10

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS
Instituto «Jorge Juan»

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
HEMEROTECA

# GACETA MATEMATICA

REVISTA PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

1.ª Serie. - Tomo XXXI

7 y 8

MADRID
1979

# SOBRE LA EXISTENCIA DE CLAUSURA ALGEBRAICA PARA UN CUERPO

por

JAVIER LAFUENTE LÓPEZ

El motivo de esta nota es el de presentar una demostración de la existencia de clausura algebraica para un cuerpo, menos artificiosa que las que aparecen en la bibliografía usual sobre el tema (véase, por ejemplo, [1], [2] o [3]).

Esta demostración se basa en el siguiente resultado auxiliar:

*Proposición 1.*

Dado un cuerpo $k$, existe un conjunto S que contiene a $k$, tal que para todo cuerpo K extensión algebraica de $k$ con $k \subset K \subset S$, y para todo elemento $\alpha$ algebraico sobre K, existe una inyección $\zeta : K(\alpha) \longrightarrow S$ con $\zeta(x) = x$ para todo $x$ elemento de K.

La existencia de clausura algebraica para el cuerpo $k$ se demuestra ahora de manera natural al considerar el conjunto $\Sigma$ de todos los cuerpos $(K, +, \cdot)$ extensiones algebraicas de $k$, con soporte K contenido en S, ordenado respecto a la relación $K \leqslant K' \iff K$ es subcuerpo de K'. En efecto:

*a*) $(\Sigma, \leqslant)$ es un conjunto inductivo, pues si $(K_i)_{i \in I}$ es una cadena de $(\Sigma, \leqslant)$, el cuerpo

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i$$

con las operaciones naturales de suma y producto, es trivialmente cota superior de la cadena.

*b*) El lema de Zorn garantiza la existencia de algún elemento maximal $K \in \Sigma$ que en virtud de la proposición 1 es algebraicamente cerrado.

La demostración de la proposición 1 se deduce del siguiente lema, perteneciente a la teoría elemental de cardinales (véase [4] o [5]) y del correspondiente corolario.

*Lema 2.*

Si A es un conjunto infinito, y $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de conjuntos tales que $\mathrm{card}(I) \leqslant \mathrm{card}(A)$ y $\mathrm{card}(A_i) \leqslant \mathrm{card}(A)$ para todo $i \in I$, entonces

$$\mathrm{card}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \leqslant \mathrm{card}(A)$$

*Corolario 3*

Si K es extensión algebraica de $k$, entonces $\mathrm{card}(K) \leqslant \mathrm{card}(k[X])$.
Demostración:

Sea $\varphi : K \to k[X]$, tal que para todo $\beta \in K$, es $\varphi(\beta)$ un polinomio $p(X) \in k[X]$ de grado mínimo, verificando $p(\beta) = 0$. Entonces

$$K = \bigcup_{p \in k[X]} \varphi^{-1}(p)$$

y como $\varphi^{-1}(p)$ es finito para todo $p \in k[X]$, aplicando el lema 2 se concluye la demostración.

*Demostración de la proposición 1.*

Supóngase $k$ infinito. Por el lema 2 es $\mathrm{card}(k) = \mathrm{card}(k[X])$, ya que $k[X]$ puede considerarse sumergido en el conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} k^n$$

que tiene cardinal igual al de $k$. Sea $S = \mathfrak{P}(k)$ (en donde se ha identificado cada elemento $x$ de $k$ con su correspondiente $\{x\}$ de $\mathfrak{P}(k)$ ), si K es extensión algebraica de $k$ con $k \subset K \subset S$ y $\alpha$ es algebraico sobre K, por el corolario 3 es $\mathrm{card}(k) = \mathrm{card}(K) = \mathrm{card}(L(\alpha))$, por lo que $\mathrm{card}(K(\alpha) -$ $- K) < \mathrm{card}(S - K)$, y existe una inyección $\zeta_0 : K(\alpha) - K \longrightarrow S - K$, que permite construir $\zeta : K \longrightarrow S$ con $\zeta(x) = x$ si $x \in K$ y $\zeta(x) = \zeta_0(x)$ si $x \in K(\alpha) - K$, lo cual concluye la demostración.

Si $k$ es finito, por el corolario 3, cualquier extensión algebraica de $k$ es numerable, y es suficiente tomar $S = k \cup C$ siendo C un conjunto con la potencia del continuo.

## BIBLIOGRAFIA


[1] SERGE LANG: *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.

[2] P. DUBREIL, M. L. DUBREIL: *Lecciones de Algebra moderna*, Editorial Reverte, 1965.

[3] E. ARTIN: »Galois Theory», *Notre Dame Mathematical Lectures*, número 2, 1946.

[4] LÍA OUBIÑA: *Introducción a la teoria de conjuntos*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1965.

[5] BOURBAKI N.: *Theorie des ensembles* (Chap. 3), Hermann et Cie. (1243). París, 1956.