UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Estadistica e Investigacion Operativa

TESIS DOCTORAL

Suficiencia en procesos estocásticos controlados

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Francisco Javier Yáñez Gestoso

Madrid, 2015

Francisco Javier Yáñez Gestoso

SUFICIENCIA EN

PROCESOS ESTOCASTICOS CONTROLADOS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1985

Colección Tesis Doctorales. Nº 12/85

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 28015 Madrid
Madrid, 1985
Xerox 9400 X 721
Depósito Legal: M-2346-1985

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E   D E   M A D R I D

FACULTAD CIENCIAS MATEMATICAS
Sección de Estadística e
Investigación Operativa

SUFICIENCIA EN PROCESOS ESTOCASTICOS CONTROLADOS

Javier Yáñez Gestoso

Memoria para optar al grado
de Doctor en Ciencias Matemáticas
realizada bajo la dirección de
la Dra. Dª Pilar Ibarrola Muñoz

Madrid, Mayo de 1.983

INDICE

PROLOGO

PROLOGO

El objetivo de esta memoria es incorporar el concepto de suficiencia a la teoría de los procesos estocásticos controlados y reducir la clase de controles admisibles a los basados en los procesos suficientes.

La idea original del trabajo era enfocar desde la teoría de control estocástico los resultados obtenidos por Bahadur al tratar problemas de decisión secuencial. Bahadur demostró que la clase de reglas de decisión basadas en secuencias suficientes es esencialmente completa cuando la secuencia es transitiva. El concepto de secuencia suficiente es similar al de proceso suficiente que en esta memoria se propone.

Sin embargo, y a pesar de esta analogía, no se puede asimilar el problema de decisión secuencial con el problema de control estocástico en tiempo discreto, esto tendría sentido cuando las distribuciones de probabilidad que rigen la evolución del sistema controlado dependen de un parámetro desconocido que se trata de estimar. Son los problemas de control adaptativo y la relación de éstos con los problemas de decisión está tratada en un artículo de Sworder y Aoki.

Al tratar el problema de control estocástico se seguirá el enfoque iniciado por Skorohod. La idea fundamental es considerar un proceso estocástico que engloba al proceso básico, estado del sistema en la notación clásica, y el control.

La aleatoriedad de la evolución del sistema queda reflejada en las distribuciones de probabilidad asociadas al proceso estocástico, que se denomina proceso estocástico controlado.

El concepto de estrategia de control se generaliza, además, al considerar los controles aleatorios, que se definen por medio de unas distribuciones de probablidad condicionadas a la evolución del sistema y los controles anteriores.

Se restringe el estudio a los procesos estocásticos controlados de parámetro discreto que, por comodidad de notación, serán referidos como procesos controlados simplemente.

En el capítulo I se introducen las ideas elementales de proceso controlado, proceso básico y control en problemas de control en información completa.

Los espacios sobre los que se definen el proceso básico y el control precisan de unas condiciones topológicas de regularidad a fin de que se cumplan determinadas propiedades interesantes para el estudio. Estas condiciones quedan garantizadas al exigir que los espacios fase del proceso básico y del control sean espacios métricos separables y completos. Algunas de estas propiedades se enuncian en el capítulo I.

La idea de relacionar la suficiencia con el problema de control estocástico persigue el objetivo de simplificar las reglas de control y disminuir en lo posible el volumen de información necesario para adoptar una estrategia de control óptima. En el presente trabajo se abordan dos formas de llevar a cabo esta idea, se desarrollarán en los capítulos II y III.

En el capítulo II se estudian los procesos suficientes para el control. Fijado el objeto controlado, que determina la evolución del proceso básico en función de los controles, para cada control admisible $u \in \mathcal{U}$ se tiene una distribución de probabilidad P_u para el proceso controlado. Se define el proceso suficiente para el control u de forma análoga a como se define un estadístico suficiente para una familia de medidas de probabilidad que depende de un parámetro, en este caso u.

Este proceso suficiente va acumulando en cada etapa toda la información que puede proporcionar la evolución del proceso controlado hasta ese instante sobre el control u. Posteriormente se demuestra que la clase de controles basados en ese proceso suficiente es esencialmente completa, con lo que basta seleccionar el control óptimo para el problema dentro de esta clase.

Acaba el capítulo considerando el problema de control en información incompleta y se demuestra también en este caso que la clase de controles basados en un proceso suficiente es esencialmente completa.

En el capítulo III sólo se considera el problema de control en información incompleta, y se trata de estimar en cada etapa la evolución del sistema a partir de las observaciones y los controles tomados hasta ese momento. Se define así en cada etapa el estadístico suficiente que acumula toda la información sobre la evolución del sistema que pueden proporcionar las observaciones y controles conocidos. Cada uno de estos estadísticos define las componentes del proceso suficiente para el proceso básico. Se demuestra que la clase de controles basados en ese proceso suficiente es esencialmente completa.

Si se exige que el proceso suficiente para el proceso básico sea minimal suficiente, en el sentido que lo sean los estadísticos suficientes de cada etapa, se puede determinar este control óptimo resolviendo un nuevo problema de control en información completa, que se denominará problema de control asociado.

El proceso básico del problema de control asociado es el propio proceso minimal suficiente y el objeto de control se define a partir del objeto de control del problema original y se basa en la minimal suficiencia de cada una de las componentes del proceso suficiente.

El problema de control asociado determina un proceso controlado de Markov, aunque el correspondiente al problema original no lo sea, y, por esta propiedad, el control óptimo en cada etapa depende únicamente del valor del proceso básico en esa etapa, que es el estadístico minimal suficiente.

La función de coste del problema de control asociado se construye de forma que en media coincida con la del problema original, de tal forma que minimizando una se minimice la otra.

Así se concluye que al determinar el control óptimo del problema de control asociado se determina el del problema original en información incompleta en la clase de los controles basados en un proceso minimal suficiente. Por el teorema de completitud, se resuelve de este modo el problema.

Por último, en el capítulo IV, se plantea un problema de control estocástico en información incompleta que satisface las hipótesis del capítulo III.

Este problema será el del regulador lineal con coste cuadrático y en el que las distribuciones de probabilidad que alteran la evolución del sistema y las observaciones son normales de parámetros conocidos.

Mediante la construcción y posterior resolución del problema de control asociado se llega al control óptimo en la clase de los controles basados en un proceso minimal suficiente.

Se demuestra posteriormente que tanto el control óptimo como el coste mínimo esperado coinciden con los obtenidos siguiendo el enfoque clásico a través del filtro de Kalman.

Es de destacar en el presente trabajo la incorporación en los problemas de control de la idea de suficiencia en los estimadores que surgen de forma natural en aquéllos, bien sea para inferir sobre cuál ha sido el control elegido (capítulo II), o bien sea para inferir sobre cuál ha sido la evolución del sistema (capítulo III).

También se plantea el problema de control como un problema de decisión y se trata de reducir la clase de los controles (decisiones) para simplificar la elección del control óptimo. De ahí los teoremas de completitud de los controles basados en procesos suficientes.

La línea de investigación presente se puede continuar generalizando los resultados obtenidos a los procesos estocásticos controlados de parámetro continuo. También sería interesante profundizar en el estudio de los problemas de control adaptativo siguiendo el enfoque seguido por Sworder y Aoki en el artículo mencionado anteriormente.

Quisiera expresar mi agradecimiento a la Profesora Pilar Ibarrola por su dirección y su ayuda constante.

Agradezco también a los profesores de la Sección de Estadística e Investigación Operativa el apoyo prestado durante la realización de este trabajo.

Madrid, Mayo de 1.983

1

CAPITULO I

CAPITULO I

RESULTADOS PREVIOS

1.- SUMARIO

El propósito fundamental de este capítulo es introducir los conceptos básicos y enunciar una serie de resultados ya conocidos que serán de utilidad en el desarrollo de los capítulos posteriores.

En la sección 2 se define la convergencia débil de medidas y la semicontinuidad por abajo en espacios métricos separables y completos. El espacio fase del proceso que se controla y el espacio fase de control deberán ser espacios métricos separables y completos. A la función de coste de control se le exigirá que sea semicontinua por abajo para garantizar la existencia de un control óptimo. La convergencia débil se necesita para estudiar el límite de estrategias de control, que están caracterizadas por distribuciones de probabilidad.

En la sección 3 se introducen los conceptos de suficiencia según el enfoque clásico y bayesiano, se demuestra la equivalencia entre ambos y se define la suficiencia minimal.

Se plantea en la sección 4 el problema de control en información completa a partir de la definición de proceso estocástico controlado. Se hace hincapié en los conceptos de objeto controlado, control y proceso controlado. Se plantea después el problema de optimización que surge al tratar de elegir el control óptimo. Por último, se define el concepto de cadena de Markov controlada como un caso particular de proceso estocástico controlado y la simplificación que supone el considerar un tipo concreto de función de coste a la hora de resolver el problema.

2.- CONVERGENCIA DEBIL Y SEMICONTINUIDAD POR ABAJO EN ESPACIOS METRICOS SEPARABLES Y COMPLETOS

Una fución $f: X \longrightarrow R$, donde X es un espacio métrico, se dice que es semicontinua por abajo si para cualquier $x \in X$ se verifica que $\underline{\lim}_{y \to x} f(y) \geq f(x)$

Una función semicontinua por abajo alcanza el mínimo en cualquier conjunto compacto.

Una sucesión de medidas finitas μ_n definidas en un espacio métrico X converge débilmente a una medida μ si para cualquier función real continua y acotada definida en X $\varphi \in C_X$

$$\lim_{n \to \infty} \int \varphi(x) \mu_n(dx) = \int \varphi(x) \mu(dx)$$

TEOREMA I.2.1

Dada una función $f: X \longrightarrow R$, donde X es un espacio métrico, y f es acotada por abajo y semicontinua por abajo, si μ_n es una sucesión de medidas definidas sobre X que converge débilmente a

μ , se verifica: $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int f(x)\mu_n(dx) \geq \int f(x)\mu(dx)$

TEOREMA I.2.2

Sea una función $f(x,u)$ acotada por abajo y semicontinua por abajo para cualquier $x\in X$ y $u\in U$, donde X es un espacio métrico separable y completo y U es un conjunto compacto; entonces, la función $\underline{f}(x)=\operatorname{Inf}_{u\in U} f(x,u)$ es semicontinua por abajo y existe una función Borel $\varphi: X \longrightarrow U$ tal que $\underline{f}(x)=f(x,\varphi(x))$.

TEOREMA I.2.3

Sean X y X_1 dos espacios métricos separables y completos y sea $G(x,x_1)$ acotada por abajo y semicontinua por abajo en $X\cdot X_1$, entonces, si $\{\mu_n, n=0,1,..\}$ es una secuencia de medidas finitas sobre X y converge débilmente a la medida μ_o y $\lim_{n\to\infty} x_1^n = x^o$ se verifica: $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int G(x,x_1^n)\mu_n(dx) \geq \int G(x,x_1^o)\mu_o(dx)$

COMPACIDAD DEBIL

Dado $(X,\mathcal{A})$, donde X es un espacio métrico separable y completo y $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de Borel, se dice que un conjunto M de medidas sobre $\mathcal{A}$ es débilmente compacto sí para cualquier sucesión de medidas de M se puede extraer una subsucesión convergente débilmente.

TEOREMA I.2.4

En las condiciones anteriores, el conjunto M es débilmente compacto si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

a. $\mathrm{Sup}\{\mu(X), \mu\in M\} < \infty$

b.- Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \in X$ tal que

$\mathrm{Sup}\{\mu(X-K), \mu\in M\} < \varepsilon$

CONJUNTO DE CONTINUIDAD DE UNA MEDIDA

Dada una medida finita μ sobre $\mathcal{A}$, el conjunto $A\in\mathcal{A}$ se dice de continuidad de la medida μ si $\mu(A`)=0$, donde A` es la frontera de A.

TEOREMA I.2.5

Una secuencia de medidas μ_n converge débilmente a μ si, y sólo si, para cualquier conjunto A de continuidad de μ se verifica que $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$

APROXIMACION DE FUNCIONES SEMICONTINUAS

LEMA I.2.1

Para cualquier función semicontinua por abajo y acotada por abajo F(x) definida sobre un espacio métrico separable y completo, se puede hallar una sucesión creciente de funciones acotadas y continuas $F_n(x)$ tal que $F_n(x) \uparrow F(x)$ para todo $x \in X$.

LEMA I.2.2

Sea F(x,u) una función continua sobre $X^N \cdot U^N$, donde X y U son e.m.s.c. y U es además compacto; para cualquier secuencia de compactos $K_i \subset X$ existen funciones $\Psi_n(x_0,x_1,\ldots,x_n,u_0,\ldots,u_n)$ tales que la secuencia $F_n(x,u)=\Psi_n(x_0,\ldots,x_n,u_0,\ldots,u_n)$ converge uniformemente a $F(x,u)$ en el conjunto $\underline{K}=\{(x,u),\ x_i \in K_i, u \in U\}$

COROLARIO I.2.1

Si $F(x,u)$ es semicontinua por abajo y acotada por abajo, se puede encontrar uns sucesión creciente de funciones continuas $F_n(x,u)$ tal que $F(x,u)=\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x,u)$ para todo $(x,u)\in \underline{K}$

3,- ESTADISTICO SUFICIENTE

DEFINICION CLASICA (FISHER)

Sea $\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ una familia de distribuciones sobre un espacio medible $(X,\mathcal{B})$, se dice que un estadístico $T:(X,\mathcal{B})\to(Y,\mathcal{A})$ es suficiente para $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ si para cada $B\in\mathcal{B}$ existe una función $\varphi_B:X\to R$, que se llama versión de $P_\theta(B/T)$, independiente de θ tal que $P_\theta(B\cap T^{-1}(A)) = \int_{T^{-1}(A)} \varphi_B(x)P_\theta(dx)$ para todo $A\in\mathcal{A}$

Teniendo en cuenta que la aplicación T interviene sólo a través de la σ-álgebra $T^{-1}(\mathcal{A})$ inducida en el espacio X, se puede definir la suficiencia directamente en la sub-σ-álgebra $T^{-1}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{B}$ de la siguiente manera:

Una sub-σ-álgebra $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ se dice suficiente para $\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ si para cualquier $B\in\mathcal{B}$ existe una función $\varphi_B:X\to R$ independiente de θ, tal que φ_B es una versión de $P_\theta(B/\mathcal{F})$ para cualquier $\theta \in \Theta$, o, lo que es lo mismo, φ_B ha de ser medible respecto a $\mathcal{F}$ y verificar: $P_\theta(B \cap A) = \int_A \varphi_B(x) P_\theta(dx)$ para todo $A \in \mathcal{F}$ y $\theta \in \Theta$

A continuación se cita un teorema de caracterización de un estadístico suficiente.

TEOREMA I.3.1

Sea $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ una familia de distribuciones en $(X, \mathcal{B})$ absolutamente continuas respecto a una medida σ-finita μ; sea T un estadístico $T:(X,\mathcal{B}) \dashrightarrow (Y,\mathcal{A})$; entonces, una condición necesaria y suficiente para que T sea suficiente para $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ es la existencia de una medida de probabilidad λ densa en $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ tal que $\dfrac{P_\theta(dx)}{\lambda(dx)}$ es medible respecto a $T^{-1}(\mathcal{A})$ para cualquier $\theta \in \Theta$.

ESTADISTICO MINIMAL SUFICIENTE

Un corolario inmediato del teorema anterior es que para una familia de distribuciones de probabilidad absolutamente continuas respecto a una medida σ-finita, cualquier σ-álgebra que contenga un σ-álgebra suficiente es también suficiente.

Surge entonces la cuestión de si existe una σ-álgebra suficiente mínima.

Una sub-σ-álgebra $\mathcal{S}$ de $\mathcal{B}$ se dice minimal suficiente para una familia de distribuciones $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ si está contenida en cual-definir el proceso controlado será necesario definir la distribución de probabilidad de un proceso aleatorio con valores en X suponiendo que se conozca la secuencia de controles tomados hasta ese instante y definir una regla que seleccione dichos controles. Es decir, hay que definir el objeto de control y la estrategia de control o,simplemente, control.

OBJETO CONTROLADO

Sea N el conjunto de los naturales,, se definen los espacios producto $(X^N,\mathcal{A}^N)$ y $(U^N,\mathcal{B}^N)$ y las σ-álgebras de cilindros en X^N y U^N, $\mathcal{A}_n$ y $\mathcal{B}_{n-1}$, con bases sobre $(0,1,\ldots,n)$ para todo $n\in N$.

Si x_n representa el valor del proceso básico en la etapa n, se debe conocer su distribución de probabilidad a partir de los valores delproceso básico en etapas anteriores $(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$ y los controles tomados $(u_0,u_1,\ldots,u_{n-1})$, sea $p_n(dx_n/x_0\ldots x_{n-1}u_0\ldots u_{n-1}$ dicha distribución.

La familia $\{p_n(./.),n=0,1,\ldots\}$ define el objeto controlad

Para que el objeto controlado defina las distribuciones de probabilidad de la secuencia $\{x_n,n=0,1,\ldots\}$ en $(X,\mathcal{A})$ se exige:

1.- $p_n(./.)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{A}$ respecto al primer argumento.

2.- Para cualquier $A\in\mathcal{A}$, $p_n(A/.)$ es $\mathcal{A}_{n-1}\,\mathcal{B}_{n-1}$-medible, es decir, $p_n(A/x_0,\ldots,x_{n-1}u_0\ldots u_{n-1})$.

A partir del objeto controlado $\{p_n(./.),\ n=0,1,..\}$ se define una medida sobre X^N que depende paramétricamente de $u\in U^N$, esta medida $\mu(./u)$ queda definida a partir de cualquier cilindro C de $\mathcal{A}_n$ de la siguiente forma:

$$C = \{x\in X^N \ /\ x_0\in C_0,\dots,x_n\in C_n,\ \text{con } C_0,\dots,C_n\in\mathcal{A}\}$$

$$\mu(C/u)= \int_{C_0} p_0(dx_0)\cdot\int_{C_1} p_1(dx_1/x_0u_0)\dots\int_{C_n} p_n(dx_n/x_0..x_{n-1}u_0..u_{n-1})$$

Queda así caracterizada de forma única una medida sobre X^N a partir del objeto controlado. El siguiente teorema afirma las condiciones para que una medida sobre X^N defina unívocamente el objeto controlado.

TEOREMA I.4.1

Dado $(X,\mathcal{A})$, un espacio medible con un espacio métrico separable y completo con una σ-álgebra de Borel, si la familia de medidas $\{\mu(V/u)\quad u\in U^N\quad V\in\mathcal{A}^N\}$ satisface:

$\mu(V/u)$ es $\mathcal{B}^N$-medible para $V\in\mathcal{A}^N$ y $\mathcal{B}_{n-1}$-medible para $V\in\mathcal{A}_n$, se asegura entonces la existencia de una familia de distribuciones $\{p_n(dx_n/x_0..x_{n-1}u_0..u_{n-1}),\ n=0,1,..\}$ que satisfacen las condiciones 1 y 2 reseñadas anteriormente.

CONTROL

Análogamente al desarrollo anterior, se puede definir el control en el problema planteado inicialmente de dos formas equivalentes si a $(U,\mathcal{B})$ se le exige que sea un espacio métrico separable y completo con una σ-álgebra de Borel:

- Una familia $\{q_n(./.), n=0,1,..\}$ donde:

  1.- $q_n(./.)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}$ respecto al primer argumento.

  2.- Para cualquier $B \in \mathcal{B}$, $q_n(B/.)$ es $\mathcal{A}_n\ \mathcal{B}_{n-1}$ medible, es decir, $q_n(B/x_0..x_n u_0..u_{n-1})$

- Una medida $\nu(./x)$ sobre $(U^N, \mathcal{B}^N)$ para cualquier $x \in X^N$ de forma que $\nu(W/x)$ es $\mathcal{A}^N$-medible si $W \in \mathcal{B}^N$ y $\mathcal{A}_n$ medible si $W \in \mathcal{B}_n$

PROCESO CONTROLADO O SECUENCIA CONTROLADA

Dados un objeto controlado $\mu(./u)$ y un control $\nu(./x)$, se define una distribución sobre $(X^N U^N, \mathcal{A}^N \mathcal{B}^N)$ cuyas distribuciones finito dimensionales son, para cualquier $n \in N$ y $A_0..A_n \in \mathcal{A}; B_0..B_n \in \mathcal{B}$

$$Pr\{\xi_0 \in A_0, \eta_0 \in B_0, \dots, \xi_n \in A_n, \eta_n \in B_n\} =$$

$$= \int_{A_0} p_0(dx_0) \cdot \int_{B_0} q_0(du_0/x_0) \ \dots \ \int_{A_n} p_n(dx_n/x_0..x_{n-1}u_0..u_{n-1}) \cdot$$

$$\int_{B_n} q_n(du_n/x_0..x_n u_0..u_{n-1})$$

Se construye así una variable aleatoria (ξ,η) sobre $X^N U^N$ cuya distribución viene unívocamente determinada por $\mu(./u)$ y $\nu(./x)$. A esta variable se le denomina secuencia controlada o, en general, proceso controlado, y proceso básico y de control a ξ y

PROBLEMA DE OPTIMIZACION

Dado un funcional de coste medible $F:(X^N U^N, \mathcal{A}^N \mathcal{B}^N) \longrightarrow (R, \mathcal{F})$ se define para cada control ν, ya que μ se considera fijo, $S(\nu) = E^{\nu} F(\xi, \eta)$, donde (ξ, η) es el proceso controlado a partir de μ y ν.

Se trata de determinar un control $\nu(./.)$ que minimice el coste esperado $S(\nu)$. Es decir, entre un conjunto $\mathcal{N}$ de controles admisibles, se busca el control óptimo ν_0 que debe verificar:

$$S(\nu_0) = \inf_{\nu \in \mathcal{N}} S(\nu)$$

El problema, en resumen, se plantea del siguiente modo: Para un objeto controlado $\mu(./.)$, un coste de control $F(.,.)$ y una clase de controles admisibles $\mathcal{N}$, determinar el control óptimo y si éste no existe, el control ε-óptimo para cualquier $\varepsilon > 0$.

A continuación se estudia bajo qué hipótesis se asegura la existencia de un control óptimo en la clase de todos los controles.

TEOREMA I.4.2

Sea U un conjunto compacto, sea X un espacio métrico separable completo y sea un objeto controlado $\mu(./u)$ con la siguiente condición:

(A) Para todo $g \in C_X$, la fución $\int_X g(x) p_n(dx/x_0 \ldots x_{n-1} u_0 \ldots u_{n-1})$ es continua en $(x_0 \ldots x_{n-1} u_0 \ldots u_{n-1})$

Entonces, si el coste de control $F(.,.)$ es una función acotada por abajo y semicontinua por abajo, existe un control óptimo en la clase de todos los controles.

A continuación se enuncia otro teorema que permite llegar de forma constructiva al control óptimo ó ε-óptimo.

TEOREMA I.4.3

Dado un objeto controlado en las condiciones del teorema anterior y un coste $F(x,u)$ acotado y semicontinuo por abajo, se verifica:

I.- Existen unas funciones $\phi_n(x_0..x_n u_0..u_n)$ para cualquier $n \in N$, que satisfacen las siguientes propiedades:

a.- Para todo $n \in N$, son acotadas y semicontinuas por abajo.

b.- Para todo $n \in N$, se verifica la relación:

$$\phi_n(x_0..x_n u_0..u_n) = \int_X \left(\operatorname{Inf}_{u_{n+1}} \phi_{n+1}(x_0....u_{n+1})\right) .$$

$$.p_{n+1}(dx_{n+1}/x_0..x_n u_0..u_n)$$

c.- Para todo $x \in X^N$ y $u \in U^N$ se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x_0..x_n u_0..u_n) \geqslant F(x,u)$$

II.- Sean las funciones de Borel $\varphi_n : X^N U^N \to U$ que son $\mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1}$ medibles verificando:

$$\phi_n(x_0..x_n u_0..u_{n-1} \varphi_n(x_0..x_n u_0..u_{n-1})) = \operatorname{Inf}_{u_n} \phi_n(x_0..x_n u_0..u_n)$$

y sean las funciones $\underline{\varphi}_n(.)$ definidas según:

$$\underline{\varphi}_0(x_0) = \varphi_0(x_0)$$

$$\underline{\varphi}_1(x_0 x_1) = \varphi_1(x_0 x_1 \underline{\varphi}_0(x_0))$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underline{\varphi}_n(x_0 \ldots x_n) = \varphi_n(x_0 \ldots x_n \underline{\varphi}_0(x_0) \ldots \underline{\varphi}_{n-1}(x_0 \ldots x_{n-1}))$$

Entonces, el control no aleatorizado $\underline{\nu}$ definido por $\{u_k = \underline{\varphi}_k(x_0 \ldots x_k) \;\; k=0,1,\ldots\}$ es óptimo y la cantidad

$S = \int_X (\operatorname{Inf}_{u_0} \phi_0(x_0 u_0)) p_0(dx_0)$ es el coste mínimo esperado.

CADENA DE MARKOV CONTROLADA

Un objeto de control es markoviano cuando las probabilidades condicionales $\{p_n(./.) \;\; n=0,1,\ldots\}$ son de la forma $p_n(A/x_0 \ldots x_{n-1} u_0 \ldots u_{n-1}) = p_n(A/x_{n-1} u_{n-1})$ para todo $A \in \mathcal{A}$, es decir, cuando la distribución de probabilidad de x_n, que representa el valor del proceso básico, no depende más que del último control tomado u_{n-1} y del valor x_{n-1} que tomó el proceso básico en la etapa anterior.

El problema de control se simplifica bastante si el coste de control $F(x,u)$ es de tipo evolutivo:

$$F(x,u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} g_j(x_j u_j) \right) f_k(x_k, u_k) \quad \text{suponiendo} \quad \prod_{j=0}^{-1} = 1$$

y donde las funciones $f_n(.,.)$ y $g_n(.,.)$ son $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$-medibles y $g_n \geq 0$.

En estas condiciones, se asegura la existencia de un control óptimo no aleatorizado definido por $\{u_k = \varphi_k(x_k),\ k=0,1,..\}$.

Obsérvese que la ventaja de la cadena de Markov controlada con coste de tipo evolutivo estriba en el hecho de que el control óptimo depende en cada etapa del estado del sistema, medido por el proceso básico, en esa etapa y no en las anteriores. Esto representa una propiedad deseable en un problema de control, ya que la información almacenada necesaria para controlar un sistema no aumenta con las etapas y se reduce simplemente a la observación del proceso básico en la última etapa.

CAPITULO II

CAPITULO II

COMPLETITUD ESENCIAL DE LOS CONTROLES BASADOS EN PROCESOS SUFICIENTES PARA EL CONTROL

1.- SUMARIO

En este capítulo se define para un proceso estocástico controlado un proceso suficiente para el control.

La idea fundamental de esta definición es considerar para cada etapa un estadístico suficiente que acumula toda la información sobre el control elegido ν que puede proporcionar el conocimiento de los valores tomados por el proceso básico y el proceso de control hasta esa etapa. Obsérvese que, fijado un objeto de control, para cada control ν se tiene determinada una probabilidad P_ν para el proceso controlado.

En la sección 2 se considera el proceso controlado en información completa planteado en el capítulo I. Se define el proceso suficiente para el control y se demuestra el teorema de completitud esencial de los controles basados en dicho proceso. La demostración del teorema se realiza primero para el problema de control con un número finito de etapas y, posteriormente, se generaliza el resultado.

En la sección 3 se plantea el problema de control en información incompleta, en que no se conocen exactamente los valores que toma el proceso básico, sino que se conocen los valores de un proceso estocástico cuya distribución de probabilidad depende de aquél. A este proceso se le denomina proceso de observación. Se plantea el nuevo problema y se define el proceso suficiente para el control, que no coincide con el del caso de información completa. Posteriormente se demuestra un teorema de completitud análogo al anterior.

2.- PROCESO ESTOCASTICO CONTROLADO EN INFORMACION COMPLETA

Se considera el problema planteado en la sección 4 del capítulo I.

PROCESO SUFICIENTE PARA EL CONTROL

Se dice que el proceso controlado admite un proceso suficiente t para el control, si existe un espacio medible (T,Γ) y una aplicación medible $t:(X^N U^N, \mathcal{A}^N \mathcal{B}^N) \longrightarrow (T^N, \Gamma^N)$ tal que para cualquier componente de t, $t_n:(X^N U^N, \mathcal{A}^N \mathcal{B}^N) \longrightarrow (T,\Gamma)$ verifica:

a.- t_n es $\mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1}$ medible, es decir, $t_n = t_n(x_0 .. x_n u_0 .. u_{n-1})$ y $t_n^{-1}(\Gamma) \subset \mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1}$

b.- t_n es suficiente para $\{P_\nu \; \nu \in \mathcal{N}\}$ sobre $\mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1}$, o, equivalentemente, la σ-álgebra $t_n^{-1}(\Gamma)$ es una sub-σ-álgebra suficiente de $\mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1}$ para $\{P_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$

Observación

A continuación se demuestra que t es suficiente para P_ν

sobre $\mathcal{A}^N \mathcal{B}^N$ si t es un proceso suficiente para el control. Se exigirá que la familia de probabilidades $\{P_\nu \ \nu \in \mathcal{N}\}$ sea absolutamente continua respecto a una medida σ-finita.

TEOREMA II.2.1

Dado un proceso controlado y una familia $\{P_\nu \ \nu \in \mathcal{N}\}$, distribuciones absolutamente continuas respecto a una medida σ-finita, entonces, si t es un proceso suficiente para el control, t es un estadístico suficiente para $\{P_\nu\}$ sobre $\mathcal{A}^N \mathcal{B}^N$.

Demostración

Sea Γ_n la σ-álgebra engendrada en T^N por los cilindros con bases $(0,1,..,n)$ y sea $t^{-1}(\Gamma_n)$ la σ-álgebra inversa; $t^{-1}(\Gamma_n)$ es, por tanto, la mínima σ-álgebra que contiene a $t_0^{-1}(\Gamma), t_1^{-1}(\Gamma) \ldots t_n^{-1}(\Gamma$

Al ser $t_n^{-1}(\Gamma) \subset \mathcal{A}_n \cdot \mathcal{B}_{n-1}$ para todo $n \in N$ por definición de proceso suficiente, se obtiene $t^{-1}(\Gamma_n) \subset \mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1}$

Las σ-álgebras $t^{-1}(\Gamma_n)$ forman una sucesión monótona $t^{-1}(\Gamma_{n-1}) \subset t^{-1}(\Gamma_n)$ para todo $n \in N$.

Se define $t^{-1}(\Gamma^N) = \sigma\{ t^{-1}(\Gamma_n), n-1,2,\ldots\}$ como la σ-álgebra engendrada por toda la sucesión de σ-álgebras.

Por aplicación directa del teorema I.3.1, ya que se supone que la familia de probabilidades está dominada por una medida σ-finita, al ser $t_n^{-1}(\Gamma) \subset t^{-1}(\Gamma_n)$ y ser la primera suficiente se concluye que $t^{-1}(\Gamma_n)$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}$ suficiente para $\{P_\nu, \nu\in\mathcal{N}\}$ para todo $n\in N$.

Para cualquier $A\in\mathcal{A}_k\mathcal{B}_{k-1}$ se define a partir de su función indicatriz I_A la variable aleatoria $\xi_n=E(I_A/t^{-1}(\Gamma_n))$ para $n\geq k$.

Al ser $t^{-1}(\Gamma_n)$ sub-σ-álgebra suficiente de $\mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}$, ξ_n es $t^{-1}(\Gamma_n)$ medible y no depende de $\nu\in\mathcal{N}$. Por otra parte, ξ_n es una martingala respecto a la sucesión de σ-álgebras $t^{-1}(\Gamma_n)$, que engendran a $t^{-1}(\Gamma^N)$.

En aplicación de un conocido teorema sobre martingalas, ver Gihman y Skorohod (1974), al ser $t^{-1}(\Gamma_n)$ una sucesión monótona de σ-álgebras y ser P_ν una probabilidad, medida finita, $E^\nu(I_A) = P_\nu(A)$ es finita para todo ν y todo $A\in\mathcal{A}_k\mathcal{B}_{k-1}$; en conclusión, se verifica que $\lim_{n\to\infty} E\{I_A/\ t^{-1}(\Gamma_n)\} = E\{I_A/\ t^{-1}(\Gamma^N)\}$ con prob. 1

Como $E\{I_A/\ t^{-1}(\Gamma_n)\}$ no depende de ν para todo n, el límite tampoco y, por tanto, $E\{I_A/\ t^{-1}(\Gamma^N)\}$ no depende de ν para todo $A\in\mathcal{A}_k\mathcal{B}_{k-1}$ con $k\in N$. Al estar $\mathcal{A}^N\mathcal{B}^N$ generada por las σ-álgebras $\mathcal{A}_k\mathcal{B}_{k-1}$ y ser $X^N U^N$ un espacio métrico separable y completo, se concluye que t es suficiente para $\{P_\nu, \nu\in\mathcal{N}\}$.

Observación

A continuación se definen los controles basados en estos procesos suficientes para después demostrar que la clase de estos controles es esencialmente completa para el problema de control.

Dado $\mathcal{N}$,conjunto de controles admisibles, una clase de controles $\mathcal{N}^*$ es esencialmente completa si para cualquier control $\nu \in \mathcal{N}$, existe un control $\nu^* \in \mathcal{N}^*$ tal que $S(\nu^*) \leq S(\nu)$, donde $S(.)$ es el coste esperado del control.

CLASE DE CONTROLES BASADOS EN UN PROCESO SUFICIENTE

Dado un proceso controlado que admite un proceso suficiente t, se dice que un control está basado en t si se define a partir de una sucesión de funciones $q_n^*(./.)$,n=0,1,.. verificando:

1.- $q_n^*(./.)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}$ respecto al primer argumento.

2.- Para todo $B \in \mathcal{B}$ $q_n^*(B/.)$ es $t_n^{-1}(\Gamma)$ medible, es decir, se puede representar como $q_n^*(B/t_n)$.

Se denominará $\mathcal{N}^*$ a la clase de controles basados en un proceso suficiente.

TEOREMA II.2.2

Dados X,U espacios métricos separables y completos y el funcional de coste $F(x,u)= \phi(x_0..x_n u_0..u_n)$, es decir, F es $\mathcal{A}_n \cdot \mathcal{B}_n$ medible para un n fijo; entonces, si existe un proceso suficiente t para el control, la clase $\mathcal{N}^*$ de controles basados en t es una clase esencialmente completa.

Demostración

Dado ν un control admisible definido por una sucesión de distribuciones $\{q_k(B/x_0..x_k u_0..u_{k-1}), k=0,1,..,n\}$, se construye el control $\nu^* \in \mathcal{N}^*$ a partir de la sucesión de distribuciones $q_k^*(B/t_k)$ definidas según:

$$q_k^*(B/\ t_k) = \int_{X^k U^{k-1}} q_k(B/x_0..x_k u_0..u_{k-1}) Pr(dx_0...du_{k-1}/t_k)$$

Al ser t_k suficiente para $P_\nu(x_0..x_k u_0..u_{k-1})$, la distribución $Pr(dx_0...du_{k-1}/t_k)$ no depende de ν.

Hay que demostrar que ν^* es tan bueno como ν, es decir, que $E^{\nu^*}(\phi(x_0..x_n u_0..u_n)) \leq E^{\nu}(\phi(x_0..x_n u_0..u_n))$, en concreto, se demostrará la igualdad de ambas expresiones.

Al ser t_k suficiente, (t_k, u_k) también lo es para todo $k=0,n$ y $E(\phi(x_0..x_n u_0..u_n)/t_n u_n)$ no depende de ν, por lo que se puede denotar $\phi(t_n, u_n)$ a la expresión anterior y transformar así el coste esperado:

$$E^{\nu}(\phi(x_0..x_n u_0..u_n)) = E^{\nu}(E(\phi(x_0..x_n u_0..u_n)/t_n u_n)) = E^{\nu}\phi(t_n u_n).$$

La demostración será por inducción respecto de n:

<u>n=0</u>

$$E^{\nu}(\phi) = E^{\nu}(E^{\nu}(\phi(t_0 u_0)/t_0)) = E(\int_U \phi(t_0 u_0) P_r^{\nu}(du_0/t_0)$$

donde la última igualdad se debe a que la distribución de t_0 sólo depende de x_0 y no del control ν.

Siguiendo el desarrollo, se tiene:

$$= E \int_U \phi(t_0 u_0) \int_X q_0(du_0/x_0) Pr(dx_0/t_0) = E \int_U \phi(t_0 u_0) q_0^*(du_0/t_0) = E^{\nu^*}(\phi)$$

que es lo que se pretende demostrar para n=0

$\underline{n=n-1}$

Supuesto que $E^{\nu}\phi = E^{\nu^*}\phi$ para ϕ función $\mathcal{A}_{n-1}\mathcal{B}_{n-1}$ medibl

$\underline{n=n}$

$$E^{\nu}\phi(t_n u_n) = E^{\nu}(E^{\nu}(\phi(t_n u_n)/t_n)) = E^{\nu}\left(\int_U \phi(t_n u_n)\overset{\nu}{Pr}(du_n/t_n)\right)$$

y $\overset{\nu}{Pr}(du_n/t_n) = \int_{X^n U^{n-1}} \overset{\nu}{Pr}(du_n/x_0..x_n u_0..u_{n-1} t_n) Pr(dx_0...du_{n-1}/t_n) =$

$$= \int_{X^n U^{n-1}} q_n(du_n/x_0..x_n u_0..u_{n-1}) Pr(dx_0...du_{n-1}/t_n) = q_n^*(du_n/t_n)$$

Se consigue así que $E^{\nu}(\phi(t_n u_n)/t_n) = E^{\nu^*}(\phi(t_n u_n)/t_n)$

y a ambas expresiones se las denomina por $\Psi(t_n)$.

Además, $E^{\nu}(\Psi(t_n)) = E^{\nu}(E(\Psi(t_n)/t_{n-1}u_{n-1}))$, y coincide la expresión del paréntesis para ν y ν^*, en efecto:

$$E(\Psi(t_n)/t_{n-1}u_{n-1}) = \int_T \Psi(t_n) Pr(dt_n/t_{n-1}u_{n-1}) =$$

$$= \int_T \int_{X^n U^{n-1}} \Psi(t_n) Pr(dt_n/x_0...u_{n-1}) Pr(dx_n/x_0...u_{n-1}) Pr(dx_0...du_{n-2}/t_{n-1}u_n)$$

En esta expresión ningún término depende de ν, ya que t_n es $\mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}$ medible, $Pr(dx_n/x^{n-1}u^{n-1})$ depende de μ pero no de ν y la última probabilidad no depende de ν por ser $(t_{n-1}u_{n-1})$ suficiente para ν sobre $\mathcal{A}_{n-1}\mathcal{B}_{n-2}$.

Se puede poner $E(\Psi(t_n)/t_{n-1}u_{n-1}) = \gamma(t_{n-1}u_{n-1})$ y resumiendo: $E^{\nu}\phi(t_n u_n) = E^{\nu}(\Psi(t_n)) = E^{\nu}(\gamma(t_{n-1}u_{n-1}))$ y, por la hipótesis de inducción: $E^{\nu}\gamma(t_{n-1}u_{n-1}) = E^{\nu^*}\gamma(t_{n-1}u_{n-1}) = E^{\nu^*}(\phi(t_n u_n))$.

En conclusión, si ϕ es una función $\mathcal{A}_n\mathcal{B}_n$ medible se verifica que $E^{\nu}\phi = E^{\nu^*}\phi$. El teorema queda demostrado.

Observación

Para demostrar el teorema en el caso general, en que el coste es una función semicontinua por abajo y acotada por abajo sobre $X^N U^N$, se precisan los lemas y el corolario del apartado 2 del capítulo I.

TEOREMA II.2.3

Sea un problema de control con X y U espacios métricos separables y completos y U, además, compacto, sea la función de coste $F(x,u)$ semicontinua por abajo y acotada por abajo sobre $X^N U^N$; entonces, si existe un proceso suficiente t para el control, la clase de controles basados en t es una clase esencialmente completa.

Demostración

Se construye $\mathcal{U}^*$ de forma análoga al teorema anterior.

Por el lema I.2.1 se construye la sucesión $F_n(x,u)$ de funciones continuas y acotadas que tiende a $F(x,u)$.

Al ser acotadas, para todo $n \in N$ existe $B_n \in R$ / $|F_n(x,u)| \leq B_n$ para todo $(x,u) \in X^N U^N$.

Por el lema I.2.2, para cada una de estas funciones $F_n(.,.)$ existe una sucesión de funciones $\Psi^n_{n'}(x_0..x_n u_0..u_{n'})$ tal que

$$\lim_{n' \to \infty} \Psi^n_{n'}(x_0..x_{n'} u_0..u_{n'}) = \lim_{n' \to \infty} F^n_{n'}(x_0..x_{n'}\underline{xxx}...u_0..u_{n'}\underline{uuu}...)$$

con $\underline{x}$ y $\underline{u}$ pertenecientes a X y U respectivamente.

Claramente, se verifica para todo $n, n' \in N$

$$\left| F^{n}_{n'}(x,u) \right| \leq B_n \text{ para todo } (x,u) \in X^N U^N \text{ y } \lim_{n' \to \infty} F^{n}_{n'}(x,u) = F_n(x,u)$$

también para todo (x,u).

Por el teorema de la convergencia dominada:

$$E^{\nu} F_n = \lim_{n' \to \infty} E^{\nu} F^{n}_{n'}, \quad \text{para todo } n \in N$$

Aplicando el teorema demostrado anteriormente, se verifica que para todo $n' \in N$ $E^{\nu} F^{n}_{n'} = E^{\nu^*} F^{n}_{n'}$, y, en el límite, $E^{\nu} F_n = E^{\nu^*} F_n$ $n \in N$

Por el teorema de la convergencia monótona:

$$E^{\nu} F = \lim_n E^{\nu} F_n = \lim_n E^{\nu^*} F_n = E^{\nu^*} F$$

Como se quería demostrar.

3.- PROCESO ESTOCASTICO CONTROLADO EN INFORMACION INCOMPLETA

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sean dos espacios medibles $(X \cdot Y, \mathcal{A}_x \mathcal{A}_y)$ y $(U, \mathcal{B})$ que representan el primero el espacio fase del proceso básico y el segundo el espacio fase de control, X e Y son, respectivamente, la componente no observable o estado del sistema y la observación.

Se consideran los espacios producto $(X^N \cdot Y^N, \mathcal{A}_x^N \mathcal{A}_y^N)$ y $(U^N, \mathcal{B}^N)$ y sean $\mathcal{A}_{x,n}$ $\mathcal{A}_{y,n}$ $\mathcal{B}_n$ las σ-álgebras de cilindros en X^N, Y^N y U^N con bases sobre $(0,1,..,n)$ respectivamente.

Para definir el proceso controlado es preciso dar un proceso estocástico con valores en $X \cdot Y$ condicionado a haber tomado una sucesión de controles en cada instante de tiempo; es decir, el objeto controlado. También sería necesario definir una regla de control para seleccionar dichos controles, el control.

Si X,Y,U son espacios métricos separables y completos y $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$ $\mathcal{B}$ son σ-álgebras de Borel, se pueden definir, tanto el objeto controlado como el control, de dos formas equivalentes:

El objeto controlado

- Por las distribuciones para cada $n \in N$:

$$p_n^1(dx_n/x_0..x_{n-1}y_0..y_{n-1}u_0..u_{n-1})$$

$$p_n^2(dy_n/x_0..x_n y_0..y_{n-1}u_0..u_{n-1})$$

- Por una familia de medidas $\mu(./u)$ sobre $(X^N Y^N, \mathcal{A}_x^N \mathcal{A}_y^N)$ para todo $u \in U^N$, esta familia verifica que $\mu(V/u)$ es $\mathcal{B}^N$medible para $V \in \mathcal{A}_x^N \cdot \mathcal{A}_y^N$ y $\mathcal{B}_{n-1}$medible para $V \in \mathcal{A}_{x,n} \cdot \mathcal{A}_{y,n}$

El control

- Por las distribuciones para cada $n \in N$ $q_n(du_n/y_0..y_n u_0..u_{n-1})$

- Por una familia de medidas $\nu(./y)$ sobre $(U^N, \mathcal{B}^N)$ para $y \in Y^N$ tal que es $\nu(W/y)$ $\mathcal{A}_y^N$medible si $W \in \mathcal{B}^N$ y $\mathcal{A}_{y,n}$medible si $W \in \mathcal{B}_n$.

A esta familia de medidas se le denomina $\mathfrak{N}$.

Observación

Al ser un problema de información incompleta no se conoce del espacio fase del proceso básico nada más que la componente y, observación del sistema. Por esta razón, los controles en cada etapa dependen de las observaciones obtenidas hasta ese momento y no dependen de la componente x, estado del sistema.

Fijado un objeto de control $\mu(./u)$ y un control $\nu(./y)$ se define una distribución de probabilidad sobre $(X^N Y^N U^N, \mathcal{A}_x^N \mathcal{A}_y^N \mathcal{B}^N)$ a partir de las distribuciones finito-dimensionales:

Para $A_{x,0} A_{x,1} \dots A_{x,n} \in \mathcal{A}_x$; $A_{y,0} A_{y,1} \dots A_{y,n} \in \mathcal{A}_y$; $B_0 B_1 \dots B_n \in \mathcal{B}$

$$\Pr(\xi_0^x \in A_{x,0}\, \xi_0^y \in A_{y,0}\, \eta_0 \in B_0; \dots; \xi_n^x \in A_{x,n}\, \xi_n^y \in A_{y,n}\, \eta_n \in B_n) =$$

$$= \int_{A_{x,0}} p_0^1(dx_0) \int_{A_{y,0}} p_0^2(dy_0/x_0) \int_{B_0} q_0(du_0/y_0) \quad \dots\dots \int_{A_{x,n}} p_n^1(dx_n/x_0 \dots u_{n-1})$$

$$\cdot \int_{A_{y,n}} p_n^2(dy_n/x_0 \dots x_n y_0 \dots y_{n-1} u_0 \dots u_{n-1}) \int_{B_n} q_n(du_n/y_0 \dots y_n u_0 \dots u_{n-}\ )$$

Se obtiene así una variable aleatoria $(\xi^x \xi^y \eta)$ con valores en $X^N Y^N U^N$ cuya distribución queda definida por $\mu(./u)$ y $\nu(./y)$. A esta variable se la denomina proceso controlado en información incompleta, el proceso básico es $(\xi^x \xi^y)$ y el proceso de control η.

Se dispone, además, de un funcional de coste $F: X^N U^N \to R$ medible respecto $\mathcal{A}_x^N \mathcal{B}^N$.

El problema que se plantea es el mismo que en información completa: Determinar el control $\nu(./y)$ dentro de un conjunto de controles admisibles de manera que para un objeto controlado, que se supone fijo $\mu(./u)$, la variable $(\xi^x \xi^y \eta)$ construida por el método anterior minimice $S(\nu) = E^{\nu} F(\xi^x, \eta)$.

Para cualquier control $\nu \in \mathcal{N}$ se obtiene una familia de distribuciones de probabilidad $\{P_\nu\}_{\nu\in\mathcal{N}}$ sobre $(X^N Y^N U^N, \mathcal{A}_x^N \mathcal{A}_y^N \mathcal{B}^N)$.

PROCESO SUFICIENTE PARA EL CONTROL

Se dice que el proceso controlado en información incompleta admite un proceso suficiente t si existe un espacio medible (T, Γ) una aplicación medible $t:(Y^N U^N, \mathcal{A}_y^N \mathcal{B}^N) \to (T^N, \Gamma^N)$ tal que cada componente de t (t_n) verifique:

1.- $t_n: (Y^N U^N, \mathcal{A}_y^N \mathcal{B}^N) \to (T, \Gamma)$ es $\mathcal{A}_{y,n}\mathcal{B}_{n-1}$ medible, es decir, $t_n = t_n(y_0 \ldots y_n u_0 \ldots u_{n-1})$

2.- t_n es un estadístico suficiente para la familia $\{P_\nu\}_{\nu\in\mathcal{N}}$ sobre $\mathcal{A}_{y,n}\mathcal{B}_{n-1}$, es decir, $t_n^{-1}(\Gamma)$ es una sub-σ-álgebra suficiente de $\mathcal{A}_{y,n}\mathcal{B}_{n-1}$ para $\{P_\nu\}_{\nu\in\mathcal{N}}$.

TEOREMA II.3.1

Dado el proceso controlado definido anteriormente y una familia de distribuciones de probabilidad $\{P_\nu\}_{\nu\in\mathcal{N}}$ absolutamente continua respecto a una medida σ-finita, si t es un proceso suficiente para el control, t es suficiente para $\{P_\nu\}$ sobre $\mathcal{A}_y^N \mathcal{B}^N$.

La demostración es análoga a la correspondiente al caso de información completa (teorema II.2.1).

Observación

A continuación se demuestra la completitud esencial de los controles basados en un proceso suficiente.

CLASE DE CONTROLES BASADOS EN UN PROCESO SUFICIENTE

Dado un proceso controlado en información incompleta que admite un proceso suficiente t, se dice que un control esta basado en t si se define a partir de una sucesión de funciones $\{q_n^*(./.)\}_{n\in N}$ verificando:

1.- $q_n^*(./.)$ es una medida probabilística sobre $\mathcal{B}$ respecto el primer argumento.

2.- Para todo $B\in\mathcal{B}$ $q_n^*(B/.)$ es $t_n^{-1}(\Gamma)$-medible, es decir, se puede denotar $q_n^*(B/t_n)$

TEOREMA II.3.2

Dados X,Y,U espacios métricos separables y completos y el funcional de coste $F(x,u)=\phi(x_0..x_n u_0..u_n)$, si existe un proceso suficiente t para el control, la clase de controles basados en t es una clase esencialmente completa.

Demostración

Dado ν, un control admisible ($\nu\in\mathcal{N}$) definido por la sucesión de distribuciones de probabilidad $\{q_k(B/y_0..y_n u_0..u_{n-1}), k\in N\}$ se construye el control $\nu^*\in\mathcal{N}^*$ (Clase de controles basados en t) a partir de la sucesión de distribuciones de probabilidad $\{q_k^*(./t_k)\}$ sobre $\mathcal{B}$ definidas según:

$$q_k^*(B/t_k)=\int_{Y^k U^{k-1}} q_k(B/y_0\ldots u_{k-1})Pr(dy_0\ldots du_{k-1}/t_k) \qquad B\in\mathcal{B}, k\in N$$

Al ser t_k suficiente para P_ν sobre $\mathcal{A}_{y,k}\mathcal{B}_{k-1}$, la distribución $Pr(dy_0\ldots du_{k-1}/t_k)$ no depende de ν.

Antes de demostrar que $E^\nu\phi = E^{\nu^*}\phi$ se construye:

$\phi(t_n,u_n)=E^\nu(\phi(x_0..x_nu_0..u_n)/t_nu_n)$, que no depende de $\nu\in\mathcal{N}$,

n efecto,

$$E^\nu(\phi(x_0\ldots u_n)/t_nu_n)=\int_{X^nU^{n-1}}\phi(x_0\ldots u_n)\overset{\nu}{Pr}(dx_0\ldots du_{n-1}/t_nu_n)=$$

$$=\int_{X^nU^{n-1}}\int_{Y^n}\phi(x_0\ldots u_n)\overset{\nu}{Pr}(dx_0..dx_n/y_0..y_nu_0..u_nt_n)\overset{\nu}{Pr}(dy_0\ldots du_{n-1}/t_nu_n)$$

Donde $\overset{\nu}{Pr}(dy_0..dy_ndu_0..du_{n-1}/t_nu_n)$ no depende de ν, y

$\overset{\nu}{Pr}(dx_0..dx_n/y^nu^nt_n)=\overset{\nu}{Pr}(dx_n/x^{n-1}y^nu^nt_n)\ldots\overset{\nu}{Pr}(dx_0/y^nu^nt_n)$, y cada

na de estas distribuciones no depende de ν, ya que para todo k=0,n

$$r(dx_k/x^{k-1}y^nu^nt_n)=\frac{Pr(y_n..y_k/x^ky^{k-1}u^nt_n)Pr(x_k/x^{k-1}y^{k-1}u^nt_n)}{\int_X Pr(y_n..y_k/x^ky^{k-1}u^nt_n)Pr(dx_k/x^{k-1}y^{k-1}u^nt_n)}$$

$$Pr(x_k/x^{k-1}y^{k-1}u^nt_n)=p_k^1(x_k/x^{k-1}y^{k-1}u^{k-1})$$

$$Pr(y_n..y_k/x^ky^{k-1}u^nt_n)=\int_X..\int_X p_n^2(y_n/x^ny^{n-1}u^{n-1})p_n^1(dx_n/x^{n-1}y^{n-1}u^{n-1})$$

$$\ldots p_k^2(y_k/x^ky^{k-1}u^{k-1})$$

y ambas distribuciones no dependen de ν.

Por consiguiente, $E^\nu(\phi(x_0..x_nu_0..u_n)/t_nu_n)=\phi(t_nu_n)$, que o depende de ν.

A continuación se demuestra por inducción respecto de n que

$E^\nu(\phi(x_0..x_nu_0..u_n))=E^{\nu^*}(\phi(x_0..x_nu_0..u_n))$:

n=0

(ϕ es $\mathcal{A}_{x,0}\mathcal{B}_0$ medible)

$$E^{\nu}\phi = E(E^{\nu}(\phi(t_0u_0)/t_0)) = E^{\nu}(\int_U \phi(t_0u_0)\Pr^{\nu}(du_0/t_0)) =$$

$$=\int_T(\int_U\phi(t_0u_0)\Pr^{\nu}(du_0/t_0))\Pr^{\nu}(dt_0),$$ y para todo $G \in \Gamma$

$$\Pr^{\nu}(G) = \int_Y \Pr^{\nu}(G/y_0)\Pr(dy_0) = \int_Y\int_X \Pr(G/y_0)p_0^2(dy_0/x_0)p_0^1(dx_0) = \Pr(G)$$

Es decir, no depende de ν, y $E^{\nu}(\phi) = E(\int_U \phi(t_0u_0)\Pr^{\nu}(du_0/t_0))$ y

$$\Pr^{\nu}(du_0/t_0) = \int_Y q_0(du_0/y_0)\Pr(dy_0/t_0) = \Pr^{\nu^*}(du_0/t_0)$$ y, en consecuencia,

$$E^{\nu}\phi = E(\int_U \phi(t_0u_0)\Pr^{\nu^*}(du_0/t_0)) = E^{\nu^*}\phi \quad \text{(cierto para } n=0)$$

n=n-1

Se supone la hipótesis cierta para n-1, es decir, $E^{\nu}\phi = E^{\nu^*}\phi$ para cualquier función $\mathcal{A}_{x,n-1}\mathcal{B}_{n-1}$ medible.

n=n

$$E^{\nu}\phi(t_nu_n) = E^{\nu}(E^{\nu}(\phi(t_nu_n)/t_n)) = E^{\nu}(\int_U \phi(t_nu_n)\Pr^{\nu}(du_n/t_n))$$

$$\Pr^{\nu}(du_n/t_n) = \int_{Y^n}\int_{U^{n-1}} \Pr(du_n/y_0\ldots y_nu_0\ldots u_{n-1})\Pr(dy_0\ldots du_{n-1}/t_n) =$$

$$=\int_{Y^n}\int_{U^{n-1}} q_n(du_n/y_0\ldots u_{n-1})\Pr(dy_0\ldots du_{n-1}/t_n) = q_n^*(du_n/t_n)$$

Se tiene, pues, $E^{\nu}(\phi(t_nu_n)/t_n) = E^{\nu^*}(\phi(t_nu_n)/t_n) = \psi(t_n)$, donde $\psi(t_n)$ es la misma para ν y ν^*.

$E^{\nu}(\Psi(t_n))=E^{\nu}(E^{\nu}(\Psi(t_n)/t_{n-1}u_{n-1}))$, a continuación se demues-
ra que esta última expresión no depende de ν.

$$E^{\nu}(\Psi(t_n)/t_{n-1}u_{n-1}) = \int_T \Psi(t_n)\Pr^{\nu}(dt_n/t_{n-1}u_{n-1}) =$$

$$= \int_T \int_{Y^n}\int_{U^{n-1}} \Psi(t_n)\Pr^{\nu}(dt_n/y_0\ldots u_{n-1}t_{n-1})\Pr^{\nu}(dy_0..dy_n du_0..du_{n-2}/t_{n-1}u_{n-1})$$

Al ser t_n $\mathcal{A}_{y,n}\mathcal{B}_{n-1}$ medible, $\Pr(dt_n/y_0..u_{n-1})$ no depende de ν
$\Pr(dy_0\ldots du_{n-2}/t_{n-1}u_{n-1})$ se descompone según:

$\Pr(dy_n/y^{n-1}u^{n-1}t_{n-1})\Pr(dy_0..dy_{n-1}du_0..du_{n-2}/t_{n-1}u_{n-1})$, que
or un desarrollo del primer término análogo al realizado en el eorema II.3.2 se concluye que no depende de ν, sino sólo de μ; l segundo término no depende de ν por la suficiencia de $(t_{n-1}u_{n-1})$ ara P_{ν} sobre $\mathcal{A}_{y,n-1}\mathcal{B}_{n-2}$.

Así pues, $E^{\nu}(\Psi(t_n)/t_{n-1}u_{n-1})=\gamma(t_{n-1}u_{n-1})$ y no depende de ν

En resumen, $E^{\nu}(\phi(t_nu_n)) = E^{\nu}(\Psi(t_n))=E^{\nu}(\gamma(t_{n-1}u_{n-1}))$, y por a hipótesis de inducción, $E^{\nu}(\gamma(t_{n-1}u_{n-1}))=E^{\nu^*}(\gamma(t_{n-1}u_{n-1}))$y se oncluye que $E^{\nu}\phi = E^{\nu^*}\phi$, que es lo que se quería demostrar.

Observación

Para el caso general, el teorema de completitud de controles asados en un proceso suficiente para el control, sólo se enuncia, a que la demostración es análoga y se basa en los mismos lemas de álculo que el teorema equivalente en el problema de control en nformación completa.

TEOREMA II.3.3

Sea un problema de control en información incompleta con X,Y y U espacios métricos separables y completos. Sea U, además, compacto. Sea la función de coste F(x,u) semicontinua por abajo y acotada por abajo sobre $X^N U^N$, entonces, si existe un proceso suficiente t para el control, la clase de controles basados en t es una clase esencialmente completa.

CAPITULO III

CAPITULO III

COMPLETITUD ESENCIAL DE LOS CONTROLES BASADOS EN PROCESOS SUFICIENTES PARA EL PROCESO BASICO

1.- SUMARIO

A diferencia del capítulo anterior, en éste sólo se consideran procesos controlados en información incompleta.

En la sección 2 se plantea el problema de control en información incompleta. Las distribuciones de probabilidad que caracterizan el objeto controlado no son tan generales como en el capítulo II, ya que se exige que las correspondientes a las componentes no observables del proceso básico dependan de las componentes no observables en las etapas anteriores y del último control tomado; las distribuciones de probabilidad de las observaciones en cada etapa, a su vez, dependen de la componente no observable del proceso básico en esa etapa y del último control. El coste de control es la suma de los costes asociados a cada una de las etapas, que vienen evaluados por funciones que dependen de la componente no observable y del control correspondientes a cada etapa.

Se define en la siguiente sección el proceso suficiente para el proceso básico como un proceso estocástico cuyas componentes son función de las observaciones y controles conocidos hasta ese instante y que acumulan toda la información sobre la trayectoria de la componente no observable del proceso básico. Se le exigirá a esos estadísticos suficientes así definidos que sean minimal suficientes dando lugar a los procesos minimal suficientes para el proceso básico.

En la sección 4 se define la clase de controles basados en estos procesos.

En la sección 5 se demuestra el teorema de completitud esencial de los controles de la clase definida en la sección anterior Se distinguirá también el caso de un número finito de etapas del caso general.

Se tratan en la sección 6 los controles no aleatorizados basados en los procesos minimal-suficientes. La importancia de éstos radica en el hecho de que los controles óptimos serán no aleatorizados según se demostrará posteriormente.

A partir de un problema de control en información incompleta con las hipótesis de la sección 2 y de la existencia de un proceso minimal suficiente para el proceso básico se construye un nuevo problema de control en información completa cuyo control óptimo será el control óptimo del problema original planteado en la clase de los controles basados en un proceso minimal suficiente.

En la sección 7 se define este problema de control, que se denominará problema de control asociado.

En la sección 8 se demuestra la existencia de un control óptimo para el problema de control asociado.

Y, por último, en la sección 9, se llega de forma constructiva a dicho control óptimo.

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CONTROL

Se propone a continuación un problema de control en información incompleta en tiempo discreto.

El espacio de fase del proceso básico es el producto de dos espacios X e Y con sus respectivas σ-álgebras $\mathcal{A}_x \mathcal{A}_y$. Se exige que X e Y sean espacios métricos separables y completos. X define el estado del sistema y no se puede observar, mientras que Y es observable y es la única información de que se dispone, aparte de los controles que se han tomado, para estimar el estado del sistema en cada momento.

El espacio fase de control es, asimismo, el espacio medible $(U,\mathcal{B})$, donde U es un espacio métrico separable y completo y, además, un conjunto compacto y $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra.

Se definen a continuación los espacios productos $(X^N Y^N \mathcal{A}_x^N \mathcal{A}_y^N)$ y $(U^N, \mathcal{B}^N)$ indicando por $\mathcal{A}_{x,n}$, $\mathcal{A}_{y,n}$ y $\mathcal{B}_n$ las mínimas σ-álgebras sobre los cilindros en X^N, Y^N y U^N respectivamente con bases sobre $(0,1,\ldots,n)$.

Para que quede definido el proceso controlado, es necesario dar un proceso estocástico con valores en $X \cdot Y$ condicionado a haber tomado una sucesión de controles y definir una regla de control, que dependerá de los valores observados Y, con la cual se hayan seleccionado dichos controles.

Se parte del conocimiento de la evolución del sistema según las distribuciones de probabilidad $p_0^1(dx_0)$ y $p_n^1(dx_n/x_0 \ldots x_{n-1}u_{n-1})$ para $n \geq 1$, es decir, la evolución del sistema en un instante n depende de los estados alcanzados en las etapas anteriores $(x_0 \ldots x_{n-1})$ y del último control u_{n-1}.

Es natural que se exija que la evolución de las observaciones del sistema sea función del estado de éste en forma de distribuciones de probabilidad $p_n^2(dy_n/x_n u_{n-1})$ para $n \geq 0$. En otras palabras, cada observación depende del estado del sistema en ese momento y del último control conocido.

A partir de estas distribuciones:

$$p_0^1(dx_0)$$

$$p_n^1(dx_n/x^{n-1}u_{n-1}) \qquad n \geq 1$$

$$p_n^2(dy_n/x_n u_{n-1}) \qquad n \geq 0,$$ se construye la función de probabilidad en $X \cdot Y$, ya que para cualquier $\Lambda_1 \in \mathcal{A}_x$ y $\Lambda_2 \in \mathcal{A}_y$ se define:

$$p_n(\Lambda_1 \Lambda_2/x^{n-1}u_{n-1}) = \int_{\Lambda_1}\int_{\Lambda_2} p_n^2(dy_n/x_n u_{n-1})\ p_n^1(dx_n/x^{n-1}u_{n-1})$$

También se define una medida en $(X^N Y^N, \mathcal{A}_x^N \mathcal{A}_y^N)$ a partir de los cilindros en $\mathcal{A}_{x,n}\mathcal{A}_{y,n}$ y que depende paramétricamente de la secuencia de controles de la siguiente forma:

Sea C un cilindro, $C=\{(x,y)\in X^N Y^N, x_0\in C_{x0}; y_0\in C_{y0}; \ldots ; x_n\in C_{xn}; y_n\in C_{yn}\}$ con $C_{x0}; C_{xn}; \ldots \in \mathcal{A}_x$ y $C_{y0}; C_{yn} \ldots \in \mathcal{A}_y$; entonces, si $u\in U^N$

$$\mu(C/u) = \int_{C_{x0}} p_0^1(dx_0) \int_{C_{y0}} p_0^2(dy_0/x_0) \quad \ldots \int_{C_{xn}} p_n^1(dx_n/x^{n-1}u_{n-1}) \int_{C_{yn}} p_n^2(dy_n/x_n u_n$$

Bajo las hipótesis de regularidad vistas en la sección 4 del capítulo I se puede asegurar que esta medida $\mu(./u)$ está asociada unívocamente al conjunto de distribuciones $\{p_n^1(./.), p_n^2(./.)\}_{n\in N}$

De manera análoga, el control viene definido por una familia de distribuciones de probabilidad $q_n(du_n/y^n u^{n-1})$ para todo $n\in N$. El conjunto de controles admisibles es el formado por aquellos controles que dependen en cada instante de las observaciones y controles conocidos hasta ese instante.

Estas funciones definen una medida sobre $(U^N \mathcal{B}^N)$ que depende paramétricamente de las observaciones:

Sea D un cilindro de $\mathcal{B}_n$, $D=\{u\in U^N \ / \ u_0\in D_0 \ldots, u_n\in D_n\}$ con $D_0; \ldots ; D_n \in \mathcal{A}_y$ sea $y\in Y^N$

$$\nu(D/y) = \int_{D_0} q_0(du_0/y_0) \int_{D_1} q_1(du_1/y^1u^0) \ \ldots \int_{D_n} q_n(du_n/y^n u^{n-1})$$

Igualmente, bajo las hipótesis de regularidad mencionadas anteriormente, se asegura que esta medida $\nu(D/y)$ verifica que es $\mathcal{A}_y^N$ medible si $D\in\mathcal{B}^N$ y $\mathcal{A}_{y,n}$ medible si D es $\mathcal{B}_n$ medible y está asociada unívocamente al conjunto de distribuciones $\{q_n(./.), n=0,1..\}$

Se denomina $\mathcal{N}$ al conjunto de estos controles.

Se define el coste de control como una función que depende de los controles y de la evolución del sistema sólo a través de la componente no observable. Si se considera un número finito de etapas 0,1,..,n se define esta función de coste como:

$$\phi(x_0 x_1 .. x_n u_0 u_1 .. u_n) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x_k u_k)$$

El problema de control consiste en, fijado el objeto controlado $\mu(./u)$, determinar el control $\nu(./y)$ de tal forma que, si $(\xi^x \xi^y \eta)$ es el proceso controlado asociado a ambos, se minimice la esperanza del coste $\phi(\xi^x \eta)$; al coste esperado según el control se le denomina $S(\nu)$, $(S(\nu) = E^{\nu}\phi(x^n u^n))$.

3.- PROCESO SUFICIENTE PARA EL PROCESO BASICO

Para el problema de control en información incompleta planteado anteriormente, se define un proceso suficiente t para el proceso básico como una aplicación medible:

$t: (Y^N U^N, \mathcal{A}_y^N \mathcal{B}^N) \to (T^N, \Gamma^N)$, donde (T,Γ)es un espacio medible formado por un espacio métrico separable y completo y su σ-álgebra de Borel, y de forma que cada componente t_n de t verifica:

1.- $t_n:(Y^N U^N, \mathcal{A}_y^N \mathcal{B}^N) \to (T,\Gamma)$ es $\mathcal{A}_{y,n}\mathcal{B}_{n-1}$medible, en otras palabras, $t_n = t_n(y_0 y_1 .. y_n u_0 u_1 .. u_{n-1})$

2.- t_n es un estadístico suficiente para x^n en la distribución de probabilidad $Pr(y^n u^{n-1}/x^n)$.

Observación

Posteriormente se construirá esta distribución de probabilidad en función de las distribuciones asociadas al objeto controlado y al control en el problema original.

PROCESO MINIMAL SUFICIENTE

Si, además de las condiciones anteriores, se le exige a t_n, para todo n, que sea un estadístico minimal suficiente, se dice que t es un proceso minimal suficiente para el proceso básico.

CALCULO DE LA DISTRIBUCION $Pr(Y^n U^{n-1}/X^n)$

La construcción de la función de probabilidad correspondiente será por inducción respecto de n:

$n=0$

$Pr(y^0/x^0) = p_0^2(y_0/x_0)$, que es conocida.

$n=k$

Supuesta conocida $Pr(y^k u^{k-1}/x^k)$

$n=k+1$

$$Pr(y^{k+1}u^k/x^{k+1}) = Pr(y^k y_{k+1} u^k/x^{k+1}) = Pr(y_{k+1}/x^{k+1} y^k u^k) Pr(y^k u^k/x^{k+1})$$

y, cada uno de estos miembros se deduce a partir de las distribuciones de probabilidad originales del objeto controlado y el control. En efecto:

$$Pr(y_{k+1}/x^{k+1} y^k u^k) = p_{k+1}^2(y_{k+1}/x_{k+1} u_k)$$

$$\Pr(y^k u^k/x^{k+1}) = \frac{\Pr(x_{k+1}/x^k y^k u^k)\ \Pr(y^k u^k/x^k)}{\int_{Y^k U^k} \Pr(x_{k+1}/x^k y^k u^k)\ \Pr(dy^k du^k/x^k)}$$

y el numerador se puede descomponer como:

$p^1_{k+1}(x_{k+1}/x^k u_k)\ \Pr(u_k/x^k y^k u^{k-1})\ \Pr(y^k u^{k-1}/x^k)$, y, por consiguiente, se concluye:

$$\Pr(y^{k+1}u^k/x^{k+1}) = \frac{p^2_{k+1}(y_{k+1}/x_{k+1}u_k)p^1_{k+1}(x_{k+1}/x^k u_k)q_k(u_k/y^k u^{k-1})\Pr(y^k u^{k-1}/x^k)}{\int_{Y^k U^k} p^1_{k+1}(x_{k+1}/x^k u_k)q_k(u_k/y^k u^{k-1})\Pr(dy^k du^{k-1}/x^k)}$$

Como se pretendía demostrar, la distribución $\Pr(y^n u^{n-1}/x^n)$, se contruye a partir de las distribuciones p^1_n, p^2_n, q_n $n \in N$.

PROPOSICION III.3.1

Al exigir que t_n sea un estadístico minimal suficiente, se obtiene una ecuación de recurrencia para t_n en función de t_{n-1}, y_n y u_{n-1}, es decir:

$t_n = t_n(t_{n-1}, y_n, u_{n-1})$

Demostración

Basta recordar que un estadístico minimal suficiente es función de cualquier estadístico suficiente. Si se demuestra que $(t_{n-1} y_n u_{n-1})$ es suficiente para x^n en la distribución $\Pr(y^n u^{n-1}/x^n)$ ya estaría demostrada la proposición.

Para ver esto último es necesario demostrar que para cualquier función

$\Psi : Y^N U^N \to R$ que sea $\mathcal{A}_{y,n}\mathcal{B}_{n-1}$ medible, $E(\Psi/t_{n-1}y_n u_{n-1})$ no depende de x^n:

$$E(\Psi/t_{n-1}y_n u_{n-1}) = \int_{Y^{n-1}}\int_{U^{n-2}} \Psi(y^n u^{n-1}) Pr(y^n u^{n-1}/t_{n-1}y_n u_{n-1}) =$$

$$= \int_{Y^{n-1}}\int_{U^{n-2}} \Psi(y^n u^{n-1}) Pr(y^{n-1}u^{n-2}/t_{n-1}y_n u_{n-1})$$

Esta última distribución no depende de x^n por no depender de x_n la evolución de $(y^{n-1}u^{n-2})$ y por ser independiente de x^{n-1} al ser $(t_{n-1}y_n u_{n-1})$ suficiente para x^{n-1} en la distribucipn $Pr(y^{n-1}u^{n-2}/x^{n-1})$

Observación

Por el teorema I.3.2 y considerando que x^n es el parámetro en el modelo bayesiano definido a partir del espacio de probabilidad producto $(X^N Y^N U^N, \mathcal{A}_x^N \mathcal{A}_y^N \mathcal{B}^N)$, resulta que la distribución a posteriori de x^n conocido el valor del estadístico t_n es la misma que la de x^n condicionada a $(y^n u^{n-1})$, es decir: $Pr(x^n/y^n u^{n-1}) = Pr(x^n/t_n)$

Más aún, se demuestra la siguiente

PROPOSICION III.3.2

$$Pr(x_n/y^n u^{n-1}) = Pr(x_n/t_n)$$

Demostración

$$Pr(x_n/y^n u^{n-1}) = \int_X \dots \int_X Pr(x^n/y^n u^{n-1}) dx_0 \dots dx_{n-1} =$$

$$= \int_X \dots \int_X Pr(x^n/t_n)\, dx_0 \dots dx_{n-1} = Pr(x_n/t_n)$$

Esta proposición afirma que conocer la distribución de probabilidad del estado del sistema en una etapa cualquiera condicionada a las observaciones y controles hasta ese momento, es equivalente a conocer la distribución de probabilidad condicionada al valor del estadístico minimal suficiente t_n obtenido en esa etapa. Esto, junto a la propiedad de minimal suficiencia, disminuirá el volumen de información necesario a la hora de buscar el control óptimo como se demostrará más adelante.

4.- CLASE DE CONTROLES BASADOS EN UN PROCESO MINIMAL SUFICIENTE PARA EL PROCESO BASICO

Supuesta la existencia de un proceso minimal suficiente en las condiciones anteriores, se puede uno preguntar si ese proceso puede ayudar a resolver el problema de control planteado en la sección 2 del presente capítulo.

La respuesta es afirmativa y para ello hay que definir la nueva clase de controles admisibles y demostrar que es equivalente utilizar este tipo de controles a utilizar los controles admisibles originales para minimizar la esperanza del coste de control.

Se define un control basado en el proceso minimal suficiente t para el proceso básico a partir del conjunto de distribuciones $q_n^*(du_n/t_n)$ según la relación:

$$q_n^*(B/t_n) = \int_{Y^n}\int_{U^{n-1}} q_n(B/y^n u^{n-1})\,Pr(dy^n du^{n-1}/t_n) \quad \text{para } B \in \mathcal{B}$$

La posibilidad de conocer la distribución $Pr(y^n u^{n-1}/t_n)$

se basa en el siguiente

LEMA III.4.1

$$Pr(y^n u^{n-1}/t_n) = \int_{X^n} Pr(y^n u^{n-1}/x^n t_n)\ Pr(dx^n/t_n)$$

Demostración

Desarrollando $Pr(y^n u^{n-1}/x^n t_n)$ según la fórmula de Bayes, se concluye que depende de $Pr(y^n u^{n-1}/x^n)$, ya determinada anteriormente. En cuanto a la distribución $Pr(x^n/t_n)$, se calcula:

n=0

$$Pr(x_0/t_0) = \frac{Pr(t_0/x_0)p_0^1(x_0)}{\int_X Pr(t_0/x_0)p_0^1(dx_0)} = \frac{\int_Y Pr(t_0/y_0)\ Pr(dy_0/x_0)\ p_0^1(x_0)}{\int_Y\int_X Pr(t_0/y_0)\ Pr(dy_0/x_0)\ p_0^1(dx_0)}$$

Como t_0 es una aplicación $\mathcal{A}_y$ medible, $t_0=t_0(y_0)$ y quedaría:

$$Pr(x_0/t_0) = \frac{\int_{t_0^{-1}(t_0)} p_0^2(dy_0/x_0)p_0^1(x_0)}{\int_X\int_{t_0^{-1}(t_0)} p_0^2(dy_0/x_0)p_0^1(dx_0)}$$

En general, se obtiene:

$$Pr(x^n/t_n) = \frac{\int_{t_n^{-1}(t_n)} Pr(dy^n du^{n-1}/x^n)\ Pr(x^n)}{\int_{X^n}\int_{t_n^{-1}(t_n)} Pr(dy^n du^{n-1}/x^n)\ Pr(dx^n)}$$

Así se tiene determinada la distribución del control a partir de las funciones $\left\{q_n^*(B/t_n), n=0,1,\ldots\right\}$

Se construye ahora la medida $\nu^*(./t)$ a partir de los cilindros $D = \left\{ u \in U^N \ / \ u_0 \in D_0, \ldots, u_n \in D_n \ ; \ D_0 \ldots D_n \in \mathcal{B} \right\}$ y con $t \in T^N$

$$\nu^*(D/t) = \int_{D_0} q_0^*(du_0/t_0) \int_{D_1} q_1^*(du_1/t_1) \ \ldots \ \int_{D_n} q_n^*(du_n/t_n)$$

Al conjunto de estos controles se le denomina $\mathcal{N}^*$.

5.- COMPLETITUD ESENCIAL DE LOS CONTROLES BASADOS EN UN PROCESO MINIMAL SUFICIENTE PARA EL PROCESO BASICO

Se considera la función de coste de control

$$\phi(x^N u^N) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x_n u_n)$$

Para demostrar el teorema de completitud se distinguirá el caso de un número finito de etapas, en que el sumatorio anterior se efectúa entre 0 y m, y más adelante se verá el caso general.

TEOREMA III.5.1

Dado un proceso controlado en información incompleta según un objeto controlado $\mu(./u)$ y un control admisible $\nu(./y)$ en las condiciones citadas en la sección 2 del presente capítulo, si existe un proceso minimal suficiente t para el proceso básico, la clase de controles $\mathcal{N}^*$ definida anteriormente es esencialmente completa si el coste de control es de la forma $\phi(x^m u^m) = \sum_{k=0}^{m} \phi_k(x_k u_k)$

Demostración

Basta demostrar que para todo $\nu \in \mathcal{N}$ existe un control $\nu^* \in \mathcal{N}^*$ tal que $E^{\nu}(\phi(x^m u^m)) = E^{\nu^*}(\phi(x^m u^m))$.

La demostración será por inducción respecto m

m=0 (ϕ es $\mathcal{A}_{x,0}\mathcal{B}_0$ medible)

$$E^{\nu *}(\phi) = \int_X\int_U \phi_0(x_0u_0)Pr^{\nu *}(dx_0du_0) =$$

$$= \int_X\int_T\int_U \phi_0(x_0u_0)q_0^*(du_0/t_0)Pr(dt_0/x_0)p_0^1(dx_0)$$

Y al ser $q_0^*(du_0/t_0) = \int_Y q_0(du_0/y_0)Pr(dy_0/t_0)$, se tiene la expresión anterior como:

$$= \int_X\int_T\int_Y\int_U \phi_0(x_0u_0)\ q_0(du_0/y_0)Pr(dy_0/t_0)\ Pr(dt_0/x_0)\ p_0^1(dx_0)$$

Como $\int_T Pr(dy_0/t_0)Pr(dt_0/x_0) = Pr(dy_0/x_0) = p_0^2(dy_0/x_0)$, se obtiene:

$$= \int_X\int_Y\int_U \phi_0(x_0u_0)q_0(du_0/y_0)p_0^2(dy_0/x_0)p_0^1(dx_0),$$ y, por consiguiente,

$E^{\nu *}(\phi) = E^{\nu}(\phi)$

m=k-1

Se supone que para toda función $\mathcal{A}_{x,k-1}\mathcal{B}_{k-1}$ medible $E^{\nu}\phi = E^{\nu *}\phi$

m=k

Dada la estructura de la función de coste de control, se tiene que para cualquier función $\mathcal{A}_{x,k}\mathcal{B}_k$ medible ϕ :

$$E^{\nu}(\phi) = E^{\nu}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\phi_i(x_iu_i)\right) + E^{\nu}(\phi_k(x_ku_k)) =$$

$$= E^{\nu *}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\phi_i(x_iu_i)\right) + E^{\nu}(\phi_k(x_ku_k))$$

Si se demuestra que $E^{\nu}(\phi_k(x_ku_k)) = E^{\nu *}(\phi_k(x_ku_k))$ ya estaría demostrado el teorema. Para ello se necesitarán dos lemas.

LEMA III.5.1

$$E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t_k) = E^{\nu^*}(\phi_k(x_k u_k)/t_k) = \Psi(t_k)$$

Demostración del lema 1

$$E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t_k) = \int_X \int_U \phi_k(x_k u_k) \overset{\nu}{Pr}(dx_k du_k/t_k) =$$

$$= \int_X \int_U \phi_k(x_k u_k) \overset{\nu}{Pr}(dx_k/t_k u_k) \overset{\nu}{Pr}(du_k/t_k)$$

Por la suficiencia de t_k se tiene que :

$\overset{\nu}{Pr}(dx_k/t_k u_k) = Pr(dx_k/y^k u^k) = Pr(dx_k/y^k u^{k-1}) = Pr(dx_k/t_k)$ y esta distribución se conoce y es independiente del control elegido. Además, como se demostró anteriormente, $\overset{\nu}{Pr}(du_k/t_k) = q_k^*(du_k/t_k)$.

Por consiguiente,

$$E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t_k) = \int_X \int_U \phi_k(x_k u_k) Pr(dx_k/t_k) q_k^*(du_k/t_k) = E^{\nu^*}(\phi_k(x_k u_k)/t_k)$$

A esta esperanza, que es independiente del control ν o ν^*, se le denotará por $\Psi(t_k)$.

Ya está demostrado el lema 1.

Para demostrar el teorema sería suficiente, en vista del lema 1, demostrar que $E^{\nu}(\Psi(t_k)) = E^{\nu^*}(\Psi(t_k))$. Esto se hará por inducción en k y previamente se enunciará y demostrará un lema .

LEMA III.5.2

$Pr(A/y^{k-1}u^{k-1}) = Pr(A/t_{k-1}u_{k-1})$ para $A \in \mathcal{A}_y$ y $k \in N$.

Demostración lema 2

$$Pr(A/y^{k-1}u^{k-1}) = \int_X Pr(A/x_k y^{k-1}u^{k-1})Pr(dx_k/y^{k-1}u^{k-1}) =$$

$$= \int_X \int_X {}_{k-1} p_k^2(A/x_k u_{k-1})Pr(dx_k/x^{k-1}y^{k-1}u^{k-1})\ Pr(dx^{k-1}/y^{k-1}u^{k-1}) =$$

$$= \int_X {}_k p_k^2(A/x_k u_{k-1})p_k^1(dx_k/x^{k-1}u_{k-1})\ Pr(dx^{k-1}/t_{k-1}u_{k-1}) = Pr(A/t_{k-1}u_{k-1}$$

Y así estaría demostrado el lema 2.

A continuación se demuestra que $E^{\nu}(\Psi(t_k)) = E^{\nu*}(\Psi(t_k))$

k=0

$$E^{\nu}(\Psi(t_0)) = \int_T \Psi(t_0)\overset{\nu}{Pr}(dt_0) = \iiint_{TXY} \Psi(t_0)Pr(dt_0/y_0)Pr(dy_0/x_0)p_0^1(dx$$

que, como no depende del control elegido, es igual a $E^{\nu*}(\Psi(t_0))$

k=k-1 $\quad (E^{\nu}(\Psi(t_{k-1})) = E^{\nu*}(\Psi(t_{k-1}))$

k=k

$E^{\nu}(\Psi(t_k)) = E^{\nu}(E^{\nu}(\Psi(t_k)/t_{k-1})$, y desarrollando este término:

$$E^{\nu}(\Psi(t_k)/t_{k-1}) = \int_T \Psi(t_k)\overset{\nu}{Pr}(dt_k/t_{k-1})$$

$$Y \quad \overset{\nu}{Pr}(dt_k/t_{k-1}) = \int_Y {}_k \int_U {}_{k-1} Pr(dt_k/y^k u^{k-1})\overset{\nu}{Pr}(dy^k du^{k-1}/t_{k-1}) =$$

$$= \int_Y {}_k \int_U {}_{k-1} Pr(dt_k/y^k u^{k-1})Pr(dy_k/y^{k-1}u^{k-1}t_{k-1})\overset{\nu}{Pr}(du_{k-1}/y^{k-1}u^{k-2}t_{k-1})$$

$$Pr(dy^{k-1}du^{k-2}/t_{k-1})$$

Por aplicación del lema 2, quedaría:

$$= \int_{Y^k}\int_{U^{k-1}} Pr(dt_k/y^k u^{k-1})Pr(dy_k/t_{k-1}u_{k-1})q_{k-1}(du_{k-1}/y^{k-1}u^{k-2}) \cdot$$

$$\cdot Pr(dy^{k-1}du^{k-2}/t_{k-1})$$

Al ser t_k un estadístico minimal suficiente, se verifica, según se demostró anteriormente, que $Pr(dt_k/y^k u^{k-1}) = Pr(dt_k/t_{k-1}y_k u_{k-1})$ y sustituyendo esto en la última expresión, queda:

$$= \int_{Y^k}\int_{U^{k-1}} Pr(dt_k/t_{k-1}y_k u_{k-1})Pr(dy_k/t_{k-1}u_{k-1})q_{k-1}(du_{k-1}/y^{k-1}u^{k-2})$$

$$Pr(dy^{k-1}du^{k-2}/t_{k-1}) =$$

$$= \int_Y\int_U Pr(dt_k/t_{k-1}y_k u_{k-1})Pr(dy_k/t_{k-1}u_{k-1}) \int_{Y^{k-1}}\int_{U^{k-2}} q_{k-1}(du_{k-1}/y^{k-1}u^{-2}) \cdot$$

$$\cdot Pr(dy^{k-1}du^{k-2}/t_{k-1}) =$$

$$= \int_Y\int_U Pr(dt_k/t_{k-1}y_k u_{k-1})Pr(dy_k/t_{k-1}u_{k-1})q^*_{k-1}(du_{k-1}/t_{k-1}) = \overset{\nu^*}{Pr}(dt_k/t_{k-1})$$

Por consiguiente, $\overset{\nu}{Pr}(dt_k/t_{k-1}) = \overset{\nu^*}{Pr}(dt_k/t_{k-1})$ y se concluye ue $E^{\nu}(\Psi(t_k)/t_{k-1}) = E^{\nu^*}(\Psi(t_k)/t_{k-1})$ y se denotará esta cantidad omo $\varphi(t_{k-1})$.

Por el principio de inducción, se llega a:

$$E^{\nu}(\Psi(t_k)) = E^{\nu}(E^{\nu}(\Psi(t_k)/t_{k-1})) = E^{\nu}(\varphi(t_{k-1})) = E^{\nu^*}(\varphi(t_{k-1})) =$$

$$= E^{\nu^*}(E^{\nu^*}(\Psi(t_k)/t_{k-1})) = E^{\nu^*}(\Psi(t_k)).$$

Así queda demostrado el teorema.

Observación

En la demostración del teorema anterior se ha hecho uso de la minimal suficiencia.

En el teorema siguiente, se demuestra el teorema de completitud para el caso general.

TEOREMA III.5.2

Dado un proceso controlado en información incompleta según un objeto controlado $\mu(./u)$ y un control $\nu(./y)$ en las condiciones anteriores, si existe un proceso minimal suficiente t para el proceso básico, la clase de controles basados en t ($\mathcal{N}^*$) es esencialmente completa si el coste de control es de la forma:

$\phi(x^N u^N) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x_k u_k)$ siempre que se verifique que:

$\sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k(x_k u_k)| < \infty$ para todo $(x,u) \in X^N U^N$

Demostración

Hay que demostrar que $E^{\nu}(\phi(x^N u^N)) = E^{\nu^*}(\phi(x^N u^N))$.

En efecto, $E^{\nu}(\phi(x^N u^N)) = E^{\nu}(\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x_k u_k)) = E^{\nu}(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x_k u_k))$

y en aplicación del teorema anterior: $E^{\nu^*}(\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \phi_k) = E^{\nu}(\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \phi_k)$

siempre que $\sum_0^n \phi_k \leq B$ con $B \in R$ para todo $n \in N$ y $(x,u) \in X^N U^N$, y

esto es cierto, ya que $\left|\sum_0^n \phi_k(x_k u_k)\right| \leq \sum_0^n |\phi_k(x_k u_k)| \leq \sum_0^{\infty} |\phi_k(x_k u_k)| < \infty$

En resumen, se obtiene:

$$E^{\nu}(\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \phi_k(x_k u_k)) = \lim_{n\to\infty} E^{\nu}(\sum_0^n \phi_k(x_k u_k)) = \lim_{n\to\infty} E^{\nu^*}(\sum_0^n \phi_k(x_k u_k)) < \infty$$

Y, por el teorema de la convergencia dominada;

$\lim_{n\to\infty} E^{\nu^*}(\sum_0^n \phi_k(x_k u_k)) = E^{\nu^*}(\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \phi_k(x_k u_k)) = E^{\nu^*}(\phi(x^N u^N))$, es decir,

$E^{\nu}(\phi(x^N u^N)) = E^{\nu^*}(\phi(x^N u^N))$. Como se quería demostrar.

6.- CONTROLES NO ALEATORIZADOS BASADOS EN PROCESOS MINIMAL SUFICIENTES

Cuando se define el control, se hace a través de las funciones de distribución de probabilidad $\{q_n(./y^n u^{n-1}), n \geq 0\}$, de tal forma que en cada etapa, el control u_n es una variable aleatoria cuya distribución depende de las observaciones y los controles anteriores.

Los controles no aleatorizados son aquéllos para los que la medida $\nu(./y)$ se concentra en un punto de U^N para todo $y \in Y^N$. Un control no aleatorizado se caracteriza por una secuencia de funciones $\varphi_n(y_0 \ldots y_n)$ con valores en U y medible respecto $\mathcal{A}_{y,n}$ para todo $n \in N$ de forma que:

$$q_n(B/y_0 \ldots y_n u_0 \ldots u_{n-1}) = \chi_B(\varphi_n(y_0 \ldots y_n)) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}$$

Los controles no aleatorizados forman una subclase del conjunto de los controles admisibles. Son más cómodos de tratar matemáticamente y en determinadas condiciones es suficiente elegir el control óptimo en esta subclase.

Se plantea la siguiente cuestión: ¿ Bastará considerar entre los controles basados en un proceso suficiente para el proceso básico aquéllos que sean no aleatorizados para elegir el control óptimo? ¿Existe alguna relación entre éstos y los controles no aleatorizados admisibles que los originaron?

La construcción de un control basado en un proceso minimal suficiente a partir de un control no aleatorizado no produce, en general, un control no aleatorizado. En efecto, sea un control admisible no aleatorizado $\{u_n = \varphi_n(y_0..y_n), n \in N\}$, es decir, para todo $B \in \mathcal{B}$ $q_n(B/y_0..y_n u_0..u_{n-1}) = \chi_B(\varphi_n(y_0..y_n))$ para todo $n \in N$

A partir de él, se construye el correspondiente control basado en el proceso minimal suficiente t:

$$q_n^*(B/t_n) = \int_{Y^n}\int_{U^{n-1}} q_n(B/y^n u^{n-1}) Pr(dy^n du^{n-1}/t_n) =$$

$$= \int_{Y^n}\int_{U^{n-1}} \chi_B(\varphi_n(y_0..y_n)) Pr(dy^n du^{n-1}/t_n) \text{ para todo } n \in N, B \in \mathcal{B}$$

Teniendo en cuenta la definición de funciónindicatriz:

$$\chi_B = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_n(y_0..y_n) \in B \\ 0 & \text{si } \varphi_n(y_0..y_n) \notin B \end{cases}$$ se concluye que:

$$q_n^*(B/t_n) = \int_{\varphi_n^{-1}(B)} \int_{U^{n-1}} Pr(dy^n du^{n-1}/t_n)$$, y no se puede afirmar que esta distribución sea siempre degenerada.

Un control basado en un proceso minimal suficiente t es no aleatorizado si la medida $\nu^*(./t)$ se concentra en un punto de U^N

Estos controles se caracterizan por funciones medibles

$\varphi_n^*: (T,\mathcal{T}) \rightarrow (U,\mathcal{B})$ para $n \in N$ y de forma que para todo $B \in \mathcal{B}$

$q_n^*(B/t_n) = \chi_B(\varphi_n^*(t_n))$.

Queda pendiente el ver si basta considerar sólo los controles no aleatorizados entre los basados en un proceso minimal suficiente. Esto se verá más adelante cuando se construya el problema de control asociado en información completa a partir del proceso minimal suficiente. La conclusión a la que se llegará es que el control óptimo será no aleatorizado y se deducirán, además, las funciones $\{\varphi_n^*(t_n), n \in N\}$ que lo definen.

7.- CONSTRUCCION DEL PROBLEMA DE CONTROL ASOCIADO EN INFORMACION COMPLETA

Mediante el teorema de completitud se demuestra que en los problemas de control en información incompleta con las hipótesis planteadas en la sección 2 del presente capítulo, es equivalente el buscar el control óptimo entre los controles basados en las observaciones y controles conocidos en cada etapa a buscarlo entre aquéllos basados en un proceso minimal suficiente.

A continuación se verá cómo se puede determinar el control óptimo basado en un proceso minimal suficiente.

Se construirá para ello un nuevo problema de control en información completa, en el que proceso básico es el propio proceso minimal suficiente, las ecuaciones de evolución se construyen de tal forma quela distribución de t_n es la misma en este nuevo problema y en el problema original con μ y ν fijados y, por ùltimo, el coste de control es el mismo en media.

Se demuestra que este nuevo proceso controlado es de Markov, y bajo determinadas hipótesis el control depende del último valor del proceso básico en cada etapa. La solución del problema de control asociado minimiza, pues, la función de coste esperada del problema original y en cada etapa es función de t_n; queda así determinado el control óptimo en la clase $\mathcal{N}^*$.

Sin pérdida de generalidad, se supondrá el problema de control con un número finito de etapas.

Observación

Se suponen todas las hipótesis citadas en el capítulo, tanto para el problema de control original como para el proceso minimal suficiente t para el proceso básico.

El espacio fase del proceso básico es (T,Γ) y el espacio fase de control será $(U,\mathcal{B})$, el mismo que en el problema original.

Sean los espacios producto (T^N,Γ^N) y $(U^N,\mathcal{B}^N)$ y sean $\mathcal{G}_n$ y $\mathcal{B}_n$ las mínimas σ-álgebras sobre los cilindros en T^N y U^N respectivamente con bases sobre $(0,1,..,n)$.

Para definir el nuevo proceso controlado es necesario dar un proceso estocástico con valores en T condicionado a haber tomado una sucesión de controles y definir una regla para seleccionarlos.

La distribución del proceso estocástico asociado al nuevo problema de control se deduce del estadístico minimal suficiente t_n considerado como función de $(y^n u^{n-1})$, por lo que, por construcción, se verifica que las distribuciones de t_n en el nuevo problema coinciden con las correspondientes en el original.

Para todo $G \in \Gamma$ $p_0^*(G) = \int_X \int_Y Pr(G/y_0) p_0^2(dy_0/x_0) p_0^1(dx_0) =$

$$= \int_X \int_{t_0^{-1}(G)} p_0^2(dy_0/x_0) p_0^1(dx_0)$$

Para todo $n \geq 1$, conocidos $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ se efine para todo $G \in \Gamma$:

$$p_n^*(G/t_0 \ldots t_{n-1} u_0 \ldots u_{n-1}) = \int_Y Pr(G/t^{n-1} u^{n-1} y_n) Pr(dy_n/t^{n-1} u^{n-1})$$

Por el lema III.5.2, se tiene que $Pr(dy_n/t^{n-1} u^{n-1}) = Pr(dy_n/t_{n-1} u_{n-1})$

Por ser t_n minimal suficiente, y teniendo en cuenta la proposición III.3.1, $Pr(G/t^{n-1} u^{n-1} y_n) = Pr(G/t_{n-1} y_n u_{n-1}) = \chi_G(t_n(t_{n-1} y_n u_{n-1}))$

Se tiene, pues:

$$p_n^*(G/t^{n-1} u^{n-1}) = \int_Y \chi_G(t_n(t_{n-1} y_n u_{n-1})) Pr(dy_n/t_{n-1} u_{n-1}) = p_n^*(G/t_{n-1} u_{n-1})$$

Al ser $t_n(.,.,.)$ una aplicación $\Gamma \cdot \mathcal{A}_y \cdot \mathcal{B}$ medible, se define ara todo $t_{n-1} \in T$ $u_{n-1} \in U$ la aplicación:

$$\Psi_{t_{n-1}u_{n-1}} : (Y,\mathcal{A}_y) \longrightarrow (T,\Gamma)$$
$$y_n \longrightarrow t_n(t_{n-1}y_n u_{n-1})$$

Esta aplicación es $\mathcal{A}_y$ medible y se verifica:

$$p_n^*(G/t_{n-1}u_{n-1}) = \int_{\Psi^{-1}_{t_{n-1}u_{n-1}}(G)} Pr(dy_n/t_{n-1}u_{n-1}) \qquad G\in\Gamma$$

El nuevo problema de control así definido es, pues, un proceso de Markov controlado, ya que el estado del sistema en la etapa n-ésima depende sólo del estado del sistema y del control en la etapa (n-1)-ésima, independientemente de los estados y controles anteriores.

Observación

Ya se tiene definido el objeto controlado $\mu^*(./u)$ del nuevo problema en información completa a partir de las distribuciones $\{p_n^*(./t_{n-1}u_{n-1}), n\in N\}$ determinadas previamente:

Para todo cilindro G de $\mathcal{G}_n$ de la forma:

$G = \{t\in T^N \ / \ t_0\in G_0 \dots t_n\in G_n;\ G_i\in\Gamma \ \ i=0,n\}$ se define $\mu^*(G/u)$

$$\mu^*(G/u) = \int_{G_0} p_0^*(dt_0) \int_{G_1} p_1^*(dt_1/t_0u_0) \ \dots \int_{G_n} p_n^*(dt_n/t_{n-1}u_{n-1})$$

COSTE DE CONTROL EN EL PROBLEMA DE CONTROL ASOCIADO

Antes de estudiar la estrategia óptima en el nuevo problema, se transformará la función de coste del problema original para que sea una función $\Gamma^N\mathcal{B}^N$ medible.

En lo que sigue sólo se considera la estrategia $\nu \in \mathcal{N}$. Se trata de llegar de forma constructiva a la estrategia $\nu^* \in \mathcal{N}^*$. Si la función de coste de control se expresa como $\phi(t^N u^N)$ y es de tipo evolutivo, se tiene definido un problema de control en información completa de Markov y el control óptimo de este problema vendrá caracterizado por distribuciones de probabilidad $\{q_n^*(du_n/t_n), n \in N\}$ que determinan, a su vez, el control óptimo ν^* en el problema original en la clase de los controles basados en un proceso minimal suficiente.

Sea $\phi(x^n u^n) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x_k u_k)$ el coste de control del problema original con un número finito de etapas.

El objetivo es minimizar $E^{\nu}(\phi(x^n u^n))$, que también se puede expresar como $E^{\nu}(E^{\nu}(\phi(x^n u^n)/t^n u^n) = E^{\nu}(\phi^*(t^n u^n))$. Si se toma como función de coste de control en el problema asociado esta última, minimizar la esperanza de ésta es equivalente a minimizar la del problema original para un objeto controlado y un control fijos.

Interesa que el coste sea una función de tipo evolutivo, esto se demostrará a partir de la forma concreta del coste en el problema original.

$$\phi^*(t^n u^n) = E^{\nu}(\phi(x^n u^n)/t^n u^n) = E^{\nu}(\sum_{0}^{n} \phi_k(x_k u_k)/t^n u^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t^n u^n)$$

Observación

Con las dos proposiciones siguientes se simplifica el coste del problema de control asociado. La expresión final del coste se especifica en un corolario.

PROPOSICION III.7.1

$$E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t^n u^n) = E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t^k u^k) \qquad \text{para } k \leq n$$

Demostración

Al ser $t_{k+1}=t_{k+1}(t_k y_{k+1} u_k)$ función medible, se obtiene

$E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t^n u^n) = E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t^k u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1})$, donde, por comodidad de notación, $y^n_{k+1}=(y_{k+1} y_{k+2}\ldots y_n)$

$u^n_{k+1}=(u_{k+1} u_{k+2}\ldots u_n)$

$$E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t^n u^n) = \int_X \phi_k(x_k u_k)\ \Pr^{\nu}(dx_k/t^k u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1})$$

A continuación se demuestra que esta distribución no depende de $(y^n_{k+1} u^n_{k+1})$.

$$\Pr^{\nu}(dx_k/t^k u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1}) = \int_{X^{k-1}} \Pr^{\nu}(dx_k/x^{k-1} t^k u^k u^n_{k+1} y^n_{k+1}) \cdot$$

$$\cdot \Pr^{\nu}(dx^{k-1}/t^k u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1})$$

$$\Pr^{\nu}(\Lambda/x^{k-1} t^k u^k u^n_{k+1} y^n_{k+1}) = p^1_k(\Lambda/x^{k-1} u_{k-1}) \qquad \text{para } \Lambda \in \mathcal{A}_x$$

$$\Pr^{\nu}(x^{k-1}/t^k u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1}) = \frac{\Pr^{\nu}(t_k/x^{k-1} t^{k-1} u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1})\Pr^{\nu}(x^{k-1}/t^{k-1} u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1})}{\int_{X^{k-1}} \ldots\ldots \text{idem} \ldots\ldots\ dx^{k-1}}$$

Y, a su vez, cada una de estas dos distribuciones se calcula:

$$\overset{\nu}{Pr}(t_k/x^{k-1}t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = \int_Y \overset{\nu}{Pr}(t_k/x^{k-1}t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}y_k)\ \cdot$$

$$\cdot Pr(dy_k/x^{k-1}t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1})$$

$$\overset{\nu}{Pr}(t_k/x^{k-1}t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}y_k) = Pr(t_k/t_{k-1}y_k u_{k-1})$$

$$\overset{\nu}{Pr}(dy_k/x^{k-1}t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = \int_X Pr(dy_k/x^{k-1}t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}x_k)\,\cdot$$

$$\cdot Pr(dx_k/x^{k-1}t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = \int_X p^2_k(dy_k/x_k u_{k-1})\, p^1_k(dx_k/x^{k-1}u_{k-1})$$

Es decir, $\overset{\nu}{Pr}(t_k/x^{k-1}t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = Pr(t_k/x^{k-1}t_{k-1}u_{k-1})$

"

$$\overset{\nu}{Pr}(x^{k-1}/t^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = \frac{\overset{\nu}{Pr}(t^{k-1}/x^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1})\,\overset{\nu}{Pr}(x^{k-1}/u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1})}{\int_{X^{k-1}} \ldots\ \text{idem}\ \ldots\ dx^{k-1}}$$

$$\overset{\nu}{Pr}(t^{k-1}/x^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = \int_{Y^{k-1}} \overset{\nu}{Pr}(t^{k-1}/x^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}y^{k-1})\ \cdot$$

$$\cdot Pr(dy^{k-1}/x^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = \int_{Y^{k-1}} Pr(t^{k-1}/y^{k-1}u^{k-2})\ \cdot$$

$$\cdot Pr(dy^{k-1}/x^{k-1}u^{k-2})$$

Esta última desigualdad se basa en que:

$$Pr(t^{k-1}/x^{k-1}u^n y^n_{k+1}y^{k-1}) = Pr(t_0/y^0)Pr(t_1/y^1u^0)\ldots Pr(t_{k-1}/y^{k-1}u^{k-2})$$

y $$Pr(dy^{k-1}/x^{k-1}u^n y^n_{k+1}) = p^2_0(dy_0/x_0)p^2_1(dy_1/x_1u_0)\ldots p^2_{k-1}(dy_{k-1}/x_{k-1}u_{k-1})$$

Es decir, $\overset{\nu}{Pr}(t^{k-1}/x^{k-1}u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = Pr(t^{k-1}/x^{k-1}u^{k-2})$

$$\overset{\nu}{Pr}(x^{k-1}/u^k y^n_{k+1}u^n_{k+1}) = p^1_0(x_0)p^1_1(x_1/x^0u_0)\ldots p^1_{k-1}(x_{k-1}/x^{k-1}u_{k-2})$$

Y, por tanto, $\overset{\nu}{Pr}(x^{k-1}/u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1}) = Pr(x^{k-1}/u^{k-2})$

Se obtiene, en resumen, que:

$$\overset{\nu}{Pr}(x^{k-1}/t^{k-1} u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1}) = \frac{Pr(t^{k-1}/x^{k-1} u^{k-2}) Pr(x^{k-1}/u^{k-2})}{\int_{X^{k-1}} \ldots \text{idem} \ldots . \, dx^{k-1}} = Pr(x^{k-1}/t^{k-1} u^{k-2})$$

De donde se deduce que:

$$\overset{\nu}{Pr}(x^{k-1}/t^k u^k y^n_{k+1} u^n_{k+1}) = \frac{Pr(t_k/x^{k-1} t_{k-1} u_{k-1}) Pr(x^{k-1}/t^{k-1} u^{k-2})}{\int_{X^{k-1}} \ldots \text{idem} \ldots . \, dx^{k-1}} = Pr(x^{k-1}/t^k u^{k-1})$$

$E^{\nu}(\phi_k(x_k u_k)/t^n u^n) = E(\phi_k(x_k u_k)/t^k u^k)$ para todo $k \leq n$

Así queda demostrada la proposición.

PROPOSICION III.7.2

$E(\phi_k(x_k u_k)/t^k u^k) = E(\phi_k(x_k u_k)/t_k u_k)$

Demostración

Bastaría ver que $Pr(x_k/t^k u^{k-1}) = Pr(x_k/t_k)$

Considerando $\sigma(t^k u^{k-1})$ como la mínima σ-álgebra generada por $(t_0 t_1 .. t_k u_0 u_1 .. u_{k-1})$ y definiendo análogamente $\sigma(y^k u^{k-1})$ y $\sigma(t_k)$ se tiene que para todo $A \in \mathcal{A}_x$:

$Pr(A/t^k u^{k-1}) = E\{\chi_A/\sigma(t^k u^{k-1})\} = E\{E\{\chi_A/\sigma(y^k u^{k-1})\}/\sigma(t^k u^{k-1})\}$

Esta última desigualdad es por $\sigma(t^k u^{k-1}) \subset \sigma(y^k u^{k-1})$

$$E\left\{\chi_A/\sigma(y^k u^{k-1})\right\} = E\left\{\chi_A/\sigma(t_k)\right\}$$ por la suficiencia de t_k

Como $\sigma(t_k) \subset \sigma(t^k u^{k-1})$ se deduce que $E\left\{\chi_A/\sigma(t_k)\right\}$ es $\sigma(t^k u^{k-1})$-medible y, por tanto:

$$E\left\{E\left\{\chi_A/\sigma(t_k)\right\}/\sigma(t^k u^{k-1})\right\} = E\left\{\chi_A/\sigma(t_k)\right\} = Pr(A/t_k)$$

Así queda demostrada la proposición.

COROLARIO III.7.1

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores:

$$\phi^*(t^n u^n) = E^\nu(\phi(x^n u^n)/t^n u^n) = E^\nu\left(\sum_{k=0}^{n} \phi_k(x_k u_k)/t^n u^n\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} E^\nu(\phi_k(x_k u_k)/t^n u^n) = \sum_{k=0}^{n} E(\phi_k(x_k u_k)/t^k u^k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} E(\phi_k(x_k u_k)/t_k u_k) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k^*(t_k u_k)$$

Es decir, $\phi^*(t^n u^n) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k^*(t_k u_k)$

El coste en el problema de control asociado tiene la misma forma que en el problema original.

8.- TEOREMA DE EXISTENCIA DE UN CONTROL OPTIMO EN EL PROBLEMA DE CONTROL ASOCIADO

Una vez construido el nuevo problema a partir del original, se estudia bajo qué hipótesis se asegura la existencia de un control óptimo entre todos los posibles.

Se exigirán dos hipótesis adicionales:

(A) Para toda función $g \in C_T$ $\int_T g(t) p_n^*(dt/t_{n-1} u_{n-1}) \in C_{T \cdot U}$ $n \in N$

(B) Si $\lim_{n \to \infty} t_k^n = t_k^0$ para todo $k \in N$, la medida sobre $\mathcal{A}_x$

$Pr(./t_k^n)$ converge débilmente a $Pr(./t_k^0)$

Observación

Al ser $p_n^*(./t_{n-1} u_{n-1})$ y $Pr(./t_n)$ para todo $n \in N$ medidas sobre espacios métricos, T y X respectivamente, se puede estudiar la convergencia débil de tales medidas estudiando la convergencia de los valores de esas medidas sobre conjuntos particulares.

Por el teorema I.2.5, se asegura la convergencia débil de ambas medidas si para todo conjunto de continuidad $G \in \Gamma$ y $A \in \mathcal{A}_x$, se verifica $\lim_{k \to \infty} p_n^*(G/t_{n-1}^k u_{n-1}^k) = p_n^*(G/t_{n-1}^0 u_{n-1}^0)$

$\lim_{k \to \infty} Pr(A/t_n^k) = Pr(A/t_n^0)$ Para todo $(t^k, u^k) \in T^N U^N$

tal que $\lim_{k \to \infty} (t_n^k u_n^k) = (t_n^0 u_n^0)$ $n \in N$

Por definición de convergencia débil, se obtiene directamente la hipótesis (A), ya que

$$\lim_{k \to \infty} \int_T g(t) p_n^*(dt/t_{n-1}^k u_{n-1}^k) = \int_T g(t) p_n^*(dt/t_{n-1}^0 u_{n-1}^0) \quad \text{para } g \in C_T$$

es equivalente a asegurar la continuidad de la función $\int_T g(t) p_n^*(dt/.)$ y la acotación es inmediata.

Así pues, las hipótesis adicionales (A) y (B) se deducen inmediatamente si se exige que para todo $G \in \Gamma$, $A \in \mathcal{A}_x$, conjuntos de continuidad de las medidas $p_n^*(./t_{n-1} u_{n-1})$ y $Pr(./t_n)$ respectivamente y para todo $n \in N$, son funciones continuas en $(t_{n-1} u_{n-1})$ y t_n las medidas $p_n^*(G/t_{n-1} u_{n-1})$ y $Pr(A/t_n)$.

PROPOSICION III.8.1

El coste de control del problema de control asociado es una función semicontinua por abajo y acotada por abajo si el coste de control del problema original también lo es.

Demostración

Se supone en principio un número finito de etapas.

Sea $\phi^*(t^n u^n) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k^*(t_k u_k)$, entonces se asegura la semicontinuidad por abajo y la acotación por abajo si se demuestra para todo $\phi_k^*(t_k u_k)$, $k=0,n$

Recordando la definición de $\phi_k^*(t_k u_k)$:

$$\phi_k^*(t_k u_k) = E(\phi_k(x_k u_k)/t_k u_k) = \int_X \phi_k(x_k u_k) Pr(dx_k/t_k)$$

Por definición de semicontinuidad, hay que demostrar que para unas sucesiones $\{t_k, u_k, k \in N\}$ tales que $\lim_{n\to\infty} t_k^n = t_k^0$

$\lim_{n\to\infty} u_k^n = u_k^0$ se cumple

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \phi_k^*(t_k^n, u_k^n) \geq \phi_k^*(t_k^0, u_k^0)$$

Por la hipótesis (B), y por ser X y U espacios métricos separables y completos, se puede aplicar el teorema I.2.3 y se concluye que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \phi_k^*(t_k^n u_k^n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X \phi_k(x_k u_k^n) Pr(dx_k/t_k^n) \geq$

$$\geq \int_X \phi_k(x_k u_k^0) Pr(dx_k/t_k^0) = \phi_k^*(t_k^0 u_k^0)$$

La acotación por abajo se sigue de la acotación por abajo de $\phi_k(x_k u_k)$

En el caso general es válido lo anterior, ya que se le exigía en el problema original que para todo $(x,u) \in X^N U^N$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x_k u_k)$ fuera convergente y

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k^*(t_k u_k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |E(\phi_k(x_k u_k)/t_k u_k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} E(|\phi_k(x_k u_k)|/t_k u_k) =$$

$$= E\left(\left| \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x_k u_k) \right| /t^N u^N \right) < \infty$$

Así queda demostrada la proposición.

Considérese a continuación el objeto de control en el problema de control asociado $\mu^*(./u)$, medida definida sobre (T^N, Γ^N) para cualquier $u \in U^N$.

Sea además una secuencia de controles $\{\nu^{*n}(./t), n \in N\}$, sucesión de medidas sobre $(U^N, \mathcal{B}^N)$ para cualquier $t \in T^N$.

Para cada uno de estos controles $\nu^{*n}(./.)$ y con el objeto de control $\mu^*(./.)$ se construye un proceso controlado que se denotará por $(\gamma^n \tau^n) \in T^N U^N$, donde $\gamma^n = (\gamma_0^n, \gamma_1^n, \dots)$ $\gamma_i^n \in T$ $i, n \in N$

$\tau^n = (\tau_0^n, \tau_1^n, \dots)$ $\tau_i^n \in U$ $i, n \in N$

<u>LEMA III.8.1</u>

Si las distribuciones marginales del proceso controlado

$\{(\gamma_k^n, \eta_k^n), k=0,1,..\}$ convergen a la distribución marginal del proceso controlado $\{(\gamma_k^0, \eta_k^0), k=0,1,..\}$ y se cumple la condición(A) se verifica entonces que el proceso controlado $(\gamma^0 \eta^0) \in T^N U^N$ corresponde al objeto de control $\mu^*(./.)$ y define, por tanto, un control $\nu^{*0}(./.)$.

Demostración

Por la convergencia de las distribuciones marginales, se tiene que para todo $k \in N, g \in C_T$ y $\varphi \in C_{T\cdot U}$:

$$\lim_{n\to\infty} E\, g_k(\gamma_k^n)\, \varphi(\gamma_{k-1}^n \eta_{k-1}^n) = E\, g_k(\gamma_k^0)\, \varphi(\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0)$$

Como además se verifica que:

$$E\, g_k(\gamma_k^n)\, \varphi(\gamma_{k-1}^n \eta_{k-1}^n) = E(E(g_k(\gamma_k^n)\, \varphi(\gamma_{k-1}^n \eta_{k-1}^n)/\gamma_{k-1}^n \eta_{k-1}^n)) =$$

$$= E\left(\int_T g_k(t) p_k^*(dt/\gamma_{k-1}^n \eta_{k-1}^n)\varphi(\gamma_{k-1}^n \eta_{k-1}^n)\right)$$

Y, por la hipótesis (A), el límite de esta esperanza cuando $\to\infty$ es: $E\left(\int_T g_k(t) p_k^*(dt/\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0)\varphi(\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0)\right)$

Por comparación de las dos igualdades anteriores,

$E\, g_k(\gamma_k^0)\varphi(\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0) = \int_T g_k(t) p_k^*(dt/\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0)\varphi(\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0)$ para cualquier $k \in N$, $\varphi \in C_{T\cdot U}$ y $g \in C_T$, de aquí se deduce que

$E(g_k(\gamma_k^0)/\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0) = \int_T g_k(t) p_k^*(dt/\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0)$ para todo $g \in C_T$

Y, por consiguiente, para todo $G \in \Gamma$, $Pr(\gamma_k^0 \in G/\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0) = p_k^*(G/\gamma_{k-1}^0 \eta_{k-1}^0)$ y el proceso controlado $(\gamma^0 \eta^0)$ evoluciona por μ.

TEOREMA III.8.1

Con las hipótesis adicionales (A) y (B), siendo U compacto, que se exigía al problema original, y siendo T y U espacios métricos separables y completos. Si $\phi^*(t^N u^N)$ es una función semicontinua por abajo y acotada por abajo, existe un control óptimo para el problema de control asociado en la clase de los controles admisibles.

Demostración

Hay que construir un control ν^* que minimice $E^{\nu^*}\phi^*(\gamma,\eta)$ para un objeto controlado $\mu^*(./.)$ fijo.

Al ser ϕ^* acotada por abajo, dada una sucesión $\{\varepsilon_n\} \subset R$ que converge a 0, existe una sucesión de controles ν^{*n} de forma que:

$$E^{\nu^{*n}}(\phi^*(\gamma,\eta)) = E(\phi^*(\gamma^n,\eta^n)) \leq \inf_{\nu^*} E(\phi^*(\gamma,\eta)) + \varepsilon_n$$

A continuación se demuestra que las distribuciones marginales del proceso controlado (γ^n,η^n) convergen a la distribución marginal del proceso controlado (γ^0,η^0).

Para ello se comprueba primero que es débilmente compacta la familia de distribuciones $\{p_k^*(./t_{k-1}u_{k-1}), t_{k-1} \in K_{k-1}, u_{k-1} \in U\}$ donde $K_{k-1} \subset T$ para todo k es un compacto, al igual que U.

En efecto, dada una sucesión $\{t_{k-1}u_{k-1}\}$, al ser K_{k-1} y U compactos, se selecciona una subsucesión convergente:

$$(t_{k-1}^{n_i}, u_{k-1}^{n_i}) \xrightarrow{i\to\infty} (t_{k-1}^0, u_{k-1}^0)$$

Por la condición (A) se obtiene que:

Para todo $g \in C_T$ $\lim_{i \to \infty} \int_T g(t_k) p_k^*(dt_k / t_{k-1}^{n_i} u_{k-1}^{n_i}) = \int_T g(t_k) p_k^*(dt_k / t_{k-1}^{0} u_{k-1}^{0})$

Es decir, $p_k^*(./t_{k-1}^{n_i} u_{k-1}^{n_i}) \xrightarrow{d} p_k^*(./t_{k-1}^{0} u_{k-1}^{0})$ y la familia es débilmente compacta.

Por el teorema I.2.4 y al ser T un espacio métrico separable y completo, dada una secuencia de compactos en T, $K_0 K_1 .. K_{k-1}$ tales que $t_0 \in K_0, .., t_{k-1} \in K_{k-1}$ y dado $\varepsilon > 0$:

$$p_0^*(K_0) \geq 1 - \varepsilon/2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{k-1}^*(K_{k-1}/t_{k-2} u_{k-2}) \geq 1 - \varepsilon/2^k$$

existe un compacto $K_k \subset T$ tal que $p_k^*(K_k/t_{k-1} u_{k-1}) \geq 1 - \varepsilon/2^{k+1}$ de forma que $Pr\{\gamma_0^n \in K_0, \ldots, \gamma_k^n \in K_k\} \geq (1 - \varepsilon/2^{k+1}) Pr\{\gamma_0^n \in K_0, \ldots, \gamma_{k-1}^n \in K_{k-1}\} \geq$

$$\geq \ldots\ldots \geq \quad 1 - \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{i+1}} \geq 1 - \varepsilon$$

Teniendo en cuenta que U es compacto y que para todo $\varepsilon > 0$ $Pr\{\gamma_0^n \in K_0, \eta_0^n \in U, \ldots, \gamma_k^n \in K_k, \eta_k^n \in U\} \geq 1 - \varepsilon$ para todo $k \in N$ y considerando que T y U son e.m.s.c. se utiliza de nuevo el mismo teorema referido anteriormente y se concluye que el conjunto de distribuciones marginales definidas sobre $T^N U^N$ es débilmente compacto y, por tanto, para la sucesión $\{(\gamma^n \eta^n), n \in N\} \subset T^N U^N$, del conjunto de distribuciones marginales se puede extraer una subsucesión convergente.

Llamando $\{(\gamma_k^0 \eta_k^0), k=0,1,\ldots\}$ a la secuencia asociada al límite de la subsucesión convergente de las distribuciones marginales, se demuestra mediante el lema anterior que dicha secuencia corresponde al objeto de control $\mu^*(./.)$ y, en consecuencia, existe un control $\underline{\nu}^*$ de forma que $E^{\underline{\nu}^*}(\phi^*(\gamma,\eta)) = E(\phi^*(\gamma^0 \eta^0))$ y por definición de los controles ν^{*n} se concluye:

$E\ \phi^*(\gamma^n \eta^n) \leq \inf\limits_{\nu^*} E^{\nu^*} \phi^*(\gamma,\eta) + \varepsilon_n$; tomando límites sólo para la subsucesión convergente se tiene que $E^{\underline{\nu}^*} \phi^*(\gamma\, \eta) \leq \inf\limits_{\nu^*} E^{\nu^*} \phi^*(\gamma\, \eta)$ y se demuestra así que $\underline{\nu}^*$ es el control óptimo.

9.- CONSTRUCCION DEL CONTROL OPTIMO EN EL PROBLEMA DE CONTROL ASOCIADO

En este apartado se llegará de forma constructiva al control óptimo y se demostrará además que es no aleatorizado y depende exclusivamente del último valor del proceso minimal suficiente t_n en cada etapa.

Observación

Se consideran todas las hipótesis referidas a lo largo del capítulo incluyendo las dos hipótesis adicionales de la sección 8.

Sea $\mathcal{N}^*$ el conjunto de controles para el nuevo problema de control asociado y sea $\mathcal{N}^n$ $(n \in N)$ el conjunto de controles para $t_0 \ldots t_n u_0 \ldots u_n$ fijos.

Se define $\Phi_n^*(\underline{t}_0 \ldots \underline{t}_n \underline{u}_0 \ldots \underline{u}_n) = \inf\limits_{\nu \in \mathcal{N}^n} E^{\nu}(\phi^*(t,u) / t_0 = \underline{t}_0, \ldots, u_n = \underline{u}_n)$

$\Phi_n^*(\cdot)$ representa el mínimo coste esperado cuando el sistema ha evolucionado hasta la etapa n-ésima a través de $(\underline{t}_0 \ldots \underline{t}_n \underline{u}_0 \ldots \underline{u}_n)$

Sea $F_m(t,u) = \sum_{k=m}^{\infty} \phi_k^*(t_k u_k) \qquad m=0,1,\ldots$

De esta definición se deduce: $F_0(t,u) = \phi^*(t,u)$ y la relación $F_m(t,u) = \phi_m^*(t_m u_m) + F_{m+1}(t,u) \qquad m=0,1,\ldots$

Al ser $(t_n u_n), n \in N$ un proceso de Markov controlado,

$$\operatorname{Inf}_{\nu \in \mathcal{N}^{m-1}} E^{\nu}(F_m(\gamma\, \eta)/\gamma_0 = t_0; \ldots; \gamma_{m-1} = t_{m-1}; \eta_0 = u_0; \ldots; \eta_{m-1} = u_{m-1})$$

sólo depende de t_{m-1} y u_{m-1} y tiene sentido definir:

$$\Psi_{m-1}(t_{m-1} u_{m-1}) = \operatorname{Inf}_{\nu \in \mathcal{N}^{m-1}} E^{\nu}(F_m(\gamma\, \eta)/\gamma_{m-1} = t_{m-1}; \eta_{m-1} = u_{m-1})$$

Así se deduce que:

$$\Phi_n^*(\underline{t}_0, \ldots, \underline{t}_n \underline{u}_0 \ldots \underline{u}_n) = \operatorname{Inf}_{\nu \in \mathcal{N}^n} E^{\nu}(\phi^*(t,u)/t_0 = \underline{t}_0 \ldots u_n = \underline{u}_n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \phi_k^*(\underline{t}_k, \underline{u}_k) + \operatorname{Inf}_{\nu \in \mathcal{N}^n} \left\{ F_{n+1}(t,u)/\underline{t}_0 \ldots \underline{t}_n \underline{u}_0 \ldots \underline{u}_n \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \phi_k^*(\underline{t}_k \underline{u}_k) + \Psi_n(\underline{t}_n \underline{u}_n)$$

Teniendo en cuenta, ver aptdo. I.b del teorema I.4.3, que e verifica la relación:

$$\Phi_n^*(t_0 \ldots u_n) = \int_T p_{n+1}^*(dt_{n+1}/t_n u_n) \operatorname{Inf}_{u_{n+1}} \Phi_{n+1}^*(t_0 \ldots t_{n+1} u_0 \ldots u_{n+1})$$ y sus-

ituyendo en ambos miembros la expresión anterior, se tiene:

$$\sum_0^n \phi_k^*(t_k u_k) + \Psi_n(t_n u_n) = \int_T p_{n+1}^*(dt_{n+1}/t_n u_n) \operatorname{Inf}_{u_{n+1}} \left\{ \sum_0^{n+1} \phi_k^*(t_k u_k) + \Psi_{n+1}(t_{n+1} u_{n+1}) \right\} =$$

$$= \sum_0^n \phi_k^*(t_k u_k) + \int_T \operatorname{Inf}_{u_{n+1}} \left\{ \phi_{n+1}^*(t_{n+1} u_{n+1}) + \Psi_{n+1}(t_{n+1} u_{n+1}) \right\} \cdot$$

$$\cdot p_{n+1}^*(dt_{n+1}/t_n u_n)$$

Y como conclusión:

$$\psi_n(t_n u_n) = \int_T \underset{u_{n+1}}{\mathrm{Inf}} \left\{ \phi^*_{n+1}(t_{n+1}u_{n+1}) + \psi_{n+1}(t_{n+1}u_{n+1}) \right\} p^*_{n+1}(dt_{n+1}/t_n u_n)$$

Esta expresión relaciona los $\{\psi_n, n \in N\}$, el objetivo es encontrar el control que asegura el coste mínimo esperado ψ^*, donde $\psi^* = \int_T \underset{u_0}{\mathrm{Inf}} \{\psi_0(t_0 u_0)\} p^*_0(dt_0)$

Observación

La secuencia $\{\psi_n(t_n u_n), n \in N\}$ es fundamental en la construcción del control óptimo. ¿Se puede asegurar la unicidad de tales funciones? Para demostrarlo se necesita el siguiente

LEMA III.9.1

En las condiciones iniciales, se asegura que

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t,u} \psi_m(t,u) = 0$$

Demostración

Se demuestra primero que $\lim\limits_{m\to\infty} \psi_m(t_m u_m) = 0$ para $(t,u) \in T^N U^N$

Por definición, $\psi_m(t_m u_m) = \underset{\nu\in\eta^m}{\mathrm{Inf}} E^{\nu}(F_{m+1}(\gamma\,\eta)/\gamma_m = t_m\, \eta_m = u_m)$, donde $F_{m+1}(\gamma\,\eta) = \sum\limits_{m+1}^{\infty} \phi^*_k(\gamma_k \eta_k)$ y, al converger la serie para $(\gamma\,\eta) \in T^N U^N$, se deduce que $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{m+1}^{\infty} \phi^*_k(\gamma_k \eta_k) = 0$ para $(\gamma\,\eta) \in T^N U^N$ y, por consiguiente, $\lim\limits_{m\to\infty} \psi_m(t_m u_m) = 0$ para todo $(t,u) \in T^N U^N$

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\phi^* \geq 0$ al ser acotada por abajo, se deduce que $\psi_m \geq 0$ para todo $m \in N$, y, en el caso que $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{t,u} \psi_m(t,u) \neq 0$ sería porque existe $\delta > 0$ tal que

$\lim\limits_{\to\infty} \sup\limits_{t,u} \Psi_m(t,u) = \delta$, y, en esa hipótesis falsa, para cualquier

$'$ tal que $0 < \delta' < \delta$ existe $n_0 \in N$ tal que para $m \geq n_0$

$$\sup_{t,u} \Psi_m(t,u) > \delta'$$

Por definición de supremo, dado δ'' de forma que $0 < \delta'' < \delta'$

ara cualquier $m \geq n_0$, existe $(\underline{t}_m \underline{u}_m) \in T \cdot U$ tales que $\Psi_m(\underline{t}_m \underline{u}_m) > \delta''$ y

$\lim\limits_{\to\infty} \Psi_m(\underline{t}_m \underline{u}_m) \geq \delta'' > 0$, que se contradice con: $\lim\limits_{m\to\infty} \Psi_m(t_m u_m) = 0$ para (t,u)

Así queda demostrado el lema.

PROPOSICION III.9.1

La sucesión de funciones $\{\Psi_m(t_m u_m), m \in N\}$ definida anterior- ente es única.

Demostración

Si existiera otra sucesión en las mismas condiciones, es ecir,

$$\underline{\Psi}_{m-1}(t_{m-1} u_{m-1}) = \int_T \inf_{u_m} (\phi^*_m(t_m u_m) \mp \underline{\Psi}_m(t_m u_m)) p^*_m(dt_m / t_{m-1} u_{m-1})$$

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t,u} \underline{\Psi}_m(t,u) = 0$$

Dado $(t_{m-1} u_{m-1}) \in T \cdot U$ $\left|\underline{\Psi}_{m-1}(t_{m-1} u_{m-1}) - \Psi_{m-1}(t_{m-1} u_{m-1})\right| =$

$$= \left|\int_T \left\{\inf_{u_m}(\phi^*_m(t_m u_m) + \underline{\Psi}_m(t_m u_m)) - \inf_{u_m}(\phi^*_m(t_m u_m) + \Psi_m(t_m u_m))\right\} p^*_m(dt_m / t_{m-1} u_{m-1})\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_T \sup_{u_m} \left\{ \underline{\Psi}_m(t_m u_m) - \Psi_m(t_m u_m) \right\} \quad p^*_m(dt_m / t_{m-1} u_{m-1})\right| \leq$$

$$\leq \int \sup_{t_m u_m} \left|\underline{\Psi}_m(t_m u_m) - \Psi_m(t_m u_m)\right|$$

Es decir, para todo $(t_{m-1} u_{m-1}) \in T \cdot U$

$$\left|\underline{\Psi}_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1})-\Psi_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1})\right| \leq \operatorname*{Sup}_{t,u} \left|\underline{\Psi}_m(t,u)-\Psi_m(t,u)\right|$$

Iterando el proceso, se llega a:

$$\left|\underline{\Psi}_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1})-\Psi_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1})\right| \leq \operatorname*{Sup}_{t,u} \left|\underline{\Psi}_N(t,u)-\Psi_N(t,u)\right| \quad \text{para } N > m$$

Tomando límites cuando $N \to \infty$ se concluye, por aplicación del lema anterior, que $\Psi_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1}) = \underline{\Psi}_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1})$ para todo $m \in N$ y $(t_{m-1}u_{m-1}) \in T \cdot U$.

Así se demuestra que la secuencia $\Psi_m(t_m u_m), m \in N$ es única.

<u>Observación</u>

El control óptimo dependerá de esta secuencia, para determinarlo, se distinguirá el caso de un número finito de etapas del caso general.

<u>CONSTRUCCION DEL CONTROL OPTIMO. CASO FINITO</u>

Sean m las etapas, es decir, $\phi^*(t,u) = \sum_{k=0}^{m} \phi_k^*(t_k u_k)$

Por definición, $\Psi_m(t_m, u_m) = 0$ ya que $F_{m+1}(t,u) = 0$

Para todo $n=0,1,..,m-1$

$$\Psi_n(t_n u_n) = \int_T \operatorname*{Inf}_{u_{n+1}} \left\{ \phi_{n+1}^*(t_{n+1}u_{n+1}) + \Psi_{n+1}(t_{n+1}u_{n+1}) \right\} p_{n+1}^*(dt_{n+1}/t_n u_n)$$

Para $n=m-1$, al ser $\Psi_m=0$, se tiene:

$$\Psi_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1}) = \int_T \operatorname*{Inf}_{u_m} \left\{ \phi_m^*(t_m u_m) \right\} p_m^*(dt_m/t_{m-1}u_{m-1})$$

y al ser $\phi_m^*(t_m u_m)$ una función semicontinua por abajo y acotada por abajo, por el lema I.2.2 y teniendo en cuenta que U es compacto, se deduce que existe una función Borel

$\varphi_m^*: (T,\Gamma) \dashrightarrow (U,\mathcal{B})$ tal que $\operatorname*{Inf}_{u_m}\left\{\phi_m^*(t_m u_m)\right\} = \phi_m^*(t_m, \varphi_m^*(t_m))$

y $\psi_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1}) = \int_T \phi_m^*(t_m, \varphi_m^*(t_m))p_m^*(dt_m/t_{m-1}u_{m-1})$

Después se demuestra la semicontinuidad de la función $\psi_{m-1}(t_{m-1}u_{m-1})$. Para ver esto hay que demostrar la convergencia débil de la secuencia de medidas $p_m^*(./t_{m-1}^k u_{m-1}^k)$ a la medida $p_m^*(./t_{m-1}^0 u_{m-1}^0)$ cuando $(t_{m-1}^k u_{m-1}^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (t_{m-1}^0 u_{m-1}^0)$. En este punto se precisa de la hipótesis adicional (A) y se demuestra de forma análoga a como se hizo en el teorema III.8.1.

Iterando todo este proceso se asegura la existencia de una secuencia de funciones Borel $\left\{\varphi_n^*:(T,\Gamma) \to (U,\mathcal{B}), n=0,1,..,m\right\}$ que dan lugar al siguiente teorema:

TEOREMA III.9.1

La secuencia de controles $\left\{u_k = \varphi_k^*(t_k), k=0,1,..,m\right\}$ define un control óptimo no aleatorizado en el problema de control asociado.

Demostración

Sea $\underline{\nu}$ un control admisible cualquiera.

Si $\left\{(\gamma_n \eta_n), n=0,..,m\right\}$ es el proceso controlado generado para el problema de control asociado por el objeto de control y el control $\underline{\nu}$, se tiene:

$$E^{\underline{\nu}}(\phi^*(\gamma,\eta)) = E^{\underline{\nu}}\Big(\sum_{0}^{m}\phi_k^*(\gamma_k\eta_k)\Big) \geqslant E^{\underline{\nu}}\Big(\sum_{0}^{m-1}\phi_k^*(\gamma_k\eta_k)+\operatorname*{Inf}_{\eta_m}\left\{\phi_m^*(\gamma_m\eta_m)\right\}\Big)=$$

$$=E^{\underline{\nu}}\Big(E^{\underline{\nu}}\Big(\sum_{0}^{m-1}\phi_k^*(\gamma_k\eta_k)+\operatorname*{Inf}_{\eta_m}\left\{\phi_m^*(\gamma_m\eta_m)\right\}/\gamma_0\cdot\cdot\gamma_{m-1}\eta_0\cdot\cdot\eta_{m-1}\Big)\Big) =$$

$$= E^{\underline{\nu}}\Big(\sum_{0}^{m-1}\phi_k^*(\gamma_k\eta_k) + \Psi_{m-1}(\gamma_{m-1}\eta_{m-1})\Big) \geqslant \ldots(\text{Idem})\ldots \geqslant \Psi^* \text{ para } \underline{\nu}\in\mathcal{N}^*$$

El proceso de iteración anterior se efectúa tomando el ínfimo en $\eta_m, \eta_{m-1},\ldots,\eta_0$

Como la sucesión de desigualdades anteriores se convierten en igualdades para la estrategia de control que alcanza los sucesivos ínfimos, dicha estrategia es la óptima y es la caracterizada por las funciones $\{\varphi_k^*(.),k=0,..,m\}$.

Se ha obtenido así que existe un control $\underline{\nu}^*$ que verifica:

$$E^{\underline{\nu}^*}(\phi^*(\gamma\eta)) = \Psi^* \leqslant E^{\underline{\nu}}(\phi^*(\gamma\eta)) \text{ para todo } \underline{\nu}\in\mathcal{N}^*$$

Y ya está demostrado el teorema.

APROXIMACION DEL CONTROL OPTIMO EN EL CASO GENERAL

Al construir la secuencia Ψ_n, n=0,..,m en el caso finito, se partía de $\Psi_m(t_m u_m)=0$ por ser $F_{m+1}(t,u)=0$. Ahora, sin embargo, esto no es cierto al ser $F_{m+1}(t,u) = \sum_{m+1}^{\infty}\phi_k^*(t_k u_k)$ para cualquier $m\in N$ y no poder garantizar que la serie resultante sea nula.

Pero en el caso general se veía que la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k^*(t_k u_k)$ era convergente para todo $(t,u)\in T^N U^N$. Por consiguiente, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede determinar un $n_0 \in N$ tal que para todo $m \geq n_0$ $\sum_{m+1}^{\infty} \phi_k^*(t_k u_k) < \varepsilon$ para todo $(t,u) \in T^N U^N$ y truncando el problema en la etapa n_0 se puede encontrar, siguiendo el mismo proceso que en el caso finito, un control ε-óptimo.

Observación

A partir de un problema de control en información incompleta y de la existencia de un proceso minimal suficiente t para el proceso básico, se ha construido un problema de control asociado en información completa. Al resolver éste, se resuelve el problema original por ser los costes de ambos problemas tales que en media coinciden. El control óptimo depende en cada etapa n del estadístico minimal suficiente t_n definido por el proceso minimal suficiente t y es, además, no aleatorizado.

Para resolver, pues, el problema original, bastará determinar un proceso minimal suficiente para el proceso básico y resolver el problema de control asociado, que, por lo referido anteriormente, determina un control óptimo en la clase de controles basados en un proceso minimal suficiente y, por el teorema de completitud, es el control óptimo para el problema original en información incompleta.

78

CAPITULO IV

CAPITULO IV

APLICACION DEL TEOREMA DE COMPLETITUD A UN PROBLEMA DE CONTROL LINEAL EN INFORMACION INCOMPLETA

1.- SUMARIO

En este capítulo IV se aplicarán los resultados obtenidos en el capítulo anterior a un problema de control en información incompleta.

En la sección 2 se plantea dicho problema, que es el del regulador lineal con coste cuadrático y las distribuciones de probabilidad que distorsionan la evolución del sistema y las observaciones son normales de parámetros conocidos.

En la sección 3 se enuncian, sin demostración, las ecuaciones de recurrencia que resuelven el problema de control y la expresión del coste mínimo esperado. El método de determinación de estas ecuaciones es el desarrollado en el libro de Aström y constituye una modificación del filtro de Kalman clásico.

También se enuncian en esta sección unos lemas de cálculo matricial que serán de utilidad a lo largo del capítulo.

En la sección 4 se construye el problema de control asociado en información completa, donde el estado del sistema en cada etapa es el estadístico minimal suficiente determinado por el proceso minimal suficiente para el proceso básico.

La resolución de este problema concreto servirá no sólo como aplicación de los resultados teóricos obtenidos con anterioridad, sino para dar un nuevo enfoque del filtro de Kalman, ya que en el problema de control asociado surgen las ecuaciones de evolución del estadístico suficiente y coinciden con las ecuaciones clásicas del Filtro de Kalman. Esto es debido a que el estadístico suficiente minimal para el estado del sistema coincide con la proyección de éste sobre el espacio vectorial determinado por las observaciones en cada etapa en el problema del regulador lineal con distorsiones siguiendo la distribución normal.

Se demostrará en la sección 5 que los controles óptimos en cada etapa son iguales para ambos enfoques, así como los costes mínimos esperados.

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CONTROL

Sea el sistema gobernado por la ecuación en diferencias estocástica:

$$x_{n+1} = \phi x_n + \Gamma u_n + v_n \qquad n=0,1,\ldots,N$$

$$y_n = \theta x_n + e_n \qquad n=0,1,\ldots,N$$

donde N es el número de etapas, $x_n \in R^m$, $u_n \in R^k$, $y_n \in R^s$ y $\{v_n, n=0,\ldots,N\}$ $\{e_n, n=0,\ldots,N\}$ son secuencias de variables aleatorias independientes normales de media 0 y covarianza R_1 y R_2 resp.

Las matrices $\phi, \Gamma, \theta, R_1, R_2$ tienen dimensiones coherentes y no se volverá a hacer referencia a éstas.

Las v.a. e_n y v_n son independientes entre sí y respecto a x_n. El estado inicial x_0 es una v.a. normal de media "m" y covarianza R_0.

Se supone, además, que las matrices R_0, R_1 son semidefinidas positivas y R_2 es definida positiva. Por comodidad de notación, se indicará como $R_0, R_1 \geq 0$ y $R_2 > 0$

El coste de control es:

$$L = x_N' Q_0 x_N + \sum_{i=0}^{N-1} (x_i' Q_1 x_i + u_i' Q_2 u_i) \qquad \text{con } Q_0, Q_1 \geq 0 \text{ y } Q_2 > 0$$

Se plantea el problema de la siguiente forma: Encontrar un control admisible $(u_0 u_1 .. u_{N-1})$ para el sistema descrito por las ecuaciones anteriores de manera que se minimice la esperanza del coste de control L.

Al ser un problema de control en información incompleta, no es conocido el estado del sistema en cada etapa x_n, sino que sólo se conoce una función del mismo y_n distorsionada por una v.a. e_n. En estas circunstancias se consideran controles admisibles aquéllos que dependen de los valores observados hasta el instante actual $y_0, y_1, \ldots, y_n, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.

ALGUNOS LEMAS DE CALCULO MATRICIAL

LEMA IV.2.1

Dados los vectores $u \in R^k, x \in R^m$ y las matrices $S \in \mathcal{M}_{k,k}$

$T\in\mathcal{M}_{k,m}$, donde $S>0$ y simétrica, se verifica la siguiente igualdad: $u'Su + 2u'Tx = (u+S^{-1}Tx)'S(u+S^{-1}Tx) - (Tx)'S^{-1}(Tx)$

LEMA IV.2.2

Dadas las matrices $A\in\mathcal{M}_{m,m}$, $B\in\mathcal{M}_{m,k}$, $C\in\mathcal{M}_{k,k}$ y siendo A y C invertibles, se verifica la siguiente igualdad:

$$(A + BCB')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + B'A^{-1}B)^{-1}B'A^{-1}$$

LEMA IV.2.3

Dadas las matrices (coherentes con la dimensión) Q_1, ϕ, B, Γ, Q_2 y donde B es simétrica, se verifica la igualdad:

$$(Q_1 + \phi'(B^{-1} + \Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi) = (Q_1 + \phi'B\phi - \phi'B\Gamma(Q_2+\Gamma'B\Gamma)^{-1}\Gamma'B\phi)$$

3.- RESOLUCION DEL PROBLEMA POR MEDIO DEL FILTRO DE KALMAN

Se obtienen las siguientes ecuaciones que calculan para cada etapa n,n=0,N el control u_n que minimiza el coste esperado:

$$P_0 = (R_0^{-1} + \theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}$$

$$P_n = ((R_1 + \phi P_{n-1}\phi')^{-1} + \theta'R_2^{-1}\theta)^{-1} \qquad n=1,2..N$$

$$\hat{x}_0 = m + R_0\theta'(\theta R_0\theta' + R_2)^{-1}(y_0 - \theta m)$$

$$\hat{x}_n = \phi\hat{x}_{n-1} + \Gamma u_{n-1} + P_n\theta'R_2^{-1}(y_n - \theta(\phi\hat{x}_{n-1} + \Gamma u_{n-1})) \qquad n=1,.N$$

$$S_N = 0$$

$$S_n = Q_1 + \phi'(S_{n+1}^{-1} + \Gamma Q_2^{-1}\Gamma')\phi \qquad n=0,1..N-1$$

$$L_n = (Q_2 + \Gamma'S_{n+1}\Gamma)^{-1}\Gamma'S_{n+1}\phi \qquad n=0,1,..,N$$

$$\underline{u_n = -L_n\,\hat{x}_n \qquad n=0,1,..,N-1}$$

4.- RESOLUCION DEL PROBLEMA ASOCIADO EN INFORMACION COMPLETA CONSTRUIDO A PARTIR DEL PROCESO MINIMAL SUFICIENTE PARA EL PROCESO BASICO

REFORMULACION DEL PROBLEMA

El objeto de control se define de la siguiente forma:

$$p_0^1(dx_0) \ : \ \mathcal{N}(m, R_0)$$
$$p_n^1(dx_n/x_{n-1}u_{n-1}) \ : \ \mathcal{N}(\phi x_{n-1} + \Gamma u_{n-1}, R_1)$$
$$p_n^2(dy_n/x_n u_{n-1}) \ : \ \mathcal{N}(\theta x_n, R_2)$$

El coste de control se ajusta a las hipótesis del capítulo III, donde $\phi_N(x_N u_N) = x_N' Q_0 x_N$

$$\phi_k(x_k u_k) = x_k' Q_1 x_k + u_k' Q_2 u_k \qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

CONSTRUCCION DEL PROCESO MINIMAL SUFICIENTE

Para ello interesa construir un estadístico minimal suficiente t_n para x^n en la distribución $Pr(y^n u^{n-1}/x^n)$.

Por la equivalencia de la definición de suficiencia de Fisher y la bayesiana, basta encontrar t_n tal que $Pr(x^n/y^n u^{n-1}) = Pr(x^n/t_n)$ y por la proposición III.3.2 basta con que $Pr(x_n/y^n u^{n-1}) = Pr(x_n/t_n)$.

Para el problema planteado se demuestra que la distribución $Pr(x_n/y^n u^{n-1})$, $n=0,1..N$ es una normal de media μ_n y matriz de covarianza Γ_n. En tal caso, la distribución queda determinada por estos dos parámetros y se define así el estadístico suficiente $t_n = (\mu_n \Gamma_n)$ para $n=0,1,..,N$. Además, t_n es un estadístico minimal suficiente al ser la distribución normal, por lo que se puede construir el problema de control asociado según lo visto en el capítulo anterior.

A continuación se demuestra que las distribuciones $Pr(x_n/y^n u^{n-1}$ son normales de media μ_n y matriz de covarianza Γ_n.

Se calculan también las ecuaciones de recurrencia que relacionan en cada etapa n el estadístico t_n con el correspondiente de la etapa anterior t_{n-1}, la última observación y_n y el último control u_n que caracterizan al proceso minimal suficiente.

Observación

En todo el capítulo se hará uso de los lemas de cálculo matriciales de la sección 2 sin necesidad de referirse a ellos directamente.

PROPOSICION IV.4.1

La distribución $Pr(x_0/y_0)$ es normal $N(\mu_0, \Gamma_0)$

Demostración

Al ser $p_0^2(y_0/x_0)$ y $p_0^1(x_0)$ distribuciones normales, se tiene:

$p_0^2(y_0/x_0) \propto \exp(-1/2 \ \| y_0 - \theta x_0 \|^2_{R_2^{-1}})$

$$p_0^1(x_0) \propto \exp(-1/2 \; \| x_0 - m \|^2_{R_0^{-1}})$$

Por el teorema de Bayes, $Pr(y_0/x_0) \propto p_0^2(y_0/x_0) p_0^1(x_0) \propto$

$$\propto \exp(-1/2(\; \| y_0 - \vartheta x_0 \|^2_{R_2^{-1}} + \| x_0 - m \|^2_{R_0^{-1}}))$$

Desarrollando convenientemente las igualdades matriciales:

$$(x_0 - m)' R_0^{-1} (x_0 - m) + (y_0 - \vartheta x_0)' R_2^{-1} (y_0 - \vartheta x_0) =$$

$$= x_0'(R_0^{-1} + \vartheta' R_2^{-1} \vartheta) x_0 - 2x_0'(R_0^{-1} m + \vartheta' R_2^{-1} y_0) + m' R_0^{-1} m + y_0' R_2^{-1} y_0 =$$

$$= (x_0 - (R_0^{-1} + \vartheta' R_2^{-1} \vartheta)^{-1} (R_0^{-1} m + \vartheta' R_2^{-1} y_0))' (R_0^{-1} + \vartheta' R_2^{-1} \vartheta) .$$

$$.(x_0 - (R_0^{-1} + \vartheta' R_2^{-1} \vartheta)^{-1} (R_0^{-1} m + \vartheta' R_2^{-1} y \;)) + \text{Resto(no depende de } x_0)$$

Es decir,

$$Pr(x_0/y_0) \propto \exp(-1/2 \; \| x_0 - (R_0^{-1} + \vartheta' R_2^{-1} \vartheta)^{-1} (R_0^{-1} m + \vartheta' R_2^{-1} y_0) \|^2_{(R_0^{-1} + \vartheta' R_2^{-1} \vartheta)}$$

Y llamando $\Gamma_0 = (R_0^{-1} + \vartheta' R_2^{-1} \vartheta)^{-1}$

$$\mu_0 = \Gamma_0 (R_0^{-1} m + \vartheta' R_2^{-1} y_0)$$

Se tiene demostrado que $Pr(x_0/y_0) : N(\mu_0, \Gamma_0)$

PROPOSICION IV.4.2

Las distribuciones $Pr(x_n/y^n u^{n-1})$ son normales $N(\mu_n, \Gamma_n)$ para todo $n=0,1,\ldots,N$ y se cumple la siguiente relación:

$$\Gamma_n^{-1} = (\vartheta' R_2^{-1} \vartheta + (R_1 + \phi \Gamma_{n-1} \phi')^{-1})$$

$$\mu_n = \Gamma_n (\vartheta' R_2^{-1} y_n + (R_1 + \phi \Gamma_{n-1} \phi')^{-1} (\phi \mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1}) \qquad n=1,\ldots,N$$

Demostración

Por la proposición anterior, queda demostrado el caso en que n=0. Por inducción, si se supone que $\Pr(x_{n-1}/y^{n-1}u^{n-2})$ es una distribución $N(\mu_{n-1}, \Gamma_{n-1})$:

Por el teorema de Bayes,

$\Pr(x_n/y^n u^{n-1}) \propto \Pr(y_n/x_n y^{n-1}u^{n-1}) \Pr(x_n/y^{n-1}u^{n-1})$, y estas distribuciones, quedan:

$$\Pr(y_n/x_n y^{n-1}u^{n-1}) = p_n^2(y_n/x_n u_{n-1})$$

$$\Pr(x_n/y^{n-1}u^{n-1}) = \int_X \Pr(x_n/x_{n-1}u_{n-1}) \Pr(dx_{n-1}/y^{n-1}u^{n-2}) =$$

$$= \int_X p_n^1(x_n/x_{n-1}u_{n-1}) \Pr(dx_{n-1}/y^{n-1}u^{n-2})$$

donde $\Pr(x_{n-1}/y^{n-1}u^{n-2}) \propto \exp(-1/2 \| x_{n-1} - \mu_{n-1}\|^2_{\Gamma^{-1}_{n-1}}$

Para estudiar la distribución de $(x_n/y^n u^{n-1})$ se calcula primero la distribución $\Pr(x_n/y^{n-1}u^{n-1})$ que resulta de integrar respecto x_{n-1} el producto

$$\Pr(x_n/x_{n-1}u_{n-1})\Pr(x_{n-1}/y^{n-1}u^{n-1}) \propto \exp(-1/2 \{\| x_n - \phi x_{n-1} - \Gamma u_{n-1}\|^2_{R_1^{-1}} +$$

$$+ \|x_{n-1} - \mu_{n-1}\|^2_{\Gamma^{-1}_{n-1}})$$

A continuación se transforman las igualdades matriciales

$$(x_n - \phi x_{n-1} - \Gamma u_{n-1})' R_1^{-1}(x_n - \phi x_{n-1} - \Gamma u_{n-1}) +$$

$$+ (x_{n-1} - \mu_{n-1})'\Gamma^{-1}_{n-1}(x_{n-1} - \mu_{n-1})$$ a partir de

$$(x_n - \phi x_{n-1} - \Gamma u_{n-1}) = (x_n - \phi \mu_{n-1} - \Gamma u_{n-1} - \phi(x_{n-1} - \mu_{n-1}))$$

$$\| x_n - \phi x_{n-1} - \Gamma u_{n-1}\|^2_{R_1^{-1}} + \|x_{n-1} - \mu_{n-1}\|^2_{\Gamma^{-1}_{n-1}} =$$

$$= (x_n - \phi\mu_{n-1} - \Gamma u_{n-1} - \phi(x_{n-1} - \mu_{n-1}))' R_1^{-1} (x_n - \phi\mu_{n-1} - \Gamma u_{n-1} - \phi(x_{n-1}-\mu_{n-1}))$$

$$+ (x_{n-1}-\mu_{n-1})'\Gamma_{n-1}^{-1}(x_{n-1}-\mu_{n-1}) =$$

$$= (x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})'R_1^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1}) + (x_{n-1}-\mu_{n-1})'\phi' R_1^{-1}\phi \,.$$

$$.(x_{n-1}-\mu_{n-1}) - 2(x_{n-1}-\mu_{n-1})'\phi' R_1^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1}) +$$

$$+ (x_{n-1}-\mu_{n-1})'\Gamma_{n-1}^{-1}(x_{n-1}-\mu_{n-1}) =$$

$$= (x_{n-1}-\mu_{n-1})'(\Gamma_{n-1}^{-1}+\phi'R_1^{-1}\phi)(x_{n-1}-\mu_{n-1}) - 2(x_{n-1}-\mu_{n-1})'\phi'R_1^{-1}\,.$$

$$.(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1}) + (x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})'R_1^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1}) =$$

$$=(x_{n-1}-\mu_{n-1}-(\Gamma_{n-1}^{-1}+\phi'R_1^{-1}\phi)^{-1}\phi'R_1^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1}))'(\Gamma_{n-1}^{-1}+\phi'R_1^{-1}\phi)\,.$$

$$.(x_{n-1}-\mu_{n-1}-(\Gamma_{n-1}^{-1}+\phi'R_1^{-1}\phi)^{-1}\phi'R_1^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})) -$$

$$-(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})'R_1^{-1}\phi(\Gamma_{n-1}^{-1}+\phi'R_1^{-1}\phi)^{-1}\phi'R_1^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1}) +$$

$$+(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})'R_1^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})$$

Al integrar respecto x_{n-1} desaparecerá el primer sumando ya que determina la función de densidad de una distribución normal de media $\mu_{n-1}+(\Gamma_{n-1}^{-1}+\phi'R_1^{-1}\phi)^{-1}\phi'R_1^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})$ y matriz de covarianza $(\Gamma_{n-1}^{-1}+\phi'R_1^{-1}\phi)^{-1}$

Los dos sumandos que quedan se reagrupan para dar:

$$(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})'(R_1^{-1}-R_1^{-1}\phi(\Gamma_{n-1}^{-1}+\phi'R_1^{-1}\phi)^{-1}\phi'R_1^{-1})(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1}) =$$

$$= (x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})'(R_1+\phi\Gamma_{n-1}\phi')^{-1}(x_n-\phi\mu_{n-1}-\Gamma u_{n-1})$$

Es decir: $Pr(x_n/y^{n-1}u^{n-1}) = Pr(x_n/\mu_{n-1}\Gamma_{n-1}u_{n-1}) : \mathcal{N}(\phi\mu_{n-1}+\Gamma u_{n-1},\ (R_1+\phi\Gamma_{n-1}\phi'))$

Ahora se puede calcular la distribución $Pr(x_n/y^n u^{n-1})$:

$$Pr(x_n/y^n u^{n-1}) \propto Pr(y_n/x_n u_{n-1})\ Pr(x_n/y^{n-1} u^{n-1}) =$$

$$= Pr(y_n/x_n u_{n-1})\ Pr(x_n/t_{n-1} u_{n-1}) = Pr(x_n/t_{n-1} y_n u_{n-1})$$

Desarrollando las matrices de forma análoga a como se hizo anteriormente, se llega a:

$$Pr(x_n/y^n u^{n-1}) \propto \exp(-1/2 \| ((x_n-\mu_n)'(\Gamma_n)^{-1}(x_n-\mu_n)))$$

donde $\Gamma_n^{-1} = (\theta' R_2^{-1}\theta + (R_1 + \phi \Gamma_{n-1}\phi')^{-1})$

$$\mu_n = \Gamma_n(\theta' R_2^{-1} y_n + (R_1 + \phi \Gamma_{n-1}\phi')^{-1}(\phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1})$$

Así se concluye que $Pr(x_n/y^n u^{n-1}) : \mathcal{N}(\mu_n, \Gamma_n)$

<u>COROLARIO IV.4.1</u>

En las ecuaciones:

$$\mu_0 = \Gamma_0(R_0^{-1} m + \theta' R_2^{-1} y_0)$$

$$\mu_n = \Gamma_n(\theta' R_2^{-1} y_n + (R_1 + \phi \Gamma_{n-1}\phi')^{-1}(\phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1})$$

se pueden sustituir las expresiones R_0^{-1} y $(R_1 + \phi \Gamma_{n-1}\phi')^{-1}$ por $\Gamma_0^{-1} - \theta' R_2^{-1}\theta$ y $\Gamma_n^{-1} - \theta' R_2^{-1}\theta$ respectivamente dando lugar a

$$\mu_0 = m + \Gamma_0 \theta' R_2^{-1}(y_0 - \theta m)$$

$$\mu_n = \phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1} + \Gamma_n \theta' R_2^{-1}(y_n - \theta(\phi \mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1}))$$

Estas dos ecuaciones, junto a:

$$\Gamma_0 = (R_0^{-1} + \theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}$$

$$\Gamma_n = ((R_1 + \phi \Gamma_{n-1}\phi')^{-1} + \theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}$$

y teniendo presente que $t_n = (\mu_n, \Gamma_n), n=0,1,..,N$ representan las ecuaciones de recurrencia que caracterizan al estadístico minimal suficiente t_n en función de t_{n-1}, y_n y u_{n-1}.

Observación

En la ecuación recurrente de $\Gamma_n, n=0,..,N$ no intervienen las observaciones y los controles, por lo que se pueden determinar todos ellos previamente al proceso de observación y control

Esta propiedad simplifica los cálculos, ya que se puede considerar como estadístico minimal suficiente a $\mu_n, n=0,..,N$.

OBJETO CONTROLADO DEL PROBLEMA DE CONTROL ASOCIADO

A continuación se construirá el problema de control asociado en información completa, en que el estado del sistema viene definido por el proceso minimal suficiente t y el control es el mismo que el del problema original u.

Por la observación anterior, se considera como proceso básico en este nuevo problema a $\{\mu_n, n=0,..,N\}$. El objeto de control estará determinado por las distribuciones $Pr(\mu_n/\mu^{n-1}u^{n-1})$ y el control vendrá determinado por las distribuciones $Pr(u_n/\mu^n u^{n-1})$ siendo $\{\Gamma_n, n=0,..,N\}$ valores conocidos.

El primer problema consiste en determinar las distribuciones asociadas al objeto de control. Por la ecuación de recurrencia para μ_n, en que $\mu_n = t_n^1(\mu_{n-1} y_n u_{n-1})$, si se pudiera conocer

$Pr(y_n/\mu_{n-1}u_{n-1})$ se podría calcular $Pr(\mu_n/\mu_{n-1}u_{n-1})$.

Demostrando eso, se tiene que el problema de control asociado determina un proceso controlado de Markov.

Se precisará un lema de cálculo matricial y calcular distintas distribuciones asociadas al problema antes de determinar el objeto de control.

LEMA IV.4.1

Con la notación seguida hasta ahora, se verifica:

$$(R_2 + \theta R_0 \theta')(R_2^{-1}\theta(R_0^{-1} + \theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}) = \theta$$

Demostración

$$(R_2+\theta R_0\theta')(R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}) = R_2R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1} +$$
$$+ \theta R_0\theta' R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1} = \theta((R_0^{-1}+\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1} +$$
$$+R_0\theta' R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}) = \theta((I+R_0\theta' R_2^{-1}\theta)(R_0^{-1}+\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}) =$$
$$= \theta(R_0(R_0^{-1}+\theta' R_2^{-1}\theta)(R_0^{-1}+\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}) = \theta(R_0 I R_0^{-1}) = \theta$$

Así se ha demostrado el lema.

DISTRIBUCION DE Y_0

$$Pr(y_0) = \int_X Pr(y_0/x_0)Pr(dx_0)$$

Al ser $Pr(y_0/x_0) \propto \exp(-1/2 \; \| y_0 - \theta x_0 \|^2_{R_2^{-1}})$

$$Pr(x_0) \propto \exp(-1/2 \; \| x_0 - m \|^2_{R_0^{-1}})$$

desarrollando los exponentes, de forma análoga a como se ha hecho hasta ahora, se obtiene:

$$(x_0-m)'R_0^{-1}(x_0-m) + (y_0-\theta x_0)'R_2^{-1}(y_0-\theta x_0) = x_0'R_0^{-1}x_0 + m'R_0^{-1}m -$$

$$- 2x_0'R_0^{-1}m + x_0'\theta'R_2^{-1}\theta x_0 + y_0'R_2^{-1}y_0 - 2x_0'\theta'R_2^{-1}y_0 =$$

$$= x_0'(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)x_0 - 2x_0'(R_0^{-1}m + \theta'R_2^{-1}y_0) + m'R_0^{-1}m + y_0'R_2^{-1}y_0 =$$

$$=(x_0-(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}(R_0^{-1}m+\theta'R_2^{-1}y_0))'(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)(\ldots \text{idem} \ldots) -$$

$$- (R_0^{-1}m+\theta'R_2^{-1}y_0)'(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}(R_0^{-1}m+\theta'R_2^{-1}y_0) +$$

$$+ m'R_0^{-1}m + y_0'R_2^{-1}y_0$$

Al integrar respecto a x_0 se elimina el primer sumando, y queda el resto, que se puede poner como:

$$m'R_0^{-1}m + y_0'R_2^{-1}y_0 - y_0'(R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}\theta'R_2^{-1})y_0 -$$

$$-m'R_0^{-1}(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}m - 2y_0'R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}m =$$

$$= y_0'(R_2^{-1}-R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}\theta'R_2^{-1})y_0 - 2y_0'R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}m$$

$$+ \text{Resto (no depende de } y_0) =$$

$$= y_0'(R_2+\theta R_0\theta')^{-1}y_0 - 2y_0'R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}m + \text{Resto} =$$

$$= (y_0-(R_2+\theta R_0\theta')R_2^{-1}\theta(R_0^{-1}+\theta'R_2^{-1}\theta)^{-1}R_0^{-1}m)'(R_2+\theta R_0\theta')^{-1}(\text{ idem }) +$$

$$+ \text{Resto}$$

Por el lema de cálculo anterior la expresión es igual a:

$$= (y_0-\theta m)'(R_2+\theta R_0\theta')^{-1}(y_0-\theta m) + \text{Resto}$$

Es decir, $y_0 : \mathcal{N}(\theta m, (R_2+\theta R_0\theta'))$

DISTRIBUCION DE μ_0

Al ser $\mu_0 = m + \Gamma_0\theta'R_2^{-1}(y_0 - \theta m)$

Se tiene que $\mu_0 : \mathcal{N}(m, \Gamma_0\theta'R_2^{-1}(R_2+\theta R_0\theta')R_2^{-1}\theta\Gamma_0)$

A continuación se simplifica la expresión de $Var(\mu_0)$

PROPOSICION IV.4.3

$$\Gamma_0 \theta' R_2^{-1}(R_2+\theta R_0 \theta')R_2^{-1}\theta\Gamma_0 = R_0 - \Gamma_0$$

Demostración

$$\Gamma_0\theta' R_2^{-1}(R_2+\theta R_0\theta')R_2^{-1}\theta\Gamma_0 = \Gamma_0\theta' R_2^{-1}\theta\Gamma_0 + \Gamma_0\theta' R_2^{-1}\theta R_0\theta' R_2^{-1}\theta\Gamma_0 =$$

Sustituyendo $\theta' R_2^{-1}\theta = \Gamma_0^{-1} - R_0^{-1}$, queda

$$= \Gamma_0(\Gamma_0^{-1}-R_0^{-1})\Gamma_0 + \Gamma_0(\Gamma_0^{-1}-R_0^{-1})R_0(\Gamma_0^{-1}-R_0^{-1})\Gamma_0 = \Gamma_0 - \Gamma_0 R_0^{-1}\Gamma_0 +$$

$$+ (\Gamma_0\Gamma_0^{-1}-\Gamma_0 R_0^{-1})R_0(\Gamma_0^{-1}\Gamma_0-R_0^{-1}\Gamma_0) = \Gamma_0 - \Gamma_0 R_0^{-1}\Gamma_0 + (R_0-\Gamma_0)(I-R_0^{-1}\Gamma_0) =$$

$$= \Gamma_0 - \Gamma_0 R_0^{-1}\Gamma_0 + R_0 - \Gamma_0 - \Gamma_0 + \Gamma_0 R_0^{-1}\Gamma_0 = R_0 - \Gamma_0$$

Como se pretendía demostrar.

COROLARIO IV.4.2

$$\mu_0 : \mathcal{N}(m, R_0-\Gamma_0)$$

DISTRIBUCION $Pr(x_n/t_{n-1}u_{n-1})$

$$Pr(x_n/t_{n-1}u_{n-1}) = \int_X Pr(x_n/x_{n-1}u_{n-1})Pr(x_{n-1}/t_{n-1})dx_{n-1}$$

y se tiene: $Pr(x_n/x_{n-1}u_{n-1}) \propto \exp(-1/2\| x_n-\phi x_{n-1}-\Gamma u_{n-1}\|^2_{R_1^{-1}})$

$$Pr(x_{n-1}/t_{n-1}) \propto \exp(-1/2\| x_{n-1}-\mu_{n-1}\|^2_{\Gamma_{n-1}^{-1}})$$

Desarrollando las fórmulas matriciales de forma que se elimine el sumando que aglutina los términos que dependen de x_{n-1} se obtiene:

(Se omiten estos desarrollos por ser análogos a los vistos)

$$\left\| x_n - \phi x_{n-1} - \Gamma u_{n-1} \right\|^2_{R_1^{-1}} + \left\| x_{n-1} - \mu_{n-1} \right\|^2_{\Gamma_{n-1}^{-1}} = \ldots =$$

$$= (x_{n-1} - (\Gamma_{n-1}^{-1} + \phi' R_1^{-1}\phi)^{-1}(\Gamma_{n-1}^{-1}\mu_{n-1} + \phi' R_1^{-1}(x_n - \Gamma u_{n-1})))'(\Gamma_{n-1}^{-1} + \phi' R_1^{-1}\phi) .$$

$$.(\text{ idem }) - (\phi' R_1^{-1}(x_n - \Gamma u_{n-1}) + \Gamma_{n-1}^{-1}\mu_{n-1})'(\phi' R_1^{-1}\phi + \Gamma_{n-1}^{-1})^{-1}(\text{ idem}) +$$

$$+ (x_n - \Gamma u_{n-1})' R_1^{-1}(x_n - \Gamma u_{n-1}) + \mu'_{n-1}\Gamma_{n-1}^{-1}\mu_{n-1}$$

Eliminando por integración el primer sumando y reagrupando el resto, queda:

$$= (x_n - \Gamma u_{n-1})'(R_1^{-1} - R_1^{-1}\phi(\phi' R_1^{-1}\phi + \Gamma_{n-1}^{-1})^{-1}\phi' R_1^{-1})(x_n - \Gamma u_{n-1}) -$$

$$- 2(x_n - \Gamma u_{n-1})' R_1^{-1}\phi(\phi' R_1^{-1}\phi + \Gamma_{n-1}^{-1})^{-1}\Gamma_{n-1}^{-1}\mu_{n-1} \quad + \text{Resto(no depende } x_n)$$

$$= (x_n - \Gamma u_{n-1})'(R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')^{-1}(x_n - \Gamma u_{n-1}) -$$

$$- 2(x_n - \Gamma u_{n-1})' R_1^{-1}\phi(\Gamma_{n-1}^{-1} + \phi' R_1^{-1}\phi)^{-1}\Gamma_{n-1}^{-1}\mu_{n-1} \quad + \text{Resto} =$$

$$= (x_n - \Gamma u_{n-1} - (R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')R_1^{-1}\phi(\Gamma_{n-1}^{-1} + \phi' R_1^{-1}\phi)^{-1}\Gamma_{n-1}^{-1}\mu_{n-1})(R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')^{-1} .$$

$$.(\text{idem }) + \text{Resto}$$

Aplicando de nuevo el lema IV.4.1 se obtiene:

$$(R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')R_1^{-1}\phi(\Gamma_{n-1}^{-1} + \phi' R_1^{-1}\phi)^{-1}\Gamma_{n-1}^{-1} = \phi$$

Y se concluye $\Pr(x_n/t_{n-1}u_{n-1}) = N(\phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1}, (R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi'))$

<u>DISTRIBUCION $\Pr(y_n/t_{n-1}u_{n-1})$</u>

$$\Pr(y_n/t_{n-1}u_{n-1}) = \int_X \Pr(y_n/x_n u_{n-1})\Pr(dx_n/t_{n-1}u_{n-1})$$

De forma similar a la distribución anterior, se desarrollan las matrices y se aplica el lema IV.4.1 para llegar a:

$$\Pr(y_n/t_{n-1}u_{n-1}) = N(\theta(\phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1}), (R_2 + \theta(R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')\theta'))$$

DISTRIBUCION $Pr(\mu_n / \mu_{n-1} u_{n-1})$

Para todo $n=0,1,\ldots,N$ $\mu_n = \phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1} + \Gamma_n \theta' R_2^{-1}(y_n - \theta(\phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1}))$, y conocidos μ_{n-1} y u_{n-1}, la única v.a. es y_n, y dado que $Pr(y_n/t_{n-1} u_{n-1})$ es una distribución normal cuyos parámetros son conocidos (ver apartado anterior), se concluye que μ_n sigue una distribución normal cuyos parámetros son:

$$E(\mu_n) = \phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1}$$

$$Var(\mu_n) = \Gamma_n \theta' R_2^{-1}(R_2 + \theta(R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')\theta')R_2^{-1}\theta\Gamma_n$$

Sustituyendo $(R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')^{-1} = \Gamma_n^{-1} - \theta' R_2^{-1}\theta$ se tiene:

$$Pr(\mu_n/\mu_{n-1}\ u_{n-1}) = \mathcal{N}(\phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1}, \Gamma_n \theta' R_2^{-1}(R_2 + \theta(\Gamma_n^{-1} - \theta' R_2^{-1}\theta)^{-1} \cdot \theta')R_2^{-1}\theta\Gamma_n)$$

A continuación se simplifica la expresión de la varianza.

PROPOSICION IV.4.4

$$\Gamma_n \theta' R_2^{-1}(R_2 + (R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')\theta')R_2^{-1}\theta\Gamma_n = (\Gamma_n^{-1} - \theta' R_2^{-1}\theta)^{-1} - \Gamma_n$$

Demostración

$$\Gamma_n \theta' R_2^{-1}(R_2 + (R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')\theta')R_2^{-1}\theta\,\Gamma_n = \Gamma_n \theta' R_2^{-1} R_2 R_2^{-1}\theta\Gamma_n + \Gamma_n \theta' R_2^{-1}\theta(R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')\theta' R_2^{-1}\theta\,\Gamma_n$$

Sustituyendo $\theta' R_2^{-1}\theta = \Gamma_n^{-1} - (R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi')^{-1}$

y llamando $A = (R_1 + \phi\Gamma_{n-1}\phi') = (\Gamma_n^{-1} - \theta' R_2^{-1}\theta)$

se obtiene $\theta' R_2^{-1}\theta = \Gamma_n^{-1} - A^{-1}$.

Con todo esto, la expresión anterior queda:

$$= \Gamma_n(\Gamma_n^{-1}-\Lambda^{-1})\Gamma_n + \Gamma_n(\Gamma_n^{-1}-\Lambda^{-1})\Lambda(\Gamma_n^{-1}-\Lambda^{-1})\Gamma_n =$$

$$= \Gamma_n\Gamma_n^{-1}\Gamma_n - \Gamma_n\Lambda^{-1}\Gamma_n + (I-\Gamma_n\Lambda^{-1})(\Lambda\Gamma_n^{-1}\Gamma_n-\Lambda\Lambda^{-1}\Gamma_n) =$$

$$= \Gamma_n - \Gamma_n\Lambda^{-1}\Gamma_n + \Lambda - \Gamma_n - \Gamma_n + \Gamma_n\Lambda^{-1}\Gamma_n = \Lambda - \Gamma_n =$$

$$= (R_1+\phi\Gamma_{n-1}\phi') - \Gamma_n = (\Gamma_n^{-1}-\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1} - \Gamma_n$$

Así queda demostrada la proposición.

COROLARIO IV.4.3

$$Pr(\mu_n/\mu_{n-1}u_{n-1}) = \mathcal{N}(\phi\mu_{n-1}+\Gamma u_{n-1},(\Gamma_n^{-1}-\theta' R_2^{-1}\theta)^{-1} - \Gamma_n)$$

COSTE DE CONTROL EN EL PROBLEMA DE CONTROL ASOCIADO

Hay que transformar el coste de control en el problema original de manera que dependa del proceso minimal suficiente t y del control u y que en media coincidan ambos para que minimizar la esperanza de uno sea equivalente a minimizar la del otro.

A partir de $\phi(x^N u^N) = \sum_{j=0}^{N}\phi_j(x_j u_j) = \sum_{j=0}^{N-1}(x_j' Q_1 x_j + u_j' Q_2 u_j) + x_N' Q_0 x_N$

Se define $\phi^*(t^N u^N) = \sum_{j=0}^{N}\phi_j^*(t_j u_j)$, donde cada $\phi_j^*(..)$ se define a su vez como $\phi_j^*(t_j u_j) = \int_X \phi_j(x_j u_j)Pr(dx_j/t_j u_j)$, y recordando que $Pr(x_j/t_j u_j) = Pr(x_j/t_j) = \mathcal{N}(\mu_j,\Gamma_j)$ para $j=0,..,N$ se concluye que para todo $j=0,1,..,N-1$:

$$\phi_j^*(t_j u_j) = \int_X (x_j' Q_1 x_j + u_j' Q_2 u_j)Pr(dx_j/t_j u_j) =$$

$$= \int_X x_j' Q_1 x_j \Pr(dx_j/\mu_j \Gamma_j) + u_j' Q_2 u_j$$

Y recordando la fórmula de la esperanza de una forma cuadrática, se obtiene:

$$\phi_j^*(t_j u_j) = \mu_j' Q_1 \mu_j + u_j' Q_2 u_j + tr(Q_1 \Gamma_j) \qquad j=0,1,\ldots,N-1$$

$$\phi_N^*(t_N u_N) = \mu_N' Q_0 \mu_N + tr(Q_0 \Gamma_N)$$

Observación

A la hora de buscar el control óptimo, y teniendo en cuenta que Γ_n, $n=0,\ldots,N$ no depende de los controles tomados en cada etapa, se puede considerar como coste de control la función:

$$\underline{\phi}^*(t^N u^N) = \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \mu_j' Q_1 \mu_j + u_j' Q_2 u_j \right\} + \mu_N' Q_0 \mu_N$$

Más adelante se incorporarán los términos que dependen de Γ_n.

RESOLUCION DEL PROBLEMA DE CONTROL ASOCIADO

Se tiene ahora planteado totalmente un problema de control en información completa en que el estado del sistema (proceso básico) es el proceso minimal suficiente t. En realidad, sólo se considera de t la componente μ, debido a las consideraciones realizadas respecto a Γ.

La determinación del control óptimo se hará por medio del principio de optimalidad de Bellman.

Al ser un proceso controlado de Markov, se define para cada una de las etapas $\Psi_j(\mu_j,u_j)$, $j=0,1,\ldots,N-1$ como el coste esperado mínimo que se añade al proceso a partir de la etapa j cuando se ha tomado el control u_j y el último valor del proceso básico es μ_j.

El coste total esperado mínimo sería $E(\Psi_0(\mu_0,\varphi_0^*(\mu_0)))$ y $\varphi_j^*(\mu_j)$, $j=0,\ldots,N-1$ determinaría el control óptimo.

A continuación se calcula para cada etapa la forma de estas funciones $\varphi_j^*(\mu_j)$, $j=0,\ldots,N-1$

Etapa N

No hay que determinar ningún control, puesto que u_N no influye en el coste de control.

Supuestos (μ_{N-1},u_{N-1}) como últimos estado y control respectivamente, se calcula el coste mínimo esperado que incorpora esta última etapa:

$$\Psi_{N-1}(\mu_{N-1},u_{N-1}) = E(\mu_N' Q_0 \mu_N / \mu_{N-1} u_{N-1})$$

Denotando por H_n la varianza de $(\mu_n/\mu_{n-1}u_{n-1})$ para $n=0,\ldots,N$ se tendría $Pr(\mu_n/\mu_{n-1}u_{n-1}) = \mathcal{N}(\phi\mu_{n-1}+\Gamma u_{n-1},H_n)$ para $n=0,\ldots,N$

De esta forma, por la fórmula de la esperanza de una forma cuadrática se obtiene:

$$\Psi_{N-1}(\mu_{N-1},u_{N-1}) = (\phi\mu_{N-1}+\Gamma u_{N-1})'Q_0(\phi\mu_{N-1}+\Gamma u_{N-1}) + tr(Q_0H_N)$$

<u>Etapa j (j=N-1,N-2,..,1,0)</u>

$$\Psi_j(\mu_j,u_j) = E\left\{ \operatorname*{Inf}_{u_{j+1}} (\mu'_{j+1}Q_1\mu_{j+1}+u'_{j+1}Q_2u_{j+1}+\Psi_{j+1}(\mu_{j+1},u_{j+1}))/_{\mu_j u_j} \right\}$$

Se demostrará por inducción que para cualquier j=0,..,N-2

$$\Psi_j(\mu_j,u_j) = (\phi\mu_j+\Gamma u_j)'T_{j+1}(\phi\mu_j+\Gamma u_j) + \sum_{j+1}^{N} tr(T_k H_k)$$

donde $T_N = Q_0$

$$T_j = (Q_1+\phi'(T_{j+1}^{-1}+\Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi) \qquad j=0,1,..,N-1$$

La hipótesis de inducción es cierta para j=N-1

Si se supone para j+1:

$$\operatorname*{Inf}_{u_{j+1}} (\mu'_{j+1}Q_1\mu_{j+1}+ u'_{j+1}Q_2u_{j+1}+\Psi_{j+1}(\mu_{j+1},u_{j+1})) =$$

$$= \operatorname*{Inf}_{u_{j+1}} (u'_{j+1}Q_2u_{j+1}+(\phi\mu_{j+1}+\Gamma u_{j+1})'T_{j+2}(\phi\mu_{j+1}+\Gamma u_{j+1})) +$$
$$+\mu'_{j+1}Q_1\mu_{j+1} + \sum_{j+2}^{N} tr(T_k H_k) =$$

$$= \operatorname*{Inf}_{u_{j+1}} (u'_{j+1}Q_2u_{j+1}+u'_{j+1}\Gamma'T_{j+2}\Gamma u_{j+1} + 2u'_{j+1}\Gamma'T_{j+2}\phi_{j+1}) +$$
$$+\mu'_{j+1}Q_1\mu_{j+1} +\mu'_{j+1}\phi'T_{j+2}\phi\mu_{j+1} + \sum_{j+2}^{N} tr(T_k H_k) =$$

$$= \operatorname*{Inf}_{u_{j+1}} (u'_{j+1}(Q_2+\Gamma'T_{j+2}\Gamma)u_{j+1} + 2u'_{j+1}\Gamma'T_{j+2}\phi\mu_{j+1}) +$$
$$+\mu'_{j+1}(Q_1+\phi'T_{j+2}\phi)\mu_{j+1} + \sum_{j+2}^{N} tr(T_k H_k) =$$

$$= \operatorname*{Inf}_{u_{j+1}} ((u_{j+1}+(Q_2+\Gamma'T_{j+2}\Gamma)^{-1}\Gamma'T_{j+2}\phi\mu_{j+1})'(Q_2+\Gamma'T_{j+2}\Gamma)(\text{ idem })) -$$
$$-\mu'_{j+1}(\phi'T_{j+2}\Gamma(Q_2+\Gamma'T_{j+1}\Gamma)^{-1}\Gamma'T_{j+2}\phi)\mu_{j+1} +$$
$$+ \mu'_{j+1}(Q_1+\phi'T_{j+1}\phi)\mu_{j+1} + \sum_{j+2}^{N} tr(T_k H_k)$$

Al ser $Q_2>0$, si $T_{j+2}\geqslant 0$ se deduce que $(Q_2+\Gamma'T_{j+2}\Gamma)>0$

y el ínfimo se alcanzaría para $u_{j+1}+(Q_2+\Gamma' T_{j+2}\Gamma)^{-1}\Gamma' T_{j+2}\phi\mu_{j+1}=0$

Y $T_j \geq 0$ para todo $j=0,..,N$, ya que la evolución de T_j en función de T_{j+1} es $T_j=(Q_1+\phi'(T_{j+1}^{-1}+\Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi)$ y al ser por hipótesis Q_0,Q_1 y Q_2 semidefinidas positivas, y Q_2 definida positiva se concluye que $T_j \geq 0$ y, además, sólo existe un valor de u_{j+1} que alcanza el ínfimo, y es $u_{j+1}=-(Q_2+\Gamma' T_{j+2}\Gamma)^{-1}\Gamma' T_{j+2}\phi\mu_{j+1}$

Así se ha anulado el primer sumando, y agrupando los otros sumandos y aplicando el lema IV.2.3 se obtiene:

$$\operatorname*{Inf}_{u_{j+1}} (\mu'_{j+1}Q_1\mu_{j+1} + u'_{j+1}Q_2u_{j+1} + \Psi_{j+1}(\mu_{j+1},u_{j+1})) =$$
$$= \mu'_{j+1}(Q_1+\phi'(T_{j+2}^{-1}+\Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi)\mu_{j+1} + \sum_{j+2}^{N} tr(T_kH_k)$$

Por consiguiente,

$$\Psi_j(\mu_j,u_j) = E\,(\mu'_{j+1}(Q_1+\phi'(T_{j+2}^{-1}+\Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi)\mu_{j+1} + \sum_{j+2}^{N} tr(T_kH_k)/\mu_ju_j)$$

y al ser $Pr(\mu_{j+1}/\mu_ju_j) = \mathcal{N}(\phi\mu_j+\Gamma u_j,H_{j+1})$ se obtiene:

$$\Psi_j(\mu_j,u_j) = (\phi\mu_j+\Gamma u_j)'(Q_1+\phi'(T_{j+2}^{-1}+\Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi)(\phi\mu_j+\Gamma u_j) +$$
$$+ tr((Q_1+\phi'(T_{j+1}^{-1}+\Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi)H_{j+1}) + \sum_{j+2}^{N} tr(T_kH_k)$$

Y será $\Psi_j(\mu_j,u_j) = (\phi\mu_j+\Gamma u_j)'T_{j+1}(\phi\mu_j+\Gamma u_j) + \sum_{j+1}^{N} tr(T_kH_k)$

si $T_j = Q_1 + \phi'(T_{j+1}^{-1} + \Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi$

Así, se concluye el siguiente

COROLARIO IV.4.4

Se ha obtenido, no sólo el control óptimo en cada etapa, sino el coste mínimo que se añade a cada etapa cuando se toma un control y se ha obtenido un valor del proceso básico:

$$T_N = Q_0$$

$$T_j = (Q_1 + \phi'(T_{j+1}^{-1} + \Gamma Q_2^{-1}\Gamma')^{-1}\phi) \qquad j=0,1,..,N-1$$

$$L_j = (Q_2 + \Gamma' T_{j+1}\Gamma)^{-1}\Gamma' T_{j+1}\phi \qquad j=0,1,..,N-1$$

$$u_j^* = \varphi_j^*(\mu_j) = -L_j\mu_j \qquad j=0,1,..,N-1$$

$$\Psi_j(\mu_j, u_j) = (\phi\mu_j+\Gamma u_j)' T_{j+1}(\phi\mu_j+\Gamma u_j) + \sum_{j+1}^{N} tr(T_k H_k) \qquad j=0,1,..,N-1$$

COSTE OPTIMO ESPERADO

$$\Psi_0(\mu_0, u_0) = (\phi\mu_0+\Gamma u_0)' T_1(\phi\mu_0+\Gamma u_0) + \sum_{1}^{N} tr(T_k H_k)$$

El coste mínimo esperado es $\Psi^* = E\,(\operatorname{Inf}_{u_0} \Psi_0(\mu_0, u_0))$, que, por un desarrollo análogo al anterior, es igual a:

$$\Psi^* = m' T_0 m + tr(T_0 H_0) + \sum_{1}^{N} tr(T_k H_k) = m' T_0 m + \sum_{k=0}^{N} tr(T_k H_k)$$

COROLARIO IV.4.5

El coste mínimo esperado del problema de control asociado en información completa es, después de añadir los términos constantes que no alteraban los cálculos,

$$\underline{C_A} = m' T_0 m + \sum_{k=0}^{N} tr(T_k H_k) + tr(Q_0 \Gamma_N) + \sum_{k=0}^{N-1} tr(Q_1 \Gamma_k)$$

5. COMPARACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS POR AMBOS ENFOQUES

Observando las ecuaciones de recurrencia que determinan los controles óptimos en cada etapa, se concluye:

Las ecuaciones de recurrencia para P_n y Γ_n son las mismas, al igual que las de S_n y T_n.

Al ser los controles óptimos en cada etapa función de L_n, que es la misma para los dos enfoques, y de $\hat{x}_n$ y μ_n según $u_n = -L_n\hat{x}_n$ y $u_n = -L_n\mu_n$ para n=0,1,..,N-1 se deduce que coincidirán si y sólo si $\hat{x}_n$ y μ_n son iguales, y esto es cierto al ser iguales las ecuaciones de recurrencia de ambas, según se concreta en la siguiente

PROPOSICION IV.5.1

Las ecuaciones de recurrencia para $\hat{x}_n$ en el enfoque clásico y μ_n en el problema de control asociado, coinciden para el problema propuesto en la sección 2 de este capítulo.

Demostración

La expresión de los valores iniciales es:

$$\hat{x}_0 = m + R_0\theta'(\theta R_0\theta' + R_2)^{-1}(y_0 - \theta m)$$

$$\mu_0 = m + \Gamma_0\theta' R_2^{-1}(y_0 - \theta m)$$

Y las relaciones recurrentes de $\hat{x}_n$ y μ_n:

$$\hat{x}_n = \phi\hat{x}_{n-1} + \Gamma u_{n-1} + P_n\theta' R_2^{-1}(y_n - \theta(\phi\hat{x}_{n-1} + \Gamma u_{n-1})) \quad n=1,..,N$$

$$\mu_n = \phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1} + \Gamma_n\theta' R_2^{-1}(y_n - \theta(\phi\mu_{n-1} + \Gamma u_{n-1})) \quad n=1,..,N$$

Por esta razón, y teniendo en cuenta que $P_n = \Gamma_n$ para todo n, para demostrar la proposición es necesario sólo ver que $\hat{x}_0 = \mu_0$, y para esto, basta demostrar que $R_0\vartheta'(\vartheta R_0\vartheta' + R_2)^{-1} = \Gamma_0\vartheta' R_2^{-1}$

En efecto, $\Gamma_0 = (R_0^{-1} + \vartheta' R_2^{-1}\vartheta)^{-1} = (R_0 - R_0\vartheta'(R_2 + \vartheta R_0\vartheta')^{-1}\vartheta R_0)$

Y de ahí se deduce que:

$$\Gamma_0\vartheta' R_2^{-1} = R_0\vartheta' R_2^{-1} - R_0\vartheta'(R_2+\vartheta R_0\vartheta')^{-1}\vartheta R_0\vartheta' R_2^{-1} =$$

$$= R_0\vartheta'(R_2^{-1} - (R_2+\vartheta R_0\vartheta')^{-1}\vartheta R_0\vartheta' R_2^{-1})$$

Llamando $A = (R_2 + \vartheta R_0\vartheta')$, queda $\vartheta R_0\vartheta' = A - R_2$ y, así:

$$\Gamma_0\vartheta' R_2^{-1} = R_0\vartheta'(R_2^{-1} - A^{-1}(A-R_2)R_2^{-1}) = R_0\vartheta'(R_2^{-1} - (A^{-1}A - A^{-1}R_2)R_2^{-1}) =$$

$$= R_0\vartheta'(R_2^{-1} - R_2^{-1} + A^{-1}) = R_0\vartheta'(R_2+\vartheta R_0\vartheta')^{-1}$$

Y ya está demostrada la proposición.

Observación

Se ha demostrado que los controles obtenidos por ambos métodos coinciden. A continuación se demuestra que los costes mínimos esperados, a pesar de tener expresiones totalmente diferentes, también coinciden.

PROPOSICION IV.5.2

Los costes mínimos esperados coinciden en ambos enfoques del problema planteado en la sección 2 del presente capítulo.

Demostración

Según el enfoque del Filtro de Kalman, y una vez homogeneizada la notación, el coste mínimo esperado es:

$$C_{FK} = m' T_0 m + tr(T_0 R_0) + \sum_1^N tr(T_k R_1) + \sum_0^{N-1} tr(P_k L_k'(\Gamma' T_{k+1}\Gamma + Q_2)L$$

Y para el problema de control asociado,

$$C_A = m'T_0m + \sum_0^N tr(T_kH_k) + \sum_0^{N-1} tr(Q_1P_k) + tr(Q_0P_N)$$

Hay que demostrar que C_{FK} y C_A son iguales.

En primer lugar, por definición de L_k, se tiene para todo

$k=0,\ldots,N-1$ $\quad P_kL_k'(\Gamma'T_{k+1}\Gamma+Q_2)L_k = P_k\phi'T_{k+1}\Gamma(Q_2+\Gamma'T_{k+1}\Gamma)^{-1}\Gamma'T_{k+1}\phi$

Al ser $\quad H_0 = R_0 - P_0$

$$H_k = (P_k^{-1} - \theta'R_2^{-1}\theta)^{-1} - P_k \qquad k=1,\ldots,N$$

Se tiene que: $\quad tr(T_0H_0) = tr(T_0R_0 - T_0P_0) = tr(T_0R_0)-tr(T_0P_0)$

y sustituyendo, según la evolución de P_k para $k=1,\ldots,N$

$(P_k^{-1} - \theta'R_2^{-1}\theta)^{-1} = (R_1 + \phi P_{k-1}\phi')$ se tiene:

$$tr(T_kH_k) = tr(T_kR_1) + tr(T_k\phi P_{k-1}\phi') - tr(T_kP_k) \quad \text{para } k=1,\ldots,N$$

Con estas sustituciones, se calcula $\sum_0^N tr(T_kH_k)$:

$$\sum_0^N tr(T_kH_k) = tr(T_0R_0) - tr(T_0P_0) + \sum_1^N tr(T_kR_1) + \sum_1^N tr(T_k\phi P_{k-1}\phi') - \sum_1^N tr(T_kP_k)$$

Por la evolución de T_k en función de T_{k+1} y al ser $T_N=Q_0$:

$$\sum_1^N tr(T_kP_k) = \sum_1^{N-1} tr(Q_1P_k) + \sum_1^{N-1} tr(\phi'T_{k+1}\phi P_k) - \sum_1^{N-1} tr(\phi'T_{k+1}\Gamma(Q_2+\Gamma'T_{k+1}\Gamma)^{-1}\Gamma'T_{k+1}\phi P_k) + tr(Q_0P_N)$$

De donde:

$$\sum_0^N tr(T_kH_k) = tr(T_0R_0) - tr(T_0P_0) + \sum_1^N tr(T_kR_1) + \sum_1^N tr(T_k\phi P_{k-1}\phi')$$

$$- \sum_{1}^{N-1} tr(Q_1 P_k) - \sum_{1}^{N-1} tr(\phi' T_{k+1} \phi P_k) + \sum_{1}^{N-1} tr(\phi' T_{k+1} \Gamma (Q_2 + \Gamma' T_{k+1} \Gamma)^{-1} \Gamma' T_{k+1} \cdot P_k)$$

$$- tr(Q_0 P_N)$$

Recordando la propiedad de la traza:

$$tr(\phi' T_{k+1} \phi P_k) = tr(T_{k+1} \phi P_k \phi') \quad \text{para todo } k=1,..,N-1$$

se concluye que $\sum_{1}^{N} tr(T_k \phi P_{k-1} \phi') - \sum_{1}^{N-1} tr(\phi' T_{k+1} \phi P_k) =$

$$= tr(T_1 \phi P_0 \phi')$$

Así, C_A se puede expresar como:

$$m' T_0 m + tr(T_0 R_0) - tr(T_0 P_0) + \sum_{1}^{N} tr(T_k R_1) + tr(T_1 \phi P_0 \phi') +$$
$$+ \sum_{1}^{N-1} tr(\phi' T_{k+1} \Gamma (Q_2 + \Gamma' T_{k+1} \Gamma)^{-1} \Gamma' T_{k+1} \phi P_k) + tr(Q_1 P_0)$$

Y para que esta expresión sea igual a la de C_{FK} es preciso demostrar que:

$$\sum_{1}^{N-1} tr(P_k \phi' T_{k+1} \Gamma (Q_2 + \Gamma' T_{k+1} \Gamma)^{-1} \Gamma' T_{k+1} \phi) = -tr(T_0 P_0) + tr(T_1 \phi P_0 \phi') +$$
$$+ \sum_{1}^{N-1} tr(\phi' T_{k+1} \Gamma (Q_2 + \Gamma' T_{k+1} \Gamma)^{-1} \Gamma' T_{k+1} \phi P_k) + tr(Q_1 P_0)$$

Y teniendo en cuenta de nuevo que $tr(T_1 \phi P_0 \phi') = tr(\phi' T_1 \phi P_0)$ y para todo $k=1,..,N-1$ se verifica:

$$tr(P_k \phi' T_{k+1} \Gamma (Q_2 + \Gamma' T_{k+1} \Gamma)^{-1} \Gamma' T_{k+1} \phi) = tr(\phi' T_{k+1} \Gamma (Q_2 + \Gamma' T_{k+1} \Gamma)^{-1} \Gamma' T_{k+1} \phi P_k$$

sólo es preciso ver que:

$$tr(\phi' T_1 \Gamma (Q_2 + \Gamma' T_1 \Gamma)^{-1} \Gamma' T_1 \phi P_0) = tr(Q_1 P_0) + tr(\phi' T_1 \phi P_0) - tr(T_0 P_0)$$

que es equivalente a demostrar que:

$$tr(T_0P_0) = tr(Q_1P_0) + tr(\phi'T_1\phi P_0) - tr(\phi'T_1\Gamma(Q_2+\Gamma'T_1\Gamma)^{-1}\Gamma'T_1\phi P_0)$$

que, por la propiedad de las trazas, es igual a

$$- tr((Q_1+\phi'T_1\phi-\phi'T_1\Gamma(Q_2+\Gamma'T_1\Gamma)^{-1}\Gamma'T_1\phi)P_0)$$

y, por la ecuación de recurrencia de T_0, se verifica, ya que según esa ecuación, $T_0 = Q_1+\phi'T_1\phi-\phi'T_1\Gamma(Q_2+\Gamma'T_1\Gamma)^{-1}\Gamma'T_1\phi)$

Así se ha demostrado la proposición.

106

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- AOKI M. (1967)
  "Optimization of Stochastic Systems"
  Academic Press

- ASH R.B. (1972)
  "Real Analysis and Probability"
  Academic Press

- ASTROM (1970)
  "Introduction to Stochastic Control Theory"
  Academic Press

- BAHADUR R.R. (1954)
  "Sufficiency and Statistical Decision functions"
  Ann.Math.Statist. 25 pp.423-462

- BELLMAN R.(1962)
  "Dynamic Programming"
  Princeton University Press

- BUCHANAN J.T. (1982)
  "Discrete and Dynamic Decision Analysis"
  John Wiley

- CHRISTOPEL T.N. (1980)
  "Optimal Stochastic Control with special information patterns"
  SIAM J.Control and Optimization, 18 pp.559-575

- DAVIS M.H.A. (1977)
  "Linear Estimation and Stochastic Control"
  Chapman and Hall

- DOOB J.L. (1953)
  "Stochastic Processes"
  John Wiley

- DORATO P.; LEVIS A.H. (1971)
"Optimal linear regulator.The discrete-time case"
IEEE Trans.Automatica Control v.AC-16 pp.613-620

- FERGUSON T. (1967)
"Mathematical Statistics.A Decision Theoretic Approach"
Academic Press

- FLEMING W.H. (1969)
"Optimal continuous-parameter stochastic control"
SIAM Review, 11 pp.470-509

- GIHMAN I.I.; SKOROHOD A.V. (1974)
"The Theory of Stochastic Processes. Part I"
Springer-Verlag

- GIHMAN I.I.; SKOROHOD A.V. (1979)
"Controlled Stochastic Processes"
Springer-Verlag

- HOUSEHOLDER A.S. (1953)
"Principles of Numerical Analysis"
McGraw-Hill

- HOWARD (1971)
"Dynamic Probabilistic Systems. Vol.2"
John Wiley

- IBÁRROLA P.; VELEZ R. (1980)
"Relación entre los principios de suficiencia e invarianza
Estadística Española, 88 pp.95-113

- KALLIANPUR G. (1980)
"Stochastic Filtering Theory"
Springer-Verlag

- KUSHNER H.J. (1965)
"On the Stochastic maximun principle fixed time of control"
J.of Math.Anal.and Appl., 11 pp.78-92

- LEONDES C.T.; NOVAK L.M. (1972)
"Optimal minimal-order observers for discrete-time Systems. A unified theory"
Automatica Vol.8 pp.379-387

- LUENBERGER D.G. (1966)
"Observer for multivariable systems"
IEEE Trans.Automatic Control vol. AC-11 pp.190-197

- MACK J.; STRAUSS A. (1982)
"Introduction to Optimal Control Theory"
Springer-Verlag

- MAYBECK (1982)
"Stochastic Models,Estimation and Control. Vol.3"
Academic Press

- MORF M.; SIDHU G.S.; KAILATH T. (1974)
"Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear discrete-time systems"
IEEE Trans.Automatica Control vol.AC-19 pp.315-323

- MURATA Y. (1982)
"Optimal Control Methods for Linear discrete-time economics systems"
Springer-Verlag

- PAPPAS T.; LAUB A.J.; SANDELL N.R. (1980)
"On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equation"
IEEE Trans.Automatica Control vol.AC-25 pp.631-641

- ROOT J.C. (1969)
"Optimun control of non-Gaussian linear stochastic systems with inaccesible state variable"
SIAM Control vol.7 pp.317-323

- SKOROHOD A.W. (1972)
"On one general scheme of Controlled Stoch.Processes"
Kiev. Naukova Dumka

- SWORDER D.D; AOKI M. (1965)
"On control systems equivalents of some decision theoretic theorems"
Journal of Math.Anal. and Appl. 10, pp.424-438

- UPADHYAY T. (1976)
"Application of adaptative control to economic stabilization policy"
International J.Systems Science, 7 pp.641-650

- WHITTLE P. (1982)
"Optimization over time. Dynamic Programming and St.C."
John Wiley

- YAVIN Y.;JORDAAN A.M. (1981)
"Optimal controls that maximize the probability of hitting a set of targets. A numerical study"
J.of Optimization Theory and Appl.,34 pp.517-540

- ZACKS S. (1971)
"The Theory of Statistical Inference"
John Wiley