

4.-4

PEDRO ABELLANAS

LA MATEMÁTICA MODERNA



1952

PUBLICADO EN LA REVISTA ARBOR, NÚMERO 84
Diciembre 1952.

LA MATEMÁTICA MODERNA

Por PEDRO ABELLANAS

DESDE hace unos setenta u ochenta años se vienen empleando para la Matemática los calificativos de moderna y abstracta ; simultáneamente con ello se ha prescindido del uso de su nombre en plural. Queremos estudiar en este artículo las razones históricas y científicas de estos hechos y detenernos a pensar sobre el concepto de Matemática moderna. Comenzaremos por trazar un ligero bosquejo histórico que nos permita ver en su origen la mencionada Matemática moderna.

BOSQUEJO HISTÓRICO.

Un hecho significativo es que los primeros libros en que figura la denominación de «moderna» son dos libros de Geometría ¹. Analizando el contenido de estos libros, principalmente del segundo, que es el más importante, nos encontramos con un tratado de Geometría en el que no figuran resultados que no fuesen conocidos muchos años o siglos antes ; lo que indica que el calificativo no se refiere a nuevos resultados o teorías. Por consiguiente, si tal calificativo posee algún sentido, deberá referirse al método empleado. En cuanto a éste, se observa que es axiomático, es decir, que todas las proposiciones se deducen lógicamente de otras primitivas o axiomas. Pero si bien es cierto que en la época inmediatamente anterior se había prescindido de tal método de exposición, no lo es menos que tampoco era nuevo, pues había sido empleado por Euclides en sus *Elementos*. Todo esto indica que

¹ PFAFF, 1867, y PASCH, 1882.

la razón debe ser más profunda. Un análisis comparativo más minucioso de los libros de Pasch y Euclides nos revela las siguientes diferencias esenciales :

1.^a Las primeras definiciones del libro de Euclides no se emplean en el resto de la obra, mientras que en la de Pasch toda definición es posteriormente utilizada ; y

2.^a Euclides distingue entre axioma, o proposiciones absolutas cuya validez es general, y postulados, o proposiciones cuya validez dentro de la Geometría resulta evidente. En la geometría moderna, por el contrario, no se emplean el primer tipo de proposiciones fundamentales, usándose indistintamente las denominaciones de axiomas o postulados para las del segundo.

De estas diferencias, triviales en apariencia, nace, según veremos, la Matemática moderna ; pero, antes de continuar, conviene que precisemos un poco el contenido de las mismas. La primera definición que da Euclides es la siguiente : «Punto es aquello que no tiene parte» ; pues bien, cuando se quiere probar en el resto de la obra que algo es un punto, se demuestra que ese algo pertenece a dos rectas distintas, o a una recta y un plano que no la contiene. Lo que no se hace nunca es demostrar que aquello no tiene parte. La razón de esto es obvia : para poder aplicar tal definición, es preciso que se nos diga qué debemos hacer para averiguar si un ente tiene o no parte, y esta explicación no se da en los *Elementos*. Hace pocos años, Menger dió una axiomatización de la Geometría, en la que emplea la anterior definición de punto ; pero con la diferencia esencial respecto a Euclides de que previamente precisa en qué consiste el no tener parte. Lo mismo que acabamos de decir de la definición de punto se puede repetir respecto de las definiciones de línea, superficie, recta, plano, etc. ; es decir, con todos los conceptos fundamentales de la Geometría. En cuanto a la segunda diferencia, basta recordar el conocido caso del axioma, constantemente empleado por Euclides, que dice : «El todo es mayor que cualquiera de sus partes», y observar que una recta tiene tantos puntos como un plano o como todo el espacio ; lo que prueba que tal axioma carece del carácter absoluto que se le atribuía. El que se le haya otorgado este carácter se debe a que al enunciarlo se pensaba exclusivamente en conjuntos finitos, es decir, «todos» con un número finito de partes, y para tales conjuntos sí que es cierto ; pero

deja de serlo para conjuntos con infinitos elementos. Esto descubre un hecho de la máxima trascendencia y cuyo reconocimiento es una de las principales características de la Matemática moderna y de la Ciencia actual; es el siguiente: *toda proposición tiene un campo propio de validez.*

Se presentan ahora las siguientes cuestiones: ¿Para qué daba Euclides definiciones que luego no empleaba? ¿Por qué hasta finales del siglo pasado no se reconoce la superfluidad de las mismas?

Estudiando tales definiciones se observa que, en realidad, son simples descripciones, que únicamente pueden tener valor científico en uno de estos dos casos:

a) El objeto descrito tiene existencia independiente del sujeto pensante. (Este es el caso de las descripciones del geólogo o biólogo.)

b) El objeto es un ente racional unívocamente determinado por la descripción.

Según hemos visto en otro lugar ², una u otra de estas actitudes han adoptado todos los geómetras hasta fines del siglo XIX. Entre ellas destacaremos aquí únicamente, por su excepcional valor y precisa enunciación, la siguiente opinión del gran matemático de principios del siglo pasado C. F. Gauss: «Se debe tener presente que si bien el número es simplemente un producto de nuestro espíritu, el espacio tiene también una realidad fuera de él y no podemos, *a priori*, prescribir sus leyes.» Según esto, el espacio geométrico es el mismo espacio del universo o es una transcripción racional del mismo unívocamente determinada por él. En ambos casos las descripciones de Euclides están plenamente justificadas, ya que mediante ellas se provoca la formación, en la mente del lector, de la imagen del ente correspondiente, y se admite que esto se consigue de modo único. Más adelante veremos que también en el siglo actual ha sido defendida esta actitud.

La posición correspondiente al caso a) resultará inaceptable dentro de la Matemática en que precisemos qué son conceptos y proposiciones. Tampoco lo es la correspondiente al caso b), por las siguientes razones:

² *Ensayo histórico sobre los conceptos de espacio y geometría.* «Rev. Ac. Ciencias de Zaragoza». 1951.

Desde la misma época griega se había sospechado que el postulado de las paralelas de Euclides era superfluo. No obstante los esfuerzos realizados para demostrarlo, hasta el año 1813 no se consiguió probar que tal postulado era independiente de los restantes. Esto lo consiguió Gauss viendo que se podía desarrollar una geometría sustituyendo el postulado de paralelismo de Euclides por otro se afirmase que, por un punto del plano de una recta, se podían trazar infinitas rectas situadas en él, que no cortasen a la recta dada. Sin duda porque el concepto de espacio de Gauss, que acabamos de transcribir, era abiertamente opuesto a la existencia de varios espacios, no llegó éste a publicar sus resultados, debiéndose a Bolyai y Lobachefski las primeras publicaciones sobre geometrías no euclídeas. En realidad, lo que se había descubierto era un nuevo espacio. Ahora bien, si se ha de verificar el caso *b*) es preciso que se pueda averiguar a cuál de los dos espacios corresponde el del universo. Se llegó a la conclusión de que la determinación del espacio matemático más apropiado para la interpretación de los fenómenos naturales era una función de la precisión de los métodos de observación y de medida, y que dentro de una precisión determinada de éstos quedaba todavía indeterminado el espacio. Al existir múltiples espacios, todos ellos con los mismos derechos desde el punto de vista matemático, resulta inadmisibile la proposición *b*). El reconocimiento de este hecho da lugar a una nueva axiomatización de la Matemática, y con ella nace la Matemática moderna.

MATEMÁTICA MODERNA.

Acabamos de ver el origen histórico de la Matemática moderna; para apreciar con claridad las razones científicas en que se apoya, conviene precisar el significado de ciertas palabras. Como hemos visto en otro lugar ³, todo *concepto* es una *clase* o conjunto de seres o entes que se representa mediante una palabra o signo. Una *proposición* se reduce a una relación de contenido de una clase en otra o de un elemento en una clase. Por consiguiente, una *proposición* se entenderá en la medida en que se conozcan las clases correspondientes a los

³ Véase la nota anterior.

conceptos que en ella intervienen. Se comprende ahora fácilmente el origen de las discrepancias de opinión, ya que la proposición : «A está contenido en B» no podrá ser igualmente aceptada por dos personas que atribuyan distinto contenido a las clases A y B. La ciencia, en su aspecto especulativo, no tiene otro objeto que el de llegar a definir los conceptos o, lo que es lo mismo, sus clases correspondientes, y enunciar las proposiciones de forma que el contenido de las clases y sus relaciones no dependan del sujeto pensante. A los conceptos y proposiciones cuyo contenido es el mismo para todo individuo que los estudie les llamaremos *comunicables*. El proceso necesario para llegar a alcanzar proposiciones comunicables fué enunciado explícitamente por Descartes, pero ha sido siempre empleado y puede considerarse como consustancial con la misma ciencia. Existen varios conceptos representados por las clases A, B, ..., se pueden formar otros nuevos mediante tres operaciones, que representaremos por los signos +, ., ' y llamaremos : adición, intersección y formación del contrario, respectivamente. Se representa mediante $A+B$ la clase formada por todos los entes de A, más todos los de B; $A \cdot B$ es la clase formada por todos los entes que pertenecen a las clases A y B; A' es la clase formada por todos los entes que no pertenecen a la clase A. Si se recuerda que los números naturales : 1, 2, ..., se obtienen también a partir de conjuntos de elementos y de ciertas relaciones entre ellos, no sorprenderá que las operaciones anteriores relativas a las clases que definen los conceptos posean un conjunto de propiedades formales análogas, aunque, naturalmente, no iguales, a las operaciones con números. Mediante estas operaciones no sólo se pueden formar conceptos más complejos a partir de unos dados, sino que también se pueden obtener otros más simples. Siendo el proceso de formación de nuevos conceptos dado por las operaciones anteriores perfectamente comunicable, los nuevos conceptos obtenidos poseerán el mismo grado de comunicabilidad que los de partida; y recíprocamente. Por ello, si bien este proceso permite llegar a conceptos cada vez más simples, exige llegar a definir directamente ciertos de ellos, que entonces se llaman primitivos. La dificultad surge al reconocerse que estos conceptos primitivos no se pueden definir de modo comunicable. Aquí radica la diferencia esencial entre la Matemática moderna y la anterior, que no reconocía este hecho de la no comu-

nicabilidad de los conceptos primitivos e intentaba definirlos ; entonces daba descripciones de ellos capaces de suscitar distintas clases en diferentes lectores. La Matemática moderna, por el contrario, reconoce la imposibilidad de tales definiciones, deja las clases primitivas sin definir, limitándose a postular las relaciones fundamentales entre ellas.

Las consecuencias de este cambio pueden compararse a las que tuvo la sustitución de los dedos o de colecciones de piedras, empleados para contar, por el conjunto de los números naturales y las leyes de sus algoritmos. Sin embargo todavía existe quien no reconoce la importancia del proceso de axiomatización de la Matemática moderna, arguyendo que no aporta ninguna nueva proposición a la Matemática, complicando, por el contrario, cosas para todos claras. Esta actitud es análoga a la de quien despreciase la aritmética elemental porque resultaba mucho más intuitivo efectuar las operaciones reuniendo y separando montoncitos de piedras. Naturalmente que para axiomatizar una ciencia o simplemente una teoría es preciso que éstas hayan adquirido un cierto desarrollo, pero esto no obsta para que llegue un momento en que tal axiomatización se imponga, como sucedió con la Geometría a fines del siglo pasado. Puede explicarse la actitud contraria a la axiomatización sin más que observar lo que sucedió a muchos geómetras del siglo último : la Geometría ha sido considerada hasta el advenimiento de la Matemática moderna como una ciencia experimental ⁴ y sus teoremas como propiedades del espacio del universo ; de aquí el recelo de muchos geómetras hacia la Geometría analítica que identificaba los puntos con ternas de números, pues presentían que con ello perdían al punto material. El error estaba, según acabamos de ver, no en aquella presunción, sino en pensar que la ciencia pudiese ir más allá de la construcción de esquemas cómodos para manejar los fenómenos naturales observables.

Si entre los matemáticos ha habido objeciones hacia la Matemática moderna, éstas han aumentado fuera de su círculo, en especial en el sector filosófico. Parte de éstas son de análogo sentido que las que aca-

⁴ Véase la nota 2. En particular conviene resaltar la cita explícita de Veronese (*Fondamenti di Geometria*. Padova, 1891, pág. VIII), en la que dice : «La Geometría es la más exacta de las ciencias experimentales.»

bamos de señalar y pueden representarse por el siguiente ejemplo, que se ha dado contra la matematización de la Física. Se ha dicho: «Reducir la Física a un esquema matemático equivale a formar idea de un gabán por el número que han dado por él al dejarlo en el guardarropa.» Evidentemente que tal número nos va a dar una idea absolutamente deficiente sobre el tejido, color, etc..., del gabán; pero, si en lugar de interesarnos por tales cuestiones, deseamos recuperarlo rápidamente a la salida de un local público, es evidente que dicho número nos da una indicación mucho más eficaz que toda descripción de su color, tejido, etc. Como se ve, esta actitud no difiere mucho de la señalada respecto de los geómetras y ha sido origen de largas, enconadas y estériles discusiones, siempre que han aparecido nuevos conceptos fundamentales en la ciencia y en particular en la matemática. Bastará recordar al efecto las discusiones de tipo metafísico a que dieron lugar la introducción de los números negativos, totalmente desenfocadas por defensores y detractores. El origen de todas estas desviaciones puede deberse a que todo el que trabaja con conceptos directamente intuídos del cosmos, interior o exterior, piensa que está actuando directamente sobre él, y no se resigna fácilmente a que el resultado de sus inmersiones y experiencias vaya a reducirse a los vacíos esquemas matemáticos. Pero como todo conocimiento comunicable se reduce a una relación de contenido de una clase en otra, y estas operaciones con clases son de tipo matemático, todo conocimiento llega a la matematización, al mismo tiempo que alcanza la comunicabilidad. En apoyo de esta opinión citaremos las siguientes palabras de Hilbert: «Yo creo que todo lo que pueda ser objeto del pensamiento científico admite, en cuanto que sirva para la formación de una teoría, el método axiomático, y mediante él el matemático. Penetrando en sistemas de axiomas cada vez más profundos, obtenemos una visión cada vez más clara de la esencia del pensamiento científico, y alcanzamos un conocimiento mayor de la unidad de nuestra ciencia. En virtud de los métodos axiomáticos aparece la Matemática destinada a un papel director.» Conviene, no obstante, señalar que entre las llamadas, durante los tres siglos precedentes, razones metafísicas había algunas que eran gérmenes de esquemas más simples que contenían a los usuales, indicándose el paso de un esquema a otro más simple, pero aún no determinado con precisión, con el adjetivo de metafísico. Entre la ciencia

natural y la Matemática moderna se ha establecido una relación con dos sentidos : a partir de un conjunto de resultados experimentales se construye una teoría matemática. Con ésta se obtienen proposiciones cuya confirmación por los fenómenos naturales confirma a su vez a la teoría matemática.

Resumiendo, la Matemática moderna ha nacido al vaciar las clases de los conceptos fundamentales en el sentido de dejar sin describir sus elementos. Entonces surge la necesidad de la axiomatización para establecer las relaciones fundamentales entre los conceptos primitivos. Esta axiomatización ha de cumplir las propiedades de no encerrar contradicción, y de que a partir de ella se puedan obtener, por un proceso lógico-deductivo, todas las proposiciones de la teoría de que se trate. Cualquier otro concepto que se introduzca se debe definir rigurosamente ; entendiendo por tal que la clase correspondiente al mismo ha de quedar perfectamente delimitada dentro del conjunto formado por todos los entes correspondientes a las clases de los conceptos primitivos, en el sentido de que, dado un elemento arbitrario de aquel conjunto, se pueda siempre decir si pertenece o no a la nueva clase o, por lo menos, que se puedan obtener tantos elementos como se deseen de dicha clase. Un lector con espíritu crítico denunciará aquí una petición de principio, ya que argüirá : si las clases que definen los conceptos primitivos están sin definir, lo mismo sucede al conjunto total formado por todas ellas y a todas las clases que se definan en éste. La objeción no es, ni mucho menos, trivial y deja al descubierto el origen de la limitación de la Ciencia o, de lo que es lo mismo, del pensamiento humano, mostrando que toda ciencia está construída empleando elementos huecos. Ya veremos en el número próximo dos métodos para disminuir el riesgo de la situación. A la capacidad de nuestro espíritu de formar colecciones de entes de modo espontáneo, se llama intuición, así como a la capacidad de descubrir relaciones entre estas clases. Captadas por la intuición, las nuevas clases no se encuentran sin más dispuestas para aplicarles el mecanismo lógico, por tratarse de clases no comunicables todavía ; para poder incorporar los nuevos conceptos intuitivos a la Matemática, es preciso un nuevo proceso de intuición para descubrir aquellas propiedades que puedan servir para caracterizarlos. Toda proposición que no sea primitiva debe demostrarse, entendiendo por demostrar la proposición : «A está con-

tenido en B», el establecer una cadena : «A está contenido en C)..., «M está contenido en B», tal que todas estas proposiciones sean postulados. La diferencia entre una demostración en la Matemática moderna y la anterior está en que en ésta se empleaban en la cadena anterior eslabones de carácter no comunicable.

Como ya hemos indicado, la Matemática moderna se ha engendrado como consecuencia de haberse sustituido en la Geometría el espacio material por los espacios matemáticos. Con esto pasó la Geometría de ser una ciencia experimental a ser una parte de la Matemática. Al producirse esta fusión y reconocerse la completa unidad dentro de la Matemática, se suprimió el empleo de su nombre en plural.

INTUICIONISMO Y FORMALISMO.

Las múltiples soluciones buscadas a la objeción hecha en el apartado anterior se agrupan en dos escuelas principales, cuyos nombres figuran en el título de este apartado y cuyos genuinos representantes son Brouwer e Hilbert, respectivamente. Siendo los conceptos simples conjuntos, las proposiciones relaciones entre éstos y estando, en general, todo ente objeto de estudio en la Matemática, formado por un conjunto de elementos, aparece el concepto de conjunto como el fundamental de la matemática y de la ciencia. Fué Cantor quien, reconociendo este hecho, construyó a fines del siglo pasado una teoría de conjuntos, destinada a servir de soporte a la matemática. La axiomatización que dió del concepto de conjunto condujo en algunos casos, al ser aplicada a conjuntos infinitos, a paradojas, aunque muchas de ellas tenían otro origen que no es ahora ocasión de estudiar. Entrando los conjuntos en la definición de todo concepto se reconoce la dificultad de proceder a una axiomatización aceptable de ellos ; por esta razón y por ser los conjuntos infinitos los orígenes de las paradojas surgidas, propuso Brouwer fundamentar la Matemática sobre los dos principios siguientes :

I. Admitir como conjunto bien definido el de los números enteros y positivos.

II. Cualquier otro conjunto se debe definir mediante una ley que permita obtener tantos elementos del conjunto como se deseen.

Estos dos principios no justifican el nombre de la escuela ; esto se

debe a que ellos caracterizan al Intuicionismo en su estado actual, pero no en su origen, que fué cuando lo adquirió. Uno de sus principales colaboradores, Heyting, lo caracterizó, hace unos veinte años, por los dos principios siguientes :

1.º La Matemática no sólo posee significación formal, sino también intrínseca.

2.º Los conceptos matemáticos son intuídos directamente por el espíritu pensante ; por ello, el conocimiento matemático es independiente de toda experiencia.

Estos principios justifican el nombre de la escuela. También contestan a la dificultad del apartado anterior a que nos hemos ya referido, pero no la resuelven ; porque prescindiendo de la afirmación, muy discutible, de que el conocimiento matemático sea independiente de toda experiencia, para resolverla sería preciso que tal intuición de los conceptos matemáticos no dependiese del sujeto pensante, y esto, como se desprende de lo que llevamos dicho, resulta inadmisibile. Recordamos una anécdota significativa a este respecto acaecida en un Congreso de matemáticos : Argüía un ilustre matemático a otro no menos insigne que ambos poseían la misma intuición de los conceptos matemáticos y que la única diferencia entre ellos era el modo de expresarla, a lo que el otro respondió que pudiera ser cierta la afirmación de su colega, pero que por lo que a él se refería, y para su desgracia, sólo podía decir que su intuición le engañaba muchas veces. Se comprende que caracterizado el Intuicionismo por estas últimas condiciones surgiesen largas controversias entre sus adeptos y los que no lo eran. La razón de ellas es simplemente que las proposiciones 1.ª y 2.ª no son comunicables, por lo que toda controversia sobre ellas no puede conducir a conclusiones que lo sean.

Si bien los principios I y II no resuelven totalmente la dificultad mencionada, por hallarse envuelta la petición de principio en el concepto de número natural, la reducen al mínimo posible. Desde el punto de vista del rigor, dichas condiciones son óptimas, pues eliminan todas las paradojas conocidas, especialmente las surgidas por el mal empleo de las llamadas demostraciones de existencia. Corresponden éstas a las definiciones que en la lógica clásica se llamaban por género próximo y diferencia específica. Cada una de estas definiciones exige la demostración inmediata de un teorema que asegure la existencia de algún ente

que pertenece a la clase correspondiente, o de otro modo, que la clase correspondiente no es vacía. Esta es una de las principales razones esgrimidas por la escuela y, apoyándose en ella, niegan todo sentido a cualquier demostración de existencia que no permita construir, mediante un número finito de operaciones, un elemento de la clase correspondiente. La seguridad de evitar paradojas ofrecida por las condiciones I y II es grande, pero junto a ello ofrece graves inconvenientes que disminuyen altamente sus indudables ventajas. Analizaremos brevemente algunos de los más importantes. En primer lugar, la proposición II implica que los conjuntos no se definen dando todos sus elementos de un modo actual, sino sólo el medio de obtener tantos cuantos se deseen. Como consecuencia, las clases A, B, \dots , correspondientes a los conceptos se definen también de este modo dinámico. De aquí resulta que para demostrar la proposición « A está contenido en B » será preciso probar que todo elemento que se puede obtener mediante la ley que define a la clase A , se puede obtener también con la ley que define a la B . Análogamente, demostrar que « A no está contenido en B » exige construir un elemento con la ley que define a la clase A , que no pueda obtenerse con la ley que define a B , y solamente en estos casos pueden considerarse demostradas las proposiciones « A está contenido en B » y « A no está contenido en B » dentro de la Matemática intuicionista. Ahora bien, una de las demostraciones más empleadas en la Matemática es la llamada indirecta o de reducción al absurdo; es decir, para probar que « A está contenido en B » se demuestra que de « A no contenido en B » se deducen las dos proposiciones: « M contenido en N » y « M no contenido en N ». Con esta demostración se prueba en la Matemática intuicionista que la proposición « A no contenido en B » es falsa, pero de aquí no se deduce que sea cierta la proposición « A contenido en B », porque, según acabamos de decir, para que esta proposición se admita como demostrada es preciso probar que todo elemento obtenido con la ley de A se obtiene también con la de B , y esto no es consecuencia de la demostración indirecta. En el Intuicionismo existen efectivamente proposiciones tales que no se puede demostrar ni la proposición directa ni la contraria; tales proposiciones se llaman *indecidibles*. Como puede sospecharse, la existencia de proposiciones indecidibles complica extraordinariamente el campo del Intuicionismo. La admisión de tales proposiciones equivale a la no admisión del principio del *tertium non datur*.

Desgraciadamente, las proposiciones indecidibles aparecen ya para un concepto tan básico de la Matemática como el número real, es decir, existen números reales en la matemática intuicionista de los que no se puede probar que sean iguales a cero, ni que no sean iguales a cero. Como consecuencia de ello, muchos teoremas fundamentales de la Matemática dejan de ser válidos en el Intuicionismo. Como ejemplo citaremos únicamente un teorema básico de Geometría: el teorema de Desargues de los triángulos homológicos. Este teorema se refiere a una relación entre dos triángulos, cuya demostración varía según que los triángulos estén o no en un mismo plano. Ahora bien, viniendo definidos los planos en el Intuicionismo mediante sus ecuaciones, y habiendo números que no se sabe si son o no iguales a cero, existen casos en que no se puede decidir si los triángulos están o no en el mismo plano y en ellos no se puede demostrar el teorema. Esta eliminación de grandes y fructíferas teorías hace que el Intuicionismo no tenga la importancia que por su rigor y belleza lógica sería deseable que poseyese.

El Intuicionismo ha sido fundamentalmente una escuela anticantorianista. Frente a ella estaba (y no decimos está, porque, como vamos a ver, hoy no existe hostilidad alguna entre ellas) la escuela formalista. La posición de ésta se puede caracterizar por las siguientes palabras de Hilbert: «Si en una teoría que ha demostrado ser útil y fecunda surgen paradojas, no debe por ello desecharse, sino, al contrario, se debe someter a un cuidadoso examen a fin de descubrir y eliminar las causas de error y conservar toda su parte útil.» En realidad se puede decir que éste ha sido siempre un principio implícitamente admitido en la ciencia. La mayor dificultad que se ha alzado contra el Formalismo ha sido la varias veces mencionada objeción del final del apartado anterior, para la que no tiene más respuesta que el sincero reconocimiento de que los apoyos de la ciencia son moldes vacíos, y que le es imposible al pensamiento humano ir más allá. El Intuicionismo creyó resolver esta cuestión mediante sus proposiciones 1.^a y 2.^a, pero finalmente tuvo que reconocer la futilidad de las mismas y refugiarse en las I y II, que la dejan igualmente sin solución. La polémica entre los partidarios de uno y otro bando ha demostrado una vez más que toda controversia sólo es posible cuando las proposiciones que la provocan no son comunicables, y que automáticamente cesa en el momento en que se hacen comunicables. Así sucedió en el caso que nos ocupa, de modo que en la actuali-

dad es corriente el caso de matemáticos que producen dentro de las dos escuelas.

En el Formalismo se parte de clases cuyos elementos no se describen y de ciertas relaciones fundamentales entre ellas; las primeras corresponden a los conceptos primitivos y las segundas a los axiomas. Todas las clases correspondientes a los restantes conceptos se definen mediante los elementos correspondientes a las clases primitivas, pero a diferencia de las definiciones intuicionistas, las clases se dan ahora actualmente con todos sus elementos, mientras que en el Intuicionismo las clases se están haciendo constantemente por agregación de nuevos elementos. Esta diferencia implica que en el Formalismo se puede decir de todo elemento si pertenece o no a una clase dada y, por consiguiente, no existen proposiciones indecidibles o, lo equivalente, es válido el principio del tercero excluído. Como se ve, no es este principio el origen de la diferencia entre Intuicionismo y Formalismo, sino los distintos modos de formación de los conjuntos.

Tanto la definición axiomática ofrecida por el Intuicionismo como la ofrecida por el Formalismo, además de hacer comunicables las proposiciones ofrecen la ventaja de permitir un análisis de las mismas, descomponiéndolas en sus elementos simples. Con esto se consigue la creación de teorías más generales que permiten unificar otras varias particulares. Conviene observar a este respecto que todo conocimiento se reduce siempre a esta operación de sumergir una clase en otra, que es en definitiva la esencia de toda generalización. Así, por ejemplo, a la pregunta: ¿por qué A? Se contesta siempre: porque A está contenido en B. Si se quiere saber más se repite la pregunta respecto de B, etcétera. Por consiguiente, la construcción de clases más amplias no es algo privativo de la Matemática moderna, sino que es el propio proceso de todo saber. Por otra parte, con el análisis de las proposiciones, las demostraciones ganan en precisión y claridad al señalarse los puntos exactos en que se apoyan. Es también muy frecuente que las demostraciones resulten más sencillas en la teoría general que en las particulares, debido a que se prescinde en aquélla de todo concepto que no sea esencial en la demostración. Finalmente, señalaremos como característica de la Matemática moderna la preocupación por demostrar cada proposición dentro del campo más amplio posible de validez de la misma.

MATEMÁTICA Y LÓGICA.

Desde que, hace un siglo, formuló Boole unas leyes del pensamiento, que son de tipo análogo a las leyes de las operaciones aritméticas con números, hubo una dirección de la Lógica que fué asimilando la técnica matemática hasta que al surgir la Matemática moderna fué absorbida por ella. Influyó también en esta incorporación el hecho de haberse descubierto que carecen de sentido, en el lenguaje científico moderno, las proposiciones absolutas, con lo que se encontró esa escuela lógica en una situación análoga a la de la Geometría al descubrir que no estaba operando con el espacio del Universo. Su incorporación a la Matemática, junto con el reconocimiento de que sólo dentro de ésta resultan las proposiciones comunicables, ha tenido como consecuencia que, desde el punto de vista de la Matemática moderna, aparezca como misión de la Filosofía, respecto de ella, la de estudiar aquellos conceptos a los que todavía no se puede aplicar el método científico y prepararlos hasta que tal aplicación sea posible. Con ello se presentó la Filosofía, contemplada desde este ángulo, con el carácter de precursor, en lugar del de censor de teorías y conceptos matemáticos.

Al surgir el Intuicionismo se apoyó en una Lógica propia, en la que, como se ha visto, no se admite el principio del tercero excluído. Como sucede con la Matemática, existen hoy día dos escuelas principales de Lógica: la intuicionista y la clásica, que se encuentran en la siguiente relación. 1. Toda proposición válida según la Lógica intuicionista lo es también según la Lógica clásica. 2. De toda proposición en Lógica clásica se puede obtener otra en el Intuicionismo mediante un proceso perfectamente determinado para todo caso; como es natural, esta segunda proposición no es equivalente a la primera. La principal diferencia entre ambas lógicas está en que así como en la clásica dos negaciones de una proposición equivalen a su afirmación, esto no es válido en la Lógica intuicionista; sin embargo, en ésta se verifica que tres negaciones de una proposición equivalen a una única negación de ella.

La existencia de múltiples sistemas lógicos no ofrece mayor dificultad para el matemático que la existencia de varios espacios. Por

otra parte, al ser tales sistemas perfectamente comunicables, no tiene sentido la controversia sobre ellos. Únicamente una razón de conveniencia respecto a las cuestiones que se quieren estudiar decidirá sobre el sistema que conviene emplear.

No se piense que únicamente desde el punto de vista matemático puede justificarse la Lógica intuicionista; también desde el ángulo físico puede defenderse. En efecto, la imposibilidad de determinar experimentalmente si una constante física posee un valor racional o irracional puede implicar que no se pueda decidir si una determinada trayectoria es o no periódica; lo que es admisible con Lógica intuicionista, pero no lo es en Lógica clásica. En Lógica clásica no tienen cabida las relaciones de indeterminación de Heisenberg; y existen dificultades para la axiomatización de la Mecánica estadística. En atención a estas y otras dificultades se ha formulado recientemente una fundamentación intuicionista de la Mecánica, que toma como punto de partida que toda medida experimental está siempre afectada de un error de observación. Mediante esta formulación se llega a la conclusión de que los resultados experimentales de la Mecánica puntual obedecen a la Lógica intuicionista. Como nueva confirmación de la falta de sentido de toda discusión sobre la mayor o menor aceptabilidad entre sistemas comunicables, se encuentra el siguiente resultado alcanzado mediante la axiomatización de la Mecánica a que nos referimos: «No se puede decidir experimentalmente si se debe adoptar una mecánica puntual fundada en la Lógica clásica o en la intuicionista; ambas serán igualmente adecuadas».

LA MATEMÁTICA MODERNA Y EL CONCEPTO DE ESTRUCTURA.

Tanto las operaciones con conjuntos, como las leyes del pensamiento de Boole, o las operaciones con números, polinomios o funciones, poseen un conjunto de propiedades análogas, de cuyo reconocimiento nació el concepto de *estructura*. Una estructura es un conjunto de elementos entre los que se ha definido una operación, por lo menos, tal que el resultado de realizar dicha operación con elementos del conjunto es otro elemento del mismo. Estas operaciones

están caracterizadas por distintos grupos de axiomas: correspondientes a los distintos tipos de estructuras. En todos los ejemplos que acabamos de citar, y en otros muchos, estos axiomas son de tipo análogo a las propiedades de la adición y multiplicación de números en la Aritmética elemental, y las estructuras que se obtienen se llaman algebraicas. Estas estructuras algebraicas no sólo aparecen en el Álgebra propiamente tal, sino también en Análisis, Geometría, Lógica, etcétera. Por otro lado, el análisis del concepto de espacio ha conducido al resultado de que lo más íntimamente característico de dicho concepto es el concepto de proximidad; es decir, que para que un conjunto de puntos pueda considerarse como un espacio matemático es indispensable que se conozcan todos los puntos que están próximos a un punto arbitrario del mismo. A partir de este concepto elemental de proximidad se originan otros tipos de estructuras llamadas topológicas. Estos dos tipos de estructuras, algebraicas y topológicas, constituyen el soporte completo de la Matemática moderna. Cualquier propiedad de Geometría, de Análisis, etc., se reduce a una propiedad encuadrada dentro de uno de estos tipos fundamentales. Esto justifica el gran desarrollo que han alcanzado los capítulos de la Matemática dedicados al estudio exclusivo de las estructuras algebraicas y topológicas, es decir, el Álgebra y la Topología, respectivamente; habiendo pasado estas materias a ocupar el lugar central de la Matemática, Álgebra y Topología se entrecruzan prestándose valiosos apoyos, existiendo una Topología algebraica y un Álgebra topológica.

Como puede sospecharse, una de las principales labores que ha tenido que abordar la Matemática moderna ha sido la de encuadrar dentro de la arquitectura proporcionada por las estructuras todos los conocimientos fundamentales previos; con ello no sólo se ha ganado armonía y precisión en el conjunto, sino que se han podido alcanzar multitud de nuevos resultados que de otro modo no hubiera sido posible obtener.

En cuanto a los métodos eurísticos de la Matemática moderna varían según el punto de partida de la investigación. Si se parte de conceptos no matemáticos, la primera operación será la elección de la definición matemática que comprenda todos los caracteres esenciales del concepto para el fin propuesto y sólo ellos. Apoyándose en

estas definiciones rigurosas se puede pasar ya a la segunda parte, que consiste en desarrollar la demostración propiamente tal en las condiciones a que nos hemos referido anteriormente. Caso de que los conceptos de partida estén ya todos elaborados matemáticamente, únicamente resta la segunda parte.

Finalmente, no queremos terminar estos breves pensamientos sobre la Matemática moderna sin llamar la atención de que, a pesar de ser el Algebra y la Topología los pilares de la misma, en nuestra licenciatura se reducen estas materias a dos asignaturas de carácter voluntario en el quinto curso. Teniendo presente que la Matemática moderna nació hace más de setenta años, que en la mayor parte de las Universidades tienen preponderancia los estudios modernos, y que la mayor parte de la investigación actual se realiza dentro de ella, nos parece un poco excesiva la precaución para darle una mayor cabida en nuestros planes de estudio. Desde el punto de vista de la investigación lo encontramos deplorable, ya que el licenciado que aspira a investigar se encuentra en la lamentable situación de tener que comenzar por su cuenta el estudio de gran cantidad de materias totalmente nuevas para él, no sólo en cuanto a contenido, sino también en cuanto a técnica, con la consiguiente pérdida de tiempo y los inconvenientes de la autoformación. También al futuro profesor de Segunda Enseñanza se le priva del conocimiento armónico de la Matemática ofrecido por la Matemática moderna. Creemos, por consiguiente, que es indispensable una reorganización armónica de nuestros planes de estudios, en la que la Matemática moderna alcance el lugar que le corresponde. Como posiblemente no se podrían atender en la nueva organización todas las necesidades del futuro investigador, quizá pudiese el Consejo Superior de Investigaciones Científicas encargarse de suplir tales deficiencias.

Como se ha visto, no ha sido propiamente un proceso de abstracción lo que ha dado origen a la Matemática moderna, sino el vaciar las clases correspondientes a los conceptos primitivos; de aquí que, a pesar de su carácter relativo y un tanto ingenuo, hayamos preferido la denominación de moderna en lugar de abstracta. Además, esta última denominación no posee un carácter menos relativo que el de moderna, pues el proceso de pasar de una teoría a otra más general es un proceso constante en la Matemática.

