

548.53
PAL

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

TESIS DOCTORAL

DETERMINACIÓN
DE LAS
CONSTANTES ÓPTICAS
DE LOS
CRISTALES BIRREFRINGENTES

POR

Julio Palacios Martínez.



FACULTAD CC. GEOLÓGICAS
BIBLIOTECA

R 10.140

MADRID

IMPRENTA «LA ENSEÑANZA»

CALLE DE RUIZ, 23, BAJO

1914

X-53-310663-9

A mi querido profesor
Dr. D. Esteban Terradas.

PARTE PRIMERA

CAPÍTULO PRIMERO

CRISTALES UNIÁXICOS

1. Superficie de onda y superficie de velocidades normales.

El fenómeno de la doble refracción en los cristales uniáxicos consiste, como es sabido, en el desdoblamiento de un rayo incidente sobre dichas sustancias, en dos refractados, de los cuales el uno sigue las leyes de Descartes, mientras el otro se aparta de ellas, no estando, en general, en el plano de incidencia, ni se halla, para la incidencia normal, en la prolongación del rayo incidente.

Estos hechos fueron satisfactoriamente explicados por Huygens, admitiendo que en dichos cristales la superficie de onda se compone de una esfera y de un elipsoide de revolución tangente por sus polos a la esfera, en los extremos de un diámetro paralelo al eje principal de simetría del cristal. De este modo, al aplicar la construcción de Huygens a la refracción en una sustancia birrefringente, se obtienen dos ondas refractadas, correspondiente la una a la hoja esférica de la superficie de onda, y la otra a la hoja elipsoidal. Para la primera (onda ordinaria), el rayo coincidirá con la normal; para la segunda, no ocurrirá, esto es general.

Un cristal uniáxico (sistemas exagonal y tetragonal) quedará caracterizado por el radio o de la esfera y el radio ecuatorial e del elipsoide de la superficie de onda, ó sea por las dos velocidades de los rayos luminosos en una dirección perpendicular al eje principal de simetría, ó también por sus recíprocas $\frac{1}{o} = \omega$; $\frac{1}{e} = \epsilon$ que son los índices de refracción ordinaria y extraordinaria al suponer igual a la unidad la velocidad de la luz en el vacío. En la dirección paralela al eje principal de simetría (eje de simetría ternaria), las dos velocidades, y, por lo tanto, los dos índices son iguales; esta dirección se denomina *eje óptico* del cristal.

Según esta hipótesis, la ecuación de la superficie de onda con respecto

á un sistema de ejes cartesianos rectangulares, cuyo eje z coincida con el eje óptico es

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{e^2} + \frac{z^2}{o^2} - 1\right) \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{o^2} - 1\right) = 0 \quad [1]$$

La superficie de velocidades normales, que es la pedal de la anterior, se compondrá de la misma esfera y de otra superficie de revolución, que tendrá común con el elipsoide de la superficie de onda los polos y el ecuador. Para hallar la ecuación de esta segunda hoja de la superficie de velocidades normales, hallaremos la de su curva meridiana del modo siguiente:

La ecuación de la tangente en el punto x, z , á la intersección del elipsoide de la superficie de onda con el plano x, z , es

$$\frac{xx_1}{o^2} + \frac{zz_1}{e^2} = 1$$

La ecuación de la perpendicular trazada desde el origen es

$$z \frac{x_1}{o^2} - x \frac{z_1}{e^2} = 0$$

y eliminando x_1, z_1 , entre estas ecuaciones y la

$$\frac{x_1^2}{o^2} + \frac{z_1^2}{e^2} = 1$$

resulta

$$x^2 e^2 + z^2 o^2 = (x^2 + z^2)^2$$

que es la ecuación de la curva meridiana buscada. La de la superficie de revolución correspondiente será

$$(x^2 + y^2)e^2 + z^2 o^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0$$

que es un ovoide de revolución.

Por fin, la de la superficie de velocidades normales podrá escribirse así

$$[x^2 + y^2 + z^2 - o^2] [(x^2 + y^2) e^2 + z^2 o^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2] = 0 \quad [2]$$

Las ecuaciones en coordenadas polares de la superficie de onda serán

$$s_o = o, \quad \frac{1}{s e^2} = \frac{\cos^2 \psi}{o^2} + \frac{\sen^2 \psi}{e^2} \quad [1']$$

donde s_e y s_o son los radios vectores que forman un ángulo ψ con el eje óptico.

Del mismo modo las ecuaciones polares de la superficie de velocidades normales serán

$$q_o = o, \quad q e^2 = o^2 \cos^2 \varphi + e^2 \sen^2 \varphi$$

donde q_o y q_e son los radios vectores que forman un ángulo φ con el eje óptico.

Un cristal se llama positivo cuando el elipsoide de la superficie de onda es alargado, y negativo cuando dicho elipsoide es achatado. En el primer caso $e < o$, ó bien $\varepsilon > \omega$; en el segundo $e > o$; $\varepsilon < \omega$. De la construcción de Huygens se deduce que en los cristales positivos el rayo extraordinario está entre el ordinario y el eje óptico, y que en los segundos, el ordinario está entre el extraordinario y el eje.

2. Elipsoide de Fresnel y elipsoide de los índices.

Las dos superficies consideradas, la de onda y la de velocidades normales, pueden ser construídas por un procedimiento especial debido á Fresnel.

Sea, en primer lugar, el elipsoide llamado de Fresnel, cuyo radio polar vale e y cuyo radio ecuatorial vale o ; su ecuación será

$$\frac{x^2 + y^2}{o^2} + \frac{z^2}{e^2} = 1$$

Hallemos los semiejes de la elipse de intersección de dicho elipsoide con un plano diametral, cuya normal forma el ángulo ψ con el eje óptico. Estos semiejes estarán situados el uno en el plano ecuatorial y valdrá o y el otro en la sección principal (orientación del plano determinado por el eje óptico y la normal al plano en cuestión) valiendo

$$s_e = \sqrt{\frac{1}{\frac{\cos^2 \psi}{o^2} + \frac{\sen^2 \psi}{e^2}}}$$

y comparando con [1'] se deduce inmediatamente que «la superficie de onda puede ser construída tomando sobre cada dirección, que pasa por el origen, longitudes iguales á los semiejes de la elipse de intersección del plano normal á dicha dirección, que pasa por el centro, y del elipsoide de Fresnel».

Para la superficie de velocidades normales emplearemos el elipsoide llamado de los índices, cuyo semieje polar vale $\frac{1}{e} = \omega$ y el ecuatorial $\frac{1}{o} = \omega$. Su ecuación será

$$(x^2 + y^2) o^2 + z^2 e^2 = 1$$

y un plano diametral cuya normal forma con el eje z el ángulo φ lo cortará, según una elipse, cuyos semiejes valdrán, el perpendicular á la sección principal $\frac{1}{o}$ y el situado en la misma

$$n_e = \frac{1}{\sqrt{o^2 \cos^2 \varphi + e^2 \sin^2 \varphi}}$$

y comparando con [2] resulta que «la superficie de velocidades normales puede construirse tomando sobre cada recta que pasa por el centro, longitudes recíprocas á los semiejes de la elipse de intersección del elipsoide de índices, con un plano diametral perpendicular á la recta en cuestión».

Experimentalmente se ha observado que el rayo ordinario vibra perpendicularmente á la sección principal y el ordinario paralelamente á ella, y, por lo tanto, podremos decir que «los semiejes de la elipse que por su magnitud determinan las velocidades de propagación de los rayos, determinan por su dirección las normales á los planos de polarización correspondientes», y análogamente teniendo en cuenta que las vibraciones se verifican en el plano de la onda podremos decir: «Los semiejes que por sus recíprocas dan las velocidades normales de las ondas, determinan también las direcciones de vibración correspondientes.»

CAPÍTULO II

CRISTALES BIÁXICOS

1. Superficie de velocidades normales.

Los fenómenos de la doble refracción en los cristales biáxicos (sistemas rómbico, monoclinico y triclinico) fueron descubiertos por Biot y Brewster, creyendo Joung que podrían explicarse mediante una generalización de la hipótesis de Huygens, esto es, admitiendo que en estos cristales la superficie de onda se componía de una esfera y de un elipsoide de tres ejes; pero la experiencia demostró que ninguno de los rayos refractados cumplía las leyes ordinarias de la refracción. Fresnel fué quien dió la explicación completa de estos fenómenos, generalizando para los cristales biáxicos las construcciones de la superficie de onda y de velocidades normales que había encontrado para los uniáxicos, hipótesis comprobada en todas sus consecuencias, y en particular de un modo sorprendente en los fenómenos de la refracción cónica.

En los cristales biáxicos existen, desde el punto de vista óptico, tres ejes de simetría binaria, en el sistema rómbico son independientes de la luz empleada, de la presión y de la temperatura, en el monoclinico dos ejes, y en el triclinico los tres dependen de la longitud de onda y de las condiciones exteriores.

Según lo dicho, para construir la superficie de velocidades normales, bastará tomar sobre cada dirección longitudes recíprocas de los semiejes de la elipse de intersección del elipsoide de los índices, con un plano diametral normal á dicha dirección. Si a, b, c , son las *velocidades normales principales*, la ecuación del elipsoide de los índices es

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1 \quad [3]$$

Propongámonos determinar las dos velocidades normales q_1, q_2 , según una dirección, cuyos cosenos directores con respecto á los ejes de simetría óptica del cristal son v_1, v_2, v_3 . La ecuación del plano diametral normal á dicha dirección es

$$v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \quad [4]$$

y las citadas velocidades serán los valores máximo y mínimo del radio vector $\frac{1}{q} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ donde x, y, z deben satisfacer á las ecuaciones [3] y [4]. La condición de máximo ó mínimo nos da

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

Por otro lado, diferenciando [3] y [4] resulta

$$a^2 x dx + b^2 y dy + c^2 z dz = 0$$

$$v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = 0$$

y entre las ecuaciones anteriores y la

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

debemos eliminar x, y, z, dx, dy, dz . Para ello emplearemos el método de Lagrange que da

$$x - \lambda a^2 x - \lambda' v_1 = 0$$

$$y - \lambda b^2 y - \lambda' v_2 = 0$$

$$z - \lambda c^2 z - \lambda' v_3 = 0$$

Multiplicando respectivamente por x, y, z , sumando, y teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores resulta

$$\frac{1}{q^2} - \lambda = 0; \quad \lambda = \frac{1}{q^2}$$

y sustituyendo en el sistema anterior

$$\left. \begin{aligned} x \left(1 - \frac{a^2}{q^2} \right) &= \lambda' v_1 & x &= \frac{q^2 v_1}{q^2 - a^2} \lambda' \\ y \left(1 - \frac{b^2}{q^2} \right) &= \lambda' v_2 & y &= \frac{q^2 v_2}{q^2 - b^2} \lambda' \\ z \left(1 - \frac{c^2}{q^2} \right) &= \lambda' v_3 & z &= \frac{q^2 v_3}{q^2 - c^2} \lambda' \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

multiplicando por v_1, v_2, v_3 , respectivamente, sumando y teniendo en cuenta [4], resulta por fin

$$\frac{v_1^2}{q^2 - a^2} + \frac{v_2^2}{q^2 - b^2} + \frac{v_3^2}{q^2 - c^2} = 0 \quad [6]$$

que nos da para cada sistema de valores v_1, v_2, v_3 , las velocidades normales q , y que es, por lo tanto, la ecuación polar de la superficie de velocidades normales.

Respecto á la polarización de las ondas, resulta análogamente á lo que pasaba en los cristales uniáxicos, que las direcciones de vibración vienen dadas por los semiejes de la elipse, que han servido para determinar las velocidades normales. Por lo tanto, las ecuaciones [5], después de poner en ellas los valores de q dados por [6], nos darán las coordenadas de los extremos de los semiejes de la referida elipse, y, por lo tanto, estas coordenadas serán proporcionales á los cosenos directores de las direcciones de vibración, y como de dichas ecuaciones se deduce

$$x : y : z = \frac{v_1}{q^2 - a^2} : \frac{v_2}{q^2 - b^2} : \frac{v_3}{q^2 - c^2} \quad [7]$$

dichos cosenos directores, que designaremos por $\pi_{1h}, \pi_{2h}, \pi_{3h}$ y $\pi_{12}, \pi_{23}, \pi_{31}$, serán

$$\pi_{1h} = \frac{v_1}{q h^2 - a^2} \text{ Sh}; \quad \pi_{2h} = \frac{v_2}{q h^2 - b^2} \text{ Sh}; \quad \pi_{3h} = \frac{v_3}{q h^2 - c^2} \text{ Sh} \quad [8]$$

siendo

$$\text{Sh}^2 = \frac{1}{\frac{v_1^2}{(q^2 - a^2)^2} + \frac{v_2^2}{(q^2 - b^2)^2} + \frac{v_3^2}{(q^2 - c^2)^2}}, \quad h = 1, 2$$

2. Binormales.

Escribiendo las ecuaciones de la superficie de velocidades normales en coordenadas cartesianas resulta

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - [x^2(b^2 + c^2) + y^2(c^2 + a^2) + z^2(a^2 + b^2)](x^2 + y^2 + z^2) + b^2 c^2 x^2 + c^2 a^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = 0$$

y las secciones por los planos principales son

$$\begin{aligned} \text{Plano } xy & (x^2 + y^2 - c^2) [(x^2 + y^2)^2 - (b^2 x^2 + a^2 y^2)] = 0 \\ \text{» } yz & (y^2 + z^2 - a^2) [(y^2 + z^2)^2 - (c^2 y^2 + b^2 z^2)] = 0 \\ \text{» } xz & (z^2 + x^2 - b^2) [(x^2 + z^2)^2 - (a^2 z^2 + c^2 x^2)] = 0 \end{aligned}$$

Cada sección se compone de una circunferencia y un óvalo.

JSDR/77490

Además, si $a > b > c$, las dos curvas se deben cortar en el plano x, z , en cuatro puntos simétricos, dos á dos respecto al centro. En las direcciones correspondientes á estos puntos, las dos ondas se propagan con igual velocidad, es decir, existe una sola onda refractada y corresponden evidentemente á las normales de las secciones cíclicas del elipsoide de los índices. A estas direcciones se las llama, en general, *ejes ópticos*; pero como también suelen darse esta denominación á las direcciones de igual velocidad según el rayo, es preferible llamarlas *binormales*, de acuerdo con Fletcher. En la dirección de las binormales el estado de vibración es indeterminado, por no existir máximo ni mínimo del radio vector, en la sección correspondiente del elipsoide de índices.

A Fresnel se debe también un medio sencillo, para determinar los planos de polarización de cada una de las ondas que se propagan en una

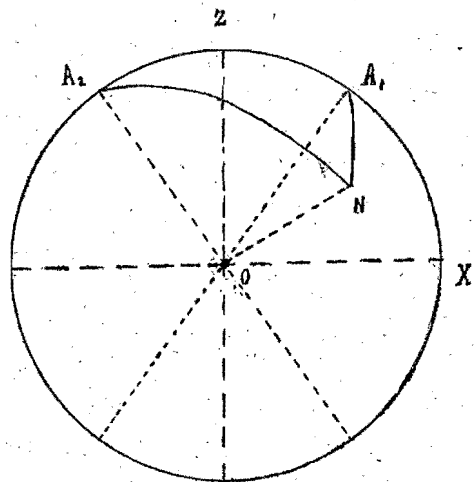


Figura 1.ª

dirección dada ON . Consideremos los planos que pasan por ON , y por las binormales OA_1 y OA_2 (fig. 1.ª). Las normales á estos planos tendrán dentro del elipsoide de los índices igual longitud, por estar en las secciones cíclicas, y como además están en la sección normal á ON , los ejes de la elipse que se hallen en dicha sección, deberán ser bisectrices del ángulo de dichas normales, y, por lo tanto, los planos de polarización de las ondas bisecarán el ángulo de los planos NOA_1 y NOA_2 . «Los planos de polarización de las ondas planas que se propagan en una cierta dirección como normal, son los bisectores del ángulo formado por los planos determinados por dicha dirección y las binormales.»

3. Superficie de onda. Birradiales.

La superficie de onda puede construirse del mismo modo que para los cristales uniáxicos, partiendo del elipsoide de Fresnel.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

esto es, tomando sobre cada dirección longitudes iguales á los ejes de la elipse de intersección de dicho elipsoide, con un plano diametral normal á dicha dirección. Según esto, para obtener la ecuación de la superficie de onda, bastará cambiar en la de velocidades normales a, b, c , por sus recíprocos y $\frac{1}{q}$ por s que representará ahora la velocidad de propagación según el rayo. Resulta, por lo tanto,

$$\frac{\sigma_1^2}{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a^2}} + \frac{\sigma_2^2}{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{b^2}} + \frac{\sigma_3^2}{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{c^2}} = 0$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, son los cosenos directores de la dirección considerada. En coordenadas cartesianas dicha ecuación es

$$(x^2 + y^2 + z^2) (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - a^2(b^2 + c^2)x^2 - b^2(c^2 + a^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0$$

y las secciones producidas por los planos coordenados se componen cada una de una circunferencia y una elipse. En el plano x, z estas curvas se cortan en cuatro puntos simétricos, dos á dos, á los cuales corresponden direcciones en las que ambos rayos tienen igual velocidad, y que denominaremos *birradiales*.

Análogamente á lo demostrado para la polarización de las ondas, resulta ahora «que los planos de polarización de los dos rayos que se propagan en una cierta dirección, son los bisectores del ángulo formado por los planos, que determinan dicha dirección y las birradiales».

4. Deducción de la ecuación de la superficie de onda partiendo de la de velocidades normales.

Como indica su definición, es posible encontrar la ecuación de la superficie de onda, partiendo de la de velocidades normales y recíproca-

mente, pues la primera es la envolvente de los planos trazados en cada punto de la segunda, perpendicularmente al radio vector.

Una onda plana que en el tiempo 0 pasa por el origen de coordenadas normalmente á la dirección (v_1, v_2, v_3) tiene por ecuación en el tiempo t (*)

$$v_1 x + v_2 y + v_3 z = q \quad [9]$$

donde q es la velocidad, según la normal, en el medio considerado, viniendo dada por

$$\frac{v_1^2}{q^2 - a^2} + \frac{v_2^2}{q^2 - b^2} + \frac{v_3^2}{q^2 - c^2} = 0 \quad [10]$$

existiendo además la relación

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \quad [11]$$

La envolvente de todas las ondas (9) para los distintos valores de v_1, v_2, v_3 y q que satisfagan las anteriores relaciones, constituye la superficie de onda. Las coordenadas x', y', z' del punto de contacto de la onda (9), deben satisfacer, en virtud de la definición de superficie envolvente, á las ecuaciones de todas las ondas que se obtengan, dando incrementos indefinidamente pequeños á los parámetros v_1, v_2, v_3 y q , siempre que los nuevos valores incrementados satisfagan á condiciones análogas á las (10) y (11). Por lo tanto, tendremos

$$x' dv_1 + y' dv_2 + z' dv_3 = dq \quad [12]$$

$$v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3 = 0 \quad [13]$$

$$\frac{v_1 dv_1}{q^2 - a^2} + \frac{v_2 dv_2}{q^2 - b^2} + \frac{v_3 dv_3}{q^2 - c^2} = \frac{q dq}{S} \quad [14]$$

siendo

$$S = \frac{1}{\frac{v_1^2}{(q^2 - a^2)^2} + \frac{v_2^2}{(q^2 - b^2)^2} + \frac{v_3^2}{(q^2 - c^2)^2}}$$

y ahora se trata de eliminar los parámetros v_1, v_2, v_3, q y sus diferenciales, con lo cual obtendremos una ecuación en x', y', z' , que será la de la super-

(*) Recordemos que tomamos como unidad la velocidad de la luz en el vacío, y que, por lo tanto, la unidad de tiempo será el tiempo empleado por la luz en recorrer un centímetro en el vacío.

ficie de onda. Para ello emplearemos el método de los factores indeterminados de Lagrange, con lo que se tiene

$$\left(x' + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 \frac{v_1}{q^2 - a^2}\right) dv_1 + \left(y' + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 \frac{v_2}{q^2 - b^2}\right) dv_2 + \left(z' + \lambda_1 v_3 + \lambda_2 \frac{v_3}{q^2 - c^2}\right) dv_3 - \left(1 + \lambda_2 \frac{q}{S^2}\right) dq = 0 \quad [15]$$

Como entre las diferenciales dv_1, dv_2, dv_3 y dq no existen más que las condiciones (13) y (14), podemos considerar dos como independientes, por ejemplo: dv_1 y dv_2 , y disponiendo de λ_1 y λ_2 de modo que anulen los coeficientes de dv_3 y dq , la ecuación resultante deberá verificarse para cualquier valor de dv_1 y dv_2 . Por lo tanto,

$$x' + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 \frac{v_1}{q^2 - a^2} = 0 \quad [16]$$

$$y' + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 \frac{v_2}{q^2 - b^2} = 0 \quad [17]$$

$$z' + \lambda_1 v_3 + \lambda_2 \frac{v_3}{q^2 - c^2} = 0 \quad [18]$$

$$1 + \lambda_2 \frac{q}{S^2} = 0 \quad [19]$$

con lo que tenemos un sistema que, unido á las ecuaciones (9), (10), (11), permite resolver el problema; pues tenemos siete ecuaciones y seis parámetros por eliminar, esto es, $v_1, v_2, v_3, q, \lambda_1, \lambda_2$.

Eliminemos λ_1 y λ_2 . Para tener λ_1 basta multiplicar [16], [17] y [18] por v_1, v_2 y v_3 , respectivamente, y sumar, teniendo en cuenta [9], [10] y [11], con lo que resulta

$$\lambda_1 = -q$$

y de [19]

$$\lambda_2 = -\frac{S^2}{q}$$

y sustituyendo en [16], [17] y [18] queda

$$\begin{aligned} x' &= qv_1 + \frac{S^2}{q} \frac{v_1}{q^2 - a^2} = v_1 q + \frac{\pi_1 S}{q} \\ y' &= qv_2 + \frac{S^2}{q} \frac{v_2}{q^2 - b^2} = v_2 q + \frac{\pi_2 S}{q} \\ z' &= qv_3 + \frac{S^2}{q} \frac{v_3}{q^2 - c^2} = v_3 q + \frac{\pi_3 S}{q} \end{aligned} \quad [20]$$



donde hemos introducido los valores que habíamos obtenido para los cosenos directores de las direcciones de vibración.

Elevando el cuadrado, sumando y observando que debe ser

$$v_1\pi_1 + v_2\pi_2 + v_3\pi_3 = 0$$

por verificarse las vibraciones en el plano de la onda, resulta

$$s^2 = q^2 + \frac{S^2}{q^2} \quad [21]$$

y eliminando S entre [20] y [21] queda

$$\begin{aligned} x' &= v_1 q \frac{s^2 - a^2}{q^2 - a^2} \\ y' &= v_2 q \frac{s^2 - b^2}{q^2 - b^2} \\ z' &= v_3 q \frac{s^2 - c^2}{q^2 - c^2} \end{aligned}$$

é introduciendo los cosenos directores $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, del radio vector que va al punto (x', y', z') ; las últimas igualdades pueden escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 s}{s^2 - a^2} &= \frac{v_1 q}{q^2 - a^2} \\ \frac{\sigma_2 s}{s^2 - b^2} &= \frac{v_2 q}{q^2 - b^2} \\ \frac{\sigma_3 s}{s^2 - c^2} &= \frac{v_3 q}{q^2 - c^2} \end{aligned} \quad [22]$$

Multiplicando ahora estas igualdades por $x' = \sigma_1 s, y' = \sigma_2 s, z' = \sigma_3 s$, respectivamente, y sumando, resulta

$$\frac{s^2 \sigma_1^2}{s^2 - a^2} + \frac{s^2 \sigma_2^2}{s^2 - b^2} + \frac{s^2 \sigma_3^2}{s^2 - c^2} = \left\{ \frac{v_1 \sigma_1}{q^2 - a^2} + \frac{v_2 \sigma_2}{q^2 - b^2} + \frac{v_3 \sigma_3}{q^2 - c^2} \right\} sq \quad [23]$$

Ahora bien; haciendo la misma operación con las igualdades [20], resulta

$$s^2 = \left\{ \frac{v_1 \sigma_1}{q^2 - a^2} + \frac{v_2 \sigma_2}{q^2 - b^2} + \frac{v_3 \sigma_3}{q^2 - c^2} \right\} \frac{sS^2}{q} + (v_1 x' + v_2 y' + v_3 z') q$$

y como según [9] $v_1 x' + v_2 y' + v_3 z' = q$, y teniendo en cuenta [21]

$$\left\{ \frac{v_1 \sigma_1}{q^2 - a^2} + \frac{v_2 \sigma_2}{q^2 - b^2} + \frac{v_3 \sigma_3}{q^2 - c^2} \right\} s = \frac{(s^2 - q^2) q}{S^2} = \frac{1}{q}$$

con lo cual la ecuación [23] se transforma en

$$\frac{s^2 \sigma_1^2}{s^2 - a^2} + \frac{s^2 \sigma_2^2}{s^2 - b^2} + \frac{s^2 \sigma_3^2}{s^2 - c^2} = 1$$

y restando de $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, queda

$$\frac{a^2 \sigma_1^2}{s^2 - a^2} + \frac{b^2 \sigma_2^2}{s^2 - b^2} + \frac{c^2 \sigma_3^2}{s^2 - c^2} = 0$$

que es la ecuación de la superficie de onda.

Las ecuaciones [20] y [21] ponen de manifiesto que el rayo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, del que un cateto es q y el otro $\frac{S}{q}$ con los cosenos directores v_1, v_2, v_3 y π_1, π_2, π_3 , respectivamente; por lo tanto, podemos enunciar el siguiente teorema:

«La normal á la onda, el rayo y la dirección de vibración están en un mismo plano, llamado *plano de vibración*.»

Según esto es fácil resolver el problema de determinar los dos rayos correspondientes á una dirección dada como normal, é inversamente determinar las normales correspondientes á las dos ondas, que se propagan según una misma dirección como rayo.

En lo sucesivo haremos con frecuencia uso de la *superficie de índices* obtenida, llevando desde el origen sobre cada dirección longitudes inversamente proporcionales á las velocidades normales. Esta superficie será la polar recíproca de la de onda y la inversa de la de velocidades normales, teniendo, como ésta, cuatro puntos cónicos en la dirección de las binormales. La ecuación de la superficie de índices, deducida inmediatamente de la de velocidades normales será

$$\frac{v_1^2}{a^2 - \frac{1}{n^2}} + \frac{v_2^2}{b^2 - \frac{1}{n^2}} + \frac{v_3^2}{c^2 - \frac{1}{n^2}} = 0$$

donde n representa el índice y el radio vector en la dirección (v_1, v_2, v_3) .

Siendo la superficie de índices polar de la onda, su pedal será inversa de la misma, de modo que si dada la normal á una onda trazamos el plano tangente á la superficie de índices en el punto de intersección con dicha normal, la perpendicular al citado plano tangente nos da la dirección del rayo correspondiente, y su magnitud es igual á la inversa de la velocidad según el rayo.

CAPÍTULO III

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

1. Refracción de las normales á las ondas.

Cuando una onda incide sobre la superficie de separación de dos medios birrefringentes, nacen, en general, dos ondas reflejadas y dos refractadas que pueden construirse mediante el principio de Huygens, de cuya construcción se deduce que las normales á las ondas reflejadas y refractadas están en el plano de incidencia, y que si representamos por $i, r_1^0, r_2^0, r_1, r_2$ los ángulos que forman la normal incidente, las reflejadas y las refractadas con la normal á la superficie, y por $q^0, q_1^0, q_2^0, q_1, q_2$ sus velocidades correspondientes, se verificará

$$\frac{\text{sen } i}{q^0} = \frac{\text{sen } r_1^0}{q_1^0} = \frac{\text{sen } r_2^0}{q_2^0} = \frac{\text{sen } r_1}{q_1} = \frac{\text{sen } r_2}{q_2} \quad [1]$$

de modo que para las normales á las ondas se cumplen las leyes ordinarias de la refracción, pero con la circunstancia de que $n_h = \frac{1}{q_h}$ es función de la dirección de propagación, lo cual complica extraordinariamente el problema.

Por medio de la superficie de índices se pueden construir las normales correspondientes á las ondas reflejadas y refractadas, por un procedimiento muy sencillo debido á Hamilton.

Sea (fig. 2.^a) G, G la traza de la superficie de separación de ambos medios, y supongamos que el plano del dibujo es el de incidencia. Tracemos á partir de un punto O de la superficie de separación las intersecciones de la superficie de índices de cada medio con el plano de incidencia, que se compondrán, cada una, de dos curvas sin puntos comunes en general (á menos que el plano de incidencia pase por alguna binormal). Sea C^0 dicha intersección para el primer medio (el de arriba) y C para el segundo (el inferior). En la dirección de la normal incidente tomemos una longitud ON^0 igual á la inversa de la velocidad de propagación, estando, por lo tanto, el punto N^0 sobre la curva C^0 . Desde este punto tracemos una perpendicu-

lar á la superficie límite, que cortará en general á la curva C^0 en otros tres puntos N_1^0, N_2^0, N_3^0 , y á la C en cuatro N_1, N_2, N_3, N_4 . Las rectas $ON_1^0,$

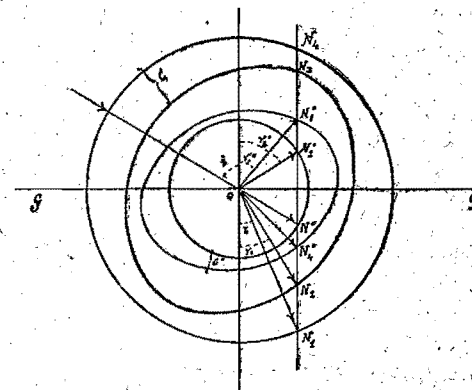


Figura 2.^a

y ON_2^0 representan las normales reflejadas; las ON_1 y ON_2 las refractadas; pues, en efecto, como los radios vectores de la superficie de índices representan los índices en las direcciones respectivas, resulta llamando r'_h y r_h á los ángulos de las rectas ON_h^0 y ON_h con la normal, i al ángulo de incidencia

$$n_h^0 \text{ sen } r_h^0 = n_h \text{ sen } r_h = n^0 \text{ sen } i = o P$$

por consiguiente, son satisfechas las relaciones [1].

La dirección ON_2^0 representa evidentemente la dirección de otra normal incidente, que daría las mismas normales reflejadas y refractadas. En cuanto á las direcciones ON_3 y ON_4 representan las direcciones de las normales reflejadas en la segunda cara del segundo medio, cuando éste tiene la forma de una lámina de caras paralelas, como se comprueba fácilmente aplicando la construcción anterior, á partir de cualquiera de las direcciones ON_1 y ON_2 , suponiendo que se reflejan en una superficie paralela á G, G .

En cuanto á los rayos, sabemos que se obtendrán sin más que trazar desde O las normales á los planos tangentes á las superficies de índices en los puntos N_1^0, N_2^0, N_1 y N_2 . Se comprende que no estarán en el plano de incidencia, á menos que éste lo sea de simetría de dichas superficies.

En lo sucesivo, supondremos que el primer medio es isótropo, en cuyo caso la superficie de índice correspondiente será una esfera. Si el índice de dicho primer medio es suficientemente grande, podrá ocurrir que, para

ciertas direcciones de la normal incidente, la perpendicular N^oP deje de cortar á algunas de las hojas de la superficie de índices del segundo medio. en cuyo caso faltará la normal correspondiente y desaparecerá una de las ondas refractadas; para direcciones aún más inclinadas sobre el plano de separación, la perpendicular N^oP puede dejar de cortar á ambas hojas de dicha superficie, y en este caso faltarán las dos ondas refractadas. Se dice que en estos casos existe *reflexión total* para una ó las dos ondas refractadas, pues entonces toda la energía luminosa es transportada por los rayos reflejados. Si suponemos que la normal incidente forma ángulos de incidencia crecientes, la reflexión total empieza, para cada onda, cuando la perpendicular N^oP es tangente á la hoja correspondiente de la superficie de índices.

2. Parámetros ópticos de los cristales.

Hasta ahora hemos supuesto que todas las superficies empleadas se hallaban referidas á los ejes de simetría óptica de los cristales. En el sistema rómbico esto es imposible, porque se conoce de antemano la dirección de los ejes, que es independiente del color de la luz empleada y de las condiciones exteriores de presión y temperatura; pero en el sistema monoclinico, en el que es variable con las citadas circunstancias la dirección de dos de los ejes, y en el triclinico, en el que lo son las tres, esto no puede verificarse. En el primer sistema quedan determinadas las propiedades ópticas de un cristal, en cuanto se determinan las tres velocidades principales a, b, c en la dirección de los ejes. Por el contrario, en los otros dos es necesario conocer, además, la dirección de los ejes, y, por lo tanto, hay que añadir á la determinación de las constantes a, b, c la de dos magnitudes angulares en el sistema monoclinico y la de tres en el triclinico. En general son, por lo tanto, necesarios seis parámetros ópticos para caracterizar un cristal. Estos seis parámetros pueden elegirse del modo siguiente,

Elijamos un sistema de coordenadas rectangulares x', y', z' , y supongamos que su posición queda definida con respecto á los ejes de simetría óptica x, y, z , por los cosenos directores representados esquemáticamente en el siguiente cuadro:

	x'	y'	z'
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Las relaciones entre las coordenadas x, y, z y x', y', z' de un mismo punto serán

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \quad y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \quad z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \quad [2]$$

La ecuación del elipsoide de índices que en el sistema (x, y, z) es

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

en el (x', y', z') será

$$a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2a_{23} y'z' + 2a_{31} z'x' + 2a_{12} x'y' = 1 \quad [3]$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{11} &= a^2 \alpha_1^2 + b^2 \beta_1^2 + c^2 \gamma_1^2 & a_{23} &= a^2 \alpha_2 \alpha_3 + b^2 \beta_2 \beta_3 + c^2 \gamma_2 \gamma_3 \\ a_{22} &= a^2 \alpha_2^2 + b^2 \beta_2^2 + c^2 \gamma_2^2 & a_{31} &= a^2 \alpha_3 \alpha_1 + b^2 \beta_3 \beta_1 + c^2 \gamma_3 \gamma_1 \\ a_{33} &= a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2 & a_{12} &= a^2 \alpha_1 \alpha_2 + b^2 \beta_1 \beta_2 + c^2 \gamma_1 \gamma_2 \end{aligned}$$

Estas seis magnitudes $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{12}$ son las que tomaremos como parámetros ópticos de un cristal. Una vez que sean conocidas, el sistema anterior unido á las seis condiciones

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

nos permite determinar las constantes a, b, c y los cosenos directores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$.

Si á la superficie de índices aplicamos el mismo cambio de coordenadas, su ecuación que en el sistema x, y, z es

$$(x^2 + y^2 + z^2) (b^2 c^2 x^2 + c^2 a^2 y^2 + a^2 b^2 z^2) - [(b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2] + 1 = 0$$

se convertirá en

$$\begin{aligned} &(x'^2 + y'^2 + z'^2) \{x'^2 (b^2 c^2 \alpha_1^2 + c^2 a^2 \beta_1^2 + a^2 b^2 \gamma_1^2) + \dots + \dots \\ &\quad + 2y'z' (b^2 c^2 \alpha_2 \alpha_3 + c^2 a^2 \beta_2 \beta_3 + a^2 b^2 \gamma_2 \gamma_3) + \dots + \dots\} \quad [4^a] \\ &- x'^2 [(b^2 + c^2) \alpha_1^2 + (c^2 + a^2) \beta_1^2 + (a^2 + b^2) \gamma_1^2] - \dots - \dots \\ &- 2y'z' [(b^2 + c^2) \alpha_2 \alpha_3 + (c^2 + a^2) \beta_2 \beta_3 + (a^2 + b^2) \gamma_2 \gamma_3] - \dots - \dots + 1 = 0 \end{aligned}$$

é introduciendo los parámetros $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{42}$ resultará

$$\begin{aligned} & (x'^2 + y'^2 + z'^2) \{x'^2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + y'^2(a_{33}a_{11} - a_{31}^2) + \\ & z'^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + 2y'z'(a_{31}a_{12} - a_{23}a_{11}) + 2z'x'(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \quad [4b] \\ & + 2x'y'(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})\} - x'^2(a_{22} + a_{33}) - y'^2(a_{33} + a_{11}) - z'^2(a_{11} + a_{22}) \\ & + 2y'z'a_{23} + 2z'x'a_{31} + 2x'y'a_{12} + 1 = 0 \end{aligned}$$

y en coordenadas polares, esto es, haciendo $x' = v_1' r', y' = v_2' r', z' = v_3' r',$
 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$

$$\begin{aligned} & v_1'^2 \left[\left(a_{22} - \frac{1}{r'^2} \right) \left(a_{33} - \frac{1}{r'^2} \right) - a_{23}^2 \right] + \dots + \dots \\ & + 2v_2'v_3' \left[a_{31}a_{12} - a_{23} \left(a_{11} - \frac{1}{r'^2} \right) \right] + \dots + \dots = 0 \end{aligned}$$

Eligamos como eje z' la normal á la superficie de separación, dirigida hacia el segundo medio, como eje x' la traza del plano de incidencia sobre dicha superficie, y como eje y' la perpendicular á ambas. La ecuación de la curva C (fig. 2.^a) la obtendremos sin más que hacer $y' = 0$, con lo que obtendremos una ecuación de cuarto grado, que será satisfecha por las coordenadas de los puntos N_h ($h = 1, 2$) que son $x'_h = n^0 \text{sen } i;$
 $z'_h = n^0 \text{sen } i \text{ cot } r_h$ donde n^0 es el índice del primer medio que suponemos isótropo, y, por lo tanto, la coordenada x'_h es conocida, y substituyendo en la ecuación de la curva C , tendremos una ecuación de cuarto grado en $\text{cot } r_h$ ó $\text{tg } r_h$ cuyas raíces nos darán los ángulos $r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}$.

Esta ecuación es

$$\begin{aligned} & [a_{11} - 2a_{31} \text{tg } r + (a_{32} - K^2) \text{tg}^2 r] [a_{22} + (a_{22} - K^2) \text{tg}^2 r] \\ & - (a_{12} - a_{23} \text{tg } r)^2 (1 + \text{tg}^2 r) = 0 \quad [5] \end{aligned}$$

donde $K = \frac{1}{n^0 \text{sen } i}$

Verificando la misma sustitución en la ecuación de la curva C que resulta de [4.^a], obtendremos una ecuación que, ordenada respecto á las potencias de $\text{tg } r$, es

$$f(\text{tg } r) = A_0 \text{tg}^4 r + A_1 \text{tg}^3 r + A_2 \text{tg}^2 r + A_3 \text{tg } r + A_4 = 0 \quad [6]$$

donde los coeficientes A_0, \dots, A_4 tienen los siguientes valores (Kirchhoff):

$$\begin{aligned} A_0 &= n^0 \text{sen}^4 i [b^2 c^2 \alpha_1^2 + c^2 a^2 \beta_1^2 + a^2 b^2 \gamma_1^2] \\ &- n^0 \text{sen}^2 i [(b^2 + c^2) \alpha_1^2 + (c^2 + a^2) \beta_1^2 + (a^2 + b^2) \gamma_1^2] + 1 \\ A_1 &= 2 n^0 \text{sen}^4 i [b^2 c^2 \alpha_1 \alpha_3 + c^2 a^2 \beta_1 \beta_3 + a^2 b^2 \gamma_1 \gamma_3] \\ &- 2 n^0 \text{sen}^2 i [(b^2 + c^2) \alpha_1 \alpha_3 + (c^2 + a^2) \beta_1 \beta_3 + (a^2 + b^2) \gamma_1 \gamma_3] \\ A_2 &= n^0 \text{sen}^4 i [b^2 c^2 (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) + c^2 a^2 (\beta_1^2 + \beta_3^2) + a^2 b^2 (\gamma_1^2 + \gamma_3^2)] \\ &- n^0 \text{sen}^2 i [(b^2 + c^2) \alpha_3^2 + (c^2 + a^2) \beta_3^2 + (a^2 + b^2) \gamma_3^2] \\ A_3 &= 2 n^0 \text{sen}^4 i [b^2 c^2 \alpha_1 \alpha_3 + c^2 a^2 \beta_1 \beta_3 + a^2 b^2 \gamma_1 \gamma_3] \\ A_4 &= n^0 \text{sen}^4 i [b^2 c^2 \alpha_3^2 + c^2 a^2 \beta_3^2 + a^2 b^2 \gamma_3^2] \end{aligned}$$

3. Reflexión total.

Si las cuatro raíces de [5] y [6] son reales, existirán dos ondas refractadas y dos reflejadas en la segunda cara del cristal, correspondiendo las dos más pequeñas á las primeras y las otras dos á las segundas. Si sólo dos raíces son reales, no existirá más que una onda refractada y otra reflejada en la segunda cara del prisma, y si todas son imaginarias, ninguna, verificándose la reflexión total de una ó de las dos ondas respectivamente. Por lo tanto, la condición analítica para el límite de la reflexión total será que $f(\text{tg } r) = 0$ tenga dos de las raíces iguales. Esto ocurrirá cuando el discriminante de la ecuación $f(\text{tg } r) = 0$ sea nulo, y por lo tanto

$$D = \Delta^3 - 6 \Delta'^2 = 0 \quad [7]$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(A_0 A_4 - 4 A_1 A_3 + 3 A_2^2) \\ \Delta' &= 6 \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Si el plano de separación es fijo y se varía el plano de incidencia, tendremos para cada posición de este plano, en el primer medio, dos direcciones correspondientes á los rayos, para los cuales empieza la reflexión total de cada una de las ondas; los ángulos que forman con la normal se denominan ángulos límites. El lugar geométrico de los citados rayos se compondrá de dos superficies cónicas, que llamaremos *conos límites de la reflexión total*. Como $D = 0$ según manifiestan las relaciones [6'] nos da $\text{sen } i$ para las diferentes posiciones de la traza del plano de incidencia sobre el de separación, (eje x') la ecuación, $D = 0$ es la de los conos límites de la reflexión total.

Estos conos pueden construirse, como se desprende de la construcción de Hamilton, trazando desde el origen de coordenadas rectas que se apoyan en la intersección de la esfera de radio n^o (índice del medio isótropo) con el cilindro perpendicular á la superficie de separación y tangente á la superficie de índices.

Al comenzar la reflexión total, la recta $N^o P$ es tangente á la superficie de índices del segundo medio, y, por lo tanto, el plano tangente en el punto de contacto de aquélla es perpendicular al plano de separación, y el rayo correspondiente estará, por consiguiente, en dicho plano límite, pero en general fuera del plano de incidencia (á menos que éste lo sea de simetría de la superficie de índices). Por el contrario, la normal está como siempre en el plano de incidencia, pero fuera del plano límite (excepto cuando éste es plano de simetría de la superficie de índices).

Si se lleva la inversa de la magnitud $OP = n^o = \text{sen } i$ correspondiente al comienzo de reflexión total sobre el eje x' para las diversas posiciones del plano de incidencia, se obtiene una curva que es la pedal de la intersección de la superficie de onda con el plano de separación, como

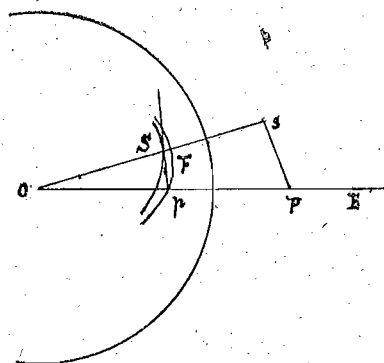


Figura 3.a

resulta de la figura (3.a), donde $OS = \frac{1}{OS}$ representa el rayo rasante correspondiente á un plano de incidencia paralelo á OP , Sp , la traza de la onda que será perpendicular á OP (*) y tangente á la curva S de intersección del plano de separación con la superficie de onda, verificándose por la semejanza de los triángulos OSp y OsP que $\frac{oS}{oP} = \frac{Op}{Os}$ y por lo tanto, $OP \times Op = OS \times os = 1$.

(*) Cuando una recta es perpendicular á un plano, la proyección de la recta es perpendicular á la traza del plano.

CAPÍTULO IV

DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES ÓPTICAS DE LOS CRISTALES POR PROCEDIMIENTOS FUNDADOS EN LA REFLEXIÓN TOTAL

1. Cristales uniaxiales.

La ecuación [7] del cono límite se simplifica notablemente en el caso de los cristales uniaxiales. Partamos de la ecuación [6] y sea δ el ángulo que forma el eje óptico con la normal al plano de incidencia; elijamos como plano x, z (fig. 4.a) el determinado por I , la normal y el eje óptico, y

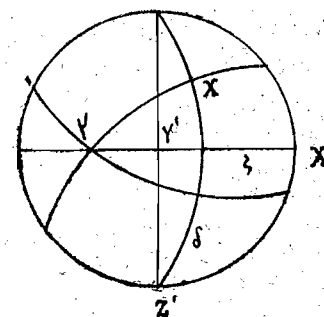


Figura 4.a

sea ζ el ángulo del plano de incidencia con el x, z , ó sea con la sección principal. En este caso

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \zeta \cos \delta & \beta_1 &= -\text{sen } \zeta & \gamma_1 &= \cos \zeta \text{sen } \delta \\ \alpha_2 &= \text{sen } \zeta \cos \delta & \beta_2 &= \cos \zeta & \gamma_2 &= \text{sen } \zeta \text{sen } \delta \\ \alpha_3 &= -\text{sen } \delta & \beta_3 &= 0 & \gamma_3 &= \cos \delta \end{aligned}$$

y la ecuación [6] se transforma haciendo además $a=e; b=c=0$ en

$$[(o^2 n^o \text{sen}^2 i - 1) \text{tg}^2 r + o^2 n^o \text{sen}^2 i] [C_0 \text{tg}^2 r + 2C_1 \text{tg} r + C_2] = 0$$

siendo

$$\begin{aligned} C_0 &= n^2 \operatorname{sen}^2 i [o^2 \cos \zeta \operatorname{sen}^2 \delta + e^2 (\operatorname{sen}^2 \zeta + \cos^2 \zeta \cos^2 \delta)] - 1 \\ &= n^2 \operatorname{sen}^2 i [e^2 + (o^2 - e^2) \operatorname{sen}^2 \delta \cos^2 \zeta] - 1 \\ C_1 &= n^2 (o^2 - e^2) \operatorname{sen}^2 i \cos \zeta \cos \delta \operatorname{sen} \delta \\ C_2 &= n^2 (o^2 \cos^2 \delta + e^2 \operatorname{sen}^2 \delta) \operatorname{sen}^2 i \end{aligned}$$

La condición para que la ecuación tenga dos raíces iguales es

$$\operatorname{sen} i_0 = \frac{1}{o n^0} = \frac{\omega}{n^0} \quad [1]$$

ó bien

$$C_0 C_2 - C_1^2 = 0$$

la primera de las cuales es la ecuación del cono límite correspondiente al rayo ordinario, y la segunda del extraordinario. Esta última se transforma poniendo, en vez de C_0 , C_1 y C_2 sus valores en

$$\operatorname{sen} i_e = \frac{q^0}{e} \sqrt{\frac{o^2 \cos^2 \delta + e^2 \operatorname{sen}^2 \delta}{o^2 \cos^2 \delta + e^2 \operatorname{sen}^2 \delta + (o^2 - e^2) \cos^2 \zeta \operatorname{sen}^2 \delta}} \quad [2]$$

Si el plano de incidencia es paralelo á la sección principal del plano de separación $\zeta = 0$, y por tanto,

$$\operatorname{sen} i_e = q^0 \sqrt{\frac{\cos^2 \delta}{e^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \delta}{o^2}} = \frac{q^2}{s_e} \quad [3]$$

donde s_e representa, según [1], página 6, la velocidad del rayo que se propaga en la recta de intersección del plano de separación con el de incidencia. En este caso, como resulta de [3], i_e es el mínimo del ángulo límite.

Cuando el plano de incidencia sea perpendicular á la sección principal del plano de separación $\zeta = 90^\circ$, y entonces

$$\operatorname{sen} i_e = \frac{q^0}{e} = \frac{\varepsilon}{n^0}$$

En este caso, la medida del ángulo i_e que es el máximo del ángulo límite, proporciona ε aun cuando no se conozca de antemano la posición del eje óptico; desde luego ω se determina, según [1], para cualquier incidencia. Además el eje óptico estará situado perpendicularmente al plano de

incidencia correspondiente á i_e máximo. Si se mide además el valor mínimo de i_e que se verifica en un plano perpendicular al anterior, de [3] se deduce

$$\operatorname{tg}^2 \delta = \frac{\frac{1}{s e^2} - \frac{1}{e^2}}{\frac{1}{o^2} - \frac{1}{s e^2}}$$

y por lo tanto se conoce también la posición del eje óptico.

2. Cristales biáxicos.

Según hemos visto en el § 4, página 24, la pedal de la intersección de la superficie de onda con la superficie de separación, es una curva tal, que su radio vector en una dirección dada, verifica la relación

$$n^0 \operatorname{sen} i = \frac{1}{r}$$

que pone de manifiesto que á los valores máximos ó mínimos de i , corresponden los mínimos ó máximos de r . Además, si el plano de separación no pasa por ninguna birradial, los planos de incidencia, para los cuales i es máximo ó mínimo, pasarán por los radios vectores r , que sean máximos ó mínimos, pues en estas circunstancias la tangente es perpendicular al radio vector.

Ahora bien, los máximos ó mínimos de r son en número de cuatro. En efecto, la ecuación de la superficie de onda en coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2) (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - a^2 (b^2 + c^2) x^2 - b^2 (c^2 + a^2) y^2 \\ - c^2 (a^2 + b^2) z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0 \end{aligned} \quad [4]$$

Sea la ecuación de la superficie de separación

$$1 x + m y + n z = 0 \quad [5]$$

El radio vector es

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \quad [6]$$

y la condición de máximo ó mínimo

$$x dx + y dy + z dz = 0 \quad [7]$$



y ahora se trata de obtener r de modo que queden satisfechas las ecuaciones [4], [5] y [7]. Para ello diferenciamos [5] y [4]

$$l \, dx + m \, dy + n \, dz = 0 \quad [8]$$

$$[a^2 r^2 x - a^2 (b^2 + c^2) x] \, dx + [b^2 r^2 y - b^2 (c^2 + a^2) y] \, dy$$

$$+ [c^2 r^2 z - c^2 (a^2 + b^2) z] \, dz = 0$$

De este modo dx , dy , dz quedan determinados por [7], [8] y [9], habiendo uno independiente por ser las ecuaciones homogéneas. Multiplicando [8] y [9] por λ_1 y λ_2 , respectivamente, sumando con [7] y disponiendo de λ_1 y λ_2 , de modo que anulen los coeficientes de dx y dy resulta

$$x - \lambda_1 l - \lambda_2 x [a^2 r^2 - a^2 (b^2 + c^2)] = 0$$

$$y - \lambda_1 m - \lambda_2 y [b^2 r^2 - b^2 (c^2 + a^2)] = 0$$

$$z - \lambda_1 n - \lambda_2 z [c^2 r^2 - c^2 (a^2 + b^2)] = 0$$

Multiplicando por x , y , z , respectivamente, y sumando se obtiene

$$r^2 + \lambda_2 a^2 b^2 c^2 = 0$$

$$\lambda_2 = - \frac{r^2}{a^2 b^2 c^2}$$

y sustituyendo

$$x \left[1 + \frac{r^2}{a^2 b^2 c^2} (a^2 r^2 - a^2 (b^2 + c^2)) \right] = \lambda_1 l$$

$$y \left[1 + \frac{r^2}{a^2 b^2 c^2} (b^2 r^2 - b^2 (c^2 + a^2)) \right] = \lambda_1 m$$

$$z \left[1 + \frac{r^2}{a^2 b^2 c^2} (c^2 r^2 - c^2 (a^2 + b^2)) \right] = \lambda_1 n$$

de donde

$$\frac{l^2}{a^2 b^2 c^2 + a^2 r^4 - a^2 (b^2 + c^2) r^2} + \frac{m^2}{a^2 b^2 c^2 + b^2 r^4 - b^2 (c^2 + a^2) r^2}$$

$$+ \frac{n^2}{a^2 b^2 c^2 + c^2 r^4 - c^2 (a^2 + b^2) r^2} = 0$$

Ecuación de octavo grado, que por tener sus términos de grado par, tiene sus raíces iguales, dos á dos, y de signos contrario. Haciendo $t = r^2$ resulta

$$l^2 b^2 c^2 [a^2 c^2 + t^2 - (c^2 + a^2) t] [a^2 b^2 + t^2 - (a^2 + b^2) t]$$

$$+ m^2 c^2 a^2 [b^2 a^2 + t^2 - (a^2 + b^2) t] [b^2 c^2 + t^2 - (b^2 + c^2) t]$$

$$+ n^2 a^2 b^2 [c^2 b^2 + t^2 - (b^2 + c^2) t] [c^2 a^2 + t^2 - (c^2 + a^2) t] + 0$$

que es una ecuación de cuarto grado en t , que es satisfecha por a^2 , b^2 , c^2 , independientemente de l , m , n . Resulta, pues, que los máximos ó mínimos de r son cuatro, siendo tres iguales á las tres velocidades principales.

Sabemos, pues, que tres de los cuatro máximos ó mínimos observados de i nos dan por la fórmula n , $\text{sen } i = \frac{l}{r}$, $r = a, b, c$ las tres velocidades

principales, y además, los planos de incidencia en que se verifican dichos máximos ó mínimos, son paralelos á las rectas de intersección del plano de separación con los tres de simetría, pues dicho plano cortará á las círculos que forman parte de la intersección de la superficie de onda con los planos principales, en radios vectores, que valdrán a, b, c . La cuestión es ahora el saber cuáles son los tres valores de i , que, siendo máximos ó mínimos, dan las tres velocidades de la luz en el cristal. Desde luego, el mayor de los máximos i' , da por la fórmula $n^\circ \text{ sen } i' = \alpha$ el mayor índice y el menor de los mínimos i'' , da $\gamma = n^\circ \text{ sen } i''$, puesto que a y c son los radios máximo y mínimo absolutos, respectivamente, de la superficie de onda; pero no sabemos cuál nos dará β , si el menor de los dos máximos ó el mayor de los dos mínimos. Esta ambigüedad depende de que, como demostró Brill, tanto la superficie de onda como la de velocidades normales, no quedan determinadas cuando se conoce una sección de las mismas, sino que existen dos superficies de onda ó de velocidades normales que pasan por una sección diametral dada. Se resuelve esta dificultad verificando el estudio de la reflexión total sobre otra cara del cristal, con lo que se obtendrán de nuevo α y γ , y de los otros dos valores de $n^\circ \text{ sen } i$ para i máximo ó mínimo, se toma el que se haya repetido en ambos casos; procedimiento debido á Soret.

Una vez conocidos α, β, γ podemos determinar la posición de los ejes de simetría óptica, considerando que las intersecciones de los planos de incidencia correspondientes á los ángulos i_1, i_2, i_3 , que han dado α, β y γ con el plano de separación, están contenidas en los planos de simetría. Tracemos (fig. 5.^a) en el plano de separación un triángulo con los lados paralelos á dichas rectas de intersección, y considerémoslo como intersección del triedro de los ejes con el plano de separación. La arista que pasa por A , proyectada sobre el plano del dibujo, será perpendicular á BC , y por lo tanto, si hacemos girar alrededor de AD el plano que pasa por AD y el vértice del triedro, éste caerá sobre la circunferencia descrita sobre AD como diámetro. Trazando por el ortocentro O una perpendicular á AD , obtendremos el punto V , que es donde se ha abatido el vértice del triedro, y, por lo tanto, podremos determinar la dirección de los ejes.

Puede evitarse la repetición de las observaciones de la reflexión total

isótropo y q la velocidad normal en el cristal, tendremos, en virtud del principio de Huygens,

$$\text{sen } i^0 = \frac{q^0}{q} \text{sen } r^0 \quad \text{sen } i' = \frac{q^0}{q} \text{sen } r' \quad [1]$$

y además de la figura

$$\begin{aligned} r^0 + r' &= \Gamma; & i^0 + i' &= \Gamma + \Delta & [2] \\ \psi &= \frac{\pi}{2} + \frac{r^0 - r'}{2} = \frac{\pi}{2} + r^0 - \frac{\Gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - r' + \frac{\Gamma}{2} \end{aligned}$$

Estas relaciones pueden servirnos para una de dos cosas. Si conocemos la superficie de índices en el cristal, es decir, q en función de ψ , podemos calcular la marcha de la onda á través del prisma, ó si medimos tres de los ángulos Γ , i^0 , i' y Δ podemos calcular los valores correspondientes de q y ψ . Obtengamos las fórmulas que nos dan q y ψ en función de las magnitudes observadas.

De [1] se deduce

$$\begin{aligned} \text{sen } i^0 + \text{sen } i' &= \frac{q^0}{q} (\text{sen } r^0 + \text{sen } r') \\ \text{sen } i^0 - \text{sen } i' &= \frac{q^0}{q} (\text{sen } r^0 - \text{sen } r') \end{aligned}$$

ó sea

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{i^0 + i'}{2} \cos \frac{i^0 - i'}{2} &= \frac{q^0}{q} \text{sen } \frac{r^0 + r'}{2} \cos \frac{r^0 - r'}{2} \\ \text{sen } \frac{i^0 - i'}{2} \cos \frac{i^0 + i'}{2} &= \frac{q^0}{q} \text{sen } \frac{r^0 - r'}{2} \cos \frac{r^0 + r'}{2} \end{aligned}$$

de donde eliminando $\frac{q^0}{q}$

$$\text{tg } \frac{r^0 - r'}{2} = \text{tg } \frac{i^0 - i'}{2} \cot \frac{i^0 + i'}{2} \text{tg } \frac{\Gamma}{2} \quad [3]$$

y eliminando $r^0 - r'$

$$n^2 = \left(\frac{1}{q}\right)^2 = C^2 \text{sen}^2 \frac{i^0 - i'}{2} + S^2 \text{cos}^2 \frac{i^0 - i'}{2} \quad [4]$$

donde

$$C = \frac{1}{q^0} \frac{\cos \frac{1}{2} (\Gamma + \Delta)}{\cos \frac{1}{3} \Gamma}, \quad S = \frac{1}{q^0} \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (\Gamma + \Delta)}{\text{sen } \frac{1}{2} \Gamma}$$

La ecuación [3] puede ser escrita como sigue:

$$\cot \psi = \frac{C}{S} \text{tg } \frac{i' - i^0}{2} \quad [3']$$

y sirve, por lo tanto, para calcular ψ ; q se calcula mediante [4].

Eliminando $i^0 - i'$ entre [4] y [3'] se obtiene

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{1}{C^2} \text{cos}^2 \psi + \frac{1}{S^2} \text{sen}^2 \psi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{S^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{S^2} \right) \text{cos } 2\psi \quad [5] \end{aligned}$$

que nos da q en función de ψ , y, por lo tanto, se puede experimentalmente construir, por lo menos, parte de la curva de intersección de la superficie de índices con la sección transversal del prisma.

2. Prismas de cristales uniáxicos.

En los cristales uniáxicos se determina el índice ω del rayo ordinario por el método de la mínima desviación, como para los prismas isótropos. Como es sabido, en el caso de la mínima desviación, la marcha del rayo es simétrica respecto al prisma, y, por lo tanto, $\psi = \frac{\pi}{2}$ y la fórmula [5] da

$$\omega = n^0 \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (\Gamma + \Delta_n)}{\text{sen } \frac{1}{2} \Gamma}$$

donde n^0 es el índice del aire que aproximadamente es la unidad. (Para medidas más exactas debe tomarse para luz, presión y temperatura medias 1,00029, y tener en cuenta, además, que su exceso sobre 1 es proporcional á la densidad del aire.

Para determinar el índice extraordinario ϵ , supongamos que la arista del prisma forma con el eje óptico del cristal el ángulo δ , y que la bisec-

triz de la sección transversal del prisma forma con el plano determinado por el eje óptico y la arista (sección principal de la arista) el ángulo ρ .

La elipse de intersección de la hoja elipsoidal de la superficie de índices con la sección transversal del prisma, tiene por semiejes ϵ y

$v = \frac{I}{\sqrt{\frac{\cos^2 \delta}{\epsilon^2} + \frac{\sin^2 \delta}{\omega^2}}}$, el primero de los cuales está situado perpendicularmente á la sección principal de la arista, y el segundo paralelamente á ella. Por lo tanto, el radio vector correspondiente á un azimut ψ con respecto á dicha sección principal es

$$\frac{1}{n \epsilon^2} = \frac{\cos^2(\rho - \psi)}{v^2} + \frac{\sin^2(\rho - \psi)}{\epsilon^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \cos 2(\rho - \psi) \quad [6]$$

y teniendo en cuenta el valor de v

$$\frac{1}{\epsilon^2} \left\{ \cos^2 \delta \cos^2(\rho - \psi) + \sin^2(\rho - \psi) \right\} = \frac{1}{n \epsilon^2} - \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \delta \cos^2(\rho - \psi)$$

Ahora bien; si como se ha explicado en el § 1 se determina para cada valor de i , mediante la medición de i' , Δ y Γ el valor de n_e y el de ψ , la ecuación anterior servirá para calcular ϵ . Generalmente con esto, el problema queda ya resuelto, porque para los cristales uniaxiales la posición del eje óptico es conocida de antemano por la forma cristalina; pero si esto no ocurriera, se repite el cálculo de n_e y de ψ para otros dos ángulos de incidencia, con lo que se tendrán tres ecuaciones como la anterior, que servirán para determinar ϵ , δ y ψ , sirviendo estos dos ángulos para fijar la posición del eje óptico.

Por este procedimiento es necesario para determinar los ángulos i^0 , i' , que el antejo tenga una disposición especial, como el ocular autocolimador de Gauss, y para evitar esto, veamos lo que ocurre cuando mediante giro simultáneo del prisma y del antejo, se observa la mínima desviación del rayo extraordinario. Obtendremos una relación entre Δ y ψ restando [6] de [5]

$$\frac{1}{C^2} + \frac{1}{S^2} + \left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{S^2} \right) \cos 2\psi - \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \right) - \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \cos 2(\rho - \psi) = 0 \quad [7]$$

puesto que C y S son funciones de Δ . Para obtener la condición de mínimo, derivaremos con respecto a ψ , y haremos $\frac{d\Delta}{d\psi} = 0$

$$\left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{S^2} \right) \sin 2\psi + \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \sin 2(\rho - \psi) = 0 \quad [8]$$

ecuación que nos da Δ_m mientras que [7] nos da el valor correspondiente de ψ .

Eliminando entre [7] y [8] el ángulo ψ tendremos una relación entre la incógnita ϵ y el ángulo observado Δ_m

$$\left(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{v^2} \right)^2 \sin^2 \rho \cos^2 \rho = \left(\frac{\sin^2 \rho}{\epsilon^2} + \frac{\cos^2 \rho}{v^2} - \frac{1}{C^2} \right) \left(\frac{\cos^2 \rho}{\epsilon^2} + \frac{\sin^2 \rho}{v^2} - \frac{1}{S^2} \right) \quad [9]$$

y poniendo en vez de v su valor

$$\frac{1}{\epsilon^4} \cos^2 \delta + \frac{1}{\epsilon^2} \left\{ \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{\sin^2 \rho}{C^2} + \frac{\cos^2 \rho}{S^2} \right) \sin^2 \delta - \frac{1}{C^2} - \frac{1}{S^2} \right\} + \frac{1}{C^2 S^2} - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\sin^2 \rho}{C^2} + \frac{\cos^2 \rho}{S^2} \right) \sin^2 \delta = 0$$

ecuación bicuadrática que nos da el valor de ϵ . De las dos raíces de esta ecuación, debemos tomar aquella que corresponda á un valor de ψ que no difiera mucho de 90° , ya que la marcha de las normales se aproxima mucho á ser simétrica.

El cálculo de ϵ por este procedimiento es bastante complicado, y es muy ventajoso el emplear prismas que, por su orientación especial, transformen la ecuación [9] en otra análoga á la que se emplea para los medios isotropos. Esto ocurrirá cuando $\rho = 0^\circ$, $\rho = 90^\circ$, o $v = \epsilon$, puesto que en el primer caso, dicha ecuación se reduce á

$$\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{C^2} \right) \left(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{S^2} \right) = 0$$

y como $C < v$ debe ser $\epsilon = S \frac{1}{q^0} \frac{\sin \frac{1}{2}(\Gamma + \Delta_m)}{\sin \frac{1}{2}\Gamma}$. Además la ecuación [8] da $\sin 2\psi = 0$, y como no puede ser $\psi = 0$, debe ser $\psi = 90^\circ$, es

ción [8] da $\sin 2\psi = 0$, y como no puede ser $\psi = 0$, debe ser $\psi = 90^\circ$, es

decir, que la marcha es simétrica. En el caso segundo ocurre lo mismo, con la diferencia de que entonces $S = v$, y el valor de ε se calcula mediante la fórmula

$$\frac{1}{q^0} \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (\Gamma + \Delta_m)}{\text{sen } \frac{1}{2} T} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\cos^2 \delta}{\varepsilon^2} + \frac{\text{sen}^2 \delta}{\omega^2}}}$$

siendo también la marcha simétrica. Por fin, si $v = \varepsilon$ para lo cual es preciso que la arista del prisma sea paralela al eje óptico, la intersección de la superficie por la sección transversal del prisma, se compone de dos circunferencias de radios ω y ε , y la ecuación [9] indica que $\varepsilon = S = C$.

3. Prismas de cristales biáxicos.

Con un prisma de orientación conocida, se pueden determinar los tres índices principales de refracción, midiendo por el procedimiento explicado en el § 1, tres valores de q y ψ , con lo que se conocen tres radios de la intersección de la superficie de índices con la sección transversal del prisma, y entonces se puede determinar a , b , y c por el siguiente procedimiento: Refiramos la superficie de índices a un sistema x' , y' , z' tal, que el eje x' sea paralelo a la bisectriz interior de la sección transversal del prisma, el z' paralelo a la arista, y el y' perpendicular a ambos, con lo que tendremos la ecuación [4^a] del § 2 de

Para obtener la ecuación de la citada curva haremos $z' = 0$, con lo que resultará después de pasar a coordenadas polares

$$q^2 - q^2 (L \cos^2 \psi + L_1 \text{sen}^2 \psi + 2 L_2 \text{sen} \psi \cos \psi) + M \cos^2 \psi + M_1 \text{sen}^2 \psi + 2 M_3 \text{sen} \psi \cos \psi = 0 \quad [10]$$

donde

$$\begin{aligned} L &= (b^2 + c^2) \alpha_1^2 + (c^2 + a^2) \beta_1^2 + (a^2 + b^2) \gamma_1^2 \\ M &= b^2 c^2 \alpha_1^2 + c^2 a^2 \beta_1^2 + a^2 b^2 \gamma_1^2 \\ L_1 &= (b^2 + c^2) \alpha_2^2 + (c^2 + a^2) \beta_2^2 + (a^2 + b^2) \gamma_2^2 \\ M_1 &= b^2 c^2 \alpha_2^2 + c^2 a^2 \beta_2^2 + a^2 b^2 \gamma_2^2 \\ L_2 &= (b^2 + c^2) \alpha_1 \alpha_2 + (c^2 + a^2) \beta_1 \beta_2 + (a^2 + b^2) \gamma_1 \gamma_2 \\ M_3 &= b^2 c^2 \alpha_1 \alpha_2 + c^2 a^2 \beta_1 \beta_2 + a^2 b^2 \gamma_1 \gamma_2 \end{aligned}$$

Si se han determinado tres pares de valores de q y ψ , se tendrán tres ecuaciones de la forma

$$A b^2 c^2 + B c^2 a^2 + C a^2 b^2 + D a^2 + E b^2 + F c^2 + G = 0$$

que servirán para determinar a , b y c . En la práctica esto es irrealizable, y es preciso conocer de antemano valores aproximados de dichas cantidades para proceder por aproximaciones sucesivas. Por esta causa, es preferible proceder de tal modo que pueda aplicarse el método de la mínima desviación, el cual, aunque en general también requiere cálculos complicados, pues hay que buscar partiendo de [5] y [10] una relación entre Δ y ψ establecer la condición de mínimo y eliminar ψ , en algunos casos particulares, como los que vamos a considerar resulta aplicable.

Supongamos que la arista del prisma es un eje de simetría óptica del cristal; en este caso la intersección de la sección transversal del prisma con la superficie de índices se compone de una circunferencia y una elipse, y la medida de la mínima desviación del rayo correspondiente a la circunferencia (que es el polarizado normalmente a la arista) proporciona, por la misma fórmula que para los medios isótropos, uno de los índices principales (el α si la arista es paralela al eje x). Respecto al rayo correspondiente a la elipse, polarizado paralelamente a la arista, nos encontramos en el mismo caso que para el rayo extraordinario en los cristales uniáxicos, y, por lo tanto, podemos aplicar inmediatamente la fórmula [9], sin más que reemplazar v por β (si el eje z era el paralelo a la sección principal de la arista), ε por γ y ρ por el ángulo entre el plano zx y el bisector interior del prisma. De este modo no se obtiene más que una ecuación para el cálculo de β y γ , y es preciso determinar otro para valores de q y ψ para una incidencia cualquiera, y para la onda polarizada paralelamente a la arista, con lo que se tiene una tercera ecuación análoga a la [6]

$$q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cos 2(\rho - \psi)$$

y para disminuir los errores consiguientes a la medida del ángulo de incidencia y del de emergencia, es conveniente repetir estas observaciones un gran número de veces y obtener los valores de β y γ por el método de los mínimos cuadrados.

En el caso estudiado se verifica la marcha simétrica ($\psi = 90^\circ$) para la normal correspondiente a una de las ondas (la polarizada perpendicularmente a la arista). Investiguemos cuándo ocurrirá en general, que para la mínima desviación la normal a una de las ondas tenga esta propiedad.

Para que se verifique la mínima desviación es preciso que la derivada de Δ respecto á ψ sea cero. Considerando á Δ como función de ψ y de q , deberá verificarse para ($\psi = 90^\circ$)

$$\frac{d\Delta}{d\psi} = \frac{\partial\Delta}{\partial\psi} + \frac{\partial\Delta}{\partial q} \cdot \frac{dq}{d\psi} = 0$$

En esta fórmula $\frac{\partial\Delta}{\partial\psi}$ representa la variación de la desviación supues-
ta q constante, es decir, para medios isótropos, y como en éstos, para la
marcha simétrica es dicha variación nula, dicha fórmula se transforma
en $\frac{\partial\Delta}{\partial q} \cdot \frac{dq}{d\psi} = 0$ y como $\frac{\partial\Delta}{\partial q} \neq 0$ deberá ser $\frac{dq}{d\psi} = 0$ para $\psi = 90^\circ$.

«La condición para que la normal á una de las ondas siga una marcha
simétrica en la mínima desviación, y, por lo tanto, el ángulo de incidencia
sea igual al de la emergencia, es que el radio vector de la intersección de
superficie de velocidades normales con la sección transversal del prisma,
tenga un máximo ó un mínimo en la dirección perpendicular al plano
bisector del prisma.» Ahora bien; toda sección de la superficie de veloci-
dades normales posee, como los de onda, cuatro máximos y mínimos del
radio vector, tres de los cuales están situados en la intersección del plano
de la sección con los planos de simetría y son iguales á las velocidades
principales; por lo tanto:

«La mínima desviación de una onda se verifica con marcha simétrica
si la bisectriz exterior del prisma es paralela á un plano de simetría óptica
del cristal, y entonces la observación del mínimo de desviación propor-
ciona (como indica la fórmula [5] al hacer $\psi = 90^\circ$) por la fórmula $n = S$
uno de los tres ejes principales (el α si la bisectriz exterior es paralela al
plano yz etc.)

También se verificará la marcha simétrica de la normal en la mínima
desviación, cuando la bisectriz exterior del prisma sea paralela al cuarto
radio vector, máximo ó mínimo, de la curva Q de intersección de la super-
ficie de velocidades normales con la sección transversal del prisma. Ahora
bien; esta curva, por la definición de la superficie de velocidades norma-
les, será la pedal de la proyección sobre el plano de la sección transversal
del prisma de la curva formada en la superficie de onda, por los extremos
de los rayos correspondientes á las normales situadas en dicha sección
transversal, y como los máximos y mínimos del radio vector de una curva
y los de su pedal son comunes, resulta que la normal que se propaga en
la dirección de un máximo ó mínimo de la curva Q , ó coincide con el rayo

correspondiente, como ocurre en los tres casos considerados anteriormen-
te, ó es la proyección del mismo sobre el plano de la sección transversal
del prisma, que es el caso que ahora examinamos. Por lo tanto, la onda
correspondiente á este último caso vibrará en un plano perpendicular al
de la sección transversal y paralelamente á la arista del prisma. De aquí se
deduce que, además de ocurrir la marcha simétrica para la mínima des-
viación, cuando la bisectriz exterior del prisma ocupe la posición mencio-
nada, también se produce cuando el plano bisector exterior del prisma,
biseque el ángulo formado por los planos determinados por la bisectriz
exterior del prisma y las binormales.

Consideremos algunos casos especiales. Supongamos que la bisectriz
interior coincide con el eje de simetría x . Entonces se verifica á la vez que
la bisectriz exterior es paralela á un plano de simetría (el yz), y que el
plano bisector exterior (el yz) biseca el ángulo de los planos determina-
dos por dicha bisectriz exterior y las binormales. Por lo tanto, ambas ondas
satisfacen á la condición de que sus normales verifican la marcha simétrica
para el mínimo de desviación, siendo, por lo tanto, $\psi = 90^\circ$. La onda
polarizada perpendicularmente á la arista, que es aquella para la que coin-
ciden los rayos y la normal, proporciona según [5], mediante la observa-
ción de la mínima desviación, por la fórmula $n = S$ el índice α que es el
radio del círculo que forma parte de la sección de la superficie de índices
por el plano yz . La observación del mínimo de desviación de la onda
polarizada perpendicularmente á la arista (que vibra paralelamente á ella),
nos proporciona por la misma fórmula, el otro radio vector de la superfi-
cie de índices, el que se halla en la dirección de la bisectriz exterior. El
valor de este radio vector v_q es, por otro lado, si δ es el ángulo de la arista
con el eje z , como se deduce de la ecuación de la elipse que forma parte
de la intersección de la superficie de índices con el plano y, z

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\text{sen}^2 \delta}{\beta^2} + \frac{\text{cos}^2 \delta}{\gamma^2}$$

Los prismas que cumplen esta condición son los de cristales del siste-
ma rómbico, cuyas caras pertenecen á un esenoide, y los del monoclinico
formados por caras simétricas con respecto al ortoeje.

Si la bisectriz exterior es paralela á un eje de simetría, al eje x , por
ejemplo, las normales de ambas ondas verifican la marcha simétrica para
la desviación mínima, y proporcionan por la fórmula $n = S$ los índi-
ces β y γ . Para determinar α es preciso obtener un par de valores de q y ψ ;

pero los cálculos se simplifican mucho. Así, si δ es el ángulo z , z , se tendrá

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 & \beta_1 &= -\cos \delta & \gamma_1 &= \sin \delta \\ \alpha_2 &= 1 & \beta_2 &= 0 & \gamma_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 & \beta_3 &= \sin \delta & \gamma_3 &= \cos \delta \end{aligned}$$

y los valores de $L \dots M \dots$ son

$$\begin{aligned} L &= a^2 + c^2 \cos^2 \delta + \beta^2 \sin^2 \delta & L_1 &= b^2 + c^2 & L_2 &= 0 \\ M &= a^2 (c^2 \cos^2 \delta + \beta^2 \sin^2 \delta) & M_1 &= b^2 c^2 & M_2 &= 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo en [10]

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2} = \frac{(q^2 - c^2 \cos^2 \delta - b^2 \sin^2 \delta) \cos^2 \psi}{q^4 - q^2 (c^2 \cos^2 \delta + b^2 \sin^2 \delta) \cos^2 \psi + [b^2 c^2 - q^2 (b^2 + c^2)] \sin^2 \psi}$$

los resultados correspondientes a prismas cuya bisectriz interior ó exterior es paralela á los otros ejes, se obtienen de los anteriores mediante permutación cíclica de las letras a, b, c , ó α, β, γ .

Poseen esta propiedad los prismas de cristales del sistema rómbico formados por caras de una pirámide que se cortan en un plano de simetría, y los del monoclinico formados por caras simétricas del clinopinacoide.

La mayor simplificación se obtiene cuando ambas bisectrices son paralelas á ejes ópticos, por ejemplo, la bisectriz exterior al eje x , la interior al eje y . Para tener el resultado en este caso bastará hacer en el últimamente obtenido $\delta = 0$. Resultará, pues, que del mínimo de desviación de ambas ondas se obtendrán los índices β y γ , y de la determinación de un par de valores de q y ψ para una incidencia cualquiera, α por la expresión

$$\alpha^2 = \frac{\cos^2 \psi}{q^2 - b^2 \sin^2 \psi}$$

Como este caso es el más importante para la determinación de los tres índices principales de un cristal mediante prismas, daremos en el siguiente esquema los dos índices que se determinan mediante la medida de mínima

desviación de cada onda, para las diferentes posiciones de la arista del prisma y de la bisectriz interior,

Bisectriz interior.	ARISTA DEL PRISMA		
	x	y	z
x	—	α, β	α, γ
y	β, α	—	β, γ
z	γ, α	γ, β	—

cuadro que se recuerda fácilmente, observando que los índices determinables directamente en cada caso corresponden á los radios vectores de la superficie de índices, en la dirección de la bisectriz interior y de la arista del prisma. Dos prismas que tengan distintas orientaciones, bastan para determinar directamente las constantes a, b, c .

El ángulo del prisma, para observaciones en el aire, no debe pasar de un cierto límite para que pueda observarse la mínima desviación con marcha simétrica. Este inconveniente se salva rodeando el prisma de un medio de mayor índice. El límite del ángulo del prisma viene dado en todo caso por

$$\sin \frac{\Gamma}{2} < \frac{n^0}{n}$$

4. Determinación de los índices principales de un cristal mediante la determinación de la mínima desviación de rayos que inciden oblicuamente.

Entenderemos en este caso por mínima desviación la menor de todas las desviaciones correspondientes á direcciones de la normal refractada, situadas en un mismo plano con la bisectriz interior. Bajo esta hipótesis se comprende que para medios isótropos la desviación mínima ocurrirá para marcha simétrica de los rayos, es decir, siendo el ángulo de incidencia igual al de emergencia. Por lo tanto, para medios anisótropos la mínima desviación para marcha simétrica ocurrirá cuando la normal refracta-

da coincida con el rayo, esto es, cuando esté en un plano de simetría y sea la que posea en este plano constante velocidad de propagación. Ahora bien; como el plano perpendicular á la bisectriz interior es cortado en general por los tres planos de simetría en tres direcciones diferentes, habrá tres planos para los que la mínima desviación ocurrirá con marcha simétrica, y la medida de esta mínima desviación nos proporcionará los índices α, β, γ .

En el caso en que la orientación de los ejes sea desconocida, habrá que proceder del siguiente modo: Se hará girar el prisma, no alrededor de la arista, sino de modo que la normal refractada ocupe direcciones de un plano f que pase por la bisectriz interior, y se determinará la mínima desviación correspondiente midiendo los ángulos de incidencia y emergencia. Se repite esto para diferentes planos f , y por medio de una interpolación gráfica se determinan las tres orientaciones de dicho plano f , para las que la mínima desviación ocurre con marcha simétrica, y la medida de las mínimas desviaciones correspondientes proporciona los tres índices principales de refracción del modo siguiente:

Representemos en proyección estereográfica sobre la sección transversal del prisma (fig. 7.^a) por G y G' las normales á las caras del pris-

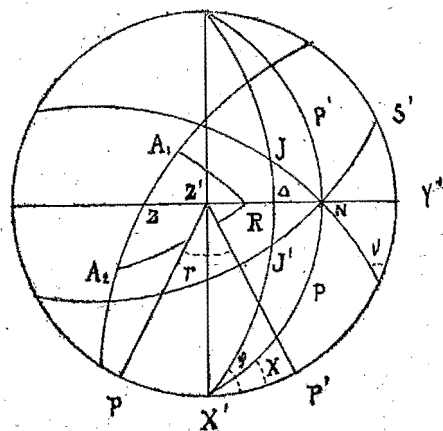


Figura 7.^a

ma P, P' . Sean, además, J, J' y N las normales incidente, emergente y refractada, entonces será $i = i' = i'' = JG = J'G'$; $r = NG = NG'$, $\Delta = JJ'$; $\Gamma = GG'$, y, por fin, hagamos $\lambda = J'X'$; $\nu = NGY'$, y representemos por φ la inclinación del plano $JJ'X'$, y por χ la del NX con χ respecto á la sección transversal.

Entonces se deduce aplicando la ley de la refracción y algunos teoremas de trigonometría.

$$I \dots n' \text{ sen } i = n \text{ sen } r$$

$$II \dots \cos r = \cos \frac{1}{2} \Gamma \cos \chi$$

$$III \dots \cos i = -\cos \lambda \text{ sen } \frac{1}{2} \Gamma + \text{sen } \lambda \cos \frac{1}{2} \Gamma \cos \varphi$$

$$IV \dots \text{sen } \lambda \text{ sen } \varphi = \text{sen } i \text{ sen } \nu$$

$$V \dots \text{tg } r = \frac{\text{tg } \frac{1}{2} \Gamma}{\cos \nu}$$

Si se mide $\Delta = \pi - 2\lambda, \varphi$ y Γ , podremos calcular, mediante III, IV y V, i, ν y r , y luego de (I) deduciremos el índice correspondiente, dándonos II el ángulo χ , que determina la posición de la onda refractada, ó sea la dirección de la intersección de uno de los planos de simetría con la sección transversal. Es de notar que, además de estas tres direcciones, existe todavía otra situada en el plano $y'z'$ que posee la propiedad de que las ondas que se propagan, según esta dirección como normal refractada, experimentan un mínimo de desviación.

Esto ocurrirá, en efecto, para aquella dirección R situada en el plano $y'z'$ tal, que uno de los rayos correspondientes se halle también en el plano $y'z'$, pues en este caso, para las normales se verifica también la marcha simétrica al mismo tiempo que la mínima desviación. Estando la normal y el rayo en el plano $y'z'$, pero en direcciones diferentes, este será el plano de vibración que deberá bisecar al ángulo diedro determinado por R y las binormales (fig. 7.^a).

Esta condición determina la posición de R , y demuestra que existe una y sólo una, *excepto en el caso en que coincida la bisectriz interior del prisma con un eje de simetría*, pues entonces cualquier dirección del plano $y'z'$ satisface esta condición. Para distinguir la dirección R de la que da el índice intermedio β , puede recurrirse al estado de vibración de la onda en cuestión, lo cual tiene el inconveniente de que el plano de vibración cambia al pasar al aire, por lo cual es preferible verificar el mismo estudio en un segundo prisma, y tomar como valores de los índices los que aparecen repetidos.

PARTE SEGUNDA

CAPÍTULO PRIMERO

RESUMEN DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA DE LA LUZ

1. Ecuaciones fundamentales.

Según Maxwell, entre las componentes P' , Q' , R' de la fuerza eléctrica, las X' , Y' , Z' de la fuerza magnética, y las f' , g' , h' del vector corrimiento, en un punto (x', y', z') de un campo electromagnético, existen las relaciones siguientes (*):

$$[1] \quad \begin{aligned} \frac{\delta f'}{\delta t} &= \frac{\delta Z'}{\delta y'} - \frac{\delta Y'}{\delta z'} \\ \frac{\delta g'}{\delta t} &= \frac{\delta X'}{\delta z'} - \frac{\delta Z'}{\delta x'} \\ \frac{\delta h'}{\delta t} &= \frac{\delta Y'}{\delta x'} - \frac{\delta X'}{\delta y'} \end{aligned}$$

$$[2] \quad \begin{aligned} -\mu \frac{\delta X'}{\delta t} &= \frac{\delta R'}{\delta y'} - \frac{\delta Q'}{\delta z'} \\ -\mu \frac{\delta Y'}{\delta t} &= \frac{\delta P'}{\delta z'} - \frac{\delta R'}{\delta x'} \\ -\mu \frac{\delta Z'}{\delta t} &= \frac{\delta Q'}{\delta x'} - \frac{\delta P'}{\delta y'} \end{aligned}$$

$$[3] \quad \begin{aligned} 4 \pi f' &= K_{11} P' + K_{12} Q' + K_{13} R' \\ 4 \pi g' &= K_{21} P' + K_{22} Q' + K_{23} R' \\ 4 \pi h' &= K_{31} P' + K_{32} Q' + K_{33} R' \end{aligned}$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio, la cual supondremos constante e igual I , por lo cual nada de lo que sigue podrá aplicarse al

(*) Véase, por ejemplo, Bouasse: *Electroptique et ondes hertziennes*, Paris.

hierro. Además $K_{11}, \dots, K_{33}, \dots$ son constantes entre las que existen las relaciones (*)

$$K_{12} = K_{21} \quad K_{23} = K_{32} \quad K_{31} = K_{13}$$

Tomemos como vector luz, ó sea como representantes de las vibraciones de las moléculas de éter, el vector corrimiento, y llamaremos vector polarización al vector magnético.

Las ecuaciones entre derivadas parciales á que han de satisfacer las componentes del vector magnético, se obtienen derivando el grupo [2] respecto al tiempo y sustituyendo los valores de $\frac{\delta P'}{\delta t}, \frac{\delta Q'}{\delta t}, \frac{\delta R'}{\delta t}$, deducidos de las ecuaciones

$$[4] \quad \begin{aligned} P' &= K'_{11} f' + K'_{12} g' + K'_{13} h' \\ Q' &= K'_{12} f' + K'_{22} g' + K'_{23} h' \\ R' &= K'_{13} f' + K'_{23} g' + K'_{33} h' \end{aligned}$$

que resultan de resolver el sistema [3] respecto á P', Q', R' , y luego sustituyendo los valores de $\frac{\delta f'}{\delta t}, \frac{\delta g'}{\delta t}, \frac{\delta h'}{\delta t}$ dados por el grupo [1]. De este modo resulta

$$[5] \quad \begin{aligned} \frac{\delta^2 X'}{\delta t^2} &= K'_{12} \frac{\delta}{\delta z'} \left(\frac{\delta Z'}{\delta y'} - \frac{\delta Y'}{\delta z'} \right) + K'_{22} \frac{\delta}{\delta z'} \left(\frac{\delta X'}{\delta z'} - \frac{\delta Z'}{\delta x'} \right) \\ &+ K'_{23} \frac{\delta}{\delta z'} \left(\frac{\delta Y'}{\delta x'} - \frac{\delta X'}{\delta y'} \right) \\ &- K'_{13} \frac{\delta}{\delta y'} \left(\frac{\delta Z'}{\delta y'} - \frac{\delta Y'}{\delta z'} \right) - K'_{23} \frac{\delta}{\delta y'} \left(\frac{\delta X'}{\delta z'} - \frac{\delta Z'}{\delta x'} \right) \\ &- K'_{33} \frac{\delta}{\delta y'} \left(\frac{\delta Y'}{\delta x'} - \frac{\delta X'}{\delta y'} \right) \end{aligned}$$

y otras dos análogas que pueden obtenerse de éstas, permutando cíclicamente las letras X, Y, Z y x, y, z .

Si multiplicamos los segundos miembros de las ecuaciones [3] por P', Q', R' , respectivamente, y sumamos, obtendremos una forma cuadrática que adquiere la forma canónica mediante una sustitución lineal, que equivale á tomar por ejes los de la superficie de segundo orden representa-

(*) Véase Drude's Optik, pág. 289.

da por dicha forma igualada á cero. Suponiendo verificado este cambio de ejes, las relaciones [3] se transformarán en

$$[6] \quad 4 \pi f = K_1 P; \quad 4 \pi g = K_2 Q; \quad 4 \pi h = K_3 R$$

y las ecuaciones [1] y [2] se podrán escribir como sigue:

$$[7] \quad \begin{aligned} K_1 \frac{\delta P}{\delta t} &= \frac{\delta Z}{\delta y} - \frac{\delta Y}{\delta z} & - \frac{\delta X}{\delta t} &= \frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z} \\ K_2 \frac{\delta Q}{\delta t} &= \frac{\delta X}{\delta z} - \frac{\delta Z}{\delta x} & - \frac{\delta Y}{\delta t} &= \frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta x} \\ K_3 \frac{\delta R}{\delta t} &= \frac{\delta Y}{\delta x} - \frac{\delta X}{\delta y} & - \frac{\delta Z}{\delta t} &= \frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \end{aligned}$$

2. Condiciones en los límites.

En el paso de la luz á través de la superficie de separación de dos medios diferentes, deben cumplirse las siguientes condiciones (*):

1.^a Existe continuidad para las componentes tangenciales de la fuerza eléctrica.

2.^a Existe continuidad para las componentes tangenciales de la fuerza magnética.

Si elegimos un sistema de coordenadas rectangulares (x', y', z') en el que el eje z' sea normal á la superficie de separación, y designamos con los subíndices a y b las componentes de los vectores eléctrico y magnético en dos puntos indefinidamente próximos situados sobre la normal á la superficie de separación, y á un lado y á otro de dicha superficie, las expresadas condiciones se podrán escribir

$$P'_a = P'_b; \quad Q'_a = Q'_b; \quad X'_a = X'_b; \quad Z'_a = Z'_b \quad [8]$$

Como sólo hemos de considerar soluciones de las ecuaciones (1) y (2) que sean funciones periódicas, resulta que debe tenerse

$$\left(\frac{\delta Q'}{\delta x'} \right)_a = \left(\frac{\delta Q'}{\delta x'} \right)_b; \quad \left(\frac{\delta P'}{\delta y'} \right)_a = \left(\frac{\delta P'}{\delta y'} \right)_b$$

(*) Bouasse, III, § 63.

y de la tercera ecuación del grupo (2) se deduce, por consiguiente,

$$\left(\frac{\delta Z'}{\delta t}\right)_a = \left(\frac{\delta Z'}{\delta t}\right)_b$$

y, por consiguiente, ya que se trata de funciones periódicas $Z'_a = Z'_b$, pudiendo esta condición sustituir á una de las dos primeras de (8).

Las condiciones en los límites serán, pues,

$$X'_a = Y'_b; Y'_a = Y'_b; Z'_a = Z'_b; P'_a = P'_b \quad [9]$$

(Del mismo modo demostraríamos que las condiciones en los límites pueden consistir en la continuidad del vector eléctrico y de una de las componentes tangenciales del vector magnético.)

3. Integración de las ecuaciones diferenciales.

No es posible, como sabemos, encontrar una integral general del sistema de ecuaciones [7], por tratarse ecuaciones entre derivadas parciales. Pero se pueden encontrar soluciones particulares que correspondan á determinadas condiciones. Nosotros estudiaremos soluciones particulares que, por definición, diremos que corresponden á una propagación por ondas planas. Estas soluciones son de la forma

$$X = \mu_1 p; Y = \mu_2 p; Z = \mu_3 p$$

siendo

$$\mu = A \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{v_1 x' + v_2 y' + v_3 z'}{q} \right) - \delta \right] \quad [10]$$

que se comprueba fácilmente que satisfacen á las ecuaciones en cuestión. Desde luego, μ_1, μ_2, μ_3 son los cosenos directores del vector polarización, y A la amplitud del movimiento vibratorio. El plano

$$v_1 z' + v_2 y' + v_3 z' = C \quad [11]$$

donde C es una constante arbitraria, representa el lugar de los puntos que en un momento cualquiera están en el mismo estado de vibración. El plano, paralelo al anterior, trazado por el origen,

$$v_1 x' + v_2 y' + v_3 z' = 0$$

recibe el nombre de plano de onda. Los cosenos directores de su normal son v_1, v_2, v_3 . Para obtener la velocidad de propagación, según dicha normal, buscaremos la distancia entre los planos de onda, uno de los cuales en el tiempo t , se encuentra en el mismo estado de vibración que el otro en el tiempo $t + 1$. Si C y C' son las longitudes respectivas de las normales á dichos planos, deberemos escribir según (10) y (11)

$$t - \frac{C}{q} = t + 1 - \frac{C'}{q}$$

de donde

$$C' - C = q$$

luego q representa la velocidad de propagación, según la normal. Por fin, Δ representa el ángulo de fase, ó sea el argumento de p para el tiempo cero y para el plano de onda que pasa por el origen.

4. Superficie de velocidades normales.

Imaginemos ahora un medio cristalino definido por las constantes K_{11}, \dots, K_{33} (fórmulas [3]), y supongamos que en el tiempo cero pasan por el origen ondas planas con todas las orientaciones posibles. Tratemos de determinar sus velocidades de propagación, según la normal (velocidades normales), es decir, de calcular q en función de los cosenos directores v_1, v_2, v_3 . Empecemos por especializar las coordenadas, según explicamos en el § 1. Entonces las ecuaciones [5] referidas á los nuevos ejes x, y, z se transforman, teniendo en cuenta que $K_{hk} = 0$, en

$$\frac{\delta^2 X}{\delta t^2} = b^2 \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{\delta X}{\delta z} - \frac{\delta Z}{\delta x} \right) - c^2 \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta Y}{\delta x} - \frac{\delta X}{\delta y} \right) \quad [12]$$

habiendo hecho

$$K'_1 = a^2 \quad K'_2 = b^2 \quad K'_3 = c^2$$

Expresemos que las soluciones (10) satisfacen á las ecuaciones (12). De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_1 (q^2 - b^2 v_3^2 - c^2 v_2^2) + b^2 \mu_3 v_2 v_3 + c^2 \mu_2 v_1 v_3 &= 0 \\ \mu_2 (q^2 - c^2 v_1^2 - a^2 v_3^2) + c^2 \mu_1 v_3 v_1 + a^2 \mu_3 v_2 v_3 &= 0 \\ \mu_3 (q^2 - a^2 v_3^2 - b^2 v_1^2) + a^2 \mu_2 v_1 v_2 + b^2 \mu_1 v_3 v_1 &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando μ_1, μ_2, μ_3 , y teniendo en cuenta que

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

resulta

$$q^4 + q^2 (a^2 v_1^2 + b^2 v_2^2 + c^2 v_3^2) + (b^2 c^2 v_1^2 + a^2 b^2 v_2^2 + a^2 c^2 v_3^2) = 0$$

que puede ponerse en la forma

$$\frac{v_1^2}{q^2 - a^2} + \frac{v_2^2}{q^2 - b^2} + \frac{v_3^2}{q^2 - c^2} = 0$$

Esta ecuación nos da la velocidad de propagación q según la normal, en función de los cosenos directores de dicha normal, y puede considerarse, por lo tanto, como la ecuación polar de la superficie de velocidades normales. Como vemos, es idéntica á la obtenida en la teoría de Fresnel. Siguiendo un procedimiento idéntico al que seguíamos allí, se deduciría la ecuación de la superficie de onda.

5. Posición relativa del vector corrimiento y del vector magnético.

Con objeto de poner de manifiesto la identidad de los resultados á que conduce la teoría electromagnética con los obtenidos en la teoría de Fresnel, busquemos la posición de los vectores corrimiento y fuerza magnética. Multiplicando las ecuaciones (13) por v_1, v_2, v_3 , respectivamente, y sumando resulta

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = 0$$

que indica que el vector magnético está situado en el plano de la onda.

Para determinar la posición del corrimiento (vector luz) empezaremos por expresarlo en función del vector magnético, valiéndonos de las fórmulas [6] y [7], con lo que resulta

$$4 \pi \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\delta Z}{\delta y} - \frac{\delta Y}{\delta z}$$

.....

y substituyendo los valores de Y, Z para el caso particular de una propagación por ondas planas, é integrando con respecto al tiempo se tiene

$$4 \pi f = \mu_3 A \frac{2 \pi}{T} \frac{v_3}{q} \int \text{sen} \left\{ \frac{2 \pi}{T} \left(t - \frac{v_1 x + v_2 y + v_3 z}{q} \right) - \Delta \right\} dt$$

$$- \mu_2 A \frac{2 \pi}{T} \frac{v_2}{q} \int \text{sen} \left\{ \frac{2 \pi}{T} \left(t - \frac{v_1 x + v_2 y + v_3 z}{q} \right) - \Delta \right\} dt$$

ó sea

$$4 \pi f = \frac{v_2}{q} Z - \frac{v_3}{q} Y$$

$$4 \pi g = \frac{v_3}{q} X - \frac{v_1}{q} Z$$

$$4 \pi h = \frac{v_1}{q} Y - \frac{v_2}{q} X$$

Si comparamos estas fórmulas con las que dan en Mecánica el momento de una fuerza con respecto á un punto, deduciremos en seguida que el vector luz, que representaremos por B , es perpendicular al plano determinado por el vector magnético M y un vector dirigido según la normal á la onda y que vale $\frac{1}{q}$ siendo además B igual al producto de estos dos vectores por el seno del ángulo que forman, que acabamos de ver que vale 90° . Por lo tanto,

$$4 \pi B = \frac{1}{q} M$$

ó sea

$$M = 4 \pi q B$$

En resumen, el vector corrimiento, que suponemos que coincide con la vibración, y el vector magnético (vector polarización) se hallan situados en el plano de onda. Las vibraciones son, por lo tanto, transversales. La posición de estos vectores se halla, como se ve, de acuerdo perfecto con la teoría de Fresnel. Resulta, además, que en una propagación de ondas planas, según una dirección dada como normal, el vector magnético es proporcional al vector corrimiento; de aquí que el plano de onda, que hemos definido como el lugar de los puntos que se hallan en el mismo estado de polarización, puede definirse diciendo que es el lugar de los puntos que se hallan en el mismo estado de vibración. Esta última propie-

dad es la que nos ha servido para realizar el estudio que precede partiendo del vector polarización, en vez del vector luz que es lo que suele hacerse.

6. Doble refracción. Condiciones en los límites.

Una vez que hemos obtenido la ecuación de la superficie de onda, estamos en condiciones de resolver el problema de determinar, no sólo las direcciones de propagación y acimutes de polarización de las ondas reflejadas y refractadas, sino de hallar sus amplitudes de polarización (ó las de vibración que les son proporcionales) y sus ángulos de fase, cuestiones estas últimas que no permite resolver la teoría de Fresnel. Desde luego, aplicando el principio de Huyghens veremos que, en general, existen dos ondas reflejadas y dos refractadas, cuyas normales se encuentran en el plano de incidencia.

Supongamos una onda plana incidente, y tomemos los ejes generales x', y', z' , de tal modo que el z' coincida con la normal á la superficie de separación, y el x' con la intersección de la superficie de separación con el plano de incidencia. Todas las ondas serán paralelas al eje y' , y, por lo tanto, los vectores polarización y luz deben ser independientes de y .

De este modo la última condición (9), que expresaba la continuidad de una componente tangencial del vector eléctrico, podrá escribirse después de derivar respecto á t y teniendo en cuenta (4) y (1)

$$\left[a_{11} \frac{\delta Y'}{\delta z'} + a_{12} \left(\frac{\delta Z'}{\delta x'} - \frac{\delta X'}{\delta z'} \right) - a_{31} \frac{\delta Y'}{\delta x'} \right]_a = \left[a_{11} \frac{\delta Y'}{\delta z'} + a_{12} \left(\frac{\delta Z'}{\delta x'} - \frac{\delta X'}{\delta z'} \right) - a_{31} \frac{\delta Y'}{\delta x'} \right]_b \quad [9']$$

donde

$$a_{hK} = K'_{hK}$$

Unida esta condición á las otras tres, tenemos el sistema completo de condiciones en los límites para el caso de ondas planas.

7. Cálculo de las direcciones normales y de los acimutes de polarización.

En lo sucesivo designaremos las magnitudes correspondientes á vectores situados en el primer medio (incidentes y reflejadas) con el índice 0 añadiendo además los índices 1 y 2 para distinguir los vectores correspon-

dientes á cada una de las ondas reflejadas. Para las refractadas emplearemos sólo los índices 1 y 2.

Con la precedente elección de ejes x', y', z' , las ecuaciones [5] referidas á la onda incidente, se podrán escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 X^0}{\delta t^2} &= \frac{\delta}{\delta z'} (a^0_{12} \xi + a^0_{22} \eta + a^0_{32} \zeta) \\ \frac{\delta^2 Y^0}{\delta t^2} &= \frac{\delta}{\delta x'} (a^0_{51} \xi + a^0_{25} \eta + a^0_{35} \zeta) - \frac{\delta}{\delta z'} (a^0_{11} \xi + a^0_{12} \eta + a^0_{51} \zeta) \\ \frac{\delta^2 Z^0}{\delta t^2} &= - \frac{\delta}{\delta x'} (a^0_{12} \xi + a^0_{22} \eta + a^0_{32} \zeta) \end{aligned}$$

donde

$$\xi = - \frac{\delta Y^0}{\delta z'}, \eta = \frac{\delta X^0}{\delta z'} - \frac{\delta Z^0}{\delta x'}, \zeta = \frac{\delta Y^0}{\delta x'}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las soluciones [10] que ahora son de la forma

$$\begin{aligned} X^0 &= \mu_1^0 A^0 \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \text{ sen } i + z' \text{ cos } i}{q^0} \right) - \Delta^0 \right\} \\ Y^0 &= \mu_2^0 A^0 \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \text{ sen } i + z' \text{ cos } i}{q^0} \right) - \Delta^0 \right\} \\ Z^0 &= \mu_3^0 A^0 \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \text{ sen } i + z' \text{ cos } i}{q^0} \right) - \Delta^0 \right\} \end{aligned}$$

se tendrán tres ecuaciones que servirán para la determinación de q^0 y de los cosenos directores $\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0$ del vector polarización. Eliminando estos últimos se obtiene para calcular q^0

$$\begin{aligned} (q^{02} - a^0_{22}) (q^{02} - a^0_{11} \cos^2 i - a^0_{33} \text{ sen}^2 i + 2 a^0_{31} \text{ sen } i \text{ cos } i) \\ = (a^0_{25} \text{ sen } i - a^0_{12} \text{ cos } i)^2 \end{aligned} \quad [15]$$

que no es más que la sección producida en la superficie de velocidades normales por el plano de incidencia.

Para calcular la dirección de polarización podemos hacer uso de una cualquiera de las ecuaciones [6], por ejemplo, la primera que en unión de la ecuación de condición $\mu_1^0 \text{ sen } i + \mu_3^0 \text{ cos } i = 0$, da

$$\mu_1^0 (q^{02} - a^0_{22}) = \mu_3^0 (a^0_{33} \cos i \text{ sen } i - a^0_{11} \cos^2 i)$$

Si designamos por ψ el acimut del plano de polarización con respecto al plano de incidencia, tendremos (fig. 1.^a) $\mu_1^0 = -\cos i \cos \psi$, $\mu_2^0 = \sin \psi$, $\mu_3^0 = \sin i \cos \psi$, y la ecuación precedente da

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{q^{02} - a_{22}^0}{q_{12}^0 \cos i - a_{23}^0 \sin i}$$

Las ecuaciones [15] y [16] permiten determinar q^0 y ψ cuando se conocen las constantes ópticas del medio y el ángulo de incidencia. Para las normales reflejadas y refractadas obtendríamos ecuaciones análogas, sustituyendo i por r con los índices convenientes; en este caso el ángulo r es desconocido, y para determinarlo hay que recurrir á las condiciones en los límites. La que expresa la continuidad de la componente X del vector magnético se escribirá, para soluciones de la forma (10') en las que hay que hacer $z' = 0$

$$\begin{aligned} & \mu_1^0 A^0 \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \sin i}{q^0} \right) - \Delta^0 \right\} + \mu_1^{0'1} A^{0'1} \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \sin r^{0'1}}{q^{0'1}} \right) - \Delta^{0'1} \right\} \\ & - \Delta^{0'2} \left\{ + \mu_1^{0'2} A^{0'2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \sin r^{0'2}}{q^{0'2}} \right) - \Delta^{0'2} \right\} \right. \\ & = \mu_1^1 A^1 \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \sin r^1}{q^1} \right) - \Delta^1 \right\} \\ & \left. + \mu_1^2 A^2 \cos \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \sin r^1}{q^2} \right) - \Delta^2 \right\} \right. \quad [17] \end{aligned}$$

y como debe verificarse para cualquier valor de x' y de t , deben ser iguales los coeficientes de x' en todos los argumentos de los cosenos, es decir,

$$\frac{\sin i}{q^0} = \frac{\sin r^{0'1}}{q^{0'1}} = \frac{\sin r^{0'2}}{q^{0'2}} = \frac{\sin r^1}{q^1} = \frac{\sin r^2}{q^2} = \frac{1}{k} \quad [17']$$

La ecuación [15] y sus análogas se transforman, según esto, en

$$\begin{aligned} & [a_{22} + (a_{33} - K^2) \operatorname{tg}^2 r] [a_{11} - 2 a_{31} \operatorname{tg} r + (a_{33} - K^2) \operatorname{tg}^2 r] \\ & = (a_{12} - a_{23} \operatorname{tg} r)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 r) \quad [15'] \end{aligned}$$

que es idéntica á la que habíamos obtenido en la teoría de Fresnel.

Del mismo modo la ecuación (16) da para las ondas reflejadas y refractadas

$$\operatorname{tg} \psi^4 = \frac{(K^2 - a_{22}) \operatorname{tg}^2 r^4 - a_{23}}{(a_{12} - a_{23} \operatorname{tg} r^4) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 r^4}} \quad [16']$$

8. Cálculos de las fases y amplitudes.

En todo lo que precede la teoría electromagnética no nos ha enseñado nada nuevo; las ecuaciones que dan la velocidad de propagación y el acimut de polarización de las ondas que se propagan según una dirección determinada, pueden obtenerse lo mismo en la teoría de Fresnel. Pero si tratamos de obtener las amplitudes y las fases relativas de dichas ondas, la teoría clásica no nos sirve, y hemos de recurrir á la teoría electromagnética, que gracias á la aplicación de las condiciones en los límites á las ecuaciones fundamentales, permite resolver el problema.

Desde luego la ecuación [17] que debe ser satisfecha para cualquier valor de x' y de t nos dice que todas las Δ deben ser iguales. Por lo tanto, todas las ondas reflejadas presentan el mismo ángulo de fase que la onda incidente. De aquí se deduce que cuando el primer medio es isótropo, en cuyo caso las dos ondas reflejadas coinciden, la polarización de la onda resultante es rectilínea.

Además, por una elección conveniente del origen de los tiempos, puede anularse el ángulo de fase común Δ . Teniendo en cuenta esto, podemos escribir las condiciones en los límites (9) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & \Sigma_i \mu_1^{0'i} A^{0'i} = \Sigma_h \mu_1^h A^h \\ & \Sigma_i \mu_2^{0'i} A^{0'i} = \Sigma_h \mu_2^h A^h \\ & \Sigma_i \mu_3^{0'i} A^{0'i} = \Sigma_h \mu_3^h A^h \quad [18] \\ & \Sigma_i \frac{A^{0'i}}{q^{0'i}} \left\{ \mu_2^{0'i} (a_{11}^0 \cos r^{0'i} - a_{31} \sin r^{0'i}) - a_{12}^0 (\mu_1^{0'i} \cos r^{0'i} - \mu_3^{0'i} \sin r^{0'i}) \right\} \\ & = \Sigma_h \frac{A^h}{q^h} \left\{ \mu_2 (a_{11} \cos r^h - a_{31} \sin r^h) - a_{12} (\mu_1^h \cos r^h - \mu_3^h \sin r^h) \right\} \\ & \quad i = 0, 1, 2; \quad h = 1, 2 \end{aligned}$$

Si introducimos los acimutes de polarización $\psi^{0,i}$ ψ^h de las diversas ondas, con respecto al plano de incidencia podremos escribir considerando figuras análogas á la [7]

$$\begin{aligned} \mu_1^{0'i} &= -\cos \psi^{0,i} \cos r^{0'i}, & \mu_2^{0'i} &= \sin \psi^{0,i}, & \mu_3^{0'i} &= \cos \psi^{0,i} \sin r^{0'i} \\ \mu_1^h &= -\cos \psi^h \cos r^h, & \mu_2^h &= \sin \psi^h, & \mu_3^h &= \cos \psi^h \sin r^h \end{aligned}$$

y entonces las ecuaciones [18] se pueden escribir del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \Sigma_i A^{o'i} \cos r^{o'i} \cos \psi^{o'i} &= \Sigma_h A^h \cos r^h \cos \psi^h \\ \Sigma_i A^{o'i} \sin \psi^{o'i} &= \Sigma_h A^h \sin \psi^h \\ \Sigma_i A^{o'i} \sin r^{o'i} \cos \psi^{o'i} &= \Sigma_h A^h \sin r^h \cos \psi^h \\ \Sigma_i \frac{A^{o'i}}{\sin r^{o'i}} \{ \sin \psi^{o'i} (a_{11} \cos r^{o'i} - a_{31} \sin r^{o'i}) + a_{12} \cos \psi^{o'i} \} \\ &= \Sigma_h \frac{A^h}{\sin r^h} \{ \sin \psi^h (a_{11} \cos r^h - a_{31} \sin r^h) + a_{12} \cos \psi^h \} \end{aligned} \quad [19']$$

Una vez calculados los ángulos r y ψ , estas cuatro ecuaciones permiten calcular las amplitudes $A^{o'i}$, $A^{o'2}$, A^1 , A^2 , conocida que sea la amplitud A^o de la onda incidente.

En el caso en que el primer medio es isotrópico, las fórmulas se simplifican notablemente. En este caso se tiene $a_{11}^o = a_{22}^o = a_{33}^o = q^{o2} a_{23}^o = a_{31}^o = a_{12}^o = 0$, y las dos normales reflejadas coinciden como se desprende de las ecuaciones [17'] siendo $r^{o'1} = r^{o'2} = \pi - i$. Por lo tanto,

$$\sin r^{o'1} = \sin r^{o'2} = \sin r^o = \sin i, \quad \cos r^{o'1} = \cos r^{o'2} = -\cos r^o = -\cos i$$

Para mayor claridad en la notación, designaremos las amplitudes del vector polarización incidente, del reflejado y de los dos refractados con las letras E, P, Δ_1, Δ_2 , respectivamente, y sus acimutes de polarización con las letras $\varepsilon, \rho, \delta_1$ y δ_2 .

De este modo las ecuaciones (9') se transforman en

$$\begin{aligned} (E \cos \varepsilon - P \cos \rho) \cos i &= \Delta_1 \cos r_1 \cos \delta_1 + \Delta_2 \cos r_2 \cos \delta_2 = \Delta_1 l_1 + \Delta_2 l_2 \\ E \sin \varepsilon + P \sin \rho &= \Delta_1 \sin \delta_1 + \Delta_2 \sin \delta_2 = \Delta_1 m_1 + \Delta_2 m_2 \\ (E \cos \varepsilon + P \cos \rho) \sin i &= \Delta_1 \sin r_1 \cos \delta_1 + \Delta_2 \sin r_2 \cos \delta_2 = \Delta_1 n_1 + \Delta_2 n_2 \\ (E \sin \varepsilon - P \sin \rho) \sin i \cos i &= \Delta_1 \frac{\sin r_1}{q_1^2} [(a_{11} \cos r_1 - a_{31} \sin r_1) \sin \delta_1 \\ &\quad + a_{12} \cos \delta_1] \\ + \Delta_2 \frac{\sin r_2}{q_2^2} [(a_{11} \cos r_2 - a_{31} \sin r_2) \sin \delta_2 + a_{12} \cos \delta_2] &= \Delta_1 p_1 + \Delta_2 p_2 \end{aligned}$$

donde $l, m, \dots p$ se han introducido para abreviar la escritura.

9. Acimutes unirradiales.

Se puede elegir el acimut de polarización de la luz incidente de tal modo, que uno de los haces refractados desaparezca por anularse la amplitud de polarización correspondiente. Estos acimutes se denominan unirradiales. Las condiciones que deben satisfacer se obtienen haciendo en las ecuaciones anteriores $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$ sucesivamente. No hay que confundir este fenómeno con el de la reflexión total, pues en las refracciones unirradiales la dirección de ambas ondas refractadas queda perfectamente determinada, sólo que una de ellas no transporta energía.

Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ρ_1, ρ_2 los acimutes de polarización de la onda incidente y de la reflejada en cada uno de los casos de refracción unirradial. En el primer caso, cuando $\varepsilon = \varepsilon_1$ será $\Delta_1 = 0$ y, supongamos $\Delta_2 = 1$ y designemos por $E^{(1)}$ y $P^{(1)}$ las amplitudes correspondientes de las polarizaciones incidente y reflejada. Del mismo modo, para $\Delta = 0, \varepsilon = \varepsilon_2$ hagamos $\Delta_1 = 1$ y sean $E^{(2)}$ y $P^{(2)}$ las amplitudes de las polarizaciones incidente y refractada.

Si designamos los componentes de cada amplitud perpendiculares al plano de incidencia con el subíndice S y las paralelas al mismo con el subíndice p , es decir, si hacemos

$$\begin{aligned} E \cos \varepsilon &= E_p & P \cos \rho &= P_p \\ E \sin \varepsilon &= E_s & P \sin \rho &= P_s \end{aligned}$$

las ecuaciones [10'] nos indican que estas componentes son funciones lineales de Δ_1 y Δ_2 , es decir,

$$\begin{aligned} E_s &= A_1 \Delta_1 + B_1 \Delta_2 & P_s &= A_s \Delta_1 + B_s \Delta_2 \\ E_p &= A_2 \Delta_1 + B_2 \Delta_2 & P_p &= A_p \Delta_1 + B_p \Delta_2 \end{aligned}$$

y haciendo $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon = \varepsilon_2$ se obtienen los valores de los coeficientes A, \dots, B , y entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} E_s &= E_s^{(1)} \Delta_1 + E_s^{(2)} \Delta_2 & E_p &= E_p^{(1)} \Delta_1 + E_p^{(2)} \Delta_2 \\ P_s &= P_s^{(1)} \Delta_1 + P_s^{(2)} \Delta_2 & P_p &= P_p^{(1)} \Delta_1 + P_p^{(2)} \Delta_2 \end{aligned}$$

Con lo que tenemos cuatro ecuaciones que enlazan las componentes de las amplitudes de las ondas incidente, refractada y reflejada para una onda incidente polarizada en un cierto acimut con las componentes de las amplitudes de dichas ondas, cuando la onda incidente está polarizada en cada uno de los acimutes unirradiales.

CAPÍTULO II

MEDIOS ABSORBENTES

1. Aplicación de las ecuaciones generales.

En los medios absorbentes todo pasa como si poseyeran un índice de refracción imaginario, es decir, que el hecho de que la intensidad luminosa experimente una debilitación á medida que aumenta el espesor atravesado según una ley exponencial, conduce á introducir en las fórmulas generales valores complejos para las constantes. (Véase, por ejemplo, Poincaré: *Théorie mathématique de lumière*, pág. 371. Bouasse: *Electroptique, Ondes Hertzianas*, pág. 239.) De este modo se hace extensiva la teoría de la reflexión y refracción en los cristales transparentes á los absorbentes; los resultados obtenidos aparecen naturalmente en forma de magnitudes complejas que ya veremos cómo deben interpretarse. Una vez generalizadas las ecuaciones fundamentales, puede demostrarse que las condiciones en los límites son las mismas, puesto que pueden deducirse de las ecuaciones fundamentales observando que son aplicables á cuerpos no homogéneos. (Pockels, pág. 175.)

En lo sucesivo supondremos que el primer medio es el aire, que es lo que ocurre generalmente. De no ser así, bastaría multiplicar las constantes a_{hk} obtenidas, por el cuadrado del índice de refracción del medio exterior.

Si en las ecuaciones [15'] y [16'] sustituimos los parámetros a_{hk} por magnitudes complejas a^*_{hk} , podremos determinar las direcciones de propagación y los acimutes de polarización de las dos ondas refractadas en un medio absorbente. Los valores de r y ψ tendrán la forma compleja y los designaremos por r^* y ψ^* ó δ^* .

Las soluciones de las ecuaciones [6] son de la forma

$$X = -A \cos \delta^* \cos r^* e^{-i\tau}$$

$$Y = A \sin \delta^* e^{-i\tau}$$

$$Z = A \cos \delta^* \sin r^* e^{-i\tau}$$

donde

$$\tau = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x' \sin r^* + z' \cos r^*}{q} \right); \quad \frac{\sin r^*}{q} = \sin i; \quad q^* = \frac{q}{1 - i\kappa}$$

κ es lo que se denomina índice de absorción.

De la forma de estas soluciones se deduce, en primer lugar, que por ser imaginario r^* , la amplitud es variable como debe ocurrir en un medio absorbente. Además, la componente de polarización paralela al plano de incidencia, viene por la parte real de la expresión

$$A \cos \delta^* e^{-i\tau}$$

y la componente perpendicular por la parte real de

$$A \sin \delta^* e^{-i\tau}$$

componentes que pueden ponerse en la forma

$$(A' + iA'') e^{-i\tau}$$

$$(B' + iB'') e^{-i\tau}$$

Si la polarización fuera rectilínea, como las citadas componentes son respectivamente

$$A' \cos \tau - A'' \sin \tau$$

$$B' \cos \tau - B'' \sin \tau$$

y deberán ser proporcionales para cualquier valor de τ se verificaría que

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''}$$

ó sea que

$$A' B'' = A'' B'$$

y como $A' B'' - B' A''$ es la parte imaginaria de la relación $\frac{A \cos \delta^*}{A \sin \delta^*}$ que no es cero por ser imaginario δ^* resulta que la polarización considerada no puede ser rectilínea, y, por lo tanto, será elíptica.

Las amplitudes A^*_i y A_h se deducen de las ecuaciones [19] y [19'] que proporcionan también valores imaginarios.

En el caso en que el primer medio sea isótropo, dichas ecuaciones se transforman en las [10'] y mediante la introducción de los acimutes unirradiales, obtendremos las [20] en las que, si la luz incidente está polarizada rectilíneamente, serán sus componentes E_s y E_p reales; pero las magnitudes que intervienen en los segundos miembros son imaginarios, así como P_s y P_p .

2. Reflexión metálica.

Concretándonos a las ondas reflejadas que son las más importantes para el estudio de los medios fuertemente absorbentes, observaremos que las componentes de la amplitud de polarización de dichas ondas presentan una diferencia de fase Δ , puesto que hemos visto que están polarizadas elípticamente. Podemos escribir, por lo tanto,

$$\frac{P_s}{P_p} = \operatorname{tg} \rho^* = \operatorname{fg} \psi e^{-i\Delta}$$

donde ψ es un ángulo real que representa al acimut que tendría el plano de polarización en el caso de anularse Δ .

Sustituyendo los valores de P_s y P_p dados por [21] resulta

$$\operatorname{tg} \psi (\cos \Delta + i \operatorname{sen} \Delta) = \frac{P_s^{(1)} \Delta_1 + E_s^{(2)} \Delta_2}{E_p^{(1)} \Delta_1 + E_p^{(2)} \Delta_2}$$

y eliminando Δ_1 y Δ_2 por medio de las dos primeras ecuaciones [21], sustituyendo luego E_s y E_p por $E \cos \varepsilon$ y $E \operatorname{sen} \varepsilon$, respectivamente, resulta

$$\operatorname{tg} \psi (\cos \Delta + i \operatorname{sen} \Delta) = \frac{(P_s^{(1)} E_s^{(2)} - P_s^{(2)} E_s^{(1)}) - (P_s^{(1)} E_p^{(2)} - P_s^{(2)} E_p^{(1)}) \operatorname{tg} \varepsilon}{P_p^{(1)} E_s^{(2)} - P_p^{(2)} E_s^{(1)} - P_p^{(1)} E_p^{(2)} + P_p^{(2)} E_p^{(1)} \operatorname{tg} \varepsilon}$$

Examinaremos el caso particular de un cristal en el que la superficie reflectora sea un plano de simetría óptica, el $X' Y'$ por ejemplo. Haciendo que coincidan los ejes X', Y', Z' con los ejes de simetría óptica, tendremos

$$a_{12}^* = a_{23}^* = a_{31}^* = 0, \quad a_{hh}^* = a^*_{hh} = a^*_{hh} + i b_h$$

La ecuación [15'] se transforma en este caso en las dos siguientes

$$\operatorname{tg} r_1^* = \frac{\sqrt{a_2^*} \operatorname{sen} i}{\sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i}}; \quad \text{ó sea, } \operatorname{sen} r_1^* = \sqrt{a_2^*} \operatorname{sen} i$$

$$\operatorname{tg} r_2^* = \frac{\sqrt{a_1^*} \operatorname{sen} i}{\sqrt{1 - a_1^* \operatorname{sen}^2 i}}$$

y la ecuación [16'] da para δ los valores

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2}$$

y, por lo tanto, las ondas refractadas están linealmente polarizadas, pues resultan valores reales para sus acimutes de polarización.

Las fórmulas [10'] dan valores nulos para $E_p^{(1)}, P_p^{(1)}, E_s^{(2)}, P_s^{(2)}$ y para las otras magnitudes resultan las expresiones, al hacer $\varepsilon = \varepsilon_2, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 1$

$$(E_p^{(2)} - P_p^{(2)}) \cos i = \cos r_1^* = \sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i}$$

$$(E_p^{(2)} + P_p^{(2)}) \operatorname{sen} i = \operatorname{sen} r_1^* = \sqrt{a_2^*} \operatorname{sen} i$$

y al suponer $\varepsilon = \varepsilon_1, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 1$

$$(E_s^{(1)} + P_p^{(1)}) = 1$$

$$(E_s^{(1)} - P_p^{(1)}) \cot i = a_1^* \cot r_2^* = \frac{\sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i} \cdot \sqrt{a_1^*}}{\operatorname{sen} i}$$

de las que se deduce

$$2 E_p^{(2)} = \sqrt{a_2^*} + \frac{\sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i}}{\cos i}, \quad 2 P_p^{(2)} = \sqrt{a_2^*} - \frac{\sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i}}{\cos i}$$

$$2 E_s^{(1)} = 1 + \sqrt{a_1^*} \frac{\sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i}}{\cos i}, \quad 2 P_p^{(1)} = 1 - \sqrt{a_1^*} \frac{\sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i}}{\cos i}$$

con la cual la expresión [80] se transforma en

$$\frac{P_s}{P_p} = \frac{P_s^{(1)} E_p^{(2)}}{P_p^{(2)} E_s^{(1)}} \operatorname{tg} \varepsilon$$

$$= \frac{(\sqrt{a_2^*} \cos i + \sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i}) (\cos i - \sqrt{a_1^*} \sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i})}{(\sqrt{a_2^*} \cos i - \sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i}) (\cos i - \sqrt{a_1^*} \sqrt{1 - a_2^* \operatorname{sen}^2 i})} \operatorname{tg} \varepsilon$$

Mediante la observación se determinan los valores de ψ y Δ , y entonces, mediante [79] se conocerá $\frac{P_s}{P_p}$. Si se repite el experimento para tres valores de i se tendrán tres ecuaciones que servirán para calcular los parámetros complejos $a^*_1 = a_1 + i b_1$, $a^*_2 = a_2 + i b_2$, $a^*_3 = a_3 + i b_3$ del cristal. Una vez obtenidos estos parámetros, si queremos determinar los índices de refracción y absorción recurrimos á las fórmulas

$$a^*_h = q^*_h n^2 = \frac{1}{n^*_h{}^2 (1 - i x_h)^2}$$

y separando partes reales é imaginarias

$$a_h = \frac{1 - x_h^2}{n_h^2 (1 + x_h^2)^2}; \quad b_h = \frac{2 x_h}{n_h^2 (1 + x_h^2)^2}$$

que sirven para calcular n_h y x_h .

Verificados los ejercicios correspondientes al grado de Doctor el día 30 de Junio de 1913, ante el siguiente

TRIBUNAL

Presidente.. Dr. D. Bartolomé Fellu y Pérez.

Vocal..... » Ignacio González Martí.

» Blas Cabrera y Felipe.

» Francisco de Cos y Mermería.

Secretario.. » Antonio Vela Herranz,

obtuvo la presente Memoria la calificación de **Sobresaliente.**