S 14

Salamanca

Investigación en Educación Matemática XVIII

Mª Teresa González Astudillo
Myriam Codes Valcarce
David Arnau Vera
Tomás Ortega del Rincón

SEIEM
VNiVERSiDAD DSALAMANCA
edu Facultad de Educación
IUFFyM
inee Instituto Nacional de Evaluación Educativa
EASD ZAMORA

Investigación en Educación Matemática XVIII

Edita

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Campus de Cartuja s/n, 18071 Granada (España)
Mª Teresa González
Myriam Codes
David Arnau
Tomás Ortega

Cítese como:

M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). (2014). *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Salamanca: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Diseño de la portada*:* Alberto Díez Alcaraz

Depósito legal: S.289-2014
ISSN: 1888-0762
ISBN: 978-84-697-0819-4

PÓSTERES

COMPRENSIÓN DE LAS DECENAS Y APLICABILIDAD DE LAS OPERACIONES EN PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES

Understanding tens and applicability of operations in verbal arithmetic problems

Mónica Ramírez[a], Carlos de Castro[b]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Estudiamos la comprensión de la decena y el conocimiento sobre la aplicabilidad de las operaciones aritméticas en un contexto de resolución de problemas, con alumnos de primer curso de educación primaria. Para ello, planteamos problemas de estructura aditiva que pueden resolverse aplicando los algoritmos de suma y resta, alternándolos con otros de estructura multiplicativa, con grupos de diez, cuya estrategia óptima de resolución implica el conocimiento del valor posicional de números de dos cifras. Los problemas se realizan en un taller semanal a lo largo de todo el curso. Recogemos datos mediante vídeo, entrevistas, hojas de registro y fotografías. En los resultados, destaca la preferencia de los alumnos por el uso de estrategias informales de modelización directa. En menor medida, los niños van incorporando los algoritmos, las estrategias inventadas y el conocimiento del valor posicional para resolver los problemas.

Palabras clave: *aritmética, comprensión, decena, educación primaria, resolución de problemas.*

Abstract

We study the understanding of tens and the knowledge about the applicability of arithmetic operations in a context of problem solving, with first grade students. To this end, we propose problems of additive structure that can be solved by applying the algorithms for addition and subtraction, alternating them with other problems of multiplicative structure with groups of ten, which optimum resolution strategy requires the knowledge of place value of two digit numbers. The problems are made in a weekly problem solving workshop throughout the whole course. We collect data through video, interviews, record sheets and photographs. In the results, we highlight the preference of students for the use of informal strategies of direct modeling. To a lesser extent, children use algorithms, invented strategies and knowledge of place value to solve the problems.

Keywords: *arithmetic, understanding, ten, primary education, problem solving.*

INTRODUCCIÓN

Durante la década de los años 80 del pasado siglo, se produjo un gran auge en las investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales. Uno de los mayores avances en este campo fue el consenso alcanzado al establecer categorías semánticas en los problemas de estructura aditiva, acuerdo que tuvo un alcance menor en los problemas de estructura multiplicativa (Castro, 2008). Castro y Frías (2013) sostienen que, a pesar de que esta área de investigación fue perdiendo interés a partir de los años 90, los problemas aritméticos verbales siguen ocupando un lugar fundamental en la escuela. Por otra parte, la resolución de problemas, bajo diferentes aproximaciones, sigue proponiéndose en el ámbito internacional como eje vertebrador de la organización de los contenidos matemáticos (Santos, 2008). El NCTM (2003) introduce los estándares de procesos, con la resolución de problemas, junto con el razonamiento y demostración, conexiones, comunicación y representación. Estos procesos tienen un gran paralelismo con las competencias matemáticas de PISA (OCDE, 2005). Recientemente, el nuevo currículo de primaria (MEC, 2014) profundiza en la

Ramírez, M., Castro, C. de (2014). Comprensión de las decenas y aplicabilidad de las operaciones en problemas aritméticos verbales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 533-542). Salamanca: SEIEM.

relevancia dada a los procesos de resolución de problemas al indicar que "constituyen la piedra angular de la educación matemática" (p. 19386) y al introducir, como nuevo bloque de contenidos en el currículo de matemáticas, los "procesos, métodos y actitudes en matemáticas" (p. 19386).

La relación entre el aprendizaje de la aritmética y la resolución de problemas aritméticos verbales tiene un doble sentido. Verschaffel, Greer y De Corte (2007) señalan que históricamente ha predominado el enfoque consistente en enseñar formalmente las destrezas aritméticas, para después aplicarlas a la resolución de problemas aritméticos verbales. Para Puig (1996), los problemas suelen confundirse con ejercicios rutinarios de práctica de procedimientos, introduciendo primero el algoritmo de la operación aritmética y, a continuación, el planteamiento de problemas aritméticos verbales. Así, la resolución del problema se reduce a la aplicación del algoritmo recién aprendido y, cuando se ha enseñado el algoritmo de varias operaciones aritméticas, a "descubrir" el algoritmo que hay que aplicar. Puig y Cerdán (1988) apuntan que los niños buscan palabras clave para decidir el algoritmo a realizar, lo que implica una lectura local del problema, sin profundizar en la comprensión del enunciado. En nuestros anteriores currículos de educación primaria, este enfoque aplicacionista aparece explícitamente. Por ejemplo, en la LOGSE se proponía "Resolver problemas… para comprobar que el alumnado sabe identificar cuál de las operaciones indicadas (suma o resta) es la adecuada para solucionar el problema y que sabe resolverla mediante el algoritmo aplicando correctamente todos sus pasos" (MEC, 1992, p. 9615) y en la LOE aparece, como criterio de evaluación, "Resolver problemas sencillos […] seleccionando las operaciones de suma y resta […] y utilizando los algoritmos básicos correspondientes (MEC, 2007, p. 31559).

En otro sentido, Verschaffel y otros (2007) indican que los problemas verbales se han empezado a utilizar "como vehículo para desarrollar destrezas resolviendo los problemas (p. 582)". En esta misma línea, Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) proponen el planteamiento de problemas aritméticos verbales a niños que no han recibido instrucción formal sobre las operaciones aritméticas, para que inventen y utilicen estrategias informales e intuitivas. En su revisión sobre pensamiento numérico en edades tempranas, Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) señalan que los niños pueden resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y la resistencia a incluirlos estas situaciones a esta edad, puede provocar no dotar de significado al algoritmo que aprenden en primaria (p. 9). Así, la inversión del orden tradicional, introduciendo la resolución de problemas antes de la enseñanza formal de destrezas, puede ayudar a que los niños doten de sentido las operaciones aritméticas. Esto facilitaría un aprendizaje con comprensión de estos contenidos matemáticos (Carpenter y Lehrer, 1999). Este tipo de trabajo de resolución está orientado a la comprensión global del enunciado del problema, sin búsqueda de palabras claves, sino a través de estrategias intuitivas de modelización directa (Carpenter y otros, 1999).

Este trabajo es la continuación de estudios previos realizados en educación infantil, con los mismos niños, desde los 4 años (Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010). Al llegar a primaria, estos niños cuentan con una experiencia previa de dos años en talleres de resolución de problemas, y tienen interiorizadas las normas del taller. Los niños participantes en este estudio tienen un gran bagaje de conocimientos informales. Comienzan un curso en que será fundamental la conexión entre esta matemática informal y la matemática formal, propia del inicio de la educación primaria, con la presencia de los algoritmos y la simbolización propia del sistema de numeración. En este contexto, queremos indagar sobre la integración de estos dos tipos de conocimiento, a través del estudio de las estrategias infantiles y su evolución a lo largo de un curso completo.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo seguimos el modelo de la Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI) (Carpenter y otros, 1999). Adoptamos una visión cognitiva de la comprensión según la cual esta emerge y se desarrolla a través de distintas actividades mentales como la construcción de relaciones, la extensión y aplicación del conocimiento matemático, la reflexión sobre las experiencias, la articulación del conocimiento propio y la apropiación del conocimiento matemático (Carpenter y Lehrer, 1999). Desde la CGI se propone que las estrategias que construyen los niños al resolver problemas sin instrucción previa, puede vincularse con los procedimientos formales que aprenderán según avance su escolaridad, dando sentido a los algoritmos. Para favorecer el aprendizaje con comprensión, debemos incidir sobre tres elementos clave: Las tareas, los instrumentos, y las normas (Carpenter y Lehrer, 1999). En este trabajo presentamos a los niños de primer curso tareas que no pueden abordar con conocimientos formales previamente estudiados, como problemas de estructura multiplicativa. Dejamos libertad en el uso de diversidad de instrumentos que puedan ayudar a los niños a representar y a resolver problemas y damos una especial importancia a las normas que rigen el taller de resolución de problemas, que son bastante diferentes de las de la clase diaria de matemáticas de los niños. En este enfoque, la resolución de problemas puede plantearse como una forma de pensar, que implica reflexión de ideas, hacer conjeturas, búsqueda de soluciones distintas y debatir sobre ellas en una comunidad de aprendizaje (Santos, 2008).

Dentro de la CGI se han realizado varias investigaciones en las que a través de planteamiento de problemas aritméticos verbales, los niños han desarrollado sus propias estrategias sin necesidad de tener conocimiento formal de las operaciones aritméticas (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997; Carpenter y otros, 1999). Estos autores describen las estrategias que inicialmente utilizan los niños con problemas aritméticos verbales con números de una cifra, primero ayudándose de materiales concretos (modelización directa), después utilizando la secuencia de numerales (estrategias de conteo) y, por último, recuperando hechos numéricos.

Carpenter y otros (1997) utilizaron problemas multiplicativos de grupos iguales con grupos de 10 (siendo el número de elementos por grupo, 10) para evaluar la comprensión de aspectos del sistema de numeración como es el agrupamiento de base 10. Los autores observaron las siguientes estrategias, proporcionando a los niños bloques de base 10:

- Agrupamiento (con recuento de uno en uno): modelizan con bloques de base 10 los grupos de 10, pero siguen contando de uno en uno las unidades que componen las decenas para el resultado final.
- Agrupamiento (con recuento de 10 en 10): modelizan con bloques de base 10, y cuentan los grupos de 10, de 10 en 10.
- Uso del valor posicional: identifican los grupos de 10 como decenas y las unidades sueltas como unidades.

Carpenter y otros (1999) describieron las estrategias de los niños al plantear problemas aritméticos verbales aditivos con números de varias cifras y observaron una serie de estrategias inventadas, en las que se desprenden del material:

- Secuencial, en la que parte de uno de los números y lo combinan con las distintas cifras del otro número respetando su valor posicional.
- Combinación de decenas y unidades, por separado, y los dos resultados los vuelven a combinar.
- Otras estrategias, como la compensación al acercarse con uno de los números a una decena, o potencia de 10, y compensar el otro número.

Estos autores encontraron que el uso de estrategias inventadas, antes o incluso durante la instrucción de los algoritmos estándar, favorecía la comprensión de conceptos del sistema de numeración de base diez (Carpenter y otros, 1997).

Al comenzar el primer ciclo de educación primaria se repasan los números de una cifra y se introduce la decena, cobrando importancia el valor posicional propio de la escritura decimal.

Aparecen los números de varias cifras (MEC, 2007, p. 31557) y las situaciones aritméticas se complican. Las estrategias informales, propias de la educación infantil, se vuelven poco eficientes para resolver problemas aritméticos en los que aparecen cantidades con números de dos cifras.

Nuestro trabajo se sitúa en el primer curso de primaria en el que no se ha iniciado el estudio de las estructuras multiplicativas. En el currículo (MEC, 2007) se propone "Resolver situaciones familiares… de la multiplicación para calcular un número de veces (p. 31557)" en las operaciones del primer ciclo, así como trabajar la construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10 como número de veces, suma reiterada o disposición de cuadrículas, que se realizan en el segundo curso de Primaria (Castro y Ruiz, 2011).

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo del estudio es valorar la comprensión de los alumnos de primer curso de primaria de dos aspectos observables en la resolución de problemas (el conocimiento de las decenas y la aplicabilidad de las operaciones de suma y resta) en un momento de transición de un conocimiento matemático informal (en el que predomina el uso de estrategias de modelización) a otro formal (caracterizado por la simbolización de la aritmética y el uso de algoritmos). Este objetivo general lo desglosamos en dos objetivos específicos.

- Estudiar las estrategias de los niños, y su evolución, al resolver problemas de estructura multiplicativa (de multiplicación y división agrupamiento) con grupos de 10. Se pondrá especial atención en el uso del conocimiento del valor posicional en números de dos cifras.
- Estudiar si los niños incorporan espontáneamente el uso de los algoritmos de suma y resta, detectando adecuadamente los problemas en que dichos algoritmos pueden aplicarse (los problemas de estructura aditiva con números de dos cifras).

MÉTODO

Participantes

La investigación se ha desarrollado en dos aulas de primer curso de educación primaria, en el CEIP de Manzanares el Real (Madrid). Han participado 28 alumnos de 1ºA (16 niños y 12 niñas) y 26 alumnos de 1ºB (14 niños y 12 niñas). La edad media al iniciar el curso es de 6 años y 2 meses.

Los problemas se han realizado dentro de un taller dirigido por las tutoras de los grupos, que habían recibido un curso de formación sobre resolución de problemas en la CGI. Una maestra, con varios años de experiencia en este enfoque (De Castro y Escorial, 2007), supervisó y dio apoyo en las primeras sesiones. Además, varias estudiantes en prácticas, que habían participado en un proyecto de 3 meses con el enfoque CGI, colaboraron en la grabación de vídeos y en la recogida de documentación (Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010).

Diseño del taller

Este estudio abarca todo el curso escolar con un total de 24 sesiones, con una sesión semanal de 45 minutos. El resto de las clases de la semana, las tutoras trabajan siguiendo el libro de texto seleccionado por el profesorado del centro.

El taller de problemas está pensado para que los niños desarrollen aprendizaje con comprensión de la aritmética y la numeración en primero de Educación Primaria. Según el marco teórico los niños deben tener la oportunidad de crear sus propias estrategias y articularlas para compartirlas con sus compañeros y poder debatir sobre ellas. En los talleres realizados se intentó que los niños fuesen conscientes de que debían inventar y utilizar estrategias propias con los instrumentos que se les proporcionaba y podían elegir y que tendrán que explicarla a los compañeros. Además debían comunicar y explicar bien la estrategia decidida como la mejor por escrito a una persona externa del aula. Esto se realizaba en varias fases: una primera de lectura de un cuento para dar un contexto cercano al niño del enunciado del problema, el planteamiento de problemas, la resolución individual del problema en el que podían elegir los materiales, la puesta en común en el que el tutor elegía algunos alumnos para exponer las estrategias de la forma más variada posible, y la escritura de la carta con la estrategia que ellos decidían (Ramírez y De Castro, 2012).

Al diseñar las tareas, alternamos los tipos para que los niños no utilicen estrategias de manera rutinaria. En la Figura 1 mostramos la evolución esperada de las estrategias al plantear problemas aritméticos verbales con cantidades inicialmente de una cifra o hasta 20 (tareas T1) y las esperadas en los problemas aritméticos verbales con números de dos cifras (tareas T2) y en los problemas aritméticos de estructura multiplicativa con grupos de 10 (Tareas T3).

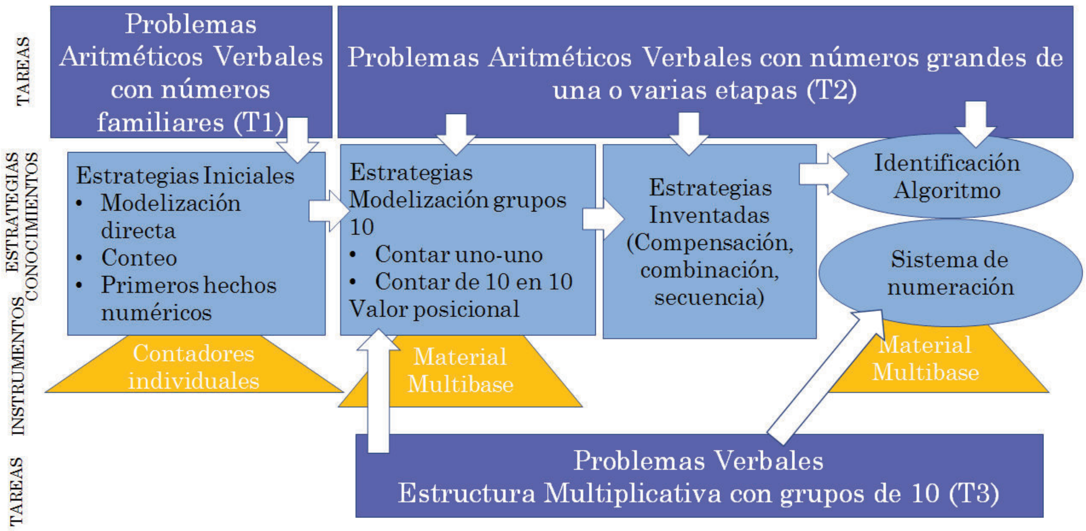

Figura 1. Evolución de las estrategias según CGI

En las seis primeras sesiones (ver Tabla 3, apéndice) se plantearon problemas aritméticos de estructura aditiva o multiplicativa con números menores que 20. Los alumnos disponían de materiales como contadores individuales, tabla 100 y rekenrek (ábaco holandés que se utiliza como modelo para la iniciación al cálculo).

En las sesiones 7, 8, 8 b, 11, 12 y 15 (ver Tabla 3) se plantearon problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10, de división agrupamiento con resto, o de multiplicación. En estas sesiones, los niños ya disponían de barras y unidades de los bloques de base 10 y otros materiales como cartones de decenas de huevos, que los niños trajeron de casa.

En las demás sesiones se plantearon sobre todo problemas de estructura aditiva que se podían resolver con algoritmos de las operaciones y en los que el tamaño de los números desaconsejaba la modelización directa. En las sesiones 9, 10, 13, 17, 18 y 20 se plantearon problemas de estructura aditiva que implican suma y en las sesiones 16, 19, 22 y 23 de resta (ver Tabla 3).

Recogida de información

La recogida de información se realizó por varios medios: (a) Hojas de registro, en las que se apuntaban los materiales utilizados y se describen los procedimientos que siguen los alumnos; (b) Entrevistas individuales (Ginsburg, Jacobs y López, 1996) grabadas en video por la investigadora; (c) Grabaciones en video, que captaban momentos de trabajo individual, de la puesta en común, o de escritura de la carta final; (d) Fotografías de distintos momentos del taller; (e) Hojas de trabajo de los alumnos; (f) Cartas de los alumnos con la contestación al problema; y (g) Narraciones de la investigadora tras la sesión.

RESULTADOS

Hemos analizado la información recogida siguiendo un proceso de categorización mixto de las estrategias (deductivo-inductivo). Basándonos en el esquema de categorías procedente de anteriores trabajos (Carpenter y otros, 1997; Carpenter y otros, 1999) descrito en el marco teórico, elaboramos la categorización expuesta en esta sección, que incluye un análisis más fino de las estrategias tomando en cuenta el material empleado (estructurado o no) y el modo de realizar el conteo (por unidades o a saltos de diez). Así, en problemas multiplicativos con grupos de 10, hemos observado las siguientes estrategias:

- *Agrupamiento con contadores individuales (contando de uno en uno)*: estrategia de modelización directa en que se representan el número de grupos indicado en el enunciado con 10 contadores individuales por cada grupo, y luego se representan las unidades sueltas. Para calcular la solución, se cuentan de uno en uno todos los contadores individuales.
- *Agrupamiento con contadores individuales (contando de 10 en 10*): Estrategia de modelización directa en la que se representan el número de grupos que se indican con tantos contadores individuales como indica el enunciado que tiene cada grupo, en este caso 10, y además se representan las unidades sueltas. El recuento final se hace contando de 10 en 10.
- *Agrupamiento con bloques de base 10 (contando de uno en uno*). Representan los grupos de 10 con materiales que representan decenas y las unidades sueltas. El recuento final se hace contando de uno en uno, incluso cada una de las unidades de la barra, y a continuación las unidades sueltas.
- *Agrupamiento con bloques de base 10 (contando de 10 en 10).* Representan los grupos de 10 con materiales que representan decenas y las unidades sueltas. El recuento final se hace contando de 10 en 10 las decenas y de uno en uno las unidades.
- *Conteo a saltos de 10 en 10.* No se representa las cantidades con material y cuentan de 10 en 10 el número de grupos que indica el problema. Después cuentan las unidades sueltas.
- *Uso del valor posicional*. Se identifica que los grupos de problemas son las decenas del número y las unidades sueltas pertenecen a la posición de las unidades, y enuncian el número con la decena y unidades dadas.

Para los problemas de estructura multiplicativa de división agrupamiento con resto y grupos de 10 (véase problema de la sesión 11) se observaron las siguientes estrategias:

- *Agrupamiento con contadores individuales.* Es una estrategia de modelización directa. Se cogen tantos contadores individuales como indica la cantidad total del problema y se hacen grupos de 10. Se cuentan los grupos de 10 por un lado, y por otro, los contadores sueltos.
- *Agrupamiento con bloques de base 10*. Se representa la cantidad total de elementos con barras para las decenas y unidades sueltas. Después se cuenta el número de barras para saber el número de grupos y las unidades sueltas para saber el resto.
- *Conteo a saltos*: Se cuenta de 10 en 10 hasta alcanzar el número total de elementos sin pasarse. El número de dieces contados es el número de grupos, y después se realiza un conteo o recuperación de un hecho numérico hasta las unidades. Algunos niños que utilizaron esta estrategia se apoyaban en la Tabla 100 para llevar bien el recuento de 10-10.
- *Uso el valor posicional*. Fijándose en la cantidad total de elementos, extraen las decenas como grupos y unidades como resto.

Como se aprecia en la Tabla 1, hay un aumento considerable del uso del valor posicional en los problemas de multiplicación (sesión 7 y 12), disminuyendo las estrategias de modelización directa.

En los problemas de división agrupamiento con resto, el uso de la estrategia de valor posicional aumenta significativamente de la sesión 8 a la 11, y se mantiene estable después en la sesión 15.

Tabla 1. Porcentaje de estrategias en sesiones con problemas multiplicativos de grupos de 10

	Sesión 7 Multiplicación	*Sesión 8 División*	*Sesión 11 División*	*Sesión 12 Multiplicación*	*Sesión 15 División*
Agrupamiento indiv. (1-1)	38,9	62,3	45,0	14,8	46,0
Agrupamiento indiv. (10-10)	20,3			7,4	
Agrupamiento B10 (1-1)	1,9	0,0	11,0	3,7	7,4
Agrupamiento B10 (10-10)	5,5			1,9	
Conteo a saltos (10 en 10)	11,0	1,9	2,0	3,7	1,4
Valor posicional	0,0	3,8	7,0	25,8	7,4

Porcentajes sobre el total de alumnos. No aparecen la no asistencia y no resolución.

Pocos niños han empleado el conocimiento del valor posicional de las cifras de un número para resolver los problemas, con excepción del problema 12 en el que aparece la expresión “4 decenas”, en lugar de “4 grupos de diez”. En este caso, la palabra “decena” parece desencadenar el uso del valor posicional del 4 (así lo hicieron un 25,8% de los participantes). El uso del conocimiento del valor posicional se ha dado en mayor medida en problemas de multiplicación que en problemas de división agrupamiento (ambos con grupos de diez).

En los problemas de estructura aditiva se observaron los siguientes tipos de estrategias:

- Modelización directa con contadores individuales. Estrategias en las que se representa cada cantidad del enunciado con contadores separados.
- Modelización directa con bloques de base 10. Se representan las cantidades con barras y unidades. En este caso se puede distinguir según si el recuento final se hace contando de uno en uno, incluso de las unidades de las barras, o contando de 10 en 10 las barras.
- Estrategias de conteo. Se realizan con un conteo sin objetos, apoyándose en la secuencia de numerales. Dentro de las estrategias de conteo se puede distinguir los conteos por unidades, los conteos a saltos de 10 en 10 y por unidades y, en algunas ocasiones, acercándose contando de uno en uno hasta una decena y a partir de ahí contaban de 10 en 10. La Tabla 100 se utilizó en varias ocasiones para llevar ese conteo de numerales.
- Estrategias inventadas. Estas estrategias suponen el uso del valor posicional de los números. En el taller observamos *estrategia secuencial*, en la que se parte de uno de los números del enunciado y se va sumando o restando las decenas del otro, y después las unidades; *estrategia combinación de decenas y unidades por separado*, y después su combinación final; y *estrategia compensación* a la decena más próxima, y luego se cuentan las decenas enteras. Por ejemplo, para hacer 40 - 26, se cuentan 4 unidades, hasta el 30, y una decena.
- Algoritmo. Los niños utilizan los algoritmos de suma o resta para resolver el problema.

En la Tabla 2 se observan los resultados del análisis de estrategias. En la sesión 10 aparece por primera vez el algoritmo de la suma, convertido en la segunda estrategia más frecuente a partir de la sesión 19, y empleado por un 48% de los participantes en la sesión 20. En la sesión 13 aumentan las estrategias inventadas, el uso del algoritmo y la frecuencia de uso de bloques de base 10. En las sesiones 22 y 23, en problemas de resta con llevada, muchos niños eligen inicialmente aplicar el algoritmo de la resta pero, al implicar una “llevada” aún no estudiada, vuelven a la modelización directa. En problemas de estructura multiplicativa sin grupos de 10 (sesión 14, con reparto de 60 entre 4), todos los niños utilizan estrategias de modelización directa de agrupamiento y reparto.

Tabla 2. Porcentaje estrategias recogidas en sesiones con problemas aditivos con números dos cifras

	Sesión 9	*Sesión 10*	*Sesión 13*	*Sesión 16 R*	*Sesión 17*	*Sesión 18*	*Sesión 19 R*	*Sesión 20*	*Sesión 22 R*	*Sesión 23 R*
Modelización Directa	62,8	66,0	55,1	38,8	69,2	46,0	32,0	20,0	39,6	40,8
Modelización con B10	0,0	6,0	8,2	20,4	1,9	8,0	12,0	0,0	0,0	2,0
Estrategia de conteo	5,9	4,0	2,1	8,2	7,7	2,0	18,0	2,0	4,2	6,1
Estrategias inventadas	11,8	6,0	8,2	6,1	11,5	12,0	4,0	4,0	0,0	0,0
Algoritmo	0,0	2,0	6,1	0,0	0,0	8,0	14,0	48,0	31,3	18,4

Porcentajes sobre el total de alumnos. La "R" indica que en la sesión se presenta un problema de resta con llevada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las estrategias empleadas por los niños son similares a las encontradas en trabajos anteriores (Carpenter y otros, 1997; Carpenter y otros, 1999). Las diferentes estrategias de modelización directa son las más frecuentes en todos los problemas. Esto tiene a nuestro juicio una interesante lectura: Mientras que en primer curso de educación primaria se presta mucha atención al simbolismo aritmético y a la iniciación en los algoritmos de las operaciones con números de dos cifras, los niños siguen mostrando una preferencia clara por el uso de estrategias informales, dentro de un ambiente regido por normas que permitan la libre elección de instrumentos y estrategias.

Las estrategias más avanzadas, como las *estrategias inventadas* y el uso de algoritmos aumentaron progresivamente a lo largo del taller, aunque dependiendo de la operación y las cantidades implicadas. En bastantes ocasiones, los niños que usaban estas estrategias más eficientes volvieron a la modelización directa al experimentar dificultades. Para nosotros, esto indica una construcción de buenas conexiones entre las estrategias informales y procedimientos más eficientes (como las estrategias inventadas) y más formales (como los algoritmos), lo cual es un buen indicador de un aprendizaje con comprensión (Carpenter y Lehrer, 1999).

En los problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10, los niños utilizaron la estrategia de agrupamiento con contadores individuales, pero luego contaban de 10 en 10, sin necesidad de utilizar los bloques de base diez, a diferencia de lo indicado por Carpenter y otros (1999). Además, en los problemas de estructura aditiva también los niños construían las cantidades de los problemas con números de dos cifras, representado con contadores individuales grupos o barras de 10, y después aplicaban el recuento de uno en uno o de 10 en 10. Otros, se apoyaron en las cajas de huevos de diez, para formar grupos de 10 sin contarlos. Las estrategias de conteo que observamos inicialmente se realizaban de uno en uno pero, con cantidades de dos cifras, los niños empezaron a apoyarse en la Tabla 100 y llegaron a utilizarla de apoyo para llevar conteo de 10 en 10.

La introducción de instrumentos como las cajas de decena de huevos, o la tabla 100, que no habían sido empleados en la literatura citada, ha permitido detectar nuevas modalidades de aplicación de estrategias descritas en el marco teórico. Interpretamos que estos instrumentos pueden jugar un papel de catalizadores en la transición de estrategias de modelización directa al conteo, o del conteo por unidades al conteo de diez en diez, lo cual tiene importantes implicaciones para el diseño de instrucción en estas edades.

Desde un punto de vista curricular, observamos que los niños aprenden conceptos matemáticos informales antes de su incorporación formal al currículo. En este sentido, proponemos incluir este aprendizaje informal en la planificación de tareas. Resolver problemas de estructura multiplicativa en primer curso de primaria, para mejorar la comprensión sobre la decena, es un ejemplo de ello.

Referencias

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Intervention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3-30.

Carpenter, T. P. y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 1-11.

Castro, E. y Frías, A. (2013). Two-step arithmetic word problems. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 379-406.

Castro, E. y Ruiz, J. F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 99-121). Madrid: Pirámide.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación (Mon. IX),* 23-48.

Ministerio de Educación y Ciencia (1992, 24 de marzo). Resolución de 5 de marzo de 1992, de la Secretaría de Estado de Educación, por la que se regula la elaboración de proyectos curriculares para la Educación Primaria. *BOE, 72*, 9594-9667.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, 31487-31566.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, 19349-19420.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Núñez, C., De Castro, C., Del Pozo, A., Mendoza, C. y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: SEIEM.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: Comares.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En D. Arnau, J.L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática – 2012* (pp-109). Valencia: Universitat de València y SEIEM.

Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: SEIEM.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2007). Whole Number Concepts and Operations. En Frank K. Lester (ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (557-628). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Apéndice

Tabla 3. Problemas planteados en el taller

Sesión	*Problema*
1	Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6?
2	Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?
3	Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?
4	El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?
5	Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?
6	En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?
7	Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿Cuántos patitos tenemos en total?
8a	Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y Cuántos patitos quedan sin guardar?
8b	Si hay 34 patitos, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?
9	Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?
10	Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?
11	Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran?
12	Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?
13	Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?
14	Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?
15	Cuando había 45 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?
16	La reina de los pasteles le regala 2 decenas de pasteles a la princesa. Por el camino, a la princesa le entra hambre y se come 8 pasteles. ¿Cuántos pasteles quedan para su mamá?
17	Al volver a casa, la princesa le llevó a su mamá 12 pasteles, una decena de flores, un balón y un gato. ¿Cuántas cosas le lleva en total de regalo?
18	Si el papá de Mónica subió 4 decenas de escalones, luego hizo un descanso, y después subió 38 escalones más, ¿Cuántos escalones había subido en total?
19	Si la escalera tenía 9 decenas de escalones en total y el papá de Mónica ya había subido 78, ¿Cuántos escalones le faltaban por subir para llegar a la luna?
20	Si consigues 32 euros por saltar entre ortigas, y 29 euros por tragarte una rana muerta, ¿Cuántos euros has conseguido al final?
21	Si entras en un supermercado encima de un toro y rompes 5 cajas de galletas con 12 galletas cada una, ¿Cuántas galletas aplastas en total?
22	Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo?
23	Si arriba hay 4 decenas de pájaros y abajo hay 26 pájaros, ¿cuántos pájaros hay más arriba que abajo?
24	Para dar de comer a sus peces, Bruno echaba 24 guisantes en la pecera. ¿Cuántos guisantes se comía cada pez?