UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**Departamento de Análisis Matemático**

# FUNCIONES DE TIPO NO ACOTADO Y TOPOLOGÍAS EN ESPACIOS DE APLICACIONES ANALÍTICAS

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**
**PRESENTADA POR**

**Jerónimo López-Salazar Codes**

Bajo la dirección de los doctores

José María Martínez Ansemil
Socorro Ponte Miramontes

**Madrid, 2013**

**Universidad Complutense de Madrid**
**Facultad de Ciencias Matemáticas**
**Departamento de Análisis Matemático**

# Funciones de tipo no acotado y topologías en espacios de aplicaciones analíticas

Memoria para optar al grado de doctor presentada por

**Jerónimo López - Salazar Codes**

Dirigida por los doctores

**José María Martínez Ansemil y Socorro Ponte Miramontes**

Madrid, 2012

# Índice general

# Abstract


Let $E$ denote a real or complex locally convex space and let $U$ be an open subset of $E$. Let $\mathcal{A}(U)$ denote the space of all analytic functions on $U$; when $E$ is a complex space, we usually write $\mathcal{H}(U)$ instead of $\mathcal{A}(U)$. This thesis is mainly devoted to the study of some topological properties of the space $\mathcal{A}(U)$ and the *lineability* of several subsets of $\mathcal{A}(U)$. The first chapter of the thesis presents a short review of the basic properties of analytic mappings defined on infinite dimensional spaces and the topologies $\tau_0$, $\tau_\omega$ and $\tau_\delta$ on $\mathcal{A}(U)$.

In Chapter 2 we study the metrizability of the space $\mathcal{A}(U)$. We prove that if $E$ is a metrizable locally convex space and $\tau$ is a locally convex topology on $\mathcal{A}(U)$ such that $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\delta$, then $(\mathcal{A}(U), \tau)$ is metrizable if and only if $E$ is a finite dimensional space. This result generalizes some theorems proved by Alexander [1] and Ansemil and Ponte [4].

Suppose that $E$ is a real or complex Banach space. Let

$$\mathcal{A}_b(E) = \left\{ f \in \mathcal{A}(E) : \sup_{x \in B} |f(x)| < \infty \text{ for every bounded subset } B \subset E \right\}.$$

Chapter 3 is devoted to the lineability of the set $\mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E)$. In particular, it is proved that there exist an infinitely generated algebra $A \subset \mathcal{A}(E)$, an infinite dimensional closed subspace $\mathcal{F} \subset (\mathcal{A}(E), \tau_0)$ and a dense subspace $X \subset (\mathcal{A}(E), \tau_0)$ such that

$$A \backslash \{0\} \subset \mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E), \qquad \mathcal{F} \backslash \{0\} \subset \mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E)$$

and

$$X \backslash \{0\} \subset \mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E).$$

Chapters 4 and 5 are focused on the study of the $\tau_\delta$ topology. We are interested in the representation of $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ as the inductive limit of all the subspaces $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U)$, where $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ denotes an increasing countable open cover of $U$ and

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U) = \left\{ f \in \mathcal{A}(U) : \sup_{x \in V_n} |f(x)| < \infty \text{ for all } n \right\}.$$

We prove that if $E$ is any real or complex infinite dimensional normed space and $U$ is an open subset of $E$, then $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ is not a countable inductive limit of those subspaces $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U)$. This result generalizes an analogous theorem proved by Ansemil, Aron and Ponte [5] when $E$ is a complex Banach space with a Schauder basis.

It is well known that a holomorphic function on $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ depends only on a finite number of variables, so we can write $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{n}\right)$. Using this property, Ansemil [2] obtained the following representation for the space of holomorphic functions on $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:

$$\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right), \tau_{\delta}\right) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{n}\right), \tau_{0}\right).$$

In the real case we also have that $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$. However,

$$\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_{\delta}\right) \neq \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{n}\right), \tau_{0}\right).$$

Because of this negative fact, we introduce a new topology on $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, denoted by $\tau_{\ell}$, which is defined by the inductive limit of the sequence of subspaces $\{(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{n}\right), \tau_{0}) : n \in \mathbb{N}\}$. The main properties of $\tau_{\ell}$ are studied in Chapter 5.

The proof of the main theorem in Chapter 4 uses a result about analytic functions which are not bounded on bounded subsets. More precisely, Ansemil, Aron and Ponte proved in [6] that if $B_1$ and $B_2$ are disjoint balls in a complex Banach space $E$, then there exists $f \in \mathcal{H}(E)$ such that $\sup_{x\in B_1} |f(x)| < \infty$ and $\sup_{x\in B_2} |f(x)| = \infty$. After applying this fact to the representation of $\tau_{\delta}$, we focus our research on generalizing this result. Given two disjoint subsets $I$ and $J$ of $\mathbb{N}$ and a collection $\{B_n : n \in I \cup J\}$ of disjoint open balls in a Banach space $E$, does there exist any $f \in \mathcal{A}(E)$ such that $\sup_{x\in B_i} |f(x)| < \infty$ for all $i \in I$ and $\sup_{x\in B_j} |f(x)| = \infty$ for all $j \in J$? This problem is solved in several cases with restrictions on the number and the radius of the balls. The results appear in Chapter 6.

Finally, Chapter 7 is again devoted to the *lineability* of sets of mappings. Rudin [60] proved that if $U$ is a connected open subset of a separable complex Banach space $E$, then there is a holomorphic mapping $f : \mathbb{D} \to U$ such that $f(\mathbb{D})$ is dense in $U$. We prove that if $U = E$, then the set of holomorphic mappings with dense range is lineable. We also prove that if $U = E$ or if $U$ is the open unit ball of $E$, then the set of holomorphic mappings from $\mathbb{D}$ into $U$ with dense range is $G_{\delta}$ and dense.

# Introducción

El espacio $\mathcal{H}(U)$ de las funciones holomorfas en un abierto $U$ del plano complejo ha sido siempre uno de los ejemplos clásicos en la teoría de espacios localmente convexos. Cuando está dotado de la topología compacto – abierta, $\mathcal{H}(U)$ es un espacio metrizable, completo, tonelado, bornológico, Montel, etc. En cambio, las propiedades de $\mathcal{H}(U)$ cambian radicalmente cuando $U$ es un abierto de un espacio localmente convexo $E$ de dimensión infinita. El estudio de las topologías en $\mathcal{H}(U)$ cuando $\dim(E) = \infty$ se desarrolló en la década de 1960 a partir de dos trabajos fundamentales: la tesis doctoral de Alexander, *Analytic functions on Banach spaces* [1], de 1968, y la monografía de Nachbin, *Topology on spaces of holomorphic mappings* [57], publicada en 1969. A diferencia de lo que sucede en el caso de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, si $U$ es un abierto de un espacio de dimensión infinita, la topología compacto – abierta, $\tau_0$, no es suficientemente fina. Por este motivo, tanto Alexander como Nachbin introdujeron otras topologías en $\mathcal{H}(U)$. Las dos que han resultado ser claramente más importantes, representadas por $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$, son topologías localmente convexas más finas que $\tau_0$ y, en general, tienen mejores propiedades desde el punto de vista del Análisis Funcional. A partir de la década de 1970, numerosos investigadores, especialmente aquéllos formados junto a Nachbin, como Aron, Barroso, Dineen o Mujica, han dedicado al estudio de $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$ multitud de trabajos que culminan en 1999 con la publicación de la gran obra de Dineen *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces* [31].

Nuestro propósito en una parte de esta memoria es continuar el estudio de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ cuando $U$ es un abierto de un espacio de dimensión infinita. La mayor parte de la investigación que ha dado lugar a esta tesis ha estado motivada por dos problemas concretos que detallaremos a continuación. En sus notas *Gérmenes holomorfos y funciones holomorfas en espacios de Fréchet* [48], Mujica planteaba en 1978 la cuestión de encontrar espacios localmente convexos $E$ y abiertos $U \subset E$ tales que $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ y $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ fuesen metrizables. Este problema había sido resuelto por Alexander [1] en 1968 cuando $E$ es un espacio de Banach con base de Schauder: las topologías habituales en $\mathcal{H}(U)$ son metrizables sólo si $E$ tiene dimensión finita. Más recientemente, Ansemil y Ponte retomaron el problema planteado por Mujica y en 2007 obtuvieron que, a semejanza del resultado de Alexander, si $U$ es un abierto de un espacio $E$ localmente convexo metrizable, entonces $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ es metrizable sólo si $\dim(E) < \infty$ (véase [4]).

El primer problema que se trata en esta memoria será el de demostrar un teorema análogo al de Ansemil y Ponte para la topología $\tau_\delta$. Mostraremos que si $E$ es un espacio localmente convexo metrizable, $U$ es un abierto de $E$ y $\tau$ es una topología localmente convexa en $\mathcal{H}(U)$ tal que $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\delta$, entonces $(\mathcal{H}(U), \tau)$ es metrizable si y sólo si $E$ tiene dimensión finita. La demostración toma ciertas ideas del artículo de Ansemil y Ponte sobre $\tau_\omega$ y utiliza de forma esencial el concepto de subconjunto acotante de un espacio de Banach, es decir, aquél en el que está acotada toda función de $\mathcal{H}(E)$. Estos resultados se recogen en el capítulo 2.

El segundo problema que se aborda en esta tesis ha surgido también a partir de un trabajo anterior de Ansemil, Aron y Ponte y pretende analizar la representación de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ como espacio $LF$. Recordemos que un espacio localmente convexo $X$ es $LF$ si existe una sucesión creciente $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ de subespacios de $X$, cada $X_n$ es un espacio de Fréchet y $X$ es el límite inductivo de la sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$. Quizás el ejemplo más sencillo de $LF$ sea el espacio de funciones en $\mathbb{R}$ que son continuas con soporte compacto. El concepto de espacio $LF$ fue introducido en 1949 por Dieudonné y Schwartz en su artículo "La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$" [27], motivados por las propiedades del espacio de las distribuciones. Los autores comprobaron que el hecho de que un espacio $X$ sea $LF$ permite deducir algunas propiedades topológicas de $X$, como la caracterización de sus subconjuntos acotados o del dual de $X$. Debemos señalar además que los límites inductivos numerables han sido utilizados en Holomorfía; en concreto, Mujica [50] llevó a cabo un estudio sobre gérmenes de funciones holomorfas en el que aplicaba las propiedades básicas de los $LF$.

Las buenas propiedades de los límites inductivos numerables llevaron a Ansemil, Aron y Ponte a plantearse si $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ podría ser un espacio $LF$. Recordemos que $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ está definido como el límite inductivo de los espacios de Fréchet $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}(U)$, donde $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos y

$$\mathcal{H}_{\mathcal{V}}(U) = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) : \sup_{x \in V_n} |f(x)| < \infty \text{ para todo } n \right\}.$$

En 2009, Ansemil, Aron y Ponte [5] demostraron que cuando $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita con base de Schauder, no existe una cantidad numerable $(\mathcal{V}_k)_{k=1}^{\infty}$ de recubrimientos de $E$ tales que

$$\mathcal{H}(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}(E).$$

Por tanto, el límite inductivo

$$(\mathcal{H}(E), \tau_\delta) = \varinjlim_{\mathcal{V}} \mathcal{H}_{\mathcal{V}}(E)$$

no es numerable. Cabía preguntarse si la hipótesis de que $E$ tenga base de Schauder es realmente necesaria. Por ello, nuestro segundo objetivo en esta memoria ha sido el de generalizar el teorema de Ansemil, Aron y Ponte al caso de espacios $E$ sin base. En el capítulo 4 se demuestra, entre otros resultados, que si $U$ es un abierto de un espacio normado $E$, entonces $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ es el límite inductivo de una cantidad numerable de subespacios del tipo $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}(U)$ si y sólo si $E$ tiene dimensión finita.

Las soluciones de los dos problemas que hemos explicado, la metrizabilidad de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ y su representación como $LF$, guardan cierta relación. Como se observará en los capítulos correspondientes, en ambos casos resulta esencial utilizar cierto tipo de funciones conocidas como funciones de tipo no acotado. Recordemos que el conjunto $\mathcal{H}_b(E)$ se define como

$$\mathcal{H}_b(E) = \left\{ f \in \mathcal{H}(E) : \sup_{x\in B} |f(x)| < \infty \text{ para cada acotado } B \subset E \right\}$$

y los elementos de $\mathcal{H}_b(E)$ se denominan funciones holomorfas de tipo acotado. Gracias al teorema de Josefson – Nissenzweig es fácil comprobar que si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces $\mathcal{H}_b(E) \neq \mathcal{H}(E)$. Este hecho implica que los conjuntos acotantes tienen interior vacío, lo cual es aplicado en la demostración del teorema sobre la metrizabilidad de $\tau_\delta$. También en el estudio de la representación de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ vuelve a ser preciso utilizar funciones holomorfas que no pertenecen a $\mathcal{H}_b(E)$. En concreto, el argumento utilizado por Ansemil, Aron y Ponte en [5] se basaba en el hecho de que si $B_1$ y $B_2$ son ciertas bolas en un espacio de Banach con base de Schauder, entonces existe una función $f \in \mathcal{H}(E)$ tal que $\sup_{x\in B_1} |f(x)| < \infty$ y $\sup_{x\in B_2} |f(x)| = \infty$. La función $f$ claramente no pertenece a $\mathcal{H}_b(E)$.

Los motivos que acabamos de referir nos han hecho plantearnos el estudio del conjunto de funciones holomorfas de tipo no acotado, a lo que dedicaremos los capítulos 3 y 6 de la tesis. En el primero de ellos se tratará la *lineabilidad* del conjunto $\mathcal{H}(E) \backslash \mathcal{H}_b(E)$. Recordemos que un subconjunto $\mathcal{F}$ de un espacio vectorial es *lineable* si existe un subespacio $X$ de dimensión infinita con la propiedad de que $X\backslash\{0\} \subset \mathcal{F}$. Este concepto fue introducido por Gurariy [35] con el propósito de mostrar cómo ciertas funciones con propiedades especiales forman conjuntos “grandes”. Nosotros veremos que si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existen un álgebra infinitamente generada $A \subset \mathcal{H}(E)$, un subespacio cerrado $\mathcal{F} \subset (\mathcal{H}(E), \tau_0)$ de dimensión infinita y un subespacio denso $X \subset (\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$ tales que

$$A\backslash\{0\} \subset \mathcal{H}(E) \backslash \mathcal{H}_b(E), \qquad \mathcal{F}\backslash\{0\} \subset \mathcal{H}(E) \backslash \mathcal{H}_b(E)$$

y

$$X\backslash\{0\} \subset \mathcal{H}(E) \backslash \mathcal{H}_b(E).$$

El capítulo 6 está dedicado también al estudio del conjunto $\mathcal{H}(E) \backslash \mathcal{H}_b(E)$ y en él continuaremos la investigación iniciada por Ansemil, Aron y Ponte en [5] y [6] sobre funciones holomorfas que están acotadas en una bola pero no en otra. En este caso el problema considerado es el siguiente: si $I$ y $J$ son subconjuntos de $\mathbb{N}$ y $\{B_n : n \in I \cup J\}$ es una colección de bolas disjuntas en un espacio de Banach $E$, ¿existe una función $f \in \mathcal{H}(E)$ que cumpla que $\sup_{x\in B_i} |f(x)| < \infty$ para todo $i \in I$ y $\sup_{x\in B_j} |f(x)| = \infty$ para todo $j \in J$? Daremos diversas soluciones a esta cuestión dependiendo del número de bolas y sus radios. Este problema entronca con el estudio llevado a cabo por Kiselman y Cœuré para determinar una aplicación $f \in \mathcal{H}(E)$ cuyo radio de acotación en cada punto sea otra función dada (véanse [26], [41], [42], [43] y [64]).

El último capítulo de la memoria se centra de nuevo en la *lineabilidad* de conjuntos de funciones. En 1976, Aron [10], Globevnik [34] y Rudin [60] demostraron de forma independiente que si $E$ es un espacio de Banach separable y $B_E$ es la bola unidad abierta en $E$, entonces existe una aplicación holomorfa $f : \mathbb{D} \to E$ definida en el disco unidad $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ tal que $f(\mathbb{D})$ está contenido y es denso en $B_E$. De esta forma, los tres investigadores resolvían un problema propuesto por Patil durante la Conferencia de Holomorfía en Dimensión Infinita celebrada en 1973 en la Universidad de Kentucky. En el capítulo 7 de la tesis se retoma esta clase de aplicaciones y se demuestra la *lineabilidad* y densidad del conjunto de aplicaciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to E$ tales que $f(\mathbb{D})$ es denso en $E$. Agradezco al profesor Richard M. Aron que me propusiese estudiar esta cuestión, así como la colaboración prestada durante la redacción del artículo [47].

Todos los problemas que tratamos en esta tesis fueron resueltos en primer lugar en el caso de espacios de funciones holomorfas en espacios complejos y así aparecieron publicados en nuestros artículos [45], [46], [47] y [7], este último escrito en colaboración con Ansemil y Ponte. Más adelante observamos que el paso esencial en la mayoría de los teoremas consistía en la construcción de ciertas funciones de tipo no acotado y que éstas pueden ser definidas también en espacios reales. Por ello, gran parte de los teoremas han podido extenderse al caso de espacios de funciones analíticas reales. Los resultados en el caso de espacios reales han sido publicados en [8], también en colaboración con Ansemil y Ponte. También debemos señalar que los teoremas sobre la metrizabilidad de $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ y su representación como $LF$ son válidos igualmente para espacios de aplicaciones con valores en un espacio de Banach.

En el estudio que hemos llevado a cabo han surgido algunas diferencias entre el caso real y el complejo. La primera de ellas la encontramos en los teoremas sobre la densidad de conjuntos de funciones analíticas. El motivo es el siguiente: si $E$ es un espacio complejo y $f \in \mathcal{H}(E)$, la serie de Taylor de $f$ converge a la función respecto a la topología $\tau_\delta$. Este hecho implica que el espacio $\mathcal{P}(E)$ de todos los polinomios en $E$ es denso en $\mathcal{H}(E)$ y esta propiedad resulta esencial para demostrar a su vez que algunos conjuntos de funciones holomorfas son densos para la topología $\tau_\delta$ (véanse, por ejemplo, los teoremas 3.13 y 6.7). En cambio, la serie de Taylor de una función analítica real en general no converge a la función respecto a $\tau_\delta$. Por ello, algunos de los resultados de densidad que obtenemos son más débiles en el caso real.

Una segunda diferencia entre los espacios de funciones holomorfas y el de analíticas reales ha aparecido en el estudio de $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ y el espacio análogo de funciones analíticas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Nachbin demostró que una función holomorfa en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sólo depende de un número finito de variables y, por ello, $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. A partir de esta propiedad, Ansemil [2] obtuvo la siguiente representación del espacio $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right)$:

$$\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n), \tau_0\right).$$

Si $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ y $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ representan los espacios de funciones analíticas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{R}^n$

respectivamente, veremos que también $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ y, sin embargo,

$$\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_{\delta}\right) \neq \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{n}\right), \tau_{0}\right).$$

Este hecho nos ha llevado a introducir una nueva topología en $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, que llamaremos $\tau_{\ell}$, y que está definida por el límite inductivo de la sucesión de subespacios $\{(\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n}), \tau_{0}) : n \in \mathbb{N}\}$. Las propiedades básicas de esta topología se tratan en el capítulo 5. Se prueba que $\tau_{\ell}$ es estrictamente más fina que $\tau_{\delta}$, aunque ambas coinciden en los espacios de polinomios homogéneos. También se demuestra que el espacio $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_{\ell}\right)$ no es metrizable ni completo y que el límite inductivo $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_{\ell}\right) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{n}\right), \tau_{0}\right)$ es estricto y regular.

La tercera diferencia entre el caso real y el complejo la encontramos en los teoremas del capítulo 7 sobre aplicaciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to E$ tales que $f(\mathbb{D})$ es denso en $E$. Estos resultados sólo han podido ser demostrados cuando $E$ es un espacio de Banach complejo.

Por último, debemos advertir aunque la bibliografía acerca de espacios de funciones holomorfas es amplísima, la topología $\tau_{\delta}$ apenas ha sido considerada en el espacio de funciones analíticas reales. Por este motivo, para lograr que la tesis sea autocontenida, ha sido preciso incluir la demostración detallada de varios teoremas conocidos en el caso de espacios complejos, pero adaptada también a espacios reales.

Esta tesis ha sido realizada bajo la dirección de los profesores José María Martínez Ansemil y Socorro Ponte Miramontes. Por ello deseo darles las gracias en primer lugar por su continua dedicación durante los últimos años. Su guía paciente y sus enseñanzas han sido siempre la mejor ayuda posible.

Una parte de los resultados de la tesis fueron obtenidos durante una estancia de investigación en Kent State University (Estados Unidos), bajo la dirección de Richard M. Aron. A él también estoy profundamente agradecido por su hospitalidad, así como su constante ayuda en la redacción de varios artículos.

Quisiera mencionar además la colaboración prestada por Fernando Bombal, que me orientó en los comienzos del período de doctorado. Finalmente, gracias también a todo el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid.

# Capítulo 1

# Aplicaciones analíticas en espacios de dimensión infinita

En este primer capítulo se presentan las propiedades básicas de las aplicaciones analíticas en espacios localmente convexos. A continuación se definen las topologías habituales en los espacios de funciones analíticas. En la tercera sección del capítulo se recuerda el concepto de complejificación de un espacio de Banach, que será utilizado para extender funciones analíticas en un espacio real a funciones holomorfas en el complejificado. La última sección presenta un teorema de Dilworth, Girardi y Johnson sobre sistemas biortogonales que será utilizado numerosas veces a lo largo de la tesis. Las principales referencias para este capítulo son las monografías de Barroso [20], Dineen [31] y Mujica [53], así como el artículo de Bochnak y Siciak [22].

El símbolo $\mathbb{K}$ representará indistintamente los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. La letra $E$ representará un espacio localmente convexo Hausdorff y $F$ será un espacio de Banach, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. El símbolo $E'$ representará el dual topológico de $E$. Si $E$ es un espacio normado, $x \in E$ y $r > 0$, entonces $B_E(x, r)$ denotará la bola abierta en $E$ con centro $x$ y radio $r$. Si $f$ es una aplicación definida en un conjunto $S$ con valores en $F$, escribiremos

$$\|f\|_S = \sup \{\|f(x)\| : x \in S\}.$$

El símbolo $span(X)$ representará el espacio vectorial generado por un subconjunto $X$ de un espacio vectorial.

**Definición 1.1** Sea $n \in \mathbb{N}$. Una aplicación $P : E \to F$ es un polinomio homogéneo de grado $n$ si existe una aplicación $n-$lineal continua $L : E^n \to F$ tal que

$$P(x) = L(\underbrace{x, \ldots, x}_{n \text{ términos}})$$

para todo $x \in E$.

Obsérvese que todo polinomio es, por definición, una aplicación continua. El símbolo $\mathcal{P}(^nE, F)$ denota el espacio de los polinomios de $E$ en $F$ que son homogéneos de grado $n$; en el caso de $n = 0$, se define $\mathcal{P}\left({}^{0}E, F\right) = F$. El símbolo $\mathcal{P}\left(E, F\right)$ representa el espacio de todos los polinomios de $E$ en $F$, es decir, los elementos de $\mathcal{P}\left(E, F\right)$ son sumas finitas de polinomios homogéneos de diferentes grados:

$$\mathcal{P}\left(E, F\right) = \left\{ \sum_{n=0}^{m} P_n : m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } P_n \in \mathcal{P}\left({}^{n}E, F\right) \text{ para cada } n \right\}.$$

Cuando $F$ sea el cuerpo de escalares, se escribirá $\mathcal{P}\left({}^{n}E\right)$ en vez de $\mathcal{P}\left({}^{n}E, \mathbb{K}\right)$ y $\mathcal{P}\left(E\right)$ en vez de $\mathcal{P}\left(E, \mathbb{K}\right)$.

Las proposiciones siguientes recogen dos propiedades elementales de los polinomios.

**Proposición 1.2** *Para cada $P \in \mathcal{P}\left({}^{n}E, F\right)$ existe una única aplicación $n-$lineal simétrica continua $L : E^n \to F$ tal que $P\left(x\right) = L\left(x, \ldots, x\right)$ para todo $x \in E$. Además, si $x, y \in E$, entonces*

$$P\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L(\underbrace{y, \ldots, y}_{k \text{ términos}}, \underbrace{x-y, \ldots, x-y}_{n-k \text{ términos}}).$$

**Proposición 1.3** *Si $E$ es un espacio normado y $F$ es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{P}\left({}^{n}E, F\right)$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\|P\| = \sup\left\{\|P\left(x\right)\| : \|x\| \leq 1\right\}.$$

*El espacio $\mathcal{L}\left({}^{n}E, F\right)$ de aplicaciones $n-$lineales y continuas de $E^n$ en $F$ también es un espacio de Banach con la norma*

$$\|L\| = \sup\left\{\|L\left(x_1, \ldots, x_n\right)\| : \|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_n\| \leq 1\right\}.$$

**Definición 1.4** Sea $U$ un abierto de un espacio $E$ localmente convexo y sea $F$ un espacio de Banach. Una aplicación $f : U \to F$ es analítica en $U$ si para todo $x_0 \in U$ existe una sucesión $\left(P_n\right)_{n=0}^{\infty}$, $P_n \in \mathcal{P}\left({}^{n}E, F\right)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(x - x_0\right)$$

uniformemente en un entorno de $x_0$ contenido en $U$.

Para cada $f : U \to F$ analítica y cada $x_0 \in U$ existe una única sucesión de polinomios $\left(P_n\right)_{n=0}^{\infty}$ con las propiedades de la definición 1.4. Habitualmente, cada polinomio $P_n$ se escribe como

$$P_n = \frac{\widehat{d^n} f\left(x_0\right)}{n!}$$

y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{d^n} f(x_0)}{n!}$ se denomina serie de Taylor de $f$ centrada en el punto $x_0$. La convergencia uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{d^n} f(x_0)}{n!}$ en un entorno de $x_0$ implica que toda aplicación analítica es continua.

Se llamará $\mathcal{A}(U,F)$ al espacio de aplicaciones analíticas de $U$ en $F$, tanto si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ como si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, las aplicaciones analíticas se denominan aplicaciones holomorfas. Cuando nos refiramos exclusivamente al espacio de aplicaciones holomorfas, escribiremos $\mathcal{H}(U,F)$ en vez de $\mathcal{A}(U,F)$. Cuando $F$ sea el cuerpo $\mathbb{K}$, se escribirá $\mathcal{A}(U)$ y $\mathcal{H}(U)$ en lugar de $\mathcal{A}(U,\mathbb{K})$ y $\mathcal{H}(U,\mathbb{C})$. Si $P\in\mathcal{P}({}^nE,F)$, entonces $P|_U\in\mathcal{A}(U,F)$ y, por tanto, $\mathcal{P}({}^nE,F)$ se puede identificar con un subespacio de $\mathcal{A}(U,F)$.

A continuación enunciamos varias propiedades básicas de las aplicaciones analíticas.

**Teorema 1.5 (teorema de identidad)** *Supongamos que $U$ es un abierto conexo de un espacio localmente convexo y que $F$ es un espacio de Banach. Si $f\in\mathcal{A}(U,F)$ y $f=0$ en un abierto no vacío contenido en $U$, entonces $f=0$ en todo $U$ (Bochnak y Siciak* [22, proposición 6.6]*).*

**Teorema 1.6 (fórmula integral de Cauchy)** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo complejo, $U$ es un abierto de $E$, $F$ es un espacio de Banach complejo y $f\in\mathcal{H}(U,F)$. Si $x_0\in U$, $x\in U$, $r>1$ y $\{x_0+\lambda(x-x_0):|\lambda|\le r\}\subset U$, entonces*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{f(x_0+\lambda(x-x_0))}{\lambda-1}d\lambda.$$

*(véase Barroso* [20, proposición 25.1]*).*

**Teorema 1.7 (desigualdades de Cauchy)** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo complejo, $U$ es un abierto de $E$, $F$ es un espacio de Banach complejo y $f\in\mathcal{H}(U,F)$. Si $\alpha$ es una seminorma continua en $E$, $x_0\in U$, $r>0$ y $\{x\in E:\alpha(x-x_0)\le r\}\subset U$, entonces*

$$\sup_{\alpha(x)\le 1}\left\|\frac{\widehat{d^n}f(x_0)}{n!}(x)\right\|\le\frac{1}{r^n}\cdot\sup_{\alpha(x-x_0)\le r}\|f(x)\|$$

*para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ (Barroso* [20, proposición 25.4]*).*

**Teorema 1.8** *Sean $E$ y $F$ dos espacios de Banach complejos y sea $U$ un abierto de $E$. Una aplicación $f:U\to F$ es holomorfa si y sólo si es diferenciable en todo punto de $U$, es decir, si para cada $x_0\in U$ existe una aplicación lineal y continua $L:E\to F$ tal que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)-L(x)}{\|x\|}=0$$

*(véase Mujica* [53, teorema 14.7]*).*

## 1.1. Topologías en espacios de aplicaciones analíticas

**Definición 1.9** Sea $U$ un abierto de un espacio localmente convexo y sea $F$ un espacio de Banach. El símbolo $\tau_0$ representará la topología compacto – abierta en $\mathcal{A}(U,F)$, es decir, la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos de $U$. Está definida por la familia de seminormas

$$f \in \mathcal{A}(U,F) \mapsto \|f\|_K ,$$

donde $K$ pertenece a la colección de los subconjuntos compactos de $U$.

**Proposición 1.10** *Si $E$ es un espacio localmente convexo metrizable complejo, $U$ es un abierto de $E$ y $F$ es un espacio de Banach complejo, entonces $(\mathcal{H}(U,F), \tau_0)$ es un espacio completo (Barroso* [20, pág. 239]*).*

**Observación 1.11** En la proposición 5.21 se demostrará que si $E$ y $F$ son espacios reales, entonces las topologías que consideraremos en $\mathcal{A}(U,F)$ no son nunca completas.

**Definición 1.12** Sea $U$ un abierto de un espacio localmente convexo $E$ y sea $F$ un espacio de Banach. Una seminorma $p$ en $\mathcal{A}(U,F)$ está portada por un compacto $K \subset U$ si para todo abierto $V$ tal que $K \subset V \subset U$ existe una constante $C > 0$ con la propiedad

$$p(f) \leq C \|f\|_V \qquad \text{para toda } f \in \mathcal{A}(U,F).$$

Se llama $\tau_\omega$ a la topología localmente convexa en $\mathcal{A}(U,F)$ definida por las seminormas que están portadas por compactos de $U$. Fue introducida por Nachbin en [56].

La tercera topología que se va a considerar en $\mathcal{A}(U,F)$ es una topología inductiva en la categoría de espacios localmente convexos y aplicaciones continuas. Recordemos que si $X$ es un espacio vectorial y $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios localmente convexos tales que $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, la topología inductiva $\tau$ en $X$ es la topología localmente convexa más fina con la propiedad de que la inclusión $X_i \hookrightarrow X$ sea continua para todo $i \in I$. Se escribirá $(X,\tau) = \varinjlim_{i\in I} X_i$.

**Definición 1.13** Sea $U$ un abierto de un espacio localmente convexo $E$ y sea $F$ un espacio de Banach. Si $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ formado por conjuntos abiertos tales que $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \cdots$, se define el subespacio $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ de $\mathcal{A}(U,F)$ como

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F) = \left\{ f \in \mathcal{A}(U,F) : \|f\|_{V_n} < \infty \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

En $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ se considera la topología definida por la sucesión de seminormas

$$f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F) \mapsto \|f\|_{V_n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

La topología de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$ es metrizable porque está definida por un conjunto numerable de seminormas. Cuando $E$ y $F$ sean espacios complejos y queramos referirnos exclusivamente a aplicaciones holomorfas, escribiremos $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}(U, F)$ en vez de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$.

Supongamos ahora que $g$ es una aplicación analítica de $U$ en $F$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$W_n = \{x \in U : \|g(x)\| < n\},$$

entonces $\mathcal{W} = (W_n)_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos. Además, se cumple que $g \in \mathcal{A}_{\mathcal{W}}(U, F)$ y, por tanto, deducimos que

$$\mathcal{A}(U, F) = \bigcup_{\mathcal{V}} \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F),$$

donde $\mathcal{V}$ recorre la familia de todos los recubrimientos de $U$ formados por sucesiones crecientes de conjuntos abiertos.

**Definición 1.14** El símbolo $\tau_\delta$ representa la topología inductiva en $\mathcal{A}(U, F)$ definida por la colección de todos los subespacios $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$, donde $\mathcal{V}$ recorre la familia de todos los recubrimientos de $U$ abiertos, numerables y crecientes:

$$(\mathcal{A}(U, F), \tau_\delta) = \varinjlim_{\mathcal{V}} \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$$

Es decir, $\tau_\delta$ es la topología localmente convexa más fina para la cual todas la inclusiones $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F) \hookrightarrow \mathcal{A}(U, F)$ son continuas. La topología $\tau_\delta$ fue introducida en 1970 por Cœuré [25] y, de forma independiente, por Nachbin [58] en los espacios de funciones continuas.

**Proposición 1.15 (Nachbin [58])** *Una seminorma $p$ en $\mathcal{A}(U, F)$ es continua para $\tau_\delta$ si y sólo si para cada recubrimiento $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos existen $C > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$p(f) \leq C \|f\|_{V_{n_0}} \qquad \text{para toda } f \in \mathcal{A}(U, F).$$

**Demostración.** Véase Dineen [31, proposición 3.18], donde esta propiedad aparece enunciada para espacios complejos, aunque la demostración en el caso real es totalmente análoga, ya que sólo depende de la continuidad de las aplicaciones analíticas. ■

**Proposición 1.16** *Siempre se cumple que $\tau_0 \leq \tau_\omega \leq \tau_\delta$ en $\mathcal{A}(U, F)$.*

**Demostración.** Si $K$ es un compacto de $U$, es evidente que la seminorma $p(f) = \|f\|_K$ está portada por $K$. Por ello, $p$ es continua para $\tau_\omega$ y, en consecuencia, $\tau_0 \leq \tau_\omega$.

Supongamos ahora que $q$ es una seminorma en $\mathcal{A}(U, F)$ portada por un compacto $K' \subset U$. Si $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ abierto, numerable y creciente, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K' \subset V_{n_0}$. Entonces existe $C > 0$ tal que $q(f) \leq C \|f\|_{V_{n_0}}$ para toda $f \in \mathcal{A}(U, F)$. Esto implica que $q$ es continua para $\tau_\delta$, luego $\tau_\omega \leq \tau_\delta$. ■

**Ejemplo 1.17**

1. Si $U$ es un abierto de un espacio de dimensión finita y $F$ es un espacio de Banach, entonces $\tau_0 = \tau_\omega = \tau_\delta$ en $\mathcal{A}(U, F)$. En el teorema 4.7 se demostrará con detalle esta propiedad.

2. Si $E$ es normado complejo de dimensión infinita y $U$ es un abierto de $E$, entonces $\tau_0 < \tau_\omega \leq \tau_\delta$ en $\mathcal{H}(U)$ (Barroso [20, proposición 8.12]).

3. $\tau_0 = \tau_\omega < \tau_\delta$ en $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ (Barroso y Nachbin [19]).

4. Si $E$ es un espacio de Banach complejo con base de Schauder y $U$ es un abierto equilibrado en $E$, entonces $\tau_\omega = \tau_\delta$ en $\mathcal{H}(U)$ (Dineen [31, corolario 4.16], Mujica [52]).

5. $\tau_\omega < \tau_\delta$ en $\mathcal{H}(\ell_\infty)$ (Dineen [29]).

La siguiente proposición, que es bien conocida en el caso de espacios de funciones holomorfas, caracteriza los subconjuntos de $\mathcal{A}(U, F)$ que son acotados respecto a $\tau_0$, $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$.

**Proposición 1.18** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo, $U$ es un abierto de $E$, $F$ es un espacio de Banach y $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}(U, F)$. Consideramos los siguientes enunciados:*

1. *$\mathcal{F}$ es localmente acotado, es decir, para cada $x \in U$ existe un entorno $V$ de $x$ contenido en $U$ tal que $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_V < \infty$.*

2. *$\mathcal{F}$ es acotado para la topología $\tau_\delta$.*

3. *$\mathcal{F}$ es acotado para la topología $\tau_\omega$.*

4. *$\mathcal{F}$ es acotado para la topología $\tau_0$.*

*Entonces se cumple que (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4). Además, si $E$ es metrizable, los cuatro enunciados son equivalentes.*

**Demostración.** Si $\mathcal{F}$ es localmente acotado, para todo $x \in U$ existe un abierto $V_x$ tal que $x \in V_x \subset U$ y $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{V_x} = C_x < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$V_n = \bigcup \{V_x : x \in U \text{ y } C_x \leq n\}.$$

La familia $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ abierto, numerable y creciente y $\mathcal{F}$ es acotado en $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$, pues $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{V_n} \leq n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la inclusión $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F) \hookrightarrow (\mathcal{A}(U, F), \tau_\delta)$ es continua, $\mathcal{F}$ también es acotado para $\tau_\delta$. Esto demuestra la implicación (1)⇒(2), mientras que las implicaciones (2)⇒(3)⇒(4) se deducen del hecho de que $\tau_0 \leq \tau_\omega \leq \tau_\delta$.

Para concluir, supondremos que $E$ es un espacio metrizable y demostraremos (4)⇒(1). Sea $x \in U$. Si las aplicaciones de $\mathcal{F}$ no estuviesen uniformemente acotadas en ningún entorno de $x$, existirían dos sucesiones $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$ tales que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $\|f_n(x_n)\| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ no estaría acotada en el compacto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset U$. ■

**Proposición 1.19** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo complejo, $U$ es un abierto de $E$ y $F$ es un espacio de Banach complejo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$ en $\mathcal{H}(U,F)$ inducen la misma topología en el subespacio $\mathcal{P}(^nE,F)$ (Dineen* [31, proposición 3.22]*).*

**Proposición 1.20** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo complejo, $U$ es un abierto equilibrado en $E$, $F$ un espacio de Banach complejo y $f \in \mathcal{H}(U,F)$. En estas condiciones, la serie de Taylor de $f$ centrada en cero converge a $f$ respecto a las topologías $\tau_0$, $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$ (Dineen* [31, proposición 3.36]*). Como consecuencia, $\mathcal{P}(E)$ es denso en $\mathcal{H}(E)$ respecto a $\tau_0$, $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$.*

**Observación 1.21** La prueba de la proposición 1.20 depende de forma esencial de las desigualdades de Cauchy. Por ello, la serie de Taylor de una aplicación analítica real generalmente no converge respecto a las topologías $\tau_0$, $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

es analítica en $\mathbb{R}$ y su serie de Taylor en cero es $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ no converge en el punto $x = 2$ y, por tanto, no converge a $f$ en $(\mathcal{A}(\mathbb{R}), \tau_0)$.

**Proposición 1.22** *Si $E$ es un espacio localmente convexo real, entonces $\mathcal{P}(E)$ es denso en $(\mathcal{A}(E), \tau_0)$.*

**Demostración.** Sea $K$ un compacto de $E$. Por el teorema de Stone – Weierstrass, el conjunto $\{P|_K : P \in \mathcal{P}(E)\}$ es denso en el espacio $\mathcal{C}(K)$ de funciones continuas en $K$. Si $f \in \mathcal{A}(E)$, entonces $f|_K \in \mathcal{C}(K)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(E)$ tal que $\|f - P\|_K < \varepsilon$. Esto significa que $\mathcal{P}(E)$ es denso en $(\mathcal{A}(E), \tau_0)$. ■

## 1.2. Complejificación de un espacio de Banach real

**Definición 1.23** Sea $E$ un espacio de Banach real. El símbolo $\widetilde{E}$ representará el espacio vectorial complejo $E \times E$ con las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned}(x,y) + (x',y') &= (x+x', y+y'),\\ (a+ib)(x,y) &= (ax-by, ay+bx)\end{aligned}$$

para $(x,y), (x',y') \in E \times E$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Las dos proposiciones siguientes recogen resultados básicos sobre la complejificación de un espacio de Banach real. Las demostraciones pueden verse, por ejemplo, en los trabajos de Kirwan [40] y de Muñoz, Sarantopoulos y Tonge [54].

**Proposición 1.24** *Sea $E$ un espacio de Banach real. Para cada $(x,y) \in \widetilde{E}$, sea*

$$\|(x,y)\|_T = \sup\left\{\sqrt{\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2} : \varphi \in E',\ \ \|\varphi\| = 1\right\}.$$

*La aplicación $\|\cdot\|_T$ es una norma en $\widetilde{E}$, denominada norma de Taylor. Se cumple que $\|(x,0)\|_T = \|x\|$ para todo $x \in E$.*

**Proposición 1.25** *Si $E$ es un espacio de Banach real, todo funcional $\varphi \in E'$ admite una única extensión $\widetilde{\varphi} \in (\widetilde{E})'$, que viene dada por la fórmula*

$$\widetilde{\varphi}(x,y) = \varphi(x) + i\varphi(y).$$

*Además, $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

A continuación se comprueba que toda función analítica real se puede extender a una función holomorfa en un abierto del complejificado.

**Proposición 1.26** *Sea $U$ un abierto de un espacio de Banach real $E$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$f$ es analítica en $U$.*
2. *Existe un abierto $\widetilde{U} \subset \widetilde{E}$ tal que $U \times \{0\} \subset \widetilde{U}$ y existe una función holomorfa $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ tal que $\widetilde{f}(x,0) = f(x)$ para todo $x \in U$.*

**Demostración.** (1)⇒(2) Véase Bochnak y Siciak [22, teorema 7.1].

(2)⇒(1) Sea $x_0 \in U$. Por hipótesis, existe una sucesión de polinomios $Q_n : \widetilde{E} \to \mathbb{C}$, cada $Q_n$ es homogéneo de grado $n$ y la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n((x,y) - (x_0,0))$$

converge a $\widetilde{f}(x,y)$ uniformemente en una bola $B_{\widetilde{E}}((x_0,0), r) \subset \widetilde{U}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$P_n : x \in E \mapsto P_n(x) = \mathrm{Re}\,[Q_n(x,0)]$$

pertenece a $\mathcal{P}(^nE)$. Si $x \in B_E(x_0, r)$, entonces $(x,0) \in B_{\widetilde{E}}((x_0,0), r)$, por lo que

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n((x,0) - (x_0,0)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\,[Q_n(x - x_0, 0)] + i\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\,[Q_n(x - x_0, 0)].\end{aligned}$$

Dado que $\widetilde{f}(x,0) = f(x) \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$f(x) = \widetilde{f}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}\left[Q_n(x - x_0, 0)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - x_0)$$

y esta serie converge uniformemente en $B_E(x_0, r)$. ■

**Proposición 1.27** *Sea $E$ un espacio de Banach real o complejo. Supongamos que $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión en $E'$ con la propiedad de que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$. Sea $J$ un subconjunto de $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Para cada $j \in J$, sea $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea $c > 0$. En estas condiciones, la función*

$$f = \sum_{j\in J} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(c \cdot \varphi_j^{\alpha_j} \cdot \varphi_k\right)^k$$

*es analítica en $E$. Como consecuencia, si $J = \{0\}$, $\alpha_0 = 0$ y $c = 1$, se obtiene que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^k \in \mathcal{A}(E).$$

**Demostración.** Supondremos que $E$ es un espacio real; en caso de que sea complejo, simplemente no es necesario considerar la extensión compleja de los funcionales. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, llamamos $\widetilde{\varphi}_k$ a la extensión compleja de $\varphi_k$ al espacio $\widetilde{E}$:

$$\widetilde{\varphi}_k(x,y) = \varphi_k(x) + i\varphi_k(y).$$

Estos funcionales también cumplen que $\lim_{k\to\infty} \widetilde{\varphi}_k(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \widetilde{E}$. Para cada $j \in J$ y cada $k \geq j+1$, la función $\left(c \cdot \widetilde{\varphi}_j^{\alpha_j} \cdot \widetilde{\varphi}_k\right)^k$ es un polinomio homogéneo de grado $(\alpha_j + 1)k$, luego

$$\left(c \cdot \widetilde{\varphi}_j^{\alpha_j} \cdot \widetilde{\varphi}_k\right)^k \in \mathcal{H}(\widetilde{E}).$$

Por tanto, para demostrar que la función

$$\widetilde{f} = \sum_{j\in J} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(c \cdot \widetilde{\varphi}_j^{\alpha_j} \cdot \widetilde{\varphi}_k\right)^k$$

es holomorfa en $\widetilde{E}$ es suficiente comprobar que la serie doble que la define converge uniformemente en los compactos de $\widetilde{E}$.

Sea $K$ un subconjunto compacto de $\widetilde{E}$. Como $\lim_{k\to\infty} \widetilde{\varphi}_k(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \widetilde{E}$, el teorema de Banach – Steinhaus implica que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\widetilde{\varphi}_k\| < \infty$ y, por tanto, $(\widetilde{\varphi}_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a cero uniformemente en $K$ (Limaye [44, corolario 9.2]). Por ello, existen $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|\widetilde{\varphi}_k\|_K \leq \min\left\{\frac{1}{2c}, 1\right\} \qquad \text{para todo } k \geq k_0$$

y

$$\left(\sup_{j\in J,\, j\leq k_0-1}\left\|c\cdot\widetilde{\varphi}_j^{\alpha_j}\right\|_K\right)\cdot\|\widetilde{\varphi}_k\|_K\leq\frac{1}{2}\qquad\text{si } k\geq k_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in J}\sum_{k=j+1}^{\infty}\left\|\left(c\cdot\widetilde{\varphi}_j^{\alpha_j}\cdot\widetilde{\varphi}_k\right)^k\right\|_K\\ \leq\ &\sum_{\substack{j\in J\\ j\leq k_0-1}}\sum_{k=j+1}^{k_1-1}\left\|c\cdot\widetilde{\varphi}_j^{\alpha_j}\cdot\widetilde{\varphi}_k\right\|_K^k+\sum_{\substack{j\in J\\ j\leq k_0-1}}\sum_{k=k_1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{j=k_0}^{\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty.\end{aligned}$$

Esto implica que la serie

$$\sum_{j\in J}\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(c\cdot\widetilde{\varphi}_j^{\alpha_j}\cdot\widetilde{\varphi}_k\right)^k$$

converge absoluta y uniformemente en los compactos de $\widetilde{E}$ y, por la proposición 1.10, define una función holomorfa $\widetilde{f}\in\mathcal{H}(\widetilde{E})$. La proposición 1.26 implica entonces que $f$ es analítica en $E$. ■

## 1.3. Sistemas biortogonales en espacios de Banach

En el estudio que pretendemos llevar a cabo sobre aplicaciones analíticas no acotadas en conjuntos acotados, utilizaremos numerosas veces funciones de la forma

$$f=\sum_{j\in J}\sum_{k=j+1}^{\infty}\left(c\varphi_j^{\alpha_j}\varphi_k\right)^k,$$

como la introducida en la proposición 1.27. Para que la función $f$ sea analítica y, además, no esté acotada en ciertos conjuntos acotados, la sucesión $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ debe cumplir las propiedades del teorema de Josefson – Nissenzweig:

**Teorema 1.28 (Josefson [39], Nissenzweig [59])** *Si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ en $E'$ tal que $\|\varphi_k\|=1$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=0$ para todo $x\in E$.*

Además, para facilitar el cálculo del supremo de $|f|$ en un subconjunto de $E$, resultará de gran utilidad que exista una sucesión de vectores $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ en $E$ tal que $\varphi_k(x_k)=1$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y $\varphi_k(x_n)=0$ si $n\neq k$. Se dice entonces que las sucesiones $\{x_k,\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ constituyen un sistema biortogonal en $E$. La necesidad de estas propiedades nos ha llevado a utilizar un resultado de Dilworth, Girardi y Johnson que afirma que para todo espacio de Banach $E$ de dimensión infinita y todo $\varepsilon>0$, existe un sistema biortogonal $\{x_k,\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $E$ tal que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\|x_k\|\cdot\|\varphi_k\|\right)\leq 2+\varepsilon$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$$

para todo $x \in E$ (véase [28, pág. 250]). En la demostración de este resultado se puede observar además que cada funcional $\varphi_k$ tiene norma 1. Por tanto, el teorema de Dilworth, Girardi y Johnson se puede expresar de la forma siguiente:

**Teorema 1.29 (Dilworth, Girardi y Johnson, [28])** *Si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe un sistema biortogonal $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $E$ tal que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$, $\|\varphi_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$.*

La demostración del teorema 1.29 consiste en un proceso inductivo. Comienza con la elección de dos elementos arbitrarios $x_1 \in E$ y $\varphi_1 \in E'$ tales que $\|\varphi_1\| = 1$ y $\varphi_1(x_1) = 1$. Una vez supuesto que ya han sido determinados los conjuntos $\{x_j : 1 \leq j < n\}$ y $\{\varphi_j : 1 \leq j < n\}$, los autores definen

$$X_n = \{x \in E : \varphi_j(x) = 0 \text{ si } j < n\}$$

y

$$Z_n = \{\varphi \in E' : \varphi(x_j) = 0 \text{ si } j < n\}.$$

A continuación, demuestran que existen $x_n \in X_n$ y $\varphi_n \in Z_n$ tales que $\|\varphi_n\| = 1$ y $\varphi_n(x_n) = 1$ de forma que las sucesiones $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ así construidas cumplan que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$ y $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$.

Dado que se trata de una demostración por recurrencia, siempre se pueden elegir el primer vector y el primer funcional. En los capítulos 4 y 6 se utilizará este hecho, pues serán necesarios sistemas biortogonales en los cuales el primer vector y el primer funcional lineal de las sucesiones estén prefijados. Se aplicará entonces la siguiente variación del teorema 1.29:

**Teorema 1.30** *Sea $E$ un espacio de Banach de dimensión infinita y supongamos que $x_0 \in E$ y $\varphi_0 \in E'$. Entonces existen dos sucesiones $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E$ y $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset E'$ con las propiedades siguientes:*

1. $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ *para todo* $x \in E$.

2. $\|\varphi_k\| = 1$ *para todo* $k \geq 1$.

3. $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$.

4. $\varphi_k(x_k) = 1$ *para todo* $k \geq 1$.

5. *Si* $k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $j \neq k$, *entonces* $\varphi_k(x_j) = 0$ *y* $\varphi_j(x_k) = 0$.

**Ejemplo 1.31** Supongamos que $E$ es un espacio de Banach con una base de Schauder normalizada $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Sea $(e_k^*)_{k=1}^{\infty}$ la colección de funcionales asociados a la base. En este caso, las sucesiones

$$x_k = \|e_k^*\|\, e_k \qquad \text{y} \qquad \varphi_k = \frac{e_k^*}{\|e_k^*\|}$$

constituyen un sistema biortogonal con las propiedades enunciadas en el teorema 1.29.

# Capítulo 2

# Metrizabilidad de los espacios de aplicaciones analíticas

Si $m \in \mathbb{N}$, $U$ es un abierto de $\mathbb{K}^m$ y $F$ es un espacio de Banach, la topología $\tau_0$ en el espacio $\mathcal{A}(U,F)$ puede definirse por medio de una métrica. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se llama $K_n$ al siguiente subconjunto de $U$:

$$K_n = \left\{ x \in U : dist\,(x, \partial U) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \{x \in U : \|x\| \leq n\}\,.$$

Entonces $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ constituye una sucesión creciente de compactos que recubren $U$ y, por ello, la expresión

$$d\,(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \tag{2.1}$$

define una métrica en $\mathcal{A}(U,F)$ invariante por traslaciones que induce la topología compacto – abierta.

Sin embargo, esta construcción de la distancia $d$ no se puede realizar cuando $U$ es un abierto de un espacio de Banach de dimensión infinita dado que, por el teorema de Baire, $U$ no puede ser recubierto por una sucesión de compactos. De hecho, Alexander demostró en 1968 que, en general, si $\dim(E) = \infty$, las topologías habituales en $\mathcal{H}(U)$ no son metrizables:

**Teorema 2.1 (Alexander [1], pág. 13)** *Sea $U$ un abierto de un espacio de Banach complejo, de dimensión infinita y con base de Schauder. Si $\tau$ es una topología en $\mathcal{H}(U)$ más fina que la de la convergencia en todo punto, entonces $(\mathcal{H}(U), \tau)$ no es metrizable.*

Más adelante, Chae comprobó en [24, teorema 16.10] que gracias al teorema de Josefson – Nissenzweig, el resultado de Alexander es válido igualmente en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita, aunque no tenga base de Schauder.

En 2007, Ansemil y Ponte probaron una generalización del teorema 2.1 en el caso de que $E$ sea un espacio localmente convexo metrizable y $\tau$ sea la topología de Nachbin $\tau_\omega$.

**Teorema 2.2 (Ansemil y Ponte [4])** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo metrizable complejo y que $U$ un abierto de $E$. Si $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ es metrizable, entonces $E$ es un espacio normado de dimensión finita.*

En este capítulo vamos a demostrar un resultado semejante para la topología $\tau_\delta$ en $\mathcal{A}(U)$ cuando $U$ es un abierto de un espacio localmente convexo metrizable, real o complejo. En la primera sección del capítulo se presentan las definiciones y las propiedades básicas de los conjuntos acotantes y limitados en espacios de Banach, que serán utilizados en la demostración del teorema principal del capítulo (teorema 2.12). A continuación veremos cómo si $E$ es un espacio localmente convexo metrizable y $U$ es un abierto de $E$, las topologías que estamos considerando en $\mathcal{A}(U)$ son metrizables si y sólo si $E$ tiene dimensión finita. La última sección mostrará que en el teorema 2.12 no se puede eliminar la hipótesis de que $E$ sea metrizable.

## 2.1. Conjuntos acotantes y limitados

**Definición 2.3** Sea $E$ un espacio de Banach. Un conjunto $B \subset E$ es acotante si toda función analítica en $E$ está acotada en $B$.

**Ejemplo 2.4** Sea $E$ un espacio de Banach.

1. Todo subconjunto de $E$ que sea relativamente compacto es también acotante.

2. Si $B$ es acotante, entonces todo funcional $\varphi \in E'$ está acotado en $B$ y, por tanto, $B$ es un subconjunto acotado de $E$.

3. Si $E$ es un espacio complejo separable o reflexivo, todo subconjunto acotante en $E$ es relativamente compacto (Dineen [30]).

4. Sea $\ell_\infty$ el espacio de sucesiones acotadas de números complejos. Si $e_n = (0, \ldots, 0, \underset{n}{\smile}{1}, 0, 0, \ldots) \in \ell_\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $B = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotante (Dineen [29]).

**Definición 2.5** Sea $E$ un espacio de Banach. Un conjunto $A \subset E$ es limitado si toda sucesión $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset E'$ tal que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$ cumple también que $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_A = 0$.

La siguiente proposición es conocida en el caso de espacios de funciones holomorfas. Hemos incluido la prueba porque no ha sido posible encontrar referencias de una demostración detallada en el caso de espacios reales.

**Proposición 2.6** *Sea $E$ un espacio de Banach. Entonces:*

1. *Todo conjunto acotante es también es limitado.*

*2. Si A es un conjunto limitado, su envoltura equilibrada, convexa y cerrada, $\overline{\mathrm{coe}\,(A)}$, también es limitada.*

*3. Si E tiene dimensión infinita, todo conjunto limitado en E tiene interior vacío.*

**Demostración.** 1. Seguiremos la demostración que se hace en [32, proposición 2.2] cuando $E$ es un espacio complejo. Supongamos que $B \subset E$ no es limitado. Entonces existe una sucesión $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset E'$ que converge a cero en cada punto de $E$ y existe $\delta > 0$ con la propiedad de que $\|\varphi_k\|_B > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $b_k \in B$ tal que $|\varphi_k(b_k)| > \delta$. Si se define $\psi_k = \frac{2}{\delta}\varphi_k$ para todo $k$, entonces la sucesión $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a cero en todo punto y $|\psi_k(b_k)| > 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sean $k_1 = 1$ y $m_1 = 1$. Como $\lim_{k\to\infty} \psi_k(b_{k_1}) = 0$, existe $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$, tal que $|\psi_k(b_{k_1})| < \frac{1}{2}$ si $k \geq k_2$. Además, como $\left|\psi_{k_2}(b_{k_2})\right| > 2$, existe $m_2 \in \mathbb{N}$, $m_2 > m_1$, tal que

$$\left|\psi_{k_2}(b_{k_2})\right|^{m_2} > k_2 + 1 + \left|\psi_{k_1}(b_{k_2})\right|^{m_1}.$$

Puesto que $\lim_{k\to\infty} \psi_k(b_{k_2}) = 0$, existe $k_3 \in \mathbb{N}$, $k_3 > k_2$, tal que $|\psi_k(b_{k_2})| < \frac{1}{2}$ si $k \geq k_3$. Además, como $\left|\psi_{k_3}(b_{k_3})\right| > 2$, existe $m_3 \in \mathbb{N}$, $m_3 > m_2$, tal que

$$\left|\psi_{k_3}(b_{k_3})\right|^{m_3} > k_3 + 1 + \sum_{j=1}^{2} \left|\psi_{k_j}(b_{k_3})\right|^{m_j}.$$

De esta forma se obtienen dos sucesiones estrictamente crecientes de números naturales $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ con las dos propiedades siguientes:

$$|\psi_k(b_{k_n})| < \frac{1}{2} \qquad \text{si } k \geq k_{n+1} \tag{2.2}$$

y

$$\left|\psi_{k_n}(b_{k_n})\right|^{m_n} > k_n + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left|\psi_{k_j}(b_{k_n})\right|^{m_j}. \tag{2.3}$$

La función

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\psi_{k_j}\right)^{m_j}$$

es analítica en $E$ porque $\lim_{j\to\infty} \psi_{k_j}(x) = 0$ para todo $x \in E$ (véase la proposición 1.27). Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(b_{k_n})| \geq \left|\psi_{k_n}(b_{k_n})\right|^{m_n} - \sum_{j=1}^{n-1} \left|\psi_{k_j}(b_{k_n})\right|^{m_j} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\psi_{k_j}(b_{k_n})\right|^{m_j}.$$

Por la desigualdad (2.3),

$$|f(b_{k_n})| \geq k_n + 1 - \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\psi_{k_j}(b_{k_n})\right|^{m_j}.$$

Si $j \geq n+1$, entonces $k_j \geq k_{n+1}$ y por la desigualdad (2.2) se cumple que

$$|f(b_{k_n})| \geq k_n + 1 - \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_j} \geq k_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Estas desigualdades implican que $f$ no está acotada en $B$ y, por tanto, $B$ no es un conjunto acotante.

2. Se deduce del hecho de que si $\varphi \in E'$, entonces $\|\varphi\|_{\overline{coe(A)}} = \|\varphi\|_A$.

3. Por el teorema de Josefson – Nissenzweig (teorema 1.28), existe una sucesión $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset E'$ tal que $\|\varphi_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$. Supongamos que existe un conjunto limitado $A \subset E$ con interior no vacío. En ese caso existirá una bola $B_E(a,r) \subset A$. Entonces

$$B_E(0,1) \subset \frac{1}{r}(A-a) = \frac{-1}{r}a + \frac{1}{r}A.$$

Como $A$ es limitado y $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(a) = 0$, deducimos que

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_{B_E(0,1)} \leq \frac{1}{r}\lim_{k\to\infty} |\varphi_k(a)| + \frac{1}{r}\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_A = 0.$$

Sin embargo, $\|\varphi_k\|_{B_E(0,1)} = \|\varphi_k\| = 1$ para todo $k$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A$ debe tener interior vacío. ■

**Observación 2.7** Schlumprecht demostró en [63] la existencia de un espacio de Banach que contiene un subconjunto limitado no acotante .

## 2.2. Metrizabilidad de $\mathcal{A}(U,F)$ cuando el espacio $E$ es metrizable

En su trabajo acerca de la metrizabilidad de la topología $\tau_\omega$, Ansemil y Ponte utilizaron la siguiente proposición:

**Proposición 2.8 (Ansemil y Ponte [4])** *Sea $U$ un abierto de un espacio $E$ localmente convexo metrizable complejo. Si $E'$ es metrizable con la topología inducida por $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$, entonces $E$ es un espacio normado.*

En el teorema 2.12 será necesario aplicar un resultado similar sobre la topología $\tau_\delta$, es decir, utilizaremos que $E$ es normado si $(E', \tau_\delta|_{E'})$ es metrizable. Cuando $E$ es un espacio complejo se puede demostrar, utilizando las desigualdades de Cauchy, que $(E', \tau_\delta|_{E'}) = (E', \tau_\omega|_{E'})$, con lo cual el teorema de Ansemil y Ponte proporciona directamente el resultado requerido. Sin embargo, cuando $E$ es un espacio real, no se puede garantizar que $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$ en $\mathcal{A}(U)$ induzcan la misma topología en el subespacio $E'$. Por ello, hemos preferido presentar la prueba completa del resultado de Ansemil y Ponte adaptada a la topología $\tau_\delta$, tanto en el caso real como el complejo. Primero es preciso recordar varias propiedades sobre espacios localmente convexos generales.

**Proposición 2.9 (teorema de los bipolares)** *Sea $V$ un subconjunto de un espacio localmente convexo $E$ y llamemos $V^\circ$ y $V^{\circ\circ}$ a los conjuntos polar y bipolar, respectivamente:*

$$V^\circ = \{\varphi \in E' : |\varphi(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in V\}$$

*y*

$$V^{\circ\circ} = \{x \in E : |\varphi(x)| \leq 1 \text{ para todo } \varphi \in V^\circ\}.$$

*Entonces se cumple que $V^{\circ\circ} = \overline{coe\,(V)}^{\sigma(E,E')}$, la envoltura equilibrada, convexa y cerrada de $V$ para la topología $\sigma(E, E')$ (Horváth* [37, pág. 192]*).*

**Proposición 2.10 (condición de numerabilidad de Mackey)** *Si $E$ es un espacio localmente convexo metrizable y $(B_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de subconjuntos acotados de $E$, entonces existen otro acotado $B \subset E$ y una sucesión de números positivos $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ tales que $B_n \subset \lambda_n B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Horváth* [37, pág. 116]*).*

**Proposición 2.11** *Sea $U$ un abierto de un espacio $E$ localmente convexo metrizable y supongamos que $0 \in U$. Si $E'$ es metrizable con la topología inducida por $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$, entonces $E$ es un espacio normado.*

**Demostración.** Supongamos que $(V_n)_{n=1}^\infty$ es una base de entornos de cero en $E$ formada por conjuntos equilibrados, convexos y cerrados. Entonces $V_n = \overline{coe\,(V_n)}^{\sigma(E,E')}$ y, por el teorema de los bipolares,

$$V_n = \overline{coe\,(V_n)}^{\sigma(E,E')} = V_n^{\circ\circ}. \tag{2.4}$$

Vamos a demostrar primero que cada polar $V_n^\circ$ es acotado en $(E', \tau_\delta|_{E'})$. Sea $p$ una seminorma continua en $(E', \tau_\delta|_{E'})$. Entonces existe una seminorma $q$ continua en $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ tal que

$$p(\varphi) \leq q(\varphi|_U) \qquad \text{para todo } \varphi \in E'.$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y llamemos $W$ al interior de $V_n$. Como $W$ es un abierto equilibrado, la colección $(U \cap mW)_{m=1}^\infty$ es un recubrimiento de $U$ abierto, numerable y creciente, luego existen $C > 0$ y $m_0 \in \mathbb{N}$ tales que $q(f) \leq C \|f\|_{U \cap m_0 W}$ para toda $f \in \mathcal{A}(U)$. Si $\varphi \in E'$, entonces

$$p(\varphi) \leq q(\varphi|_U) \leq C \|\varphi|_U\|_{U \cap m_0 W} \leq C m_0 \|\varphi\|_{V_n}.$$

Por lo tanto,

$$\sup\{p(\varphi) : \varphi \in V_n^\circ\} \leq C m_0 < \infty.$$

De esta forma vemos cómo cada $V_n^\circ$ es acotado en $(E', \tau_\delta|_{E'})$.

Si se aplica la condición de Mackey al espacio metrizable $(E', \tau_\delta|_{E'})$ y a la sucesión de acotados $(V_n^\circ)_{n=1}^\infty$, se deduce la existencia de un conjunto $\mathcal{F}$ acotado en $(E', \tau_\delta|_{E'})$ y una sucesión de números positivos $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ tales que

$$V_n^\circ \subset \lambda_n \mathcal{F} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Al ser $E$ un espacio metrizable, $\mathcal{F}$ está acotado en un entorno de $0 \in U$ (proposición 1.18). Por ello, existen $M > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sup \left\{ \|\varphi\|_{V_j} : \varphi \in \mathcal{F} \right\} \leq M,$$

lo cual implica que

$$\sup \left\{ \|\varphi\|_{\frac{1}{M}V_j} : \varphi \in \mathcal{F} \right\} \leq 1.$$

Como $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de entornos de cero en $E$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset \frac{1}{M}V_j$. Entonces

$$\|\varphi\|_{V_{n_0}} \leq \|\varphi\|_{\frac{1}{M}V_j} \leq 1 \qquad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}.$$

Por tanto, $\mathcal{F} \subset V_{n_0}^{\circ}$. Aplicamos (2.5):

$$V_n^{\circ} \subset \lambda_n \mathcal{F} \subset \lambda_n V_{n_0}^{\circ},$$

con lo cual

$$V_n^{\circ\circ} \supset \left(\lambda_n V_{n_0}^{\circ}\right)^{\circ} = \frac{1}{\lambda_n} V_{n_0}^{\circ\circ}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A continuación utilizamos la igualdad (2.4):

$$\frac{1}{\lambda_n} V_{n_0} = \frac{1}{\lambda_n} V_{n_0}^{\circ\circ} \subset V_n^{\circ\circ} = V_n \tag{2.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. La propiedad (2.6) implica que $V_{n_0}$ es acotado, pues es absorbido por cada $V_n$. El espacio $E$ es Hausdorff y tiene un entorno de cero, el $V_{n_0}$, que es acotado, luego $E$ es un espacio normado (Horváth [37, pág. 110]). ■

**Teorema 2.12** *Sea $U$ un abierto de un espacio $E$ localmente convexo metrizable. Si $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ es metrizable, entonces $E$ es un espacio normado de dimensión finita.*

**Demostración.** Parte de la demostración está basada en la del teorema 2.2 sobre la topología de Nachbin en espacios de funciones holomorfas.

Como los espacios $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ y $(\mathcal{A}(a+U), \tau_\delta)$ son isomorfos topológicamente para todo $a \in E$, podemos suponer que $0 \in U$. Si $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ es metrizable, también lo es su subespacio $(E', \tau_\delta|_{E'})$ y, por la proposición 2.11, $E$ es un espacio normado. Su compleción, representada por $\widehat{E}$, es un espacio de Banach.

Se ha supuesto que $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ es metrizable, por lo que existirá una base numerable $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ de entornos de cero en $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el siguiente subconjunto de $U$:

$$A_n = \{x \in U : |f(x)| \leq 1 \text{ para toda } f \in \mathcal{F}_n\}.$$

Sea $f \in \mathcal{A}(\widehat{E})$. La restricción $f|_U$ es analítica en $U$ y como $\mathcal{F}_n$ es un entorno de cero en $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha f|_U \in \mathcal{F}_n$. Por tanto, $|\alpha f(x)| \leq 1$ para todo $x \in A_n$ y, así,

$$\sup_{x \in A_n} |f(x)| \leq \frac{1}{\alpha} < \infty.$$

Esto demuestra que cada $A_n$ es un conjunto acotante en $\widehat{E}$. Según se ha visto en la proposición 2.6, $A_n$ y $\overline{coe\,(A_n)}^{\widehat{E}}$ (su envoltura equilibrada, convexa y cerrada en $\widehat{E}$) son limitados en $\widehat{E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $r > 0$ suficientemente pequeño para que $B_E\,(0, 2r) \subset U$. Vamos a demostrar que la bola $B_{\widehat{E}}\,(0, r)$ en $\widehat{E}$ está contenida en la unión

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{coe\,(A_n)}^{\widehat{E}}.$$

Sea $\widehat{z} \in B_{\widehat{E}}\,(0, r)$. Como $E$ es denso en $\widehat{E}$, existe $z_1 \in B_E\,(0, r)$ tal que $\|\widehat{z} - z_1\| < \frac{r}{4}$, es decir,

$$\widehat{z} - z_1 \in B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{r}{4}\right).$$

De nuevo, existe $z_2 \in B_E\left(0, \frac{r}{4}\right)$ con la propiedad de que $\|\widehat{z} - z_1 - z_2\| < \frac{r}{4^2}$, es decir,

$$\widehat{z} - z_1 - z_2 \in B_{\widehat{E}}\left(0, \frac{r}{4^2}\right).$$

Si se repite este razonamiento sucesivas veces, para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos un punto $z_n \in B_E\left(0, \frac{r}{4^{n-1}}\right)$ tal que

$$\left\|\widehat{z} - \sum_{k=1}^{n} z_k\right\| < \frac{r}{4^n}.$$

Por tanto, $\widehat{z} = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

Ahora se define $w_n = 2^n z_n \in E$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero:

$$\|w_n\| = 2^n \|z_n\| < 2^n \cdot \frac{r}{4^{n-1}} = \frac{2r}{2^{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Además,

$$w_n = 2^n z_n \in 2^n B_E\left(0, \frac{r}{4^{n-1}}\right) \subset B_E\,(0, 2r) \subset U.$$

Por ello, el conjunto

$$K = \{w_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

es un compacto contenido en $U$. En consecuencia,

$$\{f \in \mathcal{A}\,(U) : \|f\|_K \leq 1\}$$

es un entorno de cero en $\mathcal{A}\,(U)$ para la topología $\tau_0$ y, por tanto, para $\tau_\delta$. Por ello, debe existir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{F}_{n_1} \subset \{f \in \mathcal{A}\,(U) : \|f\|_K \leq 1\}.$$

Si $x \in K$, para toda función $f \in \mathcal{F}_{n_1}$ se cumple que

$$|f\,(x)| \leq \|f\|_K \leq 1,$$

luego $x \in A_{n_1}$. Por tanto, $K$ está contenido en $A_{n_1}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} w_k \in coe\,(K) \subset \overline{coe\,(A_{n_1})}^{\widehat{E}},$$

luego

$$\widehat{z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} w_k \in \overline{coe\,(A_{n_1})}^{\widehat{E}}.$$

De esta forma llegamos a que

$$B_{\widehat{E}}\,(0,r) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{coe\,(A_n)}^{\widehat{E}}.$$

Al ser $\widehat{E}$ un espacio de Banach, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{coe\,(A_{n_2})}^{\widehat{E}}$ tiene interior no vacío en $\widehat{E}$. Como $\overline{coe\,(A_{n_2})}^{\widehat{E}}$ es limitado, por la proposición 2.6 deducimos que $\widehat{E}$ y, por tanto, $E$ tienen dimensión finita. ■

A continuación se generaliza el teorema 2.12 al caso de espacios de aplicaciones analíticas con valores en un espacio de Banach.

**Teorema 2.13** *Sea $U$ un abierto de un espacio $E$ localmente convexo metrizable y sea $F$ un espacio de Banach. Si $(\mathcal{A}\,(U,F)\,,\tau_\delta)$ es metrizable, entonces $E$ es un espacio normado de dimensión finita.*

**Demostración.** Vamos a demostrar que si $(\mathcal{A}\,(U,F)\,,\tau_\delta)$ es metrizable, entonces $(\mathcal{A}\,(U)\,,\tau_\delta)$ también es metrizable. Tomamos una sucesión creciente de seminormas $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{A}\,(U,F)$ que determinen la topología $\tau_\delta$. Sea $y \in F$ tal que $\|y\| = 1$. Por el teorema de Hahn – Banach existe $\varphi \in F'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi\,(y) = \|y\| = 1$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{A}\,(U)$, entonces $f \cdot y \in \mathcal{A}\,(U,F)$ y, por tanto, se puede definir la siguiente seminorma en $\mathcal{A}\,(U)$:

$$\begin{array}{cccl} q_n : & \mathcal{A}\,(U) & \to & [0,\infty) \\ & f & \mapsto & q_n\,(f) = p_n\,(f \cdot y)\,. \end{array}$$

Supongamos que $(V_j)_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos. Entonces existen $C > 0$ y $j_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$p_n\,(g) \leq C \sup_{x \in V_{j_1}} \|g\,(x)\| \qquad \text{para toda } g \in \mathcal{A}\,(U,F)\,.$$

Si $f \in \mathcal{A}\,(U)$, entonces

$$q_n\,(f) = p_n\,(f \cdot y) \leq C \sup_{x \in V_{j_1}} \|f\,(x)\,y\| = C \sup_{x \in V_{j_1}} |f\,(x)|\,.$$

Por tanto, $q_n$ es continua en $(\mathcal{A}\,(U)\,,\tau_\delta)$.

Vamos a demostrar que la topología $\tau_\delta$ en $\mathcal{A}(U)$ queda determinada por la sucesión $(q_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $q$ otra seminorma continua en $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$. Entonces

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathcal{A}(U,F) & \to & [0,\infty) \\ & g & \mapsto & p(g) = q(\varphi \circ g) \end{array}$$

es una seminorma en $\mathcal{A}(U,F)$. Si $(W_j)_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos, existen $C' > 0$ y $j_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$q(f) \leq C' \sup_{x \in W_{j_2}} |f(x)| \qquad \text{para toda } f \in \mathcal{A}(U).$$

Si $g \in \mathcal{A}(U,F)$, entonces

$$\begin{aligned} p(g) &= q(\varphi \circ g) \leq C' \sup_{x \in W_{j_2}} |\varphi \circ g(x)| \\ &\leq C' \sup_{x \in W_{j_2}} \|\varphi\| \, \|g(x)\| = C' \sup_{x \in W_{j_2}} \|g(x)\|. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $p$ es continua en $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$. Por tanto, existen $M > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $p \leq Mp_m$.

Sea $f \in \mathcal{A}(U)$. Si $x \in U$,

$$(\varphi \circ (f \cdot y))(x) = \varphi(f(x)\, y) = f(x)\, \varphi(y) = f(x)$$

porque $\varphi(y) = 1$. Por tanto, $f = \varphi \circ (f \cdot y)$, luego

$$q(f) = q(\varphi \circ (f \cdot y)) = p(f \cdot y) \leq Mp_m(f \cdot y) = Mq_m(f).$$

Vemos así que para toda seminorma $q$ continua en $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ existen $M > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $q \leq Mq_m$. Por lo tanto, la sucesión $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ determina la topología $\tau_\delta$ en $\mathcal{A}(U)$, con lo cual $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ es un espacio metrizable. Por el teorema 2.12, $E$ es un espacio normado de dimensión finita. ■

Para extender el teorema 2.13 a toda topología localmente convexa entre $\tau_0$ y $\tau_\delta$ será preciso utilizar el concepto de espacio bornológico.

**Definición 2.14** Un espacio localmente convexo $X$ es bornológico si cumple la siguiente propiedad: si $V \subset X$ es equilibrado, convexo y para todo acotado $B \subset X$ existe $t > 0$ tal que $B \subset tV$, entonces $V$ es un entorno de cero en $X$.

**Proposición 2.15**

1. *Todo espacio localmente convexo metrizable es bornológico (Horváth* [37, pág. 222]*).*

2. *El límite inductivo de una colección espacios bornológicos es también bornológico (Horváth* [37, pág. 222]*).*

3. *Supongamos que $X$ e $Y$ son espacios localmente convexos y que $X$ es bornológico. Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal que transforma sucesiones convergentes a cero en $X$ en sucesiones acotadas en $Y$, entonces $T$ es continua (Horváth* [37, pág. 225]*).*

**Observación 2.16** Las propiedades (1) y (2) de la proposición 2.15 implican que $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta) = \varinjlim \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ siempre es un espacio bornológico, dado que cada $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ es metrizable.

**Teorema 2.17** *Sea $U$ un abierto de un espacio $E$ localmente convexo metrizable y sea $F$ un espacio de Banach. Si $\tau$ es una topología localmente convexa en $\mathcal{A}(U,F)$ tal que $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_\delta$, entonces $(\mathcal{A}(U,F), \tau)$ es metrizable si y sólo si $E$ es un espacio normado de dimensión finita.*

**Demostración.** Como $E$ es un espacio metrizable, $\tau_\delta$ define los mismos acotados que $\tau_0$ y $\tau$ (proposición 1.18). Entonces la identidad

$$I : (\mathcal{A}(U,F), \tau) \to (\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$$

lleva acotados para $\tau$ en acotados para $\tau_\delta$. Si $(\mathcal{A}(U,F), \tau)$ es metrizable, entonces $(\mathcal{A}(U,F), \tau)$ es un espacio bornológico y por la proposición 2.15 se obtiene que la aplicación $I$ es continua. Por tanto, $\tau = \tau_\delta$, luego $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$ también es metrizable y, por el teorema 2.13, $E$ es normado de dimensión finita.

Recíprocamente, si $E$ es normado de dimensión finita, entonces $(\mathcal{A}(U,F), \tau_0)$ es metrizable con la distancia definida en (2.1). Entonces $(\mathcal{A}(U,F), \tau_0)$ es bornológico y, por tanto, la aplicación identidad

$$I : (\mathcal{A}(U,F), \tau_0) \to (\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$$

es continua. Esto implica que $\tau_0 = \tau_\delta$, luego también $\tau_0 = \tau$. ∎

## 2.3. Metrizabilidad de $\mathcal{A}(U,F)$ cuando el espacio $E$ no es metrizable

Terminaremos el capítulo mostrando con un ejemplo que la única hipótesis de los teoremas de la sección anterior (que $E$ sea metrizable) no puede eliminarse. Para ello será preciso enunciar varias proposiciones auxiliares. En primer lugar recordamos que un espacio topológico $X$ es un $k-$espacio si se cumple la siguiente propiedad: un subconjunto $A$ es abierto en $X$ si y sólo si $A \cap K$ es abierto en $K$ para todo compacto $K \subset X$.

La proposición siguiente generaliza un resultado obtenido por Ansemil y Ponte [3] cuando $E$ es un espacio complejo y $F = \mathbb{C}$.

**Proposición 2.18 (Ansemil y Ponte [3])** *Sea $U$ un abierto de un espacio localmente convexo $E$ y sea $F$ un espacio de Banach. Si $U$ es un $k-$espacio, toda sucesión en $\mathcal{A}(U,F)$ que converja a cero para $\tau_0$ es acotada para $\tau_\delta$.*

**Demostración.** Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{A}(U,F)$ que converja a cero para la topología compacto – abierta. Se va a demostrar que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión localmente acotada. Sea $x_0$ un punto de $U$. Dado que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$, existe una constante $C > 0$ tal que $\|f_n(x_0)\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_0$ pertenece al conjunto

$$A = \{x \in U : \|f_n(x)\| < C + 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Hay que comprobar que $A$ es abierto en $U$ y que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_A < \infty$.

Como $U$ es un $k-$espacio, $A$ será abierto si para cada compacto $K \subset U$ se cumple que $K \cap A$ es abierto en $K$. Tomamos un compacto $K$ contenido en $U$ y un punto $x \in K \cap A$. Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_K = 0$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para el cual $\|f_n\|_K < C + 1$ si $n \geq n_0$. El punto $x$ pertenece a $A$, luego

$$\|f_1(x)\| < C + 1, \ldots, \|f_{n_0}(x)\| < C + 1.$$

Como las funciones $f_1, \ldots, f_{n_0}$ son continuas, existe un entorno $V$ de $x$ contenido en $U$ tal que

$$\|f_1\|_V < C + 1, \ldots, \|f_{n_0}\|_V < C + 1.$$

Deducimos entonces que $\|f_n\|_{K\cap V} < C + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto,

$$x \in K \cap V \subset K \cap A.$$

Esto implica que $K \cap A$ es abierto en $K$. Entonces $A$ es abierto en $U$ y, por tanto, $A$ es un entorno de $x_0$.

Por la definición de $A$ tenemos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_A \leq C + 1 < \infty.$$

Esto demuestra que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es localmente acotada. Por la proposición 1.18, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada para la topología $\tau_\delta$. ∎

**Proposición 2.19 (Mujica [51])** *Sea $X$ un espacio de Fréchet y sea $E = (X', \tau_0)$ (los espacios $E$ definidos de esta forma se denominan $DFC$). Entonces:*

1. *Todo abierto de $E$ es un $k-$espacio.*
2. *Si $X$ es un espacio separable y $U$ es un abierto de $E$, entonces existe una sucesión fundamental de compactos de $U$, es decir, cualquier otro compacto de $U$ está contenido en un elemento de la sucesión.*

**Proposición 2.20** *Sea $X$ un espacio de Fréchet separable. Si $U$ es un abierto de $E = (X', \tau_0)$ y $F$ es un espacio de Banach, entonces $\tau_0 = \tau_\delta$ en $\mathcal{A}(U,F)$ y $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$ es metrizable.*

**Demostración.** Según la proposición 2.19, $U$ un $k-$espacio y existe una sucesión fundamental de subconjuntos compactos de $U$. Esto último implica que $\left(\mathcal{A}\left(U,F\right),\tau_0\right)$ es un espacio metrizable, luego también es bornológico.

Por la proposición 2.18, la identidad

$$I:\left(\mathcal{A}\left(U,F\right),\tau_0\right)\to\left(\mathcal{A}\left(U,F\right),\tau_\delta\right)$$

transforma sucesiones convergentes a cero en sucesiones acotadas. Como $\left(\mathcal{A}\left(U,F\right),\tau_0\right)$ es bornológico, la proposición 2.15 implica que $I$ es continua. Deducimos así que $\tau_0=\tau_\delta$. Como consecuencia, $\left(\mathcal{A}\left(U,F\right),\tau_\delta\right)$ también es un espacio metrizable. ■

# Capítulo 3

# Espacios de funciones analíticas no acotadas

## 3.1. Funciones holomorfas de tipo no acotado

El concepto de subconjunto acotante de un espacio de Banach (definición 2.3) fue introducido por Alexander [1] en su intento de hallar una topología en el espacio de funciones holomorfas en dimensión infinita que mantuviese las propiedades principales de $\tau_0$ en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Entre otras propiedades, demostró que todo acotante en $\ell_2$ es relativamente compacto. Los resultados de Alexander dieron origen a una nueva línea de investigación dentro la holomorfía en dimensión infinita. Se trataba de caracterizar los subconjuntos acotantes de un espacio de Banach. Con este propósito, Dineen publicó en 1972 su artículo "Unbounded holomorphic functions on a Banach space", en el que demostraba el siguiente teorema:

**Teorema 3.1 (Dineen [30])** *Si $E$ es un espacio de Banach complejo y $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en $E'$ tal que $\|\varphi_k\| = 1$ para todo $k$ y $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^k$ es una función holomorfa en $E$ que no está acotada en $B_E(0,R)$ si $R > 1$.*

Posteriormente, en 1975, Josefson y Nissenzweig demostraron que en el dual de todo espacio de Banach de dimensión infinita siempre existe una sucesión $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ con las propiedades requeridas en el teorema 3.1. Por tanto, el teorema de Dineen es válido en todo espacio de Banach complejo de dimensión infinita. Este hecho lleva a introducir la siguiente definición.

**Definición 3.2** Si $E$ es un espacio de Banach, real o complejo, de dimensión infinita, se define

$$\mathcal{A}_b(E) = \{f \in \mathcal{A}(E) : f \text{ está acotada en cada acotado de } E\}.$$

Los elementos de $\mathcal{A}_b(E)$ se denominan funciones analíticas de tipo acotado. De forma análoga escribiremos $\mathcal{H}_b(E)$ cuando queramos referirnos exclusivamente a funciones holomorfas de tipo acotado.

Numerosos resultados sobre funciones holomorfas en espacios de Banach sólo son válidos para aquellas funciones que están acotadas en los subconjuntos acotados. Veamos dos ejemplos.

**Teorema 3.3 (Aron y Berner [12])** *Si $E$ es un espacio de Banach complejo, toda función $f \in \mathcal{H}_b(E)$ admite una extensión $\widehat{f} \in \mathcal{H}_b(E'')$. Si $E = c_0$, una función $f$ holomorfa en $c_0$ se puede extender a una función holomorfa en $\ell_\infty$ si y sólo si $f$ es tipo acotado.*

**Teorema 3.4 (Carando, Lassalle y Zalduendo [23])** *Sea $K$ un espacio topológico compacto. Sea $f \in \mathcal{H}_b(\mathcal{C}(K))$. Los dos enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$f$ es ortogonalmente aditiva, es decir, si $x$ e $y$ son funciones de $\mathcal{C}(K)$ tales que $x(t) \cdot y(t) = 0$ para todo $t \in K$, entonces $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*
2. *Existe una medida de Borel $\mu$ en $K$ y existe $h \in \mathcal{H}_b(\mathcal{C}(K), L^1(\mu))$ tal que*

$$f(x) = \int_K h(x)(t)\, d\mu(t)$$

*para todo elemento $x \in \mathcal{C}(K)$.*

En cuanto a la estructura topológica del conjunto de funciones de tipo acotado, en el espacio $\mathcal{H}_b(E)$ se considera habitualmente la topología generada por la sucesión de seminormas

$$f \in \mathcal{H}_b(E) \mapsto \|f\|_{B_E(0,n)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Con ella, $\mathcal{H}_b(E)$ es un álgebra de Fréchet que ha sido ampliamente estudiada. El dual de $\mathcal{H}_b(E)$ fue determinado por Isidro [38], mientras que el espectro de $\mathcal{H}_b(E)$, es decir, el conjunto de funcionales multiplicativos continuos no nulos en $\mathcal{H}_b(E)$, ha sido objeto de estudio de numerosos autores (véanse, por ejemplo, [13], [14] o [65]).

## 3.2. Lineabilidad de $\mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E)$

En esta sección nos plantearnos el estudio del conjunto $\mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E)$, tanto en el caso real como en el caso complejo. Sabemos que este conjunto es distinto del vacío, pero podemos preguntarnos si está formado sólo de unas cuantas funciones especiales o, por el contrario, es, en cierto sentido, un conjunto "grande". Esta cuestión nos conduce a considerar el concepto de *lineabilidad* de un conjunto de funciones.

**Definición 3.5** Supongamos que $\mathcal{F}$ es un subconjunto de un espacio vectorial topológico $Y$.

1. $\mathcal{F}$ es *lineable* si existe un subespacio vectorial de dimensión infinita $X \subset Y$ tal que $X \setminus \{0\} \subset \mathcal{F}$.

2. $\mathcal{F}$ es *espaciable* si existe un subespacio $X$ cerrado en $Y$ tal que $X\setminus\{0\}\subset\mathcal{F}$.

3. $\mathcal{F}$ es *densamente lineable* si existe un subespacio $X$ denso en $Y$ tal que $X\setminus\{0\}\subset\mathcal{F}$.

El primer resultado sobre lineabilidad de conjuntos de funciones fue obtenido en 1966 por Gurariy [35], al demostrar que existe un espacio de dimensión infinita $X\subset\mathcal{C}([0,1])$ con la propiedad de que cada $f\in X\setminus\{0\}$ es una función no derivable en ningún punto de $[0,1]$. De hecho, fue el mismo Gurariy quien introdujo los términos de *lineable* o *espaciable*. A continuación recogemos algunos ejemplos de conjuntos de funciones *lineables*.

**Ejemplo 3.6**

1. El conjunto

$$\mathcal{F}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ es derivable pero no es monótona en ningún intervalo}\}$$

   es *lineable* (Aron, Gurariy y Seoane Sepúlveda [15]).

2. El conjunto

$$\mathcal{F}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ es continua pero no es derivable en ningún punto}\}$$

   es *densamente lineable* (Aron, García Pacheco, Pérez García y Seoane Sepúlveda [18]).

3. Llamamos $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ al conjunto de funciones continuas en $\mathbb{R}$ que tienen periodo $2\pi$. Si $S$ es un subconjunto de $[-\pi,\pi]$ de medida cero, se define

$$\mathcal{F}=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})\mid \text{La serie de Fourier de } f \text{ diverge en cada punto de } S\}.$$

   Entonces existe un álgebra infinitamente generada $A$ de funciones de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $A\setminus\{0\}\subset\mathcal{F}$ (Aron, Pérez García y Seoane Sepúlveda [16]).

4. Sea

$$\mathcal{F}=\{f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\mid f(U)=\mathbb{C} \text{ para todo abierto no vacío } U\subset\mathbb{C}\}.$$

   Entonces existe un álgebra infinitamente generada $A$ de funciones en $\mathbb{C}$ tal que $A\setminus\{0\}\subset\mathcal{F}$ (Aron y Seoane Sepúlveda [17]).

5. Si $1\le p<q$, entonces $L^p[0,1]\setminus L^q[0,1]$ es *lineable*. Si $p>q\ge 1$, entonces $L^p(\mathbb{R})\setminus L^q(\mathbb{R})$ y $\ell_p\setminus\ell_q$ son conjuntos *lineables* (Muñoz Fernández, Palmberg, Puglisi y Seoane Sepúlveda [55]).

En este capítulo vamos a demostrar que si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita (real o complejo), el conjunto $\mathcal{A}(E)\setminus\mathcal{A}_b(E)$ de funciones analíticas que no son de tipo acotado es *lineable*, *espaciable* y *densamente lineable*.

**Teorema 3.7** *Si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe un álgebra infinitamente generada $A \subset \mathcal{A}(E)$ tal que*

$$A \backslash \{0\} \subset \mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E).$$

*Como consecuencia, $\mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E)$ es un conjunto* lineable.

**Demostración.** Por el teorema 1.29 existe un sistema biortogonal $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $E$ tal que $\|\varphi_k\| = 1$ para todo $k$, $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$. Sea $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números primos. Para cada $j \in \mathbb{N}$, la función

$$f_j = \sum_{k=1}^{\infty} (a_j \cdot \varphi_k)^k$$

es analítica en $E$ por la proposición 1.27. Llamamos $A$ al álgebra generada por la sucesión $(f_j)_{j=1}^{\infty}$.

Veamos cómo toda función de $A$ distinta de cero es de tipo no acotado. Todo elemento no nulo de $A$ puede escribirse como

$$h = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \prod_{j\in J_n} f_j^{p_{n,j}},$$

donde $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, $J_n$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $p_{n,j} \in \mathbb{N}$ para cada $n$ y cada $j$. Podemos suponer que si $n, m \in \{1, \ldots, N\}$ y $n \neq m$, entonces o bien $J_n \neq J_m$ o bien $J_n = J_m$ y existe $j \in J_n = J_m$ tal que $p_{n,j} \neq p_{m,j}$. Es decir, si $\lambda_n \prod_{j\in J_n} f_j^{p_{n,j}}$ y $\lambda_m \prod_{j\in J_m} f_j^{p_{m,j}}$ son dos sumandos distintos de $h$, entonces o bien no están formados por el producto de las mismas funciones, o bien sí están formados por el producto de las mismas funciones pero con exponentes diferentes.

A continuación evaluamos las funciones $f_j$ y $h$ en $x_k$:

$$f_j(x_k) = (a_j)^k$$

y

$$h(x_k) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \prod_{j\in J_n} (f_j(x_k))^{p_{n,j}} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \prod_{j\in J_n} \left(a_j^k\right)^{p_{n,j}} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left(\prod_{j\in J_n} a_j^{p_{n,j}}\right)^k.$$

Como los números $a_j$ son primos, los productos $\prod_{j\in J_1} a_j^{p_{1,j}}$,..., $\prod_{j\in J_N} a_j^{p_{N,j}}$ son todos distintos, luego existe $m \in \{1, \ldots, N\}$ tal que

$$\prod_{j\in J_m} a_j^{p_{m,j}} > \prod_{j\in J_n} a_j^{p_{n,j}} \qquad \text{para todo } n \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{m\}.$$

Entonces

$$\frac{h(x_k)}{\left(\prod_{j\in J_m} a_j^{p_{m,j}}\right)^k} = \lambda_m + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \lambda_n \left(\frac{\prod_{j\in J_n} a_j^{p_{n,j}}}{\prod_{j\in J_m} a_j^{p_{m,j}}}\right)^k,$$

con lo cual

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h(x_k)}{\left(\prod_{j\in J_m} a_j^{p_{m,j}}\right)^k} = \lambda_m \neq 0.$$

Además, cada $a_j$ es mayor que 1, por lo que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\prod_{j\in J_m} a_j^{p_{m,j}}\right)^k = \infty$$

y, por tanto, $\lim_{k\to\infty} |h(x_k)| = \infty$. Dado que $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, deducimos que $h \in \mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E)$.

Para concluir la demostración, vamos a probar que $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ es un conjunto algebraicamente independiente. Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \prod_{j\in J_n} f_j^{p_{n,j}} = 0,$$

donde $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \mathbb{K}$, cada $J_n$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $p_{n,j} \in \mathbb{N}$ para todos los $n$ y $j$. De nuevo, suponemos que si $n, m \in \{1, \ldots, N\}$ y $n \neq m$, entonces o bien $J_n \neq J_m$ o bien $J_n = J_m$ y existe $j \in J_n = J_m$ tal que $p_{n,j} \neq p_{m,j}$. Si algún $\lambda_n$ fuera distinto de cero, entonces sería posible repetir el mismo razonamiento que acabamos de utilizar para demostrar que $h \in \mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E)$ y obtendríamos que

$$0 = \left|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \prod_{j\in J_n} (f_j(x_k))^{p_{n,j}}\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Esto es imposible, luego $\lambda_n = 0$ para todo $n$. Por tanto, $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ es un sistema algebraicamente independiente de generadores de $A$. ■

La siguiente proposición será utilizada para demostrar que $\mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E)$ es un conjunto *espaciable* y *densamente lineable*.

**Proposición 3.8** *Sea $E$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema biortogonal en $E$ tal que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$ y $R = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$ (véase el teorema 1.29). Si $P$ y $Q$ son polinomios en $E$, $P \neq 0$ y*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^k,$$

*entonces $P \cdot f + Q \in \mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E)$.*

**Demostración.** Podemos escribir el polinomio $P$ como

$$P = P_m + \cdots + P_0,$$

donde cada $P_k$ pertenece a $\mathcal{P}\left({}^kE\right)$ y $P_m \neq 0$. Sea $w \in E$ tal que $\|w\| = 1$ y $P_m(w) \neq 0$. Sea $L$ la aplicación $m-$lineal simétrica continua asociada a $P_m$. La función

$$R(t) = |P_m(w)|\, t^m - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \|L\| \cdot (2R)^{m-k} \cdot t^k - \sum_{k=0}^{m-1} \|P_k\| \cdot (t+2R)^k$$

es un polinomio no nulo de grado $m$ en $\mathbb{R}$. Si $m = 0$, entonces $R(t) = |P_m(w)|$ para todo $t$. Si $m \geq 1$, entonces $R(t) \underset{t\to\infty}{\to} \infty$. En cualquier caso, existe $t > 0$ tal que $R(t) \geq |P_m(w)|$, es decir,

$$|P_m(w)|\, t^m - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \|L\| \cdot (2R)^{m-k} \cdot t^k - \sum_{k=0}^{m-1} \|P_k\| \cdot (t+2R)^k \geq |P_m(w)|\,. \quad (3.1)$$

Sea $z = tw$. Vamos a demostrar que $|P(x)| \geq |P_m(w)|$ para todo $x \in \overline{B}_E(z, 2R)$. Supongamos que $x \in E$ y $\|x - z\| \leq 2R$. Por la proposición 1.2 se cumple que

$$P_m(x) = P_m(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} L(\underbrace{z, \ldots, z}_{k \text{ términos}}, \underbrace{x-z, \ldots, x-z}_{m-k \text{ términos}}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} |P_m(x)| &\geq |P_m(z)| - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \|L\| \cdot \|z\|^k \cdot \|x-z\|^{m-k} \\ &\geq |P_m(w)|\, t^m - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \|L\| \cdot t^k \cdot (2R)^{m-k}\,. \end{aligned}$$

Además, como $\|x\| \leq \|z\| + 2R = t + 2R$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{m-1} |P_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \|P_k\| \cdot \|x\|^k \leq \sum_{k=0}^{m-1} \|P_k\| \cdot (t+2R)^k\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |P(x)| &\geq |P_m(x)| - \sum_{k=0}^{m-1} |P_k(x)| \\ &\geq |P_m(w)|\, t^m - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \|L\| \cdot t^k \cdot (2R)^{m-k} - \sum_{k=0}^{m-1} \|P_k\| \cdot (t+2R)^k\,. \end{aligned}$$

La propiedad (3.1) implica entonces que $|P(x)| \geq |P_m(w)|$ para todo $x \in \overline{B}_E(z, 2R)$.

Por la proposición 1.27, la función $f$ es analítica en $E$. Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\varphi_j(z)\right| < \frac{1}{2}$ si $j \geq j_0$. Como $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un sistema biortogonal,

$$f(2x_j + z) = \left(2 + \varphi_j(z)\right)^j + \sum_{k=1,\, k\neq j}^{\infty} (\varphi_k(z))^k\,.$$

Si $j \geq j_0$, entonces

$$\begin{aligned} |f(2x_j + z)| &\geq \left|2 + \varphi_j(z)\right|^j - \sum_{k=1,\ k\neq j}^{\infty} |\varphi_k(z)|^k \\ &\geq \left(2 - |\varphi_j(z)|\right)^j - \sum_{k=1}^{j_0-1} |\varphi_k(z)|^k - \sum_{k=j_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^j - \sum_{k=1}^{j_0-1} |\varphi_k(z)|^k - 1. \end{aligned}$$

Estas desigualdades implican que

$$\lim_{j\to\infty} |f(2x_j + z)| = \infty.$$

Como $2x_j + z \in \overline{B}_E(z, 2R)$ para cada $j$, tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} |(P \cdot f)(2x_j + z)| \geq |P_m(w)| \cdot \lim_{j\to\infty} |f(2x_j + z)| = \infty$$

(recordemos que $P_m(w) \neq 0$). Por tanto,

$$\|P \cdot f\|_{B_E(z,2R)} = \infty.$$

Finalmente, como $Q$ es un polinomio, se cumple que $\|Q\|_{B_E(z,2R)} < \infty$. Entonces

$$\|P \cdot f + Q\|_{B_E(z,2R)} \geq \|P \cdot f\|_{B_E(z,2R)} - \|Q\|_{B_E(z,2R)} = \infty$$

y, así, $P \cdot f + Q \in \mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E)$. ■

**Teorema 3.9** *Si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe un subespacio de dimensión infinita $X \subset \mathcal{A}(E)$ que es cerrado respecto a la topología $\tau_0$ y tiene la propiedad de que*

$$X \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E).$$

**Demostración.** Sea $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema biortogonal con las propiedades dadas en el teorema 1.29. Sea

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^k \in \mathcal{A}(E).$$

El conjunto

$$X = \{\psi \cdot f : \psi \in E'\}$$

es un subespacio de $\mathcal{A}(E)$ y, por la proposición 3.8, tiene la propiedad de que $X \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}(E) \setminus \mathcal{A}_b(E)$.

Supongamos que $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ y $\lambda_1 \varphi_1 \cdot f + \cdots + \lambda_m \varphi_m \cdot f = 0$. Evaluamos esta suma en los puntos $x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \varphi_1 (x_1) \cdot f (x_1) + \cdots + \lambda_m \varphi_m (x_1) \cdot f (x_1) = \lambda_1 \varphi_1 (x_1) \cdot \varphi_1 (x_1) = \lambda_1, \\ &\vdots \\ 0 &= \lambda_1 \varphi_1 (x_m) \cdot f (x_m) + \cdots + \lambda_m \varphi_m (x_m) \cdot f (x_m) = \lambda_m \varphi_m (x_m) \varphi_m (x_m) = \lambda_m. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\varphi_k \cdot f : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente y, en consecuencia, $X$ tiene dimensión infinita.

Supongamos que $(\psi_i \cdot f)_i$ es una red en $X$ que converge a una función $g \in \mathcal{A}(E)$ respecto a la topología $\tau_0$. Vamos a demostrar que entonces $(\psi_i)_i$ es una red convergente en $(E', \tau_0)$. Sea $K$ un subconjunto compacto de $E$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $f(x_1) = 1$, existe $r > 0$ tal que $|f(x)| > \frac{1}{2}$ para todo $x \in B_E(x_1, r)$. También existe $s > 0$ tal que $sK \subset B_E(0, r)$, con lo cual

$$L = x_1 + sK \subset B_E(x_1, r).$$

Dado que $(\psi_i \cdot f)_i$ es una red de Cauchy en $(\mathcal{A}(E), \tau_0)$ y que $\{x_1\}$ y $L$ son conjuntos compactos, existe un índice $i_0$ tal que si $i, j \geq i_0$, entonces

$$\left|\psi_i (x_1) - \psi_j (x_1)\right| = \left|\psi_i (x_1) \cdot f (x_1) - \psi_j (x_1) \cdot f (x_1)\right| < \frac{\varepsilon \cdot s}{2}$$

y

$$\left\|\psi_i \cdot f - \psi_j \cdot f\right\|_L < \frac{\varepsilon \cdot s}{4}.$$

Utilizamos que $|f(x)| > \frac{1}{2}$ para todo $x \in L$:

$$\left\|\psi_i - \psi_j\right\|_L \cdot \frac{1}{2} \leq \left\|\psi_i \cdot f - \psi_j \cdot f\right\|_L < \frac{\varepsilon \cdot s}{4},$$

es decir,

$$\left\|\psi_i - \psi_j\right\|_L < \frac{\varepsilon \cdot s}{2}$$

para todos los $i, j \geq i_0$.

Sean $i, j \geq i_0$ y $x \in K$.

$$\begin{aligned} \left|\psi_i (x) - \psi_j (x)\right| &= \frac{1}{s} \left|\psi_i (sx) - \psi_j (sx)\right| \\ &\leq \frac{1}{s} \left|\psi_i (x_1 + sx) - \psi_j (x_1 + sx)\right| + \frac{1}{s} \left|\psi_i (x_1) - \psi_j (x_1)\right| \\ &\leq \frac{1}{s} \left\|\psi_i - \psi_j\right\|_L + \frac{1}{s} \left|\psi_i (x_1) - \psi_j (x_1)\right| \\ &< \frac{1}{s} \cdot \frac{\varepsilon \cdot s}{2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\varepsilon \cdot s}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $\left\|\psi_i - \psi_j\right\|_K \leq \varepsilon$ si $i, j \geq i_0$. Esto muestra que $(\psi_i)_i$ es una red de Cauchy en $(E', \tau_0)$. Como este espacio es completo, existe $\psi = \lim_i \psi_i \in E'$. Entonces

$$g = \lim_i (\psi_i \cdot f) = \psi \cdot f \in \mathcal{F}$$

y, por tanto, $X$ es un subespacio cerrado para la topología $\tau_0$. ■

En 1974, Aron demostró en [9] que si $E$ es un espacio complejo, el conjunto $\mathcal{H}(E) \backslash \mathcal{H}_b(E)$ es denso en $(\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$. A continuación se demuestra que para todo espacio de Banach $E$, real o complejo, $\mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E)$ es incluso *densamente lineable.* Para ello son necesarios varios resultados previos.

**Proposición 3.10** *Si $E$ es un espacio de Banach y $\mathcal{B}_n$ es una base algebraica de $\mathcal{P}(^nE)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es un conjunto linealmente independiente de polinomios en $E$.*

**Demostración.** Supongamos que

$$(\lambda_{1,1}P_{1,1} + \cdots + \lambda_{1,k_1}P_{1,k_1}) + \cdots + (\lambda_{m,1}P_{m,1} + \cdots + \lambda_{m,k_m}P_{m,k_m}) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} P_{1,1}, \ldots, P_{1,k_1} &\in \mathcal{B}_1; \qquad \ldots \qquad P_{m,1}, \ldots, P_{m,k_m} \in \mathcal{B}_m; \\ \lambda_{n,k_j} &\in \mathbb{K} \text{ para todo } n \text{ y todo } j. \end{aligned}$$

Se sabe que $\mathcal{P}(E)$ es suma directa de los subespacios $\{\mathcal{P}(^nE) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ (Mujica [53], proposición 2.9). Por tanto,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1}P_{1,1} + \cdots + \lambda_{1,k_1}P_{1,k_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_{m,1}P_{m,1} + \cdots + \lambda_{m,k_m}P_{m,k_m} &= 0. \end{aligned}$$

Como cada $\mathcal{B}_n$ es cada un conjunto linealmente independiente, se deduce que $\lambda_{n,k_j} = 0$ para todo $n$ y todo $j$. ■

**Teorema 3.11 (Aron y Schottenloher [11])** *Si $E$ es un espacio de Banach y $n \leq m$, entonces $\mathcal{P}(^nE)$ es un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE)$.*

**Teorema 3.12 (Halbeisen y Hungerbühler [36])** *Si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita y $\mathcal{B}$ es una base algebraica de $E$, entonces $E$ y $\mathcal{B}$ tienen el mismo cardinal.*

**Teorema 3.13** *Si $E$ es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe un subespacio denso $X \subset (\mathcal{A}(E), \tau_0)$ tal que*

$$X \backslash \{0\} \subset \mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E).$$

*Si $E$ es un espacio complejo, entonces $X$ también es denso en $(\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$.*

**Demostración.** Si $S$ es un conjunto, el símbolo $|S|$ representará el cardinal de $S$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{B}_m = \{P_{m,i} : i \in I_m\}$$

una base algebraica de $\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$ tal que $\|P_{m,i}\| = 1$ para todo $i$; $I_m$ representa un conjunto de índices.

El espacio

$$\bigoplus\nolimits_{n=0}^{m}\mathcal{P}\left({}^{n}E\right) = \left\{\sum_{n=0}^{m} P_n : P_0 \in \mathcal{P}\left({}^{0}E\right), \ldots, P_m \in \mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right\}$$

tiene el mismo cardinal que $\mathcal{B}_m$. En efecto, si $n \leq m$, el teorema de Aron y Schottenloher garantiza que $\mathcal{P}\left({}^{n}E\right)$ es un subespacio de $\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$, luego $\left|\mathcal{P}\left({}^{n}E\right)\right| \leq \left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right|$. Por tanto,

$$\left|\bigoplus\nolimits_{n=0}^{m}\mathcal{P}\left({}^{n}E\right)\right| = \left|\mathcal{P}\left({}^{0}E\right)\right| \times \cdots \times \left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right| \leq \left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right|^{m+1}.$$

Se cumple también que $\left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right|^{m+1} = \left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right|$ porque $\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$ es un conjunto infinito, luego

$$\left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right| \leq \left|\bigoplus\nolimits_{n=0}^{m}\mathcal{P}\left({}^{n}E\right)\right| \leq \left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right|^{m+1} = \left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right|.$$

Deducimos entonces que $\left|\bigoplus\nolimits_{n=0}^{m}\mathcal{P}\left({}^{n}E\right)\right| = \left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right|$. Además, $\left|\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)\right| = \left|\mathcal{B}_m\right|$ porque $\mathcal{P}\left({}^{m}E\right)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita (teorema 3.12). Por tanto,

$$\left|\bigoplus\nolimits_{n=0}^{m}\mathcal{P}\left({}^{n}E\right)\right| = \left|\mathcal{B}_m\right|.$$

A cada elemento de $\bigoplus\nolimits_{n=0}^{m}\mathcal{P}\left({}^{n}E\right)$ le corresponde entonces un índice de $I_m$:

$$\bigoplus_{n=0}^{m}\mathcal{P}\left({}^{n}E\right) = \left\{Q_{m,i} : i \in I_m\right\}.$$

Se define $X$ como

$$X = span\left\{P_{m,i} \cdot f + Q_{m,i} : m \in \mathbb{N},\ i \in I_m\right\},$$

donde $f$ es la función analítica en $E$ introducida en el enunciado de la proposición 3.8. Sea

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(P_{m_k,i_k} \cdot f + Q_{m_k,i_k}\right) \in X \backslash \{0\},$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$; $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$; $i_1 \in I_{m_1}, \ldots, i_n \in I_{m_n}$. Podemos suponer que si $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $m_j = m_k$ e $i_j = i_k$, entonces $j = k$. Por la proposición 3.10, $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_m$ es un conjunto linealmente independiente, luego $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{m_k,i_k}$ es distinto de cero. Por la proposición 3.8,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(P_{m_k,i_k} \cdot f + Q_{m_k,i_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{m_k,i_k}\right) \cdot f + \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_{m_k,i_k}\right) \in \mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E),$$

lo que prueba que $X\backslash\{0\} \subset \mathcal{A}(E) \backslash \mathcal{A}_b(E)$.

Para demostrar la densidad de $X$ respecto a la topología $\tau_0$, tomamos una función $h \in \mathcal{A}(E)$, un subconjunto compacto $K$ de $E$ y un número $\varepsilon > 0$. Por las proposiciones 1.20 y 1.22, el espacio $\mathcal{P}(E)$ de todos los polinomios es denso en $(\mathcal{A}(E), \tau_0)$, luego existe $P_h \in \mathcal{P}(E)$ tal que

$$\|P_h - h\|_K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Llamamos $m \in \mathbb{N}$ al grado del polinomio $P_h$, es decir, $P_h \in \bigoplus_{n=0}^{m} \mathcal{P}(^nE)$.

Como $K$ es un subconjunto compacto de $E$, existe $t > 0$ tal que $tK \subset B_E(0,1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \sup_{i \in I_m} \|P_{m,i} \cdot f\|_K &\leq \frac{\|f\|_K}{t^m} \cdot \sup_{i \in I_m} \|P_{m,i}\|_{tK} \\ &\leq \frac{\|f\|_K}{t^m} \cdot \sup_{i \in I_m} \|P_{m,i}\|_{B_E(0,1)} \\ &= \frac{\|f\|_K}{t^m} < \infty \end{aligned}$$

(recordemos que $\|P_{m,i}\| = 1$ para todo $m$ y todo $i$). Como $\sup_{i \in I_m} \|P_{m,i} \cdot f\|_K < \infty$, existe $s > 0$ tal que

$$s \cdot \|P_{m,i} \cdot f\|_K < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $i \in I_m$. Como $\frac{1}{s} P_h$ pertenece a $\bigoplus_{n=0}^{m} \mathcal{P}(^nE)$, existe $i \in I_m$ tal que

$$Q_{m,i} = \frac{1}{s} P_h.$$

Entonces $s \cdot (P_{m,i} \cdot f + Q_{m,i})$ pertenece a $X$ y

$$\begin{aligned} \|s \cdot (P_{m,i} \cdot f + Q_{m,i}) - h\|_K &\leq s \|P_{m,i} \cdot f\|_K + \|sQ_{m,i} - h\|_K \\ &= s \|P_{m,i} \cdot f\|_K + \|P_h - h\|_K < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $X$ es denso en $(\mathcal{A}(E), \tau_0)$.

Supongamos ahora que $E$ es un espacio de Banach complejo y veamos cómo $X$ es denso en $\mathcal{H}(E)$ respecto a la topología $\tau_\delta$. Tomamos una función $h \in \mathcal{H}(E)$, una seminorma $p$ continua en $(\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$ y $\varepsilon > 0$. Según vimos en la proposición 1.20, la serie de Taylor de $h$ en cero converge a $h$ respecto a $\tau_\delta$, luego existe $P_h \in \mathcal{P}(E)$ tal que

$$p(P_h - h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De nuevo, llamamos $m \in \mathbb{N}$ al grado del polinomio $P_h$.

Si $K$ es un subconjunto compacto de $E$, existe $t > 0$ tal que $tK \subset B_E(0,1)$. Como vimos antes,

$$\sup_{i \in I_m} \|P_{m,i} \cdot f\|_K \leq \frac{\|f\|_K}{t^m} < \infty.$$

Esto demuestra que el conjunto $\{P_{m,i} \cdot f : i \in I_m\}$ está acotado respecto a $\tau_0$ y, por tanto, respecto a $\tau_\delta$ (véase la proposición 1.18). Por ello,

$$\sup_{i \in I_m} p\left(P_{m,i} \cdot f\right) < \infty,$$

luego existe $s > 0$ tal que

$$s \cdot p\left(P_{m,i} \cdot f\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $i \in I_m$. Como $\frac{1}{s} P_h$ pertenece a $\bigoplus_{n=0}^{m} \mathcal{P}\left({}^n E\right)$, existe $i \in I_m$ tal que

$$Q_{m,i} = \frac{1}{s} P_h.$$

Entonces $s \cdot \left(P_{m,i} \cdot f + Q_{m,i}\right)$ pertenece a $X$ y

$$\begin{aligned} p\left(s \cdot \left(P_{m,i} \cdot f + Q_{m,i}\right) - h\right) &\leq s \cdot p\left(P_{m,i} \cdot f\right) + p\left(s Q_{m,i} - h\right) \\ &= s \cdot p\left(P_{m,i} \cdot f\right) + p\left(P_h - h\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $X$ es denso en $\left(\mathcal{H}\left(E\right), \tau_\delta\right)$. ■

# Capítulo 4

# Representación de la topología $\tau_\delta$ como límite inductivo

## 4.1. Los espacios $LF$

Recordemos que si $U$ es un abierto de un espacio localmente convexo complejo $E$, $\mathcal{H}(U)$ con la topología $\tau_\delta$ es el límite inductivo de los espacios $\mathcal{H}_\mathcal{V}(U)$ cuando $\mathcal{V}$ recorre la colección de todos los recubrimientos abiertos, numerables y crecientes de $U$:

$$(\mathcal{H}(U), \tau_\delta) = \varinjlim_{\mathcal{V}} \mathcal{H}_\mathcal{V}(U) \tag{4.1}$$

(definiciones 1.13 y 1.14). Cuando $E$ es un espacio complejo, cada $\mathcal{H}_\mathcal{V}(U)$ es un espacio de Fréchet, es decir, es metrizable y completo (Dineen [31, proposición 3.18]). Los límites inductivos numerables de una sucesión creciente de espacios de Fréchet se denominan espacios $LF$ y tienen algunas propiedades muy interesantes, como se enuncia a continuación.

**Definición 4.1** Sea $X = \varinjlim_{i\in I} X_i$ el límite inductivo de una familia $\{X_i : i \in I\}$ subespacios localmente convexos.

1. El límite es estricto si se cumple la siguiente propiedad: si $X_i \subset X_j$, entonces $X_i$ tiene la topología heredada de $X_j$.

2. El límite es regular si para todo acotado $B$ en $X$ existe $i \in I$ tal que $B$ está contenido y es acotado en $X_i$.

**Proposición 4.2** *Sea $X = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ un límite inductivo estricto de una sucesión creciente de espacios localmente convexos Hausdorff. Entonces:*

1. *El espacio $X$ también es Hausdorff.*

2. *Cada $X_n$ tiene la topología heredada de $X$.*

3. *Si cada $X_n$ es cerrado en $X_{n+1}$, entonces $X = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un límite regular.*

4. *Si cada $X_n$ es completo, entonces $X$ también es completo.*

*La demostración de estos resultados puede verse en* [62, págs. 58 – 59].

Estas buenas propiedades de los espacios $LF$ llevaron a Ansemil, Aron y Ponte a preguntarse si $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ es un límite inductivo numerable de subespacios $\mathcal{H}_\mathcal{V}(U)$. Sin embargo, en 2009, estos autores demostraron que siempre que $E$ sea un espacio con base de Schauder, el límite inductivo que aparece en (4.1) no es numerable.

**Teorema 4.3 (Ansemil, Aron y Ponte [5])** *Sea $E$ un espacio de Banach complejo de dimensión infinita con una base de Schauder. Si $(\mathcal{V}_k)_{k=1}^\infty$ es una sucesión de recubrimientos de $E$ y cada $\mathcal{V}_k$ está formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos, entonces $\mathcal{H}(E) \neq \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}(E)$.*

En este capítulo se extenderá el teorema 4.3 al caso del espacio $(\mathcal{A}(U, F), \tau_\delta)$, donde $U$ será un abierto de un espacio normado, real o complejo, de dimensión infinita, no necesariamente con base de Schauder; como siempre, $F$ será un espacio de Banach arbitrario. Además, se obtendrán otros resultados relativos a la *lineabilidad* de conjuntos de funciones analíticas.

## 4.2. Representación de $\tau_\delta$ cuando $E$ es un espacio normado

Las proposiciones 4.4 y 4.5 serán utilizadas en la demostración del resultado principal del capítulo.

**Proposición 4.4** *Supongamos que $E$ es un espacio normado y $U$ es un abierto de $E$ que contiene al cero. Entonces existen dos sucesiones $(y_k)_{k=1}^\infty \subset U$ y $(R_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^+$ con las propiedades siguientes:*

1. *$(R_k)_{k=0}^\infty$ es creciente,*

2. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $y_k \in B_E(0, R_k)$ e $y_k \notin \overline{B}_E(0, R_{k-1})$,*

3. *$U \subset \bigcup_{k=0}^\infty B_E(0, R_k)$.*

**Demostración.** Sea

$$s = \sup\{\|y\| : x \in U\}.$$

Como $U$ es un conjunto abierto, se puede comprobar que $\|y\| < s$ para todo $y \in U$. Sea $0 < R_0 < s$. Entonces existe un vector $y_1 \in U$ tal que

$$R_0 < \|y_1\| < s.$$

Si $s < \infty$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y_1\| < s - \frac{1}{m_1} < s$$

y definimos $R_1 = s - \frac{1}{m_1}$. Si $s = \infty$, elegimos $R_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $\|y_1\| < R_1$. En ambos casos tenemos que $R_0 < R_1 < s$, luego existe $y_2 \in U$ tal que

$$R_1 < \|y_2\| < s.$$

De nuevo, si $s < \infty$, existe $m_2 \in \mathbb{N}$, $m_2 > m_1$, tal que

$$\|y_2\| < s - \frac{1}{m_2} < s$$

y definimos $R_2 = s - \frac{1}{m_2}$. Si $s = \infty$, elegimos $R_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_2\| < R_2$. La definición de las sucesiones $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(R_k)_{k=0}^{\infty}$ continúa por recurrencia.

Es evidente que $y_k \in B_E(0, R_k)$, $y_k \notin \overline{B}_E(0, R_{k-1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y que $\lim_{k\to\infty} R_k = s$. Además, si $x \in U$, entonces $\|x\| < s$. Por tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\| < R_k$, es decir, $x \in B_E(0, R_k)$. Esto demuestra que $U \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} B_E(0, R_k)$. ■

**Proposición 4.5** *Sea $E$ un espacio normado de dimensión infinita. Si $B_E(0, R)$ y $B_E(x_0, r)$ son dos bolas disjuntas en $E$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones analíticas en $E$ con las propiedades siguientes:*

1. $\|f_n\|_{B_E(0,R)} < \varepsilon$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\|h\|_{B_E(x_0,r)} = \infty$ *para todo* $h \in span\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}$.
3. $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*
4. *La sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es localmente acotada, es decir, para cada $x \in U$ existe un entorno $V$ de $x$ contenido en $U$ tal que* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_V < \infty$.
5. *Si $E$ es un espacio real y $\widetilde{E}$ denota su complejificado, cada función $f_n$ admite además una extensión holomorfa $\widetilde{f}_n \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$ tal que* $\left\|\widetilde{f}_n\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R)} < \varepsilon$.

**Demostración.** Supondremos primero que $E$ es un espacio de Banach. Por el teorema de Hahn – Banach, existe $\varphi_0 \in E'$ con la propiedad de que $\|\varphi_0\| = 1$ y $\varphi_0(x_0) = \|x_0\|$. Sea $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema biortogonal en $E$ con las propiedades dadas en el teorema 1.30. Sea $C > \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|$.

Como $x_0 \notin \overline{B}_E(0, R)$, entonces $\frac{R}{\|x_0\|} < 1$, luego existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{R}{\|x_0\|}\right)^{\alpha} < \frac{r}{CR},$$

es decir,

$$\frac{C \cdot R^{\alpha+1}}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} < 1.$$

Llamemos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a una sucesión estrictamente creciente de números positivos tales que

$$\frac{C \cdot R^{\alpha+1}}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} < \cdots < \frac{1}{a_n} < \cdots < \frac{1}{a_1} < 1.$$

Esto significa que

$$a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} \cdot R^{\alpha+1} < 1 < a_n \tag{4.2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a definir una sucesión de funciones analíticas $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ a partir de las cuales obtendremos las $f_n$ que buscamos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$g_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} \cdot \varphi_0^{\alpha} \cdot \varphi_k \right)^k$$

es analítica en $E$ porque $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$ (véase la proposición 1.27). Por la propiedad (4.2), la función $g_n$ está acotada en $B_E(0, R)$:

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{B_E(0,R)} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} \cdot (\|\varphi_0\| R)^{\alpha} \cdot \|\varphi_k\| R \right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} \cdot R^{\alpha+1} \right)^k < \infty. \end{aligned}$$

Si $E$ es un espacio real, consideramos la extensión compleja $\widetilde{\varphi}_k$ de cada $\varphi_k$, definida en la proposición 1.25. Los funcionales complejos cumplen que $\lim_{k\to\infty} \widetilde{\varphi}_k(\widetilde{x}) = 0$ para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{E}$ y $\|\widetilde{\varphi}_k\| = \|\varphi_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\widetilde{g}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} \cdot \widetilde{\varphi}_0^{\alpha} \cdot \widetilde{\varphi}_k \right)^k$$

es holomorfa en $\widetilde{E}$ y es una extensión de $g_n$. Además, $\widetilde{g}_n$ está acotada en $B_{\widetilde{E}}(0, R)$:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{g}_n\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R)} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} \cdot (\|\widetilde{\varphi}_0\| R)^{\alpha} \cdot \|\widetilde{\varphi}_k\| R \right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} \cdot R^{\alpha+1} \right)^k < \infty. \end{aligned}$$

Veamos cómo todo elemento $h \in span\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ que sea distinto de cero cumple que $\|h\|_{B_E(x_0,r)} = \infty$. Sea

$$h = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n g_n.$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ y al menos $\lambda_N \neq 0$. A continuación se evalúa cada función $g_n$ en los puntos $x_0 + \frac{r}{C}x_k \in B_E(x_0, r)$ con $k \geq 1$. Como $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un sistema biortogonal y $\varphi_k(x_0) = 0 = \varphi_0(x_k)$ si $k \geq 1$,

$$g_n\left(x_0 + \frac{r}{C}x_k\right) = \left(a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} \cdot (\varphi_0(x_0))^{\alpha} \cdot \varphi_k\left(\frac{r}{C}x_k\right)\right)^k = a_n^k.$$

Por tanto,

$$h\left(x_0 + \frac{r}{C}x_k\right) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n^k.$$

Como $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, se tiene que

$$0 < \frac{a_n}{a_N} < 1$$

para cada $1 \leq n \leq N-1$. Entonces

$$\frac{h\left(x_0 + \frac{r}{C}x_k\right)}{a_N^k} = \lambda_N + \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n \left(\frac{a_n}{a_N}\right)^k \underset{k\to\infty}{\to} \lambda_N \neq 0.$$

El número $a_N$ es mayor que 1, luego $\lim_{k\to\infty} a_N^k = \infty$. Por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \left|h\left(x_0 + \frac{r}{C}x_k\right)\right| = \infty,$$

lo que implica que $\|h\|_{B_E(x_0,r)} = \infty$.

La sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es linealmente independiente. En efecto, supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ y $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n g_n = 0$. Con el mismo argumento que se ha utilizado para probar que $\|h\|_{B_E(x_0,r)} = \infty$, se deduce que

$$0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n g_n\left(x_0 + \frac{r}{C}x_k\right)}{a_N^k} \underset{k\to\infty}{\to} \lambda_N,$$

luego $\lambda_N = 0$ y $\sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n g_n = 0$. Si se repite este proceso, se llega a que $\lambda_n = 0$ para todo $n$.

Veamos cómo la sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es localmente acotada. Sea $K$ un subconjunto compacto de $E$. Como $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x$, el teorema de Banach – Steinhaus implica que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\| < \infty$ y, por ello, $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a cero uniformemente en $K$ (Limaye [44, corolario 9.2]). Por tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_k\|_K \leq \frac{R^{\alpha+1}}{2\|\varphi_0\|_K^{\alpha} + 1}$$

para todo $k > k_0$. Por la propiedad (4.2), tenemos que

$$a_n \frac{C}{\|x_0\|^{\alpha} \cdot r} < \frac{1}{R^{\alpha+1}}$$

para todo $n$. Así podemos deducir las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_K &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{R^{\alpha+1}} \cdot \|\varphi_0\|_K^{\alpha} \cdot \|\varphi_k\|_K \right)^k \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_0} \left( \frac{\|\varphi_0\|_K^{\alpha}}{R^{\alpha+1}} \cdot \|\varphi_k\|_K \right)^k + \sum_{k>k_0} \left( \frac{\|\varphi_0\|_K^{\alpha}}{R^{\alpha+1}} \cdot \frac{R^{\alpha+1}}{2\|\varphi_0\|_K^{\alpha}+1} \right)^k \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_0} \left( \frac{\|\varphi_0\|_K^{\alpha}}{R^{\alpha+1}} \cdot \|\varphi_k\|_K \right)^k + \sum_{k>k_0} \frac{1}{2^k} < \infty.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada respecto a la topología compacto – abierta y, por ello, es localmente acotada (véase la proposición 1.18). Para terminar, es suficiente considerar las funciones

$$f_n = \frac{\varepsilon}{\|\widetilde{g}_n\|_{B_{\widehat{E}}(0,R)}+1} g_n \qquad \text{y} \qquad \widetilde{f}_n = \frac{\varepsilon}{\|\widetilde{g}_n\|_{B_{\widehat{E}}(0,R)}+1} \widetilde{g}_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta forma queda completada la demostración cuando $E$ es un espacio de Banach.

Si $E$ es un espacio normado no completo, consideramos las siguientes bolas en la compleción $\widehat{E}$ de $E$:

$$B_{\widehat{E}}(0,R) = \left\{ x \in \widehat{E} : \|x\| < R \right\} \qquad \text{y} \qquad B_{\widehat{E}}(x_0,r) = \left\{ x \in \widehat{E} : \|x - x_0\| < r \right\}.$$

Como $E$ es denso en $\widehat{E}$ y $B_E(0,R) \cap B_E(x_0,r) = \emptyset$ por hipótesis, se cumple también que $B_{\widehat{E}}(0,R) \cap B_{\widehat{E}}(x_0,r) = \emptyset$. Entonces existe una sucesión $(\widehat{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones analíticas en $\widehat{E}$ con las propiedades del enunciado referidas a las bolas $B_{\widehat{E}}(0,R)$ y $B_{\widehat{E}}(x_0,r)$. Finalmente, se toma $f_n = \widehat{f}_n|_E \in \mathcal{A}(E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

**Teorema 4.6** *Sea $U$ un abierto de un espacio normado $E$ de dimensión infinita y sea $F$ un espacio de Banach. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{V}_k = (V_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ un recubrimiento de $U$ abierto, numerable y creciente. En estas condiciones existe un espacio vectorial de dimensión infinita $X$ tal que*

$$X \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}(U,F) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U,F).$$

**Demostración.** Una parte de la prueba está basada en la que se hace en [5] en el caso de espacios de Banach complejos con base de Schauder. Supondremos primero que $E$ es un espacio real y que $F = \mathbb{R}$. Por medio de una traslación, podemos suponer también que $0 \in U$. Por la proposición 4.4, existen dos sucesiones $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset U$ y $(R_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ tales que

$$y_k \in B_E(0,R_k) \qquad \text{e} \qquad y_k \notin \overline{B}_E(0,R_{k-1})$$

para cada $k \geq 1$. Además, $(R_k)_{k=0}^{\infty}$ es creciente y $U \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} B_E(0, R_k)$. Entonces el conjunto

$$\widetilde{U} = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{\widetilde{E}}(0, R_k)$$

es abierto en $\widetilde{E}$ y contiene a $U \times \{0\}$, pues

$$U \times \{0\} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} B_E(0, R_k) \times \{0\} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{\widetilde{E}}(0, R_k) = \widetilde{U}.$$

La familia de abiertos $\mathcal{V}_1 = (V_{1,j})_{j=1}^{\infty}$ recubre $U$, por lo que existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_1 \in V_{1,j_1}$. Entonces existe $r_1 > 0$ tal que

$$B_E(y_1, r_1) \subset V_{1,j_1} \cap B_E(0, R_1) \quad \text{y} \quad B_E(y_1, r_1) \cap B_E(0, R_0) = \emptyset.$$

Por la proposición 4.5, existe una sucesión linealmente independiente de funciones $(f_{1,n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(E)$, cada $f_{1,n}$ admite una extensión holomorfa $\widetilde{f_{1,n}} \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$, la familia $(f_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ es localmente acotada y se cumple que

$$\left\| \widetilde{f_{1,n}} \right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_0)} < \frac{1}{2} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

y

$$\|h\|_{B_E(y_1,r_1)} = \infty \qquad \text{para cada } h \in \mathit{span}\,\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{0\}.$$

La familia $\mathcal{V}_2 = (V_{2,j})_{j=1}^{\infty}$ también recubre $U$, luego existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $y_2 \in V_{2,j_2}$. Como $(f_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión localmente acotada, existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_E(y_2, r_2) \subset V_{2,j_2} \cap B_E(0, R_2), \quad B_E(y_2, r_2) \cap B_E(0, R_1) = \emptyset$$

y

$$\|f_{1,n}\|_{B_E(y_2,r_2)} < \infty \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De nuevo, existe una sucesión linealmente independiente de funciones $(f_{2,n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(E)$, con extensiones holomorfas $(\widetilde{f_{2,n}})_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$, tales que $(f_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ es localmente acotada,

$$\left\| \widetilde{f_{2,n}} \right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_1)} < \frac{1}{2^2} \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

y

$$\|h\|_{B_E(y_2,r_2)} = \infty \qquad \text{para todo } h \in \mathit{span}\,\{f_{2,n}\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{0\}.$$

Si repetimos este proceso, obtenemos cuatro sucesiones, $(j_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $(r_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$, $(f_{k,n})_{k,n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(E)$ y $(\widetilde{f_{k,n}})_{k,n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}(\widetilde{E})$, con las propiedades siguientes:

(a) $B_E(y_k, r_k) \subset V_{k,j_k} \cap B_E(0, R_k)$.

(b) $B_E(y_k, r_k) \cap B_E(0, R_{k-1}) = \emptyset$.

(c) $\|f_{j,n}\|_{B_E(y_k,r_k)} < \infty$ para todo $j < k$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\left\|\widetilde{f}_{k,n}\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_{k-1})} < \frac{1}{2^k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(e) $\|h\|_{B_E(y_k,r_k)} = \infty$ para todo $h \in span\,\{f_{k,n} : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}$.

(f) $\widetilde{f}_{k,n}$ es una extensión de $f_{k,n}$ a $\widetilde{E}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $K$ es un subconjunto compacto de $\widetilde{U}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B_{\widetilde{E}}(0, R_k)$. Por la propiedad (d),

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \left\|\widetilde{f}_{j,n}\right\|_K \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \left\|\widetilde{f}_{j,n}\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_k)} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \left\|\widetilde{f}_{j,n}\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_{j-1})} \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty.$$

Por tanto, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{f}_{j,n}$ converge uniformemente en los compactos de $\widetilde{U}$. Como cada $\widetilde{f}_{j,n}$ es una función holomorfa en $\widetilde{E}$, la suma

$$\widetilde{g}_n = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{f}_{j,n}$$

es holomorfa en $\widetilde{U}$. En consecuencia, la función

$$g_n = \sum_{j=1}^{\infty} f_{j,n}$$

es analítica en $U$. Llamamos $X$ al espacio vectorial generado por $(g_n)_{n=1}^{\infty}$.

Veamos cómo $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión linealmente independiente. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_N g_N = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \|\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_N g_N\|_{B_E(y_1,r_1)} \\ &\geq \|\lambda_1 f_{1,1} + \cdots + \lambda_N f_{1,N}\|_{B_E(y_1,r_1)} - \sum_{j=2}^{\infty} \left( \|\lambda_1 f_{j,1}\|_{B_E(y_1,r_1)} + \cdots + \|\lambda_N f_{j,N}\|_{B_E(y_1,r_1)} \right). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 f_{1,1} + \cdots + \lambda_N f_{1,N}\|_{B_E(y_1,r_1)} &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \left( \|\lambda_1 f_{j,1}\|_{B_E(y_1,r_1)} + \cdots + \|\lambda_N f_{j,N}\|_{B_E(y_1,r_1)} \right) \\ &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \left( \left\|\lambda_1 \widetilde{f}_{j,1}\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_{j-1})} + \cdots + \left\|\lambda_N \widetilde{f}_{j,N}\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_{j-1})} \right) \\ &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{|\lambda_1|}{2^j} + \cdots + \frac{|\lambda_N|}{2^j} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Si aplicamos la propiedad (e) con $k=1$, deducimos que $\lambda_1 f_{1,1}+\cdots+\lambda_N f_{1,N}=0$. Entonces $\lambda_1=\cdots=\lambda_N=0$ porque $f_{1,1},\ldots,f_{1,N}$ son linealmente independientes. Esto demuestra que la sucesión de funciones $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es también linealmente independiente y, por tanto, $X$ tiene dimensión infinita.

A continuación vamos a probar que

$$X\backslash\{0\}\subset\mathcal{A}(U)\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U).$$

Sea $h=\lambda_1 g_1+\cdots+\lambda_N g_N\in X\backslash\{0\}$, donde al menos $\lambda_N$ es distinto de cero. Sea $k\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\|h\|_{V_{k,j_k}} &\geq \|h\|_{B_E(y_k,r_k)}\\ &\geq \|\lambda_1 f_{k,1}+\cdots+\lambda_N f_{k,N}\|_{B_E(y_k,r_k)}\\ &\quad-\sum_{j=1}^{k-1}\left(\|\lambda_1 f_{j,1}\|_{B_E(y_k,r_k)}+\cdots+\|\lambda_N f_{j,N}\|_{B_E(y_k,r_k)}\right)\\ &\quad-\sum_{j=k+1}^{\infty}\left(\|\lambda_1 f_{j,1}\|_{B_E(y_k,r_k)}+\cdots+\|\lambda_N f_{j,N}\|_{B_E(y_k,r_k)}\right).\end{aligned}$$

Si $j\geq k+1$, por la propiedad (a) y por ser $R_{j-1}\geq R_k$, se cumple que $B_E(y_k,r_k)\subset B_E(0,R_{j-1})$, luego

$$B_E(y_k,r_k)\times\{0\}\subset B_{\widetilde{E}}(0,R_{j-1}).$$

Por la propiedad (d),

$$\begin{aligned}\|h\|_{V_{k,j_k}} &\geq \|\lambda_1 f_{k,1}+\cdots+\lambda_N f_{k,N}\|_{B_E(y_k,r_k)}\\ &\quad-\sum_{j=1}^{k-1}\left(\|\lambda_1 f_{j,1}\|_{B_E(y_k,r_k)}+\cdots+\|\lambda_N f_{j,N}\|_{B_E(y_k,r_k)}\right)\\ &\quad-\sum_{j=k+1}^{\infty}\left(\frac{|\lambda_1|}{2^j}+\cdots+\frac{|\lambda_N|}{2^j}\right).\end{aligned}$$

Como $f_{k,1},\ldots,f_{k,N}$ son linealmente independientes, sabemos que $\lambda_1 f_{k,1}+\cdots+\lambda_N f_{k,N}\neq 0$. Por la propiedad (e),

$$\|\lambda_1 f_{k,1}+\cdots+\lambda_N f_{k,N}\|_{B_E(y_k,r_k)}=\infty.$$

Por (c), si $1\leq j\leq k-1$, entonces

$$\|f_{j,1}\|_{B_E(y_k,r_k)}<\infty,\ldots,\|f_{j,N}\|_{B_E(y_k,r_k)}<\infty.$$

Por tanto, $\|h\|_{V_{k,j_k}}=\infty$, con lo cual $h$ no pertenece a $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U)$. Como esto se cumple para cada $k\in\mathbb{N}$, deducimos que

$$h\in\mathcal{A}(U)\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U).$$

De esta forma se completa la demostración cuando $E$ es un espacio real y $F = \mathbb{R}$.

Si $E$ es un espacio complejo, entonces no es necesario que considerar las extensiones holomorfas de las funciones $g_n$, pues se obtiene directamente que $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}(U)$. Si $F$ es un espacio de Banach, sólo hay que fijar un vector $y \in F$ de norma 1 y definir $X$ como el subespacio de $\mathcal{A}(U, F)$ generado por la sucesión $(g_n \cdot y)_{n=1}^{\infty}$. ■

**Teorema 4.7** *Supongamos que $U$ es un abierto de un espacio normado $E$ y que $F$ es un espacio de Banach. Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$E$ tiene dimensión finita.*

2. *Existe un recubrimiento $\mathcal{V}$ de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos con la propiedad de que $(\mathcal{A}(U, F), \tau_\delta) = \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F) = (\mathcal{A}(U, F), \tau_0)$.*

3. *Existe una sucesión $(\mathcal{V}_k)_{k=1}^{\infty}$ de recubrimientos de $U$, cada $\mathcal{V}_k$ está formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos y $(\mathcal{A}(U, F), \tau_\delta) = \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U, F)$.*

**Demostración.** (1)⇒(2) Supongamos que $E = \mathbb{K}^m$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, llamamos $K_j$ al siguiente subconjunto compacto de $U$:

$$K_j = \left\{ x \in U : dist\left(x, \mathbb{K}^m \backslash U\right) \geq \frac{1}{j} \right\} \cap \{x \in U : \|x\| \leq j\}.$$

Sea $V_j$ el interior de $K_j$. Entonces $\mathcal{V} = (V_j)_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos. Si $f \in \mathcal{A}(U, F)$ y $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|f\|_{V_j} \leq \|f\|_{K_j} < \infty.$$

Esto prueba que $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$ y, por tanto, $\mathcal{A}(U, F) = \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$. La topología de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$ es la de la convergencia uniforme en los conjuntos $V_j$ o, lo que es igual, en los compactos $K_j$. Como cada compacto de $U$ está contenido en un $K_j$, se deduce que la topología de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F)$ es la topología compacto – abierta. Además, la aplicación identidad es continua entre los siguientes espacios:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F) \xrightarrow{id} (\mathcal{A}(U, F), \tau_\delta) \xrightarrow{id} (\mathcal{A}(U, F), \tau_0) = \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F).$$

Se deduce entonces que $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U, F) = (\mathcal{A}(U, F), \tau_\delta) = (\mathcal{A}(U, F), \tau_0)$.

(2)⇒(3) Se toma $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}$ para todo $k$.

(3)⇒(1) Por el teorema 4.6, si $E$ es un espacio de dimensión infinita, entonces

$$\mathcal{A}(U, F) \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U, F)$$

y, por tanto, $(\mathcal{A}(U, F), \tau_\delta) \neq \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U, F)$. ■

**Teorema 4.8** *Supongamos que $U$ es un subconjunto abierto de un espacio normado de dimensión infinita y que $F$ es un espacio de Banach. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{V}_k = (V_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ un recubrimiento de $U$ abierto, numerable y creciente. En estas condiciones, el conjunto*

$$\mathcal{A}(U,F) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U,F)$$

*es denso en $(\mathcal{A}(U,F), \tau)$ para toda topología localmente convexa $\tau$ en $\mathcal{A}(U,F)$.*

**Demostración.** Para cada par de números de naturales $k$ y $j$ se define

$$W_{k,j} = V_{1,j} \cap V_{2,j} \cap \cdots \cap V_{k,j},$$

que es un subconjunto abierto de $U$. Supongamos que $x \in U$. Como $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k$ son recubrimientos de $U$, existen $j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}$ tales que $x \in V_{1,j_1}, \ldots, x \in V_{k,j_k}$, por lo que

$$x \in V_{1,j_1} \cap \cdots \cap V_{k,j_k} \subset V_{1,\text{máx}\{j_1,\ldots,j_k\}} \cap \cdots \cap V_{k,\text{máx}\{j_1,\ldots,j_k\}} = W_{k,\text{máx}\{j_1,\ldots,j_k\}}.$$

Además, si $j_1 < j_2$, entonces $W_{k,j_1} \subset W_{k,j_2}$. Por tanto, $\mathcal{W}_k = (W_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos.

Si $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U,F)$, entonces $\|f\|_{V_{k,j}} < \infty$ para cada $j$. Como $W_{k,j} \subset V_{k,j}$, también tenemos que $\|f\|_{W_{k,j}} < \infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$, luego $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U,F)$. Por tanto, $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U,F) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U,F)$ y

$$\mathcal{A}(U,F) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U,F) \subset \mathcal{A}(U,F) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U,F).$$

Vamos a demostrar que $\mathcal{A}(U,F) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U,F)$ es denso en $(\mathcal{A}(U,F), \tau)$, con lo cual $\mathcal{A}(U,F) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(U,F)$ también lo será.

Tomamos una aplicación $h \in \mathcal{A}(U,F)$, una seminorma $p$ continua en $(\mathcal{A}(U,F), \tau)$ y un número $\varepsilon > 0$. Podemos suponer que $h$ no pertenece a $\mathcal{A}(U,F) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U,F)$. Esto significa que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $h \in \mathcal{A}_{\mathcal{W}_{k_1}}(U,F)$, es decir, $\|h\|_{W_{k_1,j}} < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Si $k \geq k_1$, entonces $W_{k,j} \subset W_{k_1,j}$, por lo que $\|h\|_{W_{k,j}} < \infty$ para todo $k \geq k_1$ y todo $j \in \mathbb{N}$.

Por el teorema 4.6 sabemos que

$$\mathcal{A}(U,F) \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U,F),$$

luego existen $g \in \mathcal{A}(U,F)$ y $(j_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tales que $\|g\|_{W_{k,j_k}} = \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Si $k \geq k_1$,

$$\left\| \frac{\varepsilon}{p(g)+1} g + h \right\|_{W_{k,j_k}} \geq \frac{\varepsilon}{p(g)+1} \|g\|_{W_{k,j_k}} - \|h\|_{W_{k,,j_k}} = \infty.$$

Si $k < k_1$, entonces $W_{k,j_{k_1}} \supset W_{k_1,j_{k_1}}$, luego

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\varepsilon}{p(g)+1}g+h\right\|_{W_{k,j_{k_1}}} &\geq \left\|\frac{\varepsilon}{p(g)+1}g+h\right\|_{W_{k_1,j_{k_1}}} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{p(g)+1}\|g\|_{W_{k_1,j_{k_1}}} - \|h\|_{W_{k_1,j_{k_1}}} = \infty.\end{aligned}$$

En cualquier caso, $\frac{\varepsilon}{p(g)+1}g + h \notin \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$h_1 = \frac{\varepsilon}{p(g)+1}g + h \in \mathcal{A}(U) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U).$$

Como $p(h_1 - h) < \varepsilon$, se obtiene que $\mathcal{A}(U,F) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{W}_k}(U,F)$ es un conjunto denso en $(\mathcal{A}(U,F), \tau)$. ■

**Observación 4.9** El teorema 4.8 fue obtenido por Ansemil, Aron y Ponte [5] en el caso concreto de que $E$ sea un espacio de Banach complejo con base de Schauder, $U = E$, $F = \mathbb{C}$ y $\tau = \tau_\delta$.

A continuación mostraremos que, en general, la topología de un subespacio del tipo $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ no coincide con la heredada de $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$, lo que contrasta con las propiedades de los límites inductivos numerables estrictos (proposición 4.2).

**Proposición 4.10** *Supongamos que $E$ y $F$ son espacios de Banach, $E$ tiene dimensión infinita y $U$ es un abierto de $E$. Entonces existe un recubrimiento $\mathcal{V}$ de $U$, formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos, tal que la topología de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ no coincide con la heredada de $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$.*

**Demostración.** Si se utiliza una traslación, se puede suponer que $0 \in U$. Sea $r > 0$ tal que $B_E(0,2r) \subset U \cap B_E(0,1)$. Se toma

$$\mathcal{V} = \{U \cap B_E(0,m) : m \in \mathbb{N}\}.$$

Tomamos un vector $y \in F$ de norma 1. Por el teorema de Josefson – Nissenzweig (teorema 1.28), existe una sucesión $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ en $E'$ tal que $\|\varphi_k\| = \frac{1}{r}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$f_k = (\varphi_k)^k \cdot y \in \mathcal{A}(U,F).$$

Como

$$\|f_k\|_{U \cap B_E(0,m)} < \infty$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$.

Sea $K$ un subconjunto compacto de $E$. Como $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a cero en todo punto, también converge a cero uniformemente en $K$. Esto implica que $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado para la topología compacto – abierta, con lo cual también es acotado para $\tau_\delta$. Sin embargo,

$$\|f_k\|_{U \cap B_E(0,1)} \geq \|f_k\|_{B_E(0,2r)} = (2r\|\varphi_k\|)^k = 2^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

luego $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ no es acotado en la topología de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$. En consecuencia, la topología de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ no coincide con la heredada de $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$. ■

Como se dijo en la proposición 4.2, el hecho de que un límite inductivo $X = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ sea numerable permite, en ocasiones, deducir su regularidad. A pesar de que $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta) = \varinjlim_{\mathcal{V}} \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ no es, en general, un límite numerable, sí es regular cuando el espacio $E$ es metrizable.

**Proposición 4.11** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo metrizable, $U$ es un abierto de $E$ y $F$ es un espacio de Banach. Entonces $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta) = \varinjlim_{\mathcal{V}} \mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$ es un límite inductivo regular.*

**Demostración.** Utilizamos el mismo argumento que presenta Dineen en [31, proposición 3.19] cuando $E$ y $F$ son espacios complejos. Si $B$ es un acotado de $(\mathcal{A}(U,F), \tau_\delta)$, entonces $B$ es localmente acotado por la proposición 1.18. Para todo $x \in U$ existe un abierto $V_x$ tal que $x \in V_x \subset U$ y $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{V_x} = C_x < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$V_n = \bigcup \{V_x : x \in U \text{ y } C_x \leq n\}.$$

Entonces $\mathcal{V} = (V_n)_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $U$ abierto, numerable y creciente y $\mathcal{F}$ es acotado en $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}(U,F)$, pues $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{V_n} \leq n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

# Capítulo 5

# Los espacios $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ y $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

## 5.1. Representación de $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right)$ como espacio $LF$

El propósito de este capítulo es poner de manifiesto que los teoremas 4.6, 4.7 y 4.8 del capítulo anterior no son válidos cuando $E$ es un espacio localmente convexo no normado. Los espacios que utilizaremos como ejemplos serán $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dotados de la topología producto. Veremos que si $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ó $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces existe una sucesión $(\mathcal{V}_k)_{k=1}^{\infty}$ de recubrimientos de $E$, cada uno de los cuales está formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos, con la propiedad de que $\mathcal{A}(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}(E)$. En el caso complejo se podrá demostrar incluso que

$$\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right).$$

En esta primera sección se tratará el caso del espacio $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Como es conocido, una función holomorfa en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sólo depende de un número finito de variables:

**Teorema 5.1** *Si $U$ es un abierto equilibrado de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $f \in \mathcal{H}(U)$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $\widehat{f} \in \mathcal{H}(\pi_k(U))$ con la propiedad de que $f = \widehat{f}\circ\pi_k$ en $U$, donde $\pi_k : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^k$ representa la proyección canónica en las $k$ primeras coordenadas (véase Dineen* [31, ejemplo 3.10]*).*

Para cada $k \in \mathbb{N}$, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \pi_k^* : & \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right) & \to & \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) \\ & \widehat{f} & \mapsto & \pi_k^*(\widehat{f}) = \widehat{f}\circ\pi_k \end{array}$$

permite identificar $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)$ con un subespacio de $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, el de las funciones holomorfas que sólo dependen de las $k$ primeras variables. Como es evidente, $\pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right) \subset \pi_n^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^n\right)\right)$ siempre que $k \le n$.

En el teorema 5.3 se aplicará también el siguiente resultado:

**Teorema 5.2 (Ansemil [2])** *Se cumple que*

$$\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \left(\pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right), \tau_0\right).$$

**Teorema 5.3** *Existe una sucesión* $(\mathcal{V}_k)_{k=1}^{\infty}$ *de recubrimientos de* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*, cada uno de los cuales está formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos, con la propiedad de que*

$$\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right).$$

**Demostración.** Sea $k$ un número natural fijo. Para cada $j \in \mathbb{N}$ se define el siguiente subconjunto de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:

$$V_{k,j} = \underbrace{D(0,j) \times \cdots \times D(0,j)}_{k \text{ factores}} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots$$

Aquí, $D(0,j)$ representa el disco abierto en $\mathbb{C}$ con centro 0 y radio $j$. Cada $V_{k,j}$ es abierto en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y

$$V_{k,1} \subset V_{k,2} \subset V_{k,3} \subset \cdots$$

Supongamos que $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si se elige $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > \max\{|z_1|, \ldots, |z_k|\},$$

entonces $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in V_{k,j}$. Es decir, $\mathcal{V}_k = (V_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos.

A continuación vamos a demostrar que $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) = \pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right)$. Sea $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Definimos las aplicaciones

$$T : (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mapsto (z_1, \ldots, z_k, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

y

$$\widehat{f} : (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mapsto \widehat{f}(z_1, \ldots, z_k) = f(z_1, \ldots, z_k, 0, 0, \ldots).$$

Como $T$ es lineal y continua y $\widehat{f} = f \circ T$, se deduce que $\widehat{f}$ es holomorfa en $\mathbb{C}^k$. Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in V_{k,1}$. Si se elige

$$y = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ elementos}}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots),$$

entonces $x + \lambda y \in V_{k,1}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. La función

$$h : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto h(\lambda) = f(x + \lambda y)$$

es holomorfa en $\mathbb{C}$ y está acotada. En efecto, como $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, tenemos que

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |h(\lambda)| = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |f(x + \lambda y)| \leq \|f\|_{V_{k,1}} < \infty.$$

Por tanto, $h$ es constante. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} f(x) &= h(0) = h(-1) = f(x-y) \\ &= f(x_1,\ldots,x_k,0,0,\ldots) = \widehat{f}(x_1,\ldots,x_k) = \widehat{f}\circ\pi_k(x). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $f(x) = \widehat{f}\circ\pi_k(x)$ para todo $x \in V_{k,1}$. Por el teorema de identidad 1.5, se deduce que $f = \widehat{f}\circ\pi_k$ en todo $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, es decir, $f \in \pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right)$.

Tomemos ahora una función $g \in \pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right)$ y sea $\widehat{g} \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)$ tal que $g = \widehat{g}\circ\pi_k$. Para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|g\|_{V_{k,j}} &= \sup\left\{\left|g\left((z_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right| : |z_1| < j,\ldots,|z_k| < j\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\widehat{g}(z_1,\ldots,z_k)\right| : |z_1| < j,\ldots,|z_k| < j\right\} \\ &= \|\widehat{g}\|_{\overline{D}(0,j)\times\overset{k}{\smile}\!\!\cdots\times\overline{D}(0,j)} < \infty. \end{aligned}$$

En consecuencia, $g \in \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ y, por tanto, $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) = \pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right)$.

En $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ se considera siempre la topología asociada al recubrimiento $\mathcal{V}_k$, es decir, la definida por la sucesión de seminormas

$$\|f\|_{V_{k,j}} = \left\|\widehat{f}\right\|_{D(0,j)\times\overset{k}{\smile}\!\!\cdots\times D(0,j)} = \left\|\widehat{f}\right\|_{\overline{D}(0,j)\times\overset{k}{\smile}\!\!\cdots\times\overline{D}(0,j)}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$ y cada $f = \widehat{f}\circ\pi_k \in \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. Como todo compacto de $\mathbb{C}^k$ está contenido en uno de la colección $\left\{\overline{D}(0,j)\times\overset{k}{\cdots}\times\overline{D}(0,j) : j \in \mathbb{N}\right\}$, deducimos que

$$\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) = \left(\pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right),\tau_0\right).$$

Por el teorema 5.2,

$$\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right),\tau_\delta\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}}\left(\pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right),\tau_0\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right).$$

Esto concluye la demostración. ∎

**Teorema 5.4** *Consideremos el límite inductivo*

$$\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right),\tau_\delta\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}}\left(\pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right),\tau_0\right),$$

*donde cada $\mathcal{V}_k$ es el recubrimiento de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ introducido en la demostración del teorema 5.3. Entonces:*

1. *$\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right),\tau_\delta\right)$ es un espacio LF.*

2. *El límite inductivo es estricto.*

3. *Cada $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ tiene la topología heredada de $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right),\tau_\delta\right)$.*

*4. El límite inductivo es regular (definición 4.1).*

**Demostración.** 1. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ y $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right), \tau_0\right)$ son espacios de Fréchet (véase Dineen [31, proposición 3.18]).

2. Si $k \leq n$, entonces $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right), \tau_0\right)$ tiene la topología inducida por $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^n\right), \tau_0\right)$. Por tanto, $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) = \left(\pi_k^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^k\right)\right), \tau_0\right)$ tiene la topología heredada de $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_n}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right) = \left(\pi_n^*\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^n\right)\right), \tau_0\right)$.

3. Se deduce directamente de la proposición 4.2.

4. Si $k \leq n$, entonces $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ es cerrado en $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_n}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ porque $\mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ es un espacio completo. Por tanto, se puede aplicar la proposición 4.2 para deducir que el límite inductivo $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ es regular. ■

## 5.2. El espacio $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$

El teorema 5.3 es válido sólo parcialmente en el caso del espacio de funciones analíticas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Como veremos en esta sección, existe una sucesión $(\mathcal{V}_k)_{k=1}^{\infty}$ de recubrimientos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, cada uno de los cuales está formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos, tales que

$$\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right).$$

Sin embargo, no se podrán garantizar que $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right)$ sea el límite inductivo de los subespacios $\left\{\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) : k \in \mathbb{N}\right\}$.

En primer lugar es preciso extender el teorema 5.1 a funciones analíticas definidas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Para ello utilizaremos el siguiente resultado clásico, cuya demostración puede verse, por ejemplo, en el artículo de Bochnak y Siciak [22].

**Proposición 5.5** *Si $f \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, entonces existen un abierto $U \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y una función $F \in \mathcal{H}(U)$ tales que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \subset U$ y $F(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Como en el caso complejo, $\pi_k : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^k$ representará la proyección canónica en las $k$ primeras coordenadas y $\pi_k^*$ será la aplicación

$$\pi_k^* : \widehat{f} \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right) \mapsto \widehat{f} \circ \pi_k \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right).$$

**Proposición 5.6** *Si $f \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $\widehat{f} \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)$ tales que $f = \widehat{f} \circ \pi_k$. Por tanto,*

$$\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right).$$

**Demostración.** Por la proposición 5.5 existe un abierto $U \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \subset U$, y existe una función $F \in \mathcal{H}(U)$ con la propiedad de que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Como $0 \in U$, existen $m \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$V = \underbrace{D(0,\varepsilon) \times \cdots \times D(0,\varepsilon)}_{m \text{ factores}} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \subset U.$$

Como el abierto $V$ es equilibrado, por el teorema 5.1 existen $k \in \mathbb{N}$ y $\widehat{F} \in \mathcal{H}(\pi_k(V))$ para los cuales $F = \widehat{F} \circ \pi_k$ en $V$.

La función $\widehat{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{f}(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$$

es analítica en $\mathbb{R}^k$. Sea

$$A = \underbrace{(-\varepsilon,\varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon,\varepsilon)}_{m \text{ factores}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in A$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in V$ y $(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \in V$, luego

$$\begin{aligned} f\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) &= F\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \widehat{F}(x_1, \ldots, x_k) \\ &= F(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \\ &= f(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \\ &= \widehat{f}(x_1, \ldots, x_k) \\ &= \left(\widehat{f} \circ \pi_k\right)\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right). \end{aligned}$$

De esta forma hemos comprobado que las funciones analíticas $f$ y $\widehat{f} \circ \pi_k$ coinciden en el abierto $A$. Por tanto, $f = \widehat{f} \circ \pi_k$ en todo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ■

**Proposición 5.7** *Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un recubrimiento $\mathcal{V}_k$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos, tal que $\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. Además, $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$.*

**Demostración.** Para cada par de números naturales $k$ y $j$, sea $V_{k,j}$ el siguiente subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$V_{k,j} = \underbrace{(-j,j) \times \cdots \times (-j,j)}_{k \text{ factores}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

Entonces $\mathcal{V}_k = (V_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos.

Si $f \in \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$, existe $\widehat{f} \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)$ tal que $f = \widehat{f} \circ \pi_k$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \|f\|_{V_{k,j}} &= \sup\left\{\left|f\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right| : |x_1| < j, \ldots, |x_k| < j\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\widehat{f}(x_1, \ldots, x_k)\right| : |x_1| < j, \ldots, |x_k| < j\right\} \\ &= \left\|\widehat{f}\right\|_{[-j,j] \times \overset{k}{\cdots} \times [-j,j]} < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, lo que muestra que $\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. Por la proposición 5.6,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right) = \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right),$$

luego $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. ■

**Observación 5.8** A diferencia de lo que sucedía en el caso de $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$, no es cierto que $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ coincida con $\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. Por ejemplo, la función

$$f : (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto sen\,(x_2)$$

pertenece a $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ porque es analítica y acotada en todo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sin embargo, $f$ depende de la variable $x_2$, por lo que $f \notin \pi_1^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}\right)\right)$.

## 5.3. La topología $\tau_\delta^*$

**Definición 5.9** Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{V}_k$ el recubrimiento de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definido en la proposición 5.7. Se llamará $\tau_\delta^*$ a la topología inductiva en $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ definida por la sucesión de subespacios $\left\{\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) : k \in \mathbb{N}\right\}$:

$$\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta^*\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right).$$

Recordemos que la topología de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ está definida por la sucesión de seminormas

$$f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \mapsto \|f\|_{V_{k,j}} = \sup\left\{\left|f\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right| : |x_1| < j, \ldots, |x_k| < j\right\}$$

cuando $j$ recorre $\mathbb{N}$.

**Proposición 5.10** *Se cumple que* $\tau_\delta \leq \tau_\delta^*$ *en* $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$.

**Demostración.** $\tau_\delta$ es la topología localmente convexa más fina tal que la inclusión $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \hookrightarrow \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right)$ es continua para cada recubrimiento $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos. Por su parte, $\tau_\delta^*$ es la topología localmente convexa más fina tal que $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \hookrightarrow \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta^*\right)$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$. Como cada $\mathcal{V}_k$ es un recubrimiento abierto, numerable y creciente, se deduce que $\tau_\delta \leq \tau_\delta^*$. ■

**Teorema 5.11** *El límite inductivo* $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta^*\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ *no es estricto.*

**Demostración.** Vamos a demostrar que la topología natural del espacio $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ no coincide con la inducida por $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_2}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. La seminorma

$$f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \mapsto \|f\|_{V_{1,1}} = \|f\|_{(-1,1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots}$$

es continua para la topología natural de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. Si también fuese continua para la topología inducida por $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_2}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, existirían $C>0$ y $j \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|f\|_{(-1,1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots} \leq C\,\|f\|_{(-j,j)\times(-j,j)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots} \tag{5.1}$$

para toda $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $C\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} < 1$. La función

$$h : (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto \frac{\left(\frac{1}{2j}x_2\right)^{2m}}{1+\left(\frac{1}{2j}x_2\right)^{2m}}$$

es analítica y acotada en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, luego $h \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. Por una parte,

$$\|h\|_{(-1,1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots} = \sup_{x_2\in\mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{2j}x_2\right)^{2m}}{1+\left(\frac{1}{2j}x_2\right)^{2m}} = 1.$$

Por otra parte,

$$\|h\|_{(-j,j)\times(-j,j)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots} = \sup_{x_2\in(-j,j)} \frac{\left(\frac{1}{2j}x_2\right)^{2m}}{1+\left(\frac{1}{2j}x_2\right)^{2m}} \leq \sup_{x_2\in(-j,j)} \left(\frac{1}{2j}x_2\right)^{2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}.$$

Por tanto,

$$\|h\|_{(-1,1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots} = 1 > C\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = C\,\|h\|_{(-j,j)\times(-j,j)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots}$$

Esto contradice la desigualdad (5.1). Se deduce entonces que la seminorma

$$f \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \mapsto \|f\|_{V_{1,1}}$$

no es continua para la topología inducida por $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_2}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. ■

## 5.4. La topología $\tau_\ell$

En la proposición 5.6 se demostró que $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. A pesar de ello, vamos a mostrar que

$$\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta\right) \neq \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right),$$

lo que contrasta con el resultado de Ansemil sobre $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ que se enunciaba en el teorema 5.2.

**Definición 5.12** Se llamará $\tau_\ell$ a la topología inductiva en $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ definida por la sucesión de subespacios $\left\{\left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right) : k \in \mathbb{N}\right\}$:

$$\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right).$$

**Teorema 5.13** *El límite inductivo*

$$\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right)$$

*es estricto y regular. Además, para todo* $k \in \mathbb{N}$, $\left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right)$ *tiene la topología heredada de* $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right)$.

**Demostración.** Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $(f_\alpha)$ es una red en $\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. Para cada índice $\alpha$ existe una función $\widehat{f_\alpha}$ en $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)$ con la propiedad de que $f_\alpha = \widehat{f_\alpha} \circ \pi_k$. Sea

$$g_\alpha : (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mapsto \widehat{f_\alpha}(x_1, \ldots, x_k).$$

Entonces

$$\begin{array}{lll} & f_\alpha \to 0 \text{ en } \left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right) & \Leftrightarrow \ \widehat{f_\alpha} \to 0 \text{ en } \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right), \tau_0\right) \\ \Leftrightarrow & g_\alpha \to 0 \text{ en } \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{k+1}\right), \tau_0\right) & \Leftrightarrow \ f_\alpha \to 0 \text{ en } \left(\pi_{k+1}^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{k+1}\right)\right), \tau_0\right). \end{array}$$

Por tanto, $\left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right)$ tiene la topología heredada de $\left(\pi_{k+1}^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{k+1}\right)\right), \tau_0\right)$. Por inducción se obtiene que el límite inductivo es estricto. Si se aplica la proposición 4.2, se obtiene que cada subespacio $\left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right)$ tiene la topología heredada de $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right)$.

Para demostrar que el límite es regular se aplicará de nuevo la proposición 4.2. Hay que comprobar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$ es cerrado en $\pi_{k+1}^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{k+1}\right)\right)$ para la topología $\tau_0$. Para ello se toma una red $(f_\alpha)$ en $\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$ convergente a una función $f \in \pi_{k+1}^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{k+1}\right)\right)$ respecto a la topología $\tau_0$. Para cada índice $\alpha$ existe una función $\widehat{f_\alpha}$ en $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)$ con la propiedad de que $f_\alpha = \widehat{f_\alpha} \circ \pi_k$. La función definida por

$$\widehat{f}(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$$

es analítica en $\mathbb{R}^k$ y para todo $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se cumple que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_\alpha f_\alpha(x) = \lim_\alpha \widehat{f_\alpha}(x_1, \ldots, x_k) \\ &= \lim_\alpha f_\alpha(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \\ &= f(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \\ &= \widehat{f}(x_1, \ldots, x_k) = \widehat{f} \circ \pi_k(x). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f = \widehat{f} \circ \pi_k \in \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right).$$

Esto demuestra que $\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$ es cerrado en $\pi_{k+1}^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{k+1}\right)\right)$ para la topología $\tau_0$. Por la proposición 4.2, el límite inductivo que define a la topología $\tau_\ell$ es regular. ■

**Teorema 5.14** *Se cumple que* $\tau_\delta \leq \tau_\delta^* < \tau_\ell$ *en* $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$.

**Demostración.** En la proposición 5.10 se ha demostrado que $\tau_\delta \leq \tau_\delta^*$. A continuación se demostrará que $\tau_\delta^* \leq \tau_\ell$. Sea $k$ un número natural fijo. Sea $(f_\alpha)$ una red de funciones convergente a cero en $\left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right)$. Para cada índice $\alpha$ existe $\widehat{f_\alpha} \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)$ tal que $f_\alpha = \widehat{f_\alpha} \circ \pi_k$ y $(\widehat{f_\alpha})$ converge a cero uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^k$. Si $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \|f_\alpha\|_{V_{k,j}} &= \sup\left\{\left|f_\alpha\left((x_n)_{n=1}^\infty\right)\right| : |x_1| < j, \ldots, |x_k| < j\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\widehat{f_\alpha}\left(x_1, \ldots, x_k\right)\right| : |x_1| < j, \ldots, |x_k| < j\right\} \\ &= \left\|\widehat{f_\alpha}\right\|_{[-j,j]^k}. \end{aligned}$$

El conjunto $[-j, j]^k$ es compacto en $\mathbb{R}^k$, por lo que

$$\|f_\alpha\|_{V_{k,j}} = \left\|\widehat{f_\alpha}\right\|_{[-j,j]^k} \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por tanto, $(f_\alpha)$ converge a cero en la topología de $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. Esto muestra que la inclusión $\left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right) \hookrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{V}_k}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ es continua. Se obtiene así que

$$\left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right) \hookrightarrow \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta^*\right)$$

también es continua para todo $k \in \mathbb{N}$. Por ello, $\tau_\delta^* \leq \tau_\ell$.

Sólo falta demostrar que $\tau_\delta^* \neq \tau_\ell$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ se define

$$f_m : (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto sen\left(x_m\right).$$

Como $|f_m(x)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el conjunto $\mathcal{F} = \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$ está contenido y es acotado en $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. La inclusión

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \hookrightarrow \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta^*\right)$$

es continua, luego $\mathcal{F}$ también es acotado para la topología $\tau_\delta^*$.

En la proposición 5.13 se vio que $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\lim}} \left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right)$ es un límite regular. Por ello, si $\mathcal{F}$ fuese acotado para $\tau_\ell$, existiría $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F} \subset \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. Sin embargo, $f_{k+1}$ no pertenece a $\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. Por tanto, $\mathcal{F}$ no es acotado en $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right)$, lo que implica que $\tau_\delta^* \neq \tau_\ell$. ■

Los resultados siguientes serán utilizados para demostrar que las topologías $\tau_0$, $\tau_\delta$, $\tau_\delta^*$ y $\tau_\ell$ coinciden en los espacios de polinomios homogéneos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**Proposición 5.15 (Bochnak y Siciak [21], lema 4)** *Sea* $m \in \mathbb{N}$.

1. *Si* $P \in \mathcal{P}\left({}^m\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$, *entonces existe un único* $\widetilde{P} \in \mathcal{P}\left({}^m\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)\right)$ *tal que* $\widetilde{P}(x) = P(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

*2. Si $U$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $P(U) \subset (-1,1)$, entonces*

$$\widetilde{P}\left(\frac{1}{4e}(U+iU)\right) \subset (-1,1) + i(-1,1).$$

*Por tanto, $\left|\widetilde{P}(z)\right| < (4e)^m \sqrt{2}$ para todo $z \in U + iU$.*

**Proposición 5.16** *Si $m \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{F}$ es un subconjunto equicontinuo de $\mathcal{P}\left({}^m\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F} \subset \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$.*

**Demostración.** Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo, existe un entorno de cero $U$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que si $x \in U$, entonces $|P(x)| < 1$ para todo $P \in \mathcal{F}$. Podemos suponer que $U$ es un conjunto de la forma

$$U = \underbrace{(-\varepsilon,\varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon,\varepsilon)}_{k \text{ veces}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

para ciertos números $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$.

Sea $P \in \mathcal{F}$. Vamos a demostrar que $P = Q \circ \pi_k$, donde $Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ es la aplicación definida como

$$Q(t_1,\ldots,t_k) = P(t_1,\ldots,t_k,0,0,\ldots).$$

Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in U$ y sea

$$y = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k \text{ elementos}}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots.) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

La función

$$h : \lambda \in \mathbb{C} \mapsto h(\lambda) = \widetilde{P}(x + \lambda y)$$

es holomorfa en $\mathbb{C}$ y está acotada. En efecto, si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= (x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}+ax_{k+1},x_{k+2}+ax_{k+2},\ldots) + i(0,\ldots,0,bx_{k+1},bx_{k+2},\ldots) \\ &\in U + iU. \end{aligned}$$

Por la proposición 5.15,

$$|h(\lambda)| = \left|\widetilde{P}(x+\lambda y)\right| < (4e)^m \sqrt{2}.$$

Por tanto, $h$ es constante. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} P(x) &= \widetilde{P}(x) = h(0) = h(-1) = \widetilde{P}(x-y) = P(x-y) \\ &= P(x_1,\ldots,x_k,0,0,\ldots) = Q(x_1,\ldots,x_k) = Q \circ \pi_k(x). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $P(x) = Q \circ \pi_k(x)$ para todo $x \in U$. Por tanto, $P = Q \circ \pi_k$ en todo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es decir, $P \in \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. Se llega así a que $\mathcal{F} \subset \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. ■

**Teorema 5.17 (Mujica [49])** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo metrizable, $m \in \mathbb{N}$ y $\tau_p$ representa la topología de la convergencia puntual en $\mathcal{P}(^m E)$. Entonces $\tau_0$ es la topología localmente convexa más fina en $\mathcal{P}(^m E)$ que coincide con $\tau_p$ en los subconjuntos equicontinuos de $\mathcal{P}(^m E)$.*

Debemos señalar que el teorema 5.17 aparece enunciado en [49] para espacios complejos, aunque en realidad la misma demostración es igualmente válida en espacios reales.

**Teorema 5.18** *Para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\tau_0 = \tau_\delta = \tau_\delta^* = \tau_\ell$ en $\mathcal{P}\left(^m \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$.*

**Demostración.** Por el teorema 5.14 se sabe que $\tau_0 \leq \tau_\delta \leq \tau_\delta^* < \tau_\ell$ en $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, luego sólo falta demostrar que $\tau_\ell \leq \tau_0$ en $\mathcal{P}\left(^m \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es un subconjunto equicontinuo de $\mathcal{P}\left(^m \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$. Por la proposición 5.16, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F} \subset \pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$. Como las inclusiones

$$(\mathcal{F}, \tau_0) \hookrightarrow \left(\pi_k^*\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^k\right)\right), \tau_0\right) \hookrightarrow \left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right)$$

son continuas por la definición de $\tau_\ell$, se obtiene que $\tau_\ell \leq \tau_0$ en $\mathcal{F}$ y, por tanto, $\tau_0 = \tau_\ell$ en $\mathcal{F}$.

Por el teorema 5.17 se sabe que $\tau_0 = \tau_p$ en cada subconjunto equicontinuo $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}\left(^m \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$, luego también $\tau_p = \tau_\ell$ en $\mathcal{F}$. El teorema 5.17 implica entonces que $\tau_\ell \leq \tau_0$ en $\mathcal{P}\left(^m \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$ y, por tanto, $\tau_0 = \tau_\ell$ en $\mathcal{P}\left(^m \left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$. ■

**Teorema 5.19** *Los espacios $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta^*\right)$ y $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right)$ no son metrizables.*

**Demostración.** Si $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right)$ fuese metrizable, también lo sería el subespacio $\left(\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)', \tau_\ell\right)$ que, por la proposición 5.18, coincide con $\left(\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)', \tau_\delta\right)$. Por la proposición 2.11, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sería un espacio normado, lo cual no es cierto. La demostración para la topología $\tau_\delta^*$ es totalmente análoga. ■

La proposición siguiente será utilizada para demostrar que si $U$ es un abierto de un espacio real, las topologías que estamos considerando en $\mathcal{A}(U)$ nunca son completas.

**Proposición 5.20** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida en $[-1, 1]$ como $f(t) = |t|$ y extendida a todo $\mathbb{R}$ de forma periódica. Si $E$ es un espacio localmente convexo real y $\varphi \in E' \backslash \{0\}$, entonces $f \circ \varphi$ no es analítica en ningún entorno de cero en $E$.*

**Demostración.** Supongamos que existe una sucesión de polinomios $(P_n)_{n=0}^\infty$ tales que $P_n \in \mathcal{P}(^n E)$ para todo $n$ y la serie $\sum_{n=0}^\infty P_n(x)$ converge a $f(\varphi(x))$ uniformemente en un entorno de cero $V \subset E$.

Sea $a \in E$ tal que $\varphi(a) = 1$. Se toma $\delta > 0$ tal que $\{ta : |t| < \delta\} \subset V$. Si $t \in (-\delta, \delta)$, entonces

$$f(t) = f(\varphi(ta)) = \sum_{n=0}^\infty P_n(ta) = \sum_{n=0}^\infty P_n(a) t^n.$$

Por tanto, la función $f$ sería analítica en $(-\delta, \delta)$, pero eso no es cierto porque $f$ no es derivable en $t = 0$. ■

**Teorema 5.21** *Supongamos que $E$ es un espacio localmente convexo real y que $U$ es un abierto de $E$.*

1. *Sea $\tau_p$ la topología en $\mathcal{A}(U)$ de la convergencia en cada punto. Si $\tau$ es una topología en $\mathcal{A}(U)$ y $\tau_p \leq \tau \leq \tau_\delta$, entonces $(\mathcal{A}(U), \tau)$ no es completo.*
2. *$\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\delta^*\right)$ y $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right), \tau_\ell\right)$ no son completos.*

**Demostración.** 1. Se puede suponer que $0 \in U$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida en la proposición 5.20. Si se llama $S_m$ a la suma parcial de la serie de Fourier de $f$ hasta el orden $m$, entonces cada $S_m$ es una función analítica en $\mathbb{R}$ y $S_m \to f$ uniformemente en todo $\mathbb{R}$ (véase [33, teorema 5.3.1]). Sea $\varphi \in E' \setminus \{0\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, la función

$$g_m : x \in U \mapsto S_m(\varphi(x))$$

es analítica en $U$.

Si $\mathcal{V} = (V_j)_{j=1}^\infty$ es un recubrimiento de $U$ formado por una sucesión creciente de conjuntos abiertos, entonces $(g_m)_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}_\mathcal{V}(U)$, pues

$$\|g_m - g_n\|_{V_j} \leq \|g_m - g_n\|_U \leq \|S_m - S_n\|_\mathbb{R} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces $(g_m)_{m=1}^\infty$ también es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{A}(U), \tau_\delta)$ y, por tanto, en $(\mathcal{A}(U), \tau)$. Si existiese $g \in \mathcal{A}(U)$ tal que $g_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} g$ para la topología $\tau$, entonces también $g_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} g$ para $\tau_p$. Por tanto,

$$f \circ \varphi(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x) = g(x)$$

para todo $x \in U$, luego tendríamos que $g = f \circ \varphi$. Sin embargo, en la proposición 5.20 se vio que $f \circ \varphi$ no es una función analítica.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida en la proposición 5.20. Sea

$$h : (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mapsto f(x_1).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, la aplicación

$$h_m : (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mapsto S_m(x_1)$$

es analítica en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ y $(h_m)_{m=1}^\infty$ converge a $h$ uniformemente en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Entonces $(h_m)_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{R}^\mathbb{N}\right)$ y, por tanto, en $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^\mathbb{N}\right), \tau_{\delta^*}\right)$. La convergencia uniforme de $(h_m)_{m=1}^\infty$ implica también que $(h_m)_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $(\pi_1^*(\mathcal{A}(\mathbb{R})), \tau_0)$ y, por tanto, en $\left(\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^\mathbb{N}\right), \tau_\ell\right)$. Sin embargo, la función $h$, que es el único posible límite, no es analítica en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, como se demostró en la proposición 5.20. ■

# Capítulo 6

# Funciones no acotadas en colecciones de subconjuntos acotados

## 6.1. Construcción de funciones holomorfas con radio de acotación prefijado

Como dijimos en el capítulo 4, Ansemil, Aron y Ponte obtuvieron en el año 2009 que si $E$ es un espacio de Banach complejo con base de Schauder, entonces $(\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$ no es un límite inductivo numerable de subespacios del tipo $\mathcal{H}_\mathcal{V}(E)$ (teorema 4.3). El resultado principal que utilizaron para demostrar dicho teorema fue la siguiente proposición sobre funciones holomorfas que no son de tipo acotado:

**Proposición 6.1 (Ansemil, Aron y Ponte [5])** *Sea $E$ un espacio de Banach complejo con una base de Schauder normalizada $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y sea $M$ la constante de la base. Sean $R$ y $r$ dos números positivos. En estas condiciones, existe una función $f \in \mathcal{H}(E)$ tal que $\|f\|_{B_E(0,R)} < \infty$ y $\|f\|_{B_E(3MRe_1,r)} = \infty$.*

La función $f$ construida en la proposición 6.1 estaba expresada como una serie de potencias de los funcionales asociados a la base de Schauder. Poco después, los mismos autores observaron que, en realidad, era posible sustituir dichos funcionales por los de una sucesión normalizada y convergente a cero en todo punto, como la que proporciona el teorema de Josefson – Nissenzweig. Por tanto, la hipótesis de que $E$ tenga base no es necesaria:

**Proposición 6.2 (Ansemil, Aron y Ponte [6])** *Si $B_0$ y $B_1$ son dos bolas disjuntas en un espacio de Banach $E$ complejo de dimensión infinita, entonces existe una función $f \in \mathcal{H}(E)$ tal que $\|f\|_{B_0} < \infty$ y $\|f\|_{B_1} = \infty$.*

Las proposiciones 6.1 y 6.2 que acabamos de enunciar nos llevaron a preguntarnos si sería posible obtener un resultado similar cuando tenemos tres o más bolas. En concreto, en este capítulo pretendemos estudiar el problema siguiente:

**Problema 6.3** Sea $E$ un espacio de Banach, real o complejo, de dimensión infinita. Supongamos que $I$ y $J$ son dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ disjuntos y que $\{B_n : n \in I \cup J\}$ es una colección de bolas en $E$. ¿Existe una función $f$ analítica en $E$ que cumpla que $\|f\|_{B_i} < \infty$ para todo $i \in I$ y $\|f\|_{B_j} = \infty$ para todo $j \in J$?

Este problema no siempre tiene solución. Para que ésta exista, es necesario que ninguna bola $B_j$ esté contenida en una unión finita de bolas $B_i$. Además, no se puede esperar que la función $f$ (en caso de que exista) esté uniformemente acotada en todas las bolas $B_i$. Por ejemplo, si $E$ es un espacio complejo separable, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión densa en la frontera de $B_E(0,1)$ y $M > 0$, entonces por el principio del módulo máximo no puede existir una $f \in \mathcal{H}(E)$ tal que $\|f\|_{B_E\left(x_i, \frac{1}{2}\right)} \leq M$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\|f\|_{B_E\left(0, \frac{1}{2}\right)} = \infty$.

El problema 6.3 está relacionado con la cuestión de encontrar funciones holomorfas con el radio de acotación prefijado. Recordemos que el radio de acotación de una función $f \in \mathcal{A}(E)$ en un punto $x \in E$ es

$$r_b f(x) = \sup\left\{r > 0 : \|f\|_{B_E(x,r)} < \infty\right\}.$$

Si $E$ tiene dimensión finita, entonces $r_b f(x) = \infty$ para toda $f \in \mathcal{A}(E)$ y todo punto $x \in E$. Por el contrario, esta propiedad no es cierta cuando $E$ es un espacio de dimensión infinita (recuérdese el teorema 3.1). El siguiente teorema determina el radio de acotación de una función holomorfa:

**Teorema 6.4 (Nachbin [57])** *Si $E$ es un espacio de Banach complejo, $f \in \mathcal{H}(E)$ y $x \in E$, entonces*

$$r_b f(x) = \left(\limsup \left\|\frac{\widehat{d^n} f(x)}{n!}\right\|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

*Si* $\limsup \left\|\frac{\widehat{d^n} f(x)}{n!}\right\|^{\frac{1}{n}} = 0$, *se entiende que* $r_b f(x) = \infty$.

En 1974, Aron probó que en todo espacio de dimensión infinita existen funciones holomorfas cuyo radio de acotación no sólo es finito, sino que incluso es arbitrariamente pequeño en los puntos de la esfera unidad.

**Teorema 6.5 (Aron [9])** *Si $E$ es un espacio de Banach complejo de dimensión infinita, existe una función $f \in \mathcal{H}(E)$ tal que*

$$\inf\{r_b f(x) : \|x\| = 1\} = 0. \tag{6.1}$$

*Además, el conjunto de funciones holomorfas en $E$ que satisfacen la propiedad (6.1) es denso en $(\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$.*

Por su parte, Cœuré y Kiselman estudiaron en [26], [41], [42] y [43] qué propiedades debe satisfacer una función $R : E \to (0, \infty)$ para que exista $f \in \mathcal{H}(E)$ tal que $R(x) = r_b f(x)$ para todo $x \in E$. A modo de ejemplo presentamos el siguiente teorema tal y como aparece en el artículo de Schottenloher [64], donde se recogen y generalizan algunos de los resultados de Cœuré y Kiselman.

**Teorema 6.6 (Cœuré, Kiselman)** *Sea $E$ un espacio de Banach complejo de dimensión infinita con base de Schauder y sea $M$ la constante de la base. Supongamos que una función $R : E \to (0, \infty)$ satisface las dos propiedades siguientes:*

1. $|R(x) - R(y)| \leq \|x - y\|$ *para todos los* $x, y \in E$.

2. $-\log R$ *es plurisubarmónica, es decir,* $-\log R$ *es semicontinua superiormente y si* $x, y \in E$ *y* $r > 0$, *entonces*
$$-\log R(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\log R)\left(x + re^{it}y\right) dt.$$

*En estas condiciones, existe una función $f \in \mathcal{H}(E)$ para la cual*
$$\frac{1}{3M} R \leq r_b f \leq R.$$
*Si $E = \ell_1$, existe $g \in \mathcal{H}(\ell_1)$ tal que $r_b g = R$.*

Un ejemplo sencillo de una función $R$ que satisfacen las propiedades del teorema anterior es
$$R : x \in \ell_p \mapsto R(x) = \frac{1}{\|x\| + 1}.$$
Esta función ya aparece en los trabajos de Kiselman y Schottenloher.

En ciertas situaciones, los teoremas de Cœuré y Kiselman proporcionan una solución del problema 6.3. Por ejemplo, supongamos que un espacio $E$ y una función $R : E \to (0, \infty)$ cumplen las hipótesis del teorema 6.6. Supongamos también que $\{B_E(x_n, r_n) : n \in I \cup J\}$ es una sucesión de bolas en $E$ tal que $r_i < \frac{1}{3M} R(x_i)$ para todo $i \in I$ y $r_j > R(x_j)$ para todo $j \in J$. Entonces existe $f \in \mathcal{H}(E)$ con la propiedad de que
$$r_b f(x_i) \geq \frac{1}{3M} R(x_i) > r_i \qquad \text{si } i \in I$$
y
$$r_b f(x_j) \leq R(x_j) < r_j \qquad \text{si } j \in J.$$
Por tanto, $\|f\|_{B_E(x_i, r_i)} < \infty$ si $i \in I$ y $\|f\|_{B_E(x_j, r_j)} = \infty$ si $j \in J$.

## 6.2. Funciones analíticas no acotadas en una sucesión de bolas

Continuando este estudio de funciones con el radio de acotación prefijado, en este capítulo resolveremos el problema 6.3 en algunos casos concretos. En los teoremas siguientes, la letra $E$ volverá a representar un espacio de Banach, real o complejo, de dimensión infinita. Lo primero que demostramos es que si existe una función con las propiedades que hemos enunciado en el problema 6.3, entonces existe un conjunto denso de funciones que también las cumplen.

**Proposición 6.7** *Supongamos que $I$ y $J$ son dos subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$ y que $\{B_n : n \in I \cup J\}$ es una colección de bolas en $E$. Si existe una función $f \in \mathcal{A}(E)$ tal que $\|f\|_{B_i} < \infty$ para todo $i \in I$ y $\|f\|_{B_j} = \infty$ para todo $j \in J$, entonces el conjunto*

$$G = \left\{ g \in \mathcal{A}(E) : \|g\|_{B_i} < \infty \text{ para todo } i \in I \text{ y } \|g\|_{B_j} = \infty \text{ para todo } j \in J \right\}$$

*es denso en $(\mathcal{A}(E), \tau_0)$. Si $E$ es un espacio complejo, entonces $G$ también es denso en $(\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$.*

**Demostración.** Supongamos que $h$ es una función analítica en $E$, $p$ es una seminorma continua en $(\mathcal{A}(E), \tau_0)$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto de los polinomios, $\mathcal{P}(E)$, es denso en $(\mathcal{A}(E), \tau_0)$ (véanse las proposiciones 1.20 y 1.22). Por ello, existe $P \in \mathcal{P}(E)$ tal que $p(P - h) < \frac{\varepsilon}{2}$. La función

$$g = \frac{\varepsilon}{2p(f) + 1} f + P$$

es analítica en $E$ y $p(g - h) < \varepsilon$.

Los polinomios están acotados en los subconjuntos acotados de $E$, luego $\|P\|_{B_n} < \infty$ para todo $n \in I \cup J$. En consecuencia,

$$\|g\|_{B_i} \leq \frac{\varepsilon}{2p(f) + 1} \|f\|_{B_i} + \|P\|_{B_i} < \infty \qquad \text{para todo } i \in I$$

y

$$\|g\|_{B_j} \geq \frac{\varepsilon}{2p(f) + 1} \|f\|_{B_j} - \|P\|_{B_j} = \infty \qquad \text{para todo } j \in J.$$

Deducimos así que $g \in G$.

Si $E$ es un espacio complejo, entonces $\mathcal{P}(E)$ es denso en $(\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$ (proposición 1.20). Por ello, la demostración que acabamos de hacer para $\tau_0$ es válida también para $\tau_\delta$. Como consecuencia, se obtiene que $G$ es denso en $(\mathcal{H}(E), \tau_\delta)$. ■

**Teorema 6.8** *Sea $E$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $(B_j)_{j=0}^\infty$ una sucesión de bolas abiertas en $E$ tales que $B_j \not\subset B_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada $j$, sea*

$$s_j = \sup\{\|x\| : x \in B_j\}$$

*y supongamos que $\lim_{j\to\infty} s_j = \infty$. Entonces, fijado $\varepsilon > 0$, existe una función $f \in \mathcal{A}(E)$ tal que $\|f\|_{B_0} < \varepsilon$ y $\|f\|_{B_j} = \infty$ para todo $j \geq 1$.*

**Demostración.** Si utilizamos una traslación, podemos suponer que $B_0 = B_E(0, R_0)$ con un $R_0 > 0$. Como $\lim_{j\to\infty} s_j = \infty$, es posible reordenar la sucesión $(B_j)_{j=1}^\infty$ de forma que

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots$$

Además, dado que cada $B_j$ es un conjunto abierto, se cumple que $\|x\| < s_j$ para todo $x \in B_j$.

Por hipótesis, $B_1 \not\subset B_0$. Los conjuntos $B_0$ y $B_1$ son bolas abiertas y, por ello, existe $x_1 \in B_1 \backslash \overline{B_0}$. Entonces

$$R_0 < \|x_1\| < s_1,$$

luego existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_1\| < s_1 - \frac{1}{m_1}$. Definimos $R_1 = s_1 - \frac{1}{m_1}$, que cumple $R_1 > R_0$. Como $R_1 < s_1 \leq s_2$, existe $x_2 \in B_2$ tal que

$$R_1 < \|x_2\| < s_2.$$

De nuevo, es posible encontrar $m_2 \in \mathbb{N}$, $m_2 > m_1$, tal que $\|x_2\| < s_2 - \frac{1}{m_2}$. Definimos $R_2 = s_2 - \frac{1}{m_2}$.

De esta forma, obtenemos una sucesión de vectores $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset E$ y otra de números positivos $(R_j)_{j=0}^{\infty}$ con las propiedades siguientes:

1. $R_0 < R_1 < R_2 < \cdots$
2. $\lim_{j \to \infty} R_j = \infty$ porque $\lim_{j \to \infty} s_j = \infty$.
3. Para todo $j \geq 1$, $x_j \in B_j \cap B_E(0, R_j)$ y $x_j \notin \overline{B}_E(0, R_{j-1})$.

Seguiremos el mismo razonamiento que en el teorema 4.6. Supongamos primero que el espacio $E$ es real. Como $x_1 \in B_1 \cap B_E(0, R_1)$ y $x_1 \notin \overline{B}_E(0, R_0)$, existe $r_1 > 0$ tal que

$$B_E(x_1, r_1) \subset B_1 \cap B_E(0, R_1) \quad \text{y} \quad B_E(x_1, r_1) \cap B_E(0, R_0) = \emptyset.$$

Por la proposición 4.5, existe una función $f_1 \in \mathcal{A}(E)$, que tiene una extensión holomorfa $\widetilde{f_1} \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$ al complejificado de $E$ y se cumple que

$$\left\|\widetilde{f_1}\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_0)} < \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \|f_1\|_{B_E(x_1,r_1)} = \infty.$$

Como $x_2 \in B_2 \cap B_E(0, R_2)$, $x_2 \notin \overline{B}_E(0, R_1)$ y $f_1$ es continua, existe $r_2 > 0$ tal que

$$B_E(x_2, r_2) \subset B_2 \cap B_E(0, R_2), \qquad B_E(x_2, r_2) \cap B_E(0, R_1) = \emptyset$$

y

$$\|f_1\|_{B_E(x_2,r_2)} < \infty.$$

De nuevo por la proposición 4.5, existe una función $f_2 \in \mathcal{A}(E)$ con una extensión holomorfa $\widetilde{f_2} \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$ tal que

$$\left\|\widetilde{f_2}\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_1)} < \frac{1}{2^2} \qquad \text{y} \qquad \|f_2\|_{B_E(x_2,r_2)} = \infty.$$

De esta forma, se obtiene una sucesión de números positivos $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ y otra de funciones $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ analíticas en $E$, cada una de ellas con una extensión $\widetilde{f_j} \in \mathcal{H}(\widetilde{E})$, con estas propiedades:

(a) $B_E(x_j, r_j) \subset B_j \cap B_E(0, R_j)$.

(b) $B_E(x_j, r_j) \cap B_E(0, R_{j-1}) = \emptyset$.

(c) $\|f_n\|_{B_E(x_j,r_j)} < \infty$ si $1 \le n \le j-1$.

(d) $\left\|\widetilde{f}_j\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_{j-1})} < \frac{1}{2^j}$ para todo $j \ge 1$.

(e) $\|f_j\|_{B_E(x_j,r_j)} = \infty$ para todo $j \ge 1$.

Sea $K$ un subconjunto compacto de $\widetilde{E}$. Como $\lim_{j\to\infty} R_j = \infty$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B_{\widetilde{E}}(0, R_j)$. Por la propiedad (d),

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \left\|\widetilde{f}_n\right\|_K \le \sum_{n=j+1}^{\infty} \left\|\widetilde{f}_n\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_{n-1})} \le \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n$ converge uniformemente en los compactos de $\widetilde{E}$. Por la proposición 1.10, la suma $\widetilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n$ es holomorfa en $\widetilde{E}$. Por la proposición 1.26, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es analítica en $E$.

La función $f$ está acotada en la bola $B_0 = B_E(0, R_0)$:

$$\|f\|_{B_E(0,R_0)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{B_E(0,R_0)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\widetilde{f}_n\right\|_{B_{\widetilde{E}}(0,R_{n-1})} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Además, si $j \in \mathbb{N}$, $j \ge 1$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_j} &\ge \|f\|_{B_E(x_j,r_j)} \\ &\ge \|f_j\|_{B_E(x_j,r_j)} - \sum_{n=1}^{j-1} \|f_n\|_{B_E(x_j,r_j)} - \sum_{n=j+1}^{\infty} \|f_n\|_{B_E(x_j,r_j)}. \end{aligned}$$

Utilizamos que $B_E(x_j, r_j) \subset B_E(0, R_j) \subset B_{\widetilde{E}}(0, R_{n-1})$ si $n \ge j+1$:

$$\|f\|_{B_j} \ge \|f_j\|_{B_E(x_j,r_j)} - \sum_{n=1}^{j-1} \|f_n\|_{B_E(x_j,r_j)} - \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Las propiedades (c) y (e) implican entonces que $\|f\|_{B_j} = \infty$. Para completar la prueba cuando $E$ es un espacio real, es suficiente considerar la función

$$\frac{\varepsilon}{\|f\|_{B_0} + 1} f.$$

Si $E$ es un espacio complejo en vez de real, entonces $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ y $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ son ya funciones holomorfas en $E$ y no es preciso considerar sus extensiones. ■

**Observación 6.9** Si sólo se considera una colección finita de bolas $(B_j)_{j=0}^m$ tales que $B_j \not\subset B_0$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces el proceso inductivo de la prueba del teorema 6.8 termina en el paso $m$. En este caso, es evidente que la función $\sum_{j=1}^m f_j$ cumple las propiedades requeridas.

**Observación 6.10** En el teorema 6.8, en general no se puede suprimir la hipótesis de que $\lim_{j\to\infty} s_j = \infty$. Vamos a mostrarlo con un ejemplo. Supongamos que $x \in E$ y $\|x\| = 2$. Sea $B_0 = B_E\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Para cada $j \geq 1$, sea

$$B_j = B_E\left(\frac{j}{j+1}x, \frac{1}{j}\right).$$

En este caso,

$$s_j = \sup\{\|x\| : x \in B_j\} = \frac{j}{j+1} \cdot 2 + \frac{1}{j} \leq 2.$$

Si $f$ es una función analítica en $E$, existe $r > 0$ tal que $\|f\|_{B_E(x,r)} < \infty$. Como

$$\lim_{j\to\infty} \frac{j}{j+1}x = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} = 0,$$

existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_j \subset B_E(x,r)$ si $j \geq j_0$. Entonces $\|f\|_{B_j} < \infty$ para todo $j \geq j_0$.

**Teorema 6.11** *Sea $E$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Supongamos que $\{B_E(e_i, R_i)\}_{i=0}^m$ es una colección finita de bolas en $E$ con la propiedad de que $R_0 > \text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\}$. Entonces existe $f \in \mathcal{A}(E)$ tal que*

$$\|f\|_{B_E(e_i,R_i)} < \infty \qquad \textit{para todo } i \in \{1, \ldots, m\}$$

*y*

$$\|f\|_{B_E(e_0,R_0)} = \infty.$$

**Demostración.** Si se aplica una traslación se puede suponer que $e_0 = 0$. Sea $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < R_0$, tal que

$$(R_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon) > \text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\}.$$

Sea $Y$ un hiperplano cerrado que contenga a los puntos $e_1, \ldots, e_m$. Por el lema de Riesz, existe $z \in E$ tal que $\|z\| = 1$ y $dist(z, Y) \geq 1 - \varepsilon$. Sea

$$x_0 = (R_0 - \varepsilon)z \in B_E(0, R_0).$$

Este vector cumple que

$$\begin{aligned} dist(x_0, Y) &= (R_0 - \varepsilon)\, dist(z, Y) \\ &\geq (R_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon) \\ &> \text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\}. \end{aligned}$$

Por el teorema de Hahn – Banach, existe $\varphi_0 \in E'$ tal que $\|\varphi_0\| = 1$, $\varphi_0 = 0$ en el subespacio $Y$ y

$$\varphi_0(x_0) = dist(x_0, Y) > \text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\}.$$

Entonces $\varphi_0(e_1) = 0, \ldots, \varphi_0(e_m) = 0$.

Sea $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema biortogonal en $E$ con las propiedades dadas en el teorema 1.30. Como $x_0 \in B_E(0, R_0)$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$, existe $r > 0$ tal que $x_0 + rx_k \in B_E(0, R_0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado que $\varphi_0(x_0) > \text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\}$, existe $c > 0$ tal que

$$\text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\} < \frac{1}{c} < \varphi_0(x_0).$$

Entonces $cR_i < 1 < c\varphi_0(x_0)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, luego es posible encontrar un número natural $\alpha$ para el cual

$$(c\varphi_0(x_0))^{\alpha} r > 1$$

y

$$(cR_i)^{\alpha}(\|e_i\| + R_i) < \frac{1}{2}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Por la proposición 1.27, la función

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} ((c\varphi_0)^{\alpha} \varphi_k)^k$$

es analítica en $E$ porque $\text{lím}_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$. Si $1 \le i \le m$, entonces $f$ está acotada en $B_E(e_i, R_i)$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B_E(e_i,R_i)} &= \sup_{\|x\|<R_i} |f(e_i + x)| \le \sup_{\|x\|<R_i} \sum_{k=1}^{\infty} (|c\varphi_0(x)|^{\alpha} \cdot |\varphi_k(e_i + x)|)^k \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} ((c\|\varphi_0\| R_i)^{\alpha} \cdot \|\varphi_k\| (\|e_i\| + R_i))^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ((cR_i)^{\alpha} \cdot (\|e_i\| + R_i))^k \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k < \infty
\end{aligned}$$

(hemos utilizado que $\varphi_0(e_i) = 0$ y que $\|\varphi_k\| = 1$ para todo $k \ge 0$). Además,

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{N}} |f(x_0 + rx_k)| &= \sup_{k\in\mathbb{N}} ((c\varphi_0(x_0))^{\alpha} \varphi_k(rx_k))^k \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} ((c\varphi_0(x_0))^{\alpha} r)^k = \infty
\end{aligned}$$

porque $(c\varphi_0(x_0))^{\alpha} r > 1$. Esto nos permite deducir que $\|f\|_{B_E(0,R_0)} = \infty$. ■

**Observación 6.12** La hipótesis $R_0 > \text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\}$ del enunciado del teorema 6.11 no siempre es necesaria, como se puede ver en la proposición 6.2.

**Teorema 6.13** *Sea $E$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Sean $m$ y $n$ dos números naturales, $n > m$, y consideremos dos sucesiones finitas de bolas, $\{B_E(e_i, R_i)\}_{i=1}^m$ y $\{B_E(e_j, R_j)\}_{j=m+1}^n$, con la propiedad de que*

$$\text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\} < \text{mín}\{R_{m+1}, \ldots, R_n\}.$$

*Entonces, fijado $\varepsilon > 0$, existe una función $f \in \mathcal{A}(E)$ tal que*

$$\|f\|_{B_E(e_i,R_i)} < \varepsilon \qquad \textit{para todo } i \in \{1, \ldots, m\}$$

*y*

$$\|f\|_{B_E(e_j,R_j)} = \infty \qquad \textit{para todo } j \in \{m+1, \ldots, n\}.$$

**Demostración.** Existen números positivos $r_{m+1}, \ldots, r_n$ tales que

$$\text{máx}\{R_1, \ldots, R_m\} < r_{m+1} < \cdots < r_n < \text{mín}\{R_{m+1}, \ldots, R_n\}.$$

Por el teorema 6.11, existe $f_{m+1} \in \mathcal{A}(E)$ tal que

$$\|f_{m+1}\|_{B_E(e_i,R_i)} < \infty \qquad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, m\}$$

y

$$\|f_{m+1}\|_{B_E(e_{m+1},r_{m+1})} = \infty.$$

Distinguimos dos casos. Si $\|f_{m+1}\|_{B_E(e_{m+2},r_{m+2})} = \infty$, entonces se toma $f_{m+2} = f_{m+1}$. En caso contrario, si $\|f_{m+1}\|_{B_E(e_{m+2},r_{m+2})} < \infty$, de nuevo por el teorema 6.11, existe una función $g_{m+1} \in \mathcal{A}(E)$ tal que

$$\begin{aligned} \|g_{m+1}\|_{B_E(e_i,R_i)} &< \infty \qquad \text{si } 1 \leq i \leq m, \\ \|g_{m+1}\|_{B_E(e_{m+1},r_{m+1})} &< \infty, \\ \|g_{m+1}\|_{B_E(e_{m+2},r_{m+2})} &= \infty. \end{aligned}$$

Entonces se toma $f_{m+2} = f_{m+1} + g_{m+1}$. En cualquier caso, $f_{m+2}$ es una función analítica con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \|f_{m+2}\|_{B_E(e_i,R_i)} &< \infty \qquad \text{si } i \in \{1, \ldots, m\}, \\ \|f_{m+2}\|_{B_E(e_{m+1},r_{m+1})} &= \infty \qquad \text{y} \qquad \|f_{m+2}\|_{B_E(e_{m+2},r_{m+2})} = \infty. \end{aligned}$$

La demostración continúa por recurrencia hasta obtener una función $f_n \in \mathcal{A}(E)$ tal que

$$\|f_n\|_{B_E(e_i,R_i)} < \infty \qquad \text{si } i \in \{1, \ldots, m\},$$

y

$$\|f_n\|_{B_E(e_j,R_j)} \geq \|f_n\|_{B_E(e_j,r_j)} = \infty \qquad \text{para todo } j \in \{m+1, \ldots, n\}.$$

Para terminar, se define $f = \frac{\varepsilon}{C+1} f_n$, donde $C = \text{máx}_{1 \leq i \leq m} \|f_n\|_{B_E(e_i,R_i)}$. ■

**Teorema 6.14** *Sea $E$ un espacio de Banach de dimensión infinita con una base de Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que*

$$0 < \inf_{k\in\mathbb{N}} \|e_k\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|e_k\| < \infty.$$

*Sea $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset E'$ la sucesión de funcionales asociados a la base y sea $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|$. Si $J \subset \mathbb{N}$, $R_j > 0$ para cada $j \in J$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $f \in \mathcal{A}(E)$ tal que*

1. $\|f\|_{B_E\left(0,\frac{1}{M}\right)} < \varepsilon$.

2. $\|f\|_{B_E\left(e_i,\frac{1}{M}\right)} < \varepsilon$ *para todo* $i \in \mathbb{N}\backslash J$.

3. $\|f\|_{B_E(e_j,R_j)} = \infty$ *para todo* $j \in J$.

**Demostración.** En primer lugar observamos que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$ para todo $x \in E$ y que $M < \infty$. En efecto, para cada $x \in E$ se tiene que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\, e_k$. Entonces $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k(x)\, e_k\| = 0$. Como $\inf_{k\in\mathbb{N}} \|e_k\| > 0$, se deduce que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$. Por el teorema de Banach – Steinhaus, $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\| < \infty$.

Para cada $j \in J$, sea $t_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$1 < t_j < 1 + \frac{R_j}{\|e_j\|}.$$

Entonces

$$\|t_j e_j - e_j\| = (t_j - 1)\|e_j\| < \frac{R_j}{\|e_j\|}\|e_j\| = R_j,$$

luego $t_j e_j \in B_E(e_j, R_j)$. Como $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|e_k\| < \infty$, existe $r_j > 0$ con la propiedad de que

$$t_j e_j + r_j e_k \in B_E(e_j, R_j) \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $t_j > 1$, existe un número natural $\alpha_j$ tal que

$$\frac{1}{3} t_j^{\alpha_j} r_j > 1.$$

Por la proposición 1.27, la función

$$f = \sum_{j\in J} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\varphi_j^{\alpha_j}\varphi_k\right)^k$$

es analítica en $E$. Esta función está acotada en la bola $B_E\left(0, \frac{1}{M}\right)$:

$$\|f\|_{B_E\left(0,\frac{1}{M}\right)} \leq \sum_{j\in J} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\left(\|\varphi_j\|\frac{1}{M}\right)^{\alpha_j} \|\varphi_k\|\frac{1}{M}\right)^k \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} < \infty.$$

Si $i \in \mathbb{N} \backslash J$ y $\|x\| < \frac{1}{M}$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(e_i + x)| &\leq \sum_{j \in J} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left( \frac{|\varphi_j(x)|^{\alpha_j} \cdot |\varphi_k(e_i + x)|}{3} \right)^k \\
&\leq \sum_{j \in J} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left( \frac{\left(\|\varphi_j\| \frac{1}{M}\right)^{\alpha_j} \cdot |\varphi_k(e_i) + \varphi_k(x)|}{3} \right)^k \\
&\leq \sum_{j \in J} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left( \frac{|\varphi_k(e_i)| + \|\varphi_k\| \frac{1}{M}}{3} \right)^k \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^k = 4.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\|f\|_{B_E\left(e_i, \frac{1}{M}\right)} \leq 4$.

Si ahora se toma $j \in J$, se obtiene que

$$\|f\|_{B_E(e_j, R_j)} \geq \sup_{k \geq j+1} |f(t_j e_j + r_j e_k)| = \sup_{k \geq j+1} \left( \frac{1}{3} t_j^{\alpha_j} r_j \right)^k = \infty.$$

Para completar la prueba, es suficiente considerar la función $\frac{\varepsilon}{5} f$. ■

Terminaremos el capítulo con una generalización del resultado de Aron que hemos enunciado en el teorema 6.5.

**Teorema 6.15** *Si $E$ es un espacio de Banach, real o complejo, de dimensión infinita, el conjunto*

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{A}(E) : \inf_{\|x\|=1} r_b f(x) = 0 \right\}$$

*es denso en $(\mathcal{A}(E), \tau)$ para toda topología localmente convexa $\tau$ en $\mathcal{A}(E)$.*

**Demostración.** Tomemos una función $g \in \mathcal{A}(E)$, una seminorma $p$ continua en $(\mathcal{A}(E), \tau)$ y un número $\varepsilon > 0$. Hay que comprobar que existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $p(f - g) < \varepsilon$. Podemos suponer que $g \notin \mathcal{F}$, esto es, existe $r > 0$ tal que $r_b g(x) > r$ para todo $x \in E$ de norma 1. Entonces $\|g\|_{B_E(x,r)} < \infty$ para todo $x \in E$ de norma 1.

Sea $\{x_k, \varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema biortogonal en $E$ con las propiedades dadas en el teorema 1.29. Entonces

$$\left\{ y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|}, \quad \psi_k = \|x_k\| \varphi_k \right\}_{k=1}^{\infty}$$

es otro sistema biortogonal, $\|y_k\| = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k \to \infty} \psi_k(x) = 0$ para cada $x \in E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{\alpha_n} \frac{1}{n} \geq 2.$$

Se define
$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left((2\psi_n)^{\alpha_n}\psi_k\right)^k\in\mathcal{A}(E).$$

Tomamos un número natural $n$ suficientemente grande para que $n\geq\frac{1}{r}$. Como $y_n+\frac{1}{n}y_k\in\overline{B}_E\left(y_n,\frac{1}{n}\right)$ para todo $k\in\mathbb{N}$, se cumple que

$$\|f\|_{B_E\left(y_n,\frac{1}{n}\right)}\geq\sup_{k\geq n+1}\left|f\left(y_n+\frac{1}{n}y_k\right)\right|=\sup_{k\geq n+1}\left(2^{\alpha_n}\frac{1}{n}\right)^k\geq\sup_{k\geq n+1}2^k=\infty.$$

Además,
$$\|g\|_{B_E\left(y_n,\frac{1}{n}\right)}\leq\|g\|_{B_E(y_n,r)}<\infty.$$

Por tanto,

$$\left\|\frac{\varepsilon}{p(f)+1}f+g\right\|_{B_E\left(y_n,\frac{1}{n}\right)}\geq\frac{\varepsilon}{p(f)+1}\|f\|_{B_E\left(y_n,\frac{1}{n}\right)}-\|g\|_{B_E\left(y_n,\frac{1}{n}\right)}=\infty,$$

luego
$$r_b\left(\frac{\varepsilon}{p(f)+1}f+g\right)(y_n)\leq\frac{1}{n}.$$

Esta propiedad es válida para todo $n\geq\frac{1}{r}$, lo que implica que $\frac{\varepsilon}{p(f)+1}f+g\in\mathcal{F}$. Finalmente,
$$p\left(\left(\frac{\varepsilon}{p(f)+1}f+g\right)-g\right)<\varepsilon.$$

De esta forma queda demostrada la densidad de $\mathcal{F}$. ■

# Capítulo 7

# Aplicaciones holomorfas con imagen densa

## 7.1. Lineabilidad del conjunto de aplicaciones holomorfas con imagen densa

Supongamos que $E$ es un espacio de Banach complejo y que $f$ es una aplicación holomorfa definida en el disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ con valores en $B_E(0,1)$. Entonces

$$f(\mathbb{D}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\overline{\mathbb{D}}\right) \subset B_E(0,1)$$

y cada $f\left(\frac{n}{n+1}\overline{\mathbb{D}}\right)$ es un compacto de $B_E(0,1)$. Por el teorema de Baire, si $E$ tiene dimensión infinita, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\overline{\mathbb{D}}\right) \neq B_E(0,1),$$

es decir, $f$ no puede ser sobreyectiva. Por ello, podemos preguntarnos cómo puede ser la imagen de $f$. En 1973, en la Conferencia de Holomorfía en Dimensión Infinita celebrada en la Universidad de Kentucky, Patil planteó el problema siguiente:

**Problema 7.1 (Patil, 1973)** Supongamos que $E$ es un espacio de Banach separable complejo. ¿Existe una aplicación holomorfa $f : \mathbb{D} \to B_E(0,1)$ con la propiedad de que $f(\mathbb{D})$ sea denso en $B_E(0,1)$?

En 1976, Aron obtuvo una respuesta afirmativa a esta cuestión para cualquier espacio de Banach separable, tanto de dimensión finita como infinita (véase [10]). Para ello, utilizó una factorización a través de los espacios de sucesiones $c_0$ y $\ell_2$, es decir, demostró que existen aplicaciones holomorfas $f_1 : \mathbb{D} \to c_0$, $f_2 : c_0 \to \ell_2$ y $f_3 : \ell_2 \to E$ tales que $f_1(\mathbb{D})$ es denso en la bola unidad de $c_0$, $f_2(B_{c_0}(0,1))$ es denso en $B_{\ell_2}(0,1)$ y $f_3(B_{\ell_2}(0,1))$ es denso en $B_E(0,1)$. Finalmente, la aplicación $f$ buscada es la composición de $f_1$, $f_2$ y $f_3$.

Al mismo tiempo, Globevnik demostró que el problema de Patil también tiene solución cuando se sustituye la bola $B_E(0,1)$ por un subconjunto de $E$ que sea abierto y equilibrado.

**Teorema 7.2 (Globevnik [34])** *Si $E$ es un espacio de Banach separable complejo y $U$ es un subconjunto de $E$ abierto y equilibrado, entonces existe una aplicación holomorfa $f : \mathbb{D} \to U$ tal que $f(\mathbb{D})$ es denso en $U$.*

Finalmente, Rudin obtuvo en 1976 la solución más general posible para el problema de Patil:

**Teorema 7.3 (Rudin [60])** *Sea $E$ un espacio de Banach separable complejo. Si $U$ es un abierto conexo de $E$, entonces existe una aplicación holomorfa $f : \mathbb{D} \to U$ tal que $f(\mathbb{D})$ es denso en $U$.*

El paso esencial tanto en el artículo de Globevnik como en el de Rudin consistía en construir una sucesión de funciones continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ y holomorfas en $\mathbb{D}$ que interpolasen una sucesión densa en $U$. A continuación recogemos este resultado según aparece en el trabajo de Rudin.

**Proposición 7.4 (Rudin [60])** *Sea $E$ un espacio de Banach separable complejo. Supongamos que $U$ es un abierto conexo en $E$ y que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión densa en $U$. Entonces existen tres sucesiones, $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$, $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, con las propiedades siguientes:*

1. *Cada $\delta_n$ es un número real y $0 < 2\delta_{n+1} < \delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.*
2. *$D_n$ es un disco abierto centrado en el punto $e^{\frac{i}{n}} \in \partial\mathbb{D}$ cuyo radio es menor que $\frac{1}{n^2}$.*
3. *Cada $f_n$ es una aplicación continua de $\overline{\mathbb{D}}$ en $U$ y es holomorfa en $\mathbb{D}$.*
4. *$f_n(e^{\frac{i}{n}}) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(e^{\frac{i}{k}}) = 0$ si $n \neq k$.*
5. *$\|f_n(z)\| < \delta_n$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \backslash D_n$.*
6. *$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua en $\overline{\mathbb{D}} \backslash \{1\}$, es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) \subset U$.*

Una vez obtenida la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, es fácil demostrar que $f(\mathbb{D})$ es denso en $U$. Si $x \in U$ y $\varepsilon > 0$, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $f$ es continua en $\overline{\mathbb{D}} \backslash \{1\}$, existe $w \in \mathbb{D}$ tal que $\left\| f(e^{\frac{i}{n}}) - f(w) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la propiedad 4 se cumple que $f(e^{\frac{i}{n}}) = x_n$, luego

$$\|x - f(w)\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - f(w)\| = \|x - x_n\| + \left\| f(e^{\frac{i}{n}}) - f(w) \right\| < \varepsilon.$$

Por tanto, $f(\mathbb{D})$ es denso en $U$.

Nuestro propósito en el presente capítulo es estudiar la *lineabilidad* y densidad del conjunto de aplicaciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que tienen imagen densa. La letra $E$ representará siempre un espacio de Banach complejo. Para simplificar la notación, escribiremos $B_E$ en vez de $B_E(0,1)$ para representar la bola unidad abierta de $E$. Si $U$ es un subconjunto de $E$, $\mathcal{H}(\mathbb{D},U)$ representará el conjunto de aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$ en $E$ cuyas imágenes están contenidas en $U$. Si $R>0$ y $z\in\mathbb{C}$, llamaremos $D(z,R)$ al disco abierto en $\mathbb{C}$ con centro $z$ y radio $R$.

En el siguiente lema se obtienen unas relaciones entre números naturales que serán utilizadas para demostrar el teorema 7.6.

**Lema 7.5**

1. *Si $j_1$, $j_2$, $k_1$ y $k_2$ son números naturales, $k_1\neq k_2$, $j_1\geq k_1$ y $j_2\geq k_2$, entonces*
$$\frac{j_1(j_1-1)}{2}+k_1\neq\frac{j_2(j_2-1)}{2}+k_2.$$

2. *Si $n\in\mathbb{N}$, existen unos únicos números naturales $j$ y $k$ tales que*
$$1\leq k\leq j \qquad y \qquad n=\frac{j(j-1)}{2}+k.$$

**Demostración.** 1. Podemos suponer que $k_1<k_2$. Distinguimos dos casos. Si $j_1\leq j_2$, entonces
$$\frac{j_1(j_1-1)}{2}+k_1\leq\frac{j_2(j_2-1)}{2}+k_1<\frac{j_2(j_2-1)}{2}+k_2.$$
Si $j_1>j_2$, entonces
$$\begin{aligned}\frac{j_1(j_1-1)}{2}-\frac{j_2(j_2-1)}{2} &= [1+2+\cdots+(j_1-1)]-[1+2+\cdots+(j_2-1)]\\ &= j_2+\cdots+(j_1-1)\geq j_2\geq k_2>k_2-k_1.\end{aligned}$$
Por tanto,
$$\frac{j_1(j_1-1)}{2}-\frac{j_2(j_2-1)}{2}>k_2-k_1$$
y
$$\frac{j_1(j_1-1)}{2}+k_1>\frac{j_2(j_2-1)}{2}+k_2.$$
Esto concluye la demostración del enunciado 1.

2. Sea $j$ el mayor número natural con la propiedad de que $\frac{j(j-1)}{2}<n$. Entonces el número $k=n-\frac{j(j-1)}{2}$ es un entero positivo. Si $k$ fuese mayor que $j$, se tendría que
$$n=\frac{j(j-1)}{2}+k>\frac{j(j-1)}{2}+j=\frac{(j+1)j}{2}.$$

Esto contradice la definición de $j$. Por tanto, se deduce que $1 \leq k \leq j$.

Supongamos ahora que $j_1, j_2, k_1$ y $k_2$ son números naturales tales que $1 \leq k_1 \leq j_1$, $1 \leq k_2 \leq j_2$ y

$$\frac{j_1(j_1-1)}{2} + k_1 = n = \frac{j_2(j_2-1)}{2} + k_2.$$

Por el apartado 1, $k_1$ tiene que ser igual $k_2$. Entonces

$$\frac{j_1(j_1-1)}{2} = \frac{j_2(j_2-1)}{2}.$$

Como $j_1 \geq 1$ y $j_2 \geq 1$, esta igualdad sólo se cumple si $j_1 = j_2$. ■

**Teorema 7.6** *Si $E$ es un espacio de Banach separable, existe un espacio vectorial de dimensión infinita $X \subset \mathcal{H}(\mathbb{D}, E)$ tal que*

$$X \backslash \{0\} \subset \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, E) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } E\}.$$

**Demostración.** Sea $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $E\backslash\{0\}$. Llamamos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a la siguiente sucesión densa en $E\backslash\{0\}$ obtenida a partir de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$:

$$\underbrace{y_1,}\ \underbrace{y_2, y_1,}\ \underbrace{y_3, y_2, y_1,}\ \underbrace{y_4, y_3, y_2, y_1,}\ \underbrace{y_5, y_4, y_3, y_2, y_1}\cdots$$

Es decir, $x_n = y_{j-k+1}$, donde $j$ y $k$ son los únicos números naturales tales que

$$1 \leq k \leq j \qquad \text{y} \qquad n = \frac{j(j-1)}{2} + k.$$

Sean $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$, $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones correspondientes al abierto $U = E$ y a la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con las propiedades dadas en la proposición 7.4.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define $g_k : \overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\} \to E$ como

$$g_k = \sum_{j=k}^{\infty} f_{\frac{j(j-1)}{2}+k}.$$

Téngase en cuenta que, por el lema 7.5, si $k_1 \neq k_2$, $j_1 \geq k_1$ y $j_2 \geq k_2$, entonces

$$\frac{j_1(j_1-1)}{2} + k_1 \neq \frac{j_2(j_2-1)}{2} + k_2.$$

Es decir, si $f_{\frac{j(j-1)}{2}+k_1}$ es un sumando en la serie que define a $g_{k_1}$, entonces $f_{\frac{j(j-1)}{2}+k_1}$ no aparece en la serie que define a $g_{k_2}$.

Sea $K$ un subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}$. Como $e^{\frac{i}{n}} \to 1$ y el radio de $D_n$ converge a cero, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \cap D_n = \emptyset$ para todo $n \geq m$. Si $z \in K$, entonces

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|f_n(z)\| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \delta_n.$$

Ahora utilizamos que $\delta_n < \frac{1}{2}\delta_{n-1}$ para todo $n$:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|f_n(z)\| \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\delta_m}{2^{n-m}} = 2\delta_m.$$

Por tanto, $\sum_{n=m}^{\infty} \|f_n\|_K \leq 2\delta_m$, luego la serie que define a cada $g_k$ converge uniformemente en los compactos de $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$. Esto implica que la aplicación $g_k$ es continua en $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$ y, por la proposición 1.10, es holomorfa en $\mathbb{D}$.

Se define $X$ como el espacio vectorial generado por la sucesión $(g_k)_{k=1}^{\infty}$. Vamos a demostrar que $X$ tiene dimensión infinita y que toda aplicación de $X$ distinta de cero tiene imagen densa.

Supongamos que $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ y $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k = 0$ en $\mathbb{D}$. Como $g_1, \ldots, g_k$ son continuas en $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$, se deduce que

$$(\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k)\left(e^{\frac{i}{\frac{k(k-1)}{2}+k}}\right) = 0.$$

A continuación se aplica la propiedad 4 de la proposición 7.4,

$$0 = (\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k)\left(e^{\frac{i}{\frac{k(k-1)}{2}+k}}\right) = \lambda_k f_{\frac{k(k-1)}{2}+k}\left(e^{\frac{i}{\frac{k(k-1)}{2}+k}}\right) = \lambda_k x_{\frac{k(k-1)}{2}+k}.$$

Sabemos que $x_{\frac{k(k-1)}{2}+k} \neq 0$, luego $\lambda_k = 0$ y, por ello, $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_{k-1} g_{k-1} = 0$. Si se repite este mismo argumento, llegamos a que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Por tanto, la sucesión $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ es linealmente independiente y $X$ tiene dimensión infinita.

Supongamos ahora que $\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k \in X\setminus\{0\}$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ y al menos $\alpha_k$ es distinto de cero. Para demostrar que $(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k)(\mathbb{D})$ es denso en $E$, tomemos un punto cualquiera $x \in E$ y un número $\varepsilon > 0$. La sucesión $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ es densa en $E$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| y_m - \frac{1}{\alpha_k} x \right\| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha_k|}.$$

Sea

$$n = \frac{(k+m-1)(k+m-2)}{2} + k.$$

Entonces $x_n = y_m$ y $f_n$ es un elemento en la suma que define a $g_k$, por lo que

$$g_k(e^{\frac{i}{n}}) = f_n(e^{\frac{i}{n}}) = x_n = y_m.$$

Como $f_n$ no aparece en las series que definen a $g_1, \ldots, g_{k-1}$, tenemos que

$$g_1(e^{\frac{i}{n}}) = 0, \ldots, g_{k-1}(e^{\frac{i}{n}}) = 0.$$

Las aplicaciones $g_1, \ldots, g_k$ son continuas en $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$, luego podemos elegir un punto $w \in \mathbb{D}$ tal que

$$\left\| (\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k)(w) - (\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k)(e^{\frac{i}{n}}) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k)(w) - x\| &< \frac{\varepsilon}{2} + \left\|(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k)(e^{\frac{i}{n}}) - x\right\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \|\alpha_k y_m - x\| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto demuestra que $(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k)(\mathbb{D})$ es denso en $E$. ■

Es evidente que el conjunto $\mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E)$ no contiene subespacios no nulos. Sin embargo, se puede demostrar que el subconjunto de $\mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E)$ de aplicaciones con imagen densa satisface una propiedad semejante a la de *lineabilidad*. Utilizaremos el símbolo $co(X)$ para representar la envoltura convexa de un conjunto $X$.

**Teorema 7.7** *Si $E$ es un espacio de Banach separable, entonces existe una sucesión linealmente independiente de aplicaciones holomorfas $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ de $\mathbb{D}$ en $B_E$ tales que*

$$co\left((g_k)_{k=1}^{\infty}\right) \subset \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } B_E\}.$$

**Demostración.** Sea $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $B_E \setminus \{0\}$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la siguiente sucesión obtenida a partir de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$:

$$\underbrace{y_1,}\ \underbrace{y_2, y_1,}\ \underbrace{y_3, y_2, y_1,}\ \underbrace{y_4, y_3, y_2, y_1,}\ \underbrace{y_5, y_4, y_3, y_2, y_1}\ \cdots$$

Por la proposición 7.4, existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de aplicaciones holomorfas con las propiedades siguientes:

1. $f_n(e^{\frac{i}{n}}) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(e^{\frac{i}{k}}) = 0$ si $n \neq k$.
2. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ en $B_E$ y es holomorfa en $\mathbb{D}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define

$$g_k : z \in \mathbb{D} \mapsto g_k(z) = z^k f(z).$$

La aplicación $g_k$ es continua en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ y es holomorfa en $\mathbb{D}$. Si $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$\|g_k(z)\| = \left\|z^k f(z)\right\| < \|f(z)\| < 1,$$

luego $g_k(\mathbb{D}) \subset B_E$. Como $B_E$ es un conjunto convexo, si $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ y $t_1 + \cdots + t_k = 1$, entonces

$$(t_1 g_1 + \cdots + t_k g_k)(\mathbb{D}) \subset B_E.$$

Vamos a demostrar que la sucesión $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ es linealmente independiente. Supongamos que $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ y $\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k = 0$ en $\mathbb{D}$, es decir,

$$\left(\lambda_1 z + \cdots + \lambda_k z^k\right) f(z) = 0 \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Como $f$ es continua en $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$ y $f(e^i)=x_1\neq 0$, existe $\delta>0$ tal que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\mathbb{D}\cap D(e^i,\delta)$. Entonces

$$\lambda_1 z+\cdots+\lambda_k z^k=0 \qquad \text{para todo } z\in\mathbb{D}\cap D\left(e^i,\delta\right).$$

Por el teorema de identidad,

$$\lambda_1 z+\cdots+\lambda_k z^k=0 \qquad \text{para todo } z\in\mathbb{C}.$$

Entonces $\lambda_1=0,\ldots,\lambda_k=0$.

Sólo falta comprobar que si $t_1,\ldots,t_k\in[0,1]$ y $t_1+\cdots+t_k=1$, entonces $(t_1g_1+\cdots+t_kg_k)(\mathbb{D})$ es un conjunto denso en $B_E$. Se toma $x\in B_E$ y $\varepsilon>0$. La sucesión $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ es densa en $B_E$, luego existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|y_m-x\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Por la continuidad del polinomio $P(z)=t_1z+\cdots+t_kz^k$ en $z=1$, existe $\delta>0$ tal que

$$\left|\left(t_1z+\cdots+t_kz^k\right)-1\right|=|P(z)-P(1)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } z\in D(1,\delta).$$

Se elige $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande para que $e^{\frac{i}{n}}\in D(1,\delta)$ y $x_n=y_m$. Entonces

$$f(e^{\frac{i}{n}})=x_n=y_m,$$

luego

$$(t_1g_1+\cdots+t_kg_k)(e^{\frac{i}{n}})=\left(t_1e^{\frac{i}{n}}+\cdots+t_k(e^{\frac{i}{n}})^k\right)y_m.$$

La aplicación $t_1g_1+\cdots+t_kg_k$ es continua en $\overline{\mathbb{D}}\setminus\{1\}$, por lo que existe $w\in\mathbb{D}$ para el cual

$$\left\|(t_1g_1+\cdots+t_kg_k)(w)-(t_1g_1+\cdots+t_kg_k)(e^{\frac{i}{n}})\right\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|(t_1g_1+\cdots+t_kg_k)(w)-x\| &< \frac{\varepsilon}{3}+\left\|(t_1g_1+\cdots+t_kg_k)(e^{\frac{i}{n}})-x\right\| \\
&= \frac{\varepsilon}{3}+\left\|\left(t_1e^{\frac{i}{n}}+\cdots+t_k(e^{\frac{i}{n}})^k\right)y_m-x\right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3}+\left\|\left(t_1e^{\frac{i}{n}}+\cdots+t_k(e^{\frac{i}{n}})^k\right)y_m-y_m\right\| \\
&\quad +\|y_m-x\| \\
&= \frac{\varepsilon}{3}+\left|P(e^{\frac{i}{n}})-1\right|\|y_m\|+\|y_m-x\| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que la imagen de $t_1g_1+\cdots+t_kg_k$ es densa en $B_E$. ■

## 7.2. Densidad del conjunto de aplicaciones holomorfas con imagen densa

En la segunda sección del capítulo se demuestra que si $U = E$ ó $U = B_E$, el conjunto de aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$ en $U$ con imagen densa es un conjunto $G_\delta$ denso en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, U), \tau_0)$. En $\mathcal{H}(\mathbb{D}, U)$ consideraremos siempre la topología $\tau_0$ heredada de $\mathcal{H}(\mathbb{D}, E)$ que, por el teorema 4.7, coincide con la $\tau_\delta$ estudiada en los capítulos anteriores.

**Proposición 7.8** *Si $E$ es un espacio de Banach separable y $U$ es un subconjunto de $E$ (no necesariamente abierto), entonces*

$$\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, U) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } U\}$$

*es un $G_\delta$ en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, U), \tau_0)$.*

**Demostración.** Sea $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $U$. Para cada par de números naturales $m$ y $k$, sea

$$F_{m,k} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, U) \mid \text{Existe } z \in \mathbb{D} \text{ tal que } \|f(z) - y_m\| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Vamos a demostrar que cada $F_{m,k}$ es abierto en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, U), \tau_0)$ y que

$$\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, U) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } U\} = \bigcap_{m,k \in \mathbb{N}} F_{m,k}.$$

Sea $f \in F_{m,k}$. Entonces existe un punto $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $\|f(z_0) - y_m\| < \frac{1}{k}$. El conjunto

$$V_f = \left\{ g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, U) : \|g(z_0) - f(z_0)\| < \frac{1}{k} - \|f(z_0) - y_m\| \right\}$$

en un entorno de $f$ en $\mathcal{H}(\mathbb{D}, U)$ para la topología compacto – abierta. Si $g \in V_f$, entonces

$$\|g(z_0) - y_m\| \leq \|g(z_0) - f(z_0)\| + \|f(z_0) - y_m\| < \frac{1}{k},$$

luego $V_f \subset F_{m,k}$. De esta forma vemos que $F_{m,k}$ es abierto en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, U), \tau_0)$.

Si $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, U)$ y $h(\mathbb{D})$ es denso en $U$, entonces para cada $m$ y $k$ en $\mathbb{N}$ existe $z \in \mathbb{D}$ tal que

$$\|h(z) - y_m\| < \frac{1}{k},$$

es decir, $h \in \bigcap_{m,k \in \mathbb{N}} F_{m,k}$.

Supongamos ahora que $h \in \bigcap_{m,k \in \mathbb{N}} F_{m,k}$. Sean $x \in U$ y $\varepsilon > 0$. Como $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión densa en $U$, existen $k_0, m_0 \in \mathbb{N}$ para los cuales

$$\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \|y_{m_0} - x\| < \frac{1}{k_0}.$$

La aplicación $h$ pertenece a $F_{m_0,k_0}$, luego existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $\|h(z) - y_{m_0}\| < \frac{1}{k_0}$. Por tanto,

$$\|h(z) - x\| \leq \|h(z) - y_{m_0}\| + \|y_{m_0} - x\| < \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $h(\mathbb{D})$ es denso en $U$. ■

**Teorema 7.9** *Si $E$ es un espacio de Banach separable, el conjunto*

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, E) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } E\}$$

*es un $G_\delta$ denso en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, E), \tau_0)$.*

**Demostración.** En la proposición 7.8 se probó que $\mathcal{F}$ es un conjunto $G_\delta$. Para demostrar la densidad de $\mathcal{F}$, tomemos una aplicación $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, E)$, un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{D}$ y un número $\varepsilon > 0$. Por la proposición 1.20 existe un polinomio $P : \mathbb{C} \to E$ tal que

$$\|P(z) - g(z)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $z \in K$.

Llamemos $(y_m)_{m=1}^{\infty}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a las sucesiones introducidas en el teorema 7.6. Entonces

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

es una aplicación continua de $\overline{\mathbb{D}} \backslash \{1\}$ en $E$ que es holomorfa en el disco abierto $\mathbb{D}$. Si se define

$$t = \frac{\varepsilon}{2\|f\|_K + 1},$$

entonces

$$\|(tf + P) - g\|_K \leq t\|f\|_K + \|P - g\|_K < \varepsilon.$$

Sólo falta comprobar que $tf + P \in \mathcal{F}$, es decir, que $(tf + P)(\mathbb{D})$ es denso en $E$. Tomamos un punto $x \in E$ y un número $\delta > 0$. Como $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión densa en $E$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| y_m - \left(\frac{1}{t}x - \frac{1}{t}P(1)\right)\right\| < \frac{\delta}{3t},$$

es decir,

$$\|ty_m + P(1) - x\| < \frac{\delta}{3}.$$

El polinomio $P$ es continuo en todo $\mathbb{C}$ y $e^{\frac{i}{n}} \to 1$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| P(e^{\frac{i}{n}}) - P(1)\right\| < \frac{\delta}{3} \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = y_m$ y $n \geq n_0$. La aplicación $tf + P$ es continua en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, por lo que existe $w \in \mathbb{D}$ tal que

$$\left\| (tf + P)(w) - (tf + P)(e^{\frac{i}{n}}) \right\| < \frac{\delta}{3}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\| (tf + P)(w) - x \| &< \frac{\delta}{3} + \left\| tf(e^{\frac{i}{n}}) + P(e^{\frac{i}{n}}) - x \right\| \\
&= \frac{\delta}{3} + \left\| tx_n + P(e^{\frac{i}{n}}) - x \right\| \\
&= \frac{\delta}{3} + \left\| ty_m + P(e^{\frac{i}{n}}) - x \right\| \\
&\leq \frac{\delta}{3} + \| ty_m + P(1) - x \| + \left\| P(e^{\frac{i}{n}}) - P(1) \right\| \\
&< \delta.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $(tf + P)(\mathbb{D})$ es un conjunto denso en $E$, con lo cual $tf + P$ pertenece a $\mathcal{F}$. ■

Para demostrar la densidad del conjunto

$$\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } B_E \}$$

en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E), \tau_0)$ es preciso recordar primero la definición de producto Blaschke y demostrar dos proposiciones auxiliares.

**Proposición 7.10** *Supongamos que* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión en el intervalo* $(0,1)$ *con la propiedad de que* $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) < \infty$. *Entonces*

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - a_n z}$$

*define una función holomorfa en* $\mathbb{D}$ *denominada producto Blaschke. Esta función cumple que* $b(a_n) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Además, si* $z \in \mathbb{D}$, *entonces*

$$\left| \frac{a_n - z}{1 - a_n z} \right| < 1$$

*para todo* $n \in \mathbb{N}$, *luego* $|b(z)| < 1$. *La demostración de estas propiedades puede verse, por ejemplo, en Rudin* [61, pág. 302].

**Proposición 7.11** *Para cada* $R \in (0,1)$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe una sucesión* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *de números reales tales que* $0 < a_n < 1$ *para todo* $n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) < \infty$ *y* $|b(z) - 1| < \varepsilon$ *para todo* $z \in \overline{D}(0, R)$, *donde*

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - a_n z}.$$

**Demostración.** Podemos suponer que $\varepsilon < 1$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \in (0,1)$. Como $R < 1$, tenemos que $\varepsilon_n R < \varepsilon_n$, luego

$$0 < 1 + R - \varepsilon_n < 1 + R - \varepsilon_n R.$$

Esto implica que

$$0 < \frac{1 + R - \varepsilon_n}{1 + R - \varepsilon_n R} < 1.$$

Por tanto, existe $a_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$1 - \frac{1}{2^n} < a_n < 1 \tag{7.1}$$

y

$$\frac{1 + R - \varepsilon_n}{1 + R - \varepsilon_n R} < a_n < 1. \tag{7.2}$$

Las desigualdades de (7.1) implican que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) < \infty$, luego la función

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - a_n z}$$

está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{D}$. Las desigualdades de (7.2) implican que

$$1 + R - \varepsilon_n < a_n + a_n R - \varepsilon_n a_n R,$$

luego

$$(1 - a_n)(1 + R) < \varepsilon_n (1 - a_n R). \tag{7.3}$$

Vamos a demostrar que si $z \in \overline{D}(0, R)$, entonces $|b(z) - 1| < \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |(a_n - z) - (1 - a_n z)| &\leq (1 - a_n) + (1 - a_n)|z| \\ &\leq (1 - a_n) + (1 - a_n) R \\ &= (1 - a_n)(1 + R). \end{aligned} \tag{7.4}$$

A continuación aplicamos las desigualdades (7.3) y (7.4):

$$\begin{aligned} |(a_n - z) - (1 - a_n z)| &\leq (1 - a_n)(1 + R) < \varepsilon_n (1 - a_n R) \\ &\leq \varepsilon_n (1 - a_n |z|) \leq \varepsilon_n |1 - a_n z|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left| \frac{a_n - z}{1 - a_n z} - 1 \right| < \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{7.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n$, sea

$$w_n = \frac{a_n - z}{1 - a_n z}.$$

Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| b(z) - \prod_{n=1}^{m} w_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, $|w_n| < 1$ para todo $n$ porque $|z| < 1$. Por ello,

$$\begin{aligned}
|b(z) - 1| &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \prod_{n=1}^{m} w_n - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \prod_{n=2}^{m} w_n - 1 \right| |w_1| + |w_1 - 1| . \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \prod_{n=2}^{m} w_n - 1 \right| + |w_1 - 1| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \prod_{n=3}^{m} w_n - 1 \right| + |w_2 - 1| + |w_1 - 1| \\
&< \cdots < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{m} |w_n - 1| .
\end{aligned}$$

La desigualdad (7.5) implica que

$$|b(z) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

Esto completa la demostración. ■

**Proposición 7.12** *Sea $E$ un espacio de Banach separable. Sea $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $B_E$. Para todo par de números naturales $m$ y $k$, el conjunto*

$$F_{m,k} = \left\{ f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right) \mid \textit{Existe } z \in \mathbb{D} \textit{ tal que } \|f(z) - y_m\| < \frac{1}{k} \right\}$$

*es denso en $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right), \tau_0\right)$.*

**Demostración.** Supongamos que $g \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right)$, $K$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ y $0 < \varepsilon < \frac{1}{3k}$. Podemos suponer que $K = \overline{D}(0, R)$ para cierto $R \in (0, 1)$. Por la proposición 7.11, existe una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales tales que $0 < a_n < 1$ para todo $n$, el producto

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - a_n z}$$

define una función holomorfa en $\mathbb{D}$, $|b(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|b(z) - 1| < \varepsilon$ si $|z| \leq R$. Como $b$ es uniformemente continua en el compacto $\overline{D}(0, a_1)$, existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in \overline{D}(0, a_1)$ y $|z - w| < \delta$, entonces

$$|b(z) - b(w)| < \varepsilon. \tag{7.6}$$

Como en los teoremas anteriores, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ representará la siguiente sucesión obtenida a partir de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$:

$$\underbrace{y_1,}\underbrace{y_2,y_1,}\underbrace{y_3,y_2,y_1,}\underbrace{y_4,y_3,y_2,y_1,}\underbrace{y_5,y_4,y_3,y_2,y_1}\cdots$$

Sean $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$, $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ las sucesiones correspondientes al abierto $U = B_E$ y a la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con las propiedades dadas en la proposición 7.4. Sea $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$x_n = y_m, \qquad R + \frac{1}{n^2} < 1, \qquad \delta_n < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{n^2} < \delta.$$

Recordemos que $D_n$ es un disco abierto centrado en el punto $e^{\frac{i}{n}}$ cuyo radio es menor que $\frac{1}{n^2}$. Recordemos también que $f_n$ es una aplicación continua en $\overline{\mathbb{D}}$, holomorfa en $\mathbb{D}$, $f_n\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \subset B_E$, $\|f_n(z)\| < \delta_n$ si $z \in \overline{\mathbb{D}} \backslash D_n$ y $f_n(e^{\frac{i}{n}}) = x_n$.

Para cada $z \in \mathbb{D}$, se define

$$f(z) = b\left(a_1 e^{-\frac{i}{n}} z\right) \cdot g(z) + f_n(z).$$

La aplicación $f$ es holomorfa de $\mathbb{D}$ en $E$. Vamos a comprobar que $\frac{1}{1+\varepsilon} f$ pertenece a $F_{m,k}$ y que $\left\|\frac{1}{1+\varepsilon} f - g\right\|_K < 3\varepsilon$.

Recordemos que $g \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right)$, con lo cual $\|g(z)\| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Si $z \in \mathbb{D} \backslash D_n$, entonces

$$\|f(z)\| \leq \|g(z)\| + \|f_n(z)\| < 1 + \delta_n < 1 + \varepsilon.$$

Si $z \in \mathbb{D} \cap D_n$, entonces $\left|z - e^{\frac{i}{n}}\right| < \frac{1}{n^2} < \delta$, luego

$$\left|a_1 e^{-\frac{i}{n}} z - a_1\right| = a_1 \left|z - e^{\frac{i}{n}}\right| < a_1 \delta < \delta.$$

Como $a_1 e^{-\frac{i}{n}} z$ y $a_1$ pertenecen a $\overline{D}(0, a_1)$, por la desigualdad (7.6) tenemos que

$$\left|b\left(a_1 e^{-\frac{i}{n}} z\right)\right| = \left|b\left(a_1 e^{-\frac{i}{n}} z\right) - b(a_1)\right| < \varepsilon.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|f(z)\| &\leq \left|b\left(a_1 e^{-\frac{i}{n}} z\right)\right| \|g(z)\| + \|f_n(z)\| \\ &\leq \left|b\left(a_1 e^{-\frac{i}{n}} z\right)\right| + \|f_n(z)\| < \varepsilon + 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|f(z)\| < 1 + \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Sea $z \in \overline{D}(0, R)$. Entonces $a_1 e^{-\frac{i}{n}} z$ también pertenece a $\overline{D}(0, R)$, por lo que

$$\left|b\left(a_1 e^{-\frac{i}{n}} z\right) - 1\right| < \varepsilon.$$

Como $R+\frac{1}{n^2}<1$, se deduce que $\overline{D}\left(0,R\right)\cap D_n=\emptyset$, luego $z\in\mathbb{D}\backslash D_n$ y

$$\left\|f_n\left(z\right)\right\|<\delta_n<\varepsilon.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left\|f\left(z\right)-g\left(z\right)\right\| &\leq \left|b\left(a_1e^{-\frac{i}{n}}z\right)-1\right|\cdot\left\|g\left(z\right)\right\|+\left\|f_n\left(z\right)\right\| \\ &< \left|b\left(a_1e^{-\frac{i}{n}}z\right)-1\right|+\varepsilon<2\varepsilon \qquad (7.7)\end{aligned}$$

para todo $z\in\overline{D}\left(0,R\right)$.

Como $f_n$ es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, existe $w\in\mathbb{D}\cap D_n$ tal que

$$\left\|f_n\left(w\right)-f_n(e^{\frac{i}{n}})\right\|<\varepsilon.$$

De nuevo por (7.6),

$$\left|b\left(a_1e^{-\frac{i}{n}}w\right)\right|=\left|b\left(a_1e^{-\frac{i}{n}}w\right)-b\left(a_1\right)\right|<\varepsilon$$

y entonces

$$\begin{aligned}\left\|f\left(w\right)-y_m\right\| &\leq \left|b\left(a_1e^{-\frac{i}{n}}w\right)\right|\cdot\left\|g\left(w\right)\right\|+\left\|f_n\left(w\right)-y_m\right\| \\ &< \varepsilon+\left\|f_n\left(w\right)-y_m\right\| \\ &< 2\varepsilon+\left\|f_n(e^{\frac{i}{n}})-y_m\right\| \\ &= 2\varepsilon+\left\|x_n-y_m\right\|=2\varepsilon. \qquad (7.8)\end{aligned}$$

Para terminar, consideramos la aplicación $\frac{1}{1+\varepsilon}f\in\mathcal{H}\left(\mathbb{D},\overline{B}_E\right)$. Utilizamos (7.8):

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{1+\varepsilon}f\left(w\right)-y_m\right\| &= \left\|\frac{1}{1+\varepsilon}f\left(w\right)-f\left(w\right)\right\|+\left\|f\left(w\right)-y_m\right\| \\ &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left\|f\left(w\right)\right\|+\left\|f\left(w\right)-y_m\right\| \\ &\leq \varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon<\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Deducimos así que $\frac{1}{1+\varepsilon}f\in F_{m,k}$. Además, si $z\in K=\overline{D}\left(0,R\right)$, las desigualdades que aparecen en (7.7) implican que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{1+\varepsilon}f\left(z\right)-g\left(z\right)\right\| &\leq \left\|\frac{1}{1+\varepsilon}f\left(z\right)-f\left(z\right)\right\|+\left\|f\left(z\right)-g\left(z\right)\right\| \\ &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left\|f\left(z\right)\right\|+\left\|f\left(z\right)-g\left(z\right)\right\| \\ &< \varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto, $\left\|\frac{1}{1+\varepsilon}f-g\right\|_K\leq 3\varepsilon$. Esto demuestra la densidad de $F_{m,k}$. ■

**Teorema 7.13** *Si $E$ es un espacio de Banach separable, el conjunto*

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } B_E\}$$

*es un $G_\delta$ denso en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E), \tau_0)$.*

**Demostración.** Si se aplica la proposición 7.8 con $U = B_E$, se obtiene que $\mathcal{F}$ es un conjunto $G_\delta$ en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E), \tau_0)$. Para demostrar la densidad de $\mathcal{F}$ en $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E), \tau_0)$ se toma una sucesión $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ densa en $B_E$. Para cada par de números naturales $m$ y $k$, sea

$$F_{m,k} = \left\{ f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right) \mid \text{Existe } z \in \mathbb{D} \text{ tal que } \|f(z) - y_m\| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Según se vio en la demostración de la proposición 7.8 con $U = \overline{B}_E$, cada $F_{m,k}$ es abierto en $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right), \tau_0\right)$ y

$$\left\{f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } \overline{B}_E\right\} = \bigcap_{m,k \in \mathbb{N}} F_{m,k}. \tag{7.9}$$

Además, por la proposición 7.12, $F_{m,k}$ es denso en $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right), \tau_0\right)$.

El espacio $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, E), \tau_0)$ es un espacio métrico completo (véase el teorema 2.17 y la proposición 1.10). Como $\mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right)$ es un subconjunto cerrado de $(\mathcal{H}(\mathbb{D}, E), \tau_0)$, entonces $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right), \tau_0\right)$ es también un espacio métrico completo. Por el teorema de Baire y la propiedad (7.9), se deduce que

$$\left\{f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right) : f(\mathbb{D}) \text{ es denso en } \overline{B}_E\right\}$$

es denso en $\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{D}, \overline{B}_E\right), \tau_0\right)$.

Supongamos ahora que $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E)$, $K$ es un compacto de $\mathbb{D}$ y $\varepsilon > 0$. Por lo que acabamos de ver, existe $f : \mathbb{D} \to \overline{B}_E$ tal que $f(\mathbb{D})$ es denso en $\overline{B}_E$ y $\|f(z) - h(z)\| < \varepsilon$ para todo $z \in K$. Si existiera un punto $z_1 \in \mathbb{D}$ tal que $\|f(z_1)\| = 1$, la aplicación

$$z \in \mathbb{D} \mapsto \|f(z)\|$$

alcanzaría el máximo en $z_1$ y, por tanto, tendríamos que $\|f(z)\| = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ (véase Barroso [20, proposición 33.2]). Entonces la imagen de $f$ no podría ser densa. Por tanto, deducimos que $\|f(z)\| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, esto es, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, B_E)$. ■

# Bibliografía


[1] H. Alexander: *Analytic functions on Banach spaces*, tesis, Universidad de California, Berkeley, 1968.

[2] J.M. Ansemil: "Topological duality on the function space $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$", *J. Math. Anal. Appl.*, 67 (1979), págs. 188 – 197.

[3] J.M. Ansemil, S. Ponte: "Topologies associated with the compact open topology on $\mathcal{H}(U)$", *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 82 (1982), págs. 121 – 128.

[4] J.M. Ansemil, S. Ponte: "Metrizability of spaces of holomorphic functions with the Nachbin topology", *J. Math. Anal. Appl.*, 334 (2007), págs. 1146 – 1151.

[5] J.M. Ansemil, R.M. Aron, S. Ponte: "Representation of spaces of entire functions on Banach spaces", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 45 (2009), págs. 383 – 391.

[6] J.M. Ansemil, R.M. Aron, S. Ponte: "Behavior of entire functions on balls in a Banach space", *Indag. Math.*, 20 (2009), págs. 483 – 489.

[7] J.M. Ansemil, J. López – Salazar Codes, S. Ponte: "Entire functions uniformly bounded on balls of a Banach space", *Studia Math.*, 204 (2011), págs. 187 – 194.

[8] J.M. Ansemil, J. López – Salazar Codes, S. Ponte: "On real analytic functions of unbounded type", a aparecer en *Rev. Mat. Complut.* (2012).

[9] R.M. Aron: "Entire functions of unbounded type on a Banach space", *Boll. Un. Mat. Ital.*, 9 (1974), págs. 28 – 31.

[10] R.M. Aron: "The range of vector valued holomorphic mappings", *Ann. Polon. Math.*, 33 (1976), págs. 17 – 20.

[11] R.M. Aron, M. Schottenloher: "Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property", *J. Functional Analysis*, 21 (1976), págs. 7 – 30.

[12] R.M. Aron, P.D. Berner: "A Hahn – Banach extension theorem for analytic mappings", *Bull. Soc. Math. France*, 106 (1978), págs. 3 – 24.

[13] R.M. Aron, B.J. Cole, T.W. Gamelin: “Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space”, *J. Reine Angew. Math.*, 415 (1991), págs. 51 – 93.

[14] R.M. Aron, P. Galindo, D. García, M. Maestre: “Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348 (1996), págs. 543 – 559.

[15] R.M. Aron, V.I. Gurariy, J.B. Seoane Sepúlveda: “Lineability and spaceability of sets of functions on $\mathbb{R}$”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133 (2005), págs. 795 – 803.

[16] R.M. Aron, D. Pérez García, J.B. Seoane Sepúlveda: “Algebrability of the set of non – convergent Fourier series”, *Studia Math.*, 175 (2006), págs. 83 – 90.

[17] R.M. Aron, J.B. Seoane Sepúlveda: “Algebrability of the set of everywhere surjective functions on $\mathbb{C}$”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 14 (2007), págs. 25 – 31.

[18] R.M. Aron, F.J. García Pacheco, D. Pérez García, J.B. Seoane Sepúlveda: “On dense – lineability of sets of functions on $\mathbb{R}$”, *Topology*, 48 (2009), págs. 149 – 156.

[19] J.A. Barroso, L. Nachbin: “Some topological properties of spaces of holomorphic mappings in infinitely many variables”, *Advances in Holomorphy*, North – Holland Math. Stud., 34, Amsterdam, 1979, págs. 67 – 91.

[20] J.A. Barroso: *Introduction to Holomorphy*, North – Holland Math. Stud., 106, Amsterdam, 1985.

[21] J. Bochnak, J. Siciak: “Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces”, *Studia Math.*, 39 (1971), págs. 59 – 76.

[22] J. Bochnak, J. Siciak: “Analytic functions in topological vector spaces”, *Studia Math.*, 39 (1971), págs. 77 – 112.

[23] D. Carando, S. Lassalle, I. Zalduendo: “Orthogonally additive holomorphic functions of bounded type over $C(K)$”, *Proc. Edinb. Math. Soc.,* 53 (2010), págs. 609 – 618.

[24] S.B. Chae: *Holomorphy and calculus in normed spaces*, Marcel Dekker Inc., Nueva York, 1985.

[25] G. Cœuré: “Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications a l’étude des fonctions analytiques”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 20 (1970), págs. 361 – 432.

[26] G. Cœuré: “Sur le rayon de bornologie des fonctions holomorphes”, *Journées sur les Fonctions Analytiques (Toulouse, 1976)*, Lecture Notes in Math., 578, 1977, págs. 183 – 194.

[27] J. Dieudonné, L. Schwartz: "La dualité dans les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$)", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1 (1949), págs. 61 – 101.

[28] S.J. Dilworth, M. Girardi, W.B. Johnson: "Geometry of Banach spaces and biorthogonal systems", *Studia Math.*, 140 (2000), págs. 243 – 271.

[29] S. Dineen: "Bounding subsets of a Banach space", *Math. Ann.*, 192 (1971), págs. 61 – 70.

[30] S. Dineen: "Unbounded holomorphic functions on a Banach space", *J. London Math. Soc.*, 4 (1972), págs. 461 – 465.

[31] S. Dineen: *Complex analysis on infinite dimensional spaces*, Springer – Verlag, Londres, 1999.

[32] P. Galindo, L.A. Moraes, J. Mujica: "Weak holomorphic convergence and bounding sets in Banach spaces", *Math. Proc. Roy. Irish Acad.*, 98A (1998), págs. 153 – 157.

[33] C. Gasquet, P. Witomski: *Fourier analysis and applications*, Springer – Verlag, Nueva York, 1999.

[34] J. Globevnik: "The range of vector – valued analytic functions", *Ark. Mat.*, 14 (1976), págs. 113 – 118.

[35] V.I. Gurariy: "Subspaces and bases in spaces of continuous functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 167 (1966), págs. 971 – 973.

[36] L. Halbeisen, N. Hungerbühler: "The cardinality of Hamel bases of Banach spaces", *East – West J. Math.*, 2 (2000), págs. 153 – 159.

[37] J. Horváth: *Topological vector spaces and distributions, vol I*, Addison – Wesley, Reading, 1966.

[38] J.M. Isidro: "Topological duality on the functional space $(\mathcal{H}_b(U, F), \tau_b)$", *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 79 (1979), págs. 115 – 130.

[39] B. Josefson: "Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence", *Ark. Mat.*, 13 (1975), págs. 79 – 89.

[40] P. Kirwan: "Complexification of multilinear mappings and polynomials", *Math. Nachr.*, 231 (2001), págs. 39 – 68.

[41] C.O. Kiselman: "On the radius of convergence of an entire function in a normed space", *Ann. Polon. Math.*, 33 (1976), págs. 39 – 55.

[42] C.O. Kiselman: "Construction de fonctions entières à rayon de convergence donné", *Journées sur les fonctions analytiques (Toulouse, 1976)*, Lecture Notes in Math., 578, 1977, págs. 246 – 253.

[43] C.O. Kiselman: “Geometric aspects of the theory of bounds for entire functions in normed spaces”, *Infinite dimensional holomorphy and applications*, North – Holland Math. Stud., 12, Amsterdam, 1977, págs. 249 – 275.

[44] B.V. Limaye: *Functional Analysis*, New Age International Publishers Limited, Nueva Delhi, 2004.

[45] J. López – Salazar Codes: “Metrizability of spaces of holomorphic functions”, *J. Math. Anal. Appl.*, 355 (2009), págs. 434 – 438.

[46] J. López – Salazar Codes: “Vector spaces of entire functions of unbounded type”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139 (2011), págs. 1347 – 1360.

[47] J. López – Salazar Codes: “Lineability of the set of holomorphic mappings with dense range”, *Studia Math.*, 210 (2012), págs. 177 – 188.

[48] J. Mujica: *Gérmenes holomorfos y funciones holomorfas en espacios de Fréchet*, Universidad de Santiago de Compostela, 1978.

[49] J. Mujica: “Complex homomorphisms of the algebras of holomorphic functions on Fréchet spaces”, *Math. Ann.*, 241 (1979), págs. 73 – 82.

[50] J. Mujica: “Spaces of germs of holomorphic functions”, *Studies in analysis, Adv. in Math. Suppl. Stud.*, 4, Academic Press, Nueva York, 1979, págs. 1 – 41.

[51] J. Mujica: “Domains of holomorphy in $(DFC)-$spaces”, *Functional analysis, holomorphy and approximation theory*, Lecture Notes in Math., 843, 1981, págs. 500 – 533.

[52] J. Mujica: “Spaces of holomorphic mappings on Banach spaces with a Schauder basis”, *Studia Math.*, 122 (1997), págs. 139 – 151.

[53] J. Mujica: *Complex analysis in Banach spaces*, Dover Publications, Nueva York, 2010.

[54] G.A. Muñoz Fernández, Y. Sarantopoulos, A. Tonge: “Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps”, *Studia Math.*, 134 (1999), págs. 1 – 33.

[55] G.A. Muñoz Fernández, N. Palmberg, D. Puglisi, J.B. Seoane Sepúlveda: “Lineability in subsets of measure and function spaces”, *Linear Algebra Appl.*, 428 (2008), págs. 2805 – 2812.

[56] L. Nachbin: “On the topology of the space of all holomorphic functions on a given open subset”, *Indag. Math.*, 29 (1967), págs. 366 – 368.

[57] L. Nachbin: *Topology on spaces of holomorphic mappings*, Springer – Verlag, 1969.

[58] L. Nachbin: "Sur les espaces vectoriels topologiques d'applications continues", *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, 271 (1970), págs. 596 – 598.

[59] A. Nissenzweig: "$\omega^*$ sequential convergence", *Israel J. Math.*, 22 (1975), págs. 266 – 272.

[60] W. Rudin: "Holomorphic maps of discs into $F-$spaces", *Complex analysis (Proc. Conf., Univ. Kentucky, Lexington, Ky., 1976)*, Lecture Notes in Math., 599, 1977, págs. 104 – 108.

[61] W. Rudin: *Real and complex analysis*, McGraw – Hill, 1987.

[62] H.H. Schaefer: *Topological vector spaces*, The Macmillan Company, Nueva York, 1966.

[63] T. Schlumprecht: "A limited set that is not bounding", *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 90 (1990), págs. 125 – 129.

[64] M. Schottenloher: "Richness of the class of holomorphic functions on an infinite dimensional space", *Functional analysis: surveys and recent results*, North – Holland Math. Stud., 27, Amsterdam, 1977, págs. 209 – 225.

[65] A. Zagorodnyuk: "Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2006), págs. 2559 – 2569.