10}	D_{11}	D_{13}	D_{12}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	D_{17}	
1.000 10⁺⁰	-2.516 10 ⁻¹	-6.003 10 ⁻²	-4.871 10 ⁻¹	-1.085 10 ⁻¹	1.463 10 ⁻¹	5.050 10 ⁻¹	-8.784 10 ⁻¹	-8.671 10 ⁻¹	-5.583 10 ⁻¹	-3.003 10 ⁻²	-3.392 10 ⁻³	1.483 10 ⁻²	-2.827 10 ⁻²	2.006 10 ⁻¹	1.455 10 ⁻¹	-3.298 10 ⁻¹	D_1
	1.000 10⁺⁰	-6.946 10 ⁻³	9.501 10 ⁻²	3.719 10 ⁻²	-2.324 10 ⁻²	-9.153 10 ⁻¹	3.584 10 ⁻¹	2.273 10 ⁻¹	2.299 10 ⁻¹	1.332 10 ⁻¹	-5.222 10 ⁻²	1.830 10 ⁻¹	1.356 10 ⁻¹	-4.189 10 ⁻¹	3.442 10 ⁻²	4.590 10 ⁻¹	D_5
		1.000 10⁺⁰	-2.499 10 ⁻²	5.155 10 ⁻¹	-9.677 10 ⁻¹	-5.194 10 ⁻³	5.390 10 ⁻²	1.276 10 ⁻¹	6.111 10 ⁻²	4.369 10 ⁻²	3.663 10 ⁻¹	-7.676 10 ⁻²	-4.835 10 ⁻¹	3.914 10 ⁻²	-8.089 10 ⁻²	-2.209 10 ⁻²	D_2
			1.000 10⁺⁰	2.427 10 ⁻²	5.517 10 ⁻³	-1.042 10 ⁻¹	1.418 10 ⁻¹	1.390 10 ⁻¹	-4.262 10 ⁻¹	7.132 10 ⁻²	2.447 10 ⁻²	-2.650 10 ⁻²	1.777 10 ⁻²	-7.995 10 ⁻²	1.215 10 ⁻¹	8.494 10 ⁻²	D_4
				1.000 10⁺⁰	-6.240 10 ⁻¹	-7.552 10 ⁻²	1.128 10 ⁻¹	1.483 10 ⁻¹	8.483 10 ⁻²	1.416 10 ⁻¹	2.700 10 ⁻¹	-1.415 10 ⁻¹	-3.221 10 ⁻¹	-1.114 10 ⁻¹	-1.652 10 ⁻¹	1.538 10 ⁻¹	D_6
					1.000 10⁺⁰	6.133 10 ⁻²	-1.398 10 ⁻¹	-2.241 10 ⁻¹	-1.312 10 ⁻¹	-7.052 10 ⁻²	-4.412 10 ⁻¹	9.505 10 ⁻²	5.669 10 ⁻¹	-1.397 10 ⁻²	1.196 10 ⁻¹	-1.888 10 ⁻²	D_3
						1.000 10⁺⁰	-6.411 10 ⁻¹	-4.869 10 ⁻¹	-4.703 10 ⁻¹	-1.414 10 ⁻¹	9.708 10 ⁻²	-1.244 10 ⁻¹	-1.728 10 ⁻¹	5.158 10 ⁻¹	7.796 10 ⁻²	-6.228 10 ⁻¹	D_7
							1.000 10⁺⁰	8.659 10 ⁻¹	7.390 10 ⁻¹	7.993 10 ⁻²	-3.437 10 ⁻²	-1.238 10 ⁻¹	5.376 10 ⁻²	-2.826 10 ⁻¹	-3.125 10 ⁻¹	4.657 10 ⁻¹	D_8
								1.000 10⁺⁰	7.104 10 ⁻¹	-7.632 10 ⁻²	3.323 10 ⁻²	5.874 10 ⁻²	-3.687 10 ⁻²	-4.676 10 ⁻²	-1.163 10 ⁻¹	1.622 10 ⁻¹	D_0
									1.000 10⁺⁰	-1.849 10 ⁻³	-4.246 10 ⁻²	5.434 10 ⁻²	5.091 10 ⁻²	-2.300 10 ⁻¹	-2.593 10 ⁻¹	3.504 10 ⁻¹	D_{10}
										1.000 10⁺⁰	2.531 10 ⁻¹	-7.811 10 ⁻¹	-1.687 10 ⁻¹	-6.205 10 ⁻¹	-7.317 10 ⁻¹	4.837 10 ⁻¹	D_{11}
											1.000 10⁺⁰	-2.535 10 ⁻¹	-9.134 10 ⁻¹	1.415 10 ⁻¹	-2.167 10 ⁻¹	-1.750 10 ⁻¹	D_{13}
												1.000 10⁺⁰	2.500 10 ⁻¹	2.364 10 ⁻¹	7.137 10 ⁻¹	-2.442 10 ⁻¹	D_{12}
													1.000 10⁺⁰	-2.487 10 ⁻¹	1.993 10 ⁻¹	2.449 10 ⁻¹	D_{14}
														1.000 10⁺⁰	3.872 10 ⁻¹	-9.199 10 ⁻¹	D_{15}
															1.000 10⁺⁰	-4.146 10 ⁻¹	D_{16}
																1.000 10⁺⁰	D_{17}

TABLA 5.14. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

D_{18}	D_{19}	D_{20}	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}	D_{27}	D_{28}	D_{29}	D_{30}	D_{31}	D_{32}	D_{33}	
7.056 10 ⁻²	9.343 10 ⁻²	5.043 10 ⁻¹	-1.111 10 ⁻¹	8.279 10 ⁻²	-1.429 10 ⁻²	-6.402 10 ⁻²	7.778 10 ⁻²	5.914 10 ⁻²	-1.962 10 ⁻²	5.246 10 ⁻²	-1.449 10 ⁻²	-1.937 10 ⁻¹	-3.230 10 ⁻⁴	-3.062 10 ⁻¹	-3.737 10 ⁻¹	D_{11}
-1.598 10 ⁻¹	-1.345 10 ⁻¹	-5.409 10 ⁻¹	1.781 10 ⁻¹	-1.499 10 ⁻¹	1.060 10 ⁻¹	8.071 10 ⁻²	-2.460 10 ⁻¹	3.050 10 ⁻²	2.905 10 ⁻¹	-7.073 10 ⁻²	1.137 10 ⁻¹	-1.941 10 ⁻¹	3.170 10 ⁻²	-6.419 10 ⁻³	-8.268 10 ⁻²	D_{12}
5.455 10 ⁻¹	-1.117 10 ⁻¹	7.073 10 ⁻²	-5.489 10 ⁻²	-7.148 10 ⁻²	2.689 10 ⁻²	3.746 10 ⁻¹	9.436 10 ⁻²	3.794 10 ⁻²	-1.030 10 ⁻¹	-4.488 10 ⁻¹	-2.249 10 ⁻¹	1.689 10 ⁻²	4.016 10 ⁻¹	3.171 10 ⁻¹	-4.447 10 ⁻²	D_{13}
-3.037 10 ⁻²	-7.739 10 ⁻²	-2.076 10 ⁻¹	-5.375 10 ⁻²	1.203 10 ⁻²	2.729 10 ⁻¹	-5.171 10 ⁻³	1.461 10 ⁻²	1.985 10 ⁻¹	-8.032 10 ⁻²	6.409 10 ⁻³	-1.681 10 ⁻²	-2.578 10 ⁻¹	6.305 10 ⁻²	-9.881 10 ⁻²	2.749 10 ⁻¹	D_{14}
4.746 10 ⁻¹	-1.839 10 ⁻¹	4.335 10 ⁻²	-1.832 10 ⁻²	-1.356 10 ⁻²	5.941 10 ⁻²	2.486 10 ⁻¹	2.354 10 ⁻²	4.925 10 ⁻²	-4.241 10 ⁻²	-2.591 10 ⁻¹	-2.291 10 ⁻¹	-2.994 10 ⁻²	3.305 10 ⁻¹	2.730 10 ⁻¹	2.029 10 ⁻²	D_{15}
-6.483 10 ⁻¹	1.532 10 ⁻¹	-3.520 10 ⁻²	4.376 10 ⁻²	7.049 10 ⁻²	-2.926 10 ⁻²	-3.510 10 ⁻¹	-8.768 10 ⁻²	-3.472 10 ⁻²	1.046 10 ⁻¹	4.259 10 ⁻¹	2.059 10 ⁻¹	-3.399 10 ⁻²	-4.371 10 ⁻¹	-3.656 10 ⁻¹	1.689 10 ⁻²	D_{16}
2.064 10 ⁻¹	1.274 10 ⁻¹	6.779 10 ⁻¹	-1.749 10 ⁻¹	1.502 10 ⁻¹	-2.337 10 ⁻²	-7.773 10 ⁻²	2.170 10 ⁻¹	3.739 10 ⁻²	-2.772 10 ⁻¹	6.377 10 ⁻²	-1.107 10 ⁻¹	2.096 10 ⁻²	-1.941 10 ⁻²	-1.192 10 ⁻¹	7.543 10 ⁻²	D_{17}
-1.010 10 ⁻¹	-6.512 10 ⁻²	-4.658 10 ⁻¹	1.413 10 ⁻¹	-1.120 10 ⁻¹	-2.773 10 ⁻²	8.394 10 ⁻²	-1.075 10 ⁻¹	-6.816 10 ⁻²	3.057 10 ⁻²	-6.825 10 ⁻²	3.229 10 ⁻²	2.508 10 ⁻¹	-4.444 10 ⁻²	3.786 10 ⁻¹	1.424 10 ⁻¹	D_{18}
5.265 10 ⁻³	-4.916 10 ⁻²	-4.744 10 ⁻¹	1.047 10 ⁻¹	-8.231 10 ⁻²	-5.951 10 ⁻²	6.782 10 ⁻²	-9.157 10 ⁻²	-9.693 10 ⁻²	1.170 10 ⁻¹	-6.283 10 ⁻²	2.274 10 ⁻²	2.721 10 ⁻¹	-2.911 10 ⁻²	4.954 10 ⁻¹	1.912 10 ⁻¹	D_{19}
-8.129 10 ⁻²	-4.663 10 ⁻²	-3.875 10 ⁻¹	2.100 10 ⁻¹	-1.170 10 ⁻¹	-2.214 10 ⁻¹	7.828 10 ⁻²	-1.318 10 ⁻¹	-2.606 10 ⁻¹	1.145 10 ⁻¹	-6.439 10 ⁻²	4.505 10 ⁻²	3.858 10 ⁻¹	-5.131 10 ⁻²	3.324 10 ⁻¹	2.651 10 ⁻¹	D_{20}
1.510 10 ⁻¹	-2.823 10 ⁻¹	4.021 10 ⁻¹	5.131 10 ⁻²	6.456 10 ⁻³	4.182 10 ⁻²	3.565 10 ⁻²	-7.430 10 ⁻²	1.542 10 ⁻²	4.533 10 ⁻²	-4.144 10 ⁻²	-5.159 10 ⁻²	-8.193 10 ⁻²	-7.006 10 ⁻²	-3.879 10 ⁻³	9.235 10 ⁻²	D_{21}
8.524 10 ⁻¹	-5.694 10 ⁻¹	2.937 10 ⁻¹	-1.279 10 ⁻²	-6.499 10 ⁻²	4.547 10 ⁻²	6.488 10 ⁻²	5.253 10 ⁻²	4.202 10 ⁻²	-1.033 10 ⁻¹	-9.138 10 ⁻²	3.999 10 ⁻²	-3.656 10 ⁻²	2.326 10 ⁻¹	8.657 10 ⁻²	5.582 10 ⁻²	D_{22}
-2.340 10 ⁻¹	1.081 10 ⁻¹	-6.324 10 ⁻¹	-9.722 10 ⁻³	-5.321 10 ⁻²	-5.800 10 ⁻²	-2.940 10 ⁻²	7.076 10 ⁻³	-1.995 10 ⁻²	8.251 10 ⁻²	3.880 10 ⁻²	1.117 10 ⁻¹	-3.659 10 ⁻²	1.072 10 ⁻¹	-1.448 10 ⁻¹	1.965 10 ⁻²	D_{23}
-9.736 10 ⁻¹	2.380 10 ⁻¹	-3.385 10 ⁻¹	3.741 10 ⁻²	3.897 10 ⁻²	-4.111 10 ⁻²	-6.711 10 ⁻²	-8.851 10 ⁻²	-5.212 10 ⁻²	1.548 10 ⁻¹	1.064 10 ⁻¹	-6.236 10 ⁻³	1.488 10 ⁻²	-3.664 10 ⁻¹	-2.259 10 ⁻¹	-1.713 10 ⁻²	D_{24}
2.382 10 ⁻¹	2.497 10 ⁻¹	2.747 10 ⁻¹	-9.932 10 ⁻²	3.864 10 ⁻²	-1.365 10 ⁻³	-4.872 10 ⁻²	1.188 10 ⁻¹	4.340 10 ⁻²	-1.234 10 ⁻¹	4.057 10 ⁻²	9.295 10 ⁻³	2.901 10 ⁻²	1.170 10 ⁻¹	3.269 10 ⁻²	-6.994 10 ⁻²	D_{25}
-1.779 10 ⁻¹	1.442 10 ⁻¹	-5.143 10 ⁻¹	-3.903 10 ⁻²	-2.202 10 ⁻²	-2.083 10 ⁻²	-4.530 10 ⁻²	3.802 10 ⁻²	-1.254 10 ⁻²	5.604 10 ⁻²	5.123 10 ⁻²	9.021 10 ⁻²	-4.155 10 ⁻²	1.115 10 ⁻¹	-1.933 10 ⁻¹	-1.113 10 ⁻¹	D_{26}
-2.376 10 ⁻¹	-1.590 10 ⁻¹	-3.685 10 ⁻¹	1.195 10 ⁻¹	-4.934 10 ⁻²	-9.718 10 ⁻³	5.914 10 ⁻²	-1.238 10 ⁻¹	-5.244 10 ⁻²	9.192 10 ⁻²	-4.789 10 ⁻²	-1.281 10 ⁻²	2.749 10 ⁻²	-1.248 10 ⁻¹	8.119 10 ⁻²	4.802 10 ⁻²	D_{27}
1.000 10⁺⁰	-2.081 10 ⁻¹	3.516 10 ⁻¹	-5.326 10 ⁻²	-1.706 10 ⁻²	5.004 10 ⁻²	8.681 10 ⁻²	1.015 10 ⁻¹	6.423 10 ⁻²	-1.667 10 ⁻¹	-1.310 10 ⁻¹	-4.102 10 ⁻²	-3.017 10 ⁻²	4.282 10 ⁻¹	2.674 10 ⁻¹	3.796 10 ⁻³	D_{28}
	1.000 10⁺⁰	2.568 10 ⁻³	-3.220 10 ⁻²	8.952 10 ⁻²	-2.851 10 ⁻²	-7.945 10 ⁻²	2.253 10 ⁻²	-1.916 10 ⁻³	-1.991 10 ⁻²	8.024 10 ⁻²	-5.083 10 ⁻²	3.938 10 ⁻²	9.141 10 ⁻²	1.561 10 ⁻¹	-9.032 10 ⁻²	D_{29}
		1.000 10⁺⁰	-9.506 10 ⁻²	1.232 10 ⁻¹	2.901 10 ⁻²	-1.731 10 ⁻²	9.168 10 ⁻²	7.706 10 ⁻²	-1.728 10 ⁻¹	-3.075 10 ⁻³	-1.394 10 ⁻¹	-7.321 10 ⁻²	-6.517 10 ⁻²	-1.128 10 ⁻²	-3.275 10 ⁻²	D_{30}
			1.000 10⁺⁰	-3.481 10 ⁻¹	-5.594 10 ⁻¹	2.178 10 ⁻¹	-8.454 10 ⁻¹	-6.825 10 ⁻¹	6.455 10 ⁻¹	-1.707 10 ⁻¹	1.205 10 ⁻¹	3.721 10 ⁻¹	-6.332 10 ⁻²	6.974 10 ⁻³	2.409 10 ⁻¹	D_{31}
				1.000 10⁺⁰	1.818 10 ⁻¹	-6.653 10 ⁻¹	9.536 10 ⁻²	2.339 10 ⁻¹	-2.756 10 ⁻²	5.848 10 ⁻¹	-6.167 10 ⁻¹	-1.430 10 ⁻¹	5.917 10 ⁻²	1.388 10 ⁻¹	-7.158 10 ⁻²	D_{32}
					1.000 10⁺⁰	-6.066 10 ⁻²	2.707 10 ⁻¹	8.467 10 ⁻¹	-4.030 10 ⁻¹	3.538 10 ⁻²	-1.266 10 ⁻¹	-8.833 10 ⁻¹	2.797 10 ⁻²	-4.445 10 ⁻²	1.238 10 ⁻¹	D_{33}
						1.000 10⁺⁰	-1.010 10 ⁻¹	-1.081 10 ⁻¹	3.394 10 ⁻²	-9.883 10 ⁻¹	-1.291 10 ⁻¹	4.553 10 ⁻²	1.146 10 ⁻¹	3.635 10 ⁻²	5.948 10 ⁻²	D_{34}
							1.000 10⁺⁰	4.202 10 ⁻¹	-8.469 10 ⁻¹	7.295 10 ⁻²	8.460 10 ⁻²	-7.142 10 ⁻²	6.325 10 ⁻²	-1.979 10 ⁻²	-1.728 10 ⁻¹	D_{35}
								1.000 10⁺⁰	-4.840 10 ⁻¹	7.641 10 ⁻²	-1.298 10 ⁻¹	-8.464 10 ⁻¹	3.423 10 ⁻²	-1.917 10 ⁻²	-6.268 10 ⁻²	D_{36}
									1.000 10⁺⁰	-1.464 10 ⁻²	-6.667 10 ⁻²	1.869 10 ⁻¹	-2.784 10 ⁻²	-8.760 10 ⁻³	-3.533 10 ⁻²	D_{37}
										1.000 10⁺⁰	1.953 10 ⁻¹	-2.601 10 ⁻²	-1.524 10 ⁻¹	-6.903 10 ⁻²	-4.655 10 ⁻²	D_{38}
											1.000 10⁺⁰	1.051 10 ⁻¹	-1.916 10 ⁻¹	-2.323 10 ⁻¹	-1.350 10 ⁻²	D_{39}
												1.000 10⁺⁰	-3.149 10 ⁻²	1.754 10 ⁻¹	-1.351 10 ⁻¹	D_{40}
													1.000 10⁺⁰	6.165 10 ⁻²	-2.962 10 ⁻²	D_{41}
														1.000 10⁺⁰	-8.710 10 ⁻²	D_{42}
															1.000 10⁺⁰	D_{43}

TABLA 5.14. (Continuación) Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

5.2. FUENTE ANOMALA LIMITADA SUPERIOR E INFERIORMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LAS VARIABLES X,Y

Para abordar este caso vamos a suponer que el techo y la base del volumen V de la fuente están definidos como dos funciones continuas $l_1(x,y)$ y $l_2(x,y)$, y que las fronteras laterales son los planos x_1, x_2, y_1 e y_2 . La expresión matemática que describe la geometría general de este tipo de fuentes viene dada por la ecuación (3.29) y su representación gráfica se puede ver en la figura 3.11.

El contraste de densidad que vamos a suponer para la fuente anómala, en su forma más general, viene dado por la función continua de la expresión (3.43), que depende de las variables x, y y z . Para tratar el problema de inversión con este tipo de fuentes, vamos a considerar el caso particular en el que las funciones continuas $A_7(x,y)$, $B_7(x,y)$ y $C_7(x,y)$, de dicha expresión, son los polinomios:

$$\begin{aligned} A_7(x,y) &= p_1 + p_2 x + p_3 y + p_5 xy + p_8 x^2 + p_9 y^2 \\ B_7(x,y) &= p_4 + p_6 y + p_7 x \\ C_7(x,y) &= p_{10} \end{aligned} \quad (5.8)$$

cuyos coeficientes p_j , con $j = 1, \dots, 10$, son números reales. De esta forma, la función que describe el contraste de densidad viene dado por el polinomio (5.2).

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (3.46), que proporciona el problema directo correspondiente, obtenemos la ecuación:

$$g(x_0, y_0, z_0) = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{-Dr(x,y,z)}{r} + [p_4 + p_6 y + p_7 x + 2z_0 p_{10}] \ln[(z - z_0) + r] + 2p_{10} r \right\}_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} \quad (5.9)$$

donde $Dr(x,y,z)$ es el polinomio (5.2) y r viene dado por la expresión (1.2). La ecuación anterior nos proporciona el efecto gravimétrico que produce una fuente cuya geometría general viene descrita por la expresión (3.29) y su contraste de densidad es la función polinómica (5.2).

Para este caso, las funciones incógnitas del problema de inversión correspondiente son el contraste de densidad $Dr(x,y,z)$, la frontera inferior del cuerpo $l_2(x,y)$ y las fronteras laterales x_1, x_2, y_1 e y_2 . Como es usual, vamos a considerar conocida la función $l_1(x,y)$ que describe la topografía del lugar donde se encuentra el observador.

Al igual que hicimos con el contraste de densidad, vamos a considerar la frontera $l_2(x,y)$ como una función polinómica, eligiendo para ello el polinomio:

$$l_2(x, y) = p_{11} + p_{12}x + p_{13}y + p_{14}xy + p_{15}x^2 + p_{16}y^2 + p_{17}x^2y + p_{18}xy^2 + p_{19}x^3 + p_{20}y^3 \quad (5.10)$$

donde los coeficientes p_j , con $j = 11, \dots, 20$, son números reales. Para homogeneizar la notación del problema, denotaremos las funciones que describen las fronteras laterales planas por los parámetros: $x_1 = p_{21}$, $x_2 = p_{22}$, $y_1 = p_{23}$ e $y_2 = p_{24}$. Con esto, ya se puede formar el vector incógnita del problema cuyas componentes son los parámetros del contraste de densidad y las fronteras de la fuente:

$$\mathbf{p} = \{p_j\} \quad j = 1, \dots, 24 \quad (5.11)$$

De esta manera, el vector de parámetros \mathbf{p} es un vector euclídeo de dimensión $N = 24$.

En este caso la relación entre los parámetros del modelo y los datos observados no es lineal, por lo que se utilizará el método iterativo de Marquardt-Levenberg para calcular la solución del problema de inversión. Dicho problema se plantea mediante el sistema de ecuaciones (4.7), donde el jacobiano \mathbf{J} es una matriz de dimensiones $M \times 24$ cuyas componentes se calculan derivando la expresión (5.9) con respecto a cada uno de los parámetros que forman el vector \mathbf{p} y para cada una de las M estaciones donde se registran los datos. Las expresiones matemáticas de estas derivadas se presentan en el Apéndice C.

Como es usual, para calcular la solución del problema iterativo partimos de un modelo inicial conocido, descrito por las componentes del vector:

$$\mathbf{p}^0 = \{p_j^0\} \quad j = 1, \dots, 24 \quad (5.12)$$

A continuación se presentan dos ejemplos teóricos para ilustrar el funcionamiento del método para este tipo de fuentes. En uno de estos ejemplos se supone que los datos de gravedad utilizados se encuentran contaminados por errores experimentales.

5.2.1. Ejemplo teórico con datos que no presentan errores numéricos

Como ejemplo para este caso se ha considerado una fuente cuyo contraste de densidad viene descrito por el polinomio de segundo grado $\mathbf{Dr}(x, y, z) = -0.3 - 0.05x + 0.01y + 0.09z - 0.002xy - 0.003yz - 0.004xz - 0.01x^2 + 0.03y^2 + 0.01z^2$, la frontera superior viene representada por un polinomio de tercer grado $l_1(x, y) = -0.1 - 0.02x + 0.01y - 0.002xy - 0.001x^2 + 0.005y^2 - 0.003x^2y + 0.001xy^2 - 0.007x^3 - 0.002y^3$, la cual coincide con la superficie donde se encuentra ubicado el observador, su frontera inferior viene descrita por el polinomio, también de tercer grado,

$l_2(x, y) = 4 + 0.03x - 0.01y + 0.05xy + 0.001x^2 + 0.003y^2 - 0.003x^2y + 0.008xy^2 + 0.005x^3 - 0.001y^3$ y sus fronteras laterales son las funciones constantes $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $y_1 = -6$ e $y_2 = 6$. La geometría correspondiente a este modelo se puede ver en la figura 3.12 y la forma de su contraste de densidad, junto con la anomalía gravimétrica que produce, se puede ver en la figura 3.15.

Para calcular el problema de inversión de este ejemplo, vamos a suponer que no se conocen ni el contraste de densidad ni las funciones que describen las fronteras inferior y laterales, pero sí se conoce el polinomio $l_1(x, y)$ que se ajusta a la topografía de la zona. También se va a suponer conocida la anomalía producida por el cuerpo anómalo que va a estar distribuida en una malla de dimensiones $20 \times 20 \text{ km}^2$, por lo que vamos a utilizar un total de $M = 400$ datos de gravedad.

Vamos a iniciar el proceso iterativo con un modelo de fuente caracterizado por el contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x, y, z) = -0.1 - 0.02x + 0.04y + 0.05z + 0.001xy - 0.001yz - 0.0009xz - 0.02x^2 + 0.07y^2 - 0.01z^2$ y cuyas fronteras vienen descritas por las funciones $l_2(x, y) = 3 - 0.02x - 0.04y + 0.02xy - 0.002x^2 + 0.005y^2 - 0.01x^2y - 0.007xy^2 + 0.001x^3 - 0.003y^3$, $x_1 = -3.5$, $x_2 = 4.5$, $y_1 = -5$ e $y_2 = 5.5$. Con los coeficientes de estos polinomios podemos formar el vector de parámetros del modelo inicial:

$$(\mathbf{p}^0)^T = (-0.1, -0.02, 0.04, 0.05, 0.001, -0.001, -0.0009, -0.02, 0.07, -0.01, 3, -0.02, -0.04, 0.02, -0.002, 0.005, -0.01, -0.007, 0.001, -0.003, -3.5, 4.5, -5, 5.5) \quad (5.13)$$

que presenta un total de $N = 24$ componentes, haciendo que el problema de inversión sea sobredeterminado.

La estructura geométrica del modelo inicial se puede ver en la figura 5.39 y en la figura 5.40 se puede observar su contraste de densidad y la anomalía gravimétrica que produce. Con este modelo se inicia el método iterativo para calcular una posible solución que explique nuestros datos de gravedad.

La solución al problema se alcanza en la iteración número 17, con un valor del desajuste $q = 1.14 \cdot 10^{-5} \text{ mGal}^2$, calculado mediante la expresión (1.31). La evolución del desajuste a lo largo de todo el proceso se puede ver en la figura 5.41 y el modelo resultante para la fuente anómala se puede ver en la figura 5.42. Si comparamos esta figura con la 3.15 del modelo sintético, podemos ver que ambos modelos de fuente son iguales.

El residual obtenido al comparar los datos de gravedad del problema con la anomalía gravimétrica producida por la fuente anómala de la figura 5.40 se puede ver en la figura 5.43. Como se puede apreciar, este residual presenta valores muy cercanos a cero y sus máximos y mínimos se encuentran distribuidos uniformemente en la zona central de la malla, sobre la posición del cuerpo.

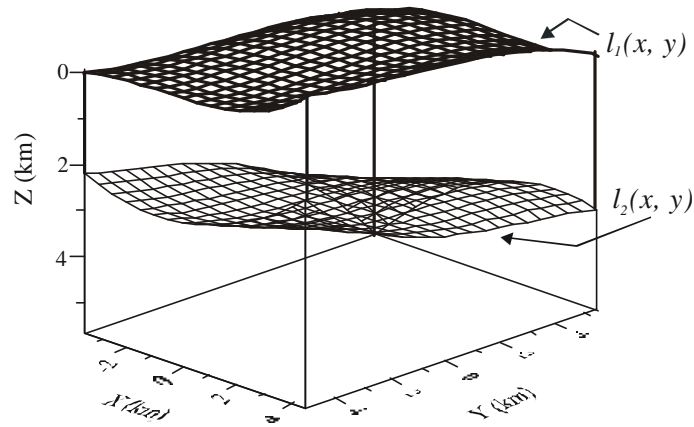


FIGURA 5.39. Geometría del modelo inicial utilizado en el proceso de inversión para el caso de una fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x e y .

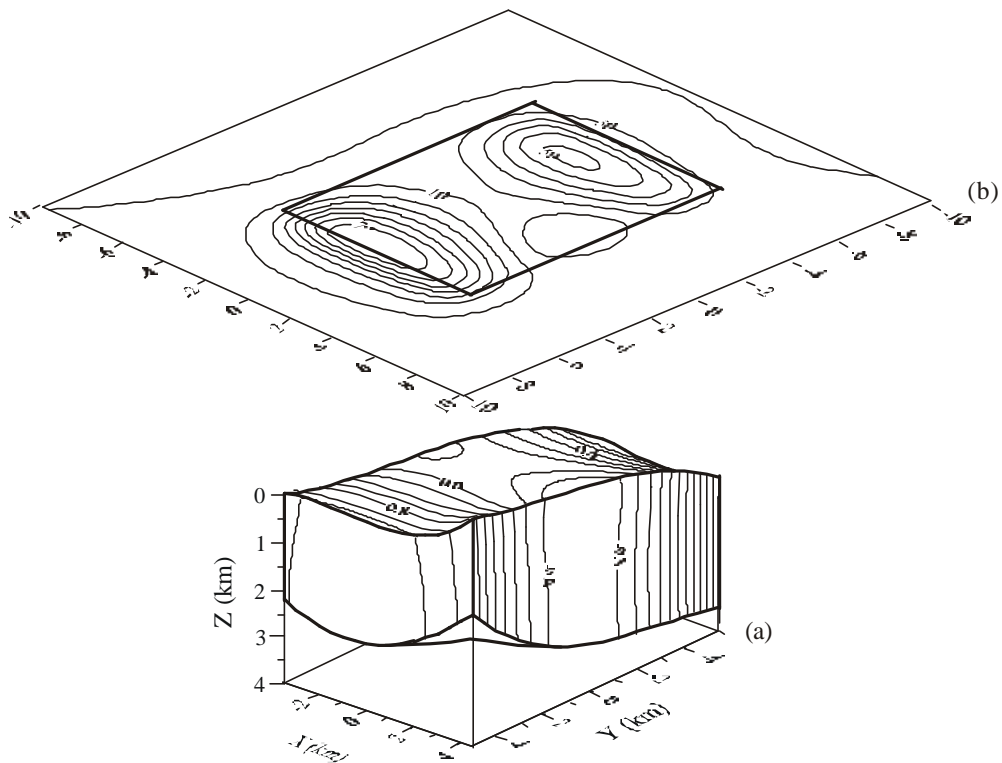


FIGURA 5.40. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x e y . Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a). Las isolíneas de la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

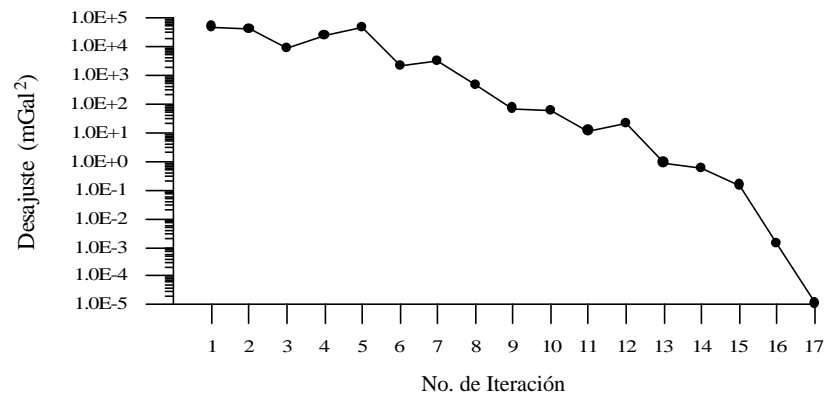
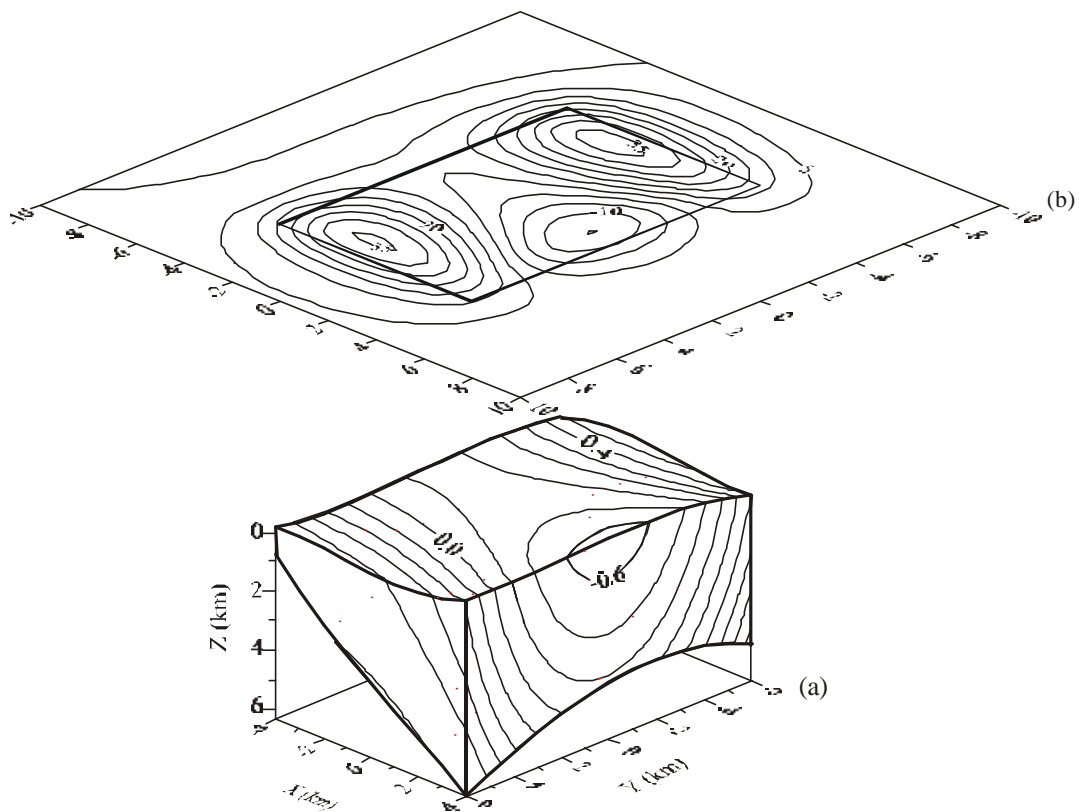
FIGURA 5.41. Evolución del desajuste q .

FIGURA 5.42. (a) Modelo resultante de fuente anómala obtenido en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x e y . Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a). Las isolíneas de la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal . La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

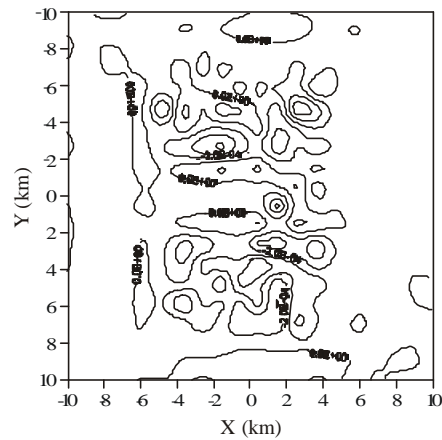


FIGURA 5.43. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad sintéticos y la anomalía gravimétrica del modelo resultante en el proceso de inversión.

En la tabla 5.15 se pueden comparar los parámetros correspondientes al contraste de densidad de los tres modelos involucrados en el proceso de inversión, esto es, el modelo generador de los datos de gravedad, el modelo inicial con el que comienza la inversión y el modelo resultante. Como se puede ver en dicha tabla, las soluciones de los diez parámetros han alcanzado los valores esperados, suponiendo un redondeo a cuatro cifras decimales para su presentación.

La tabla 5.16 nos muestran los valores numéricos de los diez parámetros correspondientes a la frontera inferior del cuerpo anómalo para los tres modelos considerados. En el modelo resultante, todos los parámetros de la fuente alcanzan los valores esperados del modelo sintético. Sólo se desvían ligeramente del modelo sintético los parámetros p_{11} y p_{12} , cuyos errores relativos son 0.02% y 0.7%, respectivamente.

En cuanto a las fronteras laterales, éstas se presentan en la tabla 5.17. Se puede ver que las soluciones de estos cuatro parámetros también alcanzan los valores utilizados en el modelo sintético para generar los datos de gravedad del problema.

DENSIDAD	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
Modelo Inicial	-0.1000	-0.0200	0.0400	0.0500	0.0010	-0.0010	-0.0009	-0.0200	0.0700	-0.0100
Modelo Resultante	-0.3000	-0.0500	0.0100	0.0900	-0.0020	-0.0030	-0.0040	-0.0100	0.0300	0.0100
Modelo Sintético	-0.3000	-0.0500	0.0100	0.0900	-0.0020	-0.0030	-0.0040	-0.0100	0.0300	0.0100

TABLA 5.15. Parámetros del contraste de densidad correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

FRONTERA $l_2(x,y)$	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}
Modelo Inicial	3.0000	-0.0200	-0.0400	0.0200	-0.0020	0.0050	-0.0100	-0.0070	0.0010	-0.0030
Modelo Resultante	4.0007	0.0302	-0.0100	0.0500	0.0010	0.0030	-0.0030	0.0080	0.0050	-0.0010
Modelo Sintético	4.000	0.0300	-0.0100	0.0500	0.0010	0.0030	-0.0030	0.0080	0.0050	-0.0010

TABLA 5.16. Parámetros de la frontera $l_2(x,y)$ de la estructura correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

ESTRUCTURA	FRONTERA x_1	FRONTERA x_2	FRONTERA y_1	FRONTERA y_2
	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
Modelo Inicial	-3.5000	4.5000	-5.0000	5.5000
Modelo Resultante	-4.0000	4.0000	-6.0000	6.0000
Modelo Sintético	-4.0000	4.0000	-6.0000	6.0000

TABLA 5.17. Parámetros de las fronteras x_1 , x_2 , y_1 e y_2 correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

5.2.1.1. Evolución de los parámetros del modelo

En la figura 5.44 se presenta la evolución del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} a lo largo de todo el proceso iterativo, desde el modelo inicial hasta el modelo resultante. Se puede ver que su valor numérico disminuye a cero en la última iteración. Si comparamos la evolución de este factor con la evolución del desajuste q , representada en la figura 5.41, vemos que ambos parámetros tienen comportamientos similares. Esto es debido a que \mathbf{b}^{-1} es función de q de la misma forma que para fuentes anómalas bidimensionales.

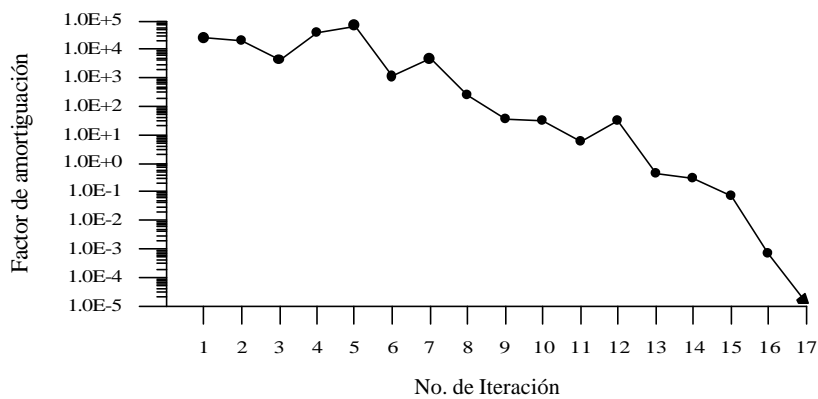


FIGURA 5.44. Evolución del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} .

En la figura 5.45 se presentan las evoluciones de los parámetros que determinan el contraste de densidad a lo largo del proceso de inversión. La mayoría alcanzan la convergencia alrededor de la iteración 13. En la figura 5.46 se muestran las evoluciones de los parámetros de la frontera inferior, en la que se puede ver que sólo algunos de los parámetros presentan convergencia hacia la solución antes de finalizar el proceso.

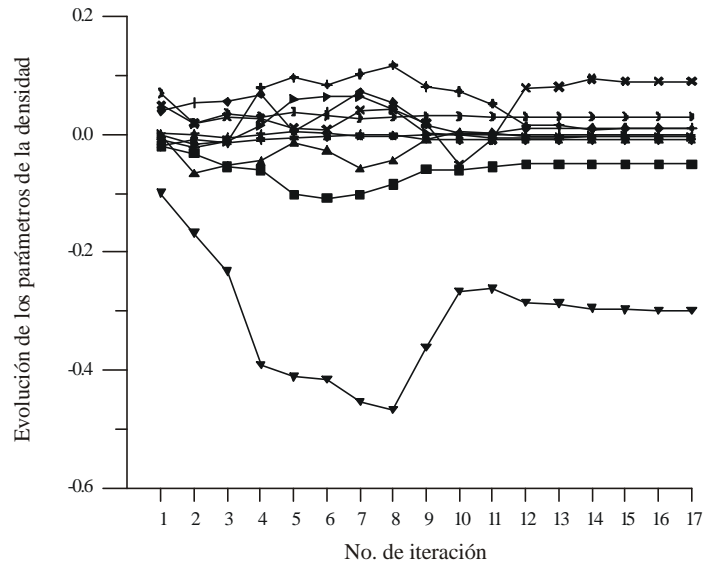


FIGURA 5.45. Evolución de los parámetros del contraste de densidad desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: $p_1(\nabla)$; $p_2(\blacksquare)$; $p_3(\blacklozenge)$; $p_4(\times)$; $p_5(\star)$; $p_6(\blacktriangle)$; $p_7(\blacktriangleright)$; $p_8(\blacksquare)$; $p_9(\bullet)$; $p_{10}(\blacklozenge)$.

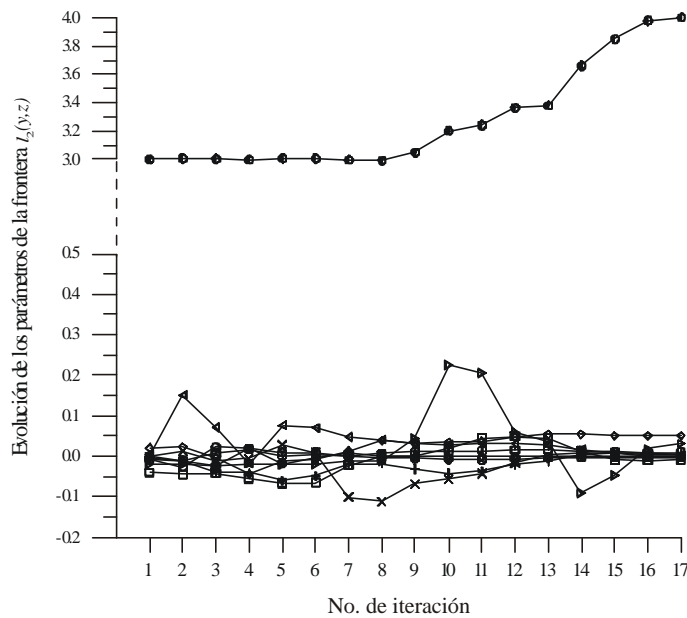


FIGURA 5.46. Evolución de los parámetros de la frontera inferior $l_2(y,z)$ desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: $p_{11}(\bullet)$; $p_{12}(\blacktriangleright)$; $p_{13}(\square)$; $p_{14}(\blacklozenge)$; $p_{15}(\times)$; $p_{16}(\blacktriangleleft)$; $p_{17}(\circ)$; $p_{18}(\bullet)$; $p_{19}(\oplus)$; $p_{20}(\opl�)$.

Las fronteras laterales, cuyas evoluciones se pueden ver en la figura 5.47, alcanzan la convergencia hacia la solución final a partir de la décima iteración, permaneciendo estables hasta el final del proceso.

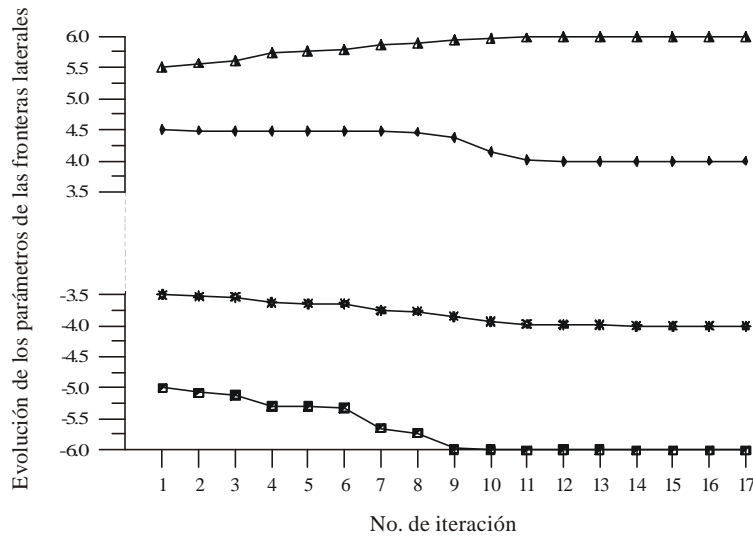


FIGURA 5.47. Evolución de los parámetros de las fronteras laterales desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_{11} (✱); p_{12} (◆); p_{13} (■); p_{14} (▲).

5.2.1.2. Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

A continuación presentamos las gráficas de las columnas de la matriz de sensibilidad de los datos con respecto a los parámetros que describen la fuente anómala. En la figura 5.48 se presentan las diez primeras columnas de dicha matriz, correspondientes a las derivadas del funcional de la ecuación (5.9) con respecto a los coeficientes del contraste de densidad. Como podemos observar, las formas de las gráficas presentadas en esta figura son muy semejantes a las gráficas correspondientes de la figura 5.12, por tanto, la interpretación de la sensibilidad de los datos, con respecto a cada uno de los parámetros del contraste de densidad, es la misma que para el caso de fuentes limitadas lateralmente por funciones continuas de las variables y y z . Si nos fijamos en las intensidades de las diez gráficas de la figura 5.48, podemos ver que dichas intensidades son parecidas o incluso mayores que las de la figura 5.12. También para este caso los datos son más sensibles al parámetro p_9 , que al resto de los parámetros del contraste de densidad, como se observa en la gráfica (i). Esta gráfica presenta dos lóbulos de intensidad positiva de $1677.8 \frac{\text{mGalkm}^3}{\text{g/cm}^3}$ y $1696.8 \frac{\text{mGalkm}^3}{\text{g/cm}^3}$. De la misma

manera, la menor sensibilidad de los datos se puede ver en la gráfica (a), donde se muestra la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_1 , cuya intensidad máxima es de $113.1 \frac{\text{mGal}}{\text{g/cm}^3}$.

En la figura 5.49 se presentan las diez gráficas de las derivadas del funcional del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera inferior del cuerpo anómalo. Como se puede observar en dicha figura, todas las gráficas se caracterizan por la presencia de dos lóbulos principales situados en las esquinas del cuerpo formadas por la frontera lateral x_1 con las fronteras y_1 e y_2 . También se puede apreciar cierta tendencia de las isolíneas de las gráficas a formar un tercer lóbulo en la esquina entre las fronteras x_2 e y_1 . De los dos lóbulos principales, el más intenso es el que está situado más cerca de la frontera y_2 . De las diez gráficas de esta figura, la que muestra la menor sensibilidad de los datos es la gráfica (a), correspondiente al parámetro p_{11} que es el término independiente del polinomio $l_2(x,y)$. Esta gráfica tiene dos lóbulos de intensidades positivas 8.9 mGal km^{-1} y 7.7 mGal km^{-1} . La gráfica que presenta la mayor sensibilidad de los datos de gravedad es la (j), correspondiente al parámetro p_{20} . Este parámetro es el coeficiente que acompaña al término y^3 del polinomio que describe la frontera $l_2(x,y)$. Uno de los lóbulos que aparecen en esta gráfica es positivo, con una intensidad máxima de 846.9 mGal km^2 . El otro lóbulo presenta intensidad negativa, cuyo valor es -674.1 mGal km^2 .

Las ocho gráficas restantes presentan intensidades intermedias. Algunas de ellas tienen ambos lóbulos negativos, como las gráficas (b), (h) e (i) correspondientes a los parámetros p_{12} , p_{18} y p_{19} , respectivamente, que son los coeficientes del polinomio $l_2(x,y)$ donde la potencia de la variable x es impar. Otras presentan ambos lóbulos positivos, como las gráficas (e) y (f) que corresponden a los parámetros p_{15} y p_{16} , los cuales son los coeficientes de los términos cuadráticos de dicho polinomio. El resto de las gráficas corresponden a los parámetros p_{13} , p_{14} y p_{17} , que son los coeficientes de los términos que contienen una potencia impar de la variable y , y presentan dos lóbulos de signos contrarios.

En cuanto a las fronteras laterales, sus gráficas correspondientes se pueden ver en la figura 5.50. La gráfica (a) es la representación de la derivada del funcional del problema con respecto al parámetro p_{21} , correspondiente a la frontera x_1 . Dicha gráfica presenta dos lóbulos de intensidad negativa situados en las esquinas formadas entre la frontera x_1 y las fronteras y_1 e y_2 , cuyas intensidades son -9 mGal km^{-1} y $-12.8 \text{ mGal km}^{-1}$. Esta gráfica también presenta un lóbulo positivo de 0.2 mGal km^{-1} de intensidad, centrado en la posición de la frontera x_1 .

La gráfica (b) de la figura 5.50 representa la sensibilidad de los datos con respecto al parámetro p_{22} que corresponde a la frontera x_2 . La forma de las isolíneas es aproximadamente simétrica a las de la gráfica (a). Esto es, presenta un lóbulo negativo centrado en la posición de la frontera x_2 de $-14.3 \text{ mGal km}^{-1}$ de intensidad, flanqueado por dos lóbulos positivos de menor intensidad situados en las esquinas de dicha frontera. Las intensidades de estos dos lóbulos son 3.1 mGal km^{-1} y 4.9 mGal km^{-1} .

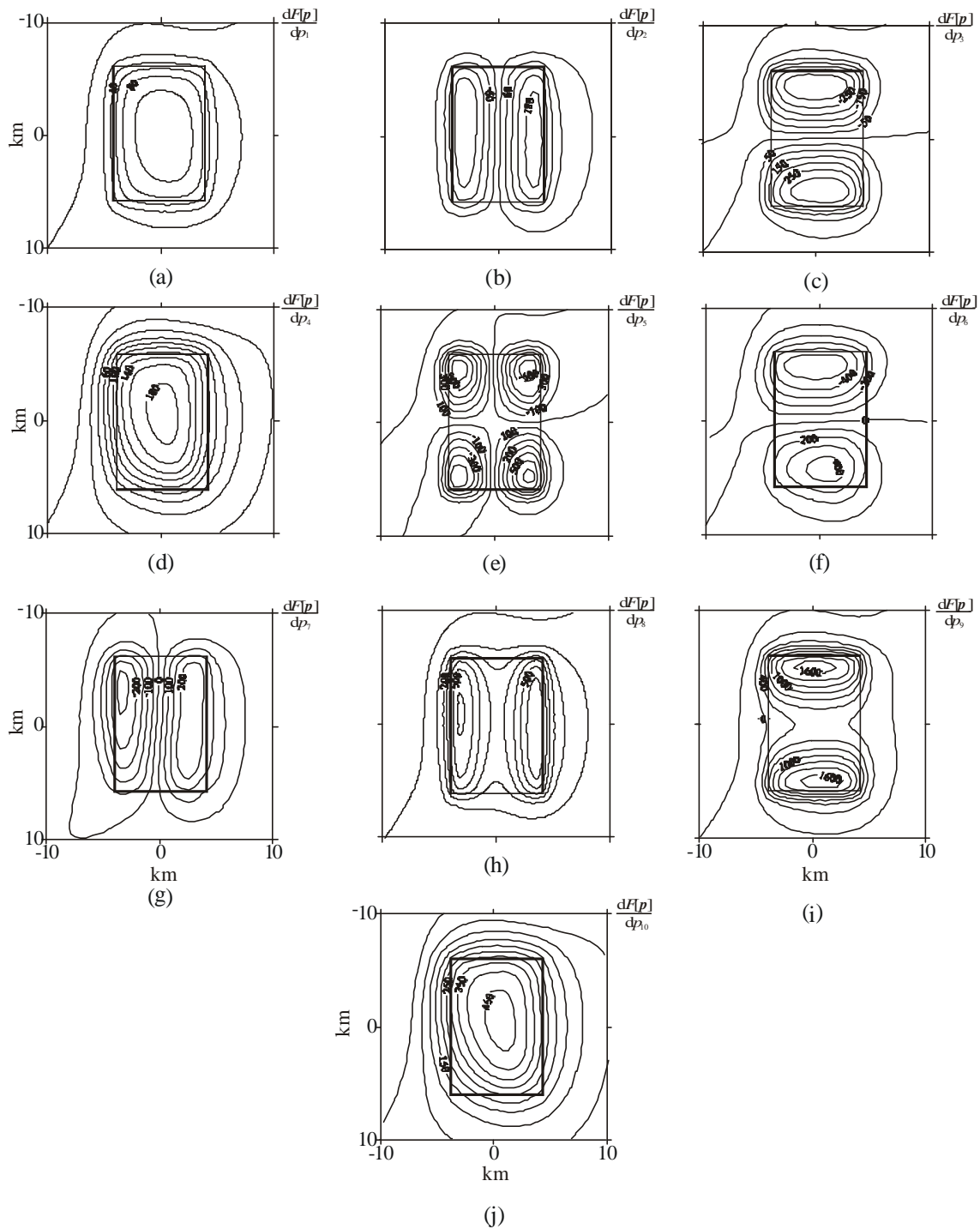


FIGURA 5.48. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[p]$ del problema con respecto a los parámetros que definen el contraste de densidad. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

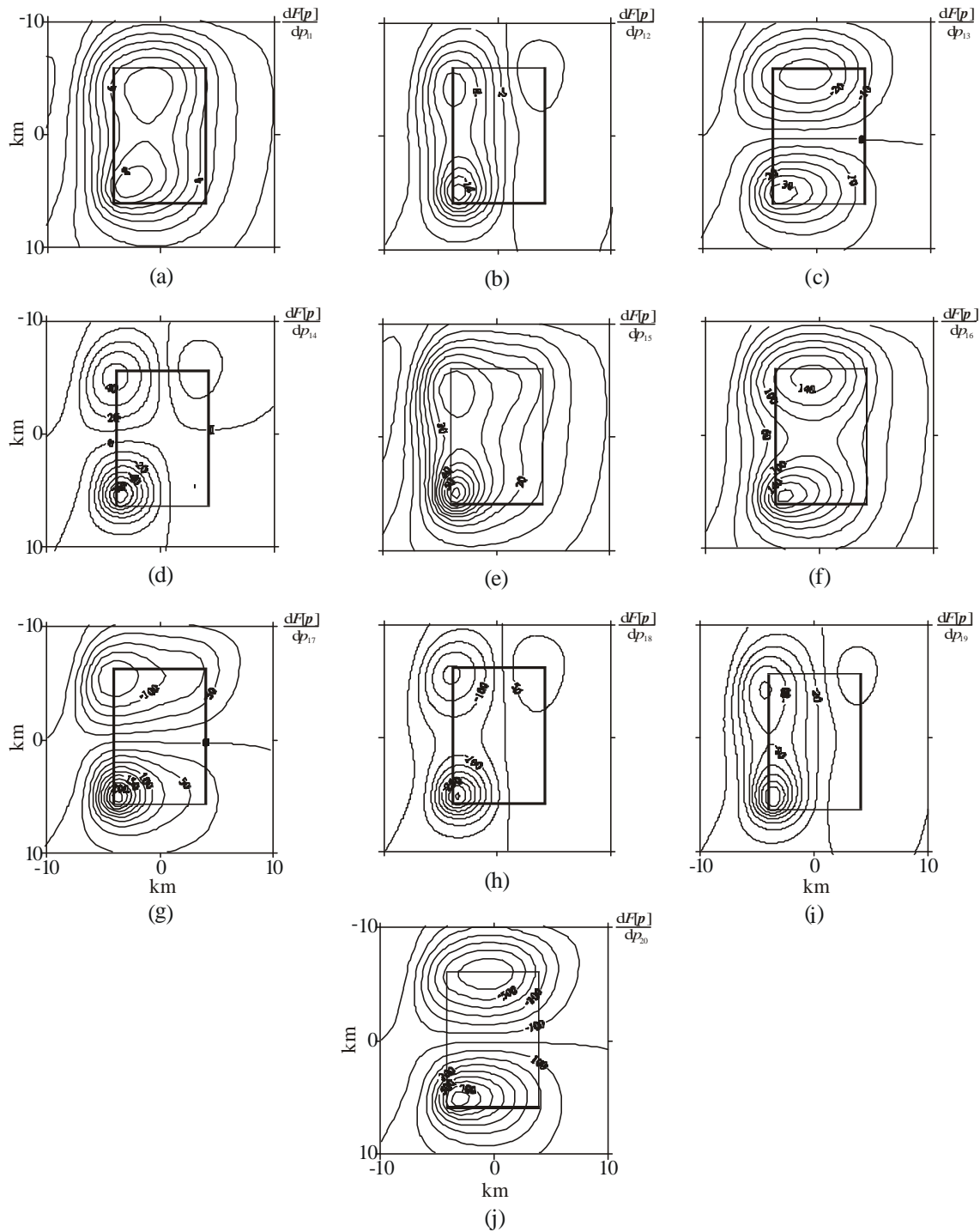


FIGURA 5.49. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera inferior $l_2(x,y)$. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

El efecto que produce la frontera lateral y_1 en los datos se puede ver en la gráfica 5.50(c). En dicha gráfica aparece un mínimo de $-31.7 \text{ mGal km}^{-1}$ de intensidad situado sobre esta frontera. Así mismo, el efecto de la frontera y_2 se puede ver en la gráfica (d), en la que aparece un máximo de $30.9 \text{ mGal km}^{-1}$ de intensidad situado sobre en la posición de dicha frontera con respecto a la malla de datos.

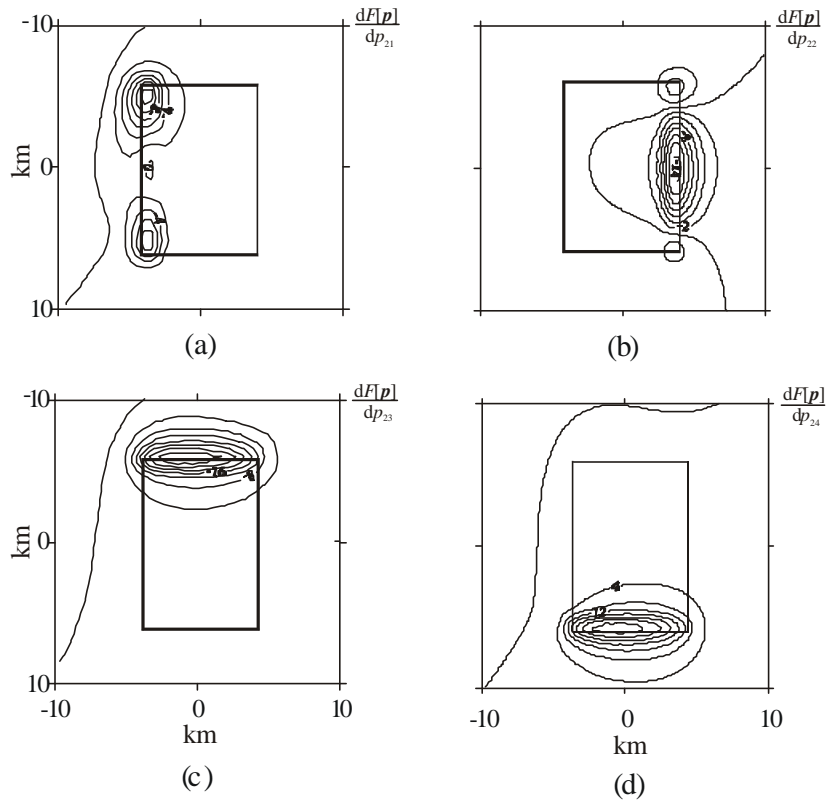


FIGURA 5.50. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[p]$ del problema con respecto a los parámetros que definen las fronteras laterales. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

Una vez estudiada la sensibilidad de los datos de gravedad con respecto a los parámetros que caracterizan la fuente anómala, vamos a calcular la descomposición en valores singulares del jacobiano del problema para ver cuáles son las combinaciones de parámetros mejor resueltas en este caso.

En la figura 5.51 se presentan los valores singulares de J colocados en orden de mayor a menor. Como se puede observar en esta gráfica, se han obtenido veinticuatro valores singulares mayores que cero. Esto indica que el jacobiano es una matriz de rango completo puesto que coincide

con el número de sus columnas $N = 24$. Por ello la existencia y la unicidad de la solución de este problema quedan aseguradas.

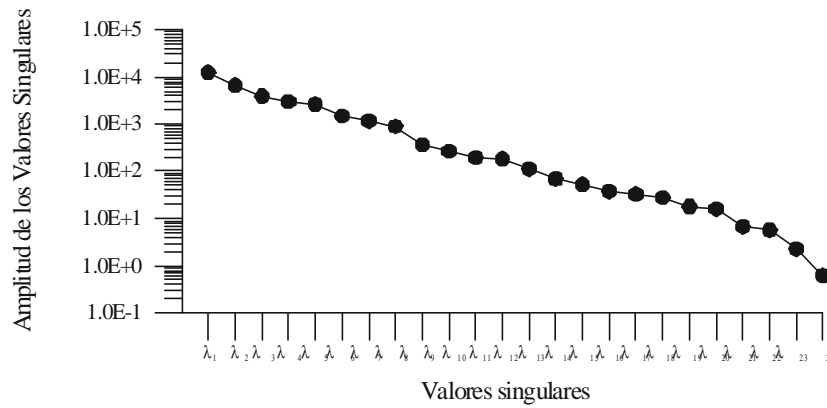


FIGURA 5.51. Valores singulares del jacobiano del problema.

La condición de la matriz J es $k = 1.963 \cdot 10^4$, siendo un valor bastante elevado, lo cual indica que se puede producir inestabilidad numérica en el cálculo de la solución del problema, afectando a aquellas combinaciones de parámetros que estén asociadas a los valores singulares más pequeños. Los parámetros pertenecientes a dichas combinaciones pueden presentar una resolución pequeña.

En la figura 5.52 se presentan las combinaciones de los parámetros que están asociadas a cada uno de los valores singulares del jacobiano J . Dichas combinaciones vienen dadas por los vectores característicos del espacio de los parámetros que forman la matriz V_h . En la misma figura se presentan las primeras veinticuatro columnas de la matriz U_h , que son los vectores característicos del espacio de los datos, junto con los correspondientes valores singulares.

En el primer vector característico v_1^T , el cual está asociado al valor singular $I_1 = 1.239 \cdot 10^4$, destacan las componentes correspondientes a los parámetros p_8, p_9 y p_{10} , todos ellos correspondientes a los términos cuadráticos del polinomio que describe el contraste de densidad. Estos son los parámetros mejor resueltos en el proceso de inversión y, como se puede ver en la representación gráfica del vector u_1 , los datos que participan en su resolución se encuentran situados sobre las posiciones de las fronteras y_1 e y_2 , ya que es aquí donde los datos presentan mayor sensibilidad a las variaciones del parámetro p_9 , que es el que presenta un mayor peso en la combinación.

La segunda combinación de parámetros está determinada por las componentes p_3, p_6, p_{17} y p_{20} del vector v_2^T asociado al siguiente valor singular en tamaño, que es $I_2 = 6.620 \cdot 10^3$. Los datos gravimétricos que resuelven dicha combinación también se encuentran situados sobre la posición de las fronteras laterales y_1 e y_2 , debido a la sensibilidad de los datos con respecto a esos cuatro parámetros.

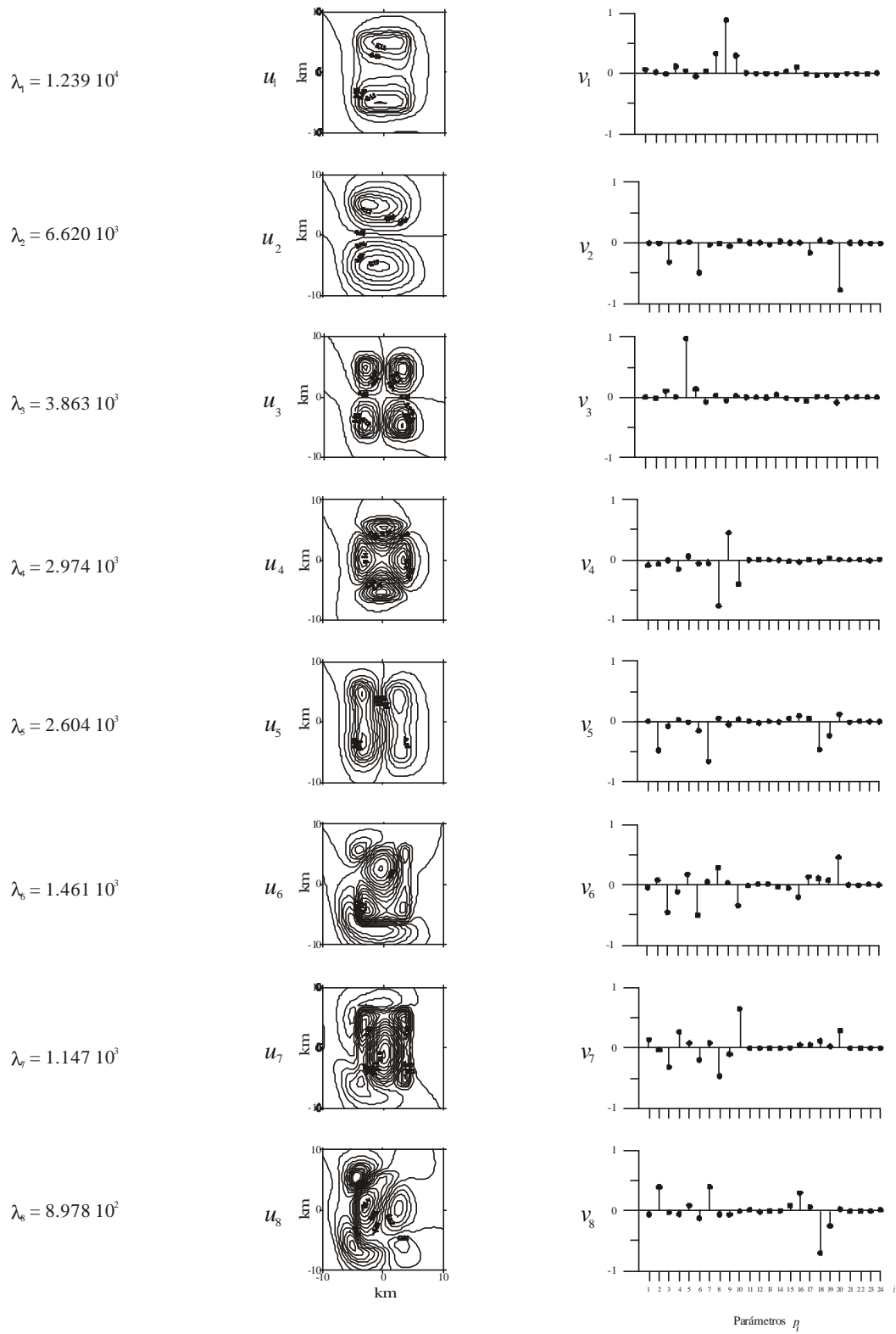


FIGURA 5.52. Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

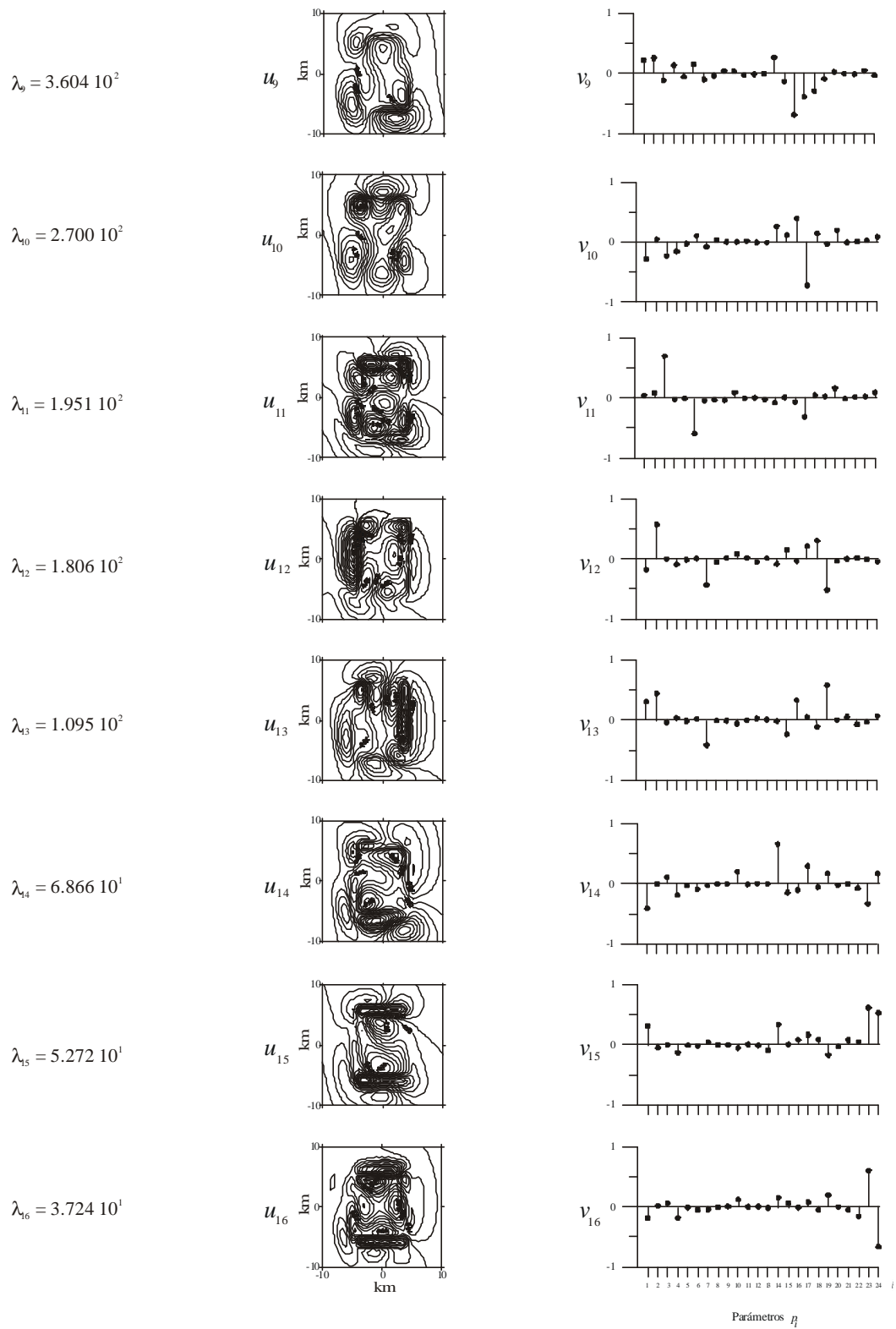


FIGURA 5.52 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

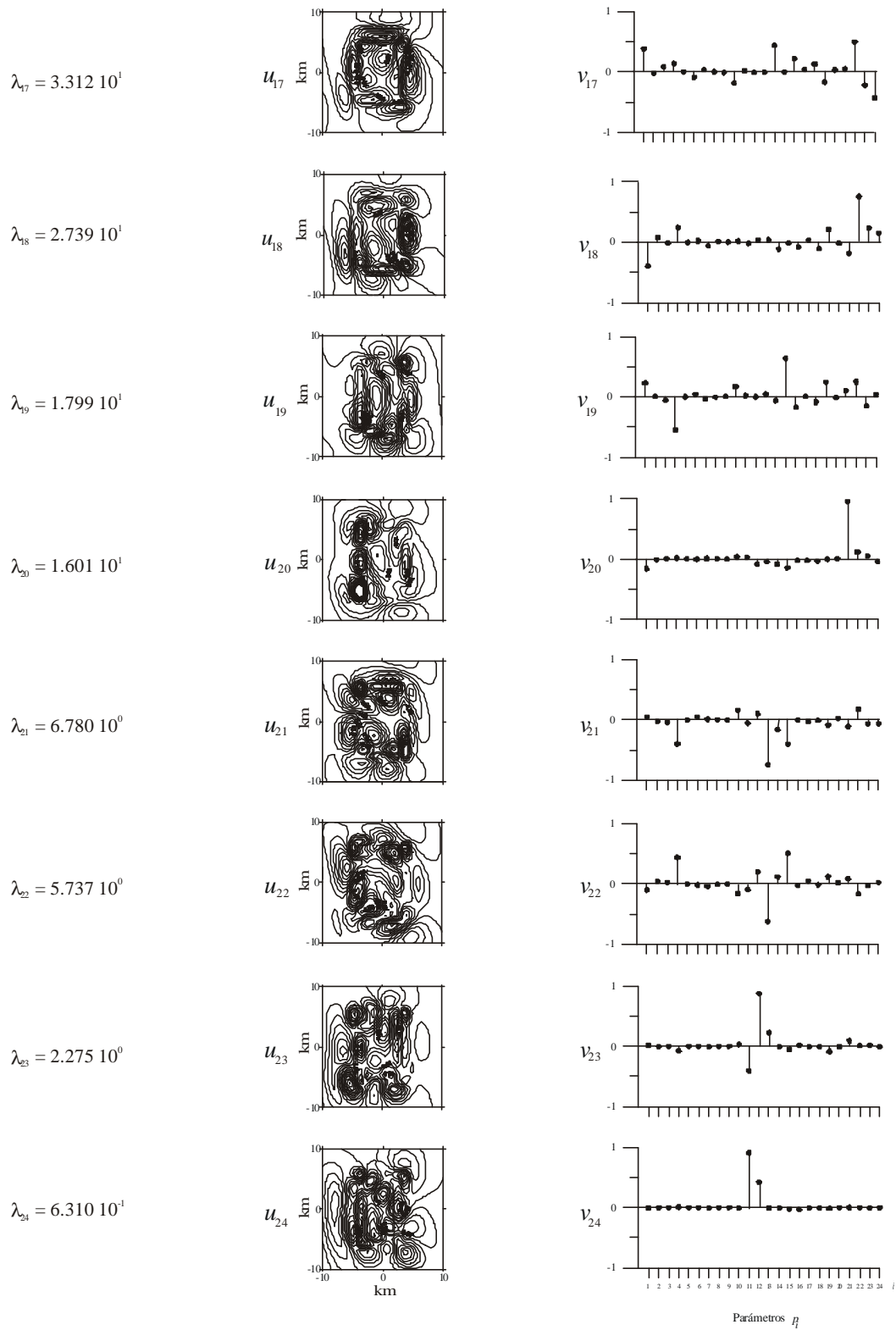


FIGURA 5.52 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

La siguiente combinación está asociada al valor singular $I_3 = 3.863 \cdot 10^3$. Está formada por un único parámetro, el p_5 . Los datos que participan de su resolución se encuentran sobre las posiciones de las esquinas del cuerpo anómalo con respecto a la malla de datos, lo cual es lógico teniendo en cuenta que estos datos presentan una fuerte sensibilidad a las variaciones de dicho parámetro, como se puede ver en la gráfica (e) de la figura 5.48.

En la cuarta combinación vuelven a aparecer los mismos parámetros que aparecieron en la segunda combinación, aunque las componentes de \mathbf{v}_4^T correspondientes presentan signos distintos. El que se haya repetido la combinación de estos parámetros nos indica la posible existencia de correlación entre los mismos. Esta vez, la gráfica del vector \mathbf{u}_4 presenta cuatro lóbulos centrados sobre las cuatro fronteras laterales. Esto es debido a que, en este caso, los pesos de los tres parámetros de la combinación presentan valores muy parecidos, por lo que la sensibilidad de los datos se reparte sobre dichas fronteras, como se desprende de las gráficas (h), (i) y (j) de la figura 5.48. Esta combinación está asociada al valor singular $I_4 = 2.974 \cdot 10^3$.

La siguiente combinación está formada por las componentes de \mathbf{v}_5^T correspondientes a los parámetros p_2 y p_7 , del contraste de densidad, y a los parámetros p_{18} y p_{19} de la frontera inferior. El vector característico de los datos presenta dos lóbulos ubicados sobre las fronteras laterales x_1 y x_2 . El valor singular correspondiente a esta combinación es $I_5 = 2.604 \cdot 10^3$.

Las dos combinaciones siguientes están formadas, principalmente, por la mayoría de los parámetros del contraste de densidad y el parámetro p_{20} de la frontera inferior. Este parámetro puede presentar cierta correlación con los parámetros p_3 y p_6 ya que, además de formar parte de ambas combinaciones, también aparecen, junto a p_{20} , en la segunda combinación. Los vectores característicos de los datos para ambas combinaciones presentan formas complejas, como se puede apreciar en la figura 5.52.

La octava combinación está asociada al valor singular $I_8 = 8.978 \cdot 10^2$. En ella vuelven a destacar las mismas componentes de la quinta combinación, indicando una posible correlación entre los parámetros correspondientes. El vector característico de los datos presenta también forma compleja, aunque predominan en la gráfica los datos situados sobre la posición de la frontera x_1 .

En el resto de las combinaciones siguen destacando las componentes de los vectores \mathbf{v}_i^T correspondientes a los parámetros del contraste de densidad y a la frontera inferior, y no es hasta la combinación correspondiente al valor singular $I_{14} = 6.866 \cdot 10^1$, que no aparecen representados los parámetros de las fronteras laterales y_1 e y_2 . Así mismo, las componentes de las fronteras x_1 y x_2 no comienzan a destacar hasta la decimoséptima combinación.

En las cuatro últimas combinaciones se resuelven los parámetros p_{11} , p_{12} , p_{13} y p_{14} , que no habían aparecido en el resto de las combinaciones, siendo el parámetro p_{11} el último en aparecer. Estos cuatro parámetros son los que presentan peor resolución en el proceso de inversión, ya que las combinaciones a las que pertenecen están asociadas a los valores singulares más pequeños.

5.2.1.3. Resolución de los parámetros

En este caso la matriz de resolución es la matriz identidad, pues el factor de amortiguación es cero para la última iteración del proceso. Podemos decir que el modelo resultante obtenido es prácticamente el mismo que el modelo real del problema, como se puede comprobar en las tablas 5.15, 5.16 y 5.17, aunque algunos de los parámetros del modelo resultante diferirán un poco de los del modelo sintético debido a los cálculos numéricos necesarios para resolver la solución del problema.

5.2.1.4. Covarianza de los parámetros

Vamos a calcular la matriz de covarianza de los parámetros para obtener las incertidumbres de los mismos. En la tabla 5.18 se pueden ver los valores numéricos de los elementos de dicha matriz calculada mediante la ecuación (1.60), donde la varianza residual es $\hat{\sigma}^2 = 3.0 \cdot 10^{-8} \text{ mGal}^2$. Las incertidumbres de los parámetros del modelo resultante se calculan a partir de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza, considerando un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \sigma$. En la tabla 5.19 se muestran los parámetros del modelo resultante junto con las incertidumbres correspondientes. Se puede ver que los parámetros del contraste de densidad presentan errores mucho más pequeños que los de las fronteras.

5.2.1.5. Correlación entre los parámetros

La matriz de correlación de los parámetros se calcula a partir de la expresión (1.64) y el resultado se presenta en la figura 5.53. Los valores numéricos de sus elementos se muestran en la tabla 5.20. En esa figura podemos ver que existen correlaciones entre los diez parámetros del contraste de densidad. Así mismo, existen correlaciones entre los de la frontera inferior, y también hay correlaciones entre algunos parámetros de dicha frontera y los del contraste de densidad.

Los parámetros de las cuatro fronteras laterales presentan correlaciones muy suaves con el resto de los parámetros que describen la fuente, en especial el parámetro p_{22} , correspondiente a la frontera x_2 , con los parámetros del contraste de densidad.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
4.309 10⁻¹¹	-7.633 10 ⁻¹²	-4.957 10 ⁻¹²	-8.020 10 ⁻¹¹	5.912 10 ⁻¹⁴	2.657 10 ⁻¹²	5.695 10 ⁻¹²	-3.682 10 ⁻¹³	-2.446 10 ⁻¹⁴	2.671 10 ⁻¹¹	-7.927 10 ⁻¹⁰	-2.925 10 ⁻¹⁰	p_1
	4.152 10⁻¹²	1.989 10 ⁻¹²	3.006 10 ⁻¹¹	-1.098 10 ⁻¹³	-1.266 10 ⁻¹²	-3.094 10 ⁻¹²	-3.059 10 ⁻¹³	-1.310 10 ⁻¹³	-1.099 10 ⁻¹¹	5.450 10 ⁻¹¹	1.906 10 ⁻¹¹	p_2
		3.052 10⁻¹²	2.605 10 ⁻¹¹	-4.840 10 ⁻¹⁴	-2.595 10 ⁻¹²	-1.066 10 ⁻¹²	-2.194 10 ⁻¹³	-2.030 10 ⁻¹³	-1.007 10 ⁻¹¹	2.818 10 ⁻¹¹	2.335 10 ⁻¹²	p_3
			3.493 10⁻¹⁰	-2.399 10 ⁻¹³	-1.913 10 ⁻¹¹	-1.726 10 ⁻¹¹	-2.296 10 ⁻¹²	-1.870 10 ⁻¹²	-1.334 10 ⁻¹⁰	7.339 10 ⁻¹⁰	-3.357 10 ⁻¹¹	p_4
				1.905 10⁻¹⁴	2.781 10 ⁻¹⁴	1.197 10 ⁻¹³	1.433 10 ⁻¹⁴	1.089 10 ⁻¹⁵	3.325 10 ⁻¹⁴	6.447 10 ⁻¹²	-7.778 10 ⁻¹³	p_5
					2.408 10⁻¹²	5.746 10 ⁻¹³	1.871 10 ⁻¹³	1.868 10 ⁻¹³	7.580 10 ⁻¹²	-1.637 10 ⁻¹²	-9.566 10 ⁻¹³	p_6
						2.839 10⁻¹²	1.767 10 ⁻¹³	3.705 10 ⁻¹⁴	6.144 10 ⁻¹²	-1.024 10 ⁻¹⁰	-8.508 10 ⁻¹¹	p_7
							9.516 10⁻¹⁴	2.651 10 ⁻¹⁴	8.230 10 ⁻¹³	4.564 10 ⁻¹¹	1.921 10 ⁻¹¹	p_8
								2.491 10⁻¹⁴	7.598 10 ⁻¹³	1.149 10 ⁻¹¹	6.887 10 ⁻¹²	p_9
									5.321 10⁻¹¹	-4.453 10 ⁻¹⁰	-3.264 10 ⁻¹¹	p_{10}
										6.273 10⁻⁸	2.674 10 ⁻⁸	p_{11}
											1.787 10⁻⁸	p_{12}

TABLA 5.18. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	
5.431 10 ⁻¹¹	-1.046 10 ⁻¹¹	-2.694 10 ⁻¹¹	2.973 10 ⁻¹¹	-5.841 10 ⁻¹²	1.171 10 ⁻¹¹	-1.042 10 ⁻¹¹	-1.292 10 ⁻¹²	-1.832 10 ⁻¹¹	1.869 10 ⁻¹¹	-5.255 10 ⁻¹²	-8.497 10 ⁻¹²	p_1
-2.006 10 ⁻¹¹	8.000 10 ⁻¹²	3.080 10 ⁻¹¹	-3.303 10 ⁻¹²	3.370 10 ⁻¹²	-1.296 10 ⁻¹²	9.343 10 ⁻¹²	4.966 10 ⁻¹³	3.213 10 ⁻¹²	-9.174 10 ⁻¹²	7.541 10 ⁻¹⁴	2.820 10 ⁻¹²	p_2
4.615 10 ⁻¹²	9.734 10 ⁻¹²	2.072 10 ⁻¹¹	-4.033 10 ⁻¹³	2.460 10 ⁻¹²	5.201 10 ⁻¹³	4.797 10 ⁻¹²	3.496 10 ⁻¹⁴	4.413 10 ⁻¹²	-1.022 10 ⁻¹¹	1.735 10 ⁻¹²	7.203 10 ⁻¹³	p_3
-1.542 10 ⁻¹⁰	9.620 10 ⁻¹¹	2.838 10 ⁻¹⁰	-2.811 10 ⁻¹¹	3.297 10 ⁻¹¹	-2.668 10 ⁻¹²	8.882 10 ⁻¹¹	4.511 10 ⁻¹²	2.058 10 ⁻¹¹	-1.197 10 ⁻¹⁰	4.115 10 ⁻¹²	3.188 10 ⁻¹¹	p_4
4.926 10 ⁻¹³	-3.518 10 ⁻¹³	-8.264 10 ⁻¹³	-1.511 10 ⁻¹³	-1.371 10 ⁻¹³	-4.506 10 ⁻¹⁵	-1.178 10 ⁻¹³	-9.450 10 ⁻¹⁵	-1.301 10 ⁻¹³	1.211 10 ⁻¹³	-6.137 10 ⁻¹⁴	8.140 10 ⁻¹⁴	p_5
-1.609 10 ⁻¹¹	-8.271 10 ⁻¹²	-1.518 10 ⁻¹¹	-8.572 10 ⁻¹³	-1.620 10 ⁻¹²	-8.791 10 ⁻¹³	-2.529 10 ⁻¹²	2.754 10 ⁻¹³	-4.469 10 ⁻¹²	8.150 10 ⁻¹²	-2.081 10 ⁻¹²	-3.130 10 ⁻¹³	p_6
1.124 10 ⁻¹¹	-4.509 10 ⁻¹²	-1.852 10 ⁻¹¹	4.781 10 ⁻¹²	-1.907 10 ⁻¹²	2.463 10 ⁻¹²	-2.789 10 ⁻¹²	-2.658 10 ⁻¹³	-5.526 10 ⁻¹²	5.451 10 ⁻¹²	8.579 10 ⁻¹⁴	-1.558 10 ⁻¹²	p_7
2.740 10 ⁻¹³	-1.138 10 ⁻¹²	-5.186 10 ⁻¹²	-1.290 10 ⁻¹²	-4.033 10 ⁻¹³	-5.335 10 ⁻¹³	-1.566 10 ⁻¹²	1.436 10 ⁻¹⁵	1.428 10 ⁻¹⁴	1.540 10 ⁻¹²	-1.103 10 ⁻¹³	-1.568 10 ⁻¹³	p_8
-4.472 10 ⁻¹³	-7.858 10 ⁻¹³	-1.929 10 ⁻¹²	-4.928 10 ⁻¹³	-1.866 10 ⁻¹³	-2.572 10 ⁻¹³	-5.708 10 ⁻¹³	-2.584 10 ⁻¹⁵	3.787 10 ⁻¹⁴	6.983 10 ⁻¹³	1.025 10 ⁻¹⁴	-1.375 10 ⁻¹³	p_9
5.711 10 ⁻¹¹	-3.867 10 ⁻¹¹	-1.069 10 ⁻¹⁰	1.495 10 ⁻¹¹	-1.240 10 ⁻¹¹	1.543 10 ⁻¹²	-3.203 10 ⁻¹¹	-1.810 10 ⁻¹²	-2.456 10 ⁻¹²	4.681 10 ⁻¹¹	1.183 10 ⁻¹²	-1.213 10 ⁻¹¹	p_{10}
-5.876 10 ⁻¹⁰	-7.256 10 ⁻¹¹	-1.529 10 ⁻⁹	-2.038 10 ⁻⁹	-6.414 10 ⁻¹¹	-7.320 10 ⁻¹⁰	-8.301 10 ⁻¹⁰	2.582 10 ⁻¹¹	5.392 10 ⁻¹¹	-1.525 10 ⁻¹²	-2.500 10 ⁻¹⁰	1.662 10 ⁻¹⁰	p_{11}
8.938 10 ⁻¹⁰	-8.271 10 ⁻¹¹	-9.673 10 ⁻¹⁰	-8.520 10 ⁻¹⁰	-1.001 10 ⁻¹⁰	-3.766 10 ⁻¹⁰	-9.138 10 ⁻¹⁰	-1.639 10 ⁻¹¹	6.125 10 ⁻¹⁰	3.401 10 ⁻¹¹	-5.068 10 ⁻¹¹	7.398 10 ⁻¹²	p_{12}
9.957 10⁻¹⁰	-3.799 10 ⁻¹²	-1.576 10 ⁻¹⁰	3.941 10 ⁻¹¹	-3.395 10 ⁻¹¹	4.705 10 ⁻¹²	-1.391 10 ⁻¹⁰	-2.750 10 ⁻¹¹	1.223 10 ⁻¹⁰	1.903 10 ⁻¹¹	6.134 10 ⁻¹¹	-7.278 10 ⁻¹³	p_{13}
	4.299 10⁻¹¹	1.014 10 ⁻¹⁰	3.141 10 ⁻¹²	1.237 10 ⁻¹¹	4.158 10 ⁻¹²	2.616 10 ⁻¹¹	3.145 10 ⁻¹³	6.285 10 ⁻¹²	-3.850 10 ⁻¹¹	2.962 10 ⁻¹²	4.310 10 ⁻¹²	p_{14}
		4.419 10⁻¹⁰	2.545 10 ⁻¹¹	3.944 10 ⁻¹¹	1.492 10 ⁻¹¹	1.508 10 ⁻¹⁰	3.191 10 ⁻¹²	2.081 10 ⁻¹¹	-1.144 10 ⁻¹⁰	-2.772 10 ⁻¹²	2.957 10 ⁻¹¹	p_{15}
			7.197 10⁻¹¹	4.264 10 ⁻¹³	2.650 10 ⁻¹¹	1.623 10 ⁻¹¹	-9.944 10 ⁻¹³	-5.366 10 ⁻¹²	7.007 10 ⁻¹³	9.873 10 ⁻¹²	-9.239 10 ⁻¹²	p_{16}
				5.842 10⁻¹²	1.225 10 ⁻¹²	1.663 10 ⁻¹¹	6.733 10 ⁻¹³	-4.434 10 ⁻¹²	-1.103 10 ⁻¹¹	5.481 10 ⁻¹³	3.102 10 ⁻¹²	p_{17}
					1.136 10⁻¹¹	1.039 10 ⁻¹¹	-5.237 10 ⁻¹⁴	-1.019 10 ⁻¹¹	-3.665 10 ⁻¹²	2.207 10 ⁻¹²	-2.297 10 ⁻¹²	p_{18}
						9.339 10⁻¹¹	2.856 10 ⁻¹²	-3.789 10 ⁻¹¹	-2.507 10 ⁻¹¹	-1.506 10 ⁻¹²	1.093 10 ⁻¹¹	p_{19}
							8.728 10⁻¹³	-2.760 10 ⁻¹²	-8.036 10 ⁻¹³	-2.112 10 ⁻¹²	-7.802 10 ⁻¹³	p_{20}
								1.785 10⁻¹⁰	-9.904 10 ⁻¹²	1.001 10 ⁻¹¹	-4.412 10 ⁻¹²	p_{21}
									8.429 10⁻¹¹	-2.739 10 ⁻¹²	-1.012 10 ⁻¹¹	p_{22}
										2.365 10⁻¹¹	-1.727 10 ⁻¹²	p_{23}
											2.339 10⁻¹¹	p_{24}

TABLA 5.18 (Continuación). Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	FRONTERA INFERIOR	FRONTERAS LATERALES
$p_1 = -0.30000 \pm 0.00002 \text{ g/cm}^3$	$p_{11} = 4.0007 \pm 0.0007 \text{ km}$	$P_{21} = -3.99999 \pm 0.00004 \text{ km}$
$p_2 = -0.049999 \pm 0.000005 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{12} = 3.0156 \pm 0.0004$	$p_{22} = 3.99997 \pm 0.00002 \text{ km}$
$p_3 = -0.010004 \pm 0.000005 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$P_{13} = -0.00999 \pm 0.00008$	$P_{23} = -6.000017 \pm 0.000013 \text{ km}$
$p_4 = 0.09003 \pm 0.00005 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{14} = 0.05001 \pm 0.00002 \text{ km}^{-1}$	$p_{24} = 6.000011 \pm 0.000013 \text{ km}$
$p_5 = -0.0019998 \pm 0.0000004 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{15} = 0.00103 \pm 0.00005 \text{ km}^{-1}$	
$p_6 = -0.003003 \pm 0.000004 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{16} = 0.00297 \pm 0.00002 \text{ km}^{-1}$	
$p_7 = -0.004001 \pm 0.000004 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{17} = -0.002999 \pm 0.000006 \text{ km}^{-2}$	
$p_8 = -0.0099998 \pm 0.0000008 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{18} = 0.007992 \pm 0.000009 \text{ km}^{-2}$	
$p_9 = 0.0299999 \pm 0.0000004 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{19} = 0.00501 \pm 0.00003 \text{ km}^{-2}$	
$p_{10} = 0.00999 \pm 0.00002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{20} = -0.001000 \pm 0.000002 \text{ km}^{-2}$	

TABLA 5.19. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

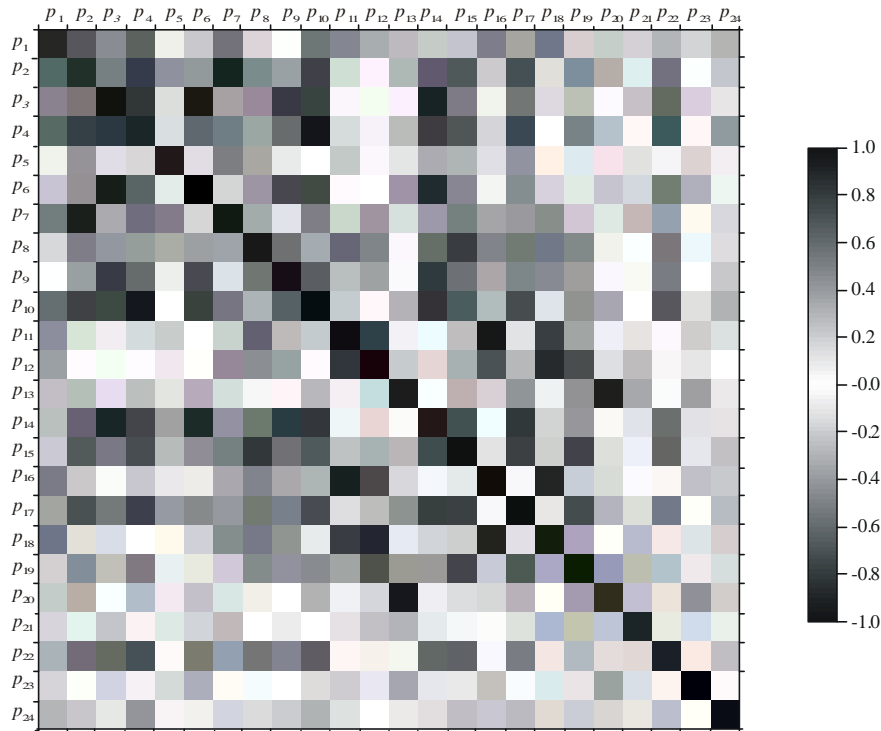


FIGURA 5.53. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
1.000 10⁺⁰	-5.707 10 ⁻¹	-4.323 10 ⁻¹	-6.537 10 ⁻¹	6.526 10 ⁻²	2.609 10 ⁻¹	5.149 10 ⁻¹	-1.818 10 ⁻¹	-2.361 10 ⁻²	5.578 10 ⁻¹	-4.822 10 ⁻¹	-3.333 10 ⁻¹	p_1
	1.000 10⁺⁰	5.587 10 ⁻¹	7.894 10 ⁻¹	-3.904 10 ⁻¹	-4.003 10 ⁻¹	-9.012 10 ⁻¹	-4.867 10 ⁻¹	-4.072 10 ⁻¹	-7.394 10 ⁻¹	1.068 10 ⁻¹	6.998 10 ⁻²	p_2
		1.000 10⁺⁰	7.979 10 ⁻¹	-2.007 10 ⁻¹	-9.572 10 ⁻¹	-3.621 10 ⁻¹	-4.071 10 ⁻¹	-7.362 10 ⁻¹	-7.899 10 ⁻¹	6.439 10 ⁻²	9.998 10 ⁻³	p_3
			1.000 10⁺⁰	-9.301 10 ⁻²	-6.597 10 ⁻¹	-5.482 10 ⁻¹	-3.982 10 ⁻¹	-6.338 10 ⁻¹	-9.783 10 ⁻¹	1.568 10 ⁻¹	-1.344 10 ⁻²	p_4
				1.000 10⁺⁰	1.298 10 ⁻¹	5.148 10 ⁻¹	3.365 10 ⁻¹	4.997 10 ⁻²	3.303 10 ⁻²	1.865 10 ⁻¹	-4.215 10 ⁻²	p_5
					1.000 10⁺⁰	2.197 10 ⁻¹	3.908 10 ⁻¹	7.626 10 ⁻¹	6.696 10 ⁻¹	-4.212 10 ⁻³	-4.611 10 ⁻³	p_6
						1.000 10⁺⁰	3.401 10 ⁻¹	1.393 10 ⁻¹	4.999 10 ⁻¹	-2.427 10 ⁻¹	-3.777 10 ⁻¹	p_7
							1.000 10⁺⁰	5.445 10 ⁻¹	3.657 10 ⁻¹	5.908 10 ⁻¹	4.658 10 ⁻¹	p_8
								1.000 10⁺⁰	6.599 10 ⁻¹	2.907 10 ⁻¹	3.264 10 ⁻¹	p_9
									1.000 10⁺⁰	-2.437 10 ⁻¹	-3.347 10 ⁻²	p_{10}
										1.000 10⁺⁰	7.985 10 ⁻¹	p_{11}
											1.000 10⁺⁰	p_{12}

TABLA 5.20. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	
$2.622 \cdot 10^{-1}$	$-2.431 \cdot 10^{-1}$	$-1.953 \cdot 10^{-1}$	$5.339 \cdot 10^{-1}$	$-3.681 \cdot 10^{-1}$	$5.294 \cdot 10^{-1}$	$-1.642 \cdot 10^{-1}$	$-2.107 \cdot 10^{-1}$	$-2.089 \cdot 10^{-1}$	$3.102 \cdot 10^{-1}$	$-1.646 \cdot 10^{-1}$	$-2.676 \cdot 10^{-1}$	p_1
$-3.119 \cdot 10^{-1}$	$5.988 \cdot 10^{-1}$	$7.192 \cdot 10^{-1}$	$-1.911 \cdot 10^{-1}$	$6.843 \cdot 10^{-1}$	$-1.886 \cdot 10^{-1}$	$4.745 \cdot 10^{-1}$	$2.609 \cdot 10^{-1}$	$1.180 \cdot 10^{-1}$	$-4.904 \cdot 10^{-1}$	$7.610 \cdot 10^{-3}$	$2.862 \cdot 10^{-1}$	p_2
$8.372 \cdot 10^{-2}$	$8.497 \cdot 10^{-1}$	$5.643 \cdot 10^{-1}$	$-2.721 \cdot 10^{-2}$	$5.827 \cdot 10^{-1}$	$8.832 \cdot 10^{-2}$	$2.842 \cdot 10^{-1}$	$2.142 \cdot 10^{-2}$	$1.891 \cdot 10^{-1}$	$-6.369 \cdot 10^{-1}$	$2.042 \cdot 10^{-1}$	$8.525 \cdot 10^{-2}$	p_3
$-2.615 \cdot 10^{-1}$	$7.850 \cdot 10^{-1}$	$7.224 \cdot 10^{-1}$	$-1.773 \cdot 10^{-1}$	$7.298 \cdot 10^{-1}$	$-4.236 \cdot 10^{-2}$	$4.918 \cdot 10^{-1}$	$2.583 \cdot 10^{-1}$	$8.241 \cdot 10^{-2}$	$-6.976 \cdot 10^{-1}$	$4.527 \cdot 10^{-2}$	$3.527 \cdot 10^{-1}$	p_4
$1.131 \cdot 10^{-1}$	$-3.888 \cdot 10^{-1}$	$-2.849 \cdot 10^{-1}$	$-1.291 \cdot 10^{-1}$	$-4.109 \cdot 10^{-1}$	$-9.688 \cdot 10^{-3}$	$-8.830 \cdot 10^{-2}$	$-7.329 \cdot 10^{-2}$	$-7.058 \cdot 10^{-2}$	$9.556 \cdot 10^{-2}$	$-9.144 \cdot 10^{-2}$	$1.220 \cdot 10^{-1}$	p_5
$-3.286 \cdot 10^{-1}$	$-8.129 \cdot 10^{-1}$	$-4.654 \cdot 10^{-1}$	$-6.511 \cdot 10^{-2}$	$-4.320 \cdot 10^{-1}$	$-1.681 \cdot 10^{-1}$	$-1.686 \cdot 10^{-1}$	$1.900 \cdot 10^{-1}$	$-2.156 \cdot 10^{-1}$	$5.721 \cdot 10^{-1}$	$-2.757 \cdot 10^{-1}$	$-4.171 \cdot 10^{-2}$	p_6
$2.113 \cdot 10^{-1}$	$-4.081 \cdot 10^{-1}$	$-5.229 \cdot 10^{-1}$	$3.345 \cdot 10^{-1}$	$-4.683 \cdot 10^{-1}$	$4.338 \cdot 10^{-1}$	$-1.713 \cdot 10^{-1}$	$-1.688 \cdot 10^{-1}$	$-2.455 \cdot 10^{-1}$	$3.524 \cdot 10^{-1}$	$1.047 \cdot 10^{-2}$	$-1.912 \cdot 10^{-1}$	p_7
$2.815 \cdot 10^{-2}$	$-5.626 \cdot 10^{-1}$	$-7.997 \cdot 10^{-1}$	$-4.929 \cdot 10^{-1}$	$-5.409 \cdot 10^{-1}$	$-5.131 \cdot 10^{-1}$	$-5.252 \cdot 10^{-1}$	$4.983 \cdot 10^{-3}$	$3.464 \cdot 10^{-3}$	$5.437 \cdot 10^{-1}$	$-7.354 \cdot 10^{-2}$	$-1.051 \cdot 10^{-1}$	p_8
$-8.980 \cdot 10^{-2}$	$-7.593 \cdot 10^{-1}$	$-5.815 \cdot 10^{-1}$	$-3.681 \cdot 10^{-1}$	$-4.893 \cdot 10^{-1}$	$-4.835 \cdot 10^{-1}$	$-3.743 \cdot 10^{-1}$	$-1.752 \cdot 10^{-2}$	$1.796 \cdot 10^{-2}$	$4.819 \cdot 10^{-1}$	$1.335 \cdot 10^{-2}$	$-1.801 \cdot 10^{-1}$	p_9
$2.481 \cdot 10^{-1}$	$-8.085 \cdot 10^{-1}$	$-6.972 \cdot 10^{-1}$	$2.415 \cdot 10^{-1}$	$-7.036 \cdot 10^{-1}$	$6.274 \cdot 10^{-2}$	$-4.543 \cdot 10^{-1}$	$-2.655 \cdot 10^{-1}$	$-2.520 \cdot 10^{-2}$	$6.989 \cdot 10^{-1}$	$3.334 \cdot 10^{-2}$	$-3.440 \cdot 10^{-1}$	p_{10}
$-7.435 \cdot 10^{-2}$	$-4.418 \cdot 10^{-2}$	$-2.904 \cdot 10^{-1}$	$-9.592 \cdot 10^{-1}$	$-1.060 \cdot 10^{-1}$	$-8.671 \cdot 10^{-1}$	$-3.430 \cdot 10^{-1}$	$1.103 \cdot 10^{-1}$	$1.612 \cdot 10^{-2}$	$-6.630 \cdot 10^{-4}$	$-2.052 \cdot 10^{-1}$	$1.372 \cdot 10^{-1}$	p_{11}
$2.119 \cdot 10^{-1}$	$-9.435 \cdot 10^{-2}$	$-3.442 \cdot 10^{-1}$	$-7.512 \cdot 10^{-1}$	$-3.097 \cdot 10^{-1}$	$-8.357 \cdot 10^{-1}$	$-7.073 \cdot 10^{-1}$	$-1.313 \cdot 10^{-1}$	$3.429 \cdot 10^{-1}$	$2.771 \cdot 10^{-2}$	$-7.795 \cdot 10^{-2}$	$1.144 \cdot 10^{-2}$	p_{12}
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-1.836 \cdot 10^{-2}$	$-2.376 \cdot 10^{-1}$	$1.472 \cdot 10^{-1}$	$-4.451 \cdot 10^{-1}$	$4.423 \cdot 10^{-2}$	$-4.563 \cdot 10^{-1}$	$-9.327 \cdot 10^{-1}$	$2.900 \cdot 10^{-1}$	$6.568 \cdot 10^{-2}$	$3.997 \cdot 10^{-1}$	$-4.769 \cdot 10^{-3}$	p_{13}
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$7.354 \cdot 10^{-1}$	$5.646 \cdot 10^{-2}$	$7.806 \cdot 10^{-1}$	$1.882 \cdot 10^{-1}$	$4.128 \cdot 10^{-1}$	$5.135 \cdot 10^{-2}$	$7.175 \cdot 10^{-2}$	$-6.395 \cdot 10^{-1}$	$9.287 \cdot 10^{-2}$	$1.359 \cdot 10^{-1}$	p_{14}
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$1.427 \cdot 10^{-1}$	$7.762 \cdot 10^{-1}$	$2.106 \cdot 10^{-1}$	$7.421 \cdot 10^{-1}$	$1.625 \cdot 10^{-1}$	$7.411 \cdot 10^{-2}$	$-5.926 \cdot 10^{-1}$	$-2.712 \cdot 10^{-2}$	$2.909 \cdot 10^{-1}$	p_{15}
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	$2.080 \cdot 10^{-2}$	$9.267 \cdot 10^{-1}$	$1.980 \cdot 10^{-1}$	$-1.255 \cdot 10^{-1}$	$-4.735 \cdot 10^{-2}$	$8.996 \cdot 10^{-3}$	$2.393 \cdot 10^{-1}$	$-2.252 \cdot 10^{-1}$	p_{16}
				$1.000 \cdot 10^{+0}$	$1.503 \cdot 10^{-1}$	$7.118 \cdot 10^{-1}$	$2.982 \cdot 10^{-1}$	$-1.373 \cdot 10^{-1}$	$-4.970 \cdot 10^{-1}$	$4.663 \cdot 10^{-2}$	$2.654 \cdot 10^{-1}$	p_{17}
					$1.000 \cdot 10^{+0}$	$3.189 \cdot 10^{-1}$	$-1.663 \cdot 10^{-2}$	$-2.262 \cdot 10^{-1}$	$-1.185 \cdot 10^{-1}$	$1.346 \cdot 10^{-1}$	$-1.409 \cdot 10^{-1}$	p_{18}
						$1.000 \cdot 10^{+0}$	$3.163 \cdot 10^{-1}$	$-2.935 \cdot 10^{-1}$	$-2.826 \cdot 10^{-1}$	$-3.204 \cdot 10^{-2}$	$2.339 \cdot 10^{-1}$	p_{19}
							$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-2.211 \cdot 10^{-1}$	$-9.369 \cdot 10^{-2}$	$-4.649 \cdot 10^{-1}$	$-1.727 \cdot 10^{-1}$	p_{20}
								$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-8.075 \cdot 10^{-2}$	$1.541 \cdot 10^{-1}$	$-6.829 \cdot 10^{-2}$	p_{21}
									$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-6.135 \cdot 10^{-2}$	$-2.280 \cdot 10^{-1}$	p_{22}
										$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-7.344 \cdot 10^{-2}$	p_{23}
											$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_{24}

TABLA 5.20 (Continuación). Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

5.2.2. Ejemplo teórico con datos que presentan errores numéricos

A continuación presentamos el problema de inversión para una fuente anómala en tres dimensiones, limitada superior e inferiormente por polinomios de tercer grado, con datos de gravedad contaminados con ruido aleatorio de tipo gaussiano, con promedio cero y desviación estándar $\sigma = 0.35$ mGal. Este error corresponde a una incertidumbre del 0.61 % en los datos de gravedad.

En la figura 5.54 se comparan la anomalía gravimétrica producida por el modelo que ha generado los datos de gravedad de la sección anterior, con la misma anomalía pero contaminada con ruido aleatorio. Como se puede ver en la figura, la adición de ruido no ha alterado la forma básica de la anomalía, aunque ha introducido variaciones en sus isolíneas, lo que puede producir una falta de convergencia hacia la solución del problema en el proceso iterativo de inversión.

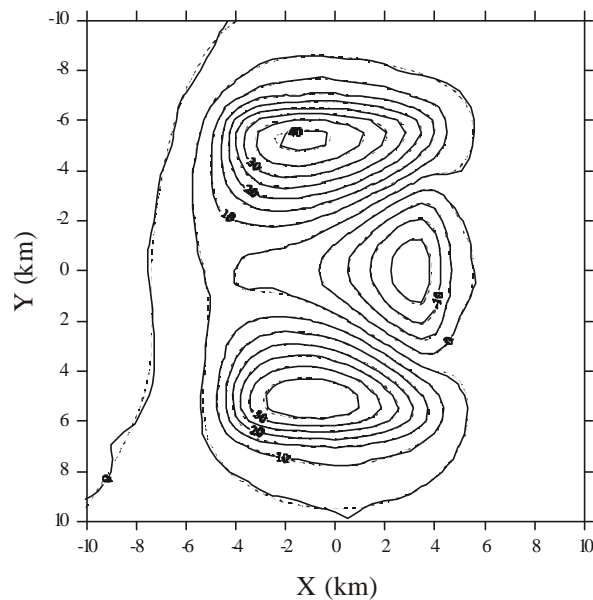


FIGURA 5.54. La línea a trazos es la anomalía gravimétrica de la fuente de la figura 3.15(b). La línea continua es la misma anomalía pero contaminada con ruido aleatorio.

Vamos a calcular la inversión de la anomalía gravimétrica, contaminada con ruido, presentada en la figura anterior. Para ello calculamos la solución del sistema de ecuaciones (4.10) para diferentes valores del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} . Este proceso iterativo comienza con el modelo inicial de la figura 5.40 y acaba cuando se ha alcanzado un valor del desajuste q_s próximo al valor de la tolerancia $T = 400$, que es el número de datos del problema. En este punto se ha obtenido una posible solución del problema.

En la figura 5.55 se presenta la evolución del desajuste a lo largo de un proceso de 200 iteraciones. Podemos ver que el valor de este parámetro varía bruscamente en las primeras diez iteraciones y luego se estabiliza y converge hacia el valor $q_s = 365.9$. Las soluciones de los parámetros también convergen hacia una solución determinada que permanece constante desde la iteración 135 hasta el final del proceso iterativo. Vamos a elegir dicha solución como resultado de nuestro problema, con el valor del desajuste arriba mencionado y un factor de amortiguación $\mathbf{b}^{-1} = 182.9$.

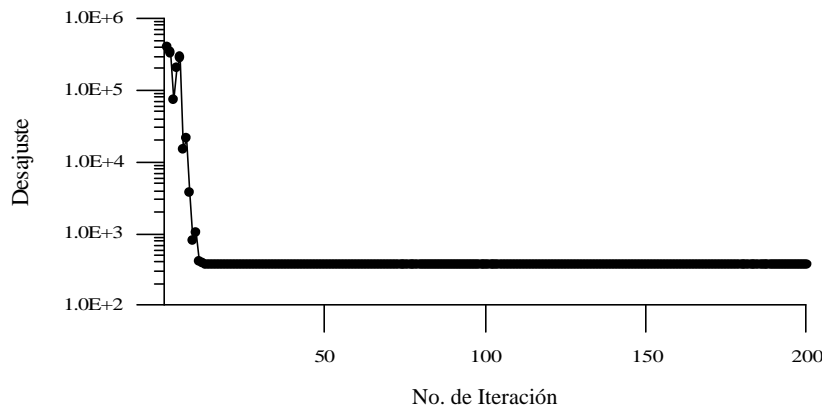


FIGURA 5.55. Evolución del desajuste q_s .

El modelo resultante elegido como solución se presenta en la figura 5.56. Podemos comparar este modelo con el modelo sintético utilizado para generar los datos de gravedad utilizados en el problema, que se puede ver en la figura 3.15. Vemos que la densidad es casi la misma pero se presentan ciertas variaciones en la frontera inferior del cuerpo.

Para cuantificar las diferencias entre la anomalía del modelo resultante y la anomalía del modelo sintético, se presenta el residual correspondiente en la figura 5.57. Este residual es del mismo orden de magnitud que el error utilizado para contaminar los datos de gravedad y la diferencia máxima alcanzada entre ambas anomalías es de 0.9 mGal, la cual no es muy grande si la comparamos con la amplitud máxima de la anomalía gravimétrica que es de 57.4 mGal. Podemos ver también que el residual no presenta ninguna tendencia, positiva o negativa, en ninguna zona de la malla y, además, es del mismo orden que el error aleatorio que contamina los datos, lo que indica que la solución se puede considerar satisfactoria.

Los valores numéricos, obtenidos en el modelo resultante para los parámetros que determinan el contraste de densidad y la estructura de esta fuente, se presentan en las tablas 5.21, 5.22 y 5.23, donde se pueden comparar con los parámetros correspondientes al modelo utilizado para iniciar el proceso y con los del modelo generador de los datos de gravedad libres de ruido.

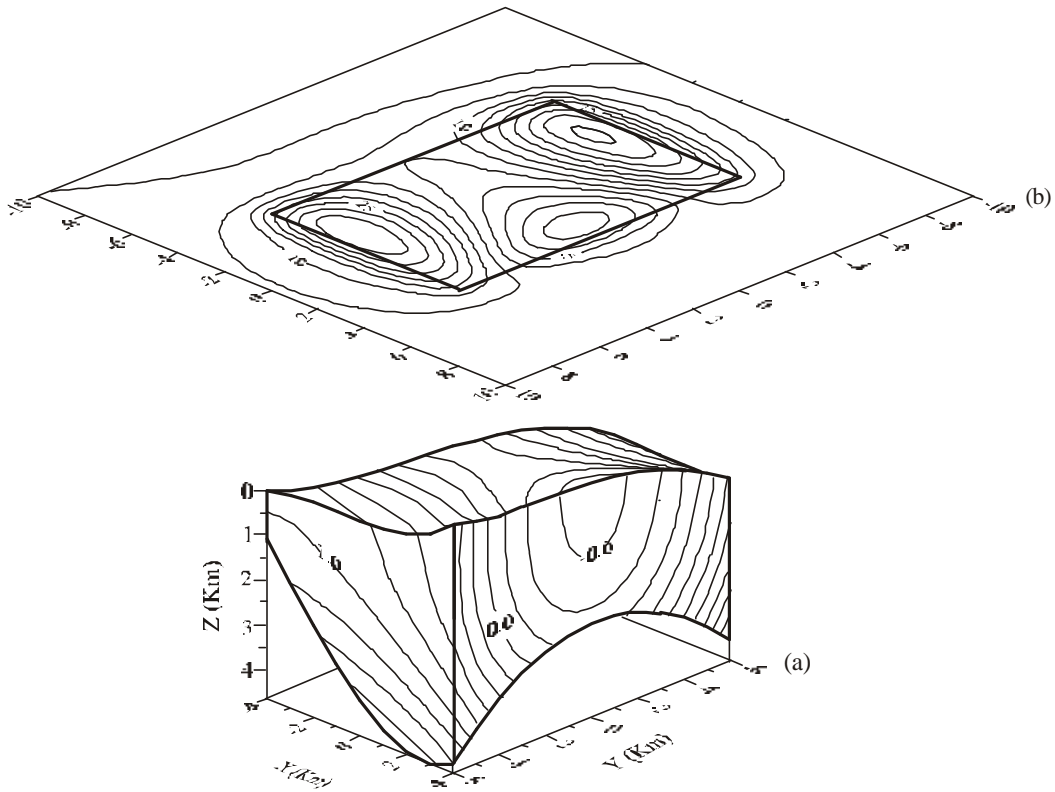


FIGURA 5.56. (a) Modelo resultante de fuente anómala obtenido en el proceso de inversión del ejemplo correspondiente a fuentes limitadas superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x e y , con datos contaminados con ruido aleatorio. Las líneas de igual densidad en la fuente vienen expresadas en g/cm^3 . (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a). Las isolíneas de la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la proyección del cuerpo anómalo sobre la anomalía.

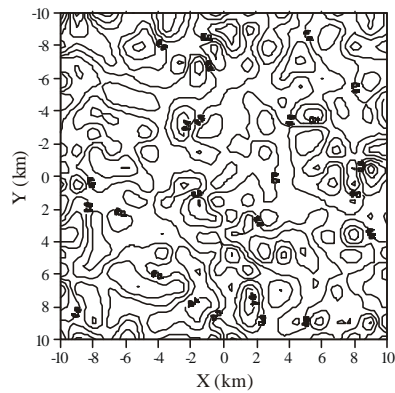


FIGURA 5.57. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad sintéticos y la anomalía gravimétrica del modelo resultante en el proceso de inversión.

DENSIDAD	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
Modelo Inicial	-0.1000	-0.0200	0.0400	0.0500	0.0010	-0.0010	-0.0009	-0.0200	0.0700	-0.0100
Modelo Resultante	-0.2887	-0.0546	0.0035	0.0053	-0.0022	0.0040	-0.0020	-0.0096	0.0310	0.0502
Modelo Sintético	-0.3000	-0.0500	0.0100	0.0900	-0.0020	-0.0030	-0.0040	-0.0100	0.0300	0.0100

TABLA 5.21. Parámetros del contraste de densidad correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

FRONTERA $l_2(x,y)$	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}
Modelo Inicial	3.0000	-0.0200	-0.0400	0.0200	-0.0020	0.0050	-0.0100	-0.0070	0.0010	-0.0030
Modelo Resultante	3.5762	0.0183	-0.0506	0.0365	-0.0381	0.0154	-0.0047	0.0082	-0.0067	0.0002
Modelo Sintético	4.0000	0.0300	-0.0100	0.0500	0.0010	0.0030	-0.0030	0.0080	0.0050	-0.0010

TABLA 5.22. Parámetros de la frontera $l_2(x,y)$ de la estructura correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

ESTRUCTURA	FRONTERA x_1	FRONTERA x_2	FRONTERA y_1	FRONTERA y_2
	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}
Modelo Inicial	-4.0000	4.0000	-6.0000	6.0000
Modelo Resultante	-4.0087	4.0360	-5.9990	5.9689
Modelo Sintético	-4.0000	4.0000	-6.0000	6.0000

TABLA 5.23. Parámetros de las fronteras x_1 , x_2 , y_1 e y_2 correspondientes a cada uno de los tres modelos que participan en el proceso de inversión.

5.2.2.1. Evolución de los parámetros del modelo

En la figura 5.58 se presenta la evolución del factor de amortiguación a lo largo de las 135 iteraciones realizadas en la inversión para obtener el modelo solución elegido para el problema que nos ocupa. Podemos ver que este factor varía fuertemente en las primeras iteraciones pero luego se estabiliza haciéndose constante hasta el final del proceso.

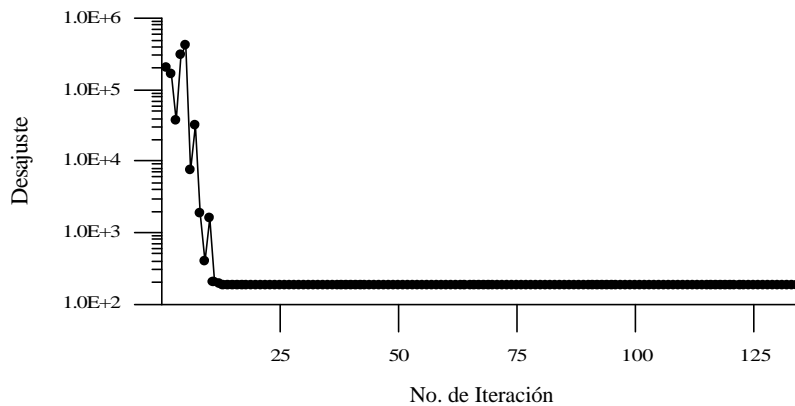


FIGURA 5.58. Evolución del factor de amortiguación \mathbf{b}^{-1} .

La figura 5.59 nos muestra la evolución de los diez parámetros que describen el contraste de densidad en las 135 iteraciones del proceso. Podemos ver que, para todos los parámetros, se alcanza la convergencia hacia la solución del problema en las 30 primeras iteraciones del proceso.

En la figura 5.60 se puede ver la evolución de los parámetros de la frontera inferior hacia la solución del problema. Podemos ver que en las primeras iteraciones los parámetros varían bruscamente para luego converger a la solución del problema alrededor de la iteración 75.

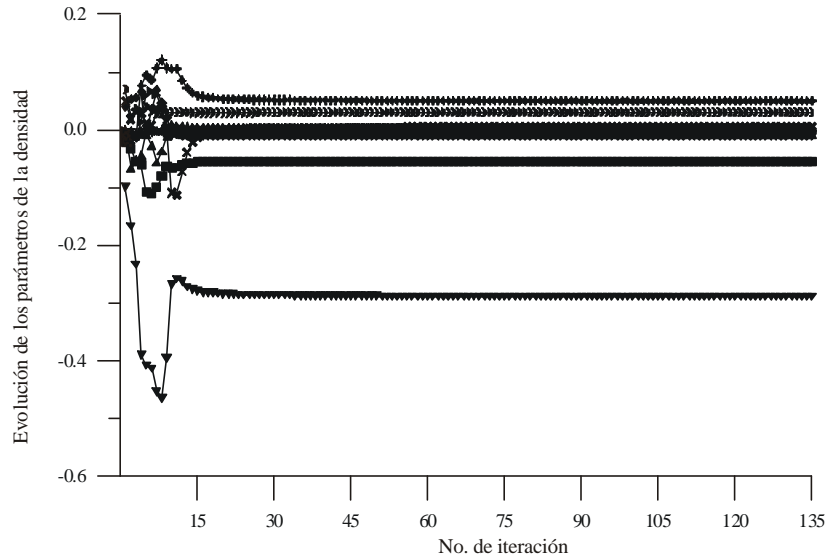


FIGURA 5.59. Evolución de los parámetros del contraste de densidad desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: $p_1(\blacktriangledown)$; $p_2(\blacksquare)$; $p_3(\blacksquare)$; $p_4(\blacktimes)$; $p_5(\blackstar)$; $p_6(\blacktriangle)$; $p_7(\blacktriangleright)$; $p_8(\blacklozenge)$; $p_9(\blacktriangleright)$; $p_{10}(\blacklozenge)$.

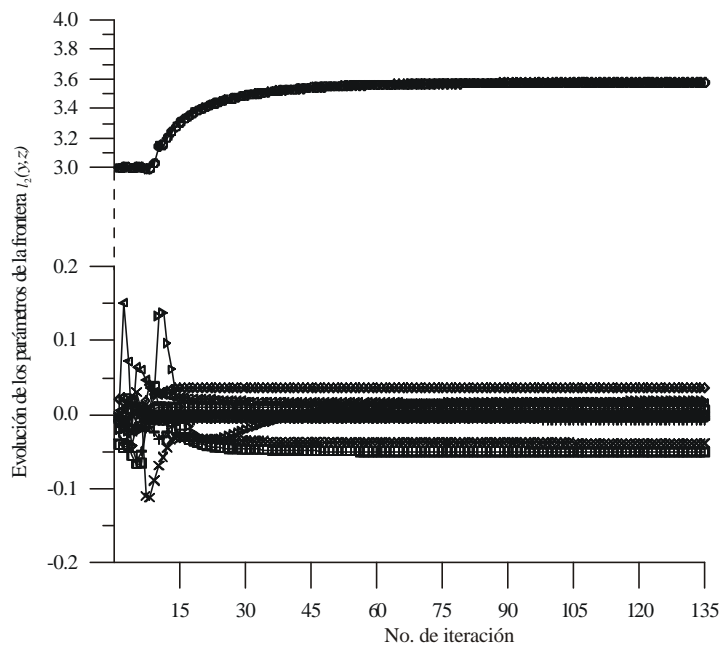


FIGURA 5.60. Evolución de los parámetros de la frontera inferior $I_f(y,z)$ desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: $p_{11}(\blacklozenge)$; $p_{12}(\blacktriangleright)$; $p_{13}(\blacksquare)$; $p_{14}(\blacklozenge)$; $p_{15}(\blacktimes)$; $p_{16}(\blacktriangleleft)$; $p_{17}(\blacklozenge)$; $p_{18}(\blacklozenge)$; $p_{19}(\blackplus)$; $p_{20}(\blacklozenge)$.

La evolución de los parámetros de las cuatro fronteras laterales se puede ver en la figura 5.61, en la que también se observa que existe convergencia, pero esta vez antes de la iteración número 15.

Con esto podemos decir que se ha alcanzado una solución posible y estable para nuestro problema, pero que debido al error aleatorio presente en los datos, no se llegan a reproducir todos los valores numéricos de los parámetros del modelo sintético que generan los datos de gravedad sin ruido. Los que peor se ajustan son aquéllos que pertenecen a la frontera inferior de la fuente anómala.

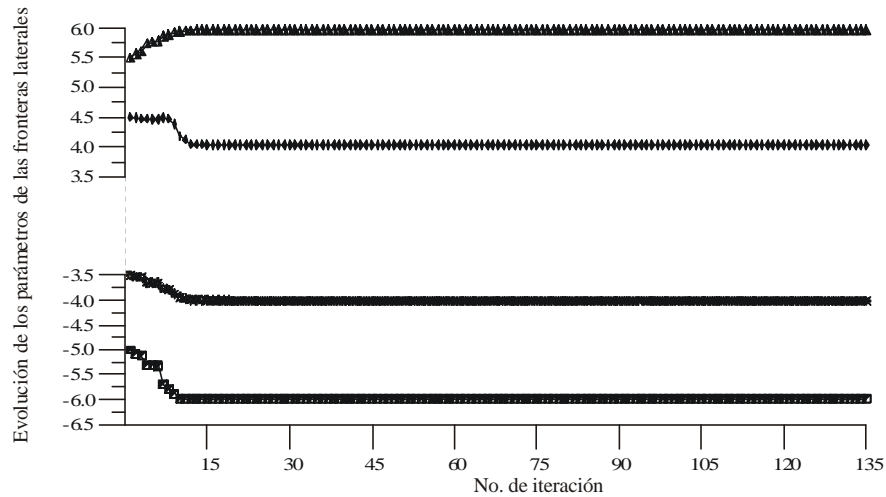


FIGURA 5.61. Evolución de los parámetros de las fronteras laterales desde el modelo inicial al modelo resultante del proceso de inversión. Las correspondencias entre los símbolos y los parámetros son: p_{11} (■); p_{12} (▲); p_{13} (□); p_{14} (▲).

5.2.2.2 Análisis de la sensibilidad, existencia, unicidad y estabilidad

A continuación se van a graficar las columnas de la matriz jacobiano para realizar el estudio de la sensibilidad de los datos de este problema. En la figura 5.62 se presentan las diez primeras columnas del jacobiano, correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a los parámetros del contraste de densidad. Si comparamos esta figura con la figura 5.48 de la sección 5.2.1, vemos que las diez gráficas presentan las mismas características, por lo que la interpretación es la misma. Como siempre, los datos son más sensibles a las variaciones sufridas por el parámetro p_9 ya que, como se puede ver en la gráfica (i) de la figura 5.62, ésta presenta la mayor intensidad de todas, con dos lóbulos positivos de $4675.6 \frac{\text{mGal km}^3}{\text{g/cm}^3}$ y $4604.6 \frac{\text{mGal km}^3}{\text{g/cm}^3}$. La que presenta menor intensidad es la gráfica (a), correspondiente al parámetro p_1 , que tienen un sólo lóbulo central positivo de $300.9 \frac{\text{mGal}}{\text{g/cm}^3}$.

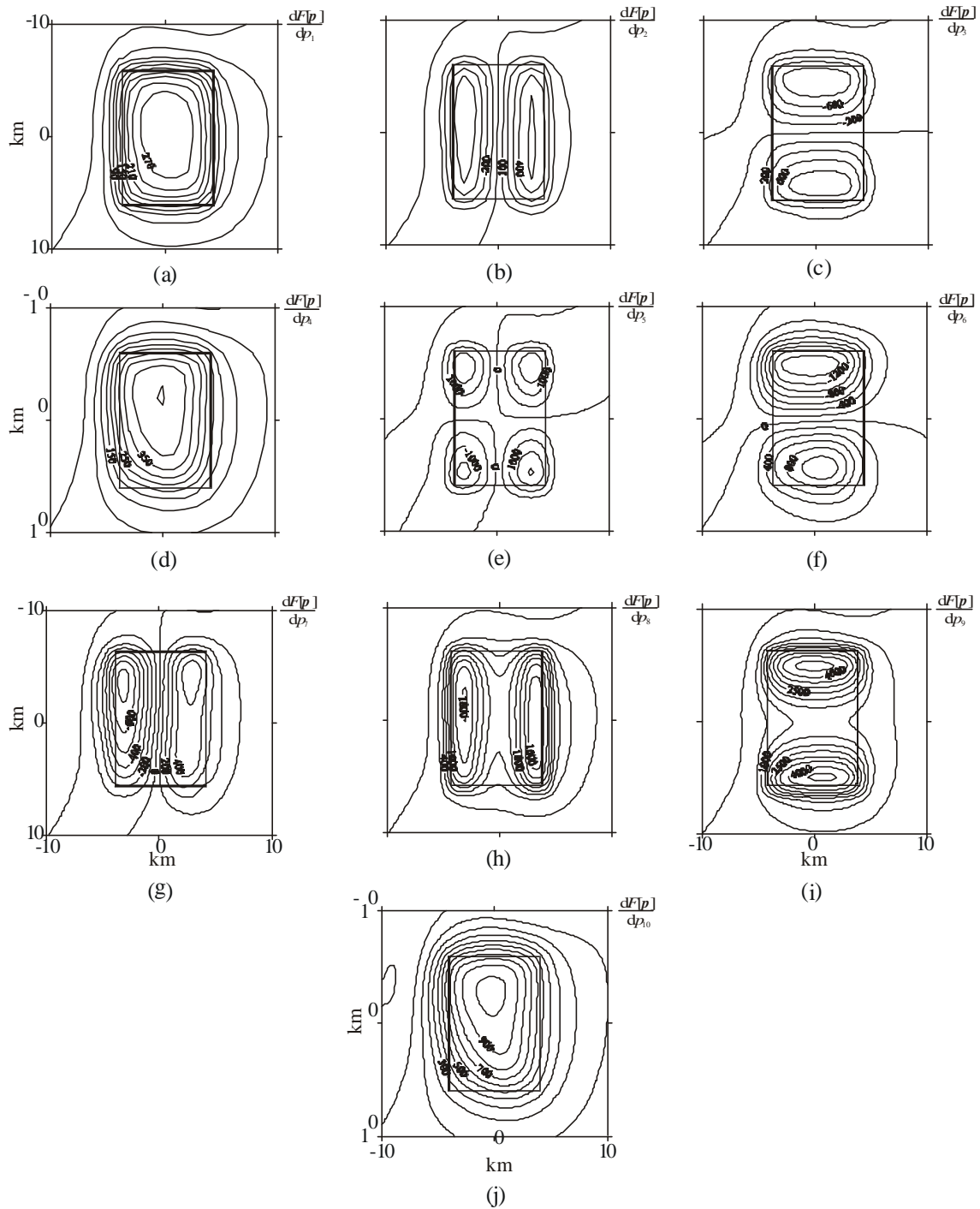


FIGURA 5.62. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen el contraste de densidad. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

En la figura 5.63 podemos ver la sensibilidad de los datos de gravedad del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera inferior $l_2(x,y)$ del cuerpo anómalo. Si comparamos esta figura con la figura 5.49 del problema en el que no se consideraron errores en los datos, podemos ver que las gráficas de ambas figuras se parecen mucho, aunque las intensidades correspondientes no son del mismo orden.

De las diez gráficas la que presenta mayor intensidad es la (j), como sucedía también en la figura 5.49. Esta gráfica nos proporciona información acerca de la sensibilidad de los datos con respecto al parámetro p_{20} que acompaña al término y^3 del polinomio (5.10). Se pueden ver dos lóbulos, uno de intensidad -2431.0 mGal km², situado sobre la frontera y_1 , y otro de intensidad 2739.1 mGal km², situado sobre la frontera lateral y_2 . La gráfica que presenta menor intensidad es la correspondiente a la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_1 . Esta gráfica también presenta dos lóbulos, pero esta vez ambos son positivos, uno de intensidad 29.8 mGal km¹, sobre la frontera y_1 , y otro de intensidad 33.2 mGal km¹ sobre la frontera y_2 .

La sensibilidad de los datos con respecto a los parámetros que determinan las fronteras laterales del cuerpo se puede ver en las cuatro gráficas de la figura 5.64. Las formas e intensidades de dichas gráficas son muy parecidas a las que aparecen en la figura 5.50.

La gráfica (a) muestra la sensibilidad con respecto al parámetro p_{21} , correspondiente a la frontera x_1 . Tiene dos lóbulos de intensidad negativa situados en las esquinas que forma dicha frontera con y_1 e y_2 . Los valores numéricos de dichas intensidades son -36.6 mGal km¹ y -26.7 mGal km¹, respectivamente.

La gráfica (b) es la derivada de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al parámetro p_{22} que define la frontera x_2 . Presenta tres lóbulos, uno negativo centrado en la posición de esta frontera de intensidad -39.1 mGal km¹, y dos positivos situados sobre las esquinas que forma x_2 con las fronteras y_1 e y_2 cuyas intensidades son 11.6 mGal km¹ y 6.6 mGal km¹, respectivamente.

La gráfica (c) corresponde a la derivada con respecto al parámetro p_{23} de la frontera y_1 y tiene un único lóbulo centrado sobre dicha frontera de intensidad -88.3 mGal km¹. La gráfica (d) corresponde al parámetro p_{24} de la frontera y_2 y también presenta un solo lóbulo, pero éste de intensidad positiva, cuyo valor es 90.6 mGal km¹.

Como se ha podido ver en estas figuras, la adición de ruido aleatorio aumenta, en general, la intensidad de la sensibilidad de los datos frente a los posibles cambios que se puedan producir tanto en el contraste de densidad como en la estructura de la fuente anómala.

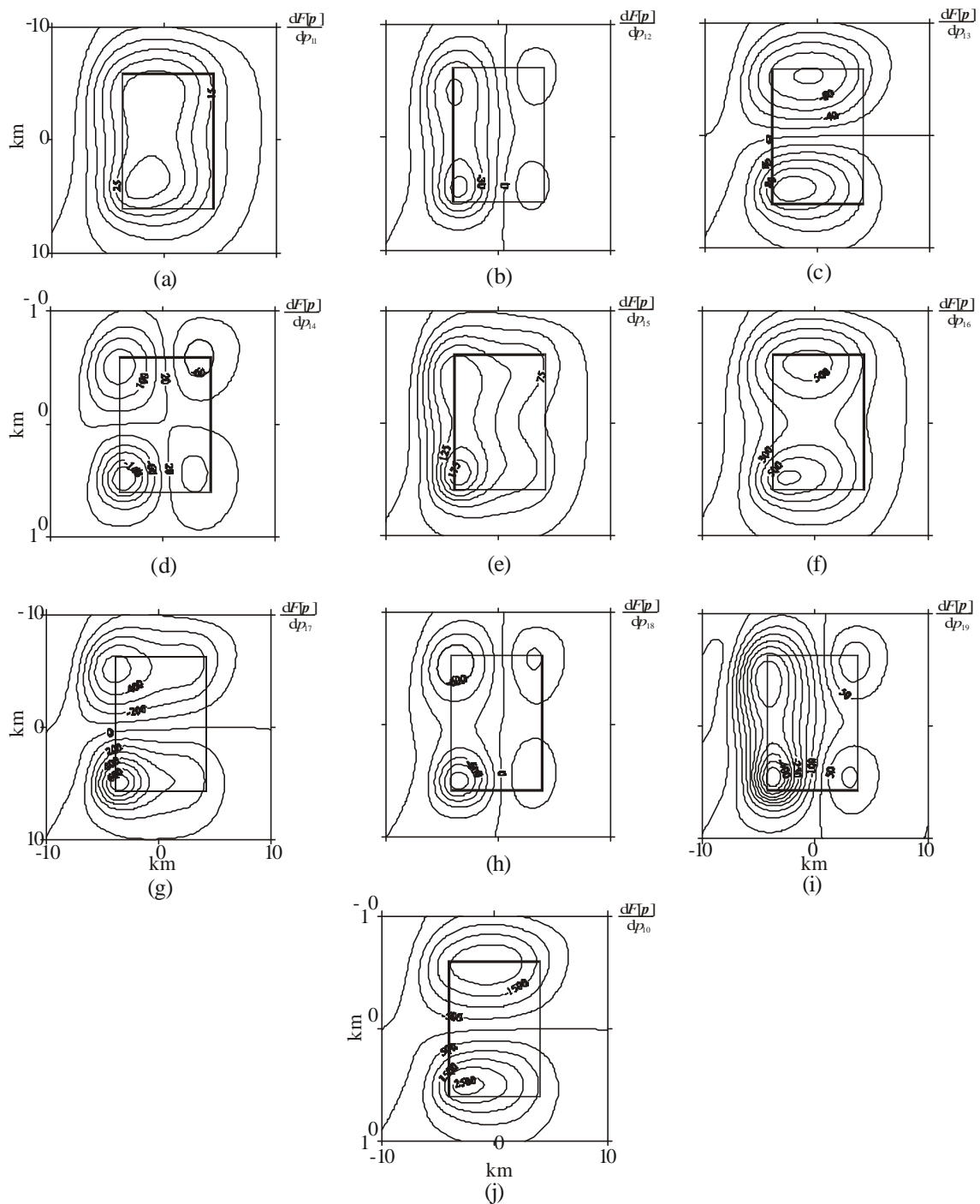


FIGURA 5.63. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la frontera inferior $l_2(x,y)$. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

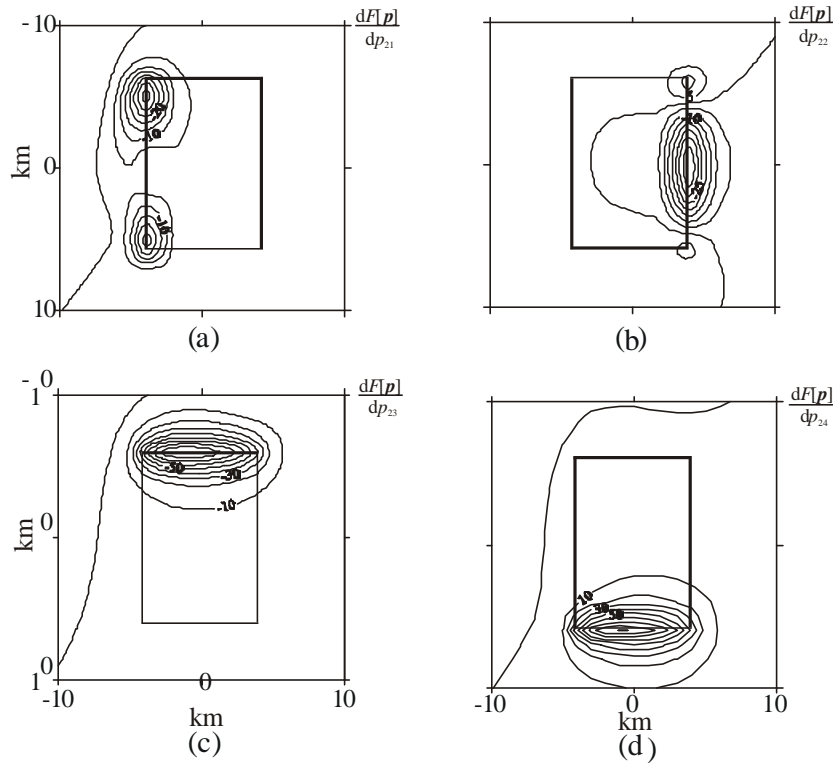


FIGURA 5.64. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[p]$ del problema con respecto a los parámetros que definen las fronteras laterales. La línea resaltada representa la proyección de la fuente sobre la malla de datos.

A continuación vamos a calcular la descomposición en valores singulares de la matriz jacobiano J del sistema de ecuaciones del problema para estudiar las combinaciones de parámetros mejor resueltas por los datos de gravedad.

La figura 5.65 nos muestra los veinticuatro valores singulares distintos de cero de la matriz J colocados por orden de tamaño y normalizados por la desviación estándar de los datos $\sigma = 0.35$ mGal. Esta matriz es de rango completo, por lo que la existencia y la unicidad de este problema están aseguradas.

Dividiendo el valor singular más grande por el valor singular más pequeño se obtiene la condición de J , que nos va a dar una idea del carácter singular o no singular de dicha matriz. El valor numérico de la condición es $k = 9.724 \cdot 10^2$, el cual no es un valor muy elevado. Esto indica que el jacobiano está lejos de ser singular y que, aun cuando no se ha alcanzado totalmente la solución esperada dada por el modelo sintético, sí que se ha llegado a una solución estable del problema, como lo indican las gráficas de las evoluciones de los parámetros presentadas anteriormente. El hecho de que la solución alcanzada no sea idéntica al modelo sintético no quiere decir que ésta no sea del todo

satisfactoria, ya que algunos de sus parámetros sí presentan los valores esperados, como por ejemplo las fronteras laterales del cuerpo, y su representación gráfica es muy parecida a la del modelo sintético, como se observa al comparar las figuras 5.56 y 3.15. Hay que tener en cuenta que el desajuste obtenido para la solución es menor que la tolerancia permitida, lo que indica que el modelo resultante va a intentar sobredeterminar los datos de gravedad, esto es, va a intentar reproducir no sólo la anomalía sin ruido, sino también va a intentar reproducir el mismo ruido que la contamina.

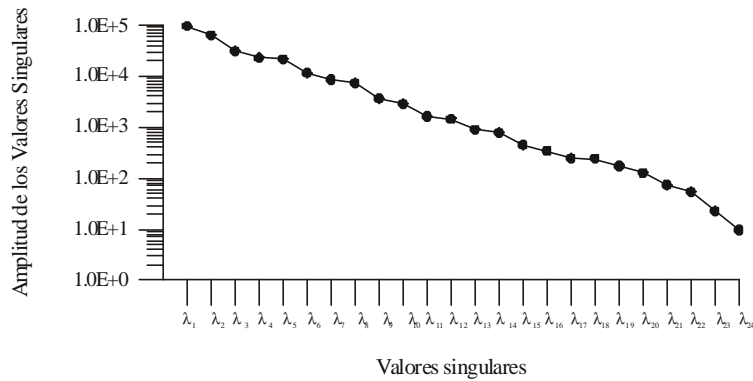


FIGURA 5.65. Valores singulares del jacobiano del problema.

En la figura 5.66 se presentan los valores singulares y los errores característicos correspondientes, junto con las gráficas de los vectores característicos tanto del espacio de los datos, \mathbf{u}_i , como del espacio de los parámetros, \mathbf{v}_i^T . Si comparamos las combinaciones que aparecen en las gráficas de esta figura con las que aparecen en la figura 5.52, para el ejemplo en el que no se consideraron errores en los datos, podemos ver que muchas de las combinaciones son las mismas.

La primera combinación está formada por los pesos correspondientes a los parámetros p_8 , p_9 y p_{10} . Estos parámetros son los primeros que alcanzan su solución a lo largo de todas las iteraciones del proceso. Si comparamos los valores de estos parámetros con los del modelo sintético en la tabla 5.21, podemos ver que tanto el parámetro p_8 como el p_9 han alcanzado los valores esperados, siendo estos parámetros los que presentan mayor peso en la combinación. El valor singular asociado, normalizado por el error, es $I_1 = 9.449 \cdot 10^4$ y el error característico correspondiente es $e_1^* = 1.058 \cdot 10^{-5}$, lo que indica que el error en los datos no se va a propagar en la dirección del vector característico \mathbf{v}_1^T y, por tanto, no va a producir inestabilidades en la resolución de los parámetros. Los datos que participan en la resolución de esta combinación se encuentran situados sobre las posiciones de las fronteras y_1 e y_2 , lo mismo que se veía en la figura 5.52.

La segunda combinación está formada por los parámetros p_3 , p_6 , p_{17} y p_{20} . El valor singular asociado es $I_2 = 6.295 \cdot 10^4$ y el error característico correspondiente es $e_2^* = 1.589 \cdot 10^{-5}$. Esta combinación también es la misma que la correspondiente en la figura 5.52.

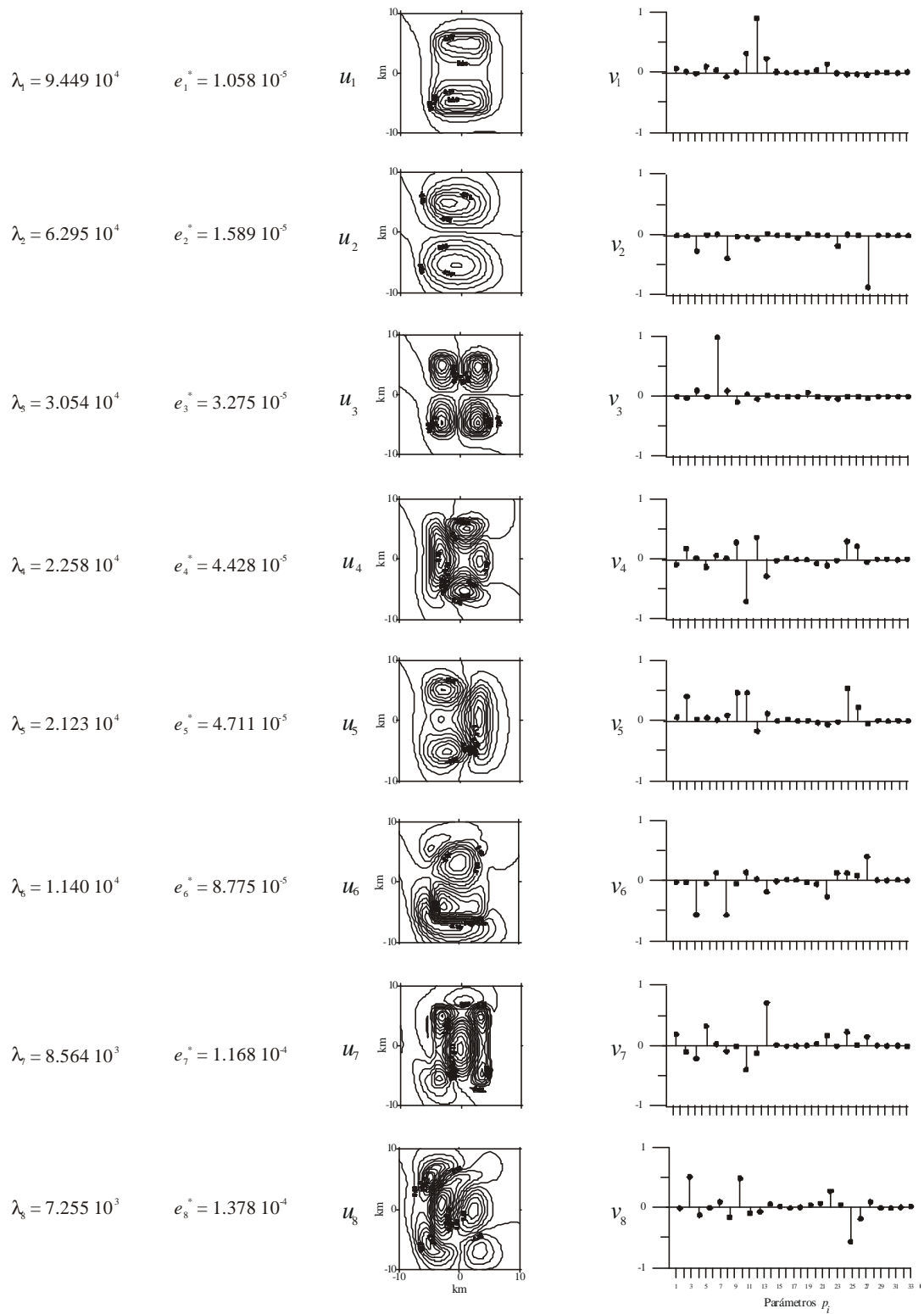


FIGURA 5.66. Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

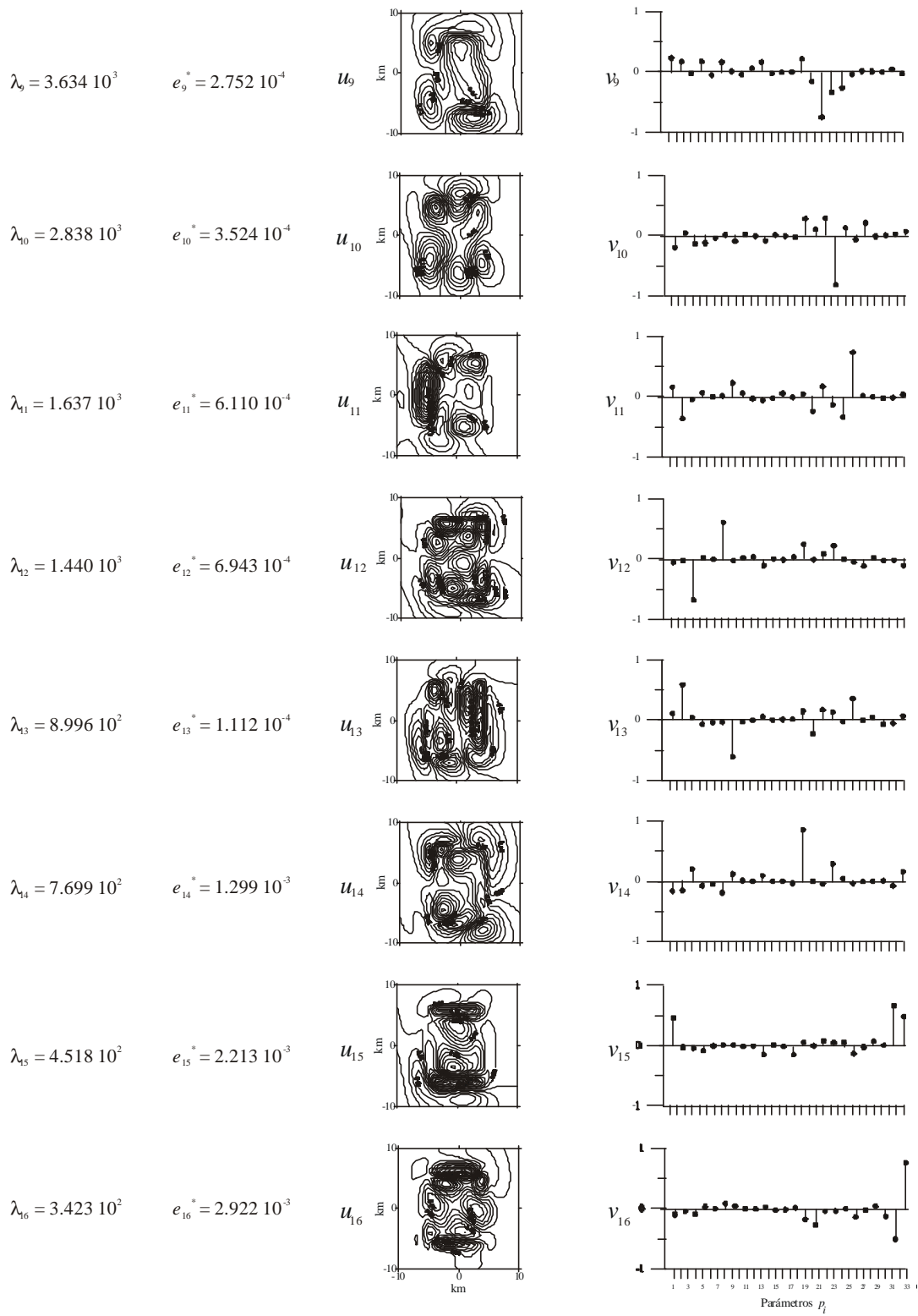


FIGURA 5.66 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

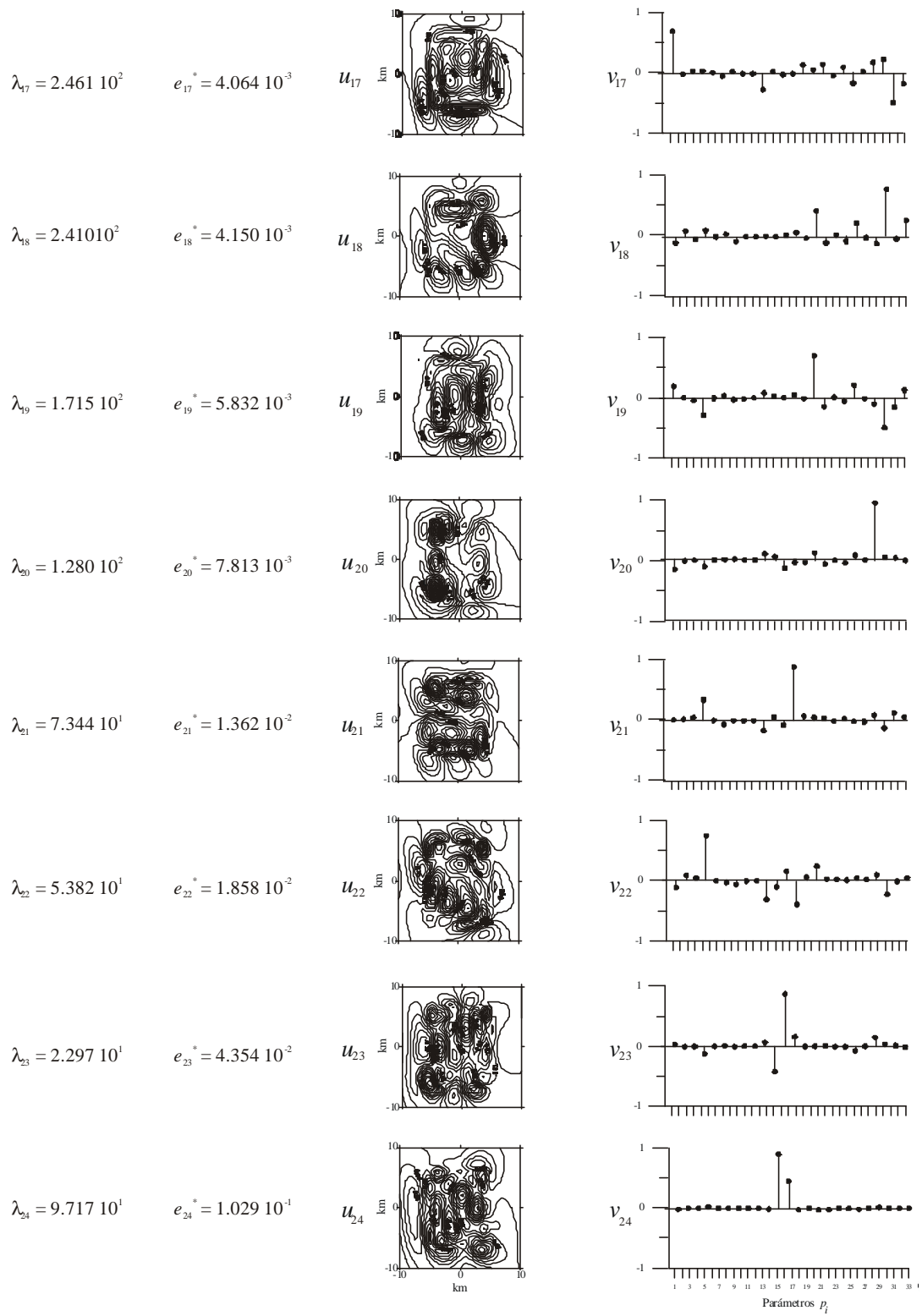


FIGURA 5.66 (Continuación). Representación gráfica de las columnas de las matrices U_h y V_h del jacobiano del problema.

La tercera combinación está formada exclusivamente por la componente de \mathbf{v}_3^T correspondiente a p_5 , por lo que este parámetro debe presentar una resolución muy buena al no compartir la combinación con ningún otro parámetro y por estar asociado a un error característico pequeño $e_3^* = 3.275 \cdot 10^{-5}$, correspondiente al tercer valor singular $I_3 = 3.054 \cdot 10^4$. De hecho, si nos fijamos en la tabla 5.21 podemos ver que este parámetro ha alcanzado la solución esperada. El conjunto de datos que resuelve este parámetro es el que tiene mayor sensibilidad al mismo, como se observa al comparar la representación gráfica de \mathbf{u}_3 con la gráfica 5.62(e).

A partir de la cuarta combinación, algunas de las combinaciones de parámetros de la figura 5.66 se parecen a las correspondientes combinaciones de la figura 5.52 y otras presentan grandes diferencias. De hecho en esta combinación, que está asociada al valor singular $I_4 = 2.258 \cdot 10^4$, no sólo aparecen representados los parámetros p_8 , p_9 y p_{10} , sino que también destacan las componentes de \mathbf{v}_4^T asociadas a los parámetros p_2 y p_7 , del contraste de densidad, y p_{18} y p_{19} de la frontera inferior. En este caso el error característico sigue siendo pequeño, con un valor $e_4^* = 4.428 \cdot 10^{-5}$. La gráfica del vector \mathbf{u}_4 para este caso vuelve a presentar cuatro lóbulos centrados sobre las fronteras laterales, como ocurría en la figura 5.52.

La quinta combinación está asociada al valor singular $I_5 = 2.123 \cdot 10^4$ y su error característico es de $e_5^* = 4.711 \cdot 10^{-5}$. Esta combinación está formada, en su mayor parte, por las componentes del vector \mathbf{v}_5^T correspondientes a los parámetros del contraste de densidad, pero también aparecen representados los parámetros p_{18} y p_{19} de la frontera inferior, lo mismo que en la cuarta combinación. Esto puede indicar la existencia de correlación entre ambos parámetros. En cuanto al vector característico de los datos, éste presenta dos lóbulos de intensidad negativa situados sobre las esquinas que forma la frontera lateral x_1 con las fronteras y_1 e y_2 , y un lóbulo de intensidad positiva sobre la frontera x_2 .

Las siguientes cinco combinaciones presentan las mismas componentes que para el caso sin errores, lo mismo que los correspondientes vectores característicos de los datos. Los errores característicos correspondientes son del orden de 10^{-4} , como se puede ver en la figura 5.66, por lo que estas combinaciones no presentan inestabilidades importantes.

En las siguientes combinaciones siguen destacando las componentes de los vectores característicos correspondientes a los parámetros del contraste de densidad y a la frontera inferior en mayor o menor medida. Los parámetros de las fronteras laterales x_1 , x_2 , y_1 e y_2 comienzan a tener peso a partir de la combinación decimocuarta, siendo los mejores resueltos los correspondientes a las fronteras y_1 e y_2 , ya que están asociados a las combinaciones con menor error característico.

Los parámetros peor resueltos de todos los que describen el tipo de fuentes que estamos estudiando son el p_{11} y el p_{12} , pertenecientes a la frontera inferior del cuerpo, puesto que están asociados a las combinaciones correspondientes a los valores singulares más pequeños y por tanto presentan un error característico grande.

Hay que destacar que ninguna de las veinticuatro combinaciones de parámetros para este caso están asociadas a errores característicos mayores que la unidad. Esto indica que todas estas combinaciones proporcionan información importante acerca de la resolución y la correlación de los parámetros de la fuente, a pesar de la existencia de error en los datos de gravedad del problema.

Como en el caso sin errores, los parámetros mejor resueltos son aquellos que describen el contraste de densidad de la fuente anómala y los correspondientes a los términos de segundo y tercer grado del polinomio de la frontera inferior, mientras que el parámetro peor resuelto es el término independiente de dicho polinomio, que nos proporciona la profundidad media de esta frontera.

5.2.2.3. Resolución de los parámetros

A continuación vamos a estudiar la resolución de los parámetros de la fuente anómala para este caso a partir de la ecuación (1.55). Para ello calculamos la varianza residual mediante la ecuación (1.55) con $M - N = 376$ grados de libertad. El valor de la varianza residual obtenido es de $\hat{\mathbf{s}}^2 = 0.12$ mGal², igual que el de la varianza estimada para los datos $\mathbf{s}^2 = 0.12$ mGal², lo que indica que el modelo resultante para la fuente anómala explica los datos utilizados satisfactoriamente.

En la figura 5.67 se presenta la matriz de resolución de los parámetros. En ella se puede ver que la mayoría de los mismos presentan muy buena resolución. Los parámetros del contraste de densidad tienen máxima resolución. En cuanto a los parámetros de la frontera inferior, los peor resueltos son el p_{11} y el p_{12} que, como vimos en la figura 5.66, pertenecen a las combinaciones asociadas a los valores singulares más pequeños y por tanto tienen errores característicos más grandes. De las fronteras laterales las peor resueltas son x_1 y x_2 , ya que pertenecen a combinaciones que presentan mayor error que las combinaciones donde aparecen las fronteras y_1 e y_2 .

5.2.2.4. Covarianza de los parámetros

En la tabla 5.24 se presentan los valores numéricos de los elementos de la matriz de covarianza calculada mediante la ecuación (1.63) y con la varianza residual $\hat{\mathbf{s}}^2 = 0.12$ mGal². A partir de los elementos de la diagonal principal de dicha matriz se calculan las incertidumbres de los parámetros del modelo resultante para este ejemplo, teniendo en cuenta un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \mathbf{s}$, las cuáles son presentadas, junto a los parámetros correspondientes, en la tabla 5.25.

5.2.2.5. Correlación entre los parámetros

La matriz de correlación de los parámetros se puede ver en la figura 5.68 y los valores numéricos de sus elementos se presentan en la tabla 5.26, en la que se puede ver qué correlaciones son negativas o positivas.

Como se puede observar en dicha figura, hay una fuerte correlación entre todos los parámetros del contraste de densidad. También se producen correlaciones entre los parámetros del contraste de densidad y los que definen la estructura del cuerpo, sobre todo con el p_{14} , el p_{15} y el p_{22} . También hay correlación entre los parámetros de la frontera inferior p_{14} , p_{15} , p_{16} , p_{17} y p_{18} .

Los parámetros de las fronteras laterales y_1 e y_2 no presentan correlaciones importantes entre sí ni con el resto de los parámetros que definen la fuente anómala.

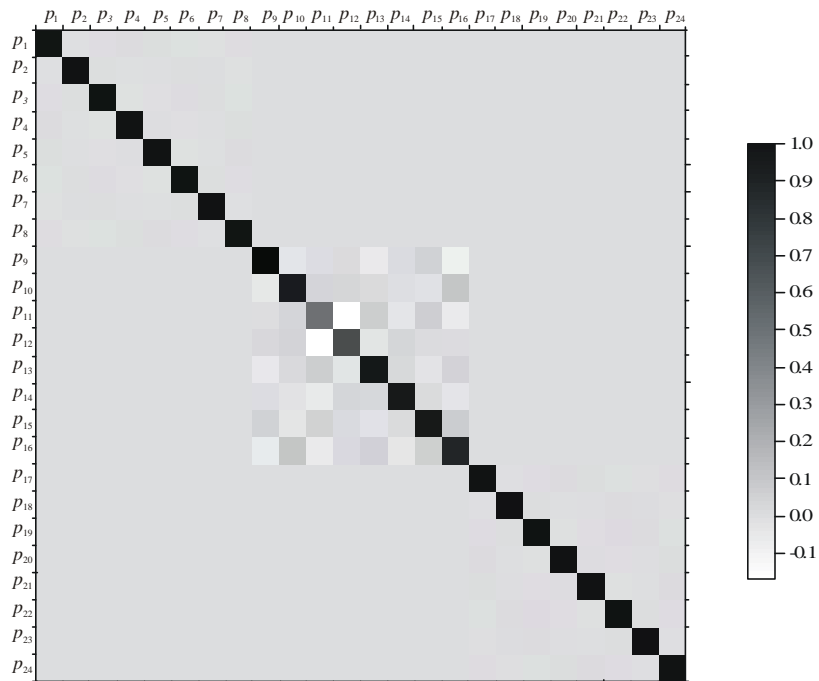


FIGURA 5.67. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
2.091 10⁶	-4.032 10 ⁷	-2.095 10 ⁷	-3.848 10 ⁶	1.087 10 ⁸	9.807 10 ⁸	2.962 10 ⁷	5.379 10 ¹⁰	2.752 10 ¹⁰	1.142 10 ⁶	-3.634 10 ⁶	1.197 10 ⁶	p_1
	3.252 10⁷	1.500 10 ⁷	2.390 10 ⁶	-1.217 10 ⁸	-1.202 10 ⁷	-2.793 10 ⁷	-3.366 10 ⁸	-1.284 10 ⁸	-9.993 10 ⁷	3.338 10 ⁷	-2.960 10 ⁸	p_2
		1.872 10⁷	1.734 10 ⁶	-7.058 10 ⁹	-1.819 10 ⁷	-1.117 10 ⁷	-2.097 10 ⁸	-1.404 10 ⁸	-7.684 10 ⁷	3.054 10 ⁷	-3.339 10 ⁷	p_3
			2.496 10⁸	-6.574 10 ⁸	-1.522 10 ⁶	-1.806 10 ⁶	-2.765 10 ⁷	-1.457 10 ⁷	-1.077 10 ⁵	7.022 10 ⁶	-9.045 10 ⁶	p_4
				1.547 10⁹	5.868 10 ⁹	1.324 10 ⁸	1.399 10 ⁹	4.439 10 ¹⁰	2.615 10 ⁸	3.931 10 ⁸	-1.242 10 ⁷	p_5
					1.920 10⁷	8.652 10 ⁸	2.012 10 ⁸	1.470 10 ⁸	7.086 10 ⁷	-2.366 10 ⁷	2.172 10 ⁷	p_6
						2.657 10⁷	2.959 10 ⁸	9.448 10 ⁹	7.480 10 ⁷	-1.191 10 ⁷	-1.424 10 ⁶	p_7
							6.432 10⁸	2.084 10 ⁹	1.290 10 ⁷	1.673 10 ⁷	8.465 10 ⁹	p_8
								1.595 10⁹	6.970 10 ⁸	4.526 10 ⁸	6.272 10 ⁸	p_9
									4.869 10⁶	-4.225 10 ⁶	4.191 10 ⁶	p_{10}
										1.413 10⁴	1.259 10 ⁵	p_{11}
											1.232 10⁴	p_{12}

TABLA 5.24. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	
2.488 10 ⁻⁶	-3.574 10 ⁸	-5.732 10 ⁷	1.961 10 ⁹	-1.617 10 ⁹	1.413 10 ⁷	-6.082 10 ⁸	-5.572 10 ⁸	-7.742 10 ⁷	8.355 10 ⁷	-4.642 10 ⁸	-3.715 10 ⁷	p_1
-9.654 10 ⁻⁷	1.764 10 ⁷	7.719 10 ⁷	5.965 10 ⁸	7.710 10 ⁸	9.938 10 ⁹	2.310 10 ⁷	2.860 10 ⁸	9.562 10 ⁸	-6.259 10 ⁷	1.246 10 ⁸	1.892 10 ⁷	p_2
9.353 10 ⁻⁸	2.190 10 ⁷	3.185 10 ⁷	1.056 10 ⁷	2.941 10 ⁸	5.536 10 ⁸	5.181 10 ⁸	8.876 10 ⁹	1.594 10 ⁷	-5.048 10 ⁷	1.166 10 ⁷	2.873 10 ⁸	p_3
-6.950 10 ⁻⁶	2.117 10 ⁶	5.867 10 ⁶	9.205 10 ⁻⁷	5.968 10 ⁷	4.817 10 ⁷	1.880 10 ⁶	2.448 10 ⁷	3.078 10 ⁷	-6.952 10 ⁶	4.206 10 ⁶	1.766 10 ⁶	p_4
2.477 10 ⁻⁸	-1.624 10 ⁸	-3.097 10 ⁸	-2.525 10 ⁹	-5.196 10 ⁹	7.443 10 ¹⁰	-1.020 10 ⁹	-7.829 10 ¹⁰	-9.715 10 ⁹	2.070 10 ⁸	-3.381 10 ⁹	9.537 10 ¹⁰	p_5
-6.070 10 ⁻⁷	-2.299 10 ⁷	-2.509 10 ⁷	-1.212 10 ⁷	-1.261 10 ⁸	-6.583 10 ⁸	-1.431 10 ⁹	4.346 10 ⁹	-1.606 10 ⁷	4.533 10 ⁷	-1.436 10 ⁷	-2.078 10 ⁸	p_6
7.632 10 ⁻⁷	-1.425 10 ⁷	-7.056 10 ⁷	-3.368 10 ⁸	-6.399 10 ⁸	1.493 10 ⁸	-1.163 10 ⁷	-2.207 10 ⁸	-2.247 10 ⁷	5.205 10 ⁷	-6.990 10 ¹⁰	-1.378 10 ⁷	p_7
3.766 10 ⁻⁸	-3.194 10 ⁸	-1.294 10 ⁷	-1.504 10 ⁸	-7.329 10 ⁹	-7.502 10 ⁹	-1.940 10 ⁸	-1.730 10 ⁹	4.721 10 ⁹	1.203 10 ⁷	4.569 10 ⁹	-2.058 10 ⁸	p_8
-1.832 10 ⁻⁸	-1.940 10 ⁸	-3.103 10 ⁸	-1.438 10 ⁸	-1.575 10 ⁹	-6.936 10 ⁹	-4.114 10 ⁹	-5.598 10 ¹⁰	2.325 10 ⁹	3.518 10 ⁸	1.175 10 ⁹	-8.343 10 ⁹	p_9
2.540 10 ⁻⁶	-1.022 10 ⁶	-2.511 10 ⁶	-4.736 10 ⁷	-2.291 10 ⁷	-2.852 10 ⁷	-7.109 10 ⁷	-1.016 10 ⁷	2.438 10 ⁷	3.069 10 ⁶	-3.783 10 ⁸	-7.053 10 ⁷	p_{10}
-8.878 10 ⁻⁶	1.336 10 ⁷	-3.814 10 ⁶	-4.016 10 ⁶	1.654 10 ⁷	-9.028 10 ⁷	1.401 10 ⁶	2.629 10 ⁷	-5.483 10 ⁶	-1.262 10 ⁶	-1.039 10 ⁶	8.433 10 ⁷	p_{11}
1.124 10 ⁻⁵	-3.024 10 ⁷	-6.672 10 ⁷	-1.036 10 ⁶	-6.003 10 ⁷	-1.463 10 ⁶	-9.088 10 ⁶	-2.693 10 ⁷	1.554 10 ⁵	1.973 10 ⁶	3.007 10 ⁷	-1.096 10 ⁶	p_{12}
2.467 10⁻⁵	3.332 10 ⁷	-2.344 10 ⁶	4.666 10 ⁷	-6.517 10 ⁷	1.734 10 ⁷	-2.190 10 ⁶	-6.973 10 ⁷	2.480 10 ⁶	1.480 10 ⁶	2.410 10 ⁶	2.221 10 ⁷	p_{13}
	4.489 10⁷	5.334 10 ⁷	1.666 10 ⁷	7.697 10 ⁸	9.555 10 ⁸	4.405 10 ⁸	-2.076 10 ¹⁰	1.304 10 ⁹	-6.447 10 ⁷	9.930 10 ⁸	3.612 10 ⁸	p_{14}
		4.723 10⁶	-1.826 10 ⁷	2.451 10 ⁷	-1.392 10 ⁷	1.282 10 ⁶	4.938 10 ⁸	1.239 10 ⁶	-2.721 10 ⁶	-3.276 10 ⁷	8.175 10 ⁷	p_{15}
			3.485 10⁷	-1.210 10 ⁸	1.484 10 ⁷	-1.935 10 ⁷	7.674 10 ¹⁰	-1.184 10 ⁷	-1.080 10 ⁷	1.004 10 ⁷	-1.085 10 ⁷	p_{16}
				6.788 10⁸	-3.388 10 ⁹	1.392 10 ⁷	1.078 10 ⁸	-1.185 10 ⁷	-1.664 10 ⁷	1.480 10 ⁸	6.983 10 ⁸	p_{17}
					9.767 10⁸	-5.474 10 ⁸	1.885 10 ⁹	-3.451 10 ⁷	-1.139 10 ⁷	3.048 10 ⁹	-2.690 10 ⁸	p_{18}
						1.273 10⁶	4.464 10 ⁸	-8.957 10 ⁷	-6.765 10 ⁷	-7.427 10 ⁸	3.148 10 ⁷	p_{19}
							2.350 10⁸	-4.788 10 ⁸	-5.166 10 ⁸	-8.352 10 ⁸	-3.872 10 ⁸	p_{20}
								9.413 10⁶	-1.279 10 ⁷	4.286 10 ⁷	-1.410 10 ⁷	p_{21}
									4.739 10⁶	-7.207 10 ⁸	-5.935 10 ⁷	p_{22}
										1.400 10⁶	-1.350 10 ⁸	p_{23}
											1.178 10⁶	p_{24}

TABLA 5.24 (Continuación). Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	FRONTERA INFERIOR	FRONTERAS LATERALES
$p_1 = -0.289 \pm 0.004 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{11} = 3.58 \pm 0.03 \text{ km}$	$P_{21} = -4.009 \pm 0.008 \text{ km}$
$p_2 = -0.0546 \pm 0.0015 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{12} = 0.02 \pm 0.03$	$p_{22} = 4.036 \pm 0.006 \text{ km}$
$p_3 = 0.0035 \pm 0.0011 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$P_{13} = -0.051 \pm 0.013$	$P_{23} = -5.999 \pm 0.003 \text{ km}$
$p_4 = 0.005 \pm 0.013 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{14} = 0.0365 \pm 0.0017 \text{ km}^{-1}$	$p_{24} = 5.969 \pm 0.003 \text{ km}$
$p_5 = -0.0022 \pm 0.0001 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{15} = -0.038 \pm 0.006 \text{ km}^{-1}$	
$p_6 = 0.0040 \pm 0.0011 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{16} = 0.015 \pm 0.015 \text{ km}^{-1}$	
$p_7 = -0.0020 \pm 0.0013 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{17} = -0.0047 \pm 0.0007 \text{ km}^{-2}$	
$p_8 = -0.0096 \pm 0.0002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{18} = 0.0082 \pm 0.0008 \text{ km}^{-2}$	
$p_9 = 0.0310 \pm 0.0001 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{19} = -0.007 \pm 0.003 \text{ km}^{-2}$	
$p_{10} = 0.050 \pm 0.006 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{20} = 0.0002 \pm 0.0004 \text{ km}^{-2}$	

TABLA 5.25. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

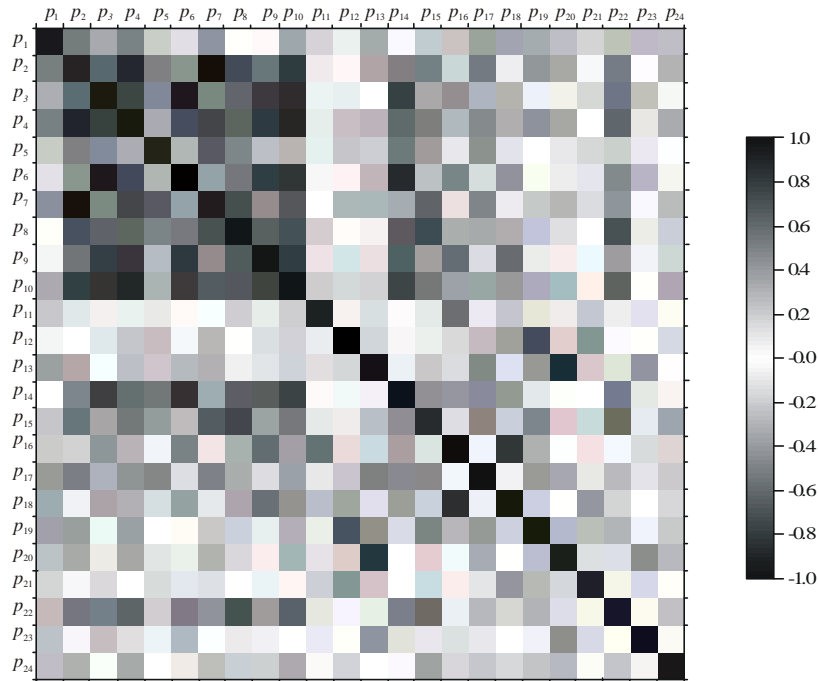


FIGURA 5.68. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	
$1.000 \cdot 10^0$	$-4.890 \cdot 10^1$	$-3.347 \cdot 10^1$	$-5.327 \cdot 10^1$	$1.912 \cdot 10^1$	$1.548 \cdot 10^1$	$3.973 \cdot 10^1$	$4.638 \cdot 10^1$	$4.764 \cdot 10^1$	$3.580 \cdot 10^1$	$-2.114 \cdot 10^1$	$7.459 \cdot 10^2$	p_1
	$1.000 \cdot 10^0$	$6.078 \cdot 10^1$	$8.389 \cdot 10^1$	$-5.427 \cdot 10^1$	$-4.811 \cdot 10^1$	$-9.500 \cdot 10^1$	$-7.359 \cdot 10^1$	$-5.638 \cdot 10^1$	$-7.942 \cdot 10^1$	$4.924 \cdot 10^2$	$-4.676 \cdot 10^1$	p_2
		$1.000 \cdot 10^0$	$8.022 \cdot 10^1$	$-4.147 \cdot 10^1$	$-9.593 \cdot 10^1$	$-5.006 \cdot 10^1$	$-6.042 \cdot 10^1$	$-8.128 \cdot 10^1$	$-8.048 \cdot 10^1$	$5.937 \cdot 10^2$	$-6.953 \cdot 10^2$	p_3
			$1.000 \cdot 10^0$	$-3.346 \cdot 10^1$	$-6.954 \cdot 10^1$	$-7.014 \cdot 10^1$	$-6.902 \cdot 10^1$	$-7.301 \cdot 10^1$	$-9.772 \cdot 10^1$	$1.182 \cdot 10^1$	$-1.631 \cdot 10^1$	p_4
				$1.000 \cdot 10^0$	$3.406 \cdot 10^1$	$6.528 \cdot 10^1$	$4.437 \cdot 10^1$	$2.826 \cdot 10^1$	$3.013 \cdot 10^1$	$8.409 \cdot 10^2$	$-2.845 \cdot 10^1$	p_5
					$1.000 \cdot 10^0$	$3.831 \cdot 10^1$	$5.726 \cdot 10^1$	$8.401 \cdot 10^1$	$7.330 \cdot 10^1$	$-4.543 \cdot 10^2$	$4.466 \cdot 10^2$	p_6
						$1.000 \cdot 10^0$	$7.157 \cdot 10^1$	$4.590 \cdot 10^1$	$6.576 \cdot 10^1$	$-1.944 \cdot 10^2$	$-2.488 \cdot 10^1$	p_7
							$1.000 \cdot 10^0$	$6.506 \cdot 10^1$	$7.289 \cdot 10^1$	$1.755 \cdot 10^1$	$9.509 \cdot 10^3$	p_8
								$1.000 \cdot 10^0$	$7.910 \cdot 10^1$	$9.533 \cdot 10^2$	$1.415 \cdot 10^1$	p_9
									$1.000 \cdot 10^0$	$-1.610 \cdot 10^1$	$1.711 \cdot 10^1$	p_{10}
										$1.000 \cdot 10^0$	$9.543 \cdot 10^2$	p_{11}
											$1.000 \cdot 10^0$	p_{12}

TABLA 5.26. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	P_{19}	P_{20}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}	
3.464 10 ¹	-3.689 10 ²	-1.824 10 ¹	2.297 10 ³	-4.291 10 ³	3.126 10 ³	-3.727 10 ³	-2.513 10 ³	-1.745 10 ³	2.654 10 ¹	-2.713 10 ¹	-2.367 10 ¹	p_1
-3.408 10 ¹	4.618 10 ¹	6.228 10 ¹	1.772 10 ¹	5.190 10 ¹	5.576 10 ²	3.590 10 ¹	3.272 10 ¹	5.465 10 ²	-5.042 10 ¹	1.847 10 ²	3.057 10 ¹	p_2
4.352 10 ²	7.553 10 ¹	3.387 10 ¹	4.133 10 ¹	2.609 10 ¹	4.094 10 ¹	1.061 10 ¹	1.338 10 ¹	1.201 10 ¹	-5.359 10 ¹	2.276 10 ¹	6.118 10 ²	p_3
-2.801 10 ¹	6.325 10 ¹	5.404 10 ¹	3.121 10 ¹	4.585 10 ¹	3.086 10 ¹	3.334 10 ¹	3.196 10 ¹	2.008 10 ²	-6.392 10 ¹	7.115 10 ²	3.257 10 ¹	p_4
1.268 10 ¹	-6.163 10 ¹	-3.624 10 ¹	-1.088 10 ¹	-5.072 10 ¹	6.056 10 ²	-2.299 10 ²	-1.299 10 ¹	-8.052 10 ²	2.418 10 ¹	-7.265 10 ²	2.235 10 ²	p_5
-2.789 10 ¹	-7.832 10 ¹	-2.635 10 ¹	-4.687 10 ¹	-1.105 10 ³	-4.808 10 ¹	-2.895 10 ³	6.471 10 ²	-1.194 10 ¹	4.752 10 ¹	-2.770 10 ¹	-4.370 10 ²	p_6
2.981 10 ¹	-4.127 10 ²	-6.298 10 ¹	-1.107 10 ¹	-4.765 10 ²	9.270 10 ²	-1.999 10 ¹	-2.793 10 ¹	-1.421 10 ¹	4.638 10 ¹	-1.146 10 ³	-2.464 10 ¹	p_7
9.455 10 ²	-5.943 10 ¹	-7.426 10 ¹	-3.177 10 ¹	-3.508 10 ³	-2.993 10 ¹	-2.144 10 ¹	-1.407 10 ¹	1.919 10 ²	6.889 10 ¹	4.815 10 ²	-2.365 10 ¹	p_8
-9.236 10 ²	-7.251 10 ¹	-3.576 10 ¹	-6.101 10 ¹	-1.514 10 ⁴	-5.557 10 ¹	-9.130 10 ²	-9.144 10 ²	1.898 10 ²	4.047 10 ¹	2.486 10 ²	-1.925 10 ¹	p_9
2.318 10 ¹	-6.913 10 ¹	-5.237 10 ¹	-3.635 10 ¹	-3.985 10 ¹	-4.136 10 ¹	-2.855 10 ¹	-3.003 10 ¹	3.601 10 ²	6.390 10 ¹	-1.449 10 ²	-2.946 10 ¹	p_{10}
-1.504 10 ¹	1.678 10 ²	-1.476 10 ¹	-5.722 10 ¹	5.339 10 ²	-2.430 10 ¹	1.044 10 ¹	1.443 10 ¹	-1.503 10 ¹	-4.877 10 ²	-7.384 10 ³	6.537 10 ²	p_{11}
2.038 10 ¹	-4.067 10 ²	-2.766 10 ²	-1.581 10 ¹	-2.076 10 ¹	-4.219 10 ¹	-7.256 10 ¹	-1.583 10 ¹	4.564 10 ¹	8.166 10 ²	2.290 10 ²	-9.100 10 ²	p_{12}
1.000 10⁰	1.001 10 ¹	-2.172 10 ¹	1.591 10 ¹	-5.037 10 ¹	1.117 10 ¹	-3.907 10 ¹	-9.159 10 ¹	1.627 10 ¹	1.369 10 ¹	4.101 10 ¹	4.120 10 ²	p_{13}
	1.000 10⁰	3.663 10 ¹	4.211 10 ¹	4.409 10 ¹	4.563 10 ¹	5.826 10 ²	-2.021 10 ³	6.340 10 ¹	-4.420 10 ¹	1.253 10 ¹	4.968 10 ²	p_{14}
		1.000 10⁰	-1.423 10 ¹	4.329 10 ¹	-2.049 10 ¹	5.227 10 ¹	1.482 10 ¹	1.858 10 ¹	-5.751 10 ¹	-1.274 10 ¹	3.466 10 ¹	p_{15}
			1.000 10⁰	-7.868 10 ²	8.041 10 ¹	-2.904 10 ¹	8.480 10 ²	-6.539 10 ²	-8.401 10 ²	1.438 10 ¹	-1.694 10 ¹	p_{16}
				1.000 10⁰	-4.161 10 ²	4.733 10 ¹	2.700 10 ¹	-1.482 10 ¹	-2.935 10 ¹	4.800 10 ²	2.470 10 ¹	p_{17}
					1.000 10⁰	-1.552 10 ¹	3.936 10 ²	-3.599 10 ¹	-1.674 10 ¹	8.244 10 ³	-7.931 10 ²	p_{18}
						1.000 10⁰	2.580 10 ¹	-2.587 10 ¹	-2.754 10 ¹	-5.562 10 ²	2.570 10 ¹	p_{19}
							1.000 10⁰	-1.018 10 ¹	-1.548 10 ¹	-4.605 10 ¹	-2.328 10 ¹	p_{20}
								1.000 10⁰	-1.916 10 ²	1.181 10 ¹	-4.235 10 ²	p_{21}
									1.000 10⁰	-2.798 10 ²	-2.512 10 ¹	p_{22}
										1.000 10⁰	-1.051 10 ²	p_{23}
											1.000 10⁰	p_{24}

TABLA 5.26. (Continuación) Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

5.3. DISCUSION

En este Capítulo se ha realizado la inversión no lineal de anomalías gravimétricas en 3D mediante el conocido método iterativo de Marquardt-Levenberg y haciendo uso del nuevo método de modelado directo desarrollado en el Capítulo III para calcular el correspondiente modelo de fuente en cada iteración del proceso.

Al igual que en el Capítulo IV, se han utilizado funciones polinómicas para realizar la parametrización de la fuente anómala. Para describir el contraste de densidad se ha utilizado un polinomio de segundo grado que va a depender de las tres variables del espacio, mientras que para las fronteras de la fuente se van a utilizar polinomios de tercer grado. Según sea el tipo de fuente, el número máximo de parámetros a calcular es de 33 ó de 24. A pesar de que el número de parámetros a calcular se ha incrementado considerablemente con respecto al caso de fuentes bidimensionales, el método sigue caracterizándose por tener un tiempo de cálculo promedio corto. También es posible dejar fijos algunos de los parámetros de la fuente a lo largo de todo el proceso iterativo y calcular la solución de los restantes, lo que agiliza el proceso. El número y la naturaleza de los parámetros que se mantienen fijos dependerá de cada caso y del conocimiento previo que se tenga acerca del contraste de densidad y la estructura de la fuente anómala.

La inversión de anomalías 3D también presenta el problema de la no unicidad cuando se varía el modelo inicial con el que se comienza el proceso iterativo, lo cual dependerá de la forma del espacio de soluciones para cada caso en particular. No obstante, para un determinado modelo inicial la unicidad del problema está garantizada en todos los ejemplos presentados.

Al añadir ruido aleatorio de tipo gaussiano a los datos de gravedad, se puede ver que algunos de los parámetros de los modelos resultantes no alcanzan los valores esperados. Esto se debe al efecto que tiene dicho error sobre las combinaciones de parámetros y a la naturaleza suave de las funciones polinómicas que describen las fuentes anómalas, como ya ocurría en los modelos bidimensionales. No obstante, la desviación que se observa en los valores numéricos no impide que el modelo resultante presente las mismas características generales del modelo generador de los datos de gravedad.

Capítulo VI:

APLICACION A DATOS DE CAMPO

INTRODUCCION

A lo largo de esta Tesis se ha desarrollado un método de modelado directo e inversión de anomalías gravimétricas en el que se han utilizado diferentes tipos de fuentes, tanto bidimensionales como tridimensionales, cuyas fronteras y contrastes de densidad se encuentran descritos mediante funciones continuas, en especial mediante polinomios. Para cada tipo de fuente se han presentado ejemplos teóricos de inversión en los que se ha realizado el análisis de las soluciones correspondientes mediante estudios de sensibilidad, existencia, unicidad, estabilidad, resolución, covarianza y correlación.

En el presente Capítulo se pretende estudiar el modo de aplicación del método desarrollado en este trabajo y su comportamiento con datos de campo, y para ello se han elegido dos casos. En el primero se utilizan los datos de un perfil de gravedad registrado sobre el glaciar Salmon, localizado en British Columbia (Canadá), para estudiar la profundidad a la que se encuentra el basamento. Este caso es un caso clásico, muy utilizado por otros autores para poner a prueba las ventajas y las limitaciones que posee un método de inversión. En el segundo caso se estudia la distribución del contraste de densidad y la estructura geométrica de la cuenca Laguna Salada, situada en la parte norte de la península de Baja California (México). Primeramente se han elegido dos perfiles gravimétricos, trazados sobre el mapa de anomalías residuales isostáticas de dicha cuenca, para obtener mediante inversión una serie de modelos en dos dimensiones tanto del contraste de densidad como de su estructura geométrica. Posteriormente, utilizando la información proporcionada por los modelos bidimensionales, se va a obtener un modelo tridimensional de la Laguna Salada.

6.1. ESTUDIO GRAVIMETRICO DEL GLACIAR SALMON, BRITISH COLUMBIA, CANADA

6.1.1. Antecedentes

El estudio gravimétrico del glaciar Salmon fue descrito por Grant y West (1965) y ha sido ampliamente utilizado para probar diferentes métodos de inversión de datos (Grant y West, 1965; Parker, 1994). La causa de este estudio gravimétrico fue la estimación del espesor del hielo del glaciar para realizar la planificación y el trazado de una línea que determinase el paso de un túnel por debajo del glaciar. Este problema gravimétrico es prácticamente bidimensional, por lo que se realizó un perfil de datos orientado perpendicularmente a la línea de flujo del glaciar. La reducción de los datos

gravimétricos fue un proceso difícil ya que las posiciones y las elevaciones de las estaciones de gravedad dependían del tiempo debido a la ablación progresiva del glaciar y, además, eran difíciles de determinar debido a la presencia de grandes irregularidades en el terreno. Las observaciones originales también fueron corregidas por el efecto gravimétrico de las montañas que determinan el glaciar, aproximándolas por grandes masas tabulares (Grant y West, 1965). Se estimó una incertidumbre de 2 mGal para la anomalía de Bouguer obtenida después de la reducción de los datos y, como se puede ver en la figura 6.1(b), la anomalía negativa de Bouguer debida al hielo tiene una amplitud de unos 30 mGal, con una intensidad máxima negativa $Dg_{max} = -40$ mGal, los autores encontraron satisfactoria dicha incertidumbre.

Para calcular la profundidad del hielo del glaciar, Grant y West (1965) sustituyeron la sección transversal del glaciar por un triángulo isósceles invertido de 2.7 km de base, coincidiendo con la longitud del perfil de datos. Conociendo el valor de la anomalía de Bouguer en el centro de la base del triángulo ($Dg_{max} = -40$ mGal) y suponiendo que el contraste de densidad del hielo con respecto a la roca encajante es constante para toda la sección del glaciar y de valor $Dr = -1.7$ g/cm³, los autores obtuvieron un valor para la altura del triángulo de 900 m. Esta altura correspondería a la profundidad máxima que alcanzaría la base del glaciar. Con esta información los autores realizaron un modelo de la sección transversal del glaciar con una serie de ajustes en el contraste de densidad de forma que la anomalía gravimétrica resultante fuera lo más parecida posible a la anomalía de Bouguer observada. Una vez conseguido el mejor ajuste entre ambas anomalías se obtuvo un valor de $Dr = -1.65$ g/cm³ para el contraste de densidad del cuerpo anómalo. El modelo final obtenido se puede ver en la figura 6.1(a).

Posteriormente a la interpretación de la anomalía de Bouguer del glaciar, se realizó una serie de pozos a lo largo del perfil de datos, como se aprecia en la figura 6.1(a). Los datos proporcionados por estos pozos indicaron que la profundidad del glaciar había sido sobreestimada en un 10%. Posiblemente, este error fue debido a las incertidumbres presentes en la reducción de los datos de gravedad (Grant y West, 1965).

Parker (1994) utilizó los datos de gravedad del glaciar Salmon como un ejemplo para ilustrar el método de programación lineal. Supuso que las observaciones gravimétricas fueron corregidas correctamente y utilizó un perfil de doce datos de gravedad, cuyos valores se pueden ver en la tabla 6.1, considerando que el déficit gravitacional proporcionado por estos datos es el resultado de la sustitución de roca de densidad promedio $r = 2.7$ g/cm³ por hielo de densidad promedio $r_h = 1.0$ g/cm³. Para estudiar esta anomalía, Parker dividió el plano $x-z$ del glaciar en pequeños triángulos de densidad constante y aplicó el método de programación lineal a los datos para calcular tanto el contraste de densidad como la forma geométrica del cuerpo anómalo.

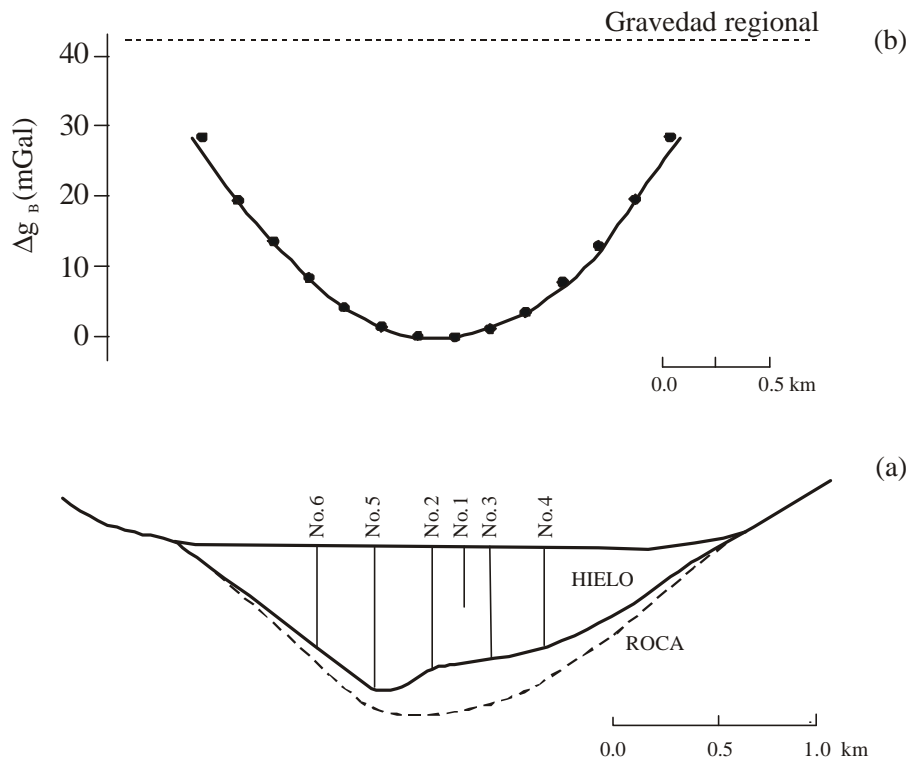


FIGURA 6.1. (a) Sección transversal del glaciar Salmon. Las líneas verticales representan las posiciones de los pozos perforados en el glaciar. La línea continua es la base del hielo calculada a partir de los datos de los pozos y la línea discontinua es el resultado de la interpretación geofísica de Grant y West (1965). (b) La línea continua representa la anomalía de Bouguer completa y los puntos representan la anomalía gravimétrica calculada con el modelo geofísico de la figura (a) (modificada de Grant y West, 1965).

DISTANCIA (km)	ANOMALIA (mGal)
0.535	-15.0
0.749	-24.0
0.963	-31.2
1.177	-36.8
1.391	-40.8
1.605	-42.7
1.819	-42.4
2.033	-40.9
2.247	-37.3
2.461	-31.5
2.675	-21.8
2.889	-12.8

TABLA 6.1. Valores observados de la anomalía de la gravedad del glaciar Salmon, British Columbia, Canadá (Parker, 1994).

En un primer estudio, Parker sólo tuvo en cuenta dos de los puntos de observación de la tabla 6.1, el décimo y el duodécimo. Con estos puntos obtuvo el cuerpo de la figura 6.2, con una densidad para los triángulos sombreados de -1.339 g/cm^3 . Posteriormente utilizó todos los datos de la tabla 6.1 y obtuvo el cuerpo de la figura 6.3, cuyo contraste de densidad es -1.389 g/cm^3 y que presenta un contorno para la estructura más irregular que en el caso anterior.

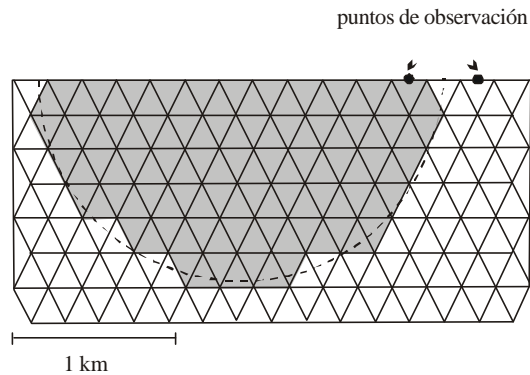


FIGURA 6.2. Teselación en triángulos de la sección transversal del glaciar Salmon para la solución aproximada del problema del cuerpo ideal de densidad mínima con el método de programación lineal, utilizando dos datos de gravedad. Los triángulos sombreados son los que representan el cuerpo anómalo de contraste de densidad -1.339 g/cm^3 . La línea punteada representa el cuerpo geométrico ideal asociado con los mismos datos. Modificada de Parker (1994).

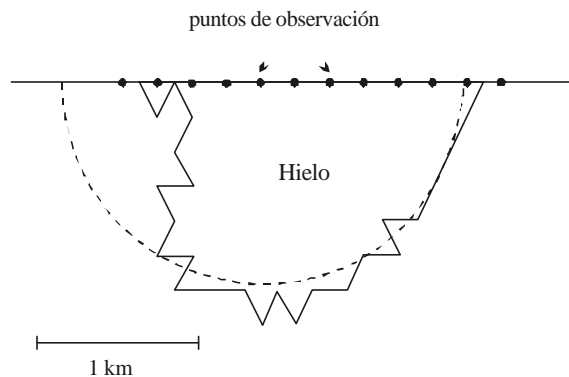


FIGURA 6.3. Solución del método de programación lineal para el glaciar Salmon utilizando todos los datos del perfil de gravedad. La línea punteada es el cuerpo geométrico ideal de la figura 6.2. Modificada de Parker (1994).

En el caso del glaciar Salmon, el contraste de densidad del hielo con respecto a la roca encajante es constante y bien conocido por lo que, en un tercer estudio, Parker supuso un contraste de densidad fijo para el cuerpo anómalo de -1.7 g/cm^3 . Con este valor Parker aplicó el método de

programación lineal para el cálculo de la base del glaciar. Primeramente calculó una estructura cuya frontera inferior fuese plana y lo más somera posible, dejando libre la extensión lateral del cuerpo anómalo de manera que satisfaga exactamente los datos de gravedad. La estructura geométrica obtenida se puede ver en la figura 6.4. Esta estructura presenta su frontera inferior a 0.774 km de profundidad, lo que indica que la base del glaciar debe estar situada a una profundidad mayor que esa medida en algún punto.

Este autor también calculó un modelo de estructura con el mismo contraste de densidad que el anterior pero esta vez calculó un área mínima para la sección del glaciar que satisficiera exactamente los datos del perfil de gravedad. El modelo que obtuvo Parker se presenta en la figura 6.5. El área mínima obtenida fue de 1.51 km^2 y la profundidad de la base es aproximadamente de 1 km.

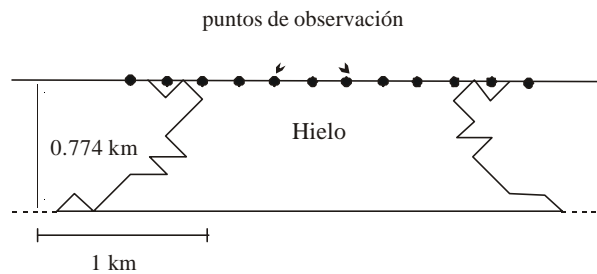


FIGURA 6.4. Solución del método de programación lineal para el glaciar Salmon en el que la estructura presenta el espesor mínimo con un contraste de densidad de -1.7 g/cm^3 . Modificada de Parker (1994).

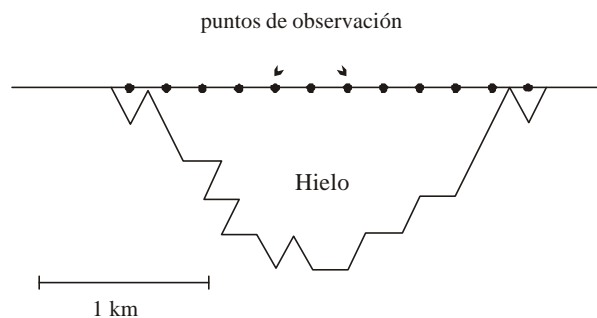


FIGURA 6.5. Solución del método de programación lineal para el glaciar Salmon en el que la estructura presenta un área mínima con un contraste de densidad de -1.7 g/cm^3 . Modificada de Parker (1994).

Como se puede ver, tanto el modelo presentado por Grant y West (1965), como los modelos calculados por Parker (1994), satisfacen los datos de gravedad, son consistentes entre sí y realizan una buena estimación de la profundidad del hielo del glaciar.

6.1.2. Inversión de los datos gravimétricos del glaciar Salmon

A continuación vamos a utilizar los datos gravimétricos del glaciar Salmon, presentados en la tabla 6.1, para estudiar las ventajas y las limitaciones del método de inversión presentado en el Capítulo IV, basándonos en la información aportada por los modelos de Parker (1994). Para realizar la inversión de dichos datos, vamos a parametrizar tanto el contraste de densidad como las fronteras inferior y laterales del cuerpo anómalo utilizando funciones polinómicas, tal y como se ha realizado en los ejemplos del Capítulo IV. Según esto, podemos trabajar con dos tipos de fuente. En el primero vamos a suponer que la base del glaciar se puede aproximar por una función constante, lo mismo que la topografía, y las dos fronteras laterales van a venir descritas por los polinomios (4.4). En el segundo caso supondremos que las fronteras laterales son funciones constantes y la base del hielo va a venir descrita por el polinomio (4.13). Si observamos la figura 6.1(a) veremos que la topografía para este último caso también puede ser modelada mediante un plano.

Al igual que hicieran Grant y West (1965) y Parker (1994), vamos a considerar que los datos de la tabla 4.1 representan un déficit gravitacional debido a la sustitución de roca sólida, que presenta una densidad conocida de 2.7 g/cm^3 , por hielo de densidad constante 1.0 g/cm^3 , también conocida. Por ello, podemos decir que la anomalía gravimétrica correspondiente es debida a la presencia de un cuerpo cuyo contraste de densidad es negativo, constante y de valor -1.7 g/cm^3 . Según esto, vamos a considerar que el polinomio dado por la expresión (4.1) tiene la forma $\mathbf{Dr} = p_1 = -1.7 \text{ g/cm}^3$ dejando los otros cinco coeficientes del polinomio con valor cero. Como este contraste de densidad es perfectamente conocido, no es necesario que evolucione a lo largo de todo el proceso iterativo de inversión, por lo que permanecerá invariable en todos los casos considerados. Esto es posible porque con este método se tiene la ventaja de poder elegir el número de parámetros que van a funcionar como incógnitas del problema, las cuales se deben calcular mediante el proceso de inversión, suponiendo que los demás parámetros que describen la fuente son conocidos mediante la información geológica o geofísica disponible en cada caso.

Con las consideraciones anteriores, el problema a calcular para el caso del glaciar Salmón es un problema no lineal en el que se va a buscar una posible solución para la estructura geométrica del valle glaciar que satisfaga los datos de gravedad, considerando que dicho problema está pesado por la desviación estándar de los datos, y cuya solución se va a calcular mediante la ecuación (1.35). Para ello se supone que la incertidumbre aportada por Grant y West (1965) para los datos es $\pm 1.96\mathbf{s} = 2$

mGal, esto es, suponiendo una confianza típica del 95%. Por tanto, la desviación estándar en los datos es $s = 1.02$ mGal.

Para decidir cuál va a ser el modelo inicial con el que vamos a comenzar el proceso iterativo de inversión, debemos reunir toda la información disponible sobre el glaciar. Los únicos datos conocidos son el contraste de densidad del hielo con respecto a la roca encajante, como ya comentamos anteriormente, y las ubicaciones de los bordes laterales de la lengua del glaciar con respecto al perfil de datos, que son las posiciones $x_1 = 0$ km y $x_2 = 3.42$ km (Parker, 1994). Con esta información, y considerando que la estructura general de un valle glaciar tiene forma de U debido a la acción erosiva del hielo, podemos utilizar como modelo inicial el presentado en la figura 6.6 para comenzar el proceso de inversión, donde se ha supuesto que la profundidad para la base del glaciar es de 0.774 km, ya que es el espesor mínimo calculado por Parker (1994) para el hielo del glaciar (figura 6.4).

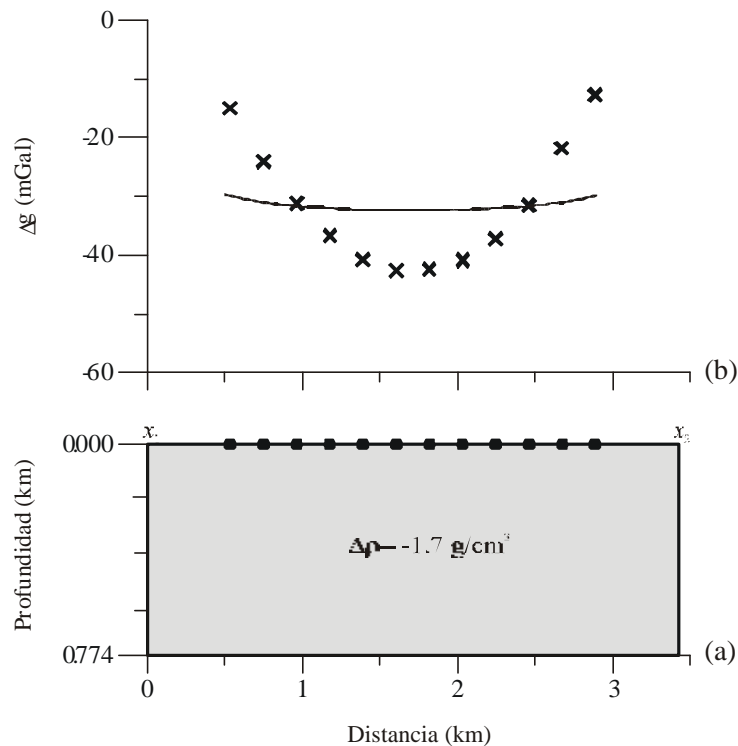


FIGURA 6.6. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión para el estudio de los datos de la anomalía de Bouguer completa del glaciar Salmon. Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador dadas en la tabla 6.1. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía de Bouguer completa registrada sobre el glaciar. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

6.1.2.1. Caso 1: Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z

Vamos a realizar la inversión de los datos de la tabla 6.1 a partir del modelo inicial de la figura 6.6. En este caso, supondremos que el glaciar Salmon se puede modelar con el tipo del fuente descrito en la sección 4.1 del Capítulo IV, en el que tanto la topografía como la frontera inferior son planas.

Como ya adelantamos anteriormente, vamos a considerar que el contraste de densidad en toda la sección del glaciar es constante e invariable a lo largo de todo el proceso de inversión, desde el modelo inicial hasta el resultante, con un valor $D\mathbf{r} = -1.7 \text{ g/cm}^3$, puesto que este valor es un dato conocido. Por otro lado, en las fronteras laterales descritas por los polinomios (4.4), los parámetros p_7 y p_{11} también van a permanecer invariantes a lo largo de las iteraciones, ya que representan los puntos donde la base rocosa del glaciar aflora y estos valores numéricos también son perfectamente conocidos: $p_7 = x_1 = 0 \text{ km}$ y $p_{11} = x_2 = 3.42 \text{ km}$. Por tanto, el número total de incógnitas para este problema es de siete y son las componentes del vector de parámetros:

$$\mathbf{p} = \{ p_8, p_9, p_{10}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15} \} \quad (6.1)$$

que se va a calcular mediante el proceso de inversión. Este problema presenta un total de doce datos y siete parámetros, por lo que es sobredeterminado. Para calcular su solución, realizamos un proceso de inversión de 500 iteraciones. En la figura 6.7 se puede observar la evolución del desajuste a lo largo de todo este proceso. En esta figura no se observa una convergencia clara hacia un determinado valor, pero la evolución de este factor es estable. Consideraremos que la solución final es la alcanzada en la última iteración, en la que el desajuste alcanza el valor $q_s = 13.4$, muy cercano al número de datos $M = 12$ que es nuestro nivel de tolerancia T .

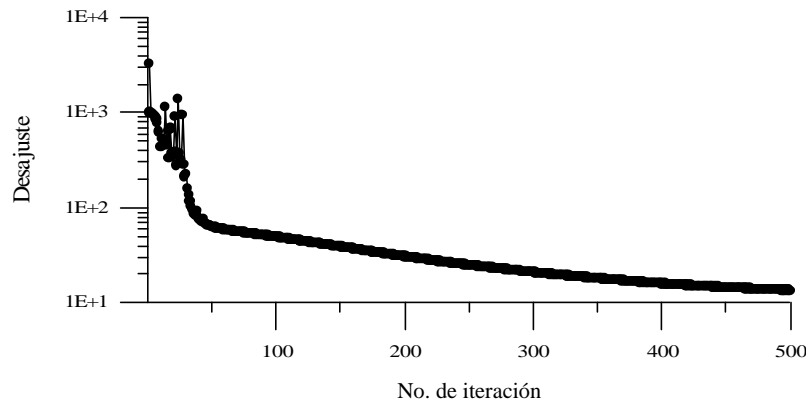


FIGURA 6.7. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 500 iteraciones del proceso de inversión.

El modelo resultante, considerado como una posible solución de nuestro problema, se puede ver en la figura 6.8, en la que se observa una fuente anómala con una forma parecida a la de un valle glaciar, con una profundidad de la base de 0.96 km, la cual está en excelente acuerdo con la profundidad esperada para el glaciar Salmón. En cuanto al ajuste entre la anomalía gravimétrica de este modelo y a la anomalía de Bouguer observada, vemos que en la parte central del perfil hay un buen ajuste entre ambas anomalías pero en los extremos no sucede lo mismo.

Para este caso, se han realizado otros procesos de inversión partiendo de modelos iniciales similares al de la figura 6.6, pero en los que se ha variado la posición de la frontera inferior, para intentar mejorar la solución del problema. Una vez realizados los correspondientes procesos iterativos, se ha observado que los modelos resultantes son iguales al de la figura 6.8.

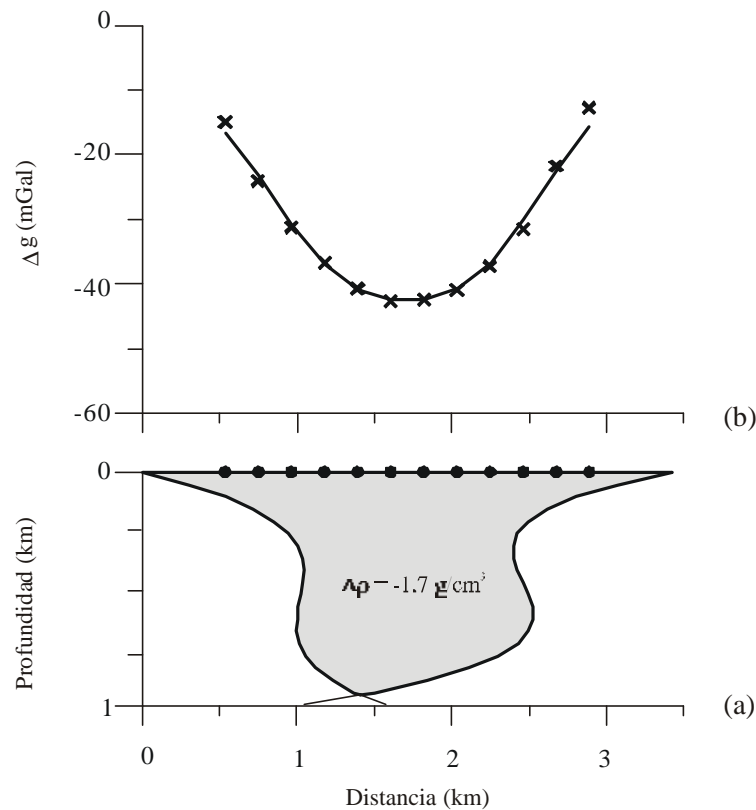


FIGURA 6.8. (a) Modelo resultante para el glaciar Salmon considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z . Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador dadas en la tabla 6.1. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía de Bouguer completa registrada sobre el glaciar. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

Se ha realizado el estudio de la sensibilidad de los datos con respecto a los parámetros cuyas soluciones se calculan en la inversión. Como se puede ver en la figura 6.9, para los parámetros de la frontera izquierda (ver gráficas (a), (b) y (c) de dicha figura), la mayor sensibilidad es positiva y se encuentra situada en el borde izquierdo del perfil. Para los parámetros de la frontera derecha (ver gráficas (d), (e) y (f) de la figura 6.9) la sensibilidad más alta es negativa y se encuentra localizada en el borde derecho del perfil. En estas seis gráficas vemos que las curvas de sensibilidad no están completas si las comparamos con las obtenidas en los ejemplos teóricos del Capítulo IV. Esto es debido a la escasez de datos registrados sobre los límites laterales que determinan el glaciar Salmón con respecto a las montañas circundantes. Todo esto produce una falta importante de información acerca de los parámetros que determinan las fronteras laterales de su estructura. Por otro lado, la gráfica 6.9(g) nos muestra la sensibilidad de los datos de gravedad con respecto al parámetro p_{15} que nos proporciona la base del cuerpo. Podemos ver que la sensibilidad para este parámetro es menor que para el resto de los parámetros de la estructura, pero los valores más altos se localizan en la parte central del perfil, donde tenemos una buena distribución de los datos de gravedad, lo que hace que la información contenida en los datos sea más completa para este parámetro que para las fronteras laterales.

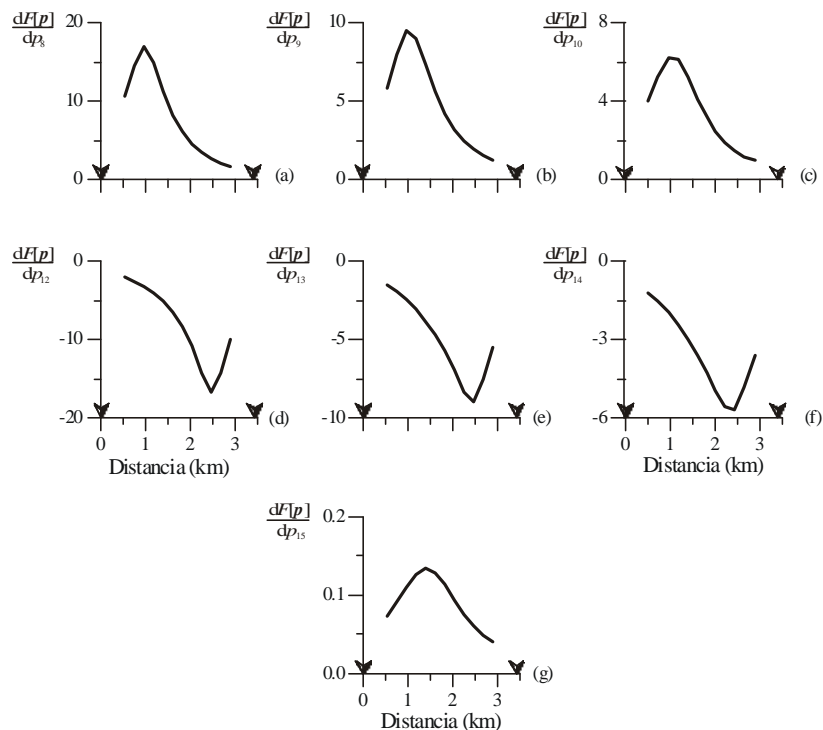


FIGURA 6.9. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[p]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la estructura del glaciar Salmón. Las marcas sobre el eje horizontal de las gráficas muestran la posición de los bordes del glaciar con respecto al perfil de datos.

En la figura 6.10 se presenta la matriz de resolución de este problema, que se ha calculado con una varianza residual $\hat{\mathbf{s}}^2 = 2.79 \text{ mGal}^2$ que ha sido calculada mediante la expresión (1.56). El valor numérico de esta varianza es mayor que el de la varianza estimada para los datos $\mathbf{s}^2 = 1.04 \text{ mGal}^2$. Esto puede significar que, o bien la anomalía del modelo resultante no se ajusta de manera totalmente satisfactoria a los datos observados, o bien la desviación estándar de los datos ha sido subestimada y debería ser más alta.

Como se puede apreciar en la figura 6.10, los parámetros p_8 y p_{12} tienen la mayor resolución, mientras que los parámetros p_9, p_{10}, p_{13} y p_{14} , que también definen las fronteras laterales, presentan resoluciones bajas. Esto está en consonancia con los resultados de la sensibilidad mostrados en la figura 6.9 ya que, como vimos en los dos estudios teóricos de la sección 4.1, la resolución de los parámetros de las fronteras laterales de la fuente va a depender de la distribución de los datos observados en las zonas del perfil situadas principalmente sobre dichas fronteras, ya que es en estas zonas donde los datos presentan mayor sensibilidad. En la figura 6.10 también se puede ver que el parámetro p_{15} , que corresponde a la frontera inferior del cuerpo, tiene una resolución baja. La sensibilidad de los datos con respecto a este parámetro también es baja, pero como ésta corresponde a los datos situados en el centro del perfil, y éstos están bien distribuidos, la información que poseen acerca de esta frontera puede ser suficiente como para determinar su valor. De hecho, el valor de la profundidad obtenido para el glaciar Salmón ($p_{15} = 0.96 \text{ km}$) es aceptable, pues es consistente con los resultados obtenidos por Grant y West (1965) y con los obtenidos por Parker (1994) en sus modelos geofísicos.

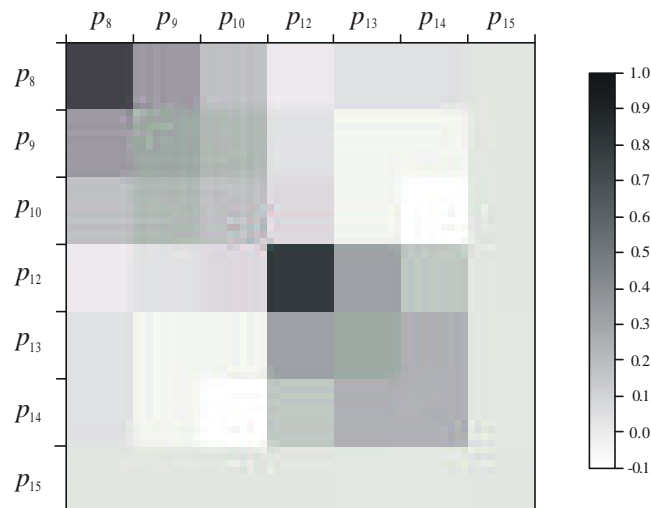


FIGURA 6.10. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

En la tabla 6.2 se presentan los elementos de la matriz de covarianza de los parámetros y en la tabla 6.3 se pueden ver las soluciones obtenidas para cada uno de los parámetros y sus incertidumbres calculadas a partir de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza suponiendo, en este caso, un intervalo de confianza de $\pm 2.58 s$ (99 %). Podemos ver en esta matriz que los valores de las covarianzas de los parámetros no son muy elevados.

La figura 6.11 nos muestra la matriz de correlación. Se puede observar que la correlación existente entre los siete parámetros del problema es muy alta. De hecho, hay una fuerte correlación entre los tres parámetros de la frontera izquierda, y también hay una fuerte correlación entre los tres parámetros de la frontera derecha. Así mismo, el parámetro que define la profundidad presenta correlación alta con los seis parámetros restantes, pero en mayor medida con los parámetros de la frontera izquierda, afectando a su resolución y haciendo que ésta sea baja. En la tabla 6.4 se presentan los valores numéricos de estas correlaciones, donde se puede comprobar cuantitativamente que son muy elevados.

P_8	P_9	P_{10}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	
1.944 10^{-2}	-1.454 10^{-2}	-1.858 10^{-2}	-1.214 10^{-2}	1.054 10^{-2}	1.624 10^{-2}	-1.311 10^{-3}	p_8
	1.442 10^{-2}	1.639 10^{-2}	9.132 10^{-3}	-6.086 10^{-3}	-1.045 10^{-2}	1.036 10^{-3}	p_9
		2.118 10^{-2}	1.357 10^{-2}	-1.005 10^{-2}	-1.633 10^{-2}	1.440 10^{-3}	p_{10}
			2.267 10^{-2}	-1.788 10^{-2}	-2.569 10^{-2}	1.263 10^{-3}	p_{12}
				1.746 10^{-2}	2.349 10^{-2}	-1.035 10^{-3}	p_{13}
					3.309 10^{-2}	-1.575 10^{-3}	p_{14}
						1.116 10^{-4}	p_{15}

TABLA 6.2. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

FRONT. IZQUIERDA	FRONT. DERECHA	FRONT. INFERIOR
$p_8 = 6.2 \pm 0.4$	$p_{12} = -7.5 \pm 0.4$	$p_{15} = 0.96 \pm 0.03 \text{ km}$
$p_9 = -12.0 \pm 0.3 \text{ km}^{-1}$	$p_{13} = 17.4 \pm 0.3 \text{ km}^{-1}$	
$p_{10} = 7.3 \pm 0.4 \text{ km}^{-2}$	$p_{14} = -12.3 \pm 0.5 \text{ km}^{-2}$	

TABLA 6.3. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

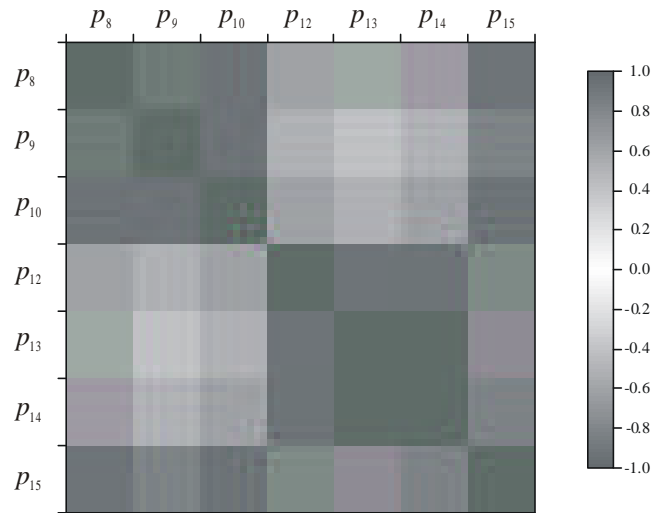


FIGURA 6.11. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_8	p_9	p_{10}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
1.000 10⁺⁰	-8.687 10 ⁻¹	-9.156 10 ⁻¹	-5.782 10 ⁻¹	5.724 10 ⁻¹	6.404 10 ⁻¹	-8.902 10 ⁻¹	p_8
	1.000 10⁺⁰	9.379 10 ⁻¹	5.051 10 ⁻¹	-3.836 10 ⁻¹	-4.784 10 ⁻¹	8.165 10 ⁻¹	p_9
		1.000 10⁺⁰	6.195 10 ⁻¹	-5.228 10 ⁻¹	-6.169 10 ⁻¹	9.367 10 ⁻¹	p_{10}
			1.000 10⁺⁰	-8.986 10 ⁻¹	-9.378 10 ⁻¹	7.944 10 ⁻¹	p_{12}
				1.000 10⁺⁰	9.774 10 ⁻¹	-7.417 10 ⁻¹	p_{13}
					1.000 10⁺⁰	-8.196 10 ⁻¹	p_{14}
						1.000 10⁺⁰	p_{15}

TABLA 6.4. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

6.1.2.2. Caso 2: Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x

A continuación vamos a utilizar de nuevo el modelo de la figura 6.6 como modelo inicial en el proceso de inversión de los datos de la tabla 6.1, en el que ahora se va a modelar el glaciar Salmon con el tipo de fuente de la sección 4.2 del Capítulo IV, en el que las fronteras laterales son planas.

Como en el caso anterior, el valor del contraste de densidad del hielo, con respecto a la roca encajante, es conocido y de valor $D_r = -1.7 \text{ g/cm}^3$, y será invariable durante el proceso de inversión desde el modelo inicial hasta el modelo resultante. Las fronteras laterales de la estructura que se va a modelar coinciden con la posición de los puntos donde la base rocosa del glaciar aflora, siendo sus valores $p_{11} = 0 \text{ km}$ y $p_{12} = 3.42 \text{ km}$. Estos parámetros también permanecerán constantes durante el proceso de inversión, ya que también son datos conocidos. El número total de incógnitas en este caso es de cuatro, todas correspondientes a los coeficientes del polinomio (4.13) que describe la frontera inferior del cuerpo anómalo. Por tanto, el vector de parámetros de la expresión (4.14) es de la forma:

$$\mathbf{p} = \{ p_7, p_8, p_9, p_{10} \} \quad (6.2)$$

por lo que el problema a resolver es un problema sobredeterminado.

Calculamos la solución de las componentes del vector (6.2) realizando un proceso de inversión de 500 iteraciones. En la figura 6.12 observamos la evolución del desajuste q_s a lo largo de dicho proceso. En esta figura se observa convergencia a partir de la iteración 352, pero el desajuste oscila entre cuatro valores a partir de ese punto. Esto indica que tenemos cuatro posibles modelos finales que pueden ser candidatos a solución de problema. Si nos fijamos en los valores del desajuste para estos cuatro modelos, vemos que los cuatro son muy altos comparados con el valor de tolerancia $T=12$, esto es, los valores son: 683.9, 792.2, 358.3 y 282.1, por lo que ninguno de los modelos correspondientes van a explicar, de manera totalmente satisfactoria, los datos de gravedad.

Para ver si es posible mejorar el resultado de la inversión, se ha utilizado como modelo inicial para la estructura el modelo obtenido por Grant y West (1965) que se puede ver en la figura 6.1, con un contraste de densidad de -1.7 g/cm^3 . El resultado de este segundo proceso iterativo ha sido exactamente el mismo que el ya obtenido anteriormente, por lo que no se ha mejorado la solución del problema.

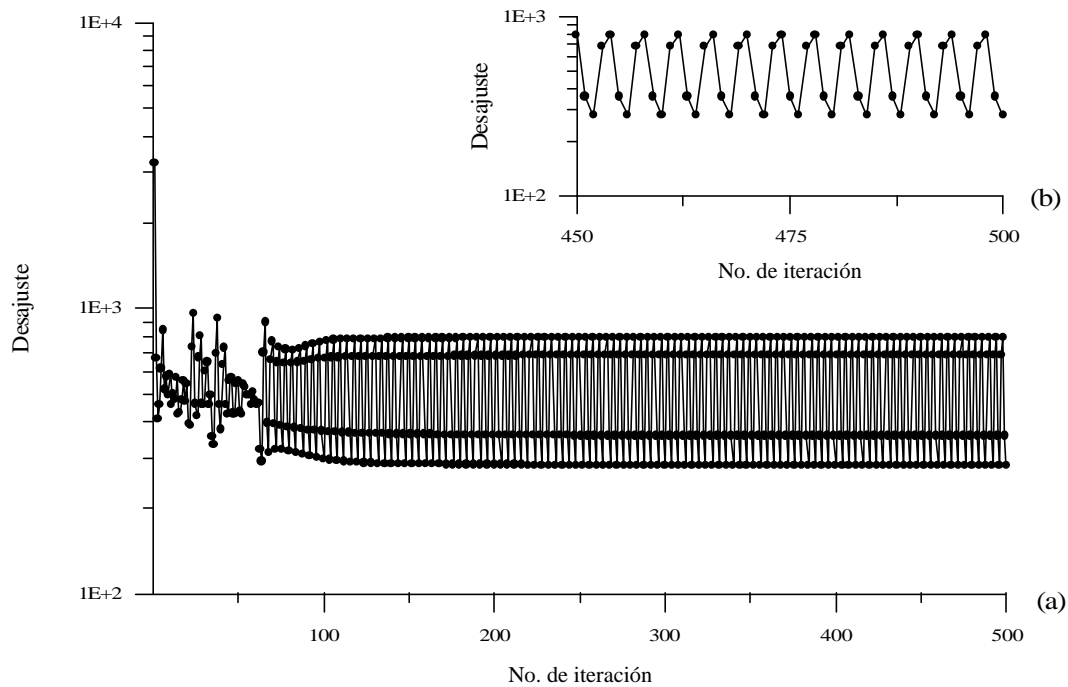


FIGURA 6.12. (a) Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 500 iteraciones del proceso de inversión. (b) Detalle de la evolución del desajuste a lo largo de las 50 últimas iteraciones del proceso.

Aunque en este caso ninguno de los cuatro modelos se pueden considerar como una solución satisfactoria de nuestro problema, vamos a elegir el modelo que presenta menor desajuste de los cuatro, puesto que es el más cercano al valor de la tolerancia, para estudiar cuáles son las causas de esta falta de ajuste con respecto a los datos de gravedad. La estructura del modelo correspondiente, que presenta un desajuste $q_s = 282.1$, se puede observar en la figura 6.13(a). La parte central del cuerpo tiene forma de cuenca y en los laterales aparecen dos triángulos de densidad 1.7 g/cm^3 cuya presencia hace que los bordes laterales de la anomalía se hagan más positivos.

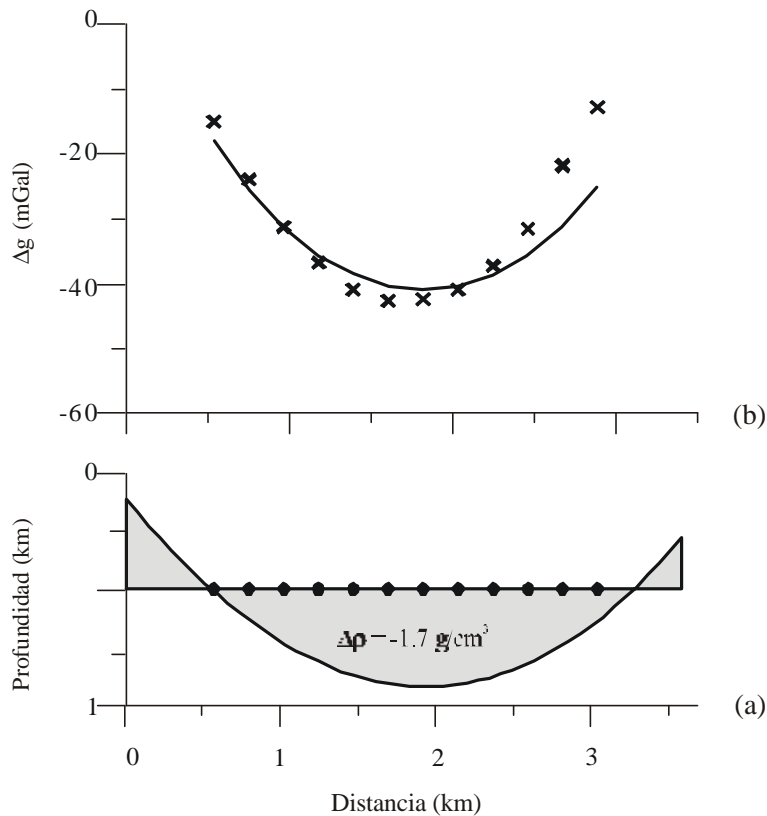


FIGURA 6.13. (a) Modelo resultante para el glaciar Salmon considerando una fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x . Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador dadas en la tabla 6.1. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía de Bouguer completa registrada sobre el glaciar. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

A pesar de los contrastes de densidad positivos presentes en los laterales de la estructura, aún no se ha conseguido un buen ajuste entre la anomalía gravimétrica calculada y la anomalía de Bouguer observada, como se puede ver en la figura 6.13(b), lo cual era de esperar debido a la información dada por el desajuste. De la misma manera que para el caso 1, esto es debido a la falta de datos de gravedad en los bordes del glaciar, lo cual produce una carencia de información importante acerca de los parámetros calculados. No obstante, este modelo podría considerarse relativamente satisfactorio, puesto que nos proporciona una idea de la profundidad del hielo del glaciar con un valor de 0.84 km, el cual es consistente con el valor obtenido en el caso 1 y con los resultados de Grant y West (1965) y Parker (1994).

Se ha realizado un estudio de la sensibilidad que presentan los datos de gravedad con respecto a los cuatro parámetros que definen la frontera inferior del cuerpo, para este caso, el cual se presenta en la figura 6.14. Como se ve en dicha figura, las cuatro gráficas no presentan su forma completa si las comparamos con las gráficas obtenidas en los distintos ejemplos teóricos presentados en el Capítulo IV. Aunque los valores de sensibilidad son muy altos, la falta de datos de gravedad registrados sobre los bordes del glaciar hace que la información disponible acerca de los cuatro parámetros de la frontera inferior sea muy escasa en este caso.

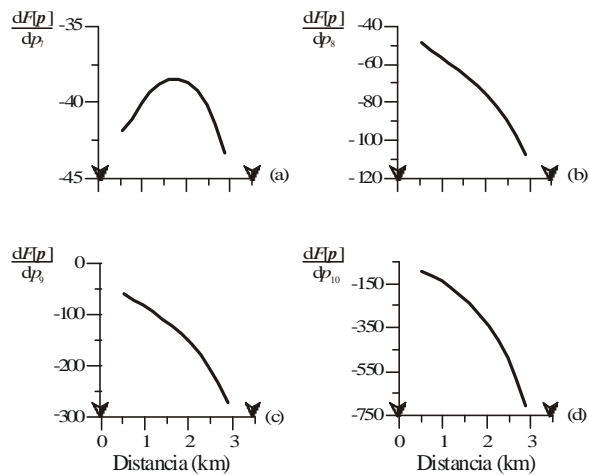


FIGURA 6.14. Representación gráfica de las columnas del jacobiano correspondientes a las derivadas del funcional $F[p]$ del problema con respecto a los parámetros que definen la estructura del glaciar Salmón. Las marcas sobre el eje horizontal de las gráficas muestran la posición de los bordes del glaciar con respecto al perfil de datos.

La varianza residual en este caso tiene un valor $\hat{s}^2 = 36.7 \text{ mGal}^2$, bastante mayor que la varianza de los datos, lo que indica que el modelo resultante no explica satisfactoriamente la anomalía de Bouguer observada, como se puede apreciar en la figura 6.13(b). Con esta varianza residual se calcula la matriz de resolución de los parámetros, la cual se presenta en la figura 6.15, y en ella se observa que el que presenta mayor resolución es el parámetro p_{10} y el que presenta peor resolución es el parámetro p_8 , que es consistente con el estudio de la sensibilidad. Aunque los cuatro parámetros tengan una resolución alta, hay que tener en cuenta que la información proporcionada por los datos acerca de los cuatro parámetros es muy escasa, de ahí que el modelo obtenido no sea una solución satisfactoria.

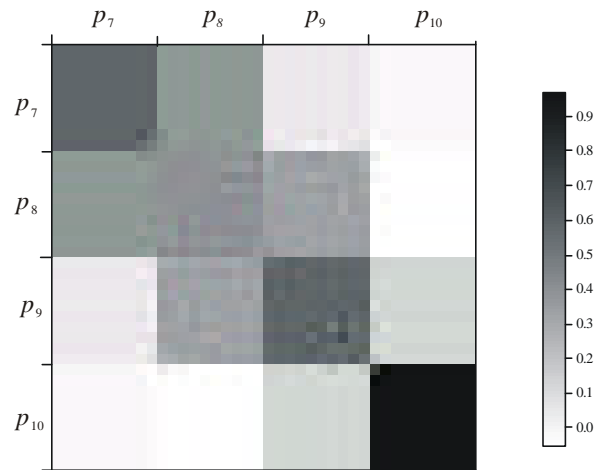


FIGURA 6.15. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

En la tabla 6.5 se presentan los valores numéricos de los elementos de la matriz de covarianza, los cuales no son elevados. Con los elementos de la diagonal principal de dicha matriz se calculan las incertidumbres en las soluciones de los parámetros suponiendo un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \sigma$ (99 %). Los parámetros, junto con sus incertidumbres, se pueden ver en la tabla 6.6. La matriz de correlación se presenta en la figura 6.14 y los valores numéricos de sus elementos se pueden ver en la tabla 6.7. Como se puede observar, hay una fuerte correlación entre los parámetros p_7, p_9 y p_{10} para este caso.

p_7	p_8	p_9	p_{10}	
$2.894 \cdot 10^{-2}$	$8.949 \cdot 10^{-4}$	$-2.866 \cdot 10^{-2}$	$9.389 \cdot 10^{-3}$	p_7
	$1.050 \cdot 10^{-3}$	$5.789 \cdot 10^{-4}$	$-5.400 \cdot 10^{-4}$	p_8
		$3.115 \cdot 10^{-2}$	$-1.077 \cdot 10^{-2}$	p_9
			$3.863 \cdot 10^{-3}$	p_{10}

TABLA 6.5. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

FRONT. INFERIOR
$p_7 = -0.8 \pm 0.4 \text{ km}$
$p_8 = 1.72 \pm 0.08$
$p_9 = -0.4 \pm 0.5 \text{ km}^{-1}$
$p_{10} = -0.01 \pm 0.16 \text{ km}^{-2}$

TABLA 6.6. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

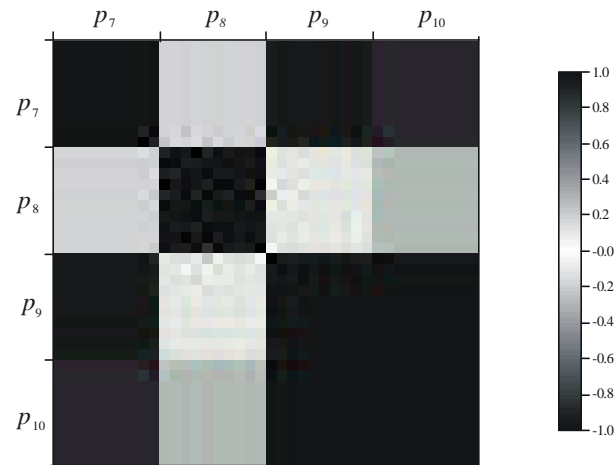


FIGURA 6.16. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_7	p_8	p_9	p_{10}	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$1.624 \cdot 10^{-1}$	$-9.546 \cdot 10^{-1}$	$8.880 \cdot 10^{-1}$	p_7
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$1.012 \cdot 10^{-1}$	$-2.681 \cdot 10^{-1}$	p_8
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-9.820 \cdot 10^{-1}$	p_9
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_{10}

TABLA 6.7. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

6.1.2.3. *Discusión*

Al aplicar el método de modelado e inversión, desarrollado en este trabajo, a un caso clásico conocido como el glaciar Salmón, se han observado ciertas ventajas y ciertas limitaciones que hay que tener en cuenta en la aplicación de esta metodología a otros casos menos conocidos.

Una de las ventajas de este método es que podemos incorporar, dentro del proceso de inversión, la información disponible sobre la fuente anómala. De esta manera, se puede reducir el número de los parámetros que forman el vector incógnita p del problema, al convertirse éstos en datos conocidos de la fuente. Esta reducción en el número de incógnitas disminuye la inestabilidad inherente en el cálculo de la solución de un problema inverso y hace más rápido el proceso iterativo.

Para calcular de manera eficaz los parámetros que definen la estructura geométrica de la fuente mediante este método, es necesario que el perfil de datos de gravedad presente una buena distribución de los mismos a lo largo del perfil. Además de esto, también es necesario que el registro de los datos de gravedad se realice abarcando toda la fuente anómala, sobrepasando sus límites laterales, para así poder garantizar la obtención de la información necesaria para calcular los parámetros que definen la estructura del cuerpo. La distribución de los datos registrados sobre el glaciar Salmón no ha sido un problema a la hora de estudiar este caso, debido a que dichos datos se encuentran equiespaciados y en número suficiente como para permitir que el problema de inversión sea sobredeterminado. Por tanto, no es necesario realizar la interpolación de los datos disponibles para ampliar su número, ya que la información obtenida sería redundante y esto no garantiza una mejor resolución del problema. El problema que hemos encontrado en el estudio del glaciar Salmón, utilizando el método desarrollado en este trabajo, radica en que la sensibilidad de los datos de gravedad, con respecto a la mayoría de los parámetros que definen la estructura de la fuente, presenta los valores más altos en la posición del perfil correspondiente a la ubicación de los límites laterales de dicha estructura. Como en el caso del glaciar Salmón estas zonas no están cubiertas con datos de gravedad, vamos a sufrir de falta de información acerca de los parámetros que definen su estructura, de ahí que los modelos resultantes para este caso no sean tan satisfactorios como esperábamos. Este problema no es de fácil resolución, puesto que no sería aconsejable ampliar el perfil de datos de gravedad añadiendo nuevos datos sintéticos en sus bordes para que éste abarque toda la estructura del glaciar Salmón.

A pesar del problema de la falta de datos en los bordes del glaciar Salmón, podemos concluir que, al menos en el caso 1, el método desarrollado en este trabajo nos proporciona una estimación satisfactoria de la profundidad que alcanza el hielo del glaciar, según los resultados obtenidos por Grant y West (1965) y Parker (1994), y que se pueden ver en las figuras 6.1, 6.3, 6.4 y 6.5.

6.2. ESTUDIO GRAVIMETRICO DE LA CUENCA LAGUNA SALADA, BAJA CALIFORNIA , MEXICO

6.2.1. Marco geológico y antecedentes

La Laguna Salada es una cuenca estructural con subsidencia activa cuya altura media se encuentra a unos pocos metros por debajo del nivel del mar. Está situada en el norte de la península de Baja California, México, a 30 km al suroeste de la ciudad de Mexicali. Tiene una longitud aproximada de 100 km en dirección NNW y una anchura de unos 20 km en promedio. En el lado oriental se encuentra limitada por las sierras Cucapá y El Mayor que presentan alturas de alrededor de 750 m sobre el nivel del mar. El límite occidental de la cuenca está formado por Sierra Juárez, de unos 1800 m de altura sobre el nivel del mar (figura 6.16).

La cuenca Laguna Salada forma parte de una gran depresión tectónica denominada Depresión de Salton, la cual pertenece a la parte norte de la Provincia Extensional del Golfo de California (Gastil et al., 1975). Esta área es una zona de deformación tectónica relacionada con la frontera transforme de las placas Pacífico y Norteamérica y su formación es resultado del proceso extensional del Mioceno medio y tardío que evolucionó a un sistema transtensivo en el Plioceno (Stock y Hodges, 1989). La deformación en el interior de la Depresión de Salton es el producto de los movimientos transcurrentes y divergentes entre las placas tectónicas del Pacífico y de Norteamérica. El movimiento relativo entre estas placas se distribuye en una amplia zona de deformación a través de sistemas de falla sub-paralelos. Se han descrito cinco sistemas de falla principales en esta región (figura 6.17): San Andrés, San Jacinto, Elsinore-Laguna Salada, Imperial y Cerro Prieto (Axen et al., 1998).

En un principio se propuso que la cuenca Laguna Salada pudo ser generada por una estructura “pull-apart” (rompimiento por tracción) entre zonas de fallas dextrales en escalón (Mueller y Rockwell, 1991), con un relleno de alrededor de 6000 m en su parte central (Kelm, 1971). Sin embargo, actualmente se ha propuesto que la evolución de la cuenca Laguna Salada es el resultado de la formación de un semi-graben somero formado sobre la falla Cañada David, la cual es una falla normal de bajo ángulo tipo “detachment” cuya expresión en superficie se encuentra en la margen oriental de la cuenca (figura 6.18), y de la interacción entre fallas activas de desplazamiento lateral dextral-oblicuo con dirección NW y tendencia paralela al sistema de falla San Andrés, entre las que destacan la falla Cucapá y la falla Laguna Salada, situadas en la margen oriental de la cuenca (Axen, 1995). El escarpe de Sierra Juárez presenta una serie de fallas de alto ángulo subparalelas de orientación NNW y forma el bloque de techo de la falla normal de bajo ángulo Cañada David, que presenta deslizamiento hacia el oeste. Este modelo es compatible con un modelo de fallamiento de bajo ángulo de tipo “rolling hinge” (charnela migrante) el cual predice una migración progresiva de la deformación en la dirección de transporte tectónico de la falla de bajo ángulo (Wernicke, 1995; figura

6.19). La implicación de este modelo es que el basamento granítico metamórfico que se encuentra expuesto en las sierras Cucapá y El Mayor forma el bloque de piso que ha sido levantado por erosión tectónica (Barnard, 1968; Siem y Gastil, 1994). A su vez, la interacción entre fallas de desplazamiento lateral y fallas normales ha contribuido al desarrollo de la cuenca y al levantamiento de dichas sierras (Mueller y Rockwell, 1991; Siem y Gastil, 1994). Según este modelo, la geometría de la cuenca Laguna Salada está controlada por el sistema de fallas que componen sus márgenes.

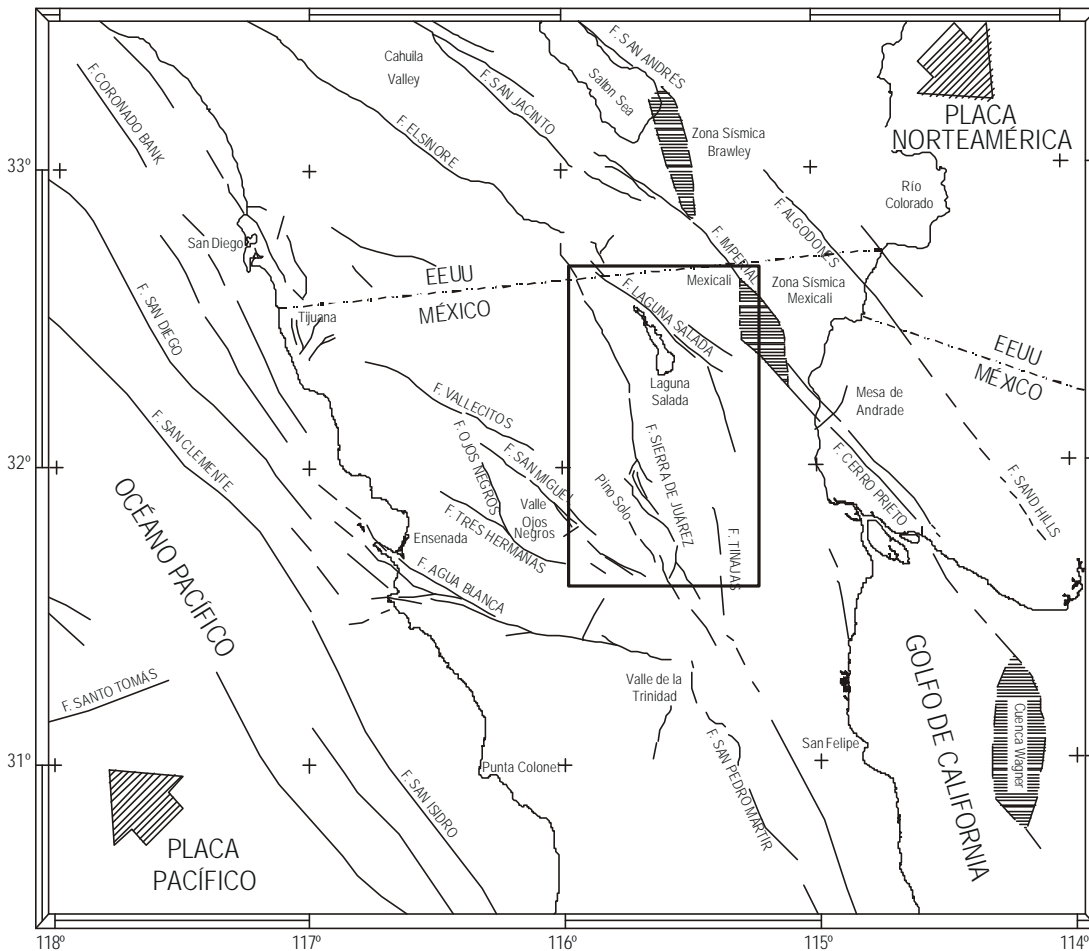


FIGURA 6.17. Marco tectónico del norte de la península de Baja California. El rectángulo central de la figura señala la localización de la cuenca Laguna Salada. Modificada de Frez y Frías-Camacho (1998).

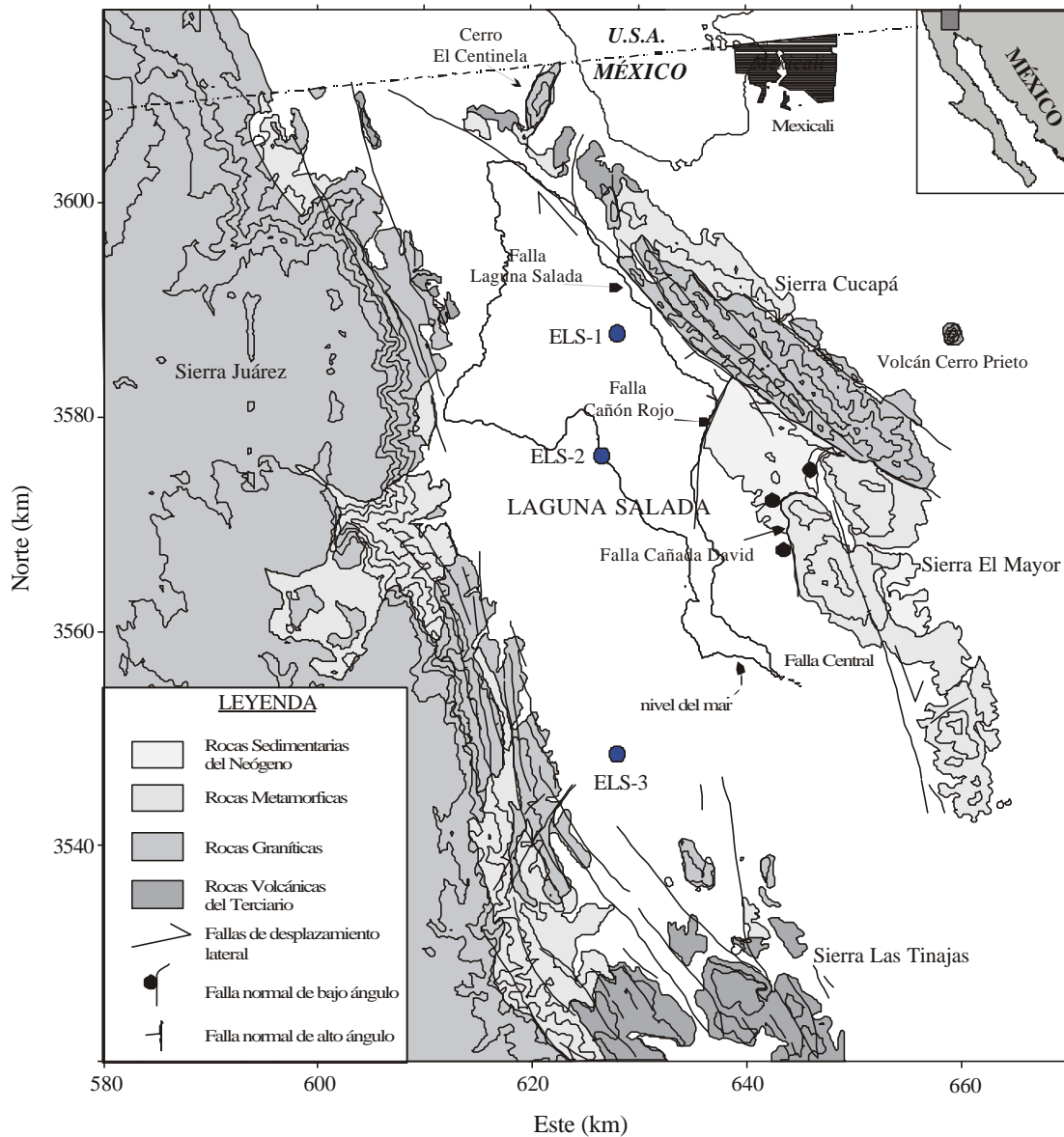


FIGURA 6.18. Mapa geológico de la cuenca Laguna Salada. Modificado de García-Abdeslem et al. (2000).

Las rocas del basamento en la región de la Laguna Salada se puede dividir en tres bloques: el bloque de las sierras Cucapá y El Mayor, el bloque de Sierra Juárez y el horst de Sierra La Tinaja. Este basamento está compuesto por rocas metamórficas pre-batolíticas del Paleozoico, principalmente gneisses, esquistos, anfibolitas, mármol y cuarcita, y rocas graníticas del Cretácico, intrusionadas por diques de composición basáltica a andesítica. Las rocas plutónicas presentes en Sierra Juárez forman parte del batolito peninsular y su composición varía principalmente de tonalita a granodiorita (Gastil

et al., 1975; Romero-Espejel y Delgado-Argote, 1997). En Sierra Cucapá afloran gneisses, mármoles y, en menor proporción, anfibolitas y cuarcitas, posiblemente del Pérmico-Jurásico. En la parte centro-sur de esta sierra aflora un intrusivo de tonalita denominado Tonalita La Puerta, emplazado durante el Cretácico-Paleógeno (Barnard, 1968; Gastil et al., 1975). Las rocas metasedimentarias de Sierra El Mayor se encuentran intrusionadas por rocas plutónicas cuya composición varía de tonalita a monzogranito (Siem, 1992). El horst de Sierra La Tinaja es un bloque granítico cubierto por rocas volcánicas terciarias y situado al sur de la cuenca Laguna Salada.

Sobreyaciendo a las rocas del basamento cristalino, que componen los bloques que rodean la cuenca Laguna Salada, afloran rocas volcánicas emplazadas en el Mioceno. Estas rocas se encuentran distribuidas en pequeñas zonas al norte de las sierras Juárez y Cucapá. El espesor de estas unidades es del orden de unos pocos metros a decenas de metros (Barnard, 1968; Gastil et al., 1975).

El depósito de sedimentos en la cuenca Laguna Salada ha sido controlado por la incursión marina poco profunda de las aguas del Golfo de California durante el Mioceno Tardío-Plioceno, por la posición del Delta del Río Colorado en el Pleistoceno y por el continuo y localizado levantamiento de las sierras. En 1995, la Comisión Federal de Electricidad realizó la perforación de tres pozos (ELS-1, ELS-2 y ELS-3; figura 6.18) en la cuenca Laguna Salada que indican un espesor para los sedimentos de más de 2400 m en la margen oriental de la cuenca (Alvarez-Rosales y González-López, 1995). Las columnas estratigráficas de estos pozos se presentan en la figura 6.20 (Martín-Barajas et al., 2000).

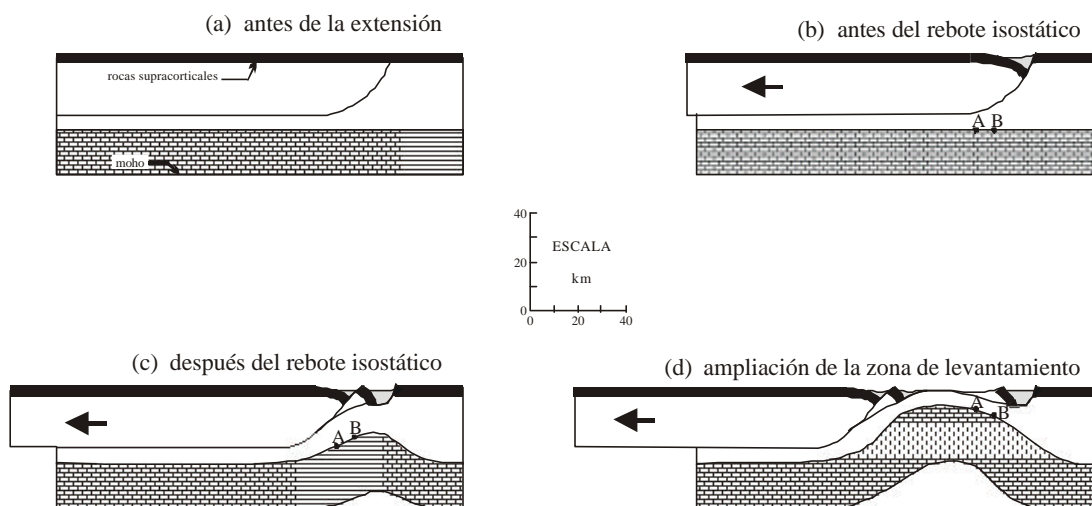


FIGURA 6.19. Modelo conceptual de una zona de "rolling hinge". Modificado de Wernicke y Axen (1988).

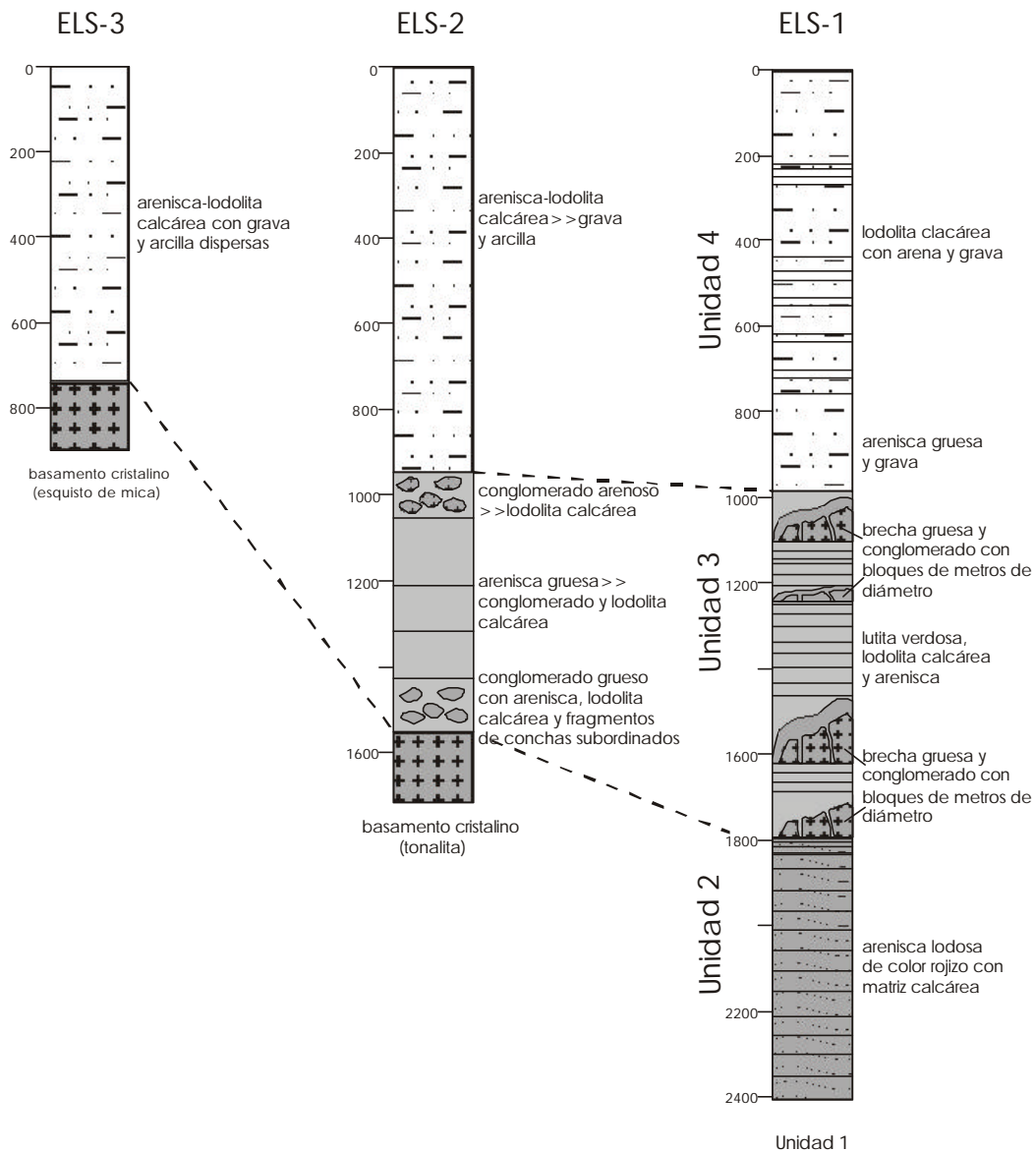


FIGURA 6.20. Unidades lito-estratigráficas en pozos de exploración geotérmica realizados en la cuenca de la Laguna Salada por la Comisión Federal de Electricidad. Modificada de Martín-Barajas et al. (2000).

Se ha propuesto que la profundidad del basamento por debajo de la cuenca Laguna Salada es fuertemente asimétrica. Kelm (1971) interpretó datos gravimétricos y magnéticos a lo largo de dos perfiles que cruzan la cuenca en dirección este-oeste. Como hemos citado anteriormente, este autor propuso un primer modelo de la geometría de la cuenca como un graben de unos 6000 m de profundidad máxima para los sedimentos. Arellano-Guadarrama y Venegas-Salgado (1992) interpretaron anomalías gravimétricas residuales y datos magnéticos de la zona para estudiar la morfología del basamento debajo de la cuenca. Estos autores propusieron un modelo de la cuenca

como una depresión principal en la porción central y sureste de la misma que alcanza profundidades del alrededor de 3000 m y una pequeña subcuena al NNE del orden de 1500 m. A partir de la interpretación de los datos magnéticos, estos autores postularon la existencia de dos cuerpos intrusivos básicos en la depresión central. Por otro lado, de los tres pozos mencionados (figuras 6.18 y 6.20), el ELS-3 cortó el basamento a unos 900 m en la margen occidental de la cuenca, el pozo ELS-2 lo hizo a unos 1300 m en su parte central y el pozo ELS-1 perforó 2404 m de sedimentos en la margen oriental de la Laguna Salada sin cortar el basamento. El espesor de las secuencias sedimentarias y las variaciones litológicas que aparecen entre los pozos (figura 6.20) implican que el basamento se encuentra basculado hacia la margen oriental, alcanzando una profundidad mínima de 2500 m en esta margen de la cuenca (Vázquez-Hernández, 1996; Martín-Barajas et al., 2000). García-Abdeslem et al. (2000) han obtenido un modelo similar a partir de datos gravimétricos y magnéticos, en el que proponen un incremento del espesor de los sedimentos hacia el este, alcanzando una profundidad máxima de 3 km, de acuerdo a una estructura de semi-graben.

Sánchez-Monclú (1997) interpreta, mediante el estudio de las derivadas del potencial gravitacional, que la cuenca Laguna Salada está integrada por dos o incluso tres subcuencas. La primera de ellas estaría situada al sur del cerro El Centinela (figura 6.18), limitada por dos altos estructurales que la separan, por un lado, del Valle Imperial y, por el otro, de la subcuena principal de la Laguna Salada. La segunda subcuena, interpretada por este autor, estaría situada en el centro de la zona de la Laguna Salada, ésta es la subcuena principal ya que presenta la mayor extensión de todas. Por último, la tercera subcuena estaría situada en la parte suroeste de la subcuena principal.

En la cuenca Laguna Salada se han realizado numerosos trabajos geofísicos, sobre todo de gravimetría, magnetometría, magnetotelúrica, sismicidad y geotermia. Además de los ya citados, la mayoría de estos trabajos han sido publicados como informes técnicos por el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), por la Universidad de Baja California (UABC) y por la Comisión Federal de Electricidad (CFE) de México.

6.2.2. Inversión de datos gravimétricos de la Laguna Salada en 2D

A continuación vamos a utilizar el método de inversión propuesto en el Capítulo IV para calcular la geometría y la distribución de densidades de la cuenca Laguna Salada a lo largo de dos perfiles trazados sobre el mapa de anomalías residuales isostáticas calculado por García-Abdeslem et al. (1995). La base de datos gravimétricos, utilizada por estos autores para calcular las anomalías residuales, integra datos registrados por Velasco-Hernández (1963), Kelm (1971), García-Abdeslem y Espinosa-Cardena (1994) y Ramírez-Hernández et al. (1994). A partir de estos datos, García-Abdeslem et al. (1995) calcularon un mapa de anomalías de Bouguer completa de la cuenca Laguna

Salada y áreas adyacentes. También calcularon el mapa regional utilizando el modelo de compensación isostática de Airy-Heiskanen (Heiskanen y Moritz, 1985) y un modelo digital de topografía-batimetría de la región de estudio. Supusieron una densidad para la carga topográfica en la zona de 2.67 g/cm^3 , una profundidad de compensación a nivel del mar de 25 km y un contraste de densidad en la frontera Corteza-Manto de 0.35 g/cm^3 . Con estos datos los autores obtuvieron el mapa de anomalías residuales isostáticas de la figura 6.21 y modelaron un perfil entre Sierra Juárez y Sierra El Mayor, encontrando una estructura de semigraben con una profundidad máxima del orden de 2500 m en la margen oriental de la cuenca.

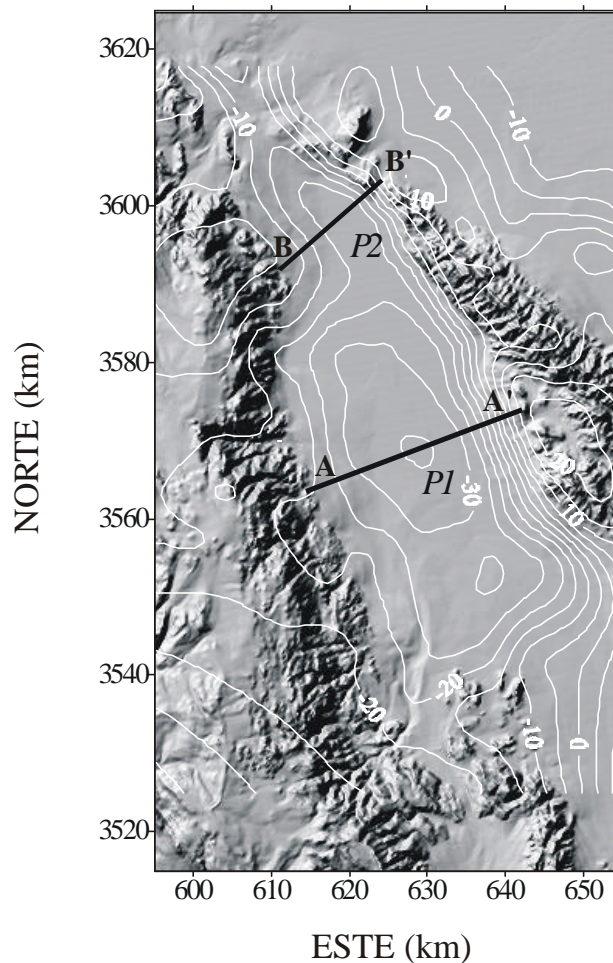


FIGURA 6.21. Mapa de anomalías residuales isostáticas sobre el mapa de la topografía de la cuenca de la Laguna Salada. Las isolíneas blancas se encuentran en unidades de mGal. Las dos líneas negras representan los perfiles que se van a interpretar en este estudio.

Como se observa en la figura anterior, la anomalía residual isostática en la margen occidental de la cuenca Laguna Salada presenta un gradiente horizontal suave que sugiere la ausencia de contrastes de densidad bruscos en esta área. Por otro lado, en la margen oriental de esta cuenca, aparece un gradiente intenso que se puede interpretar como un cambio brusco en la densidad debido a la presencia de las fallas Laguna Salada y Cañada David. Otro rasgo que destaca en este mapa es un mínimo de -35 mGal, situado en la parte central de la cuenca Laguna Salada, y cuyo origen es debido al contraste de densidad entre el material sedimentario que rellena la cuenca y el basamento que lo rodea (García-Abdeslem et al., 2000). En la parte norte de la cuenca, al sur del Cerro El Centinela, aparece otro mínimo de -20 mGal, indicando la presencia de una posible subcuenca separada de la subcuenca principal por un alto estructural del basamento (Arellano-Guadarrama y Venegas-Salgado, 1992; Sánchez-Monclú, 1997).

La forma alargada de la cuenca Laguna Salada hace que esta estructura sea idónea para realizar un estudio bidimensional de su distribución de densidades y su forma geométrica mediante el método de inversión desarrollado en el Capítulo IV. Por ello, y como se mencionó al principio de la sección, se van a extraer dos perfiles del mapa de anomalías isostáticas residuales de la figura 6.21. Uno de ellos está trazado sobre la subcuenca principal de la Laguna Salada y el otro sobre la subcuenca secundaria situada al norte de la anterior.

6.2.2.1. Perfil *PI*: Subcuenca principal.

El perfil *PI* tiene una longitud total de 28 km y cruza transversalmente la subcuenca principal de la Laguna Salada en dirección ENE. Esta orientación es subparalela a los gradientes que caracterizan las anomalías residuales de las márgenes oriental y occidental de la cuenca. Como se puede ver en la figura 6.21, las posiciones de los extremos de este perfil coinciden, aproximadamente, con el basamento que aflora al pie de las sierras que limitan la Laguna Salada.

Antes de iniciar la inversión de los datos, restaremos un gradiente gravimétrico lineal al perfil *PI*, para que el valor de la anomalía residual isostática en sus extremos sea de 0 mGal (figura 6.22). A continuación vamos a utilizar el perfil resultante, con $M = 57$ datos equiespaciados a 500 m, para estudiar la geometría y la distribución del contraste de densidad de la subcuenca principal de la Laguna Salada, suponiendo que la desviación estándar de los datos de gravedad es $\sigma = 1.0$ mGal.

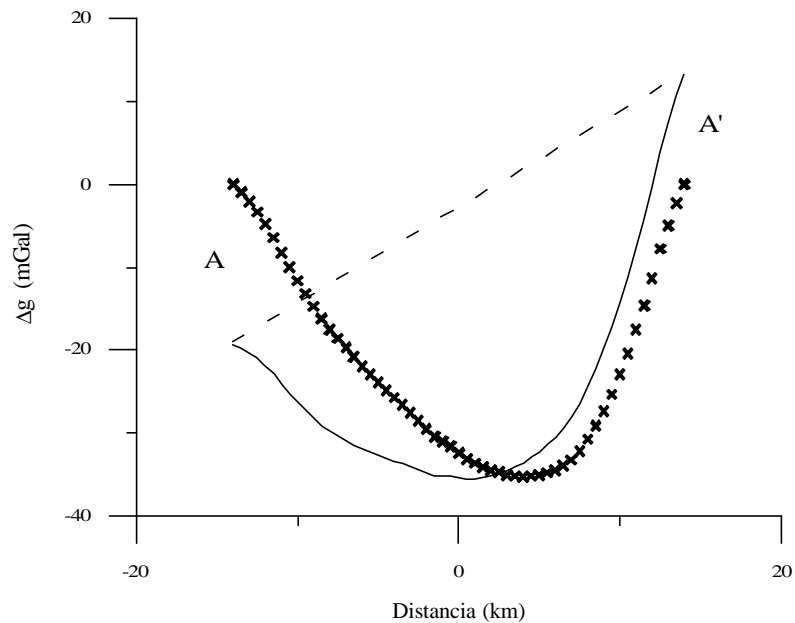
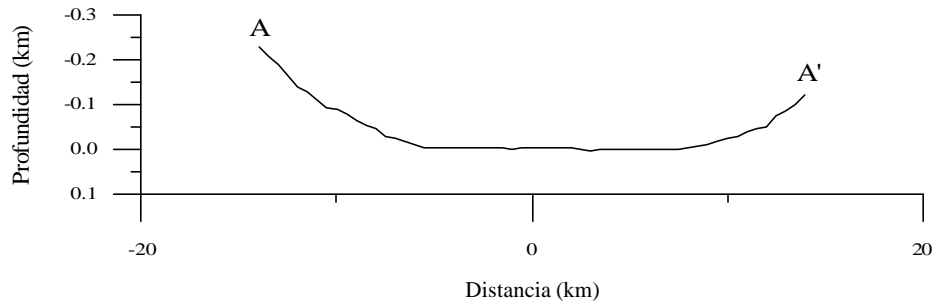


FIGURA 6.22. Perfil PI sobre la subcuenca principal de la Laguna Salada. La línea sólida es la anomalía residual isostática en dicho perfil, la línea recta a trazos es el regional sustraído y la línea de cruces es la anomalía resultante que se ha utilizado como base de datos para la interpretación de este perfil.

6.2.2.1.1. Caso 1: Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z .

Vamos a comenzar modelando la subcuenca principal de la Laguna Salada con el tipo de fuente descrito en la sección 4.1 del Capítulo IV, en el que se considera que la topografía de la zona de estudio es plana. Si observamos la figura 6.23, vemos que la topografía del perfil PI es aproximadamente plana en el centro de la cuenca, con una altura promedio $z_0 = 0$ m sobre el nivel del mar, mientras que en los extremos del perfil la topografía se eleva, alcanzando cotas máximas de unos 200 m sobre el nivel del mar. En este caso, podemos considerar que la frontera superior de la estructura geométrica de la fuente en este perfil es un plano $z_1 = z_0 = 0$ km, sin que se introduzcan errores importantes en el cálculo de la solución.

FIGURA 6.23. Topografía del perfil PI .

Para este tipo de fuentes, el número máximo de parámetros es $N = 15$. En principio no vamos a considerar invariable ninguno de ellos en el proceso de inversión, para ver cómo se comporta el método al aplicarlo a un problema con datos de campo, en el que no se ha tenido en cuenta la información disponible acerca del contraste de densidad o la estructura de la fuente. Por ello, el vector de parámetros que hay que calcular tiene 15 componentes y viene dado por la expresión (4.5). Como el número de datos en este perfil es $M = 57$, el problema de inversión en este caso es un problema sobredeterminado.

Como modelo inicial se ha elegido el modelo de la figura 6.24, en el que consideraremos que un valor razonable para el contraste de densidad promedio en la cuenca, entre el material sedimentario y el basamento que le rodea, es $\mathbf{Dr} = p_1 = -0.3 \text{ g/cm}^3$ (Kelm, 1971), dado por el polinomio (4.1). En cuanto a la estructura de dicho modelo, sólo hemos tenido en cuenta la información obtenida directamente en superficie, por lo que consideraremos que las fronteras laterales vienen descritas por los polinomios (4.4), donde $f_1(z) = p_7 = -12 \text{ km}$ y $f_2(z) = p_{11} = 12 \text{ km}$, que son los puntos donde aflora el basamento en este perfil, los cuales están lo suficientemente alejados de los bordes del mismo como para evitar una posible falta de resolución en el cálculo de las fronteras laterales, como ocurrió en el caso del glaciar Salmón. En cuanto a la frontera inferior, se va a suponer que ésta viene dada por $z_2 = p_{15} = 2 \text{ km}$, la cual podría considerarse como una profundidad promedio para la cuenca. Con este modelo iniciamos un proceso de inversión de 200 iteraciones para el cálculo de la solución de nuestro problema.

En la figura 6.25 se puede observar la evolución del desajuste durante el proceso iterativo. El valor de este parámetro disminuye de manera constante y estable a lo largo de todo el proceso y no se llega a alcanzar una solución mínima para los parámetros del modelo de fuente. A partir de la décima iteración el desajuste alcanza valores menores de $q_s = 10$ y, como el valor de la tolerancia en este caso es $T = M = 57$, ésto nos indica que estamos sobredeterminando los datos de gravedad, por tanto elegiremos como solución aquélla cuyo valor del desajuste sea lo más parecido a la tolerancia permitida. Este valor se alcanza en la cuarta iteración, siendo $q_s = 55.04$, con un factor de amortiguación $\mathbf{b}^{-1} = 82.6$. La solución resultante se presenta en la figura 6.26, donde vemos que hay

un buen ajuste entre la anomalía residual isostática y la anomalía correspondiente al modelo de fuente. Sin embargo, la geometría de la fuente anómala obtenida no se parece a la estructura de un semigraben que se deduce tanto de los datos geológicos como geofísicos presentados en otros trabajos, y los rasgos generales del contraste de densidad obtenido en el modelo presentan capas sedimentarias casi verticales en la margen izquierda de la fuente, cambiando progresivamente su pendiente hasta ser casi horizontal en la parte central-derecha de la estructura. En cuanto a la profundidad obtenida, ésta es del orden de 2.2 km. Este valor se podría considerar como un promedio de la profundidad de la cuenca, aunque sabemos, por los datos obtenidos de las perforaciones de la Comisión Federal de Electricidad (Alvarez-Rosales y González-López, 1995), que la profundidad de la cuenca es mayor de 2.4 km en la margen oriental de la misma y menor de 1 km en su margen occidental. En conclusión, el modelo obtenido no es el modelo esperado para la cuenca Laguna Salada por lo que será desechado como modelo final.

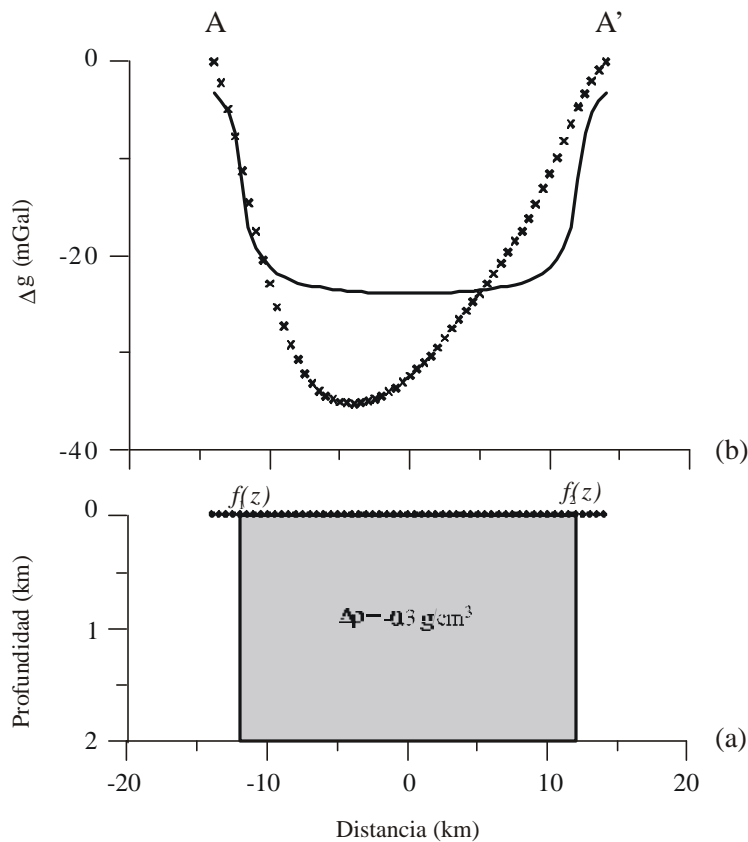


FIGURA 6.24. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión para el estudio de los datos de la anomalía residual isostática de la cuenca Laguna Salada. Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil *PI*. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

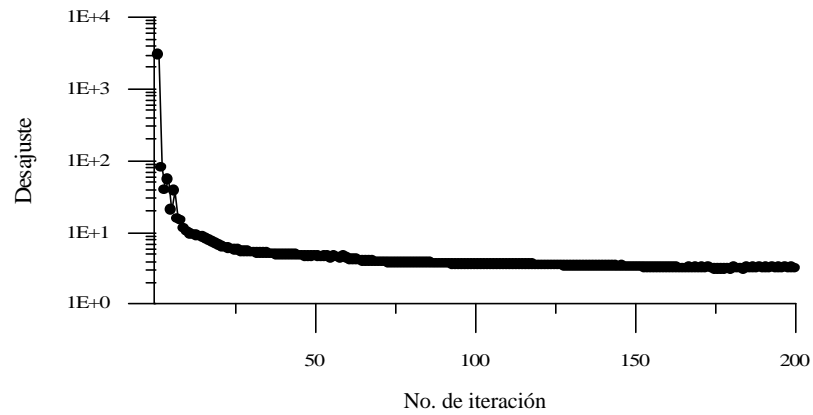


FIGURA 6.25. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

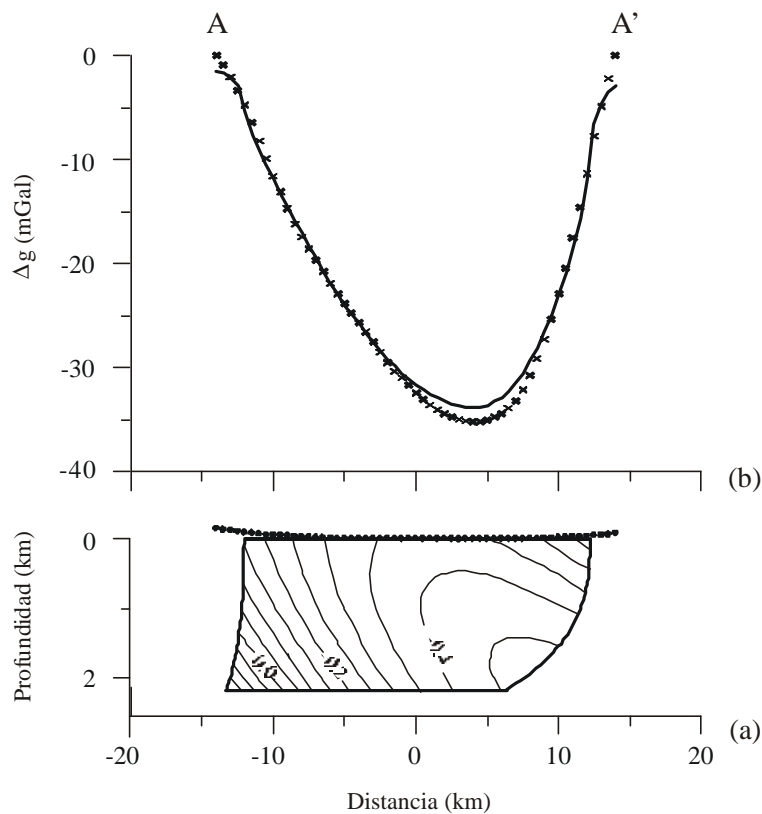


FIGURA 6.26. (a) Modelo resultante para el perfil PI sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z . Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil PI . (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

Como vimos en el caso del glaciar Salmon, el método de inversión propuesto en este trabajo permite fijar algunos de los parámetros de la fuente anómala dejándolos invariables y permitiendo la evolución de los parámetros restantes durante todo el proceso de inversión. Por ello, vamos a seguir un nuevo procedimiento de trabajo en el que, primeramente, vamos a calcular la estructura geométrica de la Laguna Salada con un contraste de densidad constante que sería el promedio para toda la estructura. Para ésto, vamos a considerar fijos, y de valor 0, cinco de los seis parámetros del polinomio (4.1) de la densidad: p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 . También consideraremos fijos los parámetros $p_7 = -12$ km y $p_{11} = 12$ km para las fronteras laterales, dadas por los polinomios (4.4), que son los puntos donde aflora el basamento cristalino a lo largo del perfil y sus posiciones son conocidas. El resto de los parámetros son las incógnitas de nuestro problema que deben ser determinadas en la inversión. Por tanto, el vector de parámetros a calcular es:

$$\mathbf{p} = \{ p_1, p_8, p_9, p_{10}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15} \} \quad (6.3)$$

teniendo un total de $N = 8$ incógnitas y $M = 57$ datos, por lo que el problema es sobredeterminado.

El modelo inicial para este caso es el mismo que para el caso anterior y viene dado por la figura 6.24. Iniciando con este modelo se realiza un proceso de inversión de 200 iteraciones. En la figura 6.27 se observa la evolución del desajuste, cuyo valor presenta una disminución continua y estable en todo el proceso. A partir de la undécima iteración, el valor del desajuste es menor de 35, que es bastante más pequeño que el valor de la tolerancia para este caso ($T = M = 57$). Esto indica que las anomalías correspondientes a los modelos alcanzados en las siguientes iteraciones sobredeterminan los datos del problema. Como no se ha alcanzado una solución mínima para nuestro problema, elegiremos el modelo resultante en la décima iteración como posible solución, con $\mathbf{b}^{-1} = 25.5$ y $q_s = 51.0$, que tiene un valor cercano a la tolerancia del problema. La forma del modelo resultante se puede ver en la figura 6.28.

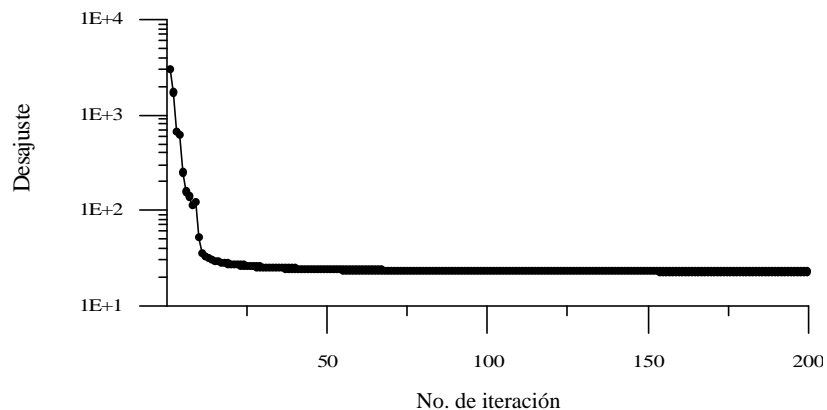


FIGURA 6.27. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

La estructura geométrica del modelo resultante tiene la forma de un semigraben con mayor subsidencia en la margen derecha de la misma, como se puede observar en la figura 6.28. La profundidad máxima alcanzada es $z_2 = p_{15} = 2.66$ km y el contraste de densidad promedio en toda la sección es $\Delta\rho = \rho_1 = -0.37$ g/cm³. Esta solución presenta un modelo de estructura satisfactorio de acuerdo con los trabajos geológicos y geofísicos realizados en la zona anteriormente.

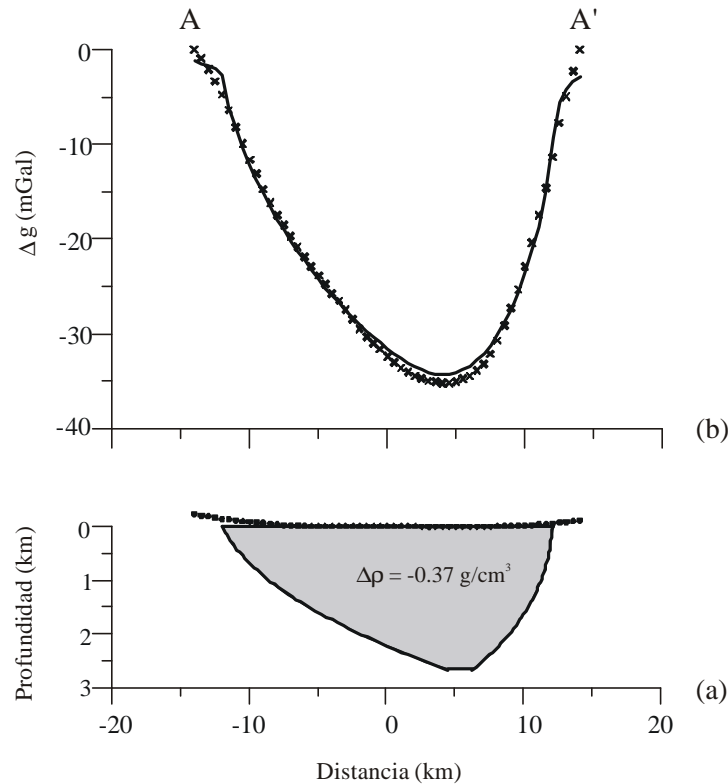


FIGURA 6.28. (a) Modelo resultante para el perfil *PI* sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z y con contraste de densidad constante. Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil *PI*. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

En la figura 6.29 podemos ver la matriz de resolución correspondiente a este caso. Para calcular esta matriz se ha utilizado una varianza residual cuyo valor es $\hat{S}^2 = 1.04$ mGal². El valor numérico de esta varianza es casi el mismo que el de la varianza estimada para los datos ($S^2 = 1.0$ mGal²). Esto significa que la anomalía del modelo resultante se ajusta de manera satisfactoria a los datos observados, como podemos ver en la figura 6.27(b). En la matriz de la figura 6.29 podemos

apreciar que el parámetro con mayor resolución es el p_1 , correspondiente al contraste de densidad de la fuente. En cuanto a los parámetros de las fronteras laterales, observamos que los correspondientes a la frontera derecha presentan mayor resolución, en términos generales, que los parámetros correspondientes a la frontera izquierda. El parámetro p_{15} , que es el que determina la frontera inferior del cuerpo, presenta una resolución intermedia.

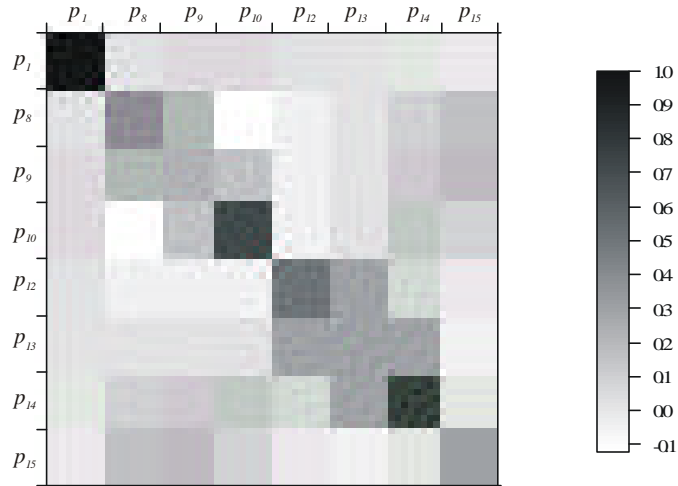


FIGURA 6.29. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

Los valores numéricos de los elementos de la matriz de covarianza se presentan en la tabla 6.8. A partir de los elementos de la diagonal principal podemos obtener las incertidumbres de los ocho parámetros que nos dan la solución del problema. En la tabla 6.9 se pueden ver las soluciones obtenidas para los parámetros y las incertidumbres correspondientes, con un intervalo de confianza de $+ 2.58 \sigma$ (99 %).

La matriz de correlación se puede ver en la figura 6.30. En líneas generales, se observa la existencia de correlación entre los parámetros de la frontera izquierda. También se puede ver que existe correlación entre los parámetros de la frontera derecha. Así mismo, hay correlación entre el parámetro de la densidad y los parámetros p_{10} y p_{14} de las fronteras laterales. El único parámetro que presenta correlaciones bajas con respecto a los demás es el parámetro que determina la frontera inferior, esto es, el parámetro p_{15} , aunque se aprecia correlación con el p_9 . En la tabla 6.10 se presentan los valores numéricos de estas correlaciones.

p_1	p_8	p_9	p_{10}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
$1.567 \cdot 10^{-4}$	$-1.367 \cdot 10^{-4}$	$-3.046 \cdot 10^{-4}$	$-8.345 \cdot 10^{-4}$	$-8.696 \cdot 10^{-5}$	$8.270 \cdot 10^{-5}$	$4.657 \cdot 10^{-4}$	$-6.433 \cdot 10^{-5}$	p_1
	$5.746 \cdot 10^{-3}$	$2.323 \cdot 10^{-3}$	$-1.679 \cdot 10^{-3}$	$4.390 \cdot 10^{-6}$	$-7.539 \cdot 10^{-5}$	$-5.701 \cdot 10^{-4}$	$8.525 \cdot 10^{-4}$	p_8
		$2.588 \cdot 10^{-3}$	$3.052 \cdot 10^{-4}$	$2.073 \cdot 10^{-4}$	$-1.441 \cdot 10^{-4}$	$-1.088 \cdot 10^{-3}$	$1.619 \cdot 10^{-3}$	p_9
			$5.986 \cdot 10^{-3}$	$3.592 \cdot 10^{-4}$	$-5.344 \cdot 10^{-4}$	$-2.213 \cdot 10^{-3}$	$-1.795 \cdot 10^{-4}$	p_{10}
				$6.269 \cdot 10^{-3}$	$1.801 \cdot 10^{-3}$	$-3.125 \cdot 10^{-3}$	$1.403 \cdot 10^{-3}$	p_{12}
					$1.602 \cdot 10^{-3}$	$-9.648 \cdot 10^{-4}$	$-5.745 \cdot 10^{-4}$	p_{13}
						$3.106 \cdot 10^{-3}$	$-8.694 \cdot 10^{-4}$	p_{14}
							$5.953 \cdot 10^{-3}$	p_{15}

TABLA 6.8. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	FRONT. IZQUIERDA	FRONT. DERECHA	FRONT. INFERIOR
$p_1 = -0.37 \pm 0.03 \text{ g/cm}^3$	$p_8 = 1.9 \pm 0.2$	$p_{12} = -0.3 \pm 0.2$	$p_{15} = 2.66 \pm 0.19 \text{ km}$
	$p_9 = 1.42 \pm 0.13 \text{ km}^{-1}$	$p_{13} = -0.44 \pm 0.10 \text{ km}^{-1}$	
	$p_{10} = 0.06 \pm 0.19 \text{ km}^{-2}$	$p_{14} = -0.10 \pm 0.14 \text{ km}^{-2}$	

TABLA 6.9. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

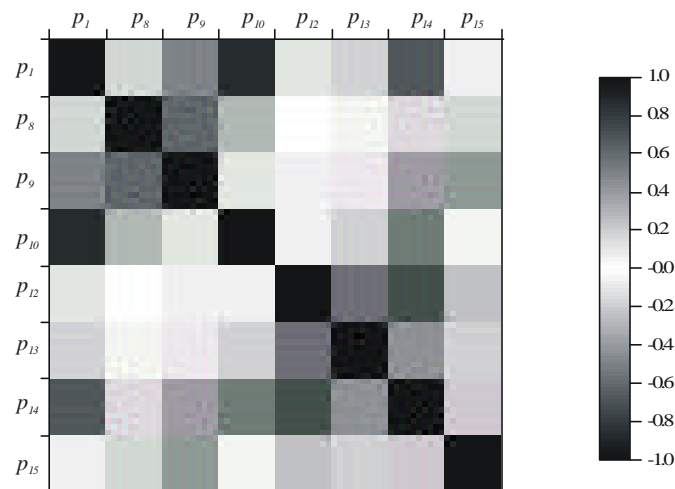


FIGURA 6.30. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_1	p_8	p_9	p_{10}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-1.441 \cdot 10^{-1}$	$-4.783 \cdot 10^{-1}$	$-8.615 \cdot 10^{-1}$	$-8.772 \cdot 10^{-2}$	$1.651 \cdot 10^{-1}$	$6.675 \cdot 10^{-1}$	$-6.659 \cdot 10^{-2}$	p_1
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$6.023 \cdot 10^{-1}$	$-2.863 \cdot 10^{-1}$	$7.310 \cdot 10^{-4}$	$-2.485 \cdot 10^{-2}$	$-1.350 \cdot 10^{-1}$	$1.458 \cdot 10^{-1}$	p_8
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$7.754 \cdot 10^{-2}$	$5.147 \cdot 10^{-2}$	$-7.076 \cdot 10^{-2}$	$-3.837 \cdot 10^{-1}$	$4.126 \cdot 10^{-1}$	p_9
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	$5.864 \cdot 10^{-2}$	$-1.726 \cdot 10^{-1}$	$-5.133 \cdot 10^{-1}$	$-3.007 \cdot 10^{-2}$	p_{10}
				$1.000 \cdot 10^{+0}$	$5.682 \cdot 10^{-1}$	$-7.082 \cdot 10^{-1}$	$2.296 \cdot 10^{-1}$	p_{12}
					$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-4.326 \cdot 10^{-1}$	$-1.860 \cdot 10^{-1}$	p_{13}
						$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-2.022 \cdot 10^{-1}$	p_{14}
							$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_{15}

TABLA 6.10. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

En el proceso de inversión anterior hemos obtenido una estructura geométrica satisfactoria para la fuente responsable de la anomalía gravimétrica observada en el perfil PI de la Laguna Salada, con un contraste de densidad constante de -0.37 g/cm^3 entre el material sedimentario que rellena dicha cuenca y el basamento que le rodea. A continuación vamos a realizar otro proceso de inversión de los datos del perfil PI para calcular un contraste de densidad que varíe con la distancia horizontal y con la profundidad, según el polinomio dado por la expresión (4.1) y así obtener la forma más general de la subcuenca principal de la Laguna Salada.

En este segundo proceso iterativo vamos a considerar invariables los valores de los parámetros que determinan la estructura de la fuente desde el modelo inicial hasta el modelo resultante, siendo esta estructura la misma que la del modelo de la figura 6.28. Esto significa que, en este nuevo proceso de inversión, no vamos a calcular ningún parámetro de la estructura, sólo vamos a calcular los parámetros que determinan el contraste de densidad de la fuente. Por otro lado, también vamos a considerar invariable el término independiente del polinomio (4.1) del contraste de densidad, con un valor $p_1 = -0.67 \text{ g/cm}^3$, ya que corresponde al contraste de densidad que vamos a encontrar en el centro del perfil $x_0 = 0 \text{ km}$ y en el nivel de la topografía $z_0 = 0 \text{ km}$, y que correspondería al material sedimentario no consolidado de densidad promedio 2.0 g/cm^3 que se encuentra en la superficie de la cuenca (García-Abdeslem, comunicación personal).

Según las condiciones anteriores, el problema de inversión que se desea calcular es un problema lineal con $M = 57$ datos y $N = 5$ parámetros, pertenecientes al polinomio del contraste de densidad, siendo el vector incógnita:

$$\mathbf{p} = \{ p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \} \tag{6.4}$$

por lo que es un problema sobredeterminado.

El modelo inicial con el que comienza la inversión de los datos de este perfil tiene la misma estructura que el modelo de la figura 6.28 pero con un contraste de densidad constante $\mathbf{Dr} = \rho_1 = -0.67 \text{ g/cm}^3$. Se ha realizado un proceso de 200 iteraciones para calcular las soluciones de los cinco parámetros restantes que determinan el polinomio que describe el contraste de densidad. En la figura 6.31 se presenta la evolución del desajuste a lo largo de todas las iteraciones. El valor de este parámetro converge hacia $q_s = 36.7$ en las primeras iteraciones y permanece constante en este valor hasta el final del proceso. Como ya sabemos, la tolerancia en este caso es $T = 57$, por lo que la solución proporcionada con este desajuste está sobredeterminando los datos. En cuanto a las soluciones de los parámetros, a partir de la décima iteración los valores de las mismas permanecen constantes hasta la última iteración, indicando que se ha alcanzado un mínimo dentro del espacio de soluciones. Por tanto, elegiremos este mínimo como solución del problema, con $\mathbf{b}^{-1} = 18.3$ y $q_s = 36.7$. La fuente anómala correspondiente y su anomalía gravimétrica se pueden ver en la figura 6.32. Esta solución presenta un modelo con un contraste de densidad distribuido en capas subparalelas basculadas hacia el este. En la margen de recha podemos ver que estas capas se distribuyen de manera casi vertical, indicando una variación lateral de densidad que sugiere un cambio de facies subvertical para esta zona. El modelo resultante es un modelo satisfactorio de acuerdo con la estructura de semigraben esperada para la Laguna Salada.

La varianza residual para este caso tiene el valor $\mathbf{S}^2 = 0.7 \text{ mGal}^2$ que es menor aunque muy parecido al de la varianza estimada para los datos ($\mathbf{s}^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$), indicando que la anomalía del modelo solución se ajusta satisfactoriamente a los datos observados. A partir de esta varianza residual se calcula la matriz de resolución, la cual se presenta en la figura 6.33. En esta figura podemos ver que el parámetro que presenta peor resolución es el p_3 . Este parámetro corresponde al coeficiente de la variable z del polinomio (4.1) que determina el contraste de densidad de la fuente. En general, esta matriz es bastante parecida a la matriz identidad, indicando que los parámetros de la densidad de la fuente presentan muy buena resolución, lo cual está de acuerdo con los resultados obtenidos en los modelos teóricos estudiados en el Capítulo IV.

La matriz de covarianza de los parámetros se presenta en la tabla 6.11. En esta matriz se puede ver que el parámetro que tiene mayor varianza es el que también presenta peor resolución, esto es, el parámetro p_3 . Con los elementos de la diagonal principal de esta matriz calculamos las incertidumbres de los cinco parámetros que nos proporcionan el contraste de densidad de la fuente. En la tabla 6.12 se presentan las soluciones numéricas obtenidas para los parámetros y sus incertidumbres, suponiendo un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \mathbf{s}$ (99 %).

En la figura 6.34 se presenta la matriz de correlación. En líneas generales se observa una fuerte correlación entre todos los parámetros de la densidad, como ya se obtuvo en los ejemplos teóricos del Capítulo IV. En la tabla 6.13 se presentan los valores numéricos de estas correlaciones y se observa que dichos valores son muy cercanos a la unidad.

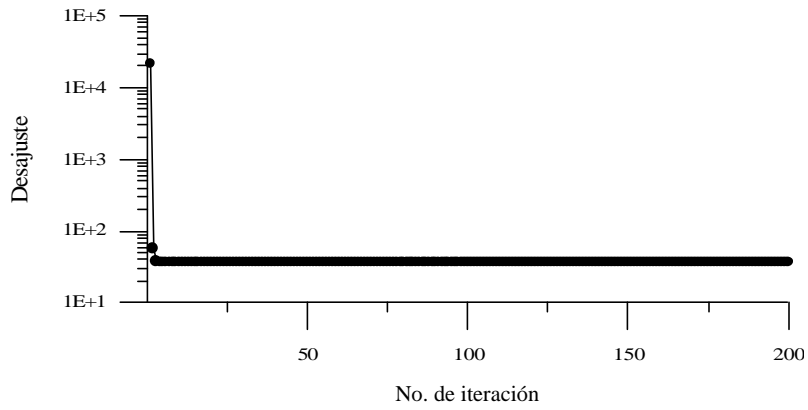


FIGURA 6.31. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

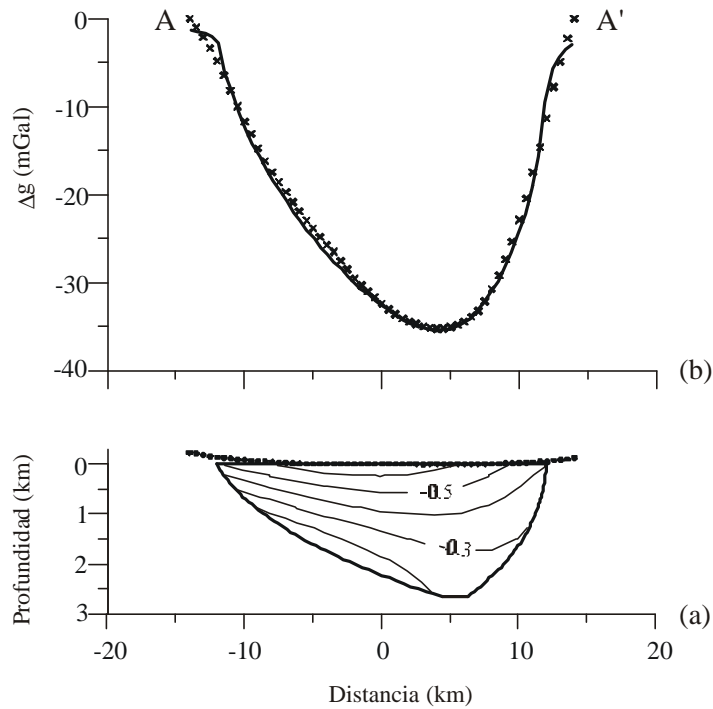


FIGURA 6.32. (a) Modelo resultante para el perfil PI sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z y con contraste de densidad dado por el polinomio (4.1). Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil PI . (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

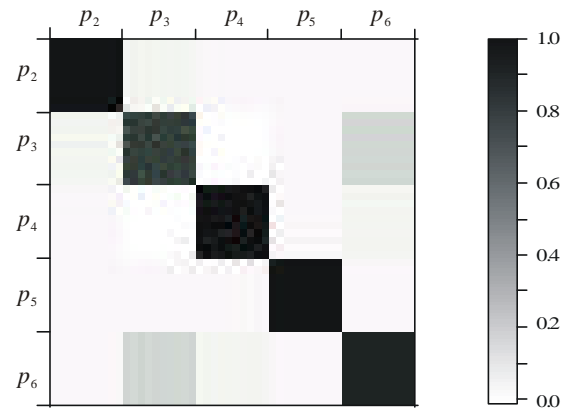


FIGURA 6.33. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
$5.450 \cdot 10^{-6}$	$-9.864 \cdot 10^{-5}$	$-9.439 \cdot 10^{-6}$	$3.465 \cdot 10^{-7}$	$6.912 \cdot 10^{-5}$	p_2
	$3.572 \cdot 10^{-3}$	$2.179 \cdot 10^{-4}$	$-1.126 \cdot 10^{-5}$	$-2.441 \cdot 10^{-3}$	p_3
		$1.779 \cdot 10^{-5}$	$-7.401 \cdot 10^{-7}$	$-1.513 \cdot 10^{-4}$	p_4
			$3.885 \cdot 10^{-8}$	$7.683 \cdot 10^{-6}$	p_5
				$1.671 \cdot 10^{-3}$	p_6

TABLA 6.11. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	
$p_2 = 0.003 \pm 0.006$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$
$p_3 = 0.33 \pm 0.15$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$
$p_4 = -0.015 \pm 0.011$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$
$p_5 = 0.0016 \pm 0.0005$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$
$p_6 = -0.04 \pm 0.11$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$

TABLA 6.12. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

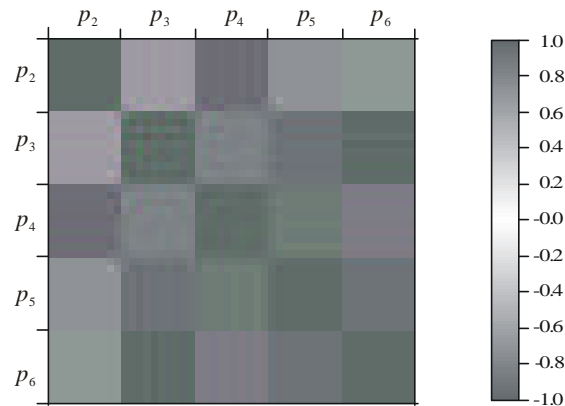


FIGURA 6.34. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-7.070 \cdot 10^{-1}$	$-9.585 \cdot 10^{-1}$	$7.530 \cdot 10^{-1}$	$7.242 \cdot 10^{-1}$	p_2
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$8.644 \cdot 10^{-1}$	$-9.555 \cdot 10^{-1}$	$-9.991 \cdot 10^{-1}$	p_3
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-8.902 \cdot 10^{-1}$	$-8.776 \cdot 10^{-1}$	p_4
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	$9.535 \cdot 10^{-1}$	p_5
				$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_6

TABLA 6.13. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

6.2.2.1.2. Caso 2: Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x .

A continuación vamos a realizar la inversión de los datos del perfil gravimétrico PI , presentados en la figura 6.21, considerando el modelo de fuente descrito en la sección 4.2 del Capítulo IV. Este modelo tiene en cuenta la forma de la topografía sobre la que se han registrado los datos y supone que las fronteras laterales del cuerpo son planas y verticales. En este caso, la topografía del perfil PI se puede aproximar por un polinomio de quinto grado $z_0 = g_1(x)$, como se puede ver en la figura 6.35, de manera que se mantenga el carácter suave de las funciones que modelan la fuente anómala.

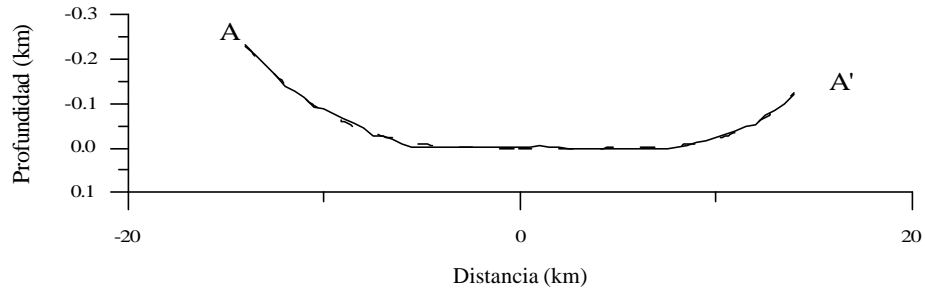


FIGURA 6.35. La línea sólida representa la topografía del perfil PI . La línea discontinua representa el polinomio de quinto grado que ajusta la topografía.

Como vimos en el Capítulo IV, para determinar las características de este modelo de fuente es necesario calcular un total de $N=12$ incógnitas, con lo que el vector de parámetros viene dado por la expresión (4.14) y el problema de inversión es un problema sobredeterminado.

El modelo inicial con el que comenzaremos la inversión de los datos es el mismo que el de la figura 6.24 pero, en este caso, la función que describe la frontera inferior de la fuente viene dada por el polinomio (4.13), donde $g_2(x) = p_7 = 2$ km, y las fronteras laterales son ahora las funciones constantes $x_1 = p_{11} = -12$ km y $x_2 = p_{12} = 12$ km. Con este modelo inicial realizamos un proceso iterativo que consta de 200 iteraciones, en el que el desajuste evoluciona de manera suave a lo largo de todo el proceso, como se puede ver en la figura 6.36.

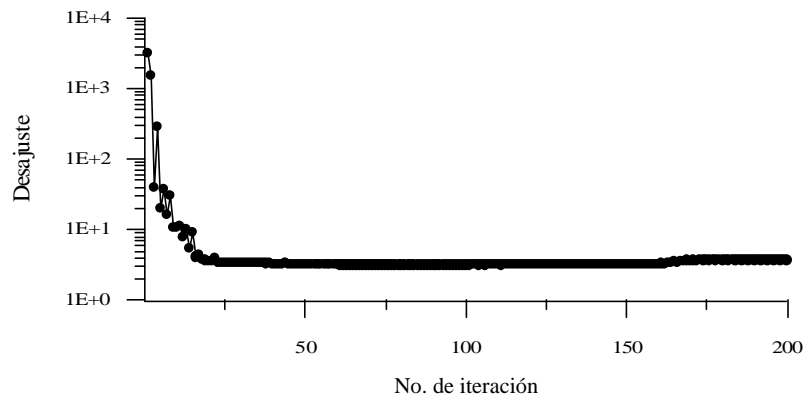


FIGURA 6.36. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

A partir de la decimotercera iteración, el desajuste presenta valores menores de $q_s = 10$ y no llega a alcanzarse una solución constante. Con valores del desajuste tan bajos estamos sobredeterminando los datos, por tanto, vamos a elegir como solución del problema aquel modelo cuyo valor del desajuste sea cercano a la tolerancia permitida $T = M = 57$. Esta solución se alcanza en

la tercera iteración, con $q_s = 40.3$ y $b^{-1} = 20.2$. La representación geométrica de la solución resultante se presenta en la figura 6.37(a), donde vemos la forma de la fuente anómala y su contraste de densidad con respecto al medio que le rodea.

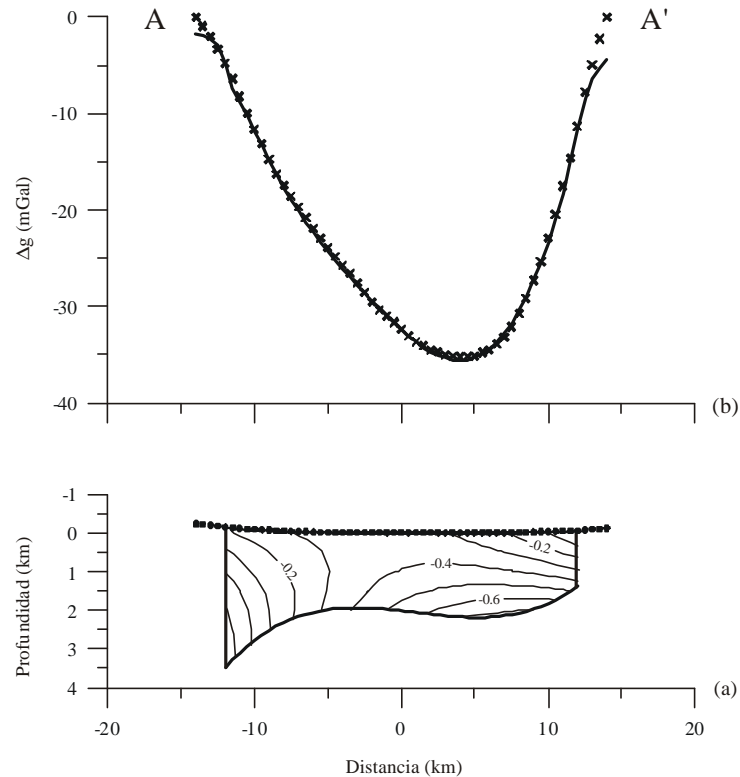


FIGURA 6.37. (a) Modelo resultante para el perfil *PI* sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x . Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil *PI*. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

En la figura 6.37(b) podemos ver el ajuste entre la anomalía residual isostática y la anomalía correspondiente al modelo de fuente anómala. A pesar de haber alcanzado un buen ajuste entre ambas anomalías, podemos ver que el contraste de densidad, entre el material sedimentario que rellena la cuenca y el basamento que le rodea, es negativo pero aumenta con la profundidad. Esto está en contradicción con la distribución del contraste de densidad típica en una cuenca sedimentaria, el cual es negativo y disminuye con la profundidad. Por otro lado, la profundidad máxima obtenida en este modelo es del orden de 3.5 km en la parte izquierda del modelo, la cuál corresponde a la margen occidental de la Laguna Salada. Este valor de la profundidad no es el esperado para esta zona, ya que

los datos proporcionados por las perforaciones de la Comisión Federal de Electricidad (Alvarez-Rosales y González-López, 1995) indican que la profundidad de la cuenca en su margen occidental es menor de 1 km. Por todo lo anterior, el modelo resultante en el proceso de inversión es rechazado como solución a nuestro problema.

Debido a la flexibilidad que tiene el método de inversión desarrollado en el presente trabajo, para decidir cuáles de los parámetros de la estructura y el contraste de densidad van a permanecer invariables y cuáles van a evolucionar a lo largo del proceso de inversión, vamos a seguir el procedimiento ya utilizado en el caso 1 para este mismo perfil. Primeramente vamos a considerar fijos y de valor cero los parámetros p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 del polinomio del contraste de densidad del cuerpo dado por la expresión (4.1), permitiendo que dicho contraste de densidad sea constante y con un valor $p_1 = -0.37 \text{ g/cm}^3$, que es el obtenido para el contraste de densidad promedio del modelo de la figura 6.27. Dicho parámetro también permanecerá invariable durante todo el proceso. Por otro lado, también vamos a considerar fijos los parámetros $p_{11} = -12 \text{ km}$ y $p_{12} = 12 \text{ km}$ de las fronteras laterales, ya que son los puntos donde aflora el basamento a lo largo del perfil y, por tanto, se conocen sus valores. Con estos valores determinados, el vector de parámetros a calcular es:

$$\mathbf{p} = \{ p_7, p_8, p_9, p_{10} \} \quad (6.5)$$

todos pertenecientes al polinomio (4.13) que describe la frontera inferior del cuerpo, que es la incógnita para este caso. Este problema tiene un total de $N = 4$ incógnitas y $M = 57$ datos, por lo que es un problema sobredeterminado.

Vamos a iniciar el proceso de inversión, de 200 iteraciones, con la estructura geométrica presentada en el modelo de la figura 6.24 pero con el contraste de densidad $p_1 = -0.37 \text{ g/cm}^3$ definido anteriormente. Los valores del desajuste en todo el proceso se pueden ver en la figura 6.38.

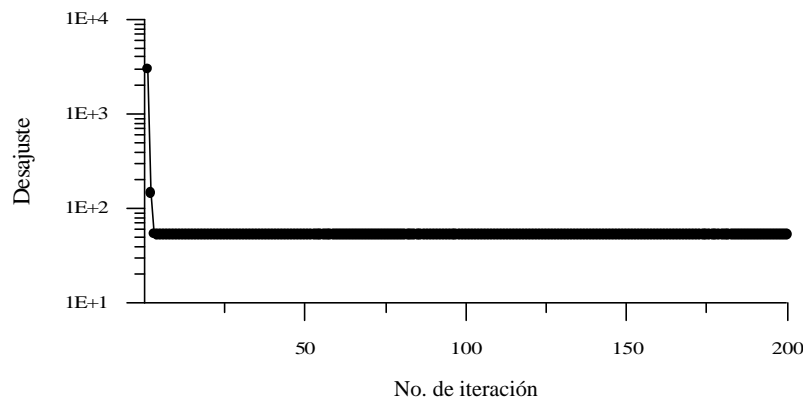


FIGURA 6.38. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

Este desajuste presenta una disminución muy rápida de su valor en las primeras iteraciones del proceso. A partir de la quinta iteración, el desajuste alcanza un valor constante $q_s = 53.0$, lo mismo que los valores de los parámetros que determinan la frontera inferior del cuerpo, lo que indica que se ha alcanzado un mínimo en el espacio de soluciones. El valor del desajuste para el modelo correspondiente es muy parecido al del nivel de tolerancia $T = 57$, con lo que podemos suponer que el proceso de iteración ha alcanzado una solución que puede ser satisfactoria para nuestro problema. Por tanto, vamos a elegir este resultado como solución final, con $b^{-1} = 26.5$. En la figura 6.39 se presenta la solución alcanzada así como la anomalía gravimétrica correspondiente. La estructura geométrica obtenida para la Laguna Salada en este caso también se asemeja a un semigraben con mayor subsidencia en la margen derecha de la estructura, con una profundidad máxima de 2.7 km y un contraste de densidad promedio de -0.37 g/cm^3 .

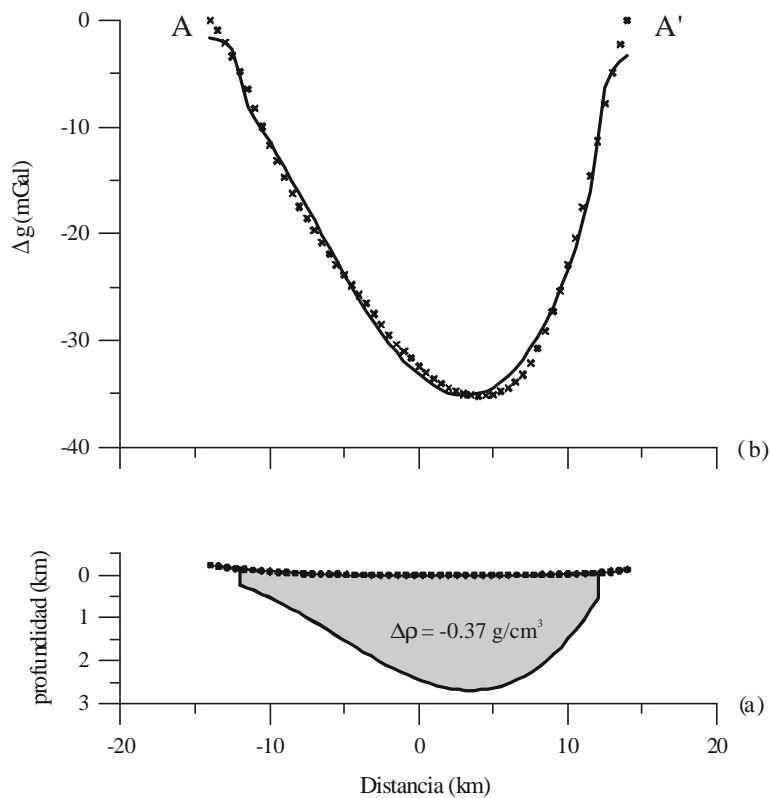


FIGURA 6.39. (a) Modelo resultante para el perfil PI sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable xy con contraste de densidad constante. Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil PI . (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

En la figura 6.40 se presenta la matriz de resolución calculada con una varianza residual $\hat{S}^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$, cuyo valor coincide con el de la varianza estimada para los datos $S^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$, lo que indica que el modelo resultante de fuente anómala explica satisfactoriamente los datos observados, como se puede ver en la figura 6.38(b). Como se observa en la figura 6.39, los cuatro parámetros de la frontera inferior del cuerpo presentan muy buena resolución.

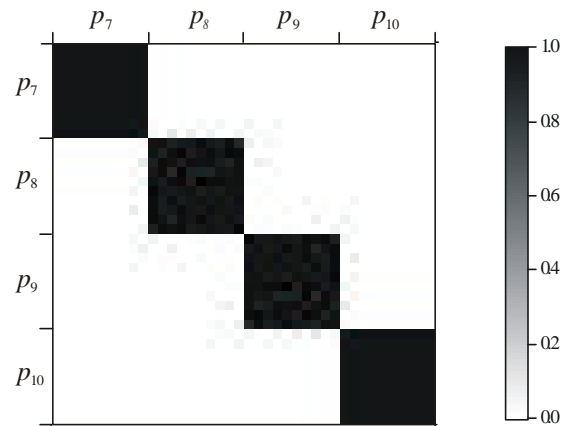


FIGURA 6.40. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

A continuación se presenta la matriz de covarianza de los parámetros en la tabla 6.14, la cual nos proporciona las incertidumbres de los parámetros del modelo resultante. Podemos ver que los elementos de dicha matriz presentan valores muy pequeños. En la tabla 6.15 vemos los parámetros del modelo y sus incertidumbres, suponiendo un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \sigma$ (99%).

En la figura 6.41 se presenta la matriz de correlación entre parámetros en la que se observa la existencia de correlación entre los parámetros p_7 y p_9 y entre los parámetros p_8 y p_{10} . En la tabla 6.16 se presentan los valores numéricos de los elementos de esta matriz, en la que se ve que ambas correlaciones son negativas.

p_7	p_8	p_9	p_{10}	
$3.931 \cdot 10^{-4}$	$1.995 \cdot 10^{-5}$	$-5.816 \cdot 10^{-6}$	$-2.521 \cdot 10^{-7}$	p_7
	$3.689 \cdot 10^{-5}$	$-3.186 \cdot 10^{-7}$	$-3.938 \cdot 10^{-7}$	p_8
		$1.227 \cdot 10^{-7}$	$4.693 \cdot 10^{-9}$	p_9
			$4.611 \cdot 10^{-9}$	p_{10}

TABLA 6.14. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

FRONT. INFERIOR
$p_7 = 2.45 \pm 0.05 \text{ km}$
$p_8 = 0.13 \pm 0.02$
$p_9 = -0.0143 \pm 0.0009 \text{ km}^{-1}$
$p_{10} = -0.0008 \pm 0.0002 \text{ km}^{-2}$

TABLA 6.15. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

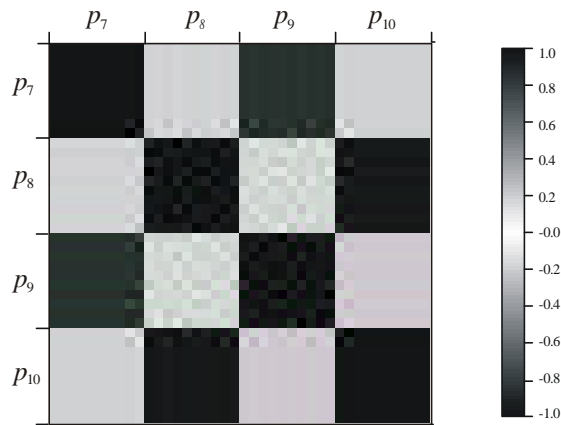


FIGURA 6.41. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_7	p_8	p_9	p_{10}	
1.000 10⁺⁰	$1.657 \cdot 10^{-1}$	$-8.376 \cdot 10^{-1}$	$-1.873 \cdot 10^{-1}$	p_7
	1.000 10⁺⁰	$-1.498 \cdot 10^{-1}$	$-9.547 \cdot 10^{-1}$	p_8
		1.000 10⁺⁰	$1.973 \cdot 10^{-1}$	p_9
			1.000 10⁺⁰	p_{10}

TABLA 6.16. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

Con el modelo anterior se ha obtenido un modelo de estructura de la fuente anómala responsable de la anomalía gravimétrica del perfil $P1$, registrado sobre la subcuenca principal de la Laguna Salada. El contraste de densidad promedio entre el material sedimentario y el basamento de la cuenca se ha supuesto constante y de valor -0.37 g/cm^3 . A continuación vamos a realizar la segunda parte del procedimiento de trabajo en la que se calculan los coeficientes del polinomio (4.1), que describen el contraste de densidad de la fuente, variando con la distancia horizontal y la profundidad, suponiendo fija la estructura de la figura 6.39. De los seis parámetros que determinan dicho polinomio, vamos a considerar invariable el p_1 , esto es, el término independiente, con un valor $p_1 = \mathbf{Dr}(0,0) = -0.67 \text{ g/cm}^3$, el cual corresponde al contraste de densidad que tienen los sedimentos no consolidados presentes en la capa más superficial de la cuenca. Los cinco parámetros restantes, que definen el contraste de densidad como el polinomio (4.1), serán las incógnitas del problema. Con esto, nuestro problema de inversión es un problema lineal sobredeterminado con $M = 57$ datos y $N = 5$ parámetros, cuyo vector incógnita viene dado por la expresión (6.4).

El modelo inicial que vamos a considerar tiene la estructura de la figura 6.39 y un contraste de densidad constante $\mathbf{Dr} = p_1 = -0.67 \text{ g/cm}^3$. Como es habitual, se realiza un proceso de 200 iteraciones para calcular las soluciones de los cinco parámetros restantes del polinomio $\mathbf{Dr}(x,z)$.

En la figura 6.42 se presenta la evolución del desajuste a lo largo del proceso. Como se puede observar, este parámetro converge hacia el valor $q_\sigma = 28.7$ a partir de la tercera iteración y permanece constante en este valor hasta el final del proceso. A partir de la séptima iteración, los parámetros del modelo de fuente obtenido también permanecen constantes hasta la última iteración. Esta solución está sobredeterminando los datos, puesto que el valor del desajuste es bastante menor que el de la tolerancia ($T = 57$), no obstante, es el valor más cercano a T , por lo que supondremos que es la solución del problema. En la figura 6.43 se puede ver el modelo resultante, en el que el factor de amortiguación es $\mathbf{b}^{-1} = 14.3$.

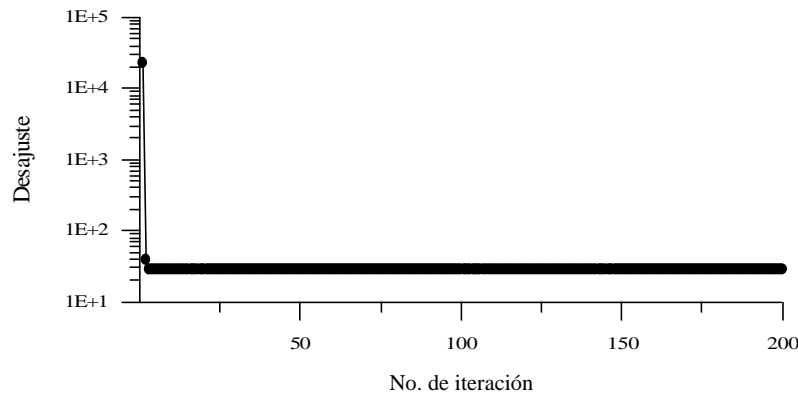


FIGURA 6.42. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

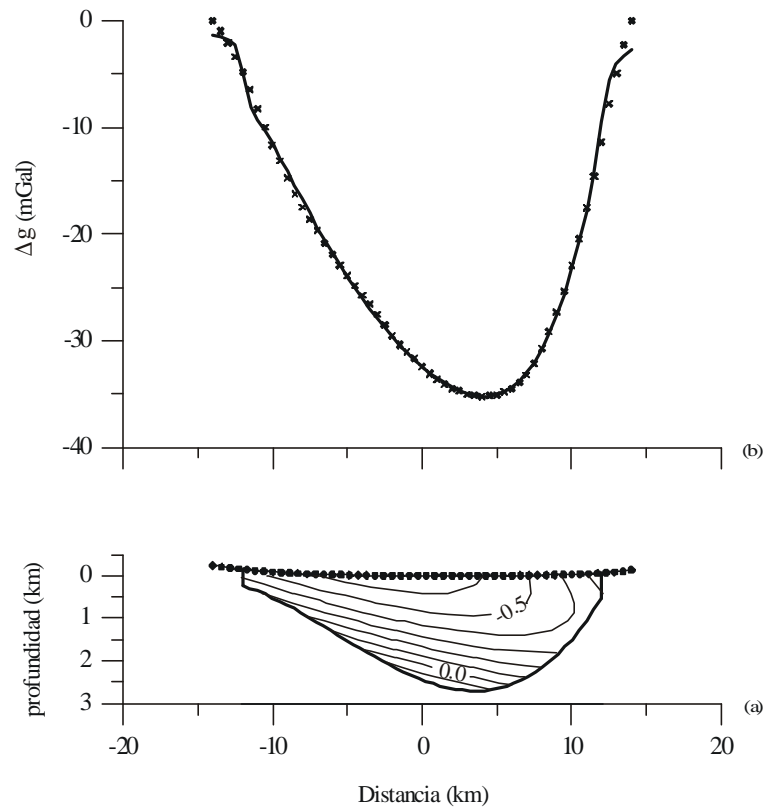


FIGURA 6.43. (a) Modelo resultante para el perfil *PI* sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable xy con contraste de densidad dado por el polinomio (4.1). Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil *PI*. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

Como vemos en la figura anterior, la solución obtenida para el contraste de densidad presenta un modelo satisfactorio de acuerdo con la estructura de semigraben esperada para la Laguna Salada, en el que la distribución de las isolíneas nos muestra la presencia de estratos sedimentarios basculados hacia el este, lo mismo que en el modelo obtenido para el caso 1, como se puede ver en la figura 6.32. Hay que destacar la presencia de un contraste de densidad positivo en la parte más profunda del modelo de la figura 6.43, esto puede ser debido a que la estructura geométrica obtenida para este caso es más ancha en esta parte del modelo que la obtenida para el caso 1 (ver figura 6.28), y como el método de inversión tiene que acomodar la distribución del contraste de densidad de manera que haya un compromiso entre la forma fija de la estructura y el contraste de densidad promedio (-0.37 g/cm^3) que se le ha impuesto al modelo, se hace necesaria la presencia de este contraste para alcanzar un buen ajuste entre la anomalía calculada y los datos de gravedad.

A continuación vamos a calcular las matrices de resolución, covarianza y correlación para este caso, en el que la varianza residual presenta el valor $\hat{\mathbf{s}}^2 = 0.6 \text{ mGal}^2$. Este valor es menor que el de la varianza estimada para los datos $\mathbf{s}^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$, lo que indica que la anomalía del modelo solución está sobredeterminando la anomalía observada, esto es, está intentando modelar también el ruido presente en los datos.

En la figura 6.44 se presenta la matriz de resolución que es muy parecida a la matriz identidad, indicando que los cinco parámetros del contraste de densidad presentan muy buena resolución. La matriz de covarianza se presenta en la tabla 6.17 cuyos elementos de la diagonal principal nos proporcionan las incertidumbres de los parámetros calculados en el proceso de inversión. Los valores de estos parámetros y sus incertidumbres se presentan en la tabla 6.18, suponiendo un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \mathbf{s}$ (99%). En la figura 6.45 se puede ver una representación gráfica de la matriz de correlación y los valores numéricos de sus elementos se pueden ver en la tabla 6.19. Se observa una correlación muy fuerte entre los cinco parámetros de la densidad, como ya se vio en la matriz de correlación de la figura 6.33 para el caso 1 de la Laguna Salada.

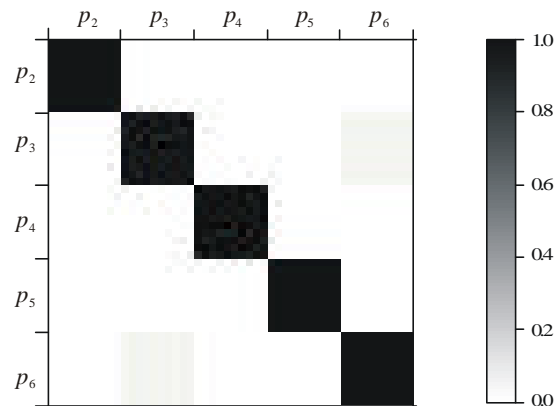


FIGURA 6.44. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
$1.771 \cdot 10^{-6}$	$-2.628 \cdot 10^{-5}$	$-2.888 \cdot 10^{-6}$	$1.080 \cdot 10^{-7}$	$1.775 \cdot 10^{-5}$	p_2
	$1.351 \cdot 10^{-3}$	$6.445 \cdot 10^{-5}$	$-4.525 \cdot 10^{-6}$	$-8.743 \cdot 10^{-4}$	p_3
		$5.377 \cdot 10^{-6}$	$-2.512 \cdot 10^{-7}$	$-4.287 \cdot 10^{-5}$	p_4
			$1.768 \cdot 10^{-8}$	$2.926 \cdot 10^{-6}$	p_5
				$5.674 \cdot 10^{-4}$	p_6

TABLA 6.17. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	
$p_2 = 0.006 \pm 0.003$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$
$p_3 = 0.11 \pm 0.09$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$
$p_4 = -0.024 \pm 0.006$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$
$p_5 = 0.0024 \pm 0.0003$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$
$p_6 = 0.10 \pm 0.06$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$

TABLA 6.18. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

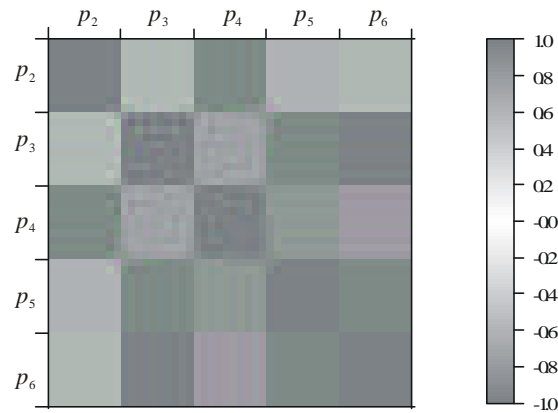


FIGURA 6.45. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
1.000 10^{+0}	$-5.373 \cdot 10^{-1}$	$-9.359 \cdot 10^{-1}$	$6.101 \cdot 10^{-1}$	$5.600 \cdot 10^{-1}$	p_2
	1.000 10^{+0}	$7.563 \cdot 10^{-1}$	$-9.261 \cdot 10^{-1}$	$-9.987 \cdot 10^{-1}$	p_3
		1.000 10^{+0}	$-8.146 \cdot 10^{-1}$	$-7.761 \cdot 10^{-1}$	p_4
			1.000 10^{+0}	$9.238 \cdot 10^{-1}$	p_5
				1.000 10^{+0}	p_6

TABLA 6.19. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

6.2.2.2. Perfil 2: Subcuenca secundaria.

El perfil $P2$ tiene una longitud total de 17.5 km y está trazado sobre la subcuenca situada al sur del Cerro El Centinela (figura 6.18). Al igual que para el perfil $P1$, su orientación es subparalela a los gradientes que caracterizan las anomalías residuales de las márgenes oriental y occidental de la cuenca, y sus extremos coinciden con el basamento cristalino que aflora al pie de las sierras que limitan esta estructura (figura 6.21).

Como se puede ver en la figura 6.46, se ha restado un gradiente gravimétrico lineal al perfil $P2$ para que el valor de la anomalía residual isostática sea de 0 mGal en sus extremos. El perfil resultante será utilizado como base de datos para realizar la inversión, suponiendo una desviación estándar de $s=1.0$ mGal.

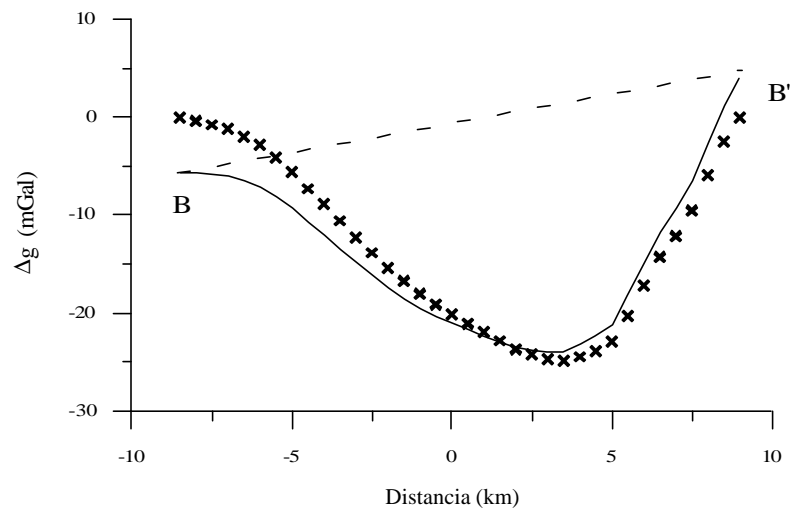
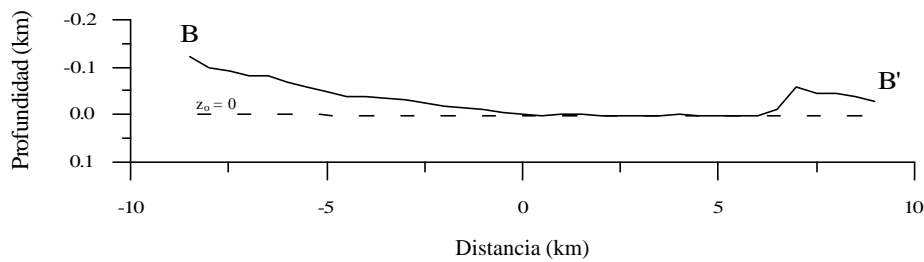


FIGURA 6.46. Perfil $P2$ sobre la subcuenca secundaria de la Laguna Salada. La línea sólida es la anomalía residual isostática en dicho perfil, la línea recta a trazos es el regional sustraído y la línea de cruces es la anomalía resultante que se ha utilizado como base de datos para la interpretación de este perfil.

6.2.2.2.1. Caso 1: Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z .

Vamos a realizar la inversión de los $M = 36$ datos del perfil $P2$, los cuales se encuentran equiespaciados a 500 m, mediante el tipo de fuente descrito en la sección 4.1 del Capítulo IV. Para ello, vamos a aproximar la topografía de la subcuenca secundaria por un plano $z_0 = 0$ km, como se observa en la figura 6.47.

FIGURA 6.47. Topografía del perfil $P2$.

Como hicimos en el perfil PI , vamos a realizar un primer proceso de inversión en el que dejaremos evolucionar todos los parámetros de la fuente. En total serán $N = 15$ parámetros que nos van a definir el contraste de densidad y la estructura de la fuente responsable de la anomalía gravimétrica negativa registrada en el perfil $P2$.

El modelo con el que se inicia el proceso de inversión es el modelo homogéneo la figura 6.48, con un contraste de densidad promedio para esta subcuenca de $\mathbf{Dr} = p_1 = -0.37 \text{ g/cm}^3$, que es el valor obtenido para el perfil PI . Como se ve en esta figura, las fronteras laterales del modelo son dos funciones continuas $f_1(z) = p_7 = -6.5 \text{ km}$ y $f_2(z) = p_{11} = 7 \text{ km}$, que son los puntos donde aflora el basamento en el perfil $P2$, y la profundidad es $z_2 = p_{15} = 1.5 \text{ km}$.

En la figura 6.49 se observa la evolución del desajuste durante la inversión. Este parámetro cae de manera brusca en las diez primeras iteraciones del proceso y, a partir de este punto, converge continuamente hacia el valor $q_s = 1.6$. En este caso no se alcanza un mínimo por lo que, como el valor de la tolerancia es $T = M = 36$, vamos a elegir como solución la alcanzada en la novena iteración, puesto que presenta un desajuste $q_s = 40.1$, el más parecido al valor de T . Esta solución presenta un factor de amortiguación $\mathbf{b}^{-1} = 60.1$ y la forma de la estructura y su contraste de densidad se pueden ver en la figura 6.50. La estructura obtenida no tiene una forma parecida a la de una cuenca sedimentaria, al menos en su frontera izquierda. Lo mismo ocurre con la distribución de densidades, ya que en la parte derecha de la fuente se puede ver que el contraste de densidad es negativo pero aumenta con la profundidad, lo que no concuerda con los datos geológicos de esta zona. Como se deduce de lo anterior, el modelo no es un modelo satisfactorio para la subcuenca secundaria norte de la Laguna Salada aunque, como se puede ver en la figura 6.50(b), el ajuste entre el modelo resultante y los datos de gravedad de este perfil es bueno.

Como ya se hizo para el perfil PI de la subcuenca principal, vamos a mantener fijos algunos de los parámetros de la fuente durante la inversión de los datos. Estos parámetros son: p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 del polinomio (4.1) del contraste de densidad, los cuales serán iguales a cero, el parámetro $p_1 = -0.37 \text{ g/cm}^3$, que es el término independiente de dicho polinomio, y los parámetros $p_7 = -6.5 \text{ km}$ y $p_{11} = 7 \text{ km}$ que son las fronteras laterales, dadas por los polinomios (4.4). Según esto, el vector de

parámetros que se va a calcular en el proceso de inversión viene dado por la expresión (6.1) quedando un problema de inversión sobredeterminado, con $N = 7$ incógnitas y $M = 37$ datos.

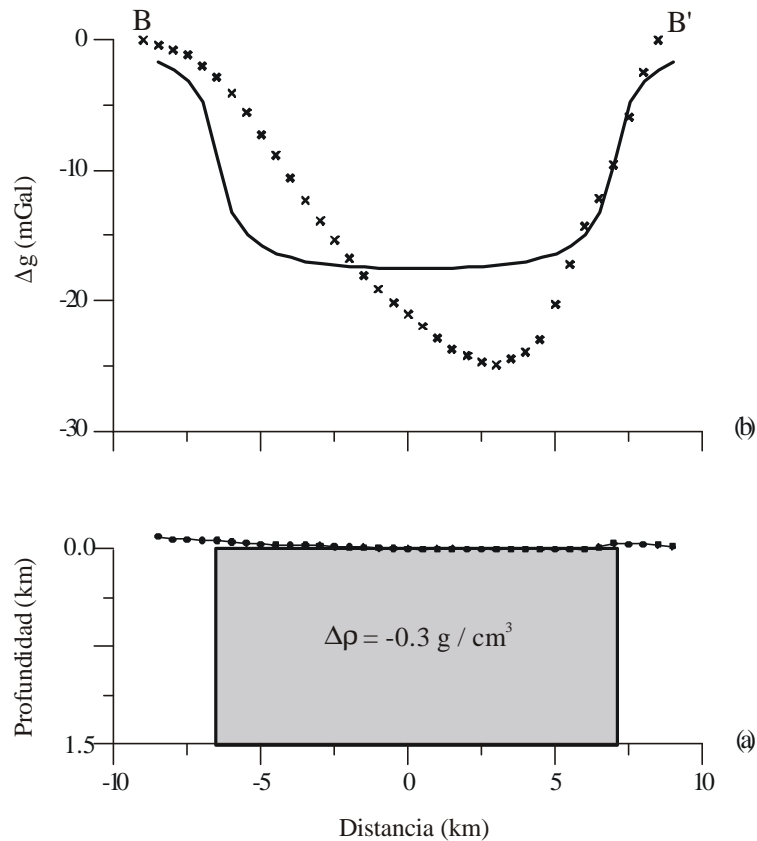


FIGURA 6.48. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión para el estudio de los datos de la anomalía residual isostática de la cuenca Laguna Salada. Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil $P2$. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

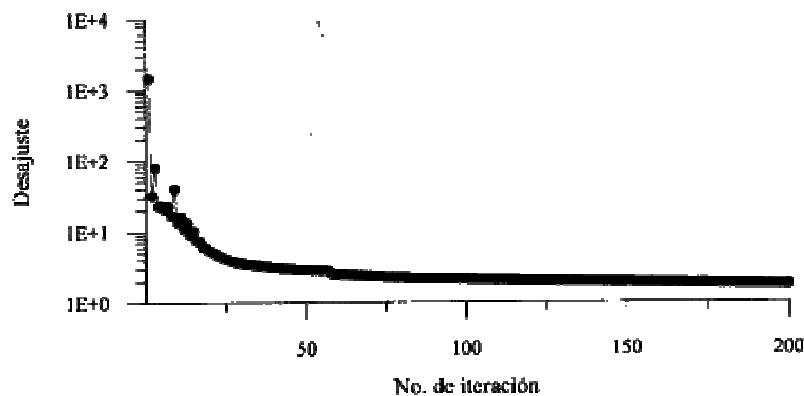


FIGURA 6.49. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

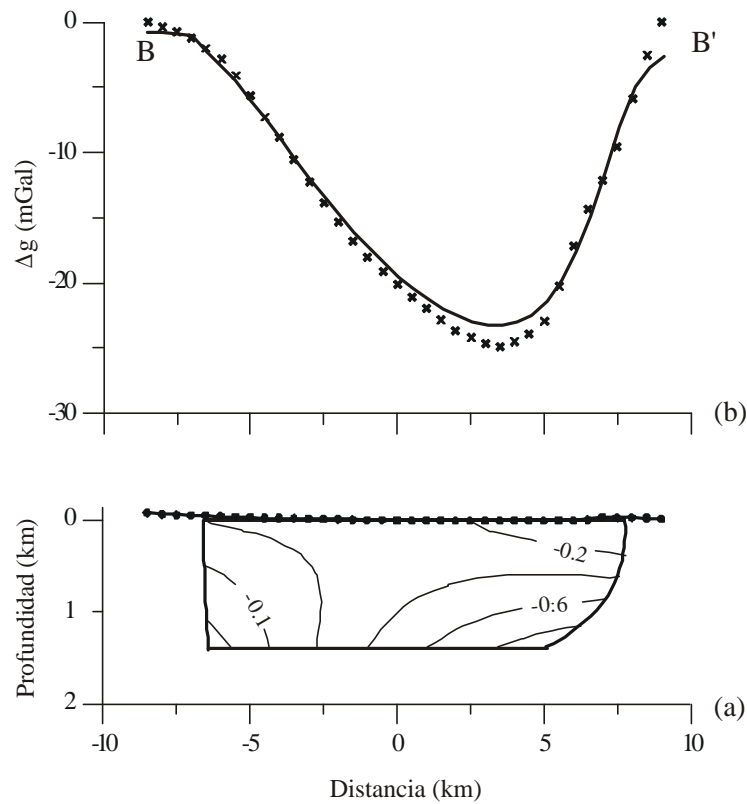


FIGURA 6.50. (a) Modelo resultante para el perfil P2 sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z . Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil P2. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

Para calcular este problema, consideraremos como modelo inicial el que se presenta en la figura 6.48. Después de realizar un proceso de 200 iteraciones, se elige la solución resultante para nuestro problema a partir del estudio de la evolución del desajuste. En la figura 6.51 se puede observar que dicho desajuste presenta una disminución continua y estable durante su evolución hacia el valor $q_s = 17.5$, que es bastante menor que el valor de la tolerancia. Elegiremos como solución de nuestro problema el modelo que presente un desajuste parecido a T , el cual es alcanzado en la iteración número 23, con $q_s = 36.06$ y $\mathbf{b}^{-1} = 18.03$. La fuente resultante se puede ver en la figura 6.52, cuya frontera inferior alcanza una profundidad máxima $z_2 = p_{15} = 2.18$ km. Como se puede apreciar, la estructura geométrica de la fuente también es de tipo semigraben con mayor subsidencia en su margen derecha y una profundidad máxima de 2.18 km. Esta solución presenta un modelo de

estructura satisfactorio para el perfil *P2* de acuerdo con los datos geológicos y geofísicos que se tienen acerca de la subcuenca secundaria norte de la Laguna Salada.

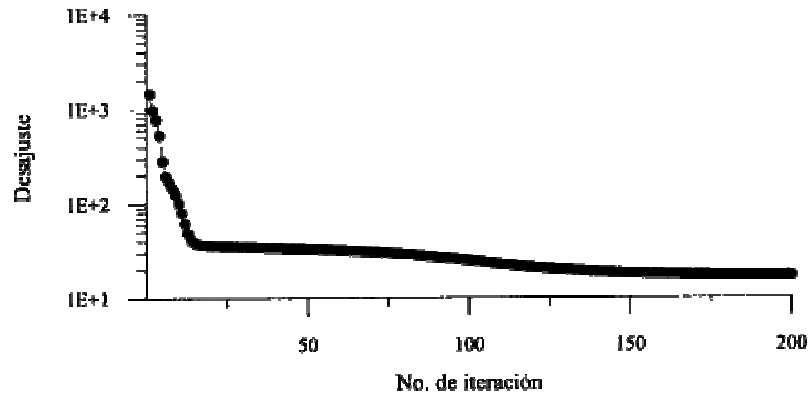


FIGURA 6.51. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

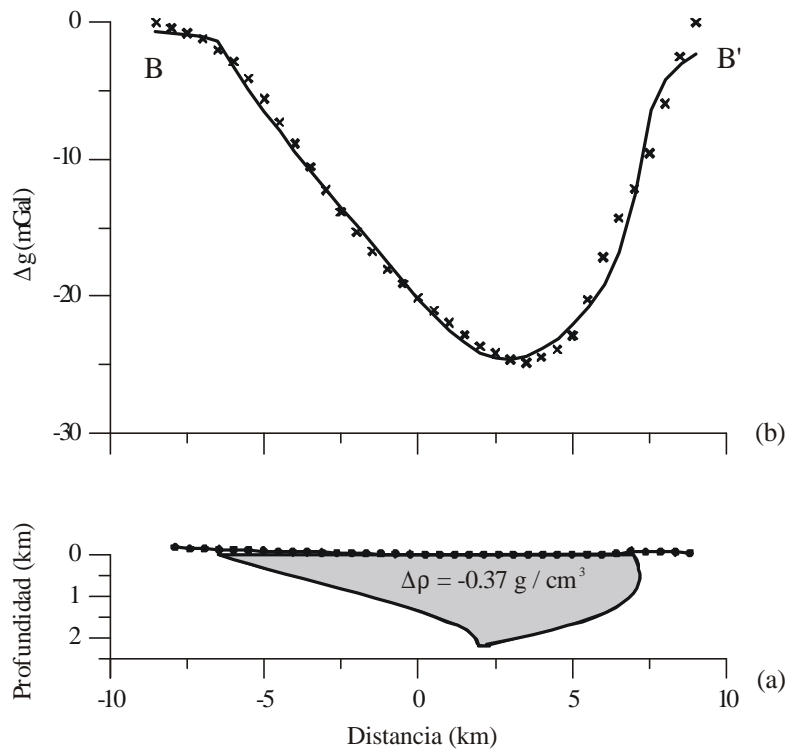


FIGURA 6.52. (a) Modelo resultante para el perfil *P2* sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z y con contraste de densidad constante. Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil *P2*. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

Como se dijo anteriormente, la desviación estándar de los datos es $s = 1.0$ mGal, por lo que la varianza correspondiente es $s^2 = 1.0$ mGal². Si calculamos la varianza residual para este caso, el valor alcanzado es $\hat{s}^2 = 1.2$ mGal². Como se puede apreciar, este valor numérico es parecido al de la varianza estimada para los datos aunque algo mayor. Esto indica que el modelo resultante para la fuente explica de manera satisfactoria la anomalía del modelo resultante aunque, como se puede ver en la figura 6.52(b), existen desajustes locales entre ambas anomalías.

A continuación vamos a estudiar la matriz de resolución de los siete parámetros de la fuente. En la figura 6.53 podemos ver dicha matriz, en la que podemos apreciar que los parámetros de ambas fronteras laterales presentan buena resolución, en especial el parámetro p_{10} de la frontera izquierda y el parámetro p_{14} de la frontera derecha, ambos son los coeficientes que acompañan al término en z^3 en los polinomios correspondientes. El parámetro que presenta peor resolución es el p_{15} , que describe la frontera inferior del cuerpo.

En cuanto a la matriz de covarianza, sus valores numéricos se presentan en la tabla 6.20. En la tabla 6.21 se presentan los valores numéricos de los ocho parámetros calculados en el proceso de inversión junto con las incertidumbres correspondientes, calculadas a partir de los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza, suponiendo un intervalo de confianza de $\pm 2.58 s$ (99%).

La matriz de correlación de los parámetros se puede ver en la figura 6.54. Existe una fuerte correlación entre los parámetros p_8, p_9 y p_{15} . Así mismo, existe también fuerte correlación entre los parámetros p_{12} y p_{14} de la frontera derecha y una correlación moderada entre estos dos parámetros y los tres de la frontera izquierda. También se observa correlación entre los parámetros p_8, p_9, p_{10}, p_{14} y p_{15} . En la tabla 6.22 se presentan los valores numéricos de la matriz de correlación.

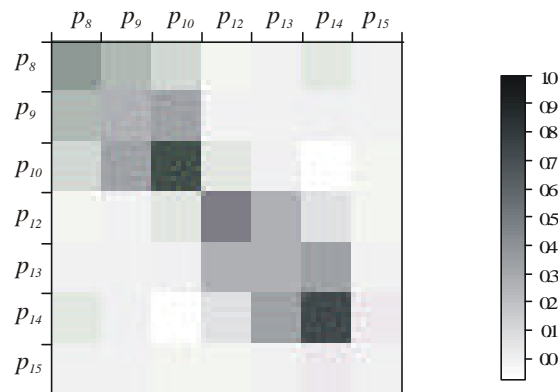


FIGURA 6.53. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_8	p_9	p_{10}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
$1.122 \cdot 10^{-2}$	$3.122 \cdot 10^{-3}$	$-6.003 \cdot 10^{-3}$	$-5.595 \cdot 10^{-4}$	$-5.539 \cdot 10^{-4}$	$3.586 \cdot 10^{-4}$	$8.038 \cdot 10^{-4}$	p_8
	$1.611 \cdot 10^{-3}$	$-1.405 \cdot 10^{-3}$	$-7.416 \cdot 10^{-4}$	$-2.752 \cdot 10^{-4}$	$8.520 \cdot 10^{-4}$	$4.660 \cdot 10^{-4}$	p_9
		$4.639 \cdot 10^{-3}$	$-2.564 \cdot 10^{-4}$	$5.794 \cdot 10^{-4}$	$8.360 \cdot 10^{-4}$	$-5.854 \cdot 10^{-4}$	p_{10}
			$1.170 \cdot 10^{-2}$	$2.520 \cdot 10^{-3}$	$-6.949 \cdot 10^{-3}$	$-4.789 \cdot 10^{-4}$	p_{12}
				$1.201 \cdot 10^{-3}$	$-1.185 \cdot 10^{-3}$	$-3.155 \cdot 10^{-4}$	p_{13}
					$5.574 \cdot 10^{-3}$	$3.888 \cdot 10^{-4}$	p_{14}
						$2.834 \cdot 10^{-4}$	p_{15}

TABLA 6.20. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

FRONT. IZQUIERDA	FRONT. DERECHA	FRONT. INFERIOR
$p_8 = 4.3 \pm 0.3$	$p_{12} = 0.7 \pm 0.3$	$p_{15} = 2.18 \pm 0.04 \text{ km}$
$p_9 = 1.36 \pm 0.10 \text{ km}^{-1}$	$p_{13} = -0.36 \pm 0.09 \text{ km}^{-1}$	
$p_{10} = -0.7 \pm 0.2 \text{ km}^{-2}$	$p_{14} = -0.4 \pm 0.2 \text{ km}^{-2}$	

TABLA 6.21. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

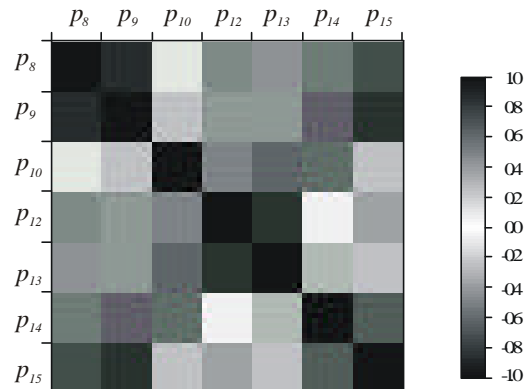


FIGURA 6.54. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_8	p_9	p_{10}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$7.343 \cdot 10^{-1}$	$-8.320 \cdot 10^{-1}$	$-4.884 \cdot 10^{-2}$	$-1.509 \cdot 10^{-1}$	$4.534 \cdot 10^{-2}$	$4.508 \cdot 10^{-1}$	p_8
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-5.140 \cdot 10^{-1}$	$-1.708 \cdot 10^{-1}$	$-1.979 \cdot 10^{-1}$	$2.843 \cdot 10^{-1}$	$6.896 \cdot 10^{-1}$	p_9
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-3.481 \cdot 10^{-2}$	$2.455 \cdot 10^{-1}$	$1.644 \cdot 10^{-1}$	$-5.106 \cdot 10^{-1}$	p_{10}
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	$6.724 \cdot 10^{-1}$	$-8.605 \cdot 10^{-1}$	$-2.630 \cdot 10^{-1}$	p_{12}
				$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-4.582 \cdot 10^{-1}$	$-5.409 \cdot 10^{-1}$	p_{13}
					$1.000 \cdot 10^{+0}$	$3.093 \cdot 10^{-1}$	p_{14}
						$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_{15}

TABLA 6.22. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

Una vez obtenido un modelo satisfactorio para la estructura geométrica de la subcuenca secundaria de la Laguna Salada, con un contraste de densidad constante, vamos a calcular un posible modelo, más complejo, para la distribución de este contraste de densidad. Para ello, vamos a considerar invariables los parámetros que determinan la forma de la estructura y vamos a calcular el contraste de densidad como el polinomio dado por la expresión (4.1). Así mismo vamos a considerar también invariable el término independiente de este polinomio, con un valor $\mathbf{Dr}(0,0) = p_1 = -0.67 \text{ g/cm}^3$, como ya hicimos para el perfil PI sobre la subcuenca principal, puesto que el material sedimentario situado en la superficie de la cuenca tiene una densidad promedio de 2.0 g/cm^3 , y se ha considerado que el basamento que rodea a esta cuenca tiene una densidad de 2.67 g/cm^3 también en promedio. El problema de inversión sigue siendo sobredeterminado pero lineal, con $M=57$ datos y $N = 5$ parámetros, siendo el vector incógnita el de la expresión (6.4).

La estructura geométrica del modelo inicial utilizado es el de la figura 6.52, pero esta vez el contraste de densidad es $\mathbf{Dr} = p_1 = -0.67 \text{ g/cm}^3$. Después de realizar un proceso de 200 iteraciones, se obtiene la evolución del desajuste a lo largo de todo este proceso. La gráfica de esta evolución se puede ver en la figura 6.55. Este parámetro alcanza rápidamente el valor $q_s = 28.8$ en las cinco primeras iteraciones, permaneciendo invariable el resto del proceso. Lo mismo ocurre con los parámetros del contraste de densidad, lo que indica que hemos alcanzado un mínimo dentro del espacio de soluciones, el cual será elegido como posible solución del problema. El modelo de fuente anómala correspondiente y su anomalía gravimétrica se pueden observar en la figura 6.56. Esta solución presenta un modelo de densidad en el que se aprecian capas subparalelas inclinadas de acuerdo a una estructura de semigraben. El problema con este modelo es que las isolíneas del contraste de densidad alcanzan valores muy positivos en la parte inferior de la estructura, así como en el margen superior derecho de la misma, el cual no es un comportamiento lógico para el contraste de densidad de una cuenca sedimentaria.

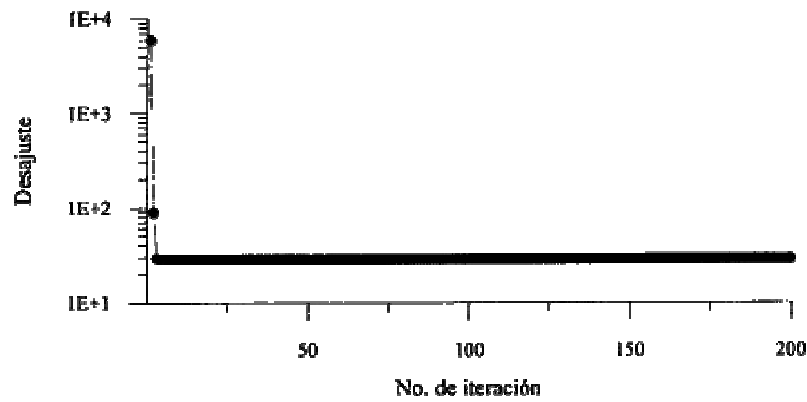


FIGURA 6.55. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

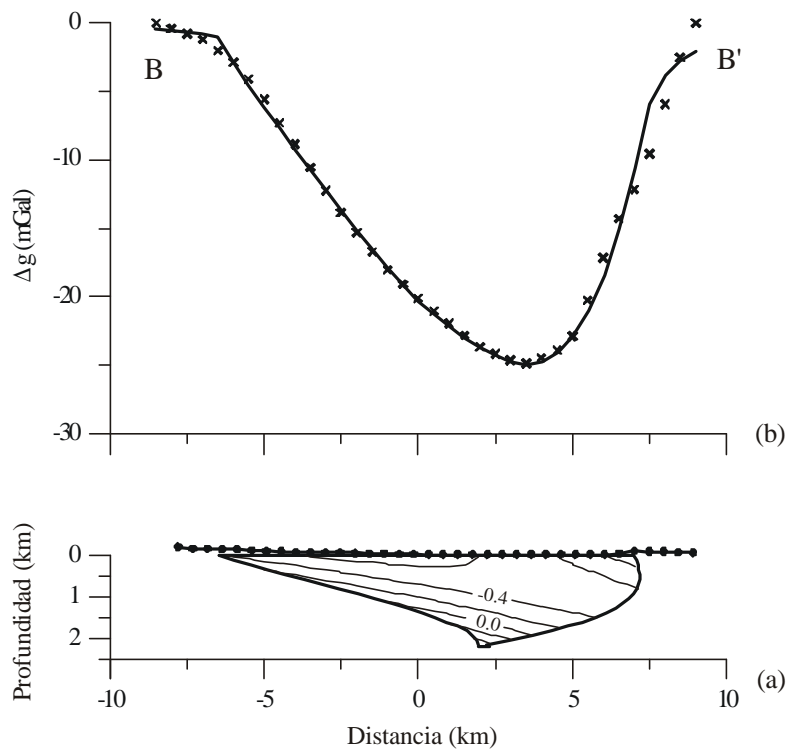


FIGURA 6.56. (a) Modelo resultante para el perfil P2 sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z y con contraste de densidad dado por el polinomio (4.1). Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil P2. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

El comportamiento que se aprecia en el modelo del contraste de densidad de la figura anterior viene impuesto por el coeficiente p_6 del término z^2 del polinomio (4.1). Para evitar su influencia se puede repetir el proceso de inversión de nuevo, haciendo que dicho coeficiente sea nulo y permanezca así durante las 200 iteraciones del proceso. En este caso el vector incógnita de los parámetros tiene sólo cuatro componentes:

$$\mathbf{p} = (p_2, p_3, p_4, p_5) \quad (6.6)$$

La evolución del desajuste correspondiente para este caso se puede ver en la figura 6.57. Este desajuste ha alcanzado un valor $q_s = 32.6$ constante en las primeras iteraciones, lo mismo que los cuatro parámetros del contraste de densidad calculados, lo que indica que hemos alcanzado un mínimo dentro del espacio de soluciones, el cual puede ser considerado como solución del problema. El factor de amortiguamiento para este caso es $\mathbf{b}^{-1} = 16.3$.

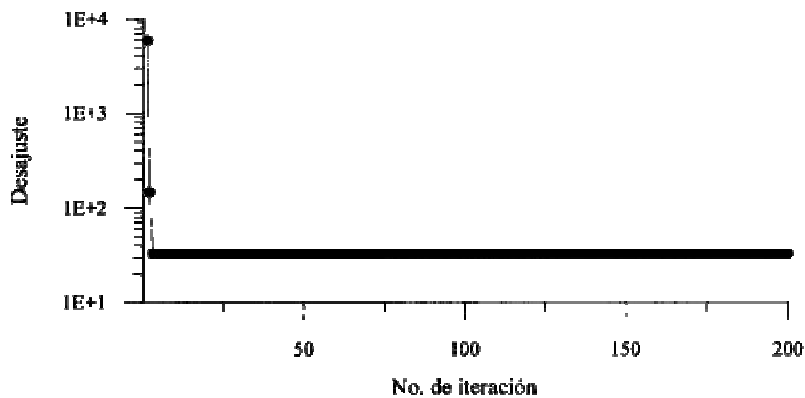


FIGURA 6.57. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

El modelo de fuente resultante se puede observar en la figura 5.58. Vemos como el contraste de densidad presenta un comportamiento más lógico para una cuenca sedimentaria, con estratos basculados hacia el este, indicando una estructura de semigraben para la Laguna Salada. En la margen derecha de esta estructura las isolíneas aparecen con una tendencia vertical, lo mismo que en los modelos obtenidos para el perfil PI .

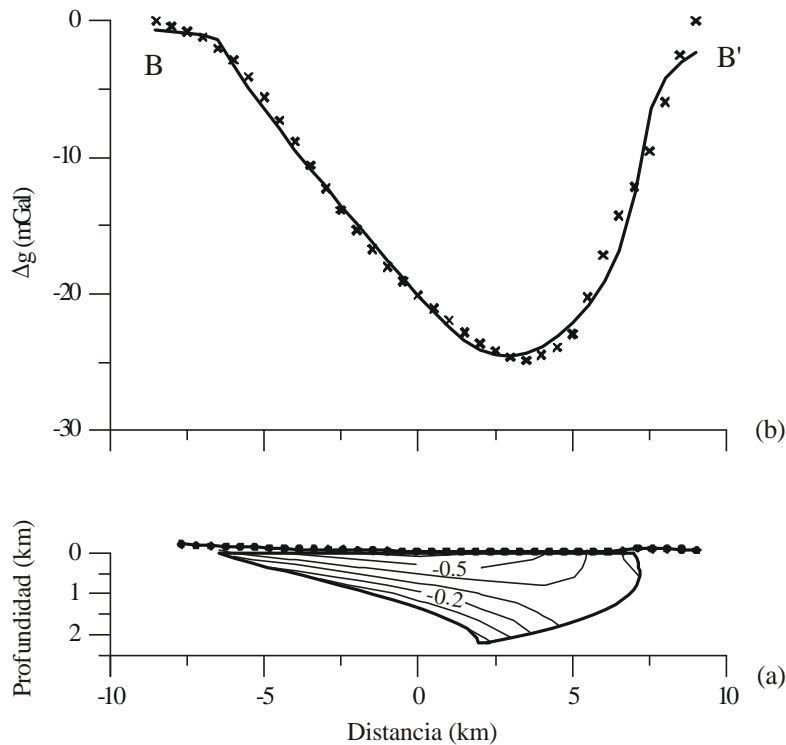


FIGURA 6.58. (a) Modelo resultante para el perfil $P2$ sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable z y con contraste de densidad dado por el polinomio (4.1). Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil $P2$. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

La varianza residual obtenida a partir de la solución elegida es $\hat{s}^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$, la cual presenta el mismo valor que el de la varianza estimada para los datos ($s^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$). Esto nos indica que la anomalía gravimétrica del modelo se ajusta de manera satisfactoria a los datos observados.

La matriz de resolución, como se puede ver en la figura 6.59, es muy parecida a la matriz identidad, indicando que los parámetros del contraste de densidad tienen una resolución muy alta.

Los elementos de la matriz de covarianza se presentan en la tabla 6.23 y los cinco parámetros calculados y las incertidumbres correspondientes se pueden ver en la tabla 6.24, con intervalos de confianza calculados según $\pm 2.58 s$ (99%).

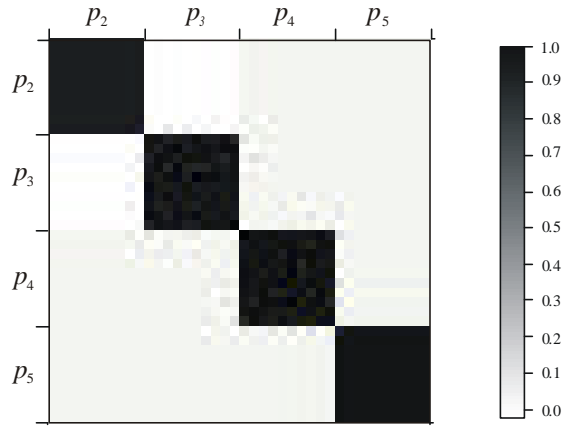


FIGURA 6.59. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	
$8.197 \cdot 10^{-5}$	$1.239 \cdot 10^{-4}$	$-1.505 \cdot 10^{-4}$	$1.754 \cdot 10^{-6}$	p_2
	$2.983 \cdot 10^{-4}$	$-2.630 \cdot 10^{-4}$	$3.322 \cdot 10^{-6}$	p_3
		$3.033 \cdot 10^{-4}$	$-5.658 \cdot 10^{-6}$	p_4
			$4.238 \cdot 10^{-7}$	p_5

TABLA 6.23. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	
$p_2 = 0.01 \pm 0.02$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$
$p_3 = 0.46 \pm 0.05$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$
$p_4 = -0.08 \pm 0.05$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$
$p_5 = 0.007 \pm 0.002$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$

TABLA 6.24. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

En cuanto a la matriz de correlación, ésta se puede ver en el gráfico de la figura 6.60, en el que se observa una fuerte correlación entre los los parámetros p_2 , p_3 y p_4 . Los valores numéricos de estas correlaciones se presentan en la tabla 6.25.

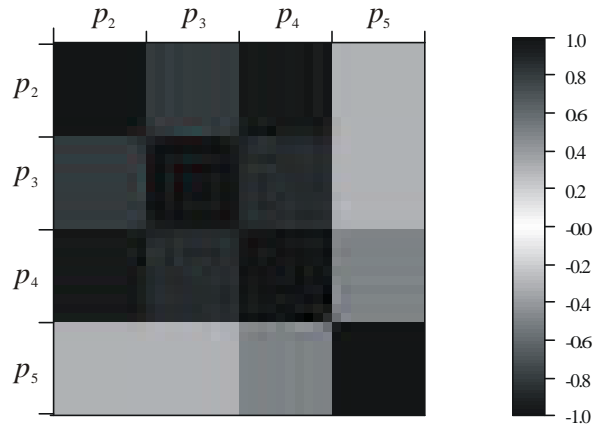


FIGURA 6.60. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$7.925 \cdot 10^{-1}$	$-9.546 \cdot 10^{-1}$	$2.975 \cdot 10^{-1}$	p_2
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-8.745 \cdot 10^{-1}$	$2.955 \cdot 10^{-1}$	p_3
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-4.990 \cdot 10^{-1}$	p_4
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_5

TABLA 6.25. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

6.2.2.2.2. Caso 2: Fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x .

Vamos a calcular ahora la estructura y el contraste de densidad de la cuenca Laguna Salada en el perfil P_2 , pero a partir del modelo de fuente descrito en la sección 4.2 del Capítulo IV, en el que se tiene en cuenta la forma de la topografía sobre la que se han registrado los datos y en el que se considera que las fronteras laterales de la estructura son planas y verticales.

La topografía de este perfil puede ser aproximada por un polinomio de octavo grado $z_0 = g_1(x)$, que se puede ver en la figura 6.61. Los parámetros necesarios para calcular este modelo de fuente son en total $N = 12$. Por tanto, el vector de parámetros correspondiente viene dado por la expresión (4.14) y, puesto que tenemos $M = 36$ datos, el problema de inversión es un problema sobredeterminado.

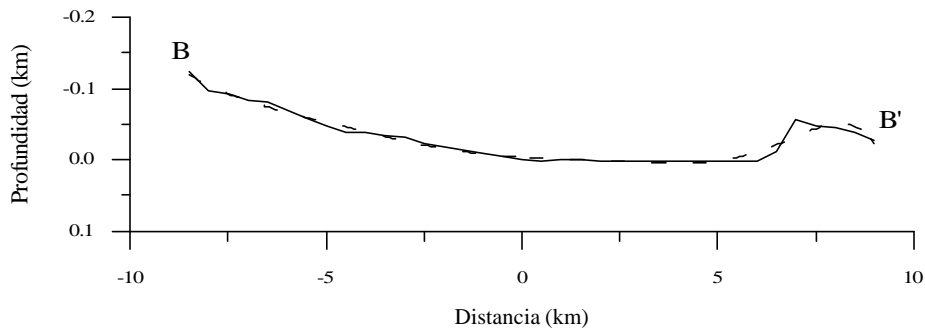


FIGURA 6.61. La línea sólida representa la topografía del perfil P2. La línea discontinua representa el polinomio de octavo grado que ajusta la topografía.

Comenzaremos el proceso de inversión con el modelo inicial de la figura 6.48 pero ahora la notación de las funciones que describen las fronteras del cuerpo cambia, siendo $z_0 = g_1(x) = 0$ km para la función topografía y $g_2(x) = p_7 = 1.5$ km, dada por el polinomio (4.13), para la función que describe la frontera inferior. Las fronteras laterales son ahora las dos funciones constantes: $x_1 = p_{11} = -6.5$ km y $x_2 = p_{12} = 7$ km. El proceso consta de 200 iteraciones donde, en las seis primeras, el desajuste cae bruscamente y, a partir de ahí evoluciona de manera suave tendiendo a converger al valor $q_s = 4.0$, como se puede ver en la figura 6.62.

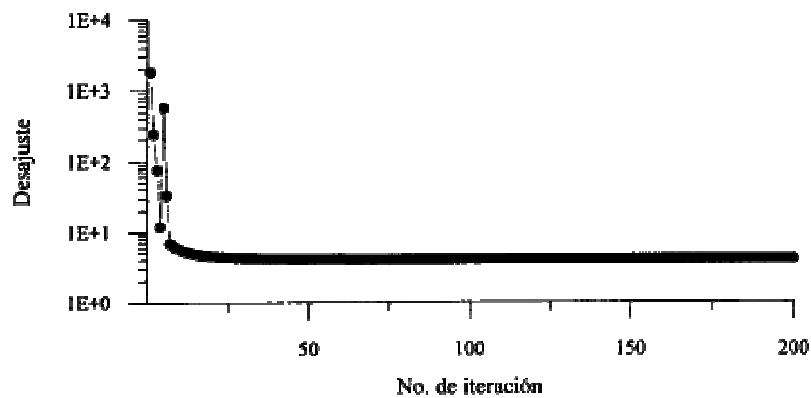


FIGURA 6.62. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

Con valores del desajuste tan bajos los modelos calculados están sobredeterminando los datos de gravedad. Como no se ha alcanzado un mínimo en el espacio de soluciones, elegiremos aquella cuyo valor del desajuste sea cercano a la tolerancia permitida, $T = M = 36$, dentro de la zona de estabilidad. Una posible solución a nuestro problema es la alcanzada en la iteración número 6, con $q_s = 33.0$ y $b^{-1} = 16.5$, cuya representación se puede ver en la figura 6.63(a). En la figura 6.63(b) se puede observar que el ajuste entre los datos de gravedad y la anomalía correspondiente al modelo resultante es muy bueno, pero la estructura del cuerpo no es la esperada a partir de los datos geológicos y geofísicos de la zona. Si observamos el contraste de densidad, podemos ver que éste aumenta con la profundidad, lo que está en desacuerdo con la distribución típica del contraste de densidad en una cuenca sedimentaria. Por todo ello, el modelo de la figura 6.63 es rechazado como solución para el perfil $P2$ de la Laguna Salada.

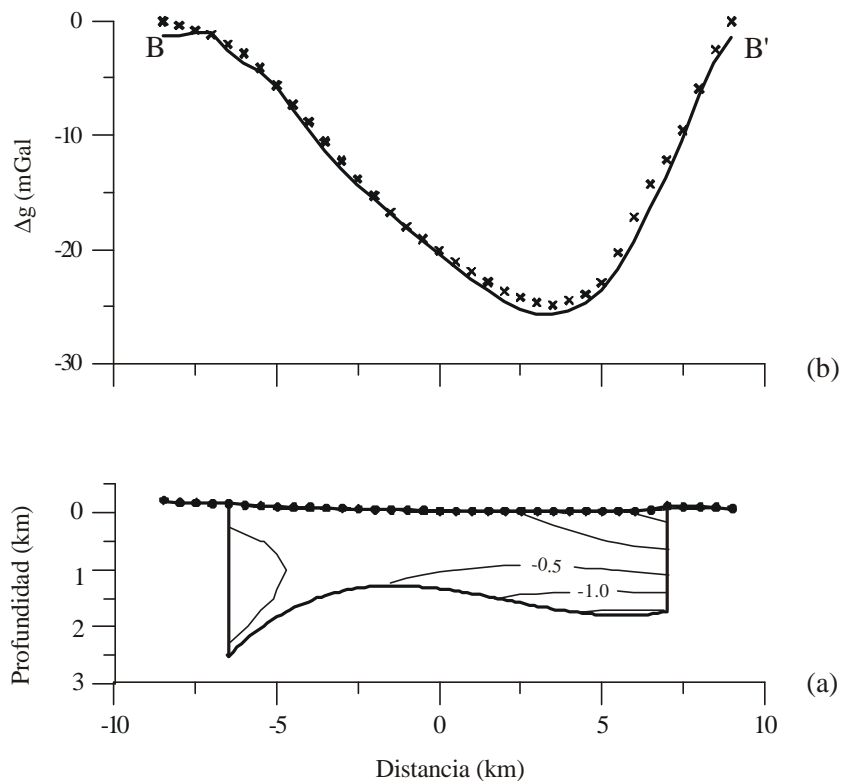


FIGURA 6.63. (a) Modelo resultante para el perfil $P2$ sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable x . Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil $P2$. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

A continuación, vamos a hacer fijos algunos de los parámetros del contraste de densidad y la estructura de la fuente, y los vamos a mantener así durante todo el proceso iterativo permitiendo que el resto de los parámetros evolucionen libremente. Consideraremos fijos, y de valor cero, los parámetros p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 del contraste de densidad \mathbf{Dr} . De la misma forma también serán fijos $p_{11} = -6.5$ km y $p_{12} = 7$ km, para las fronteras laterales, y el parámetro p_1 del polinomio \mathbf{Dr} con un valor -0.37 g/cm³ obtenido como contraste de densidad promedio para la Laguna Salada en los modelos del perfil PI . El vector de parámetros correspondiente es el de la expresión (6.5), con un total de 4 incógnitas y 36 datos con los que realizar el problema de inversión.

Como es usual, realizamos un proceso de 200 iteraciones comenzando con el modelo de la figura 6.48. La evolución del desajuste se puede observar en la figura 6.64. Como se puede apreciar, en las primeras iteraciones el valor del desajuste cae bruscamente, convergiendo al valor $q_s = 37.3$ a partir de la décima iteración, que es bastante cercano al valor de la tolerancia para este caso. A partir de esta misma iteración, los parámetros de la fuente alcanzan valores que permanecen fijos durante el resto del proceso, con lo que podemos suponer que se ha alcanzado una solución a nuestro problema de inversión y cuyo factor de amortiguación correspondiente es $\mathbf{b}^{-1} = 18.6$.

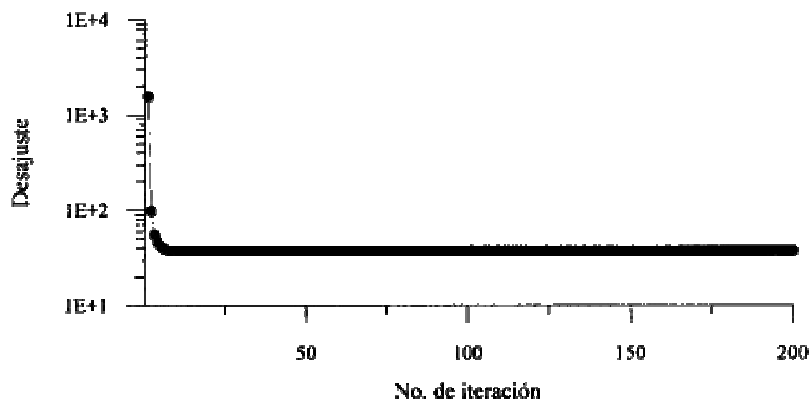


FIGURA 6.64. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

En la figura 6.65 se presenta la solución del problema junto con la anomalía gravimétrica correspondiente, en la que se observa que la estructura geométrica de la fuente corresponde a un semigraben con mayor subsidencia en su margen derecha y 2 km de profundidad máxima, que concuerda con el resultado obtenido en el caso 1 de este mismo perfil.

Para obtener las matrices de resolución, de covarianza y de correlación es necesario calcular la varianza residual. Para este caso se obtiene un valor de $\hat{\mathbf{S}}^2 = 1.2$ mGal², cuyo valor es un poco mayor que el de la varianza estimada para los datos $\mathbf{S}^2 = 1.0$ mGal². Esto indica que el modelo

solución no sólo intenta ajustarse a los datos observados, sino que intenta también ajustarse al ruido de los mismos. De todas formas, el ajuste puede considerarse satisfactorio, como se puede ver en la figura 6.65(b).

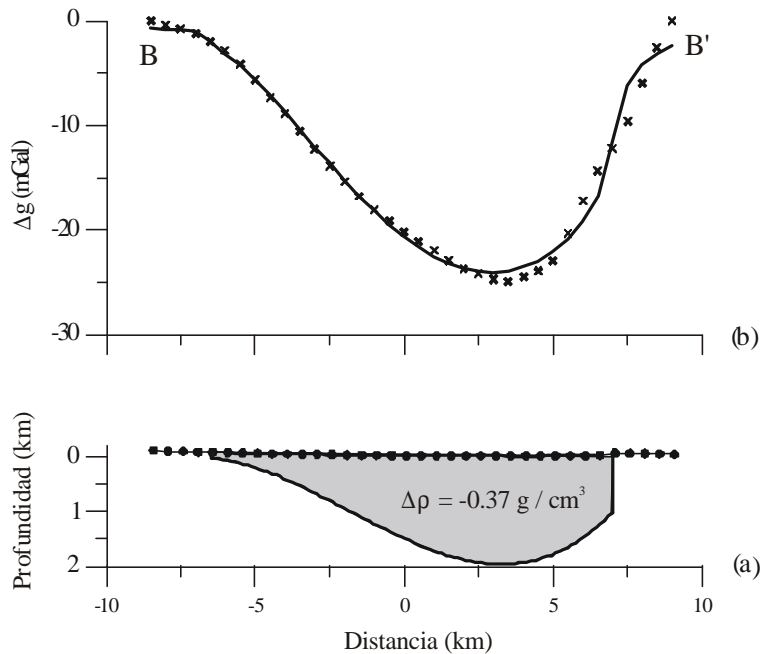


FIGURA 6.65. (a) Modelo resultante para el perfil P2 sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable x con contraste de densidad constante. Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil P2. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

En la figura 6.66 se puede ver la matriz de resolución que, para este caso, es similar a la matriz identidad, lo que indica que todos los parámetros calculados presentan muy buena resolución. En la tabla 6.26 se presentan los elementos de la matriz de covarianza de los parámetros. La diagonal principal de esta matriz nos proporciona las incertidumbres correspondientes a los cuatro parámetros calculados que, junto con los mismos, aparecen en la tabla 6.27, suponiendo un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \mathbf{s}$ (99%). Una imagen de la matriz de correlación se presenta en la figura 6.67, en la que se observa la existencia de correlación entre todos los parámetros, pero especialmente entre p_7 y p_9 y también entre p_8 y p_{10} . Los elementos de esta matriz se presentan en la tabla 6.28.

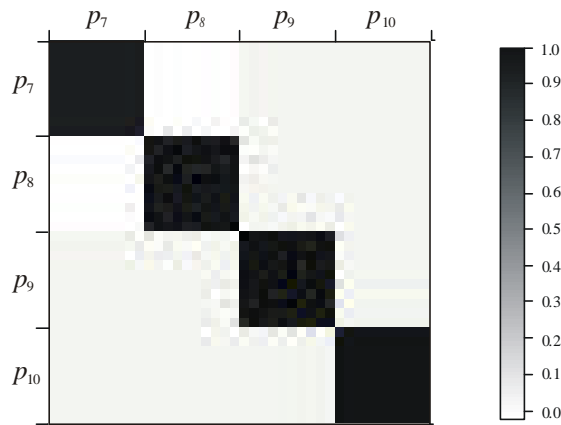


FIGURA 6.66. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_7	p_8	p_9	p_{10}	
$1.140 \cdot 10^{-3}$	$1.828 \cdot 10^{-4}$	$-5.565 \cdot 10^{-5}$	$-7.378 \cdot 10^{-6}$	p_7
	$3.570 \cdot 10^{-4}$	$-7.398 \cdot 10^{-6}$	$-1.240 \cdot 10^{-5}$	p_8
		$3.783 \cdot 10^{-6}$	$3.572 \cdot 10^{-7}$	p_9
			$4.709 \cdot 10^{-7}$	p_{10}

TABLA 6.26. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

FRONT. INFERIOR
$p_7 = 1.48 \pm 0.09 \text{ km}$
$p_8 = 0.25 \pm 0.05$
$p_9 = -0.020 \pm 0.005 \text{ km}^{-1}$
$p_{10} = -0.004 \pm 0.002 \text{ km}^{-2}$

TABLA 6.27. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

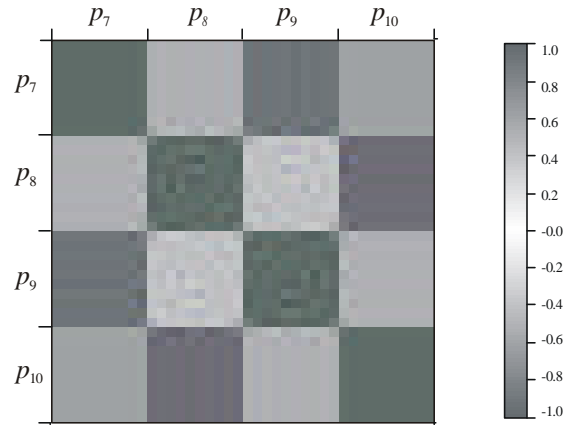


FIGURA 6.67. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_7	p_8	p_9	p_{10}	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$2.866 \cdot 10^{-1}$	$-8.475 \cdot 10^{-1}$	$-3.184 \cdot 10^{-1}$	p_7
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-2.013 \cdot 10^{-1}$	$-9.566 \cdot 10^{-1}$	p_8
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$2.677 \cdot 10^{-1}$	p_9
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_{10}

TABLA 6.28. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

Una vez obtenida una posible estructura para el perfil P_2 en la subcuenca secundaria de la Laguna Salada, vamos a calcular cinco de los seis coeficientes del polinomio (4.1) que describen el contraste de densidad de la fuente. Para ello, consideraremos invariable el término independiente de dicho polinomio con un valor $p_1 = \mathbf{Dr}(0,0) = -0.67 \text{ g/cm}^3$, ya que el material sedimentario que se encuentra en la superficie de la cuenca no está consolidado, por lo que vamos a suponer que tiene una densidad promedio de 2.0 g/cm^3 , siendo la densidad del basamento de 2.67 g/cm^3 . En este caso tendremos que calcular $N = 5$ incógnitas con $M = 36$ datos. El vector de parámetros es el de la expresión 6.4. Realizaremos un total de 200 iteraciones comenzando con un modelo inicial cuya estructura es la que presenta el modelo de la figura 6.65, pero con un contraste de densidad constante $\mathbf{Dr} = p_1 = -0.67 \text{ g/cm}^3$.

La evolución del desajuste de este problema se presenta en la figura 6.68. Este parámetro converge rápidamente al valor $q_s = 30.5$ en las primeras quince iteraciones y permanece constante hasta el final del proceso. La solución para el contraste de densidad de la fuente se alcanza en la iteración número 20, con un factor de amortiguación $\mathbf{b}^{-1} = 15.2$, y los valores de sus parámetros

también permanecen constantes hasta el final. En la figura 6.69 se puede observar la forma del contraste de densidad que se ha obtenido.

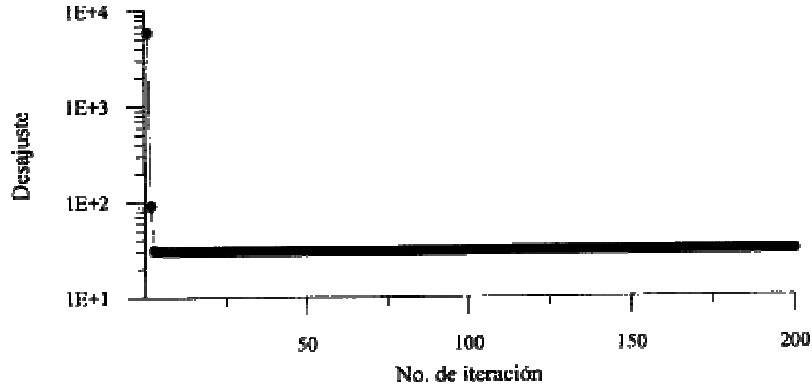


FIGURA 6.68. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

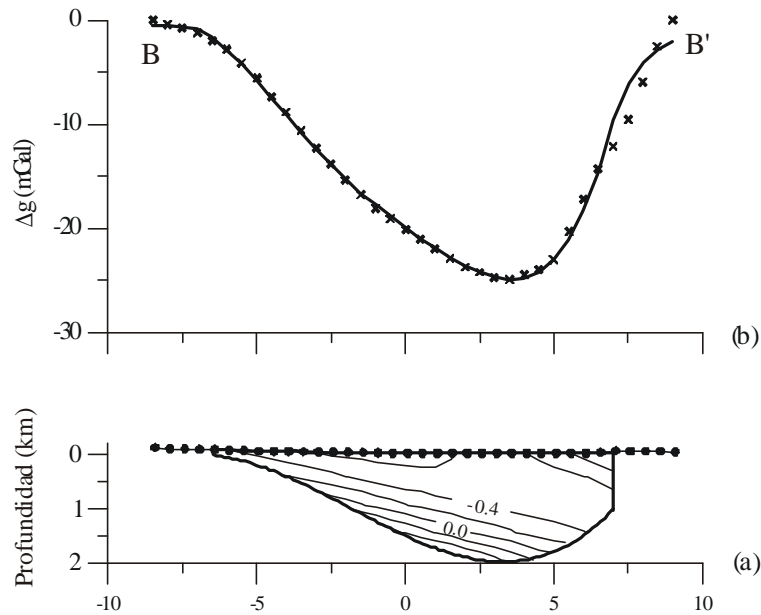


FIGURA 6.69. (a) Modelo resultante para el perfil P2 sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable x con contraste de densidad dado por el polinomio (4.1). Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil P2. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

Como podemos observar en la figura anterior, las isolíneas del contraste de densidad llegan a ser positivas y de valor 0.4 g/cm^3 en la parte más profunda del cuerpo anómalo. Por otro lado, el valor del contraste de densidad va disminuyendo desde el centro del cuerpo hacia la parte superior derecha del mismo, lo que no es esperable en una cuenca sedimentaria. Todo esto hace que el modelo de la figura 6.69 no sea satisfactorio, por lo que vamos a realizar otro proceso de inversión de 200 iteraciones para buscar una nueva solución al problema. En este nuevo proceso vamos a mantener invariable el parámetro p_6 , el cual es el coeficiente de z^2 en el polinomio (4.1), puesto que es el parámetro que más influye en la forma global del contraste de densidad del modelo anterior. Ahora el problema es calcular las cuatro componentes del vector (6.6) mediante la inversión de los datos de gravedad del perfil P2.

El desajuste correspondiente a este nuevo problema se puede ver en la figura 6.70. En las primeras iteraciones disminuye rápidamente hasta alcanzar el valor $q_s = 33.4$, que permanece constante hasta la última iteración. Lo mismo ocurre con los valores de los cuatro parámetros calculados, lo que indica que se ha alcanzado un mínimo en el espacio de soluciones del problema. El modelo correspondiente a dicho mínimo se puede ver en la figura 6.71, que nos muestra un contraste de densidad que coincide con el modelo de semigraben esperado para la Laguna Salada.

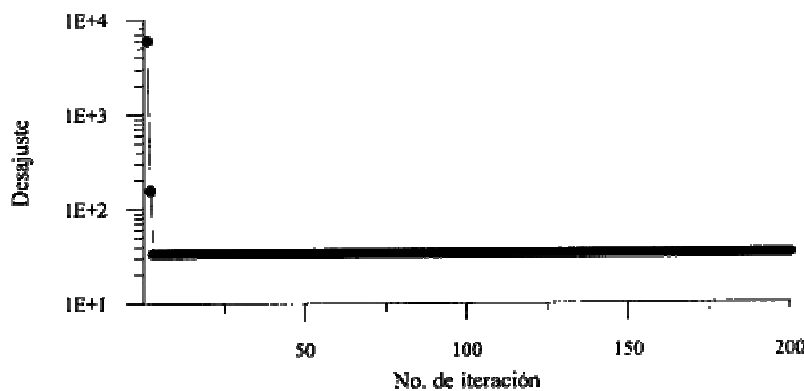


FIGURA 6.70. Evolución del desajuste q_s a lo largo de las 200 iteraciones del proceso de inversión.

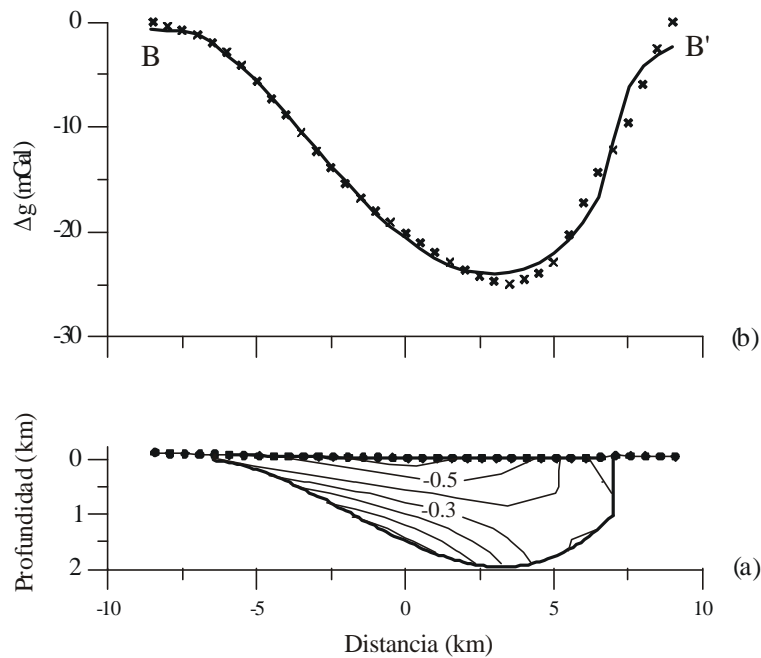


FIGURA 6.71. (a) Modelo resultante para el perfil $P2$ sobre la cuenca Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de la variable x con contraste de densidad dado por el polinomio (4.1). Los círculos negros situados en la frontera superior del cuerpo corresponden a las posiciones del observador en el perfil $P2$. (b) La curva formada por las cruces es la anomalía residual isostática del perfil. La línea sólida es la anomalía gravimétrica del cuerpo anómalo de la figura (a).

Como es usual, vamos a analizar la solución obtenida mediante las matrices de resolución, covarianza y correlación. Para ello, primeramente calculamos la varianza residual, obteniendo el valor $\hat{\mathbf{s}}^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$. Como vemos, este valor es el mismo que el de la varianza de los datos $\mathbf{s}^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$, indicando que la anomalía calculada con el modelo resultante se ajusta satisfactoriamente los datos de gravedad, como se puede ver en la figura 6.71(b).

La figura 6.72 es la representación gráfica de la matriz de resolución. Como se puede ver en dicha figura, todos los parámetros presentan muy buena resolución.

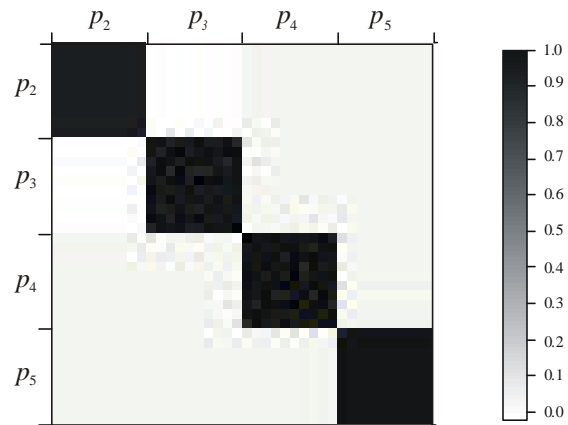


FIGURA 6.72. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

Los elementos de la matriz de covarianza se presentan en la tabla 6.29. De su diagonal principal se obtienen las incertidumbres de los parámetros, cuyos valores numéricos se presentan en la tabla 6.30, con un intervalo de confianza de $\pm 2.58 \mathbf{s}$ (99%).

p_2	p_3	p_4	p_5	
$7.542 \cdot 10^{-5}$	$9.437 \cdot 10^{-5}$	$-1.349 \cdot 10^{-4}$	$2.189 \cdot 10^{-6}$	p_2
	$2.228 \cdot 10^{-4}$	$-2.036 \cdot 10^{-4}$	$3.680 \cdot 10^{-6}$	p_3
		$2.722 \cdot 10^{-4}$	$-7.111 \cdot 10^{-6}$	p_4
			$5.657 \cdot 10^{-7}$	p_5

TABLA 6.29. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD	
$p_2 = 0.01 \pm 0.02$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$
$p_3 = 0.47 \pm 0.04$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$
$p_4 = -0.09 \pm 0.04$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$
$p_5 = 0.008 \pm 0.002$	$\frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$

TABLA 6.30. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

Y, por último, la matriz de correlación se puede ver en la figura 6.73, en la que se observa la existencia de fuertes correlaciones entre todos los parámetros, como era de esperar ya que todos ellos corresponden a cinco de los coeficientes del polinomio que describe el contraste de densidad.

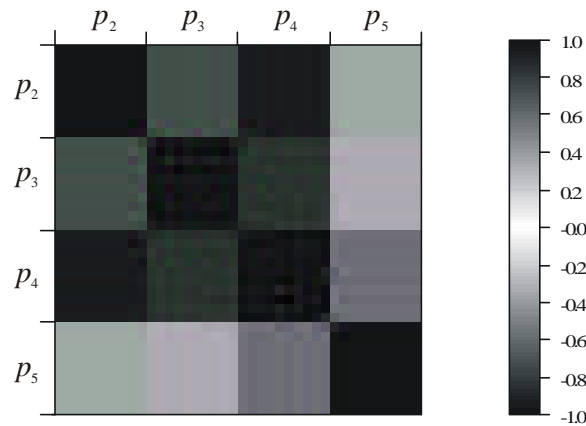


FIGURA 6.73. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	
$1.000 \cdot 10^{+0}$	$7.280 \cdot 10^{-1}$	$-9.412 \cdot 10^{-1}$	$3.351 \cdot 10^{-1}$	p_2
	$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-8.267 \cdot 10^{-1}$	$3.277 \cdot 10^{-1}$	p_3
		$1.000 \cdot 10^{+0}$	$-5.730 \cdot 10^{-1}$	p_4
			$1.000 \cdot 10^{+0}$	p_5

TABLA 6.31. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

6.2.2.3. *Discusión.*

Para obtener un modelo general de la estructura y el contraste de densidad para la cuenca de la Laguna Salada, a partir de los dos perfiles de datos de gravedad trazados sobre la misma, se ha aplicado el método de inversión de Marquardt-Levenberg con los dos tipos de modelos de fuentes presentados en los Capítulos II y IV. La aplicación del modelo de fuente con topografía plana, al estudio de una estructura de la cual se tienen datos de topografía, puede hacer que el resultado obtenido no sea el esperado. Esto es debido a que el observador toma las medidas de la gravedad sobre la topografía en vez de sobre la frontera superior del cuerpo. Por ello, hay que ser cuidadoso en la utilización de este modelo y usarlo sólo cuando las condiciones del problema lo permitan, esto es, cuando la topografía de la zona de estudio pueda ser aproximada por un plano. Cuando ésto no es posible, debido a la presencia de una topografía compleja, es conveniente no utilizar este modelo, sino aquél que considera la forma real de la topografía como frontera superior de la estructura de la fuente anómala. Para el caso de la cuenca Laguna Salada, las topografías de los dos perfiles permiten la utilización del modelo con topografía plana sin que se produzcan errores importantes en el cálculo de la solución del problema. En este Capítulo hemos visto que las soluciones obtenidas con ambos tipos de modelos, tanto para la subcuenca principal de la Laguna Salada como para la cuenca secundaria, son modelos compatibles entre sí y nos proporcionan información muy parecida.

En la inversión de los datos de gravedad para los dos perfiles, y para cada tipo de fuente, lo primero que se ha hecho es permitir la evolución de todos los parámetros que describen la fuente anómala a lo largo del proceso iterativo, comenzando con un modelo homogéneo y sencillo, sin aplicar ningún tipo de restricción al problema. Debido a la falta de unicidad del método, las soluciones obtenidas en cada caso, para el modelo inicial elegido, no han resultado ser soluciones aceptables desde el punto de vista geológico, aunque se haya conseguido un buen ajuste entre la anomalía observada y la anomalía calculada en cada caso. La decisión de utilizar un modelo inicial homogéneo, teniendo en cuenta únicamente los datos reales conocidos para su construcción, ha sido debida a que este tipo de modelos no introducen tendencias en el cálculo de las fronteras y el contraste de densidad, permitiendo la evolución libre de todos los parámetros de la fuente hasta alcanzar una posible solución al problema.

Una forma de acotar las soluciones del problema es aprovechar la flexibilidad que posee el método de inversión, desarrollado en este trabajo, para decidir cuáles de los parámetros de la fuente van a permanecer fijos y cuáles van a evolucionar a lo largo del proceso iterativo de inversión. Esto disminuye la dimensión del espacio de soluciones y también el número de soluciones posibles para cada caso. Por esto, en la búsqueda de un modelo satisfactorio que describa la estructura de la cuenca Laguna Salada, primeramente se ha planteado el problema de inversión no lineal más sencillo, en el que se ha impuesto un contraste de densidad constante y se ha calculado su valor junto con los valores

de los parámetros que determinan la estructura geométrica de la fuente, obteniendo un semigraben con mayor subsidencia en la margen oriental, lo cual está de acuerdo con las evidencias geológicas y geofísicas para ambas subcuencas. Una vez obtenido un modelo de estructura satisfactorio, no lo hemos considerado como solución final al problema puesto que, debido a la compactación de los sedimentos y a otros fenómenos físicos que se producen en una cuenca sedimentaria, cabe esperar que el contraste de densidad varíe con la profundidad y, en menor medida, con la distancia horizontal. Por esta razón, también se ha aplicado el método de inversión al cálculo del contraste de densidad, dejando fija la estructura obtenida, para obtener una solución más realista del problema para cada subcuenca, de acuerdo a los datos geológicos y geofísicos disponibles. Como hemos visto, el hecho de imponer restricciones en el cálculo de los parámetros de la fuente introduce estabilidad al método y reduce el número de posibles soluciones al problema.

Los modelos obtenidos para el perfil *P1*, sobre la subcuenca principal de la Laguna Salada, muestran una estructura en la que la margen occidental de la misma presenta una pendiente menor que la margen oriental, correspondiendo a una estructura de semigraben cuya profundidad máxima es del orden de 2.7 km. El contraste de densidad también tiene la forma de un semigraben, presentando una variación en profundidad muy suave, desde unos -0.67 g/cm^3 en superficie, debido a la presencia de sedimentos no consolidados en esta zona, hasta alcanzar -0.1 g/cm^3 cerca de la frontera inferior. Por otro lado, también se observa una variación lateral del contraste de densidad en la margen oriental de la estructura, lo que sugiere un cambio de facies subvertical similar al descrito por Dorsey y Martín-Barajas (1999) para esta zona de la cuenca.

En el perfil *P2*, trazado sobre la subcuenca secundaria norte de la Laguna Salada, se muestra una estructura más pequeña y menos profunda que la subcuenca principal. Se puede observar que la frontera izquierda de la estructura tiene menos pendiente que la frontera derecha y que esta última presenta una pendiente casi vertical en superficie, al menos hasta una profundidad de casi 1 km. Esto está de acuerdo con los datos geológicos obtenidos en los que se describe la existencia de fallas en escalón para esta zona de la cuenca (Mueller y Rockwell, 1991). La máxima subsidencia de esta subcuenca tiene lugar también en la margen oriental de la estructura, alcanzando una profundidad del orden de 2 km. En cuanto al contraste de densidad obtenido para este perfil de datos, se puede observar que los modelos presentan un basculamiento de las capas sedimentarias hacia el oriente y también una variación lateral de densidad en la zona superficial de la margen oriental de la estructura, lo mismo que ocurría para el perfil *P1*.

Los resultados finales para cada perfil, y para cada uno de los tipos de fuentes utilizados, han resultado ser satisfactorios desde el punto de vista de la validación del método, puesto que todos los modelos presentados corroboran los modelos propuestos en otros trabajos (García-Abdeslem et al., 1995; Vázquez-Hernández, 1996; Martín-Barajas et al., 2000).

6.2.3. Inversión de datos gravimétricos de la Laguna Salada en 3D.

Una vez obtenidos los modelos bidimensionales de la cuenca Laguna Salada, el siguiente paso es calcular su geometría y su contraste de densidad en 3D a partir de la anomalía residual isostática de la figura 6.21, utilizando el método desarrollado en el Capítulo V.

Debido a la geometría de los modelos que se van a utilizar en este problema, y a los grados de los polinomios que describen la frontera inferior del cuerpo, se hace necesario modelar únicamente la subcuenca principal de la Laguna Salada y prescindir de la subcuenca secundaria norte sobre la que se trazó el perfil *P2*. Esto hace que la Laguna Salada quizá no sea la estructura más idónea para aplicar el método en 3D desarrollado en este trabajo, ya que la subcuenca principal no es una cuenca cerrada ni en su parte norte ni en su parte sur. No obstante, éste resulta ser un ejemplo muy ilustrativo de la metodología desarrollada en este trabajo, ya que sirve para ver de qué manera podemos aplicar al estudio en tres dimensiones la información aportada por los modelos bidimensionales obtenidos anteriormente, así como para evidenciar las limitaciones del método de modelado en 3D propuesto en esta Tesis.

Para poder modelar esta cuenca, primeramente vamos a rotar 12° la anomalía de la figura 6.21. Con ésto, situamos el eje longitudinal de dicha anomalía paralelamente a los bordes de la malla de datos, con lo que se facilita el cálculo de las fronteras laterales del modelo. El resultado de esta rotación se puede ver en la figura 6.74(a). A continuación extraemos de este mapa el área correspondiente a la subcuenca principal, la cual se puede observar en la figura 6.74(b). Si observamos detenidamente la anomalía de este mapa, podemos ver que está afectada por un regional que debemos eliminar para poder obtener la anomalía debida únicamente a la subcuenca principal. Para ello, vamos a restarle un mapa regional calculado a partir de la suposición de que en los bordes laterales de la anomalía debe encontrarse la isolinéa de 0.0 mGal, de la misma manera que hicimos con el perfil *PI* en el caso de las dos dimensiones. El regional calculado se presenta en la figura 6.75(a) y el resultado de la resta de ambos mapas se puede ver en la figura 6.75(b). En ambos mapas se ha realizado también una traslación de coordenadas de manera que ambos se encuentran centrados en la coordenada (0,0), de esta manera los coeficientes de los polinomios utilizados en el modelado de la cuenca son numéricamente sencillos.

El mapa de la figura 6.75(b) está formado por una malla que consta de 31 filas y 15 columnas, sumando un total de $M = 465$ datos, los cuales están equiespaciados cada 2 km. Estos son los datos de gravedad que vamos a utilizar para modelar en 3D la subcuenca principal de la Laguna Salada.

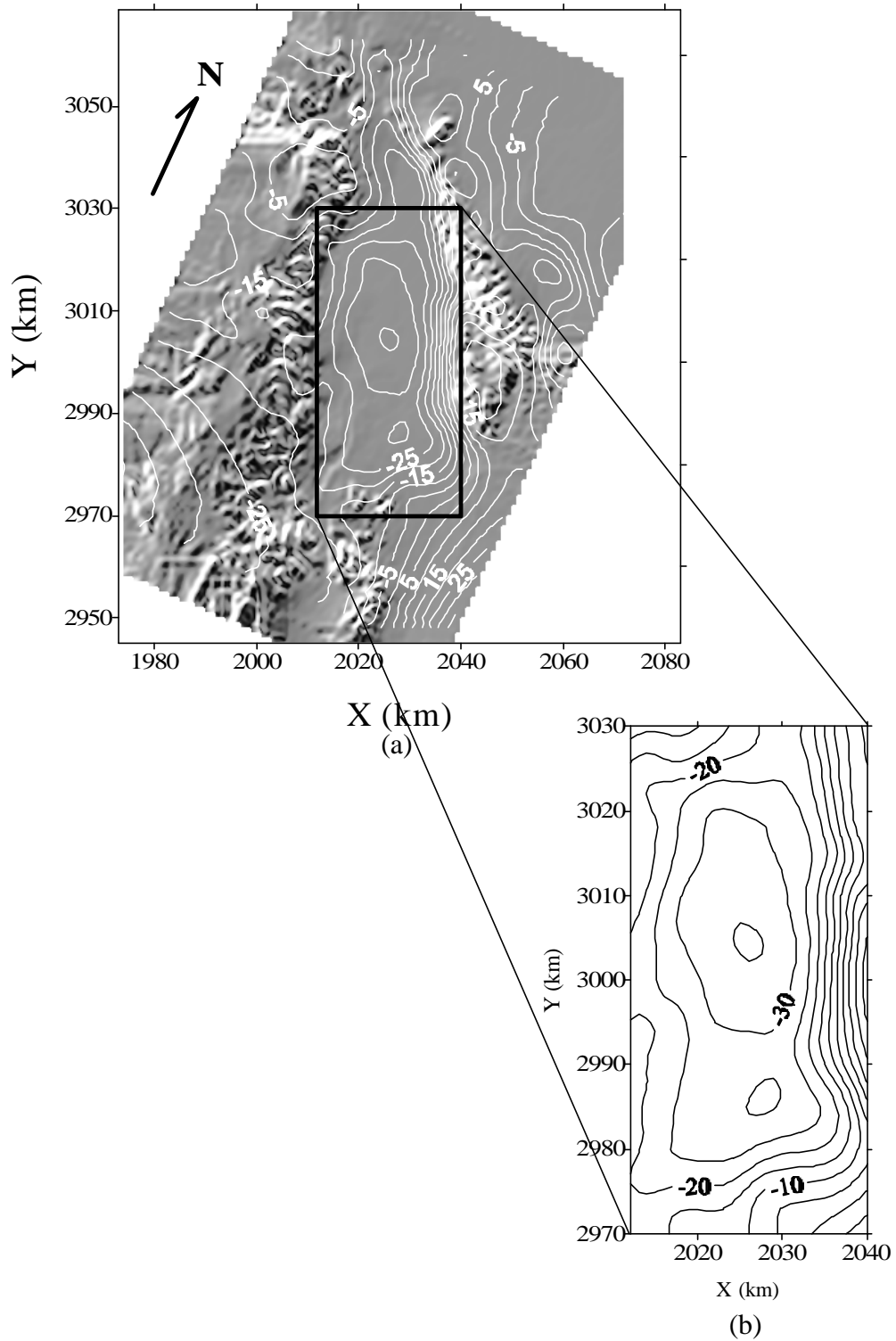


FIGURA 6.74. (a) Mapa de anomalías residuales isostáticas sobre el mapa de la topografía de la cuenca Laguna Salada, ambos rotados 12° , en dirección de las agujas del reloj, con respecto a la dirección del norte geográfico. (b) Anomalía residual isostática sobre la subcuenca principal de la Laguna Salada. Las isolíneas en ambos mapas se encuentran en unidades de mGal.

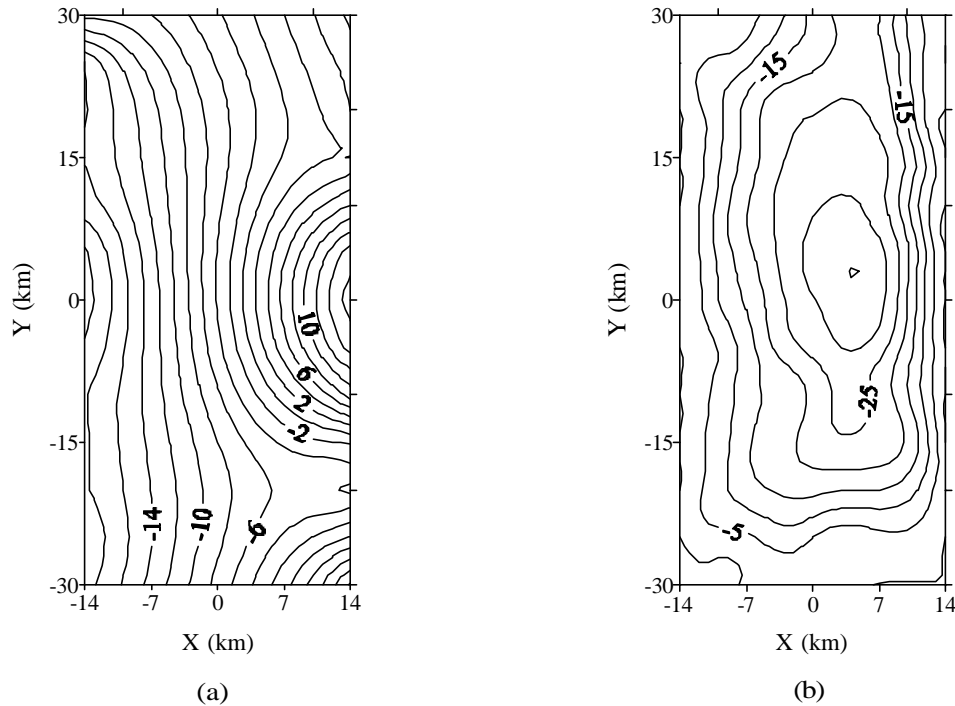


FIGURA 6.75. (a) Mapa regional. (b) Malla de datos de gravedad utilizados en el proceso de inversión. La línea de mayor grosor es la isolínea de 0 mGal.

6.2.3.1. Caso 1: Fuente anómala limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y , z .

Como ya hemos visto en el Capítulo V, este caso se caracteriza por suponer que la topografía del lugar y la frontera inferior del cuerpo son perfectamente planas y horizontales. Con el problema de inversión se calculan un máximo de 33 parámetros que nos describen tanto la estructura como el contraste de densidad de la fuente mediante funciones polinómicas.

En el caso de la Laguna Salada, el mapa topográfico presentado en la figura 6.74(a) nos muestra que la topografía de la cuenca es aproximadamente plana sobre la zona sedimentaria, con una altura promedio de 0 km, pero que se eleva bruscamente hacia las sierras que la limitan. Esto no es un problema siempre que las fronteras laterales del cuerpo, utilizado como modelo de la estructura sedimentaria, no alcancen estas sierras. Por otro lado, evidencias geofísicas (Sánchez-Monclú, 1997) indican que al NNW y al SSE de la subcuenca principal existen sendos altos en la topografía del basamento de la cuenca. Esto sí representa un problema para la suposición de que la cuenca posea una frontera inferior plana, lo cuál es un inconveniente para la aplicación del método de inversión con este tipo de fuentes, como veremos más adelante.

Para calcular todos los parámetros que determinan la estructura de la fuente anómala a partir de los datos de la figura 6.75(b), vamos a seguir el mismo procedimiento de trabajo que en el caso bidimensional. Primeramente vamos a considerar el caso de una fuente anómala con densidad constante y calcularemos los parámetros que describen su estructura geométrica. Por tanto, en este problema de inversión se van a resolver un total de $N = 23$ parámetros, todos ellos pertenecientes a la estructura de la fuente, con lo que el vector incógnita tiene la forma:

$$\mathbf{P} = (P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}, P_{18}, P_{19}, P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{25}, P_{26}, P_{27}, P_{28}, P_{29}, P_{30}, P_{31}, P_{32}, P_{33}) \quad (6.7)$$

Este problema es un problema sobredeterminado, ya que el número de datos es 465, mucho mayor que el número de parámetros.

Para construir el modelo inicial del proceso iterativo, no sólo disponemos de información geológica relacionada con la subcuenca, también podemos hacer uso de la información proporcionada por los modelos 2D obtenidos en el presente trabajo. Por ello, vamos a comenzar el problema de inversión a partir del modelo de la figura 6.28, de forma que las fronteras laterales del cuerpo, en la dirección del eje x , vienen dadas por $h_1(y,z) = -12 + 1.9z + 1.42z^2 + 0.06z^3$, $h_2(y,z) = 12 - 0.3z - 0.44z^2 - 0.1z^3$, cuyas expresiones generales son los polinomios (5.4). Las fronteras en la dirección del eje y son planas, verticales y vienen dadas por los valores $y_1 = -25$ km e $y_2 = 25$ km, y la frontera inferior del cuerpo es el plano horizontal $z_2 = 2.66$ km. En cuanto al contraste de densidad promedio para la subcuenca principal de la Laguna Salada, vamos a suponer que viene dada por la función constante $\Delta\rho = -0.37$ g/cm³ y va a permanecer fija durante todo el proceso iterativo. La forma de este modelo y su anomalía gravimétrica se pueden ver en la figura 6.76.

En la figura 6.77 se muestra la evolución del desajuste a lo largo de todo el proceso de inversión de 200 iteraciones. Vemos cómo este valor decae de manera continua alcanzando la convergencia a partir de las primeras 50 iteraciones hacia el valor 1189. Este valor es bastante mayor que la tolerancia permitida $T = N = 467$, por lo que elegiremos el modelo obtenido en la última iteración como modelo resultante para este proceso, el cual tiene un desajuste $q_s = 1189.8$ y un factor de amortiguación $\mathbf{b}^{-1} = 594.9$.

El modelo resultante obtenido en la iteración número 200 del proceso se puede ver en la figura 6.78. Este cuerpo tiene una densidad constante de -0.37 g/cm³, está limitado en dirección del eje y por las fronteras laterales $y_1 = p_{31} = -24$ km e $y_2 = p_{32} = 32.8$ km y presenta una profundidad máxima $z_2 = p_{33} = 3.2$ km. En dicha figura se muestran varios perfiles de la estructura en distintas posiciones en el eje y y con respecto a la malla de datos. Esta forma de representación ayuda a tener una idea más clara de cómo se comportan las fronteras laterales de la fuente $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$. Podemos ver cómo dichas fronteras forman una estructura de semigraben en todos los perfiles, en la cual la frontera derecha presenta una pendiente más suave que la izquierda, haciendo que la máxima subsidencia de la cuenca

se encuentre hacia la margen derecha de la misma. La profundidad máxima obtenida es constante para toda la estructura, de ahí que, debido a la naturaleza de la anomalía gravimétrica, podemos ver que, en los perfiles situados en las posiciones $y = 25$ km e $y = -20$ km, las dos fronteras laterales se cruzan, indicando que en estas zonas la frontera inferior de la estructura debe ser menos profunda que en el centro de la cuenca. El cruce inevitable entre ambas fronteras produce un cambio de signo en la integral (5.3) que se traduce en una densidad positiva de 0.37 g/cm^3 para las zonas rayadas en los perfiles. La presencia de estas zonas de densidad positiva hacen que la anomalía gravimétrica del modelo sea menos negativa en los extremos NNW y SSE del mapa.

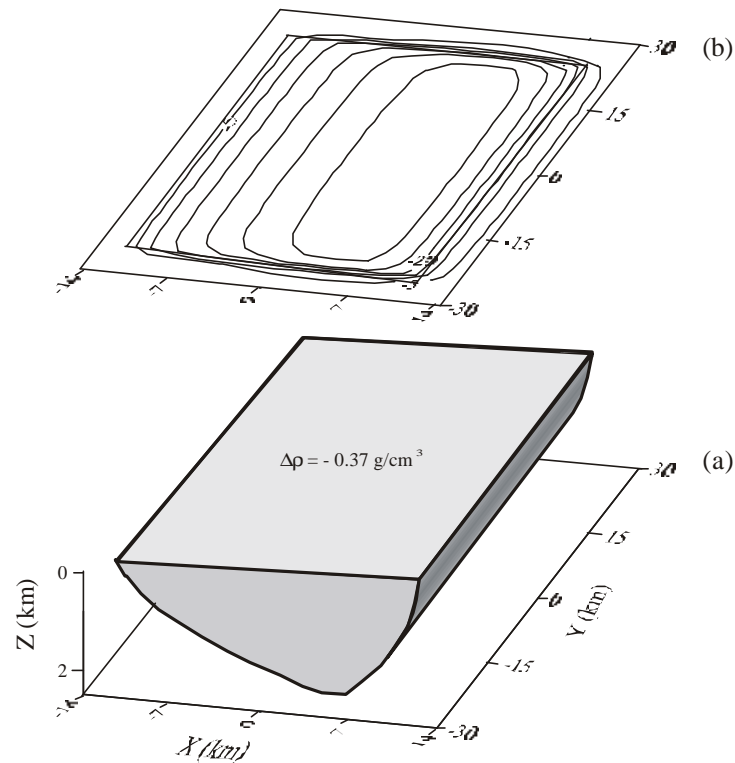


FIGURA 6.76. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión para el estudio de los datos de la anomalía residual isostática de la cuenca Laguna Salada. (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a). La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la anomalía.

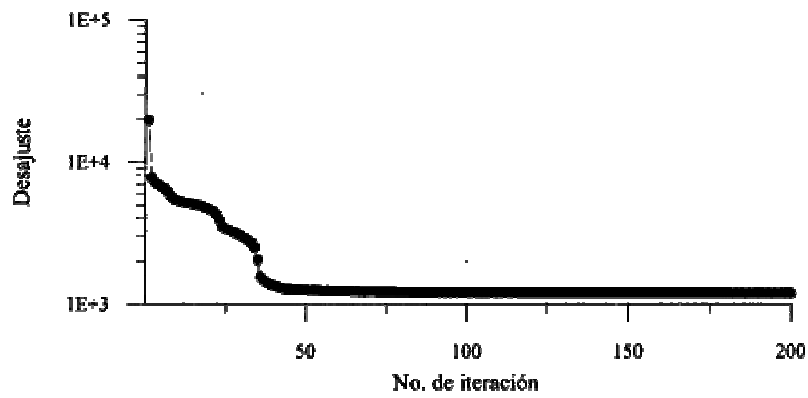


FIGURA 6.77. Evolución del desajuste q_s .

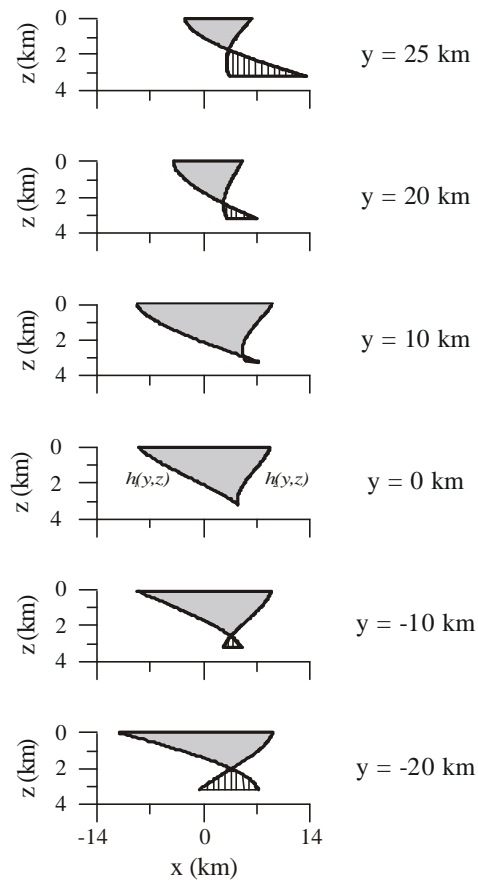


FIGURA 6.78. Perfiles trazados sobre la estructura del modelo resultante en el modelo de inversión. Las zonas grises presentan un contraste de densidad constante de -0.37 g/cm^3 . Las zonas rayadas presentan un contraste de densidad positivo de 0.37 g/cm^3 , debido al cambio de posición de las fronteras laterales que conlleva un cambio de signo en la integral que calcula el efecto gravimétrico de este cuerpo mediante la ecuación (5.3).

En la figura 6.79(a) podemos ver la anomalía gravimétrica producida por el cuerpo de la figura anterior y en la figura 6.79(b) se muestra la forma del residual del problema, calculado al comparar dicha anomalía resultante con los datos de gravedad del mapa 6.75(b) utilizados en la inversión. En el mapa 6.79(b) vemos que, en los bordes superior e inferior, el valor del residual presenta valores de hasta 5 mGal, mientras que el centro de la malla presenta valores de unos -0.5 mGal, siendo el máximo de anomalía de -35 mGal. Esta diferencia en el residual es la causante del alto valor que tiene el desajuste, que hace que sea mayor que el valor de la tolerancia permitida para este caso.

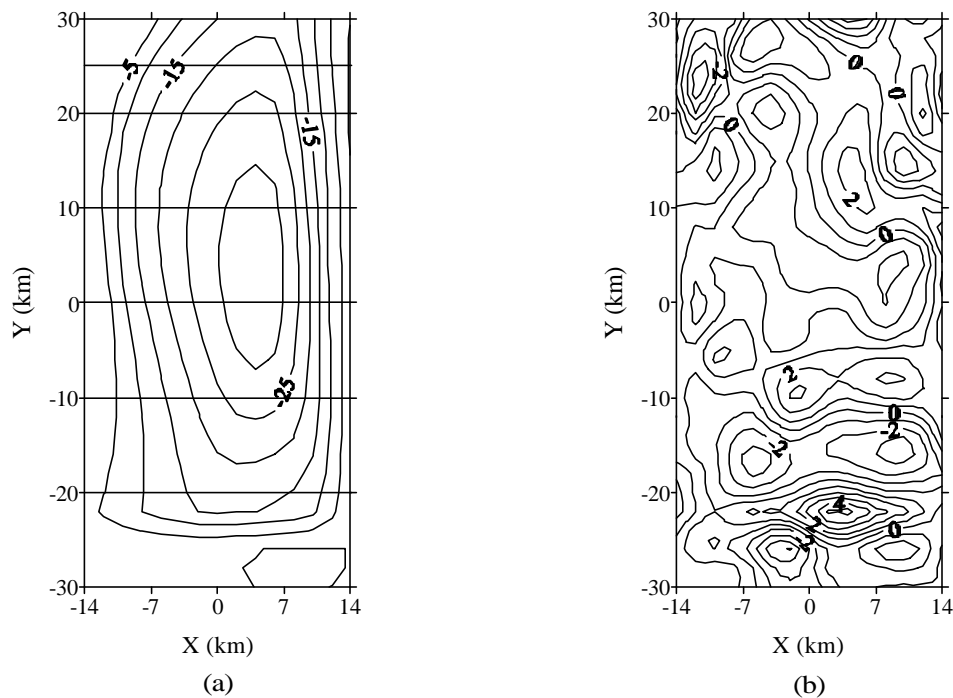


FIGURA 6.79. (a) Anomalía gravimétrica correspondiente al modelo resultante en el proceso de inversión. Las líneas resaltadas representan las posiciones de los perfiles de la figura 6.78. (b) Residual obtenido al comparar los datos de gravedad del problema y la anomalía gravimétrica (a).

A continuación se calculan las matrices de resolución, covarianza y correlación para este caso, con una varianza residual $\hat{S} = 2.7 \text{ mGal}^2$, bastante mayor que la varianza de los datos de gravedad, la cuál tiene el valor $S^2 = 1.0 \text{ mGal}^2$. Según esto, el modelo resultante no se ajusta a los datos de manera satisfactoria, como podemos ver en el residual de la figura 6.79(b), sobre todo en los bordes superior e inferior de la malla, aunque en el centro se alcanza aproximadamente el valor de la anomalía residual isostática.

En la figura 6.80 se presenta una imagen de la matriz de resolución. En esta matriz podemos ver que algunos de los parámetros de la estructura tienen una resolución baja, como por ejemplo p_{11}, p_{13} y p_{16} de la frontera izquierda, que son los coeficientes correspondientes al término independiente y a los términos en z y z^2 del polinomio $h_1(y,z)$ respectivamente. También presentan baja resolución los parámetros p_{21}, p_{23} y p_{26} de la frontera derecha, correspondientes a los mismos términos del polinomio $h_2(y,z)$. La forma de ambos polinomios se pueden ver en las expresiones (5.4) del Capítulo V. Otros dos parámetros que presentan baja resolución son el p_{32} , correspondiente a la frontera y_2 y el p_{33} , correspondiente a la frontera inferior del cuerpo.

En la tabla 6.32 se presentan los valores numéricos de los elementos de la matriz de covarianza, siendo su diagonal principal la que nos va a proporcionar las varianzas de los parámetros del modelo. La raíz cuadrada de estas varianzas nos dan las correspondientes desviaciones estándar.

En la tabla 6.33 se pueden ver los valores de cada uno de los parámetros de la frontera lateral $h_1(y,z)$, los parámetros correspondientes a la frontera lateral $h_2(y,z)$ y los parámetros de las fronteras y_1, y_2 e inferior z_2 . También se presentan las incertidumbres correspondientes, considerando un intervalo de confianza con $\pm 2.58 \sigma$.

En la figura 6.81 está representada la matriz de correlación. Como se puede ver en esta figura, la tendencia general es que existen correlaciones entre los parámetros de cada una de las fronteras laterales $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$. Por otro lado, se puede ver también que existen ciertas correlaciones entre los elementos de estas dos fronteras. En cuanto a los parámetros correspondientes a las fronteras $y_1 = p_{31}, y_2 = p_{32}$ y $z_2 = p_{33}$, vemos que no presentan correlaciones importantes entre sí o con el resto de los parámetros. Para ver si las correlaciones entre parámetros son negativas o positivas, se presentan los valores numéricos de los elementos de la matriz de correlación en la tabla 6.34.

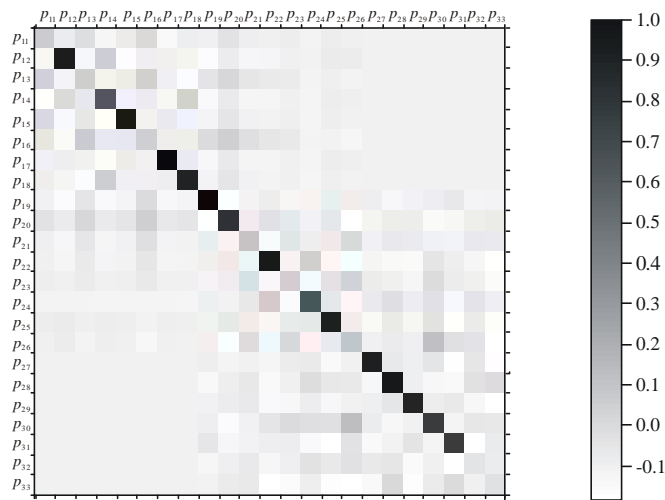


FIGURA 6.80. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	
5.430 10⁻⁴	-1.402 10 ⁻⁵	2.219 10 ⁻⁴	4.221 10 ⁻⁶	-2.389 10 ⁻⁶	1.115 10 ⁻⁴	-9.255 10 ⁻⁸	-3.263 10 ⁻⁶	6.872 10 ⁻⁸	-1.007 10 ⁻⁴	-1.335 10 ⁻⁵	-3.924 10 ⁻⁶	p_{11}
	3.133 10⁻⁴	-7.680 10 ⁻⁶	-2.822 10 ⁻⁴	-3.639 10 ⁻⁶	-1.166 10 ⁻⁵	5.522 10 ⁻⁶	6.207 10 ⁻⁵	-2.760 10 ⁻⁷	-3.805 10 ⁻⁵	3.476 10 ⁻⁶	4.452 10 ⁻⁵	p_{12}
		2.279 10⁻⁴	-7.100 10 ⁻⁶	-1.181 10 ⁻⁶	1.746 10 ⁻⁴	-6.909 10 ⁻⁷	2.148 10 ⁻⁶	4.887 10 ⁻⁸	-5.795 10 ⁻⁵	-1.589 10 ⁻⁵	8.207 10 ⁻⁶	p_{13}
			8.257 10⁻⁴	9.473 10 ⁻⁶	-1.163 10 ⁻⁵	-1.107 10 ⁻⁵	-2.922 10 ⁻⁴	-1.819 10 ⁻⁷	2.175 10 ⁻⁵	-2.331 10 ⁻⁶	-1.019 10 ⁻⁴	p_{14}
				7.504 10⁻⁷	-1.892 10 ⁻⁷	-5.174 10 ⁻⁷	-2.452 10 ⁻⁶	-1.633 10 ⁻⁸	2.925 10 ⁻⁶	-4.028 10 ⁻⁸	-9.588 10 ⁻⁷	p_{15}
					1.791 10⁻⁴	-2.077 10 ⁻⁶	7.961 10 ⁻⁶	5.035 10 ⁻⁸	5.054 10 ⁻⁵	-3.051 10 ⁻⁶	6.989 10 ⁻⁶	p_{16}
						7.698 10⁻⁷	1.838 10 ⁻⁶	2.399 10 ⁻⁹	-6.062 10 ⁻⁶	-5.049 10 ⁻⁷	3.617 10 ⁻⁶	p_{17}
							1.389 10⁻⁴	1.004 10 ⁻⁷	7.701 10 ⁻⁶	1.557 10 ⁻⁶	3.691 10 ⁻⁵	p_{18}
								1.215 10⁻⁹	4.051 10 ⁻⁸	7.429 10 ⁻⁹	-5.908 10 ⁻⁸	p_{19}
									3.746 10⁻⁴	2.268 10 ⁻⁵	-1.634 10 ⁻⁵	p_{20}
										5.886 10⁻⁴	1.152 10 ⁻⁵	p_{21}
											3.111 10⁻⁴	p_{22}

TABLA 6.32. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

p_{23}	p_{24}	p_{25}	p_{26}	p_{27}	p_{28}	p_{29}	p_{30}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	
4.611 10 ⁻⁶	-1.194 10 ⁻⁵	-5.967 10 ⁻⁷	8.927 10 ⁻⁶	-1.743 10 ⁻⁷	5.065 10 ⁻⁶	3.279 10 ⁻⁸	6.191 10 ⁻⁷	-1.133 10 ⁻⁶	-1.679 10 ⁻⁶	-9.702 10 ⁻⁶	p_{11}
4.037 10 ⁻⁶	-1.701 10 ⁻⁵	1.038 10 ⁻⁶	-8.181 10 ⁻⁷	1.948 10 ⁻⁶	-8.014 10 ⁻⁶	-1.358 10 ⁻⁷	-2.563 10 ⁻⁵	-1.399 10 ⁻⁶	7.468 10 ⁻⁷	2.227 10 ⁻⁵	p_{12}
1.529 10 ⁻⁵	-4.078 10 ⁻⁵	-3.674 10 ⁻⁷	2.621 10 ⁻⁵	-4.742 10 ⁻⁷	1.541 10 ⁻⁵	2.816 10 ⁻⁸	2.167 10 ⁻⁵	3.086 10 ⁻⁶	-1.171 10 ⁻⁶	-6.165 10 ⁻⁵	p_{13}
-1.853 10 ⁻⁵	-4.078 10 ⁻⁵	-2.051 10 ⁻⁶	-2.527 10 ⁻⁵	-2.423 10 ⁻⁶	4.260 10 ⁻⁵	1.597 10 ⁻⁷	-9.353 10 ⁻⁶	-8.874 10 ⁻⁶	-9.415 10 ⁻⁷	-5.413 10 ⁻⁵	p_{14}
-2.219 10 ⁻⁷	2.761 10 ⁻⁶	-8.340 10 ⁻⁸	-1.413 10 ⁻⁷	-2.264 10 ⁻⁸	-9.197 10 ⁻⁷	-9.159 10 ⁻¹⁰	7.885 10 ⁻⁷	-2.758 10 ⁻⁶	-1.710 10 ⁻⁸	-2.969 10 ⁻⁷	p_{15}
2.795 10 ⁻⁵	-4.295 10 ⁻⁵	3.784 10 ⁻⁷	4.824 10 ⁻⁵	-1.447 10 ⁻⁶	1.728 10 ⁻⁵	3.229 10 ⁻⁸	7.038 10 ⁻⁵	8.394 10 ⁻⁶	-4.059 10 ⁻⁷	-6.076 10 ⁻⁵	p_{16}
-4.670 10 ⁻⁷	-3.786 10 ⁻⁶	9.235 10 ⁻⁸	-9.035 10 ⁻⁷	2.769 10 ⁻⁷	-3.157 10 ⁻⁷	-8.171 10 ⁻⁹	-2.790 10 ⁻⁶	6.802 10 ⁻⁷	3.777 10 ⁻⁸	2.529 10 ⁻⁷	p_{17}
8.514 10 ⁻⁶	4.638 10 ⁻⁵	7.266 10 ⁻⁷	1.355 10 ⁻⁵	-1.064 10 ⁻⁶	-1.182 10 ⁻⁵	-1.297 10 ⁻⁸	1.648 10 ⁻⁵	-4.762 10 ⁻⁶	1.877 10 ⁻⁷	1.974 10 ⁻⁵	p_{18}
1.799 10 ⁻⁸	-8.535 10 ⁻⁹	3.572 10 ⁻¹⁰	3.099 10 ⁻⁸	-4.792 10 ⁻⁹	3.182 10 ⁻⁸	3.315 10 ⁻¹⁰	5.364 10 ⁻⁸	1.099 10 ⁻⁷	-4.554 10 ⁻¹⁰	6.223 10 ⁻⁹	p_{19}
2.700 10 ⁻⁵	-7.304 10 ⁻⁷	2.760 10 ⁻⁶	7.324 10 ⁻⁵	-4.032 10 ⁻⁶	5.668 10 ⁻⁶	3.673 10 ⁻⁸	2.015 10 ⁻⁴	2.073 10 ⁻⁵	6.589 10 ⁻⁷	3.476 10 ⁻⁵	p_{20}
2.813 10 ⁻⁴	-2.427 10 ⁻⁵	-2.878 10 ⁻⁶	1.118 10 ⁻⁴	9.092 10 ⁻⁷	6.792 10 ⁻⁶	3.413 10 ⁻⁸	-1.374 10 ⁻⁴	-7.259 10 ⁻⁷	1.842 10 ⁻⁶	1.452 10 ⁻⁶	p_{21}
-2.860 10 ⁻⁶	-3.299 10 ⁻⁴	-1.080 10 ⁻⁶	-5.990 10 ⁻⁶	3.879 10 ⁻⁶	8.587 10 ⁻⁵	-2.399 10 ⁻⁷	-3.971 10 ⁻⁵	1.335 10 ⁻⁵	2.568 10 ⁻⁶	1.345 10 ⁻⁵	p_{22}
2.266 10⁻⁴	-7.434 10 ⁻⁶	-1.437 10 ⁻⁶	1.501 10 ⁻⁴	-1.353 10 ⁻⁷	3.077 10 ⁻⁶	3.713 10 ⁻⁸	-8.631 10 ⁻⁵	-1.061 10 ⁻⁶	-8.651 10 ⁻⁷	-3.713 10 ⁻⁵	p_{23}
	8.418 10⁻⁴	2.153 10 ⁻⁶	-2.547 10 ⁻⁵	-2.984 10 ⁻⁶	-2.790 10 ⁻⁴	-5.867 10 ⁻⁸	-1.439 10 ⁻⁵	2.237 10 ⁻⁶	-4.978 10 ⁻⁶	1.710 10 ⁻⁵	p_{24}
		4.048 10⁻⁷	2.201 10 ⁻⁸	-2.090 10 ⁻⁷	-5.375 10 ⁻⁷	-2.741 10 ⁻⁹	3.524 10 ⁻⁶	4.685 10 ⁻⁷	-9.537 10 ⁻⁹	1.437 10 ⁻⁶	p_{25}
			1.409 10⁻⁴	-1.591 10 ⁻⁶	1.149 10 ⁻⁵	5.713 10 ⁻⁸	1.502 10 ⁻⁵	-3.167 10 ⁻⁶	-1.465 10 ⁻⁶	-3.590 10 ⁻⁵	p_{26}
				4.121 10⁻⁷	-7.665 10 ⁻⁷	-9.279 10 ⁻⁹	-5.306 10 ⁻⁶	9.230 10 ⁻⁷	2.602 10 ⁻⁸	-1.263 10 ⁻⁸	p_{27}
					1.101 10⁻⁴	6.628 10 ⁻⁸	1.370 10 ⁻⁵	-6.040 10 ⁻⁶	1.585 10 ⁻⁶	-1.278 10 ⁻⁵	p_{28}
						8.214 10⁻¹⁰	1.126 10 ⁻⁷	-6.561 10 ⁻⁸	-6.837 10 ⁻¹⁰	-2.244 10 ⁻⁸	p_{29}
							3.011 10⁻⁴	-9.737 10 ⁻⁶	7.117 10 ⁻⁷	3.792 10 ⁻⁵	p_{30}
								8.408 10⁻⁴	3.135 10 ⁻⁷	-3.429 10 ⁻⁶	p_{31}
									1.894 10⁻⁶	-2.686 10 ⁻⁷	p_{32}
										3.217 10⁻⁴	p_{33}

TABLA 6.32 (Continuación). Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

FRONTERA $h_1(y,z)$	FRONTERA $h_2(y,z)$	FRONTERAS y_1, y_2, z_2
$p_{11} = -12.27 \pm 0.06 \text{ g/cm}^3$	$p_{21} = 12.50 \pm 0.06 \text{ km}$	$P_{31} = 23.99 \pm 0.08 \text{ km}$
$p_{12} = -0.03 \pm 0.05 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{22} = -0.01 \pm 0.05$	$p_{32} = 32.829 \pm 0.004 \text{ km}$
$p_{13} = 3.55 \pm 0.04 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$P_{23} = -1.24 \pm 0.04$	$P_{33} = 3.20 \pm 0.05 \text{ km}$
$p_{14} = -0.28 \pm 0.07 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}}$	$p_{24} = -0.07 \pm 0.07 \text{ km}^{-1}$	
$p_{15} = -0.004 \pm 0.002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{25} = 0.003 \pm 0.002 \text{ km}^{-1}$	
$p_{16} = 1.79 \pm 0.03 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{26} = -0.01 \pm 0.03 \text{ km}^{-1}$	
$p_{17} = 0.008 \pm 0.002 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{27} = -0.003 \pm 0.002 \text{ km}^{-2}$	
$p_{18} = 0.10 \pm 0.03 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{28} = 0.04 \pm 0.03 \text{ km}^{-2}$	
$p_{19} = 0.00033 \pm 0.00009 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{29} = 0.00011 \pm 0.00007 \text{ km}^{-2}$	
$p_{20} = -0.33 \pm 0.05 \frac{\text{g/cm}^3}{\text{km}^2}$	$p_{30} = 0.33 \pm 0.05 \text{ km}^{-2}$	

TABLA 6.33. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

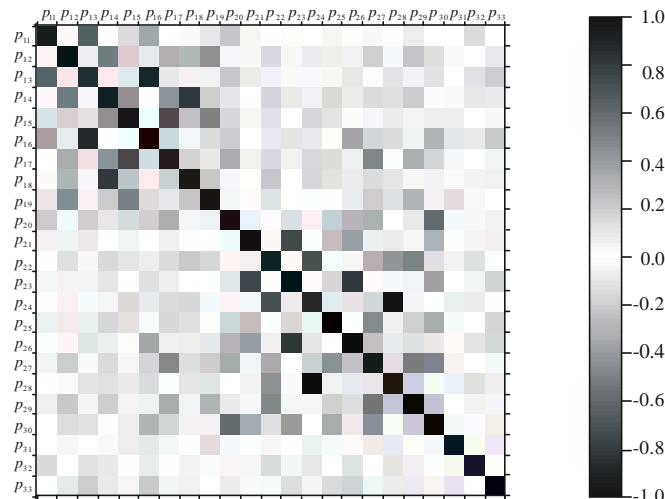


FIGURA 6.81. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	
1.000 10⁺⁰	-3.400 10 ⁻²	6.308 10 ⁻¹	6.303 10 ⁻³	-1.183 10 ⁻¹	3.574 10 ⁻¹	-4.527 10 ⁻³	-1.188 10 ⁻²	8.460 10 ⁻²	-2.233 10 ⁻¹	-2.361 10 ⁻²	-9.547 10 ⁻³	p_{11}
	1.000 10⁺⁰	-2.874 10 ⁻²	-5.548 10 ⁻¹	-2.374 10 ⁻¹	-4.923 10 ⁻²	3.556 10 ⁻¹	2.975 10 ⁻¹	-4.472 10 ⁻¹	-1.111 10 ⁻¹	8.095 10 ⁻³	1.426 10 ⁻¹	p_{12}
		1.000 10⁺⁰	-1.637 10 ⁻²	-9.029 10 ⁻²	8.642 10 ⁻¹	-5.216 10 ⁻²	1.207 10 ⁻²	9.285 10 ⁻²	-1.983 10 ⁻¹	-4.338 10 ⁻²	3.082 10 ⁻²	p_{13}
			1.000 10⁺⁰	3.806 10 ⁻¹	-3.026 10 ⁻²	-4.390 10 ⁻¹	-8.626 10 ⁻¹	-1.815 10 ⁻¹	3.911 10 ⁻²	-3.344 10 ⁻³	-2.011 10 ⁻¹	p_{14}
				1.000 10⁺⁰	-1.632 10 ⁻²	-6.808 10 ⁻¹	-2.402 10 ⁻¹	-5.408 10 ⁻¹	1.745 10 ⁻¹	-1.917 10 ⁻³	-6.276 10 ⁻²	p_{15}
					1.000 10⁺⁰	-1.769 10 ⁻¹	5.047 10 ⁻²	1.079 10 ⁻¹	1.951 10 ⁻¹	-9.397 10 ⁻³	2.961 10 ⁻²	p_{16}
						1.000 10⁺⁰	1.777 10 ⁻¹	7.844 10 ⁻²	-3.570 10 ⁻¹	-2.372 10 ⁻²	2.338 10 ⁻¹	p_{17}
							1.000 10⁺⁰	2.442 10 ⁻¹	3.376 10 ⁻²	5.445 10 ⁻³	1.776 10 ⁻¹	p_{18}
								1.000 10⁺⁰	6.004 10 ⁻²	8.784 10 ⁻³	-9.608 10 ⁻²	p_{19}
									1.000 10⁺⁰	4.831 10 ⁻²	-4.787 10 ⁻²	p_{20}
										1.000 10⁺⁰	2.693 10 ⁻²	p_{21}
											1.000 10⁺⁰	p_{22}

TABLA 6.34. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

p_{23}	p_{24}	p_{25}	p_{26}	p_{27}	p_{28}	p_{29}	p_{30}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	
1.315 10 ⁻²	-1.767 10 ⁻²	-4.024 10 ⁻²	3.227 10 ⁻²	-1.165 10 ⁻²	2.071 10 ⁻²	4.910 10 ⁻²	1.531 10 ⁻³	-1.677 10 ⁻³	-5.235 10 ⁻²	-2.321 10 ⁻²	p_{11}
1.515 10 ⁻²	-3.312 10 ⁻²	9.217 10 ⁻²	-3.894 10 ⁻³	1.714 10 ⁻¹	-4.314 10 ⁻²	-2.678 10 ⁻¹	-8.345 10 ⁻²	-2.726 10 ⁻³	3.066 10 ⁻²	7.015 10 ⁻²	p_{12}
6.728 10 ⁻²	-9.310 10 ⁻²	-3.825 10 ⁻²	1.462 10 ⁻¹	-4.893 10 ⁻²	9.727 10 ⁻²	6.507 10 ⁻²	8.271 10 ⁻²	7.050 10 ⁻³	-5.636 10 ⁻²	-2.277 10 ⁻¹	p_{13}
-4.283 10 ⁻²	-4.891 10 ⁻²	-1.122 10 ⁻¹	-7.409 10 ⁻²	-1.314 10 ⁻¹	1.412 10 ⁻¹	1.939 10 ⁻¹	-1.876 10 ⁻²	-1.065 10 ⁻²	-2.381 10 ⁻²	-1.050 10 ⁻¹	p_{14}
-1.702 10 ⁻²	1.099 10 ⁻¹	-1.513 10 ⁻¹	-1.374 10 ⁻²	-4.072 10 ⁻²	-1.012 10 ⁻¹	-3.689 10 ⁻²	5.246 10 ⁻²	-1.098 10 ⁻¹	-1.435 10 ⁻²	-1.911 10 ⁻²	p_{15}
1.388 10 ⁻¹	-1.106 10 ⁻¹	4.444 10 ⁻²	3.037 10 ⁻¹	-1.684 10 ⁻¹	1.231 10 ⁻¹	8.420 10 ⁻²	3.031 10 ⁻¹	2.163 10 ⁻²	-2.204 10 ⁻²	-2.532 10 ⁻¹	p_{16}
-3.536 10 ⁻²	-1.487 10 ⁻¹	1.654 10 ⁻¹	-8.675 10 ⁻²	4.917 10 ⁻¹	-3.429 10 ⁻²	-3.249 10 ⁻¹	-1.833 10 ⁻¹	2.674 10 ⁻²	3.129 10 ⁻²	1.607 10 ⁻²	p_{17}
4.799 10 ⁻²	1.356 10 ⁻¹	9.689 10 ⁻²	9.682 10 ⁻²	-1.406 10 ⁻¹	-9.552 10 ⁻²	-3.840 10 ⁻²	8.056 10 ⁻²	-1.393 10 ⁻²	1.157 10 ⁻²	9.336 10 ⁻²	p_{18}
3.428 10 ⁻²	-8.439 10 ⁻³	1.611 10 ⁻²	7.488 10 ⁻²	-2.142 10 ⁻¹	8.698 10 ⁻²	3.318 10 ⁻¹	8.867 10 ⁻²	1.087 10 ⁻¹	-9.494 10 ⁻³	9.953 10 ⁻³	p_{19}
9.269 10 ⁻²	-1.301 10 ⁻³	2.241 10 ⁻¹	3.188 10 ⁻¹	-3.245 10 ⁻¹	2.790 10 ⁻²	6.621 10 ⁻²	6.001 10 ⁻¹	3.694 10 ⁻²	2.474 10 ⁻²	1.001 10 ⁻¹	p_{20}
7.704 10 ⁻¹	-3.448 10 ⁻²	-1.865 10 ⁻¹	3.882 10 ⁻¹	5.838 10 ⁻²	2.668 10 ⁻²	4.909 10 ⁻²	-3.263 10 ⁻¹	-1.032 10 ⁻³	5.517 10 ⁻²	3.338 10 ⁻³	p_{21}
-1.077 10 ⁻²	-6.447 10 ⁻¹	-9.626 10 ⁻²	-2.861 10 ⁻²	3.426 10 ⁻¹	4.639 10 ⁻¹	-4.745 10 ⁻¹	-1.298 10 ⁻¹	2.611 10 ⁻²	1.058 10 ⁻¹	4.252 10 ⁻²	p_{22}
1.000 10⁺⁰	-1.702 10 ⁻²	-1.500 10 ⁻¹	8.399 10 ⁻¹	-1.400 10 ⁻²	1.948 10 ⁻²	8.607 10 ⁻²	-3.304 10 ⁻¹	-2.430 10 ⁻³	-4.176 10 ⁻²	-1.375 10 ⁻¹	p_{23}
	1.000 10⁺⁰	1.166 10 ⁻¹	-7.394 10 ⁻²	-1.602 10 ⁻¹	-9.162 10 ⁻¹	-7.056 10 ⁻²	-2.858 10 ⁻²	2.660 10 ⁻³	-1.247 10 ⁻¹	3.285 10 ⁻²	p_{24}
		1.000 10⁺⁰	2.914 10 ⁻³	-5.118 10 ⁻¹	-8.049 10 ⁻²	-1.503 10 ⁻¹	3.192 10 ⁻¹	2.540 10 ⁻²	-1.089 10 ⁻²	1.259 10 ⁻¹	p_{25}
			1.000 10⁺⁰	-2.088 10 ⁻¹	9.223 10 ⁻²	1.679 10 ⁻¹	7.292 10 ⁻²	-9.200 10 ⁻³	-8.971 10 ⁻²	-1.686 10 ⁻¹	p_{26}
				1.000 10⁺⁰	-1.138 10 ⁻¹	-5.044 10 ⁻¹	-4.764 10 ⁻¹	4.959 10 ⁻²	2.945 10 ⁻²	-1.097 10 ⁻³	p_{27}
					1.000 10⁺⁰	2.203 10 ⁻¹	7.523 10 ⁻²	-1.985 10 ⁻²	1.098 10 ⁻¹	-6.789 10 ⁻²	p_{28}
						1.000 10⁺⁰	2.264 10 ⁻¹	-7.895 10 ⁻²	-1.734 10 ⁻²	-4.365 10 ⁻²	p_{29}
							1.000 10⁺⁰	-1.935 10 ⁻²	2.980 10 ⁻²	1.218 10 ⁻¹	p_{30}
								1.000 10⁺⁰	7.856 10 ⁻³	-6.593 10 ⁻³	p_{31}
									1.000 10⁺⁰	-1.088 10 ⁻²	p_{32}
										1.000 10⁺⁰	p_{33}

TABLA 5.34 (Continuación). Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

Con la estructura del cuerpo anómalo, presentada en la figura 6.78, se ha calculado el polinomio de segundo grado que nos proporciona el contraste de densidad responsable de los datos de gravedad del problema. El resultado final obtenido no ha sido satisfactorio para el modelo de semigraben esperado para la Laguna Salada. Esto es debido, principalmente, a la existencia del cruce entre las dos fronteras laterales $h_1(y,z)$ y $h_2(y,z)$ en estas zonas, producido por la condición de mantener plana la frontera inferior en este tipo de fuentes. Para ver si es posible mejorar el resultado obtenido para la estructura, también se ha intentado calcular este caso realizando el problema iterativo a partir de otros modelos iniciales, pero los resultados obtenidos han sido similares.

En consecuencia, aunque el modelo de fuente con contraste de densidad constante, obtenido en esta sección, nos ha proporcionado una idea general satisfactoria del tipo de estructura de semigraben esperada para la zona central de la subcuenca principal de la Laguna Salada, este tipo de modelos no es del todo satisfactorio para el caso que estamos tratando, ya que la frontera inferior de esta subcuenca no es en realidad plana.

6.2.3.2. Caso 2: Fuente limitada superior e inferiormente por funciones continuas de las variables y , z .

A continuación vamos a modelar la subcuenca principal de la Laguna Salada mediante el modelo que introduce la topografía de la zona de estudio en el modelado, y considera las cuatro fronteras laterales como planos verticales. Los datos de gravedad son los mismos que para el caso anterior, esto es, la malla de la figura 6.75(b), con 465 datos espaciados 2 km.

Primeramente vamos a aproximar la topografía de la cuenca Laguna Salada mediante un polinomio de cuarto grado que depende de las variables x e y . Este polinomio se ha graficado en la figura 6.82 sobre el mapa de isolíneas de la topografía de la subcuenca principal de la Laguna Salada.

Como en el caso anterior, vamos a suponer que el cuerpo que se va a modelar tiene un contraste de densidad constante de valor $\mathbf{Dr} = -0.37 \text{ g/cm}^3$, que permanecerá invariable a lo largo del proceso de inversión. Por tanto, se van a calcular un total de 14 parámetros que definen la estructura del cuerpo anómalo, diez de ellos son los coeficientes del polinomio (5.10), que nos definen la frontera inferior del cuerpo, y los otros cuatro representan los planos laterales que limitan la estructura. En total vamos a calcular $N = 14$ parámetros con $M = 465$ datos, lo cual constituye un problema sobredeterminado. El vector de parámetros para este caso es de la forma:

$$\mathbf{p} = (p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{16}, p_{17}, p_{18}, p_{19}, p_{20}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}) \quad (6.8)$$

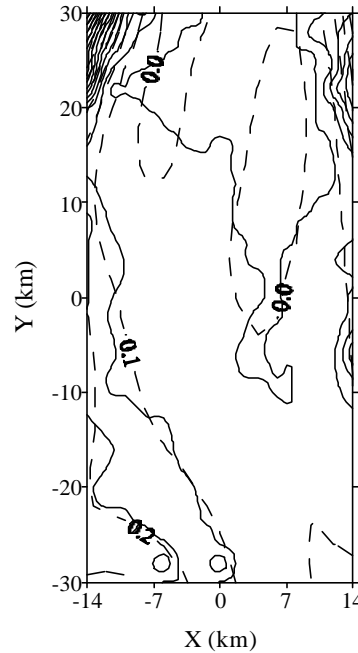


FIGURA 6.82. Las isólineas sólidas representan la topografía de la zona de la subcuenca principal de la Laguna Salada. Las isólineas discontinuas representan el polinomio de cuarto grado que ajusta la topografía. Los valores de igual altura en ambos casos vienen dados en km.

El modelo inicial, con el que comienza el proceso iterativo, se va a construir a partir del modelo de estructura de la figura 6.39 obtenido en el caso bidimensional, esto es, la frontera inferior del cuerpo va a venir dada por el polinomio $l_2(x,y) = 2.45 + 0.13x - 0.0143x^2 - 0.0008x^3$. Las fronteras laterales en dirección del eje x son $x_1 = -12$ km y $x_2 = 12$ km, y las fronteras laterales en dirección del eje y son $y_1 = -25$ km y $y_2 = 25$ km. La estructura de este modelo y la anomalía gravimétrica que produce se puede ver en la figura 6.83.

Para resolver el problema de inversión se ha realizado un proceso de 200 iteraciones. En la figura 6.84 se presenta la evolución del desajuste a lo largo de todas esas iteraciones. Podemos ver que el desajuste decae de manera continua y que a partir de la iteración 50 tiende a converger hacia el valor $q_s = 2330$. A partir de la iteración número 109 los valores de los parámetros apenas presentan variaciones a partir de la cuarta cifra decimal, indicando que hemos llegado a una posible solución del problema. Por tanto, vamos a considerar el modelo alcanzado en dicha iteración, con $q_s = 2330.2$ y $\mathbf{b}^{-1} = 1165.1$, como el modelo resultante de nuestro proceso de inversión, el cuál se presenta en la figura 6.85. Como podemos observar, el modelo tiene una estructura geométrica de semigraben con una profundidad máxima de 2.32 km hacia su margen derecha, lo cual es coherente con los modelos obtenidos en el estudio bidimensional de la cuenca.

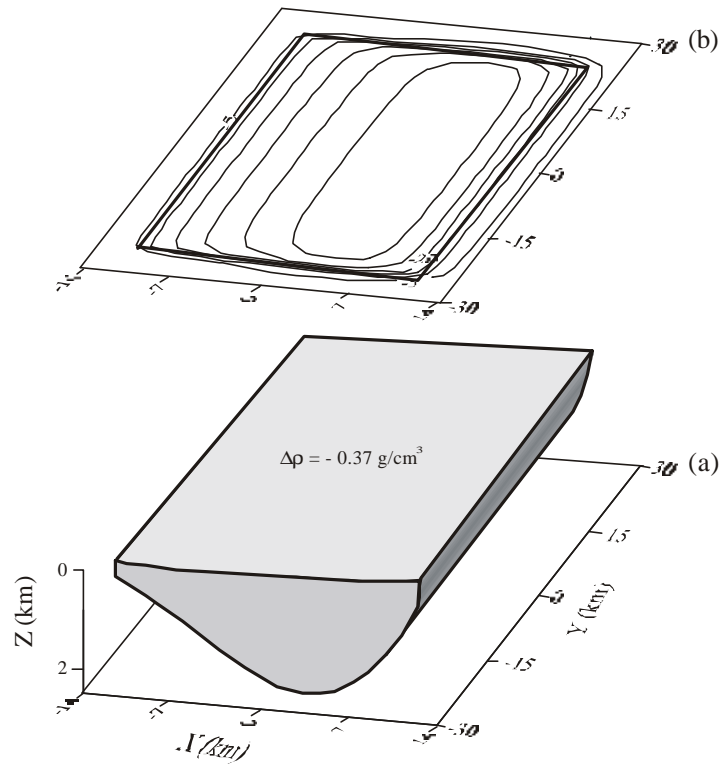


FIGURA 6.83. (a) Fuente anómala utilizada como modelo inicial en el proceso de inversión para el estudio de los datos de la anomalía residual isostática de la cuenca Laguna Salada. (b) Anomalía gravimétrica producida por la fuente (a). Las isolíneas de la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal. La línea resaltada representa la posición de la fuente con respecto a la malla de datos.

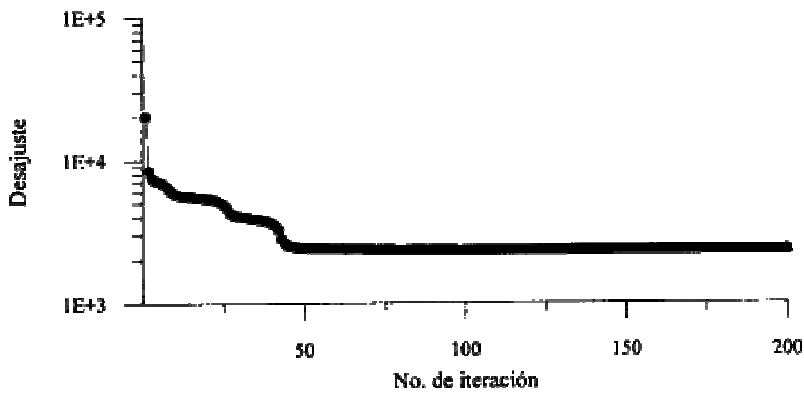


FIGURA 6.84. Evolución del desajuste q_s .

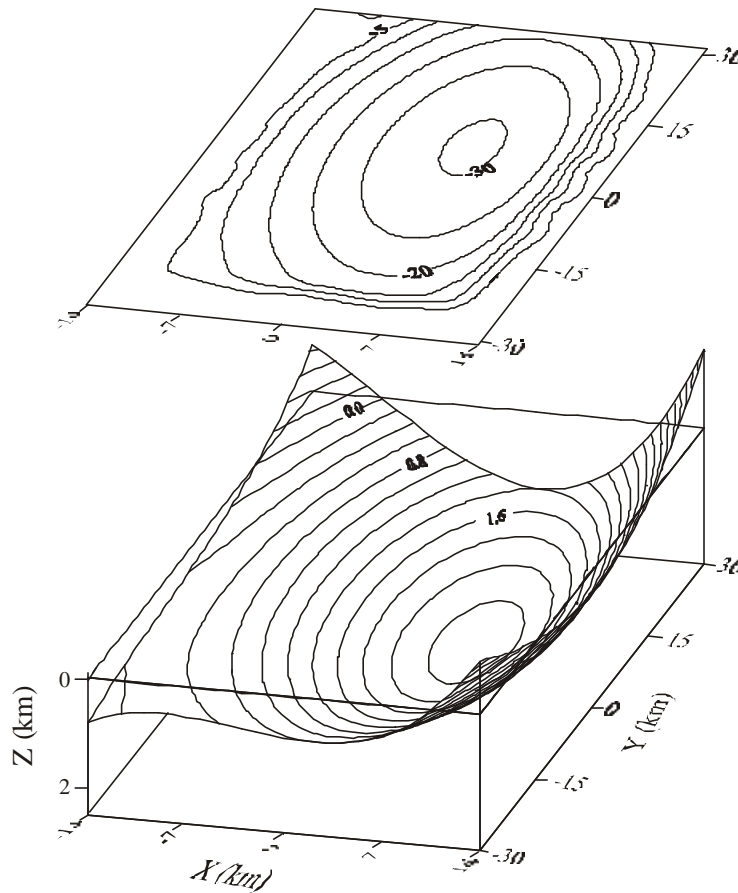


FIGURA 6.85. (a) Modelo resultante para la subcuenca principal de la Laguna Salada considerando una fuente anómala limitada superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x e y , con un contraste de densidad constante de valor -0.37 g/cm^3 . Las isolíneas de igual profundidad están espaciadas cada 0.2 km. (b) Anomalía gravimétrica producida por el modelo (a). Las isolíneas de la anomalía gravimétrica vienen expresadas en mGal.

Al igual que en el caso 1, podemos ver que el valor del desajuste es bastante mayor que la tolerancia permitida $T = N = 465$. Esto se debe a las diferencias que hay entre la anomalía gravimétrica del modelo resultante y los datos de gravedad, principalmente en los bordes de la anomalía. Estas diferencias se pueden ver en la figura 6.86, donde se presenta el residual del problema. podemos ver que en dichos bordes el máximo valor del residual es del orden de 7 mGal.

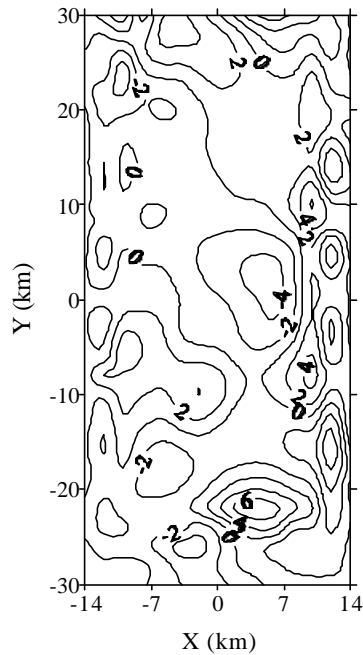


FIGURA 6.86. Residual obtenido al comparar los datos de gravedad del problema y la anomalía gravimétrica del modelo resultante en el proceso de inversión.

La varianza residual para este caso es $\hat{S} = 5.2 \text{ mGal}^2$. Con este valor calculamos las matrices de resolución y covarianza a partir de las ecuaciones (1.55) y (1.63), respectivamente. En la figura 6.87 podemos ver la primera, que nos muestra que los diez parámetros de la frontera inferior tienen muy buena resolución, mientras que los parámetros de las fronteras laterales presentan una resolución muy baja. En la tabla 6.35 se presentan los valores numéricos de los elementos de la matriz de covarianza cuya diagonal principal nos proporciona las varianzas de los parámetros. Calculando la raíz cuadrada de las mismas obtenemos las desviaciones estándar correspondientes con los que obtenemos las incertidumbres de los parámetros suponiendo un intervalo de confianza $\pm 2.58 \mathbf{s}$ (99%). En la tabla 6.36 se pueden ver los valores numéricos de los parámetros del modelo junto con dichas incertidumbres. Hay que destacar que el parámetro p_{24} presenta un valor mayor de 30, esto es, la frontera y_2 del modelo resultante se encuentra situada fuera de los límites de la malla de datos, de ahí que este parámetro sea el que tenga peor resolución de todos.

La matriz de correlación de los parámetros se presenta en la figura 6.88. En dicha figura podemos ver que, en general, existe correlación entre los parámetros de la frontera inferior y que los parámetros de las fronteras laterales no tienen correlación entre sí o con el resto de parámetros.

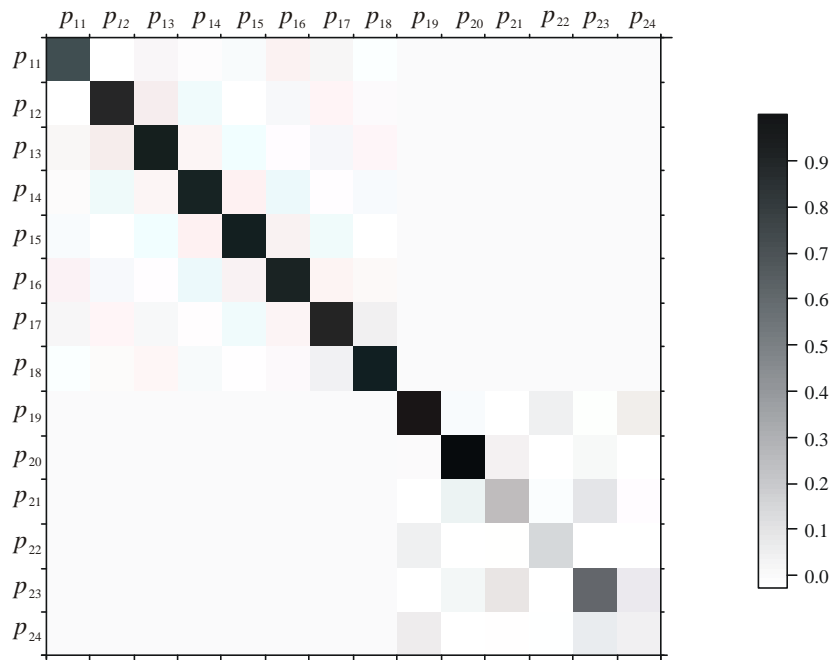


FIGURA 6.87. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	p_{18}	p_{19}	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	
9.457 10⁻⁴	5.927 10 ⁻⁵	-2.167 10 ⁻⁵	5.015 10 ⁻⁷	-1.080 10 ⁻⁵	-2.071 10 ⁻⁶	1.682 10 ⁻⁷	-3.966 10 ⁻⁸	-5.817 10 ⁻⁷	5.290 10 ⁻⁸	-7.415 10 ⁻⁸	-2.366 10 ⁻⁵	-3.218 10 ⁻⁵	7.088 10 ⁻⁷	p_{11}
	2.049 10⁻⁴	1.229 10 ⁻⁶	5.948 10 ⁻⁷	-1.742 10 ⁻⁶	-1.825 10 ⁻⁸	-1.542 10 ⁻⁸	-1.085 10 ⁻⁷	-1.899 10 ⁻⁶	-1.240 10 ⁻⁹	-3.389 10 ⁻⁶	8.903 10 ⁻⁷	-6.636 10 ⁻⁶	9.680 10 ⁻⁸	p_{12}
		2.834 10⁻⁵	-3.533 10 ⁻⁸	2.990 10 ⁻⁸	2.806 10 ⁻⁷	-1.222 10 ⁻⁷	2.035 10 ⁻⁹	-2.794 10 ⁻⁸	-4.421 10 ⁻⁸	4.273 10 ⁻⁶	5.317 10 ⁻⁷	6.220 10 ⁻⁶	-1.742 10 ⁻⁸	p_{13}
			1.070 10⁻⁷	-3.960 10 ⁻⁹	-2.990 10 ⁻⁹	2.661 10 ⁻⁹	-3.092 10 ⁻⁹	-1.436 10 ⁻⁹	-2.592 10 ⁻¹¹	3.161 10 ⁻⁷	-7.257 10 ⁻⁸	3.102 10 ⁻⁸	4.422 10 ⁻¹⁰	p_{14}
				5.966 10⁻⁷	-3.793 10 ⁻⁸	-7.175 10 ⁻⁹	-1.139 10 ⁻⁹	3.280 10 ⁻⁸	9.451 10 ⁻¹⁰	9.382 10 ⁻⁷	-7.759 10 ⁻⁷	-9.932 10 ⁻⁷	-1.376 10 ⁻⁸	p_{15}
					2.582 10⁻⁸	2.242 10 ⁻¹⁰	4.253 10 ⁻¹⁰	-1.657 10 ⁻⁹	-9.935 10 ⁻¹⁰	-1.193 10 ⁻⁷	1.425 10 ⁻⁷	9.294 10 ⁻⁷	-2.010 10 ⁻⁹	p_{16}
						2.717 10⁻⁹	-2.566 10 ⁻¹¹	2.343 10 ⁻¹⁰	-1.200 10 ⁻¹¹	-1.505 10 ⁻⁷	-2.519 10 ⁻⁹	4.557 10 ⁻⁸	-1.483 10 ⁻¹⁰	p_{17}
							4.537 10⁻¹⁰	-4.784 10 ⁻¹¹	-7.340 10 ⁻¹²	3.010 10 ⁻⁸	1.334 10 ⁻⁸	1.196 10 ⁻⁹	1.025 10 ⁻¹⁰	p_{18}
								2.337 10⁻⁸	4.992 10 ⁻¹¹	-9.787 10 ⁻⁸	-1.224 10 ⁻⁷	6.580 10 ⁻⁸	-2.087 10 ⁻⁹	p_{19}
									1.085 10⁻¹⁰	3.121 10 ⁻⁹	-2.305 10 ⁻⁹	-4.389 10 ⁻⁸	8.546 10 ⁻¹¹	p_{20}
										8.995 10⁻⁴	-1.100 10 ⁻⁵	2.551 10 ⁻⁶	1.404 10 ⁻⁶	p_{21}
											4.544 10⁻⁴	8.462 10 ⁻⁶	3.732 10 ⁻⁶	p_{22}
												1.107 10⁻³	-1.233 10 ⁻⁶	p_{23}
													2.538 10⁻⁶	p_{24}

TABLA 6.35. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

FRONTERA INFERIOR	FRONTERAS LATERALES
$p_{11} = 2.03 \pm 0.08 \text{ km}$	$p_{21} = -11.91 \pm 0.08 \text{ km}$
$p_{12} = 0.09 \pm 0.04$	$p_{22} = 11.94 \pm 0.06 \text{ km}$
$p_{13} = 0.022 \pm 0.014$	$p_{23} = -23.96 \pm 0.09 \text{ km}$
$p_{14} = 0.0007 \pm 0.0008 \text{ km}^{-1}$	$p_{24} = 32.486 \pm 0.004 \text{ km}$
$p_{15} = -0.008 \pm 0.002 \text{ km}^{-1}$	
$p_{16} = -0.0011 \pm 0.0004 \text{ km}^{-1}$	
$p_{17} = -0.00014 + 0.00013 \text{ km}^{-2}$	
$p_{18} = 0.-0.00005 \pm 0.00006 \text{ km}^{-2}$	
$p_{19} = -0.0005 \pm 0.0004 \text{ km}^{-2}$	
$p_{20} = -0.00002 \pm 0.00003 \text{ km}^{-2}$	

TABLA 6.36. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

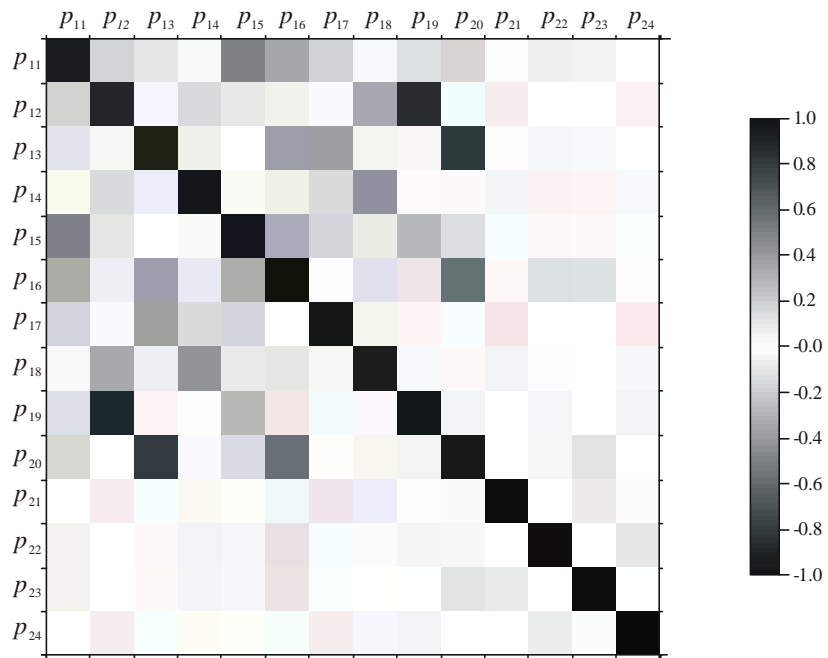


FIGURA 6.88. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	P_{19}	P_{20}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}	
1.000 10⁺⁰	1.346 10 ⁺¹	-1.324 10 ⁺¹	4.985 10 ⁻²	-4.548 10 ⁻¹	-4.191 10 ⁻¹	1.049 10 ⁻¹	-6.055 10 ⁻²	-1.237 10 ⁻¹	1.651 10 ⁻¹	-8.000 10 ⁻⁵	-3.610 10 ⁻²	-3.145 10 ⁻²	1.447 10 ⁻²	p_{11}
	1.000 10⁺⁰	1.613 10 ⁻²	1.270 10 ⁻¹	-1.575 10 ⁻¹	-7.932 10 ⁻³	-2.067 10 ⁻²	-3.559 10 ⁻¹	-8.680 10 ⁻¹	-8.319 10 ⁻³	-7.895 10 ⁻³	2.918 10 ⁻³	-1.393 10 ⁻²	4.245 10 ⁻³	p_{12}
		1.000 10⁺⁰	-2.029 10 ⁻²	7.271 10 ⁻³	3.280 10 ⁻¹	-4.404 10 ⁻¹	1.795 10 ⁻²	-3.433 10 ⁻²	-7.972 10 ⁻¹	2.676 10 ⁻²	4.686 10 ⁻³	3.511 10 ⁻²	-2.054 10 ⁻³	p_{13}
			1.000 10⁺⁰	-1.567 10 ⁻²	-5.687 10 ⁻²	1.560 10 ⁻¹	-4.437 10 ⁻¹	-2.872 10 ⁻²	-7.606 10 ⁻³	3.222 10 ⁻²	-1.041 10 ⁻²	2.850 10 ⁻³	8.490 10 ⁻⁴	p_{14}
				1.000 10⁺⁰	-3.056 10 ⁻¹	-1.782 10 ⁻¹	-6.924 10 ⁻²	2.778 10 ⁻¹	1.175 10 ⁻¹	4.050 10 ⁻²	-4.713 10 ⁻²	-3.865 10 ⁻²	-1.118 10 ⁻²	p_{15}
					1.000 10⁺⁰	2.676 10 ⁻²	1.242 10 ⁻¹	-6.746 10 ⁻²	-5.936 10 ⁻¹	-2.475 10 ⁻²	4.160 10 ⁻²	1.738 10 ⁻¹	-7.850 10 ⁻³	p_{16}
						1.000 10⁺⁰	-2.311 10 ⁻²	2.940 10 ⁻²	-2.211 10 ⁻²	-9.626 10 ⁻²	-2.267 10 ⁻³	2.627 10 ⁻²	-1.786 10 ⁻³	p_{17}
							1.000 10⁺⁰	-1.469 10 ⁻²	-3.308 10 ⁻²	4.712 10 ⁻²	2.938 10 ⁻²	1.687 10 ⁻³	3.020 10 ⁻³	p_{18}
								1.000 10⁺⁰	3.135 10 ⁻²	-2.135 10 ⁻²	-3.755 10 ⁻²	1.294 10 ⁻²	-8.571 10 ⁻³	p_{19}
									1.000 10⁺⁰	9.989 10 ⁻³	-1.038 10 ⁻²	-1.266 10 ⁻¹	5.151 10 ⁻³	p_{20}
										1.000 10⁺⁰	-1.720 10 ⁻²	2.556 10 ⁻³	2.939 10 ⁻²	p_{21}
											1.000 10⁺⁰	1.193 10 ⁻²	1.099 10 ⁻¹	p_{22}
												1.000 10⁺⁰	-2.327 10 ⁻²	p_{23}
													1.000 10⁺⁰	p_{24}

TABLA 6.37. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

Con el modelo resultante de la figura 6.85 hemos obtenido la estructura geométrica de un cuerpo de densidad constante que podría explicar la anomalía gravimétrica registrada sobre la subcuenca principal de la Laguna Salada. A continuación vamos a considerar que los parámetros de la tabla 6.36 que definen la estructura de dicho cuerpo van a permanecer fijos y vamos a suponer que el contraste de densidad del cuerpo no es constante, sino que va a venir definido por el polinomio de segundo grado en las variables x , y y z dado por la expresión (5.2). Como ya hicimos para el caso en 2D, vamos a considerar fijo el término independiente de dicho polinomio en todo el proceso de inversión, con un valor $p_1 = -0.67 \text{ g/cm}^3$, puesto que es la medida del contraste de densidad promedio correspondiente al material sedimentario no consolidado depositado en la superficie de la cuenca, el cual es conocido. Por tanto, las incógnitas que se deben calcular son los otros nueve coeficientes que determinan el polinomio (5.2), por tanto, el vector de parámetros tiene nueve componentes:

$$\mathbf{p} = (p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}) \quad (6.9)$$

que deben ser calculadas con los 465 datos de la malla 6.75(b).

Se han realizado varios procesos de inversión con diferentes modelos iniciales para el contraste de densidad. En todos ellos aparece el mismo tipo de comportamiento, en el que el contraste de densidad es negativo y está distribuido en capas casi horizontales cuyos valores son decrecientes en magnitud y tienden hacia el valor de 0 mGal, sin llegar a alcanzarlo, desde el nivel de la topografía hasta una profundidad aproximada de 1 a 1.5 km de profundidad. A partir de este punto, el contraste de densidad sigue distribuido en capas horizontales, pero su magnitud va creciendo a medida que aumenta la profundidad, lo cual no es lógico en este tipo de estructuras. Este comportamiento nos está indicando que el coeficiente p_{10} del término z^2 del polinomio (5.2) está dominando el comportamiento del modelo para el contraste de densidad, impidiendo la obtención de un modelo satisfactorio. Por tanto, haciendo uso de la flexibilidad que tiene el método de inversión desarrollado en este trabajo, para decidir cuáles de los parámetros deben permanecer constantes y cuáles deben evolucionar a través de las iteraciones, vamos a tomar la decisión de mantener dicho coeficiente fijo y con el valor $p_{10} = 0 \text{ km}^{-2}$, y así volver a realizar la inversión. En este caso vamos a elegir un modelo inicial para el contraste de densidad basado en el modelo bidimensional obtenido para la subcuenca principal de la Laguna Salada, que se puede ver en la figura 6.43. Por tanto, el polinomio que describe el contraste de densidad del modelo inicial es $\mathbf{Dr} = -0.67 + 0.006x + 0.11z + 0.024xz + 0.0024x^2$ donde, como vemos, el término en z^2 es nulo y va a permanecer así durante el proceso iterativo de inversión. Por tanto, ahora el vector de parámetros que hay que calcular tiene un total de ocho componentes:

$$\mathbf{p} = (p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9) \quad (6.10)$$

Para calcular su solución se va a realizar un total de 200 iteraciones. En la figura 6.89 se presenta la evolución del desajuste. Podemos ver que a partir de la cuarta iteración el desajuste alcanza el valor $q_s = 2311.3$, permaneciendo constante hasta el final. Lo mismo ocurre con los ocho parámetros calculados, indicando que se ha obtenido un mínimo en el espacio de soluciones que puede ser una posible solución para el problema de inversión.

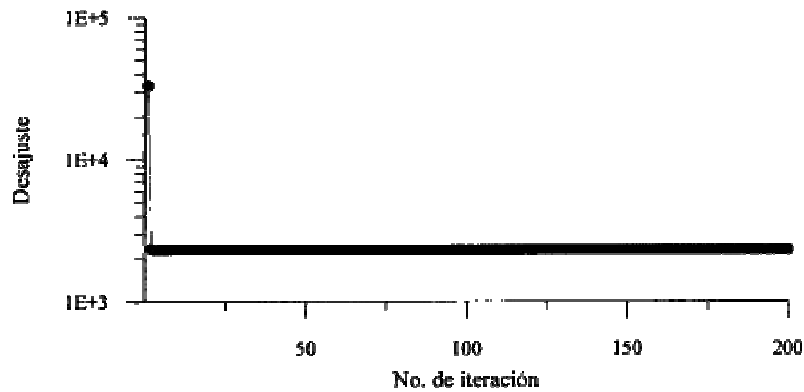


FIGURA 6.89. Evolución del desajuste q_s .

En la figura 6.90 se presentan tres secciones del modelo de estructura y contraste de densidad de la fuente anómala, obtenido para la subcuenca principal de la Laguna Salada, en distintas posiciones a lo largo del eje y , para mostrar el comportamiento del contraste de densidad correspondiente. Podemos ver que el modelo presenta el basculamiento de las capas sedimentarias de la cuenca de acuerdo a la estructura de semigraben esperada para la Laguna Salada. También se puede ver que, en el margen oriental de la estructura, las isolíneas son casi verticales, indicando un cambio de facies subvertical para esta zona de la cuenca. Según todo lo anterior, el modelo en 3D obtenido corrobora los modelos bidimensionales calculados para la cuenca Laguna Salada.

La figura 6.91(a) nos muestra la anomalía gravimétrica del modelo resultante y la figura 6.91(b) presenta el residual obtenido al comparar dicha anomalía con los datos de gravedad de la figura 6.75(b). El máximo valor del residual es de 7 mGal y se encuentra en los bordes del mapa.

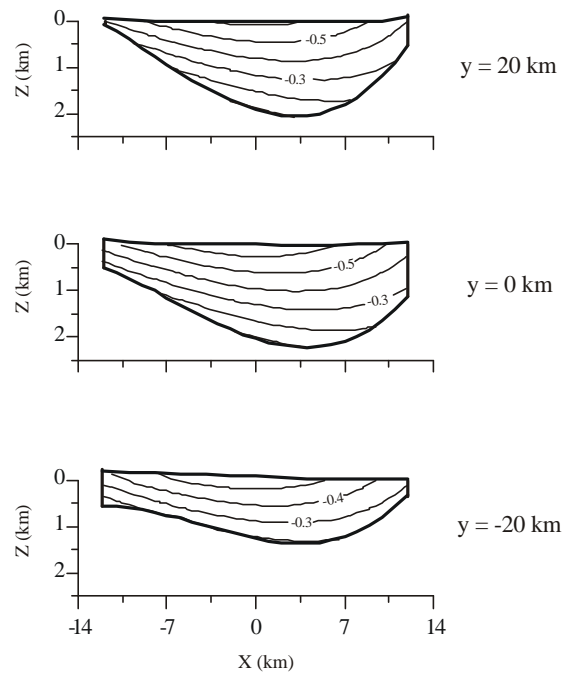


FIGURA 6.90. Tres perfiles de estructura y densidad para el modelo resultante para el caso de una fuente limitada superior e inferiormente por funciones continuas de las variables x e y .

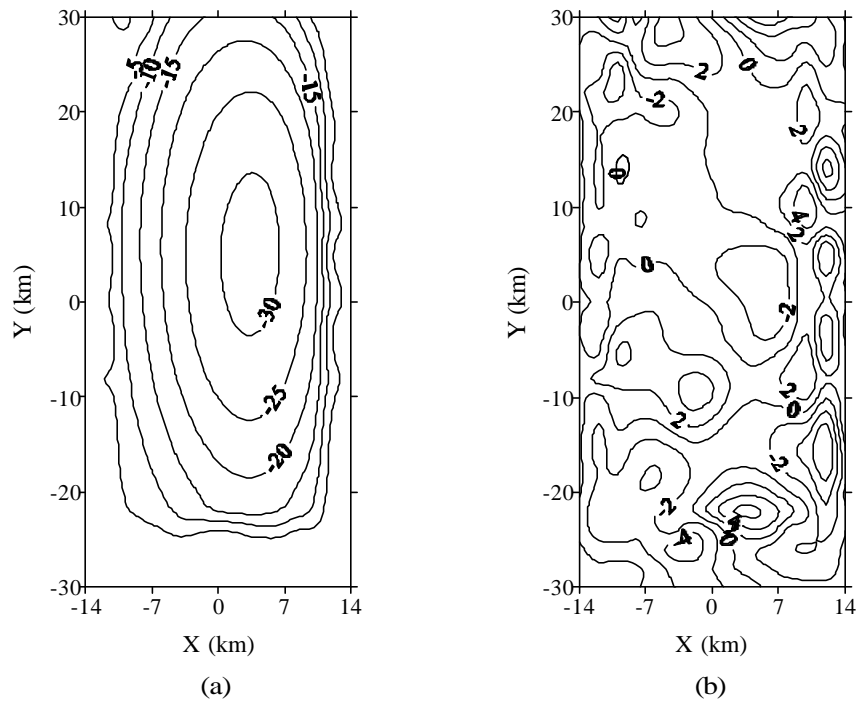


FIGURA 6.91. (a) Anomalía gravimétrica correspondiente al modelo resultante en el proceso de inversión. Las líneas resaltadas representan las posiciones de los perfiles de la figura 6.90. (b) Residual obtenido al comparar los datos de gravedad del problema y la anomalía gravimétrica (a).

La matriz de resolución de este problema se puede ver en la figura 6.92, que ha sido calculada a partir de la ecuación (1.55) donde la varianza residual es $\hat{S} = 5.1$ mGal. Como podemos ver en dicha figura, la matriz de resolución es casi la matriz identidad, lo que indica que los ocho parámetros tienen una resolución muy buena.

En la tabla 6.38 se presentan los valores numéricos de los elementos de la matriz de covarianza cuya diagonal principal nos proporciona las varianzas de los parámetros. En la tabla 6.39 se muestran las soluciones de los parámetros junto con las incertidumbres correspondientes calculadas suponiendo un intervalo de confianza $\pm 2.58 \sigma$.

La matriz de correlación se presenta en la figura 6.93 y sus elementos en la tabla 6.40. Podemos ver que existe correlación entre todos los parámetros en mayor o menor medida, destacando las correlaciones entre los parámetros p_2 y p_7 y entre los parámetros p_3 y p_6 .

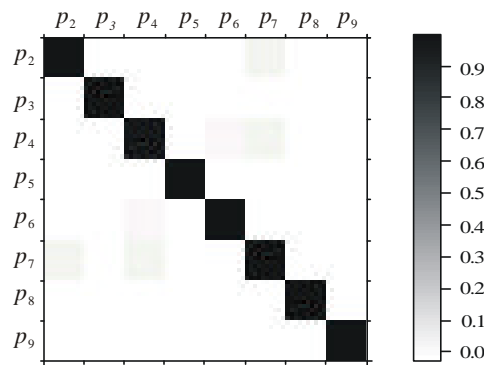


FIGURA 6.92. Matriz de resolución de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
$3.013 \cdot 10^{-5}$	$1.551 \cdot 10^{-6}$	$2.968 \cdot 10^{-5}$	$6.854 \cdot 10^{-8}$	$-1.365 \cdot 10^{-6}$	$-4.333 \cdot 10^{-5}$	$4.076 \cdot 10^{-7}$	$-4.918 \cdot 10^{-8}$	p_2
	$4.327 \cdot 10^{-6}$	$9.419 \cdot 10^{-6}$	$5.160 \cdot 10^{-8}$	$-5.659 \cdot 10^{-6}$	$-1.895 \cdot 10^{-6}$	$-5.479 \cdot 10^{-8}$	$-4.708 \cdot 10^{-9}$	p_3
		$1.377 \cdot 10^{-4}$	$2.803 \cdot 10^{-7}$	$-1.295 \cdot 10^{-5}$	$-4.739 \cdot 10^{-5}$	$-4.956 \cdot 10^{-7}$	$-1.419 \cdot 10^{-7}$	p_4
			$9.435 \cdot 10^{-9}$	$-9.235 \cdot 10^{-8}$	$-1.410 \cdot 10^{-7}$	$2.642 \cdot 10^{-10}$	$-1.588 \cdot 10^{-11}$	p_5
				$7.871 \cdot 10^{-6}$	$1.551 \cdot 10^{-6}$	$1.027 \cdot 10^{-7}$	$-3.186 \cdot 10^{-9}$	p_6
					$6.604 \cdot 10^{-5}$	$-7.662 \cdot 10^{-7}$	$7.748 \cdot 10^{-8}$	p_7
						$4.987 \cdot 10^{-8}$	$-1.690 \cdot 10^{-9}$	p_8
							$8.335 \cdot 10^{10}$	p_9

TABLA 6.38. Elementos de la matriz de covarianza de los parámetros.

DENSIDAD
$p_2 = 0.000 \pm 0.014 \text{ km}$
$p_3 = -0.002 \pm 0.005$
$p_4 = 0.29 \pm 0.03$
$p_5 = 0.0000 \pm 0.0003 \text{ km}^{-1}$
$p_6 = -0.001 \pm 0.007 \text{ km}^{-1}$
$p_7 = -0.01 \pm 0.02 \text{ km}^{-1}$
$p_8 = 0.0016 \pm 0.0006 \text{ km}^{-2}$
$p_9 = -0.00021 \pm 0.00007 \text{ km}^{-2}$

TABLA 6.39. Parámetros del modelo resultante e incertidumbres correspondientes.

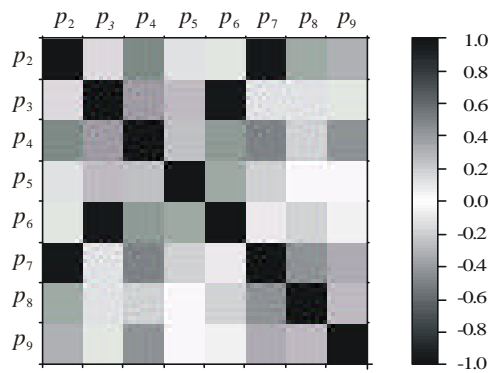


FIGURA 6.93. Matriz de correlación de los parámetros de la fuente.

p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
$1.000 \cdot 10^0$	$1.358 \cdot 10^{-1}$	$4.608 \cdot 10^{-1}$	$1.285 \cdot 10^{-1}$	$-8.864 \cdot 10^{-2}$	$-9.712 \cdot 10^{-1}$	$3.325 \cdot 10^{-1}$	$-3.104 \cdot 10^{-1}$	p_2
	$1.000 \cdot 10^0$	$3.858 \cdot 10^{-1}$	$2.554 \cdot 10^{-1}$	$-9.697 \cdot 10^{-1}$	$-1.121 \cdot 10^{-1}$	$-1.179 \cdot 10^{-1}$	$-7.839 \cdot 10^{-2}$	p_3
		$1.000 \cdot 10^0$	$2.459 \cdot 10^{-1}$	$-3.935 \cdot 10^{-1}$	$-4.969 \cdot 10^{-1}$	$-1.891 \cdot 10^{-1}$	$-4.188 \cdot 10^{-1}$	p_4
			$1.000 \cdot 10^0$	$-3.389 \cdot 10^{-1}$	$-1.786 \cdot 10^{-1}$	$1.218 \cdot 10^{-2}$	$-5.663 \cdot 10^{-3}$	p_5
				$1.000 \cdot 10^0$	$6.804 \cdot 10^{-2}$	$1.640 \cdot 10^{-1}$	$-3.933 \cdot 10^{-2}$	p_6
					$1.000 \cdot 10^0$	$-4.221 \cdot 10^{-1}$	$3.302 \cdot 10^{-1}$	p_7
						$1.000 \cdot 10^0$	$-2.622 \cdot 10^{-1}$	p_8
							$1.000 \cdot 10^0$	p_9

TABLA 6.40. Elementos de la matriz de correlación de los parámetros.

6.2.3.3. *Discusión*

La inversión de los datos del mapa de anomalías isostáticas residuales, para la cuenca principal de la Laguna Salada, se ha realizado a partir de los resultados obtenidos en 2D para el perfil *PI* y para cada tipo de fuente anómala tridimensional descrito en los Capítulos III y V. Esto supone la introducción en el modelo inicial de una serie de tendencias que ayudan en la búsqueda de la solución del problema mediante el proceso iterativo de Marquardt-Levenberg. Por la gran cantidad de parámetros que participan en cada caso, se ha hecho uso de la flexibilidad que posee el método de inversión para decidir el número de parámetros de la fuente que van a permanecer fijos y los que van a evolucionar a lo largo de todo el proceso. Esto va a disminuir la inestabilidad inherente en los procesos de inversión, puesto que se van a reducir las dimensiones del espacio de soluciones y también el número de soluciones posibles para cada caso.

El modelo de fuente con topografía y frontera inferior planas y horizontales no es un modelo que se pueda aplicar satisfactoriamente a este tipo de estructuras, en las que la frontera inferior está lejos de ser plana. Esto es debido a que el método va a llegar a un compromiso entre la forma de las fronteras laterales y la posición de la frontera inferior del modelo, para que su efecto gravimétrico se ajuste lo mejor posible a los datos de gravedad. Debido a esta limitación, en este caso no se ha calculado la distribución del contraste de densidad. No obstante, el modelo obtenido para la estructura, suponiendo un contraste de densidad constante, nos da una idea satisfactoria de la forma de esta cuenca en su parte central, que es compatible con el resultado obtenido para el modelo correspondiente en dos dimensiones del perfil *PI*.

En cuanto al modelo de fuente con fronteras laterales planas y verticales, observamos que la forma de la frontera inferior nos muestra la estructura de un semigraben con mayor subsidencia cerca de la margen oriental, con una profundidad máxima del orden de 2.5 km. Esto concuerda con los resultados obtenidos en el estudio 2D del perfil *PI*. También se observa que la forma de la estructura es más estrecha en la zona NNW que en la SSE, donde es más ancha pero menos profunda. Por otro lado, las isolíneas del contraste de densidad también presentan la forma de un semigraben, con el basculamiento de las capas sedimentarias hacia la margen oriental de la subcuenca, presentando una variación en profundidad muy suave, desde unos -0.67 g/cm^3 en superficie, hasta alcanzar -0.1 g/cm^3 cerca de la frontera inferior. Por otro lado, al igual que ocurría en el modelo bidimensional para esta subcuenca, se observa una tendencia vertical de los sedimentos en la margen oriental de la estructura, lo que sugiere un cambio de facies subvertical similar al descrito por Dorsey y Martín-Barajas (1999).

También hay que destacar que, para el modelo resultante, el residual obtenido presenta valores altos sobre todo en las zonas periféricas del área de estudio. Esto podría llevar a rechazar el modelo como solución del problema, pero hay que tener en cuenta que los datos utilizados para la inversión corresponden a una anomalía real, no teórica, en la que las isolíneas presentan una serie de

variaciones que no se pueden modelar satisfactoriamente ni con el polinomio cuadrático que define el contraste de densidad ni con los polinomios de tercer grado que describen las fronteras laterales de la fuente. No obstante, esta limitación no impide que el método nos proporcione un modelo para la subcuenca compatible con la información geológica y geofísica disponible, por lo que este modelo resultante se puede considerar como un modelo satisfactorio para la subcuenca principal de la Laguna Salada.

Capítulo VII:

CONCLUSIONES Y RESULTADOS

INTRODUCCION

A continuación vamos a presentar los resultados y conclusiones más importantes obtenidos en este trabajo, agrupados en las tres partes principales en las que se divide esta Tesis. En el primer apartado se agrupan los resultados y conclusiones de la metodología del problema directo, y en el segundo apartado se presentan los del problema inverso, tanto en 2D como en 3D. El tercer apartado contiene los resultados geofísicos obtenidos al aplicar el método de esta Tesis a los datos del glaciar Salmon y a los de la cuenca Laguna Salada, así como las conclusiones a las que se ha llegado mediante el procedimiento de trabajo seguido.

7.1. PROBLEMA DIRECTO

- En este trabajo se presenta el desarrollo de las expresiones matemáticas para un nuevo método de modelado directo de anomalías gravimétricas en 2D y 3D, mediante métodos analíticos y numéricos de integración, utilizando varios tipos de fuente cuyas geometrías y distribuciones de densidad están descritas mediante funciones continuas.
- En particular, para fuentes bidimensionales se han desarrollado dos tipos de modelo, uno de ellos presenta las fronteras superior e inferior planas y horizontales, mientras que las dos fronteras laterales vienen descritas por funciones continuas. En el segundo tipo de modelo las fronteras laterales son planas y verticales, mientras que tanto la frontera superior como la inferior vienen dadas por funciones continuas. En ambos casos, la densidad puede variar con la profundidad, con la distancia horizontal o con respecto a ambas simultáneamente.
- Para fuentes en tres dimensiones se han desarrollado tres tipos de modelos. Dos de ellos presentan tanto la frontera superior como la inferior planas y horizontales, y vienen limitados lateralmente por cuatro fronteras, dos de ellas son planas y verticales y las otras dos están descritas por funciones continuas. El tercer tipo de modelo está limitado lateralmente por cuatro planos verticales y las fronteras superior e inferior son funciones continuas. Al igual que para fuentes bidimensionales, la densidad puede variar con la profundidad, con la distancia horizontal o con respecto a ambas simultáneamente.

- En este método se ha supuesto que los techos de las estructuras de las fuentes anómalas coinciden con la topografía. Aunque, en algunos casos, esta coincidencia produce la aparición de singularidades en los puntos donde se encuentra el observador, estas singularidades se pueden tratar de manera eficaz mediante el método numérico de integración de Gauss-Legendre, haciendo posible el cálculo del efecto gravimétrico de las fuentes.
- Las funciones continuas de carácter suave, en particular las polinómicas, permiten modelar estructuras geológicas de diversas formas complejas que no presenten cambios bruscos en su interior. Esto le hace ser un método idóneo para el modelado de cuencas sedimentarias.

7.2. PROBLEMA INVERSO

- Haciendo uso de los diferentes tipos de fuente presentados en esta Tesis, para el caso particular de funciones polinómicas se han abordado los correspondientes problemas inversos, utilizando el conocido método iterativo de inversión de Marquardt-Levenberg.
- Debido a la sencilla parametrización de las funciones polinómicas que describen las fuentes, el número de parámetros a calcular no es elevado, incluso mucho menor que el número de datos utilizados, haciendo que el método de inversión sea muy rápido de ejecutar en comparación con otros métodos tradicionales en los que se utiliza la teselación de la región anómala.
- En los ejemplos teóricos utilizados para ilustrar el método de inversión descrito en este trabajo se puede ver que este método es muy robusto porque es capaz de obtener la solución real de problema a pesar de la inestabilidad inherente en todo proceso de inversión.
- La adición de ruido a los datos de gravedad produce una desviación del modelo resultante con respecto al modelo real. No obstante, el método es lo suficientemente robusto como para que la diferencia observada no sea demasiado significativa.
- Los estudios de sensibilidad realizados en cada ejemplo nos muestran que todos los parámetros de los modelos presentan una buena resolución debido a la buena distribución de los datos de gravedad utilizados.
- En todos los casos teóricos se ha visto que existe una solución única para un determinado modelo inicial.

- En general, los parámetros del contraste de densidad presentan mejor resolución que los parámetros de las fronteras de la fuente. De estos últimos, aquéllos relacionados con la frontera inferior del cuerpo son habitualmente los de menor resolución.

- En todos los ejemplos, las matrices de covarianza presentan varianzas pequeñas y las correlaciones existentes entre los parámetros de la fuente suelen presentarse agrupadas. Un grupo está formado, generalmente, por todos los parámetros correspondientes al contraste de densidad, y presentan correlaciones muy altas entre sí. Otro grupo suele estar formado por los parámetros de la estructura y sus correlaciones son algo menores. Las correlaciones existentes entre estos dos conjuntos de parámetros suelen ser escasas y presentan menor intensidad.

7.3. APLICACION A DATOS DE CAMPO

7.3.1. Glaciar Salmon

- Se ha utilizado la anomalía gravimétrica del glaciar Salmon por ser un caso clásico, para validar el método desarrollado en este trabajo y así poder ver las ventajas y las limitaciones que presenta dicho método. Para este caso hemos incorporado la información disponible previamente, acerca de la geometría y el contraste de densidad de la estructura geológica, dentro del proceso de inversión, haciendo uso de la flexibilidad que tiene el método para elegir el número de parámetros que se van a mantener fijos y los que deben ser calculados mediante la inversión. Al disminuir el número de incógnitas del problema, se tiene un mayor número de grados de libertad. El método se hace más estable y más rápido, con lo que se facilita la obtención de una solución lógica para el problema tratado.

- Con este caso hemos podido ver la importancia que tiene la distribución de los datos de gravedad en la región de estudio. Si los datos se encuentran mal distribuidos y no cubren las zonas de máxima sensibilidad, se dificulta la obtención de un modelo resultante satisfactorio.

- Para el glaciar Salmon se ha obtenido una estructura con forma de valle que presenta una profundidad máxima de, aproximadamente, 1 km. Esto está de acuerdo con los resultados geológicos y geofísicos obtenidos por otros autores acerca del glaciar.

7.3.2. Cuenca Laguna Salada

- En este caso se ha vuelto a comprobar que si se utiliza la información disponible para disminuir el número de parámetros-incógnita del problema, se produce una estabilización del método y se obtienen modelos geológicamente razonables.
- Como procedimiento de trabajo es útil obtener un primer modelo con densidad constante en el que se ha calculado la geometría del cuerpo. Después se calcula un segundo modelo, utilizando el modelo anterior como modelo inicial, para obtener el contraste de densidad final del problema. Esta es una forma de separar el cálculo del contraste de densidad (problema lineal) del cálculo de la geometría del cuerpo (problema no lineal) dentro del proceso de inversión.
- Los modelos en 2D para la Laguna Salada nos muestran una estructura de semigraben con mayor subsidencia hacia el margen oriental de la estructura. El modelo calculado mediante el perfil que pasa por el mínimo gravimétrico de la subcuenca principal, indica una profundidad máxima de 2.7 km para esta subcuenca. Para la subcuenca situada al norte, la profundidad máxima calculada es de 2 km.
- Este método es incluso capaz de mostrar el basculamiento de las capas sedimentarias de ambas subcuencas, siguiendo la geometría del semigraben. También aparecen buzamientos subverticales en el margen oriental, lo que puede indicar la existencia de cambios laterales de facies.
- A partir de los resultados obtenidos en los modelos 2D, se ha procedido a estudiar la estructura y distribución de densidades de la subcuenca principal de la Laguna Salada mediante la metodología en 3D. Ha vuelto a ser de gran utilidad el procedimiento seguido en el modelado 2D, en el que primeramente se calcula la estructura suponiendo un contraste de densidad constante, para después calcular dicho contraste en función tanto de la profundidad como de la distancia horizontal. Este procedimiento añade estabilidad al problema y agiliza el proceso de inversión.
- El modelo 3D con topografía y frontera inferior planas no es del todo satisfactorio para la Laguna Salada, puesto que existen importantes variaciones en la profundidad de su estructura en la dirección de su eje longitudinal, las cuales hacen imposible la aproximación de la frontera inferior por un plano.
- El modelo 3D final obtenido para la Laguna Salada con las cuatro fronteras laterales planas, nos muestra una subcuenca principal con forma de semigraben de 2.5 km de profundidad máxima, en consonancia con los modelos bidimensionales. Para esta subcuenca, el basamento aflora, o casi aflora,

en los márgenes oriental y occidental, limitando la cuenca en ambos lados. En la parte central de los extremos NNW y SSE, el basamento asciende sin aflorar hasta 1.4 km y 1 km, respectivamente. En ambas direcciones el material sedimentario presenta continuidad hacia otras subcuencas.

Apéndice A:

CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

INTRODUCCION

A continuación vamos a describir el método de integración que se ha utilizado para calcular la solución numérica de las integrales que se plantean en este trabajo. El método elegido es un caso particular de las Cuadraturas de Gauss: *la Cuadratura de Gauss-Legendre*.

A.1. CUADRATURA DE GAUSS

Supongamos que queremos calcular la integral numérica de la función $f(t)$ con respecto a la variable t en el intervalo $[a, b]$:

$$I(f) = \int_a^b dt f(t) \quad (\text{A.1})$$

Una Cuadratura de Gauss es un método de integración de rápida convergencia (Atkinson, 1989). Realiza una aproximación polinómica de $f(t)$ proporcionando resultados extremadamente precisos en la mayoría de los casos.

La fórmula general de las Cuadraturas Gaussianas es:

$$\int_a^b dt w(t) f(t) = \sum_{j=1}^n w_j f(t_j) + E_n(f) \quad (\text{A.2})$$

donde $w(t)$ es una función peso no negativa e integrable en el intervalo $[a, b]$, y $E_n(f)$ es el error cometido en la integración. Los nodos de integración $\{t_j\}$, situados en el eje de abscisas, y los pesos $\{w_j\}$ se eligen de tal manera que la igualdad de la ecuación (A.2) se cumple para la función $f(t)$ del integrando que puede ser aproximada por un polinomio de grado $2n-1$ o menor, y para que el error $E_n(f)$ sea cero (Atkinson, 1989).

Como se puede apreciar, una característica de las Cuadraturas de Gauss es que las fórmulas de integración son de orden más alto que las de los métodos clásicos (Regla de Simpson, Regla del trapecioide, Fórmulas de Newton-Cotes). Esto es una ventaja siempre que el integrando se pueda

aproximar fácilmente por un polinomio. Otra característica es que, a diferencia de dichos métodos clásicos, en las Cuadraturas de Gauss las abscisas no están igualmente espaciadas.

A.1.1. Cuadratura de Gauss-Legendre para integrales simples

Supongamos que la función peso es $w(t) = 1$. La integral que queremos calcular es la ecuación general (A.1). De esta manera, la ecuación (A.2), para el intervalo de integración $[-1,1]$, queda de la forma:

$$\int_{-1}^1 dt f(t) = \sum_{j=1}^n w_j f(t_j) + E_n \quad (\text{A.3})$$

donde las posiciones de los nodos de integración $\{t_j\}_{j=1,\dots,n} \in [-1,1]$ en el eje de abscisas corresponden a los ceros del polinomio de Legendre de grado n , $P_n(t)$ y los pesos $\{w_j\}_{j=1,\dots,n}$ van a depender de la primera derivada de dichos polinomios según la expresión (Press et al, 1996):

$$w_j = \frac{2}{(1-t_j^2)(P_n'(t_j))^2} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

Así, el integrando es evaluado en n puntos desigualmente espaciados en el intervalo $[-1,1]$. Las ecuaciones (A.3) y (A.4) constituyen el caso especial de la Cuadratura de Gauss denominada *Cuadratura de Gauss-Legendre*.

Para integrales cuyo intervalo de integración sea $[a, b]$ se realiza el cambio de variable:

$$t_j = \frac{b-a}{2} u_j + \frac{b+a}{2} \quad a \leq t_j \leq b \quad , \quad -1 \leq u_j \leq 1 \quad (\text{A.5})$$

Aplicando este cambio a la integral de la expresión (A.1) se obtiene:

$$\int_a^b dt f(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^1 du f\left(\frac{b-a}{2} u + \frac{b+a}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^1 du f(u) \quad (\text{A.6})$$

Con el cambio de variable aplicado, la integral general (A.1) se reduce a una integral evaluada en el intervalo $[-1,1]$ y así podemos aplicar la Cuadratura de Gauss-Legendre.

El número de nodos de integración y de pesos dependerá del grado de precisión que se necesite en cada caso. Los valores de estos nodos y pesos se pueden encontrar en numerosos textos que tratan de la Cuadratura de Gauss-Legendre (Atkinson, 1989; Davis y Polonski, 1972). En este trabajo se han utilizado 32 nodos y 32 pesos, incluidos en la tabla A.1.

Nodos $\mp t_j$	Pesos w_j
0.997263861849481563545	0.007018610009470096600
0.985611511545268335400	0.016274394730905670605
0.964762255587506430774	0.025392065309262059456
0.934906075937739689171	0.034273862913021433103
0.896321155766052123965	0.042835898022226680657
0.849367613732569970134	0.050998059262376176196
0.794483795967942406963	0.058684093478535547145
0.732182118740289680387	0.065822222776361846838
0.663044266930215200975	0.072345794108848506225
0.587715757240762329041	0.078193895787070306472
0.506899908932229390024	0.083311924226946755222
0.421351276130635345364	0.087652093004403811143
0.331868602282127649780	0.091173878695763884713
0.239287362252137074545	0.093844399080804565639
0.144471961582796493485	0.095638720079274859419
0.048307665687738316235	0.096540088514727800567

TABLA A.1. Nodos y pesos para la Cuadratura de Gauss-Legendre (Davis y Polowski, 1972).

Para el caso particular del problema directo en dos dimensiones, en el que la fuente anómala se encuentra limitada superior e inferiormente por funciones continuas de la variable x (sección 2.3), las integraciones con respecto a dicha variable son impropias en la posición del observador (x_0, z_0) para los tres tipos distintos de contraste de densidad, debido a las características de las funciones que se encuentra en los integrandos de las ecuaciones (2.27), (2.36) y (2.43). Un ejemplo de este comportamiento se puede ver en la figura A1 donde se presenta la anomalía gravimétrica para la fuente anómala del

ejemplo de la figura 2.9(a), calculada a partir de la ecuación (2.43) sin tener en cuenta la existencia de las singularidades. Como se puede observar, esta anomalía no tiene un comportamiento suave. En la figura A.2 se presenta la gráfica del primer sumando del integrando de la ecuación (2.43), que es responsable de dicho comportamiento, para una determinada posición del observador.

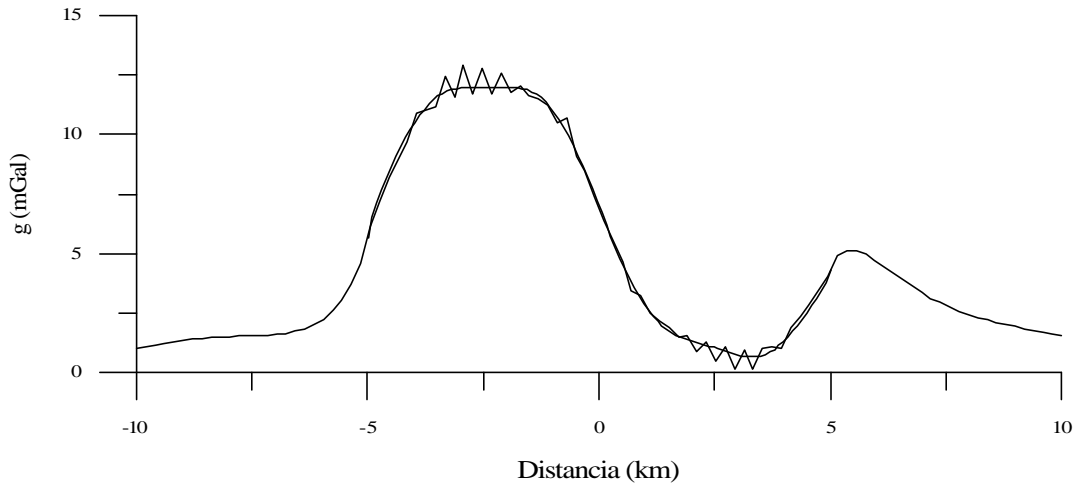


FIGURA A.1. Anomalía gravimétrica de la figura 2.9. La línea más oscura es la anomalía calculada sin tener en cuenta la existencia de singularidades en el integrando de la ecuación (2.43). La línea más clara representa la anomalía calculada evitando las singularidades mediante el método de la expresión (A.7).

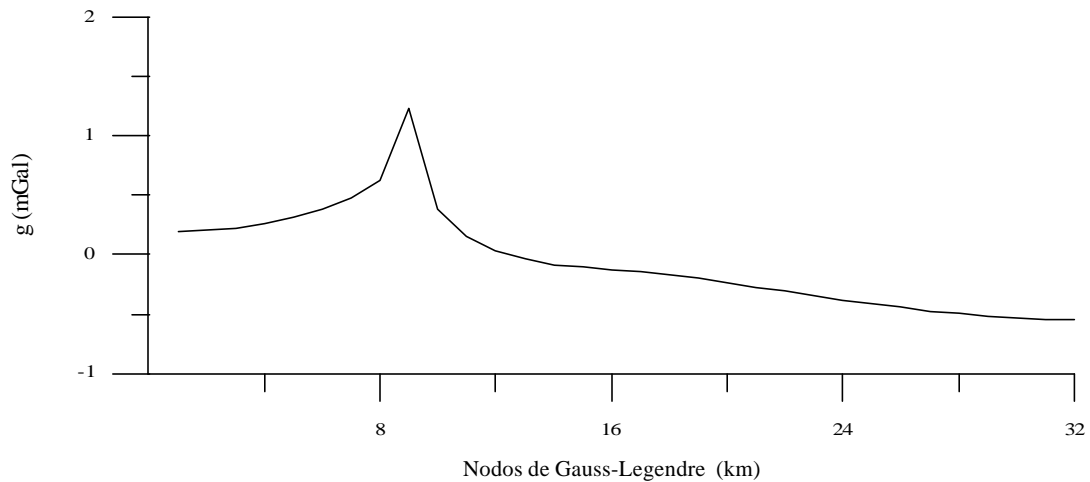


FIGURA A.2. Comportamiento casi-singular que ocurre cuando la abscisa del punto de observación se encuentra muy cercana a la posición del nodo de integración de Gauss-Legendre.

La Cuadratura de Gauss puede manejar de manera eficaz intervalos de integración en los que la integral sea impropia por la presencia de alguna singularidad, pero estas singularidades deben encontrarse en los extremos de dicho intervalo (Atkinson, 1989). Por tanto, para que la Cuadratura de Gauss resuelva la integración numérica, se debe dividir el intervalo de integración en dos partes alrededor del punto (x_0, z_0) , quedando la integración con respecto a la variable x de la forma:

$$g(x_0, z_0) = \left\{ \int_{x_1}^{x_0} dx f(x) + \int_{x_0}^{x_2} dx f(x) \right\} \quad (\text{A.7})$$

Cada una de las dos integrales de la expresión anterior se resuelve numéricamente siguiendo el método de integración descrito en este Apéndice. Procediendo de esta manera para el ejemplo que nos ocupa, se obtiene el comportamiento suave que se muestra también en la figura A.1.

Por todo lo anterior, aunque las integraciones con respecto a la variable z , que tienen lugar en las ecuaciones (2.16) y (2.22) del apartado 2.2, también son impropias en el punto (x_0, z_0) , la singularidad se encuentra situada en el extremo $z_1 = z_0$ del intervalo de integración, pudiendo ser evitada en la integración numérica.

A.1.2. Cuadratura de Gauss-Legendre para integrales dobles.

En el caso del problema directo para fuentes gravimétricas en 3D la integración numérica se aplica a integrales dobles de la forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dq dt f(q,t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i w_j f(q_i, t_j) \quad (\text{A.8})$$

donde los nodos de integración $\{q_i\}_{i=1,\dots,m} \in [-1,1]$ son los ceros del polinomio de Legendre de grado m , $P_m(q)$, y los nodos $\{t_j\}_{j=1,\dots,n} \in [-1,1]$ son los ceros del polinomio $P_n(t)$.

Para integrales dobles cuyos intervalos de integración sean distintos de $[-1, 1]$, la solución numérica de la cuadratura de Gauss-Legendre es:

$$\int_{q_1}^{q_2} \int_{t_1}^{t_2} dq dt f(q,t) = \left(\frac{q_2 - q_1}{2} \right) \left(\frac{t_2 - t_1}{2} \right) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_i w_j f(v_i, u_j) \quad (\text{A.8})$$

donde se han realizado los cambios de variables:

$$q_i = \frac{q_2 - q_1}{2} v_i + \frac{q_2 + q_1}{2} \quad q_1 \leq q_i \leq q_2, \quad -1 \leq v_i \leq 1 \quad (\text{A.9})$$

$$t_j = \frac{t_2 - t_1}{2} u_j + \frac{t_2 + t_1}{2} \quad t_1 < t_j < t_2, \quad -1 < u_j < 1$$

Para el caso en el que la fuente anómala es tridimensional y se encuentra limitada lateralmente por funciones continuas de las variables y y z (apartado 3.2), las integraciones con respecto a y son impropias en la posición del observador (x_0, z_0) para los tres tipos distintos de contraste de densidad. Esto es debido a las funciones que se encuentran en los integrandos de las ecuaciones (3.12), (3.14) y (3.18). Lo mismo ocurre con las integrales con respecto a la variable x en el caso en el que la fuente se encuentra limitada lateralmente por funciones continuas que dependen de x y z (ecuaciones (3.23), (3.25) y (3.28)). Para evitar este comportamiento singular en ambos tipos de fuente, se dividen los intervalos de integración correspondientes a las variables y y x , respectivamente, en dos partes alrededor del punto (x_0, y_0, z_0) :

$$g(x_0, y_0, z_0) = \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ \int_{y_1}^{y_0} dy f(y, z) + \int_{y_0}^{y_2} dy f(y, z) \right\} \quad (\text{A.10})$$

para el tipo de fuente del apartado 3.2, y:

$$g(x_0, y_0, z_0) = \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ \int_{x_1}^{x_0} dx f(x, z) + \int_{x_0}^{x_2} dx f(x, z) \right\} \quad (\text{A.11})$$

para el tipo de fuente del apartado 3.3. De este modo, la Cuadratura de Gauss-Legendre es capaz de manejar la naturaleza casi-singular del integrando de manera eficaz, resolviendo numéricamente cada una de las integrales anteriores de manera independiente aplicando la expresión (A.8).

Para el caso en el que la fuente se encuentra limitada superior e inferiormente por funciones continuas que dependen de las variables x e y (apartado 3.4), la integración doble que tiene lugar en las ecuaciones (3.32), (3.42) y (3.46) es impropia en la posición del observador (x_0, y_0, z_0) debido a la naturaleza de las funciones implicadas en los integrandos de dichas ecuaciones. Para evitar este

comportamiento se dividen los intervalos de integración correspondientes a las variables x e y en dos partes, alrededor del punto (x_0, y_0, z_0) :

$$g(x_0, y_0, z_0) = \left\{ \int_{x_1}^{x_0} \int_{y_1}^{y_0} dx dy f(x, y) + \int_{x_1}^{x_0} \int_{y_0}^{y_2} dx dy f(x, y) + \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_1}^{y_0} dx dy f(x, y) + \int_{x_0}^{x_2} \int_{y_0}^{y_2} dx dy f(x, y) \right\} \quad (\text{A.12})$$

Como ejemplo del comportamiento casi-singular de los integrandos que hacen las integrales impropias, se presenta la gráfica del primer sumando del integrando de la ecuación (3.46), para el caso de la fuente de la figura 3.15(a), en el que no se ha tenido en consideración la existencia de singularidades (figura A.3).

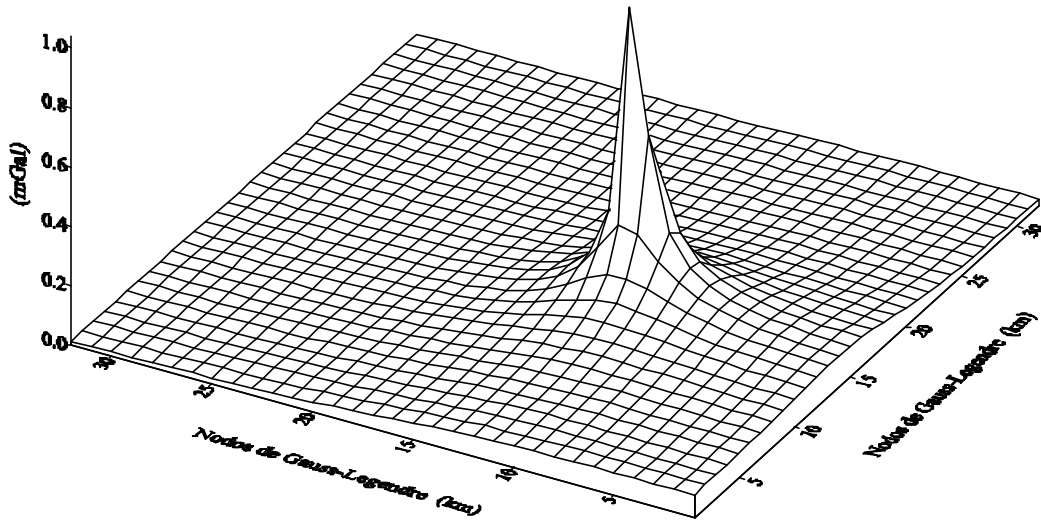


FIGURA A.3. Comportamiento casi-singular que ocurre cuando las abscisas del punto de observación (x_0, y_0) se encuentran muy cercanas a las posiciones de los nodos de integración de Gauss-Legendre para cada uno de los ejes correspondientes.

Apéndice B:

CALCULO DEL JACOBIANO PARA FUENTES EN 2D

INTRODUCCION

A continuación vamos a presentar las ecuaciones que definen las columnas de la matriz jacobiano de cada problema de inversión planteado en los diferentes tipos de fuente anómala bidimensionales que se han desarrollado en el presente trabajo.

B.1. FUENTE ANOMALA LIMITADA LATERALMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LA VARIABLE Z

Para calcular la matriz Jacobiano \mathbf{J} correspondiente a este caso, se calculan las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ de la ecuación (4.3) con respecto a cada uno de los parámetros que componen el vector \mathbf{p} y para cada una de las M estaciones donde se registran las medidas de la gravedad del perfil.

Las expresiones de las derivadas de dicho funcional con respecto a los parámetros que determinan la función contraste de densidad $\mathbf{Dr}(x,z)$, correspondientes a las seis primeras columnas del jacobiano, son:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{p_1} = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ \arctan\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}\right) \right\}_{f_1(z)}^{f_2(z)} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_2} = G \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ (z-z_0) \ln[(x-x_0)^2 - (z-z_0)^2] + 2x_0 \arctan\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}\right) \right\}_{f_1(z)}^{f_2(z)} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{p_3} = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz z \alpha_1(z) \quad (\text{B.3})$$

donde $\alpha_1(z)$ es el integrando de la ecuación (B.1).

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{p_4} = G \int_{z_1}^{z_2} dz z \mathbf{a}_2(z) \quad (\text{B.4})$$

donde $\alpha_2(z)$ es el integrando de la ecuación (B.2).

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{p_5} = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ x_0(z-z_0) \ln[(x-x_0)^2 - (z-z_0)^2] + (x_0^2 - (z-z_0)^2) \arctan\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}\right) + (z-z_0)(x-x_0) \right\}_{f_1(z)}^{f_2(z)} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{p_6} = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz z^2 \mathbf{a}_1(z) \quad (\text{B.6})$$

A continuación vamos a presentar las derivadas del funcional de la ecuación (4.3) con respecto a los parámetros que definen la función polinómica $f_1(z)$ para una estación situada en el punto (x_0, z_0) . Estas expresiones son las correspondientes a las columnas comprendidas entre la séptima y la décima de la matriz jacobiano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_7} = & -2G \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ (p_2 + p_4 z + 2p_5 x_0)(z-z_0) \left(\frac{(f_1(z)-x_0)}{(f_1(z)-x_0)^2 + (z-z_0)^2} \right) \right. \\ & \left. + [\mathbf{Dr}(x_0, z) - p_5(z-z_0)^2] \left(\frac{z-z_0}{(f_1(z)-x_0)^2 + (z-z_0)^2} \right) + p_5(z-z_0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

A partir de la ecuación anterior, llamando $\mathbf{a}_3(z)$ al integrando, podemos expresar de forma sencilla las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a los otros tres parámetros que definen la frontera $f_1(z)$:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_8} = -2G \int_{z_1}^{z_2} dz z \mathbf{a}_3(z) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_9} = -2G \int_{z_1}^{z_2} dz z^2 \mathbf{a}_3(z) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{10}} = -2G \int_{z_1}^{z_2} dz z^3 \mathbf{a}_3(z) \quad (\text{B.10})$$

Seguidamente, presentamos las derivadas del funcional de la ecuación (4.3) con respecto a los parámetros que definen la función $f_2(z)$, también para una estación (x_0, z_0) , y que corresponden desde la undécima a la decimocuarta columna del jacobiano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{11}} = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ (p_2 + p_4 z + 2p_5 x_0)(z - z_0) \left(\frac{(f_2(z) - x_0)}{(f_2(z) - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right) \right. \\ \left. + \left(\mathbf{Dr}(x_0, z) - p_5(z - z_0)^2 \right) \left(\frac{z - z_0}{(f_2(z) - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right) + p_5(z - z_0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Llamando $\mathbf{a}_4(z)$ al integrando de la ecuación anterior, las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ con respecto a los parámetros p_{12} , p_{13} y p_{14} vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{12}} = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz z \mathbf{a}_4(z) \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{13}} = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz z^2 \mathbf{a}_4(z) \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{14}} = 2G \int_{z_1}^{z_2} dz z^3 \mathbf{a}_4(z) \quad (\text{B.14})$$

Y por último, la columna decimoquinta es la derivada del funcional $F[\mathbf{p}]$ de la ecuación (4.3) con respecto al parámetro p_{15} . Para calcularla, aplicamos el *Teorema fundamental del Cálculo* (Kaplan, 1981) a dicha ecuación, obteniendo la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{15}} = G & \left\{ (p_2 + p_4 p_{15} + 2p_5 x_0)(p_{15} - z_0) \ln \left(\frac{[f_2(p_{15}) - x_0]^2 + (p_{15} - z_0)^2}{[f_1(p_{15}) - x_0]^2 + (p_{15} - z_0)^2} \right) \right. \\ & + 2(\mathbf{Dr}(x_0, p_{15}) - p_5(p_{15} - z_0)^2) \left(\arctan \left(\frac{f_2(p_{15}) - x_0}{p_{15} - z_0} \right) - \arctan \left(\frac{f_1(p_{15}) - x_0}{p_{15} - z_0} \right) \right) \\ & \left. + 2p_5(p_{15} - z_0) [f_2(p_{15}) - f_1(p_{15})] \right\} \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Dr}(x_0, p_{15}) = p_1 + p_2 x_0 + p_3 p_{15} + p_4 x_0 p_{15} + p_5 x_0^2 + p_6 p_{15}^2$, siendo x_0 la abcisa de la posición del observador.

Para calcular cada uno de los elementos de las quince columnas del jacobiano \mathbf{J} , se evalúan estas quince ecuaciones para cada una de las M estaciones (x_0, z_0) del perfil de datos y se calcula su solución numérica mediante el método de Gauss-Legendre, formando una matriz de dimensiones $M \times 15$.

B.2. FUENTE ANOMALA LIMITADA SUPERIOR E INFERIORMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LA VARIABLE X

Las derivadas del funcional (4.12) con respecto a los parámetros que determinan la función contraste de densidad, para una estación situada en el punto (x_0, z_0) , corresponden a las expresiones que determinan los elementos de las primeras seis columnas del jacobiano \mathbf{J} para el problema inverso de este tipo de fuentes.

Los elementos de la primera columna de dicha matriz vienen determinados por la expresión:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_1} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \ln \left\{ (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\} \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (\text{B.16})$$

donde, llamando $\mathbf{b}_1(x)$ al integrando, la ecuación para los elementos de la segunda columna se puede expresar de manera sencilla como:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_2} = G \int_{x_1}^{x_2} dx x \mathbf{b}_1(x) \quad (\text{B.17})$$

La tercera columna de \mathbf{J} viene determinada por la expresión:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_3} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ z_0 \ln \left\{ (x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 \right\} - 2(x-x_0) \arctan \left(\frac{z-z_0}{x-x_0} \right) + 2(z-z_0) \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (\text{B.18})$$

y, llamando $\mathbf{b}_2(x)$ al integrando de la ecuación anterior, podemos escribir de manera sencilla la expresión de la cuarta columna:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_4} = G \int_{x_1}^{x_2} dx x \mathbf{b}_2(x) \quad (\text{B.19})$$

Los elementos de la quinta columna se pueden expresar como:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_5} = G \int_{x_1}^{x_2} dx x^2 \mathbf{b}_1(x) \quad (\text{B.20})$$

donde $\mathbf{b}_1(x)$ es el integrando de la ecuación (B.16).

Los elementos de la sexta columna vienen dados por la expresión:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_6} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ (z_0^2 - (x-x_0)^2) \ln \left\{ (x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 \right\} - 4z_0(x-x_0) \arctan \left(\frac{z-z_0}{x-x_0} \right) + 2z_0[z-z_0] + [z^2 - z_0^2] \right\}_{g_1(x)}^{g_2(x)} \quad (\text{B.21})$$

Las derivadas del funcional de la ecuación (4.12) con respecto a los parámetros que definen la función $g_2(x)$, se corresponden con las columnas séptima a décima del jacobiano del problema, y sus expresiones son las que presentamos a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_7} = & 2G \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\mathbf{Dr}(x, z_0) - p_6(x-x_0)^2 \right] \left\{ \frac{(g_2(x) - z_0)}{(x-x_0)^2 + (g_2(x) - z_0)^2} \right\} \right. \\ & \left. - (p_3 + p_4x + 2p_6z_0) \left\{ \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2 + (g_2(x) - z_0)^2} \right\} + [p_3 + p_4x + p_6(g_2(x) + z_0)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

si llamamos $\mathbf{b}_3(x)$ al integrando de la ecuación anterior, tendremos las expresiones:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_8} = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx x \mathbf{b}_3(x) \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_9} = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx x^2 \mathbf{b}_3(x) \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{10}} = 2G \int_{x_1}^{x_2} dx x^3 \mathbf{b}_3(x) \quad (\text{B.25})$$

Por último, para calcular la derivada del funcional de la ecuación(4.12), con respecto a los parámetros p_{11} y p_{12} , hacemos uso del *Teorema fundamental del Cálculo*, con lo que obtenemos las expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{11}} = & -G \left\{ \left[\mathbf{Dr}(p_{11}, z_0) - f(p_{11} - x_0)^2 \right] \ln \left\{ \frac{(p_{11} - x_0)^2 + (g_2(p_{11}) - z_0)^2}{(p_{11} - x_0)^2 + (g_1(p_{11}) - z_0)^2} \right\} - \right. \\ & - 2[p_3 + p_4 p_{11} + 2p_6 z_0](p_{11} - x_0) \left\{ \arctan \left(\frac{g_2(p_{11}) - z_0}{p_{11} - x_0} \right) - \arctan \left(\frac{g_1(p_{11}) - z_0}{p_{11} - x_0} \right) \right\} + \quad (\text{B.26}) \\ & \left. + 2(p_3 + p_4 p_{11} + p_6 z_0)[g_2(p_{11}) - g_1(p_{11})] + p_6 [g_2^2(p_{11}) - g_1^2(p_{11})] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{12}} = & G \left\{ \left[\Delta \rho(p_{12}, z_0) - f(p_{12} - x_0)^2 \right] \ln \left\{ \frac{(p_{12} - x_0)^2 + (g_2(p_{12}) - z_0)^2}{(p_{12} - x_0)^2 + (g_1(p_{12}) - z_0)^2} \right\} - \right. \\ & - 2[p_3 + p_4 p_{12} + 2p_6 z_0](p_{12} - x_0) \left\{ \arctan \left(\frac{g_2(p_{12}) - z_0}{p_{12} - x_0} \right) - \arctan \left(\frac{g_1(p_{12}) - z_0}{p_{12} - x_0} \right) \right\} + \quad (\text{B.27}) \\ & \left. + 2(p_3 + p_4 p_{12} + p_6 z_0)[g_2(p_{12}) - g_1(p_{12})] + p_6 [g_2^2(p_{12}) - g_1^2(p_{12})] \right\} \end{aligned}$$

que corresponden a las columnas undécima y duodécima del jacobiano, respectivamente.

Evaluando estas doce ecuaciones en las M estaciones del perfil, y calculando sus soluciones numéricas, se forma el jacobiano \mathbf{J} del problema inverso, resultando una matriz de dimensiones $M \times 12$.

Apéndice C:

CALCULO DEL JACOBIANO PARA FUENTES EN 3D

INTRODUCCION

En este apéndice presentamos las ecuaciones del jacobiano para cada uno de los problemas de inversión desarrollados para los diferentes tipos de fuentes anómalas tridimensionales que se han tratado en este trabajo.

C.1. FUENTE ANOMALA LIMITADA LATERALMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LAS VARIABLES Y, Z.

Para calcular la matriz Jacobiano \mathbf{J} de este caso, se calculan las derivadas del funcional $F[\mathbf{p}]$ de la ecuación (3.18) con respecto a cada uno de los parámetros que componen el vector \mathbf{p} y para cada una de las M estaciones donde se registran las medidas de la gravedad.

Las derivadas del funcional de dicha ecuación, con respecto a los parámetros que determinan la función contraste de densidad, corresponden a las expresiones que determinan los elementos de las primeras diez columnas del jacobiano y sus expresiones analíticas, que son:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_1} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} \left\{ \frac{(x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]r} \right\} \Bigg|_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \quad (\text{C.1})$$

donde r viene dado por la ecuación (1.2);

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_2} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} \left\{ \frac{x_0 (x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]r} - \frac{1}{r} \right\} \Bigg|_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_3} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_1(y, z) \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_4} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_1(y, z) \quad (\text{C.4})$$

donde $\mathbf{g}_1(y, z)$ es el integrando de la ecuación (C.1);

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_5} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_2(y, z) \quad (\text{C.5})$$

donde $\mathbf{g}_2(y, z)$ es el integrando de la ecuación (C.2);

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_6} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_1(y, z) \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_7} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_2(y, z) \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_8} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} \left[-\frac{(x + x_0)}{r} + \ln[(x - x_0) + r] \right] \left. \vphantom{\int_{p_{31}}^{p_{32}}} \right\} \begin{matrix} h_2(y, z) \\ h_1(y, z) \end{matrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_9} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y^2 \mathbf{g}_1(y, z) \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{10}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z^2 (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_1(y, z) \quad (\text{C.10})$$

Las derivadas del funcional de la ecuación (3.18) con respecto a los parámetros que definen la frontera lateral $h_1(y, z)$, para una estación situada en el punto (x_0, z_0) , son las columnas comprendidas entre la undécima y la vigésima del jacobiano y sus expresiones son las siguientes:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{11}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \frac{1}{r_1^3} \left[\mathbf{Dr}(x_0, y, z) + (p_2 + p_5 y + p_7 z)[h_1(y, z) - x_0] + p_8 [h_1(y, z)^2 - x_0^2] \right] \quad (\text{C.11})$$

donde $r_1 = \sqrt{(h_1(y, z) - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Si llamamos $\gamma_3(y, z)$ al integrando de la ecuación anterior, las derivadas de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al resto de los parámetros que determinan la frontera $h_1(y, z)$ son:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{12}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{13}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{14}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{15}} = -G \int_{z_0}^{p_{31}} dz \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y^2 \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{16}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z^2 \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{17}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y^2 \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{18}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z^2 \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{19}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y^3 \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{20}} = -G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z^3 \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_3(y, z) \quad (\text{C.20})$$

De la misma manera, las derivadas del funcional de la ecuación (3.18) con respecto a los parámetros que definen la frontera $h_2(y, z)$ son:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{21}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz (z - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \frac{1}{r_2^3} \left[\mathbf{Dr}(x_0, y, z) + (p_2 + p_5 y + p_7 z)[h_2(y, z) - x_0] + p_8 [h_2(y, z)^2 - x_0^2] \right] \quad (\text{C.21})$$

donde $r_2 = \sqrt{(h_2(y, z) - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$;

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{22}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{23}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{24}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.24})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{25}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y^2 \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.25})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{26}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z^2 \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{27}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y^2 \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{28}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z^2 \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{29}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy y^3 \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.29})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{30}} = G \int_{z_0}^{p_{33}} dz z^3 \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \mathbf{g}_4(y, z) \quad (\text{C.30})$$

donde la función $\mathbf{g}_4(y,z)$ representa el integrando de la expresión (C.17). A partir de las últimas diez ecuaciones, se calculan los elementos de las columnas vigesimoprimer a la trigésima del jacobiano.

Y, por último, para calcular las derivadas de la ecuación (3.18) con respecto a los parámetros p_{31} , p_{32} y p_{33} , utilizamos del *Teorema fundamental del Cálculo*, obteniendo las expresiones:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{31}} = -G \int_{z_1}^{p_{31}} dz (z - z_0) \left\{ \frac{\mathbf{Dr}(x_0, p_{31}, z)(x - x_0)}{[(p_{31} - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \sqrt{(x - x_0)^2 + (p_{31} - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \right. \quad (\text{C.31})$$

$$\left. - \frac{p_2 + p_5 p_{31} + p_7 z + p_8 (x + x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (p_{31} - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} + p_8 \ln \left[(x - x_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (p_{31} - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right] \right\} \Bigg|_{h_1(p_{31}, z)}^{h_2(p_{31}, z)}$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{32}} = G \int_{z_0}^{p_{32}} dz (z - z_0) \left\{ \frac{\mathbf{Dr}(x_0, p_{32}, z)(x - x_0)}{[(p_{32} - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \sqrt{(x - x_0)^2 + (p_{32} - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \right. \\ \left. - \frac{p_2 + p_5 p_{32} + p_7 z + p_8 (x + x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (p_{32} - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} + p_8 \ln \left[(x - x_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (p_{32} - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right] \right\} \Bigg|_{h_1(p_{32}, z)}^{h_2(p_{32}, z)} \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{33}} = G (p_{33} - z_0) \int_{p_{31}}^{p_{32}} dy \left\{ \frac{\mathbf{Dr}(x_0, y, p_{33})(x - x_0)}{[(y - y_0)^2 + (p_{33} - z_0)^2] \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (p_{33} - z_0)^2}} \right. \\ \left. - \frac{p_2 + p_5 y + p_7 p_{33} + p_8 (x + x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (p_{33} - z_0)^2}} + p_8 \ln \left[(x - x_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (p_{33} - z_0)^2} \right] \right\} \Bigg|_{h_1(y, p_{33})}^{h_2(y, p_{33})} \quad (\text{C.33})$$

que corresponden a las columnas trigésimoprimer, trigésimosegunda y trigésimotercera del jacobiano, respectivamente.

Evaluando estas treinta y tres ecuaciones en las M estaciones de medida y calculando sus soluciones numéricas, se construye el jacobiano \mathbf{J} del problema inverso, resultando una matriz de dimensiones $M \times 25$.

C.2. FUENTE ANOMALA LIMITADA SUPERIOR E INFERIORMENTE POR FUNCIONES CONTINUAS DE LAS VARIABLES X, Y.

Los elementos de las primeras diez columnas de la matriz \mathbf{J} se obtienen mediante las expresiones:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_1} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{-1}{r} \right\} \Bigg|_{l_1(x, y)}^{l_2(x, y)} \quad (\text{C.34})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_2} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \mathbf{d}_1(x, y) \quad (\text{C.35})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_3} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy y \mathbf{d}_1(x, y) \quad (\text{C.36})$$

donde $\mathbf{d}_1(x, y)$ es el integrando de la ecuación (C.26);

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_4} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{-z}{r} + \ln[(z - z_0) + r] \right\} \Bigg|_{l_1(x, y)}^{l_2(x, y)} \quad (\text{C.37})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_5} = G \int_{x_1}^{x_2} dx x \int_{y_1}^{y_2} dy y \mathbf{d}_1(x, y) \quad (\text{C.38})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_6} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy y \mathbf{d}_2(x, z) \quad (\text{C.39})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_7} = G \int_{x_1}^{x_2} dx x \int_{y_1}^{y_2} dy \mathbf{d}_2(x, z) \quad (\text{C.40})$$

donde $\mathbf{d}_2(x, y)$ es el integrando de la ecuación (C.37);

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_8} = G \int_{x_1}^{x_2} dx x^2 \int_{y_1}^{y_2} dy \mathbf{d}_1(x, y) \quad (\text{C.41})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_9} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy y^2 \mathbf{d}_1(x, y) \quad (\text{C.42})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{10}} = G \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \left\{ \frac{-z^2}{r} + 2z_0 \ln[(z - z_0) + r] + 2r \right\} \Bigg|_{l_1(x,y)}^{l_2(x,y)} \quad (\text{C.43})$$

La derivada del funcional de la ecuación (3.46) con respecto al parámetro p_{11} de la frontera $l_2(x,y)$ es:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{11}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy \left\{ \frac{\mathbf{D}[x, y, l_2(x, y)][l_2(x, y) - z_0]}{r_2^3} \right\} \quad (\text{C.44})$$

donde ahora $r_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (l_2(x, y) - z_0)^2}$. Llamando $\mathbf{d}_3(x, y)$ al integrando de la ecuación anterior, las derivadas de $F[\mathbf{p}]$ con respecto al resto de los parámetros que determinan la frontera $l_2(x, y)$ son:

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{12}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.45})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{13}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy y \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.46})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{14}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy y^2 \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.47})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{15}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy x^2 \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.48})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{16}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy y^2 \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.49})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{17}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx x^2 \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy y \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.50})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{18}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx x \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy y^2 \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.51})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{19}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx x^3 \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.52})$$

$$\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{20}} = G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy y^3 \mathbf{d}_3(x, y) \quad (\text{C.53})$$

Y, por último, para calcular las derivadas de la ecuación (3.46) con respecto a los parámetros p_{17}, p_{18}, p_{19} y p_{20} , utilizamos del *Teorema fundamental del Cálculo*, obteniendo las expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{17}} = & -G \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy \left\{ \frac{-\mathbf{Dr}(p_{17}, y, z)}{\sqrt{(p_{17} - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \right. \\ & + [p_4 + p_6 y + p_7 p_{17} + 2 z_0 p_{10}] \ln \left[(z - z_0) + \sqrt{(p_{17} - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right] + \\ & \left. + 2 p_{10} \sqrt{(p_{17} - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \begin{matrix} l_2(p_{17}, y) \\ l_1(p_{17}, y) \end{matrix} \quad (\text{C.54}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{18}} = & G \int_{p_{19}}^{p_{20}} dy \left\{ \frac{-\Delta\rho(p_{18}, y, z)}{\sqrt{(p_{18} - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \right. \\ & + [p_4 + p_6 y + p_7 p_{18} + 2 z_0 p_{10}] \ln \left[(z - z_0) + \sqrt{(p_{18} - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right] + \\ & \left. + 2 p_{10} \sqrt{(p_{18} - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right\} \begin{matrix} l_2(p_{18}, y) \\ l_1(p_{18}, y) \end{matrix} \quad (\text{C.55}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{19}} &= -G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \left\{ \frac{-\Delta\rho(x, p_{19}, z)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (p_{19}-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \right. \\
&+ [p_4 + p_6 p_{19} + p_7 x + 2z_0 p_{10}] \ln \left[(z-z_0) + \sqrt{(x-x_0)^2 + (p_{19}-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right] + \\
&\left. + 2 p_{10} \sqrt{(x-x_0)^2 + (p_{19}-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right\} \begin{cases} l_2(x, p_{19}) \\ l_1(x, p_{19}) \end{cases} \quad (C.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F[\mathbf{p}]}{\partial p_{20}} &= G \int_{p_{17}}^{p_{18}} dx \left\{ \frac{-\Delta\rho(x, p_{20}, z)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (p_{20}-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \right. \\
&+ [p_4 + p_6 p_{20} + p_7 x + 2z_0 p_{10}] \ln \left[(z-z_0) + \sqrt{(x-x_0)^2 + (p_{20}-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right] + \\
&\left. + 2 p_{10} \sqrt{(x-x_0)^2 + (p_{20}-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right\} \begin{cases} l_2(x, p_{20}) \\ l_1(x, p_{20}) \end{cases} \quad (C.57)
\end{aligned}$$

que corresponden a las columnas desde la decimoséptima a la vigésima del jacobiano, respectivamente.

Calculando la solución numérica de las veinte ecuaciones anteriores, en cada una de las M estaciones de medida, se construye el jacobiano \mathbf{J} del problema inverso.

BIBLIOGRAFIA

-
- Aki, K. y Richards, P.G., 1980. *Quantitative seismology: Theory and methods. Vol. II.* W.H. Freeman & Co. 932 pp.
- Alvarez-Rosales, J. y González-López, M., 1995. *Resultados de los pozos exploratorios en Laguna Salada, B.C.* Sociedad Geológica Peninsular, Proceedings of the III International Meeting on the Geology of the Baja California Peninsula, La Paz, BCS, México, 4-5.
- Arellano-Guadarrama, J.F. y Venegas-Salgado, S., 1992. *Estado actual de la exploración geotérmica en Laguna Salada, B.C.* Geotermia, Rev. Mex. de Geoenergía, 8, 331-356.
- Atkinson, K.E., 1989. *An introduction to numerical analysis.* John Wiley & Sons, Inc., 693 pp.
- Axen, G.J., 1995. *Extensional segmentation of the main Gulf escarpment, Mexico and United States.* Geology, 23, 515-518.
- Axen, G.J., Fletcher, J.M. y Martín-Barajas, A., 1998. *Late Miocene detachment faulting in the northern Gulf of California and its role in evolution of the Pacific-North American plate boundary.* En: Behl, R.J., ed., Field Trip Program Cordilleran Section GSA, Long Beach, California, California State Univ. Long Beach, Department of Geological Sciences, 6-1 a 6-29.
- Barbosa, V.C.F., Silva, J.B.C. y Medeiros, W.E., 1999. *Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations.* Geophysics, 64, 754-764.
- Barnard, F.L., 1968. *Structural geology of the Sierra de los Cucapahs, northeastern Baja California, Mexico, and Imperial county, California.* Tesis de doctorado, Univ. de Colorado, Boulder, CO, 157 pp.
- Blakely, R.J., 1996. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications.* Cambridge Univ. Press, 441 pp.
- Constable, S.C., Parker, R.L. y Constable, C.G., 1987. *Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data.* Geophysics, 52, 289-300.
- Cordell, L., 1973. *Gravity analysis using an exponential density depth function, San Jacinto graben, California.* Geophysics, 38, 684-690.

- Chai, Y. y Hinze, W.J., 1988. *Gravity inversion of an interface above which the density contrast varies exponentially with depth*. *Geophysics*, 53, 837-845.
- Davis, P.J. y Polonsky, I., 1972. *Numerical interpolation, differentiation and integration*. In: Abramowitz, M. y Stegun, I.A., eds., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.*, Dover Publ. Inc., 875-924.
- Dorsey, R. y Martín-Barajas, A., 1999. *Sedimentation and deformation in a Pliocene-Pleistocene transtensional supradetachment basin, Laguna Salada, north-west Mexico*. *Basin Res.*, 11, 205-221.
- Edwards, R.N., Bailey, R.C. y Garland, G.D., 1981. *Conductivity anomalies: lower crust or asthenosphere?*. *Phys. Earth Plan. Int.*, 25, 263-272.
- Frez, J. y Frías-Camacho, V.M., 1998. *Distribución de energía sísmica en la región fronteriza de ambas Californias*. *GEOS*, 18, 189-196.
- García-Abdeslem, J., 1992. *Gravitational attraction of a rectangular prism with depth-dependent density*. *Geophysics*, 57, 470-473.
- García-Abdeslem, J., 1996a. *Ejemplos de inversión lineal utilizando el efecto gravimétrico de borde*. *GEOS*, 16, 15-21.
- García-Abdeslem, J., 1996b. *Comments on "Gravity field of the southern Colima graben" by W.L. Bandy, C.A. Mortera-Gutierrez and J. Urrutia Fucugauchi*. *Geofís. Int.*, 35, 87-88.
- García-Abdeslem, J., 1996c. *gl2d: A FORTRAN program to compute the gravity anomaly of a 2-D prism where density varies as a function of depth*. *Comp. and Geosci.*, 22, 823-826.
- García-Abdeslem, J., 2000. *2-D inversion of gravity data using sources laterally bounded by continuous surfaces and depth-dependent density*. *Geophysics*, 65, 1128-1141.
- García-Abdeslem, J. y Espinosa-Cardena, J.M., 1994. *Estudio gravimétrico regional sobre las sierras Juárez y Cuapah, Laguna Salada y Valle de Mexicali*. Reporte Técnico, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., México, 40 pp.

-
- García-Abdeslem, J., Espinosa-Cardena, J. M., Munguía-Orozco, L., Wong-Ortega, V. M., y Ramírez-Hernández, J., 2000. *Crustal structure from 2-D gravity and magnetics modeling, and seismotectonics in the Laguna Salada basin, Northern Baja California, México*. Sometido a Geofís. Int.
- García-Abdeslem, J., Espinosa-Cardena, J.M. y Suárez-Vidal, F., 1995. *Gravedad residual isostática y estructura de la corteza en Laguna Salada, B.C., México*. GEOS, 15, 33.
- Gastil, R.G., Phillips, R.P. y Allison, E.C., 1975. *Reconnaissance geology of the State of Baja California*. Mem. Geol. Soc. Am., 140, 170 pp.
- Glenn, W.E., Jisoo Ryu, Ward, S.H., Peebles, W.J. y Phillips, R.J., 1973. *The inversion of vertical magnetic dipole sounding data*. Geophysics, 38, 1109-1129.
- Gómez-Treviño, E. y Edwards, R.N., 1983. *Electromagnetic sounding in the sedimentary basin of southern Ontario – A case history*. Geophysics, 48, 311-330.
- Granser, H., 1987. *Nonlinear inversion of gravity data using the Schmidt-Lichtenstein approach*. Geophysics, 52, 88-93.
- Grant, F.S. y West, G.F., 1965. *Interpretation theory in applied geophysics*. McGraw-Hill, 584 pp.
- Heiskanen, W., A. y Moritz, H., 1985. *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional, Madrid., 371 pp.
- Hubert, M.K.A., 1948. *A line-integral method for computing the gravimetric effect of two-dimensional masses*. Geophysics, 13, 215-222.
- Inman, J.R., Jisoo Ryu y Ward, S.H., 1973. *Resistivity inversion*. Geophysics, 38, 1088-1108.
- Inman, J.R., 1975. *Resistivity inversion with Ridge Regression*. Geophysics, 40, 798-817.
- Jackson, D.D., 1972. *Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data*. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 28, 97-109.
- Jenkins, G.M. y Watts, D.G., 1968. *Spectral analysis and its applications*. Holden-Day, Inc., 525 pp.

- Kaplan, W., 1981. *Advanced mathematics for engineers*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 929 pp.
- Kelm, D.L., 1971. *A gravity and magnetic study of the Laguna Salada area, Baja California, Mexico*. Tesis de Maestría, San Diego State College, San Diego, CA, 99 pp.
- Lanczos, C., 1961. *Linear differential operators*. D. Van Nostrand Co., 564 pp.
- Last, B.J. y Kubik, K., 1983. *Compact gravity inversion*. *Geophysics*, 48, 713-721.
- Lawson, C.L. y Hanson, R.J., 1974. *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, Inc., 340 pp.
- Levenberg, K., 1944. *A method for the solution of certain non-linear problems in least squares*. *Quart. Appl. Math.*, 2, 164-168.
- Lines, L.R. y Treitel, S., 1984. *A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems*. *Geophys. Prosp.*, 32, 159-186.
- Marquardt, D.W., 1963. *An Algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters*. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, 431-441.
- Marquardt, D.W., 1970. *Generalized inverses, Ridge Regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation*. *Technometrics*, 12, 591-612.
- Martín-Atienza, B. y García-Abdeslem, J., 1999. *2-D gravity modeling with analytically defined geometry and quadratic polynomial density functions*. *Geophysics*, 64, 1730-1734.
- Martín-Barajas, A., Vázquez-Hernández, S., Carreño, A.L., Helenes, J., Suárez-Vidal, F., Alvarez, J., 2000. *Late Neogene stratigraphy and tectonic control on facies evolution in the Laguna Salada basin, northern Baja California, Mexico*. *Sedimentary Geology*, aceptado.
- Meju, M.A., 1994. *Geophysical data analysis: understanding inverse problem. Theory and practice*. Course notes Series, vol. 6, S.N. Domenico, Soc. Expl. Geophys., 296 pp.

-
- Mueller, K.J., y Rockwell, T.K., 1991. *Late quaternary structural evolution of the Western margin of the Sierra Cucapa, northern Baja California*. En: Dauphin, J.P., and Simoneit, B.T., eds., *The Gulf and Peninsular provinces of the Californias*, Tulsa, OK, Amer. Assoc. Petrol. Geol. Mem., 47, 249-260.
- Murthy, I.V.R. y Rao, D.B., 1979. *Gravity anomalies of two-dimensional bodies of irregular cross-section with density contrast varying with depth*. *Geophysics*, 44, 1525-1530.
- Parker, R., L., 1977. *Understanding inverse theory*. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 5, 35-64.
- Parker, R., L., 1994. *Geophysical Inverse Theory*. Princeton Univ. Press, 386 pp.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. y Flannery, B.P., 1996. *Numerical Recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing (Vol 1 of Fortran Numerical Recipes)*. Cambridge Univ. Press. 933 pp.
- Ramírez-Hernández, J., Vega-Aguilar, M., Carreón-Díazconti, C. y Reyes-López, J.A., 1994. *Estudio gravimétrico de la zona geotérmica de Laguna Salada, B.C.* Reporte Técnico, Universidad Autónoma de Baja California, B.C., México, 50 pp.
- Rao, D.B., 1990. *Analysis of gravity anomalies of sedimentary basins by an asymmetrical trapezoidal model with quadratic density function*. *Geophysics*, 55, 226-231.
- Rao, D.B., Prakash, M.J. y Ramesh Babu, N., 1993. *Gravity interpretation using Fourier transforms and simple geometrical models with exponential density contrast*. *Geophysics*, 58, 1074-1083.
- Romero-Espejel, J.G.H. y Delgado-Argote, L.A., 1997. *Granitoides en el noreste de Sierra Juárez, Baja California: una historia de emplazamiento para la parte norte del batolito oriental del Cretácico Tardío*. *GEOS*, 17, 139-154.
- Ruotoistenmäki, T., 1992. *The gravity anomaly of two-dimensional sources with continuous density distribution bounded by continuous surfaces*. *Geophysics*, 57, 623-628.
- Sánchez-Monclú, A., 1997. *Las derivadas del potencial gravitacional y su utilidad para localizar bordes de estructuras geológicas*. Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., México, 116 pp.

- Siem, M.E., 1992. *The structure and petrology of Sierra El Mayor, northeastern Baja California, México*. Tesis de Maestría, San Diego State Univ., San Diego, CA, 244 pp.
- Siem, M. y Gastil, G., 1994. *Mid-Tertiary to Holocene extension association with the development of the Sierra El Mayor metamorphic core complex, northeastern Baja California, Mexico*. En: McGill, S.F., and Ross, T.M., eds, *Geological investigations of an active margin (GSA Cordilleran Section guidebook)*. Redlands, California, San Bernardino County Museum Association, 107-119.
- Stock, J.M. y Hodges, K.V., 1989. *Pre-Pliocene extension around the Gulf of California and the transfer of Baja California to the Pacific Plate*. *Tectonics*, 8, 99-115.
- Talwani, M., Worzel, J.L. y Landisman, M., 1959. *Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone*. *J. Geophys. Res.*, 64, 49-59.
- Tarantola, A. y Valette, B., 1982. *Inverse problems = Quest for information*. *J. Geophys.*, 50, pp. 159-170.
- Thanassoulas, C., Tselentis, G.A. y Dimitriadis, K., 1987. *Gravity inversion of a fault by Marquardt's method*. *Comp. and Geosci*, 13, pp. 399-404.
- Vázquez-Hernández, S., 1996. *Estratigrafía y ambientes de depósito de la secuencia sedimentaria al oriente de Laguna Salada, Baja California*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., México, 135 pp.
- Velasco-Hernández, J., 1963. *Levantamiento gravimétrico en la Zona geotérmica de Mexicali*. Consejo de Recursos Naturales no Renovables, México, D.F., Reporte Técnico.
- Vogel, C.R., 1987. *An overview of numerical methods for nonlinear ill-posed problems*. In: *Inverse and ill-posed problems*. Engl, H.W. y Groetsch, C.W. (Eds.), Academic Press Inc, 231-245.
- Wernicke, B., 1995. *Low-angle normal faults and seismicity: A review*. *J. Geophys. Res.*, 100, 159-174.

Wernicke, B., y Axen, G.J., 1988. *On the role of isostasy in the evolution of normal fault systems.* Geology, 16, 848-851.

