

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Ecuaciones Funcionales



TESIS DOCTORAL

**Sistemas competitivos o cooperativos con coeficientes
periódicos**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Luis Jesús Ledesma y Otamendi

DIRECTOR:

Alfredo Somolinos Fernández-Nespral

Madrid, 2015

TP
1984

143

Luis Jesús de Ledesma y Otamendi



* 5 3 0 9 8 6 6 5 1 1 *

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

x-53-166859-1

SISTEMAS COMPETITIVOS O COOPERATIVOS CON COEFICIENTES PERIODICOS

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1984



BIBLIOTECA

Colección Tesis Doctorales. Nº 143/84

© Luis Jesús de Ledesma y Otamendi
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1984
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-19185-1984

SISTEMAS COMPETITIVOS O COOPERATIVOS
CON COEFICIENTES PERIODICOS

LUIS DE LEDESMA OTAMENDI

Tesis Doctoral dirigida por el
Dr. ALFREDO SOMOLINOS FERNANDEZ-NESPRAL
Ponente, Dr. ALFONSO CASAL PIGA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS - UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

MADRID, FEBRERO, 1983

A Paloma,
por lo de las carretas.

I N D I C E

CAPITULO I.- Introducción.

1. Motivación.....	1
2. Formulación general.....	3

CAPITULO II.- Planteamiento de problemas.

1. Existencia de soluciones periódicas no triviales	5
2. Acotación	7
3. Análisis global de todas las soluciones	8
4. Fuerte no linealidad	8

CAPITULO III.- Algunos métodos utilizados en el estudio
de ecuaciones diferenciales no lineales
con coeficientes periódicos.

1. Introducción	10
2. El método de pequeñas perturbaciones	10
3. El método del operador de traslación	13
4. Métodos basados en la teoría de la bifurcación	16
5. Puntos fijos de operadores en espacios funcionales. Teoría del grado. Funciones gúfa	19

CAPITULO IV.- Aplicaciones.

1. Introducción	29
2. Competición entre dos especies. Soluciones periódicas y solucio- nes acotadas	29
3. El método de las funciones gúfa. La ecuación logística	42
4. El método de las funciones gúfa. Competición	48

CAPITULO V.- Análisis global de todas las soluciones.

1. Introducción	59
2. El operador de traslación a lo largo de soluciones	60
3. Definiciones	61
4. Comportamiento global de las soluciones	62
5. Unicidad y estabilidad de las soluciones periódicas	63
6. Conclusión	66

CAPITULO VI.- El método de las funciones barrera.

1. Introducción	67
2. Definición de punto sin retorno	69
3.4.5.6. Resultados sobre funciones barrera y puntos sin retorno ..	69
7. Aplicaciones	74
8. Nota	76

CAPITULO VII.- Aplicación de la técnica de las funciones barrera.

1. Introducción	77
2. Competición	77
3. Simbiosis	88
3.1. Caso en que existen soluciones periódicas	89
3.2. Caso en que no existen soluciones periódicas	103

BIBLIOGRAFIA	110
--------------------	-----

CAPITULO I: INTRODUCCION

1. Motivación.

La interacción de poblaciones de distintas especies es un problema formulado matemáticamente desde hace tiempo. Recuérdense los primeros trabajos de Volterra (1926) y Lotka (1925) que dieron lugar, entre otros muchos resultados, al sistema de ecuaciones que lleva su nombre; nombre que, por extensión, se aplica a toda una clase de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales que sirven como modelo para muy diversas interacciones entre varias especies vivas.

En el modelo clásico todos los coeficientes son constantes, se trata de un sistema autónomo. En este trabajo, en cambio, pretendemos ocuparnos de un caso más general en el cual esos coeficientes sean funciones periódicas del tiempo.

Los problemas matemáticos que esa generalización plantea son numerosos y muy interesantes. En el capítulo II se hace una breve presentación de los más importantes y en el III resumimos algunas de las técnicas utilizadas para abordarlos. La mera consideración de esa lista de problemas y técnicas permite darse cuenta de que se trata de cuestiones profundas y que abarcan una gran cantidad de campos, dentro y fuera de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por otra parte, los trabajos realizados hasta ahora o bien se quedan en un plano general ó bien, al pasar a lo concreto, dejan parte de los problemas sin resolver. Por eso, nuestra primera motivación ha sido la de intentar contribuir al desarrollo de técnicas aplicables a una gran variedad de casos al mismo tiempo que tratamos de contestar a todas las preguntas de verdadero interés que se puede uno hacer ante un problema concreto. Tales respuestas constituyen el contenido de los capítulos IV , V y VII y , en dicho capítulo VII, aplicamos a nuestro caso la técnica de las funciones barrera, expuesta en el VI , que, como acabamos de decir, amplía los métodos generales de estudio de

sistemas no lineales con coeficientes periódicos, principalmente en lo que a existencia y acotación de soluciones periódicas se refiere.

Las aplicaciones del sistema que pretendemos estudiar constituyen nuestra segunda motivación y desde ese punto de vista parece natural la consideración de coeficientes periódicos si se tienen en cuenta las oscilaciones a las que se halla expuesto cualquier parámetro ecológico: la meteorología, los recursos alimenticios, las épocas de apareamiento, caza o pesca, etc. Sin embargo y por lo que sabemos, hasta muy recientemente no se ha emprendido con cierta generalidad un estudio de tales sistemas con coeficientes periódicos. Los primeros trabajos se deben a Cushing, datan de 1976 (véase Cushing (1977_b) y también Cushing (1976_a)) y fueron impulsados por la experimentación y las conjeturas de biólogos y especialistas en problemas de población. Por ejemplo Utida (1957) sugiere que una dependencia de los coeficientes respecto del tiempo podría explicar las oscilaciones obtenidas en sus estudios experimentales. Koch (1974) por su parte propone un mecanismo de degradaciones periódicas y casi catastróficas del ambiente para explicar la supervivencia y oscilación de un ecosistema de dos especies que en un medio ambiente constante terminaría con la extinción de la especie "inferior".

En nuestro caso, curiosamente, nos interesamos por el problema de las soluciones periódicas de sistemas con coeficientes periódicos de una forma muy parecida y cuando todavía no conocíamos los trabajos que acabamos de citar. La idea surge por un artículo de Bremermann (1979) en el que considera dos subpoblaciones de la bacteria E.Coli. Una de ellas es capaz de metabolizar glucosa y la otra lactosa. Suponiendo que la glucosa abunda en invierno y la lactosa en verano, si siempre fuese invierno (o, para el caso, verano) una de las dos subpoblaciones "exterminaría" a la otra. Sin embargo, en el cuadro de la natural oscilación invierno-verano las dos subpoblaciones pueden coexistir, oscilando ellas también a su vez.

Como veremos, en todos los casos se trata de problemas en los que el medio ambiente cambia periódicamente y las poblaciones también. Parece, pues, natural formularlo mediante ecuaciones con coeficientes periódicos e interesarse en particular por las soluciones periódicas de tales ecuaciones. Ese es, precisamente, el objeto de nuestro trabajo.

2. Formulación general.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{u}_i = u_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j \right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

como modelo de la interacción de n especies cuyos "tamaños" (número de individuos, cantidad de biomasa, etc), u_i , son funciones del tiempo. Como es bien sabido, b_i es la tasa intrínseca de crecimiento de la población i -ésima en ausencia de cualquier acción interespecífica o intraespecífica. De esas acciones dan cuenta, por un lado, los coeficientes $-c_{ij}$, $i \neq j$ que miden la influencia de la especie j sobre la evolución de la especie i y, por otra parte, los coeficientes $-c_{ii}$ que miden la autolimitación o los "fenómenos sociales" internos de la especie i . En este trabajo supondremos siempre que estos últimos coeficientes, $-c_{ii}$, son negativos. Los signos de los restantes coeficientes, $-c_{ij}$, $i \neq j$, que coinciden con los de los elementos de la llamada matriz comunitaria (véase May (1973)), tienen una significación biológica muy directa. Cuando son nulos, definen la ausencia de relación entre dos especies y, en general, determinan el tipo de interacción que se llama positiva, neutra, o negativa según que $-c_{ij}$ sea positivo, nulo, o negativo. Así, por ejemplo, si consideramos el par de elementos $-c_{ij}$ y $-c_{ji}$ podemos dar una lista de todos los tipos posibles de interacción entre las especies i y j por medio de pares formados con los signos $+$, 0 y $-$: independencia completa ($0 \ 0$) comensalismo ($+ \ 0$), parasitismo ($- \ 0$), simbiosis ($+ \ +$), competición ($- \ -$) y predador-presa ($+ \ -$). Cuando se consideran todos los coeficientes

c_{ij} aumenta obviamente el número de posibles tipos de interacciones. Las técnicas que desarrollaremos aquí servirán igualmente para los dos casos extremos de la gama: competición ($-c_{ij} < 0$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$) y simbiosis también llamada mutualismo, cooperación y competición negativa, ($-c_{ij} > 0$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$) y las aplicaremos al caso más frecuentemente estudiado, $n = 2$, donde se revelan genuinamente y sin limitaciones las acciones interespecíficas. En efecto, los intentos de estudiar los casos con $n > 2$, véase por ejemplo Cushing (1976_a), llevan aparejadas muchas veces condiciones de "debilidad" de dichas acciones (acotaciones muy estrictas de los coeficientes c_{ij} con $i \neq j$) ilustrando el principio general de que el aumento de complejidad en el modelo de un ecosistema parece traer consigo una pérdida de estabilidad estructural en muchos casos. Véase también Smale (1966).

Nota. Aunque esto no afecta a las consideraciones que acabamos de hacer, debe recordarse que salvo mención explícita en contra, se supondrá siempre que los coeficientes b_i , c_{ii} , c_{ij} son funciones periódicas de periodo T o, más brevemente, funciones T -periódicas.

CAPITULO II : PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

1. Existencia de soluciones periódicas no triviales.

1.1. Debido a la forma del sistema

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1(b_1(t) - c_{11}(t)u_1 - c_{12}(t)u_2) & b_1, c_{ij} \text{ funciones} \\ & & \text{T-periódicas} \\ \dot{u}_2 &= u_2(b_2(t) - c_{21}(t)u_1 - c_{22}(t)u_2) & c_{11}, c_{22} > 0 \\ & & c_{12}, c_{21} > 0 \quad \text{ó} \\ & & c_{12}, c_{21} < 0 \end{aligned}$$

planteado en el capítulo anterior, es claro que $u_1 = 0, u_2 = 0$ es una solución de (1) trivialmente periódica y no es difícil demostrar (véase por ejemplo IV 3) que existen otras dos soluciones T-periódicas situadas sobre los ejes de coordenadas, a saber $(0, \hat{u}_2(t))$ y $(\hat{u}_1(t), 0)$ con \hat{u}_i soluciones T-periódicas no nulas de la ecuación logística

$$\dot{u}_i = u_i(b_i(t) - c_{ij}(t)u_j).$$

Sin embargo, siendo (1) un sistema que pretende servir de modelo del comportamiento de dos poblaciones, parece natural interesarse por soluciones $u_1(t), u_2(t)$ en las que no se anule ninguna de las dos componentes y que definimos como soluciones no triviales.

Definición: Diremos que (u_1, u_2) es una solución no trivial de (1) si es solución y para todo t se tiene

$$u_1(t) > 0 \quad u_2(t) > 0.$$

No podemos prescindir de las tres soluciones $(0,0)$ $(\hat{u}_1, 0)$ $(0, \hat{u}_2)$ a que nos acabamos de referir. Tienen interés por sí mismas como casos límite y también en relación con las soluciones no triviales (pueden verse las secciones III.4, V.5 y las referencias

que allí se citan), pero aquí vamos a estudiar particularmente estas últimas.

1.2 El primer problema que se plantea respecto a las soluciones T-periódicas no triviales es el de su existencia y de él nos ocuparemos en capítulos posteriores en diversos contextos y con distintas técnicas. Algunas de esas técnicas (por ejemplo, la de las funciones gufa, III.5) dan información sobre existencia, pero no permiten precisar demasiado la región de R^2 donde se encuentran las soluciones T-periódicas cuya existencia se afirma. En otras palabras, no sabemos si se trata de soluciones triviales o no. Para resolver esa dificultad recurriremos frecuentemente al siguiente cambio de variables

$$(4) \quad x_1 = \log u_1 \quad x_2 = \log u_2$$

que transforma (1), restringido al primer cuadrante ($u_1 > 0, u_2 > 0$) en el sistema

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_1(t) - c_{11}(t) e^{x_1} - c_{12}(t) e^{x_2} \\ \dot{x}_2 &= b_2(t) - c_{21}(t) e^{x_1} - c_{22}(t) e^{x_2} \end{aligned}$$

con la siguiente propiedad de comprobación inmediata

1.3 Lema : A toda solución T-periódica no trivial, u_1, u_2 , de (1) corresponde una solución T-periódica, x_1, x_2 , de (5) dada por

$$x_1(t) = \log u_1(t) \quad x_2(t) = \log u_2(t)$$

y, recíprocamente, a cada solución T-periódica (trivial o no), x_1, x_2 , de (5) corresponde una solución T-periódica no trivial, u_1, u_2 de (1) dada por

$$u_1(t) = e^{x_1(t)} \quad u_2(t) = e^{x_2(t)}$$

No parece necesario insistir en que la utilidad del cambio (4) y el lema anterior reside en que la mera demostración por un método cualquiera de la existencia de soluciones para (5) nos da automáticamente soluciones no triviales de (1).

1.4. El hecho de interesarnos por soluciones de (1) que sean T-periódicas no creemos que requiera una larga justificación: Se trata de un problema con una larga tradición, lo sugiere naturalmente la periodicidad de los coeficientes de (1) y, desde el punto de vista de las aplicaciones y la comprobación de los resultados, las soluciones T-periódicas son las únicas observables en el mundo físico. Para terminar, señalemos que la teoría confirma muchas veces esta y otras conjeturas con resultados tales como el teorema V.4.2 según el cual toda solución de (1) es T-periódica o tiende a una solución T-periódica.

2. Acotación.

Hemos dedicado una parte considerable de este trabajo (véanse los capítulos VI y VII) al problema de delimitar de forma constructiva la región del espacio donde se encuentran las soluciones T-periódicas, y quizás ahí está la mayor originalidad de dicho trabajo. Por una parte se corrige la imprecisión que en este aspecto presentan otros métodos orientados preferentemente a la demostración de existencia y que lleva incluso a no poder decidir si las soluciones cuya existencia se afirma son o no triviales (véase la sección anterior). Pero, además, y como es obvio, la acotación de la región que contiene la o las soluciones T-periódicas añade una información, que puede ser preciosa, a la de su mera existencia. En el fondo, se trata de medir de alguna forma la amplitud de las oscilaciones de un sistema y eso tiene una gran importancia, por ejemplo, en el caso frecuente de que se estén buscando solucio_

nes T-periódicas para evitarlas.

El método de las funciones barrera desarrollado en el capítulo VI y aplicado en el VII proporciona la existencia de soluciones T-periódicas no triviales precisamente mediante la construcción del conjunto donde deben encontrarse. Incluso cuando la existencia no puede demostrarse, el método proporciona estimaciones de la amplitud de las posibles oscilaciones.

3. Análisis global de todas las soluciones

En un modelo biológico nos interesa delimitar el número y tipo de soluciones posibles. En concreto, nos interesa excluir el fenómeno del "caos" en el que un sistema determinístico presenta respuestas cuasi aleatorias. Este fenómeno se da cuando hay soluciones con infinitos periodos diferentes y soluciones no periódicas que no tienden a ninguna de las periódicas. Veremos en el capítulo V que este fenómeno no acaece en nuestro caso y, lo que es más, que no hay soluciones subarmónicas.

Igualmente interesante es la pregunta sobre el número y estabilidad de las soluciones periódicas.

Utilizando el operador de traslación podremos contestar todas estas preguntas al mismo tiempo y dar una imagen global del flujo del sistema (1) en el primer cuadrante. Será, como decimos, el contenido del capítulo V.

4. Fuerte no linealidad.

Quisiéramos poner de manifiesto para terminar que, pese a la sencillez de planteamiento del sistema (1), los problemas que hemos propuesto en las anteriores secciones de este capítulo revisten una especial dificultad, rasgo común, por otra parte, a numerosas ecuaciones diferenciales que rigen la evolución de sistemas para los cuales se desea producir o impedir la aparición de fenómenos periódicos. La existencia de soluciones T-periódicas no es un problema

trivial incluso en el caso lineal, como muestra la teoría de Floquet (Floquet (1883)), y en el caso no lineal, su resolución está íntimamente ligada a numerosos e interesantes problemas que desbordan el marco de la teoría de ecuaciones diferenciales: bifurcación, análisis funcional, teoría del grado topológico, etc. (vease el capítulo III) En nuestro caso, además, se trata de un problema fuertemente no lineal en el sentido de que no vamos a estudiar (1) como una perturbación del sistema lineal

$$\dot{y}_1 = y_1 b_1(t)$$

$$\dot{y}_2 = y_2 b_2(t)$$

(Las hipótesis que para ello habría que hacer sobre la magnitud de los coeficientes c_{ij} quitarían casi todo el interés a nuestro problema). Por eso aquí vamos a mantener el sistema (1) en toda su generalidad aún a costa de tener que recurrir a métodos más sofisticados y contentarnos a veces con resultados menos brillantes en lo que se refiere a unicidad y estabilidad (Es el caso de las condiciones restrictivas que se imponen en el capítulo V para obtener estabilidad. Véanse las secciones V.1, V.5.5 y V.5.6.)

III. ALGUNOS METODOS UTILIZADOS EN EL ESTUDIO
DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES
CON COEFICIENTES PERIODICOS.

1. Introducción

Tenemos formulado un sistema

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= u [b_1(t) - a_{11}(t)u - a_{12}(t)v] \\ \dot{v} &= v [b_2(t) - a_{21}(t)u - a_{22}(t)v] \end{aligned}$$

con coeficientes periódicos, que engloba diversos tipos de interacciones entre las especies u y v , y tenemos (capítulo II) una serie de problemas planteados, sobre todo, respecto a sus posibles soluciones periódicas. No pretendemos reseñar todo lo que se ha intentado para resolver tales problemas. Sería tanto como repasar la historia de las ecuaciones diferenciales desde que Poincaré dijo de las soluciones periódicas que eran "la única brecha de entrada a una plaza tenida por inexpugnable". En este capítulo nos limitaremos a cuatro de los métodos más conocidos. La elección se ha hecho sobre todo teniendo en cuenta que los cuatro han sido utilizados recientemente en el mismo contexto matemático y biológico que aquí tenemos planteado. Por otra parte, sirven también como introducción a los métodos que forman el contenido más propio y original de este trabajo (véanse los capítulos VI y siguientes) y que pueden considerarse como el peldaño siguiente a lo que en el presente capítulo se verá.

2. El método de pequeñas perturbaciones.

De una forma muy general podemos decir que la ecuación diferencial

$$(2) \quad \dot{x} = s(t,x)$$

es una perturbación de

$$(3) \quad \dot{x} = r(t,x) \quad r(t+T,x) = r(t,x) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

si la diferencia $r - S$ es "pequeña" en la norma del espacio funcional propia de que se trate (funciones continuas, lipshitzianas, diferenciables, etc.)

Cuando se trata de estudiar la ecuación perturbada, (2), basándose en alguna información previa sobre la ecuación no perturbada (3), se acostumbra a considerar segundos miembros de (2) de alguna de las siguientes formas

$$(4) \quad S_1(t,x) = h_1(t,x,\epsilon)$$

$$(5) \quad S_2(t,x) = r(t,x) + h_2(t,x,\epsilon)$$

$$(6) \quad S_3(t,x) = r(t,x) + \epsilon h_3(t,x,\epsilon).$$

ϵ pertenece, en general, a algún espacio \mathbb{R}^m , m cualquiera, salvo, naturalmente, en (6), donde ha de ser $m = 1$. Sobre las funciones h_1 se supone que h_1 converge a r para $\epsilon \rightarrow 0$, h_2 converge a cero y (6) es un caso particular de (5) en el que la convergencia de h_2 se explicita escribiendo $h_2 = \epsilon h_3$.

Como hemos dicho, todos los métodos requieren información sobre la existencia de soluciones periódicas de (3) y sobre si son o no triviales. A partir de ahí los procedimientos varían grandemente. Mencionamos los métodos que utilizan el operador de traslación y el grado topológico en \mathbb{R}^n (véase Krasnoselskii (1966), Bershtein-Halanay (1956), Amelkin-Gaishun-Ladis (1976) y este capítulo, secciones 3 y 4), el método del promedio (cfr. Hale (1969)), los métodos que recurren al análisis funcional tales como las ecuaciones de bifurcación (véase Hale (1969)) o la

investigación de puntos fijos de operadores entre espacios de funciones T -periódicas (véase la sección 5 de este capítulo) y un método, uno de los muchos llamados "de Poincaré", que utiliza el teorema de la función implícita y, cuando es posible, los desarrollos en serie de potencias (cfr. John (1965) y Coddington-Levinson (1955)). Sobre la aplicación de este último vamos a detenernos brevemente.

Rosenblat (1980) considera el sistema (1) como un caso particular de (2) con

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

y es exactamente el segundo miembro de (1) con

$$(7) \quad \begin{aligned} b_i(t) &= \beta_i \\ a_{ij}(t) &= \frac{\gamma_{ij}}{K_{ij} + \epsilon \phi_{ij}(t)} \end{aligned}$$

β_i , γ_{ij} , K_{ij} constantes positivas y ϕ_{ij} continua, T -periódica y con valor medio nulo,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \phi_{ij}(s) ds = 0.$$

De esta forma, (3) es del tipo (4), y (3) no es sino un sistema de competición con coeficientes constantes

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= u(b_1 - a_{11}u - a_{12}v) \\ \dot{v} &= v(b_2 - a_{21}u - a_{22}v) \end{aligned}$$

cuyas soluciones T -periódicas son puntos críticos perfectamente conocidos.

Una aplicación directa y sin complicaciones de la continuación de Poincaré, permite afirmar la existencia de una única solución T -periódica de (1) con (7) en un entorno de cada punto de equilibrio de (8); solución que tiende a dicho punto cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Si se pretende alguna forma de localización de tales soluciones T -periódicas (u,v) , se pueden estimar los valores medios de $u(t)$ y $v(t)$ haciendo hipótesis adicionales de analiticidad de $\phi_{ij}(t)$ y desarrollando $u(t)$ y $v(t)$ en series de potencia de ϵ .

Por métodos standard de linealización en un entorno de la solución, se obtienen condiciones de estabilidad en términos de los coeficientes (7). Los detalles pueden verse en el citado artículo de Rosenblat que, en cuanto a estabilidad, se limita a estudiar soluciones triviales o próximas a las triviales.

Concluimos aquí esta sección, aunque no por falta de interés del método en sí mismo. El método es potente y los sistemas con pequeñas perturbaciones se dan a menudo en problemas con trasfondo real. Basta citar ecuaciones como la de Duffing con todo su cortejo de fascinantes propiedades. Lo que ocurre es que en nuestro problema, la diferencia entre las ecuaciones con coeficientes variables y las mismas ecuaciones con coeficientes constantes, no tiene por qué ser "pequeña", en general. Eso hace que hipótesis como la (7) sean excesivamente restrictivas y que tratemos, a partir de la próxima sección, de problemas con oscilaciones "grandes", aunque, en palabras del mismo Rosenblat, "sean mucho más difíciles de tratar analíticamente".

3. El método del operador de traslación.

Se trata, cronológicamente, del primer procedimiento sistemático para el estudio de soluciones periódicas, y se basa en un hecho muy sencillo que tratamos de poner de manifiesto en la observación y el lema que siguen.

Sea

$$(3) \quad x' = r(t,x) \quad r(t+T,x) = r(t,x), \quad \forall t$$

una ecuación T -periódica y $x(t)$ una solución de la misma. Se demuestra sin dificultad, sin más que suponer unicidad de las soluciones de (3), que si

$$x(\tau + T) = x(\tau)$$

para un valor τ de t , entonces $x(t)$ es T -periódica. Si la solución, $x(t; 0, x_0)$, de (3) que pasa por x_0 para $t=0$ está definida para todo x_0 en un conjunto A no vacío y para todo t en $[0, T]$, se puede introducir el operador de traslación

$$(9) \quad P : x_0 \in A \rightarrow P x_0 \equiv x(T; 0, x_0) \in \mathbb{R}^n$$

y, del comentario anterior, se deduce inmediatamente el siguiente lema

3.1 Lema

Si (3) satisface condiciones de unicidad en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ no vacío tal que el operador P introducido en (9) está definido, la condición necesaria y suficiente para que (3) tenga una solución T -periódica es que P tenga un punto fijo \bar{x}_0 . La solución T -periódica es entonces $x(t; 0, \bar{x}_0)$.

3.2 El método del operador de traslación consiste, pues, en técnicas que permitan comprobar que una ecuación dada se encuentra en las hipótesis del lema anterior. La parte más específica de dichas hipótesis es la que se refiere al punto fijo de P . Se trata de resolver la ecuación trascendente

$$(10) \quad P x_0 = x_0$$

o lo que es lo mismo

$$(10') \quad x(T; 0, x_0) = x_0 .$$

(10), o para el caso (10'), son el primer ejemplo de "ecuaciones de bifurcación", o "condiciones de periodicidad", que aparece en conexión con la existencia de soluciones periódicas de una ecuación diferencial y esa idea reaparece de una u otra forma en todos los métodos que se refieren a dicho problema.

Por otra parte no debe perderse de vista que el método debe ocuparse también de las otras dos partes de la hipótesis de 3.1., a saber, la unicidad de (3) en D y la prolongabilidad de soluciones en A , por lo menos al intervalo $[0, T]$. La observación no es ociosa cuando se recorre la literatura y se tropieza con las diversas condiciones que cada autor ha decidido imponer a las ecuaciones de que se trate: a veces una sola condición da cuenta de varias de las hipótesis de 3.1., otras veces condiciones y resultados intermedios deben encadenarse para llegar a una sola de ellas (habitualmente la existencia de solución de $Px_0 = x_0$).

Krasnoselskii y la escuela rusa de Voronesh han utilizado ampliamente el método en su forma tradicional (brevemente, cuando (10) se resuelve en un espacio de dimensión finita) que es la que nos interesa en esta sección. Véanse Krasnoselskii (1968) y su bibliografía. En la sección 5 aludiremos a desarrollos posteriores de esta escuela.

Evidentemente no han sido los únicos en ocuparse del tema. Coddington y Levinson (1955), aludidos en la sección anterior, resuelven el problema de las pequeñas perturbaciones reduciéndolo a una ecuación del tipo (10'). Es muy interesante el reciente desarrollo del método en conexión con la teoría de sistemas dinámicos, véanse de Mottoni y Schiaffino (1981), Hirsch (1982), Hale y Somolinos (1982). Por último, presentamos aquí un resultado de Massera (1950) con intención de aplicarlo en el próximo capítulo al problema que nos ocupa, (véase IV.2).

3.3 Lema (Massera)

Sea la ecuación

$$(3) \quad x' = r(t,x) \quad r(t+T,x) = r(t,x), \quad T > 0, \quad \forall t,$$

con $r \in C(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R}^2)$, y $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio abierto simplemente conexo. Supongamos que (3) tiene solución única por cada punto de $\mathbb{R} \times D$ y que todas las soluciones está acotadas, entonces existe una solución T -periódica de (3).

La demostración puede verse en Massera (1950) o Yoshizawa (1975) que cita a Massera. Notemos solamente, en relación con todo lo dicho en el párrafo anterior, que la hipótesis fundamental (acotación de todas las soluciones de (3)) asegura por un lado la prolongabilidad de soluciones y la viabilidad de la definición del operador de traslación, P ; y, por otro, permite aplicar a P uno de los teoremas del punto fijo de Brouwer. Con ello, 3.3. no es sino una aplicación de 3.1., tal como habíamos anunciado.

4. Métodos basados en la teoría de la bifurcación.

4.1. De forma complementaria al método de la sección anterior, presentamos la aplicación de Cushing (Cushing (1976_a)(1980)) ha hecho de la teoría de la bifurcación en una gran variedad de contextos biológicos. Aquí nos limitaremos a resumir los resultados referentes al sistema (1) (Véase Cushing (1980_a) y las referencias que allí se encuentran).

Decimos "de forma complementaria" porque los métodos derivados del operador de traslación daban información sobre todas las soluciones y sobre la estructura global de las soluciones periódicas y sus dominios de atracción, mientras que aquí se trata de probar que existe una familia uniparamétrica de soluciones periódicas no triviales que hacen un papel correlativo al de los

puntos críticos en los sistemas autónomos. En efecto, si suponemos constantes los coeficientes de (1), se tienen los cuatro puntos críticos siguientes

$(0,0)$

$$E_1 \equiv \left(\frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{\Delta}, \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{\Delta} \right)$$

$$E_2 \equiv \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0 \right)$$

$$E_3 \equiv \left(0, \frac{b_2}{a_2} \right), \quad \Delta \equiv a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Puesto que estamos interesados en soluciones no triviales veamos qué valores, por ejemplo de b_2 , hacen que E_1 no sea trivial. Imponemos que sus coordenadas sean positivas y se tiene

$$b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}} < b_2 < b_1 \frac{a_{22}}{a_{12}} \quad \text{si} \quad \Delta > 0$$

$$b_1 \frac{a_{22}}{a_{12}} < b_2 < b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad \text{si} \quad \Delta < 0.$$

Además, cuando b_2 toma los valores extremos, $b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}$, $b_1 \frac{a_{22}}{a_{12}}$, E_1 se identifica con E_2 , E_3 , respectivamente. Es decir E_1 , en función de b_2 , se puede considerar como una rama bifurcada de E_2 que lo conecta con E_3 . Esto es lo que motiva el tratamiento que aquí se da a (1) en el caso de coeficientes periódicos y que se concreta en el siguiente teorema. (La demostración puede verse en Cushing (1980_a)).

4.2 Teorema (Cushing)

Sean $b_1(t)$, $a_{ij}(t)$, $p_2(t)$ funciones de $C_T^{(1)}$ tales que $P_2 = 0$ ⁽²⁾, $B_1 > 0$ y $a_{ij}(t) > 0$ para todo t . En estas condiciones existe un continuo⁽³⁾ positivo⁽⁴⁾ $C^+ \subset C_T \times C_T \times \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades

(a) $(u, v, \mu) \in C^+$ implica que (u, v) es una solución T-periódica no trivial de (1) con $b_2 = \mu + p_2$

(b) C^+ está acotado y su adherencia contiene a $(u_0, 0, \mu_1)$ y $(0, v_0, \mu_2)$ donde

$$\mu_1 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T a_{21}(t) u_0(t) dt > 0$$

y u_0, v_0 son soluciones de $\dot{u}_0 = u_0(b_1 - a_{11} u_0)$, $\dot{v}_0 = v_0(b_2 - a_{22} v_0)$ con $b_2 = \mu_2 + p_2$ para cierto $\mu_2 > 0$. Por tanto

(c) El conjunto M de números reales μ para los cuales existen $u, v \in C_T$ tales que $(u, v, \mu) \in C^+$ es un intervalo finito contenido en \mathbb{R}^+ y cuya adherencia contiene a μ_1 y μ_2 . M recibe el nombre de espectro.

Según habíamos anunciado, (a) y (b) afirman que C^+ es una familia de soluciones periódicas dependiente del parámetro μ (valor medio, B_2 , de b_2), $\mu \in M$, que se bifurca de la solución periódica trivial $(u_0, 0)$. (μ podría haberse elegido igual al promedio de b_1 , es únicamente cuestión de notación)

- (1) C_T : espacio de Banach de funciones continuas y T-periódicas con la norma del supremo
- (2) Las mayúsculas designan el promedio de la variable correspondiente:

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T p_2(t) dt$$
, etc.
- (3) Continuo: conjunto conexo
- (4) Positivo: si $(u, v, \mu) \in C^+$, entonces $u(t), v(t) > 0$ para todo t .

4.3. El método de bifurcación permite también estudiar la estabilidad de las soluciones periódicas. Como antes, se parte de una observación sobre la estabilidad del punto crítico no trivial en el caso autónomo. Para (1) con coeficientes constantes se cumple la regla del intercambio de estabilidad propia de los fenómenos de bifurcación. En efecto, el punto crítico E_1 es estable si y solamente si $\Delta > 0$, es decir, si E_1 bifurca de E_2 en el valor crítico de $\mu_1 = \frac{b_1 a_{21}}{a_{11}}$ hacia la derecha, $b_2 > \mu_1$, y E_2 pasa de estable a inestable cuando μ atraviese el valor μ_1 . Recíprocamente, cuando $\Delta < 0$, E_1 bifurca de E_2 hacia la izquierda, $b_2 < \mu_1$, y es inestable mientras que E_2 pasa de inestable a estable. Cuando se permite que los coeficientes sean funciones periódicas el comportamiento es cualitativamente igual salvo que las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de E_1 en toda la rama desde E_2 a E_3 se convierten aquí en condiciones para la estabilidad de la solución periódica no trivial, válidas localmente, en un entorno del valor crítico μ_1 . Por otra parte, el papel que hacían b_2 y Δ lo hacen ahora sus promedios B_2 y

$$\Delta_p \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \Delta(t) dt$$

de forma que $\Delta_p > 0$ es la condición necesaria y suficiente de estabilidad de $(u, v, \mu) \in C^+$ en un entorno de $(u_0, 0, \mu_1)$. Además Cushing obtiene condiciones suficientes de estabilidad para todo $(u, v, \mu) \in C^+$. Los detalles pueden verse en el artículo citado, Cushing (1980^a). No insistimos más en el tema pues se sale del propósito de este capítulo y será objeto de un estudio más detenido en el V.

5. Puntos fijos de operadores en espacios funcionales. Teoría del grado. Funciones gúfa.

5.1. Concluimos este capítulo con una técnica de J.Mawhin (Mawhin (1969))

a (1972.) ,Rouché-Mawhin (1973)) que constituye uno de los métodos más fecundos para demostrar la existencia de soluciones periódicas. A modo de introducción conviene recordar que la existencia de solución local del problema de Cauchy para una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ se reduce a la de un punto fijo de la aplicación

$$(11) \quad x \in C(I) \rightarrow M(x)(\cdot) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(s,x(s))ds \in C(I)$$

definida en $C(I)$, funciones continuas en un intervalo compacto I , que es un espacio de Banach. De la misma forma puede intentar se reducir el estudio de las soluciones T -periódicas de una ecuación T -periódica al de los puntos fijos de cierta aplicación M definida y con valores en C_T , definido en la página 18. . . La obtención de M no es tan inmediata como para el problema de Cauchy, pero, como vamos a ver en seguida, no presenta grandes dificultades. (El operador definido en (11) no resuelve este problema: la primitiva de una función T -periódica no es, en general, T -periódica.)

5.2. Consideremos la ecuación diferencial

$$(12) \quad \dot{x} = f(t,x)$$

con f continua y T -periódica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n . Sea $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, T -periódica y, por lo demás, arbitraria. Por la teoría standard de soluciones periódicas se sabe que la ecuación lineal no homogénea

$$(13) \quad \dot{x} = f(t,y(t))$$

tiene solución T -periódica si y solo si

$$(14) \quad \frac{1}{T} \int_0^T f(t,y(t))dt = 0 \quad ,$$

condición de ortogonalidad entre f y las soluciones T -periódicas de $x' = 0$, ecuación adjunta de la parte homogénea de (13). Esto nos sugiere la siguiente modificación de (13)

$$(15) \quad \dot{x}' = f(t, y(t)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y(s)) ds$$

que nos proporciona una ecuación con soluciones T -periódicas para toda $y \in C_T$. (La condición análoga a (14) se verifica automáticamente, el promedio del segundo miembro de (15) es cero). Además se tiene la forma explícita de las soluciones T -periódicas de (15)

$$(16) \quad x(t) = c + \int_0^t \left[f(r, y(r)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y(s)) ds \right] dr$$

con $c \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Desgraciadamente, (15) no es exactamente la ecuación (12) que estamos estudiando, pero podemos aprovechar la información obtenida hasta ahora con vistas a obtener soluciones T -periódicas de (12) Si en (16) cambiamos y por x se tiene

$$(17) \quad x(t) = c + \int_0^t \left[f(r, x(r)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds \right] dr$$

ecuación integral cuyas soluciones son T -periódicas y satisfacen la ecuación diferencial

$$(18) \quad \dot{x} = f(t, x(t)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds.$$

(18) sigue sin ser (12); pero, puesto que la diferencia con (12) no es más que la "constante" $\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds$ que depende de la función incógnita x , podemos conjeturar que una modificación conveniente de la "constante" c en (17) nos llevará a una ecuación integral equivalente a (12) (Nótese que (17) implica $c = x(0)$). Tomemos para c la expresión particular

$$c = x(0) + \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds.$$

Toda solución x , de la ecuación deducida de (17)

$$(19) \quad x(t) = x(0) + \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds + \int_0^t \left[f(r, x(r)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds \right] dr$$

verificará de nuevo (18), pero además será tal que

$$x(0) = x(0) + \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds$$

es decir

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds = 0$$

o, en otras palabras, x será T -periódica y solución de (12).

Hemos llegado donde nos proponíamos. El segundo miembro de (19) define un operador de C_T en C_T cuyos puntos fijos son las soluciones T -periódicas de (12). El recíproco también es cierto.

5.3. Con vistas a obtener un campo de aplicaciones tan grande como sea posible, el operador correspondiente a (19) se construye partiendo de una ecuación de la forma

$$(20) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t, x)$$

con $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ continua y T -periódica ((12) es el caso particular $A=0$) y haciendo pequeñas modificaciones consistentes en la introducción de una matriz arbitraria no singular J como factor de $\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds$, el cambio de $x(0)$ por su valor medio y la adición y sustracción de un nuevo término constante. Omitimos los detalles de la construcción, bastante larga por razones técnicas, y definimos el operador M_J por la igualdad

$$M_J x = \sum_{i=1}^s \left(\frac{1}{T} \int_0^T x'(\tau) \phi_i(\tau) d\tau \right) \phi_i + \sum_{i=1}^s \left(\frac{1}{T} \int_0^T f'(\tau, x(\tau)) \psi_i(\tau) d\tau \right) J \phi_i \\ + K \left[f(\cdot, x(\cdot)) - \sum_{i=1}^s \left(\frac{1}{T} \int_0^T f'(\tau, x(\tau)) \psi_i(\tau) d\tau \right) \psi_i \right]$$

donde las primas indican transposición, ϕ_i, ψ_i son, respectivamente las soluciones T -periódicas linealmente independientes de

$$\dot{x} = A(t)x$$

y

$$\dot{x} = -A'(t)x$$

y K es el operador que asocia a la función b la única solución T -periódica de la ecuación $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. (En el caso $A = 0$, ϕ_i, ψ_i son una base de \mathbb{R}^n y K se reduce a

$$K[z](t) = \int_0^t z(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^t z(\tau) d\tau \right) dt.$$

M_j aplica C_T en C_T (cuando $f: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ hay que sustituir C_T por el conjunto $\delta = \{x \in C_T \mid x(t) \in D \forall t \in \mathbb{R}\}$) y se tiene el siguiente resultado cuya demostración puede verse en Rouché-Mawhin (1973)

5.4. Teorema (Mawhin)

La ecuación diferencial (20) tiene una solución T -periódica si y solamente si el operador M_j tiene un punto fijo.

El operador M_j y otros varios, adaptaciones de M_j a diversos problemas, se emplean sistemáticamente para el estudio de las soluciones periódicas de cualquier tipo de ecuaciones diferenciales. Cuando se trata de ecuaciones con pequeñas perturbaciones, basta la ayuda del teorema de las transformaciones contractivas para investigar los puntos fijos de M_j o el operador de que se trate. No es el caso de las ecuaciones fuertemente no lineales, como la (1), para las que se necesitan métodos más sofisticados como la teoría del grado topológico.

5.5 El lector no familiarizado con dicha teoría puede consultar los resúmenes que hacen Rouché-Mawhin (1973) o Sattinger (1973) o bien las exposiciones clásicas de Heinz (1959) o J.T.Schwarz (1964) que incluye la original de Leray-Schauder (1934) Aquí nos limitaremos a recordar que el grado topológico (de Leray-Schauder) de $E - T$ (E la identidad, T una aplicación completamente continua⁽¹⁾ definida en un espacio de Banach X) respecto a $D \subset X$ (abierto, acotado) y $D \in \mathbb{R}$ es una aplicación de la terna $(E - T, D, 0)$ en el conjunto de los números reales (enteros) que escribiremos

$$d : (E - T, D, 0) \rightarrow d(E - T, D, 0) \in \mathbb{Z}.$$

(La definición exige que $(E - T)x \neq 0$ para todo $x \in \partial D$).

Para lo que sigue también necesitamos recordar que

5.6. Teorema de existencia de Kronecker. En las condiciones de 5.5, si

$$d(E - T, D, 0) \neq 0$$

existe al menos un $x \in D$ tal que $(E - T)x = 0$

5.7. Invariación por homotopías. Sea T

$$T : \bar{D} \times [0, 1] \rightarrow X$$

una aplicación totalmente continua tal que $(E - T)(x, \lambda) \neq 0$ para todo $x \in \partial D$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, si definimos

$$T_\lambda : x \in D \rightarrow T(x, \lambda) \in X \quad \lambda \in [0, 1]$$

entonces $d(E - T_\lambda, D, 0)$ está bien definido y es independiente de λ .

(1) Se dice que T es completamente continua en un conjunto acotado $A \subset X$ si es continua en A y $T(A)$ es relativamente compacto. Para aplicaciones lineales, equivale a la compacidad de un operador lineal.

La aplicación de los resultados anteriores al problema que nos ocupa descansa sobre dos observaciones fundamentales. En primer lugar, por el teorema 5.4, hemos reducido la demostración de existencia de soluciones T -periódicas de (20) a la de puntos fijos del operador M_J , o bien ceros del operador $E - M_J$. Según el teorema 5.6, habremos demostrado que tales ceros existen si podemos verificar que $(E - M_J)x \neq 0$ para todo $x \in \partial D$ y

$$(21) \quad d(E - M_J, D, 0) \neq 0$$

en algún $\bar{D} \subset C_T$ (o, respectivamente, en δ).

En segundo lugar, hay que notar la extrema dificultad que presenta el cálculo efectivo del grado de Leray-Schauder (21) salvo en casos muy particulares. El teorema 5.7 permite evitar esa dificultad dando la posibilidad de construir la aplicación T_λ de forma que $T_1 = M_J$ y T_0 sea "sencilla", por ejemplo, que tome sus valores en un subespacio de dimensión finita de C_T (respectivamente, δ) lo que simplifica notablemente el cálculo del grado topológico de $E - T_0$. Como 5.7 asegura que

$$d(E - T_\lambda, D, 0) = d(E - T_0, D, 0) = d(E - T_1, D, 0) = d(E - M_J, D, 0)$$

el cálculo de (21) se reduce al de $d(E - T_0, D, 0)$.

Estas son, muy resumidas, las ideas que llevan al siguiente resultado fundamental de Mawhin (Véase Mawhin (1969_a)(1969_b) y Raiché-Mawhin (1973)).

5.8. Teorema (Mawhin) Sea la ecuación

$$(22) \quad \dot{z} = r(t, z)$$

con r una función T -periódica $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, y la ecuación

$$(23) \quad \dot{z} = \lambda r(t, z)$$

donde λ puede ser cualquier número en $[0, 1]$. Si existe $R > 0$ tal que

(a) Para cada $\lambda \in (0, 1]$ toda solución T -periódica $z(t)$ de (23) verifica $\|z\| = \sup |z(t)| \neq R$

(b) Toda raíz, p , de la ecuación

$$(24) \quad 0 = r_0(p) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T r(t, p) dt$$

verifica que $|p| \neq R$.

(c) El grado de Brouwer⁽¹⁾ de la aplicación $r_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en (24) no se anula,

$$d(r_0, B(0, R), 0) \neq 0,$$

donde $B(0, R)$ es la bola de radio R .

Entonces, para todo $\lambda \in [0, 1]$, la ecuación (23) tiene al menos una solución T -periódica cuya norma es menor que R .

En el capítulo VI expondremos la técnica de las funciones barrera que permite aplicar el teorema anterior a nuestro problema (1). Aquí vamos a presentar, muy brevemente y con el mismo objeto, un resultado de la técnica de las funciones guía de Krasnoselskii (Véase Krasnoselskii (1966) y Rouché-Mawhin (1973)

5.9. Definición de función guía.

Dada la ecuación diferencial (22), sea V una aplicación

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

(1) El grado de Brouwer, del cual es generalización el grado de Leray-Schauder, se define para aplicaciones entre espacios de dimensión finita.

Diremos que V es gufa para (22) si existe $r > 0$ tal que

$$(\text{grad } V(x), r(t,x)) > 0 \quad (\delta < 0)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| \geq r$

5.10. Teorema. Dada la ecuación diferencial

$$(22) \quad \dot{x} = r(t,x)$$

con r T -periódica y continua, si existe una función V gufa para (22) y tal que

$$(25) \quad \begin{aligned} V(x) &\rightarrow +\infty \quad (\delta - \infty) \\ |x| &\rightarrow \infty \end{aligned} ,$$

entonces (22) tiene al menos una solución periódica.

(De una función que satisface (25) se dice que es radialmente no acotada).

La demostración puede verse en Rouché-Mauwin (1973).

El teorema anterior no es sino una aplicación del teorema 5.8, como habíamos anunciado, y las hipótesis sobre V están hechas de forma que se pueda demostrar, a partir de ellas, que se satisfacen las hipótesis (a), (b) y (c) de 5.8. Sin ninguna pretensión de demostrar 5.10, vamos a insistir sobre la anterior observación: (b) es una consecuencia inmediata de ser V función gufa, si tuviésemos $r_0(p) = 0$, $|p|$ no podría ser $|p| \geq r$, porque en tales puntos la definición de función gufa implica

$$(\text{grad } V(p), \frac{1}{T} \int_0^T r(t,p) dt) = (\text{grad } V(p), r_0(p)) > 0$$

que contradice $r_0(p) = 0$, de ahí se sigue la afirmación de (b):

$|p| \neq r$. (c) se demuestra utilizando además la no acotación de V y dos propiedades del grado topológico de las que se deduce que

$$d(r_0, B(0,R), 0) = d(\text{grad } V, B(0,R), 0)$$

y

$$d(\text{grad } V, B(0, r), 0) = +1 \quad \left(-1, \text{ si } \begin{array}{l} V \rightarrow -\infty \\ |x| \rightarrow \infty \end{array} \right).$$

Por último, (a), una cota "a priori" de las soluciones T-periódicas de (23), requiere la utilización combinada de ser V función guía y estar radialmente no acotada. Primero se demuestra que V , por ser guía, está acotada, a lo largo de soluciones T-periódicas. Con ello se tiene definido un conjunto de la forma $\{x \mid V(x) < K\}$ donde han de encontrarse las soluciones T-periódicas; al ser V radialmente no acotada implica inmediatamente que dicho conjunto y, por tanto, las soluciones T-periódicas están acotadas. (Comparese lo dicho con la introducción al capítulo VI, sección VI.1 y con la sección IV.3.3)

Concluimos aquí esta sección y dejamos la aplicación detallada del teorema 5.10 para el próximo capítulo.

CAPITULO IV. APLICACIONES

1. Introducción.

Los problemas que aquí se discuten, y lo mismo puede decirse de los que aparecerán en el capítulo VII, están resueltos mediante técnicas que, en lo esencial, se reducen a tratar de hallar puntos fijos de determinadas aplicaciones. Dichas aplicaciones están definidas preferentemente entre espacios funcionales aunque también vamos a referirnos al llamado operador de traslación o de Poincaré, que, como se sabe, está definido en espacios de dimensión finita cuando se trata de ecuaciones diferenciales ordinarias (Véase, por ejemplo, la sección III.3).

Somos conscientes de que la afirmación anterior ha de ser entendida con múltiples matizaciones puesto que la forma de llegar a los puntos fijos que se mencionan más arriba difiere enormemente de unos casos a otros y es precisamente en los métodos donde más nos vamos a detener. De hecho ya hemos tratado en el capítulo anterior la conexión entre los problemas del punto fijo y los que aquí nos interesan. Si mencionamos de nuevo esa conexión es solamente como elemento unificador de lo que sigue.

En este capítulo veremos algunos ejemplos que se resuelven por métodos expuestos en el precedente, dejando para los capítulos VI y VII la exposición y aplicaciones de la técnica de las funciones barrera y los puntos sin T-retorno.

2 .Competición entre dos especies.Soluciones periódicas y soluciones acotadas.

2.1. Se plantea el siguiente problema: obtener información

sobre la existencia y localización de las soluciones T-pe
riódicas del sistema

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= u[b_1(t) - c_{11}(t)u - c_{12}(t)v] & \dot{u} &\equiv \frac{du}{dt} \\ \dot{v} &= v[b_2(t) - c_{21}(t)u - c_{22}(t)v] & \dot{v} &\equiv \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

b_i, c_{ij} funciones regulares, y

$$b_i(t+T) = b_i(t) > 0 \quad c_{ij}(t+T) = c_{ij}(t) > 0 \quad \forall t$$

con las condiciones

$$(2) \quad \bar{b}_2 \bar{c}_{12} < \underline{b}_1 \underline{c}_{22} \quad \bar{b}_1 \bar{c}_{21} < \underline{b}_2 \underline{c}_{11}$$

donde $\underline{b}_i = \min b_i(t)$ $\bar{b}_i = \max b_i(t)$, etc. (Condiciones dis-
tintas de (2) se estudian en el capítulo VII).

El correspondiente sistema de coeficientes cons-
tantes

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= u(B_1 - C_{11}u - C_{12}v) \\ \dot{v} &= v(B_2 - C_{21}u - C_{22}v) \end{aligned}$$

donde las letras mayúsculas representan los promedios de
los coeficientes de (1) en el intervalo $[0, T]$, tiene un
único punto crítico asintóticamente estable que está en
el interior del primer cuadrante ($u > 0, v > 0$) y cuyo dominio
de atracción consiste en la totalidad de dicho conjunto
{ $(u, v) | u > 0, v > 0$ } (Todas las afirmaciones anteriores son de
comprobación inmediata a partir de las condiciones

$$B_2 C_{12} < B_1 C_{22} \quad B_1 C_{21} < B_2 C_{11}$$

que se deducen sin dificultad de (2)). El comportamiento global de las soluciones de (1), con (2), es en cierta forma análogo al que acabamos de describir para (3) y relativamente sencillo de obtener. Es una de las razones por las cuales lo ponemos en primer lugar.

El esquema de esta sección es el siguiente: Demostraremos en primer lugar, 2.2, un lema que, naturalmente, vamos a utilizar aquí, pero que tiene un alcance mucho mayor, cosa que se pondrá de manifiesto en los capítulos VI y VII. Con dicho resultado a nuestra disposición veremos, 2.3, que estamos en condiciones de aplicar el lema III.3.3, con lo cual ya tenemos existencia de soluciones periódicas. Finalmente, 2.4, veremos que se puede ir más allá de la mera existencia y precisar, en el sentido que se explica en dicho párrafo, dónde están las soluciones periódicas.

2.2. Lema

Sea el sistema

$$(4) \quad \dot{z} = r(t, z)$$

con r una función T -periódica $r: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea Ω un dominio (abierto conexo) de \mathbb{R}^n , V una función C^1 de Ω en \mathbb{R} y $k \in \mathbb{R}$ tal que en el conjunto $V_k = \{z \in \Omega \mid V(z) = k\}$ se verifica

$$(5) \quad (\text{grad } V(z), r(t, z)) < 0$$

para todo $t \in [0, T]$, $z \in V_k$. Si $z(t)$ es una solución de (4) tal que $z(t) \in \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para un $t_0 \in I$, $V(z(t_0)) < k$, entonces $V(z(t)) < k \quad \forall t \geq t_0, t \in I$.

(El enunciado es una posible formulación de la idea de que, en Ω , V "impide" el paso de la región $\{z \in \Omega \mid V(z) < k\}$ a la región $\{z \in \Omega \mid V(z) > k\}$ a lo largo de soluciones de (4)).

Demostración.

Estudiamos la función $V(t) \equiv V(z(t))$ y veamos que no puede tomar el valor k para ningún $t > t_0$. En efecto, en caso contrario, tendríamos un tiempo mínimo $\tau > t_0$ tal que $v(t) < k$ para $t_0 \leq t < \tau$ y $V(\tau) = k$. Sea $\dot{v}(z(t))$ la derivada a lo largo de las soluciones de (4). Por (5), $\dot{V}(\tau) < 0$ y por continuidad existe $\delta > 0$ tal que $\dot{V}(t) < 0$ para $t \in [\tau - \delta, \tau]$, es decir $V(t)$ es decreciente en dicho intervalo. Puesto que, en tal intervalo, es menor que k y decreciente no puede crecer hasta el valor k .

Por tanto, puesto que $V(z(t)) \neq k \quad \forall t > t_0$ y $V(t_0) < k$
 $V(t)$ que es una función continua real nunca puede ser mayor que k para $t \geq t_0$ c.q.d.

Nota. Si se cambia el sentido de las desigualdades en la condición (5) y en la hipótesis sobre $V(z(t_0))$, se tiene el resultado correlativo, $V(z(t)) > k \quad \forall t \geq t_0$, sin más modificaciones en la demostración que las que naturalmente sugiere la inversión de las desigualdades. Esto significa que lo esencial del lema, lo esencial del papel de la función V , es la no anulación de la derivada de V a lo largo de soluciones de (4) en los puntos de V_k o, mirado desde otro punto de vista, que dicho conjunto sea "transversal" al campo vectorial asociado con (4) en el sentido que (5) ó

$$(5') \quad (\text{grad } V(z), r(t, z)) > 0$$

expresan.

2.3. Teorema.

Existe al menos una solución T -periódica del sistema (1) con la condición (2).

Demostración.

Es suficiente que probemos que nos hallamos en

las hipótesis del lema III.3.3.

Definiremos primeramente el conjunto D mencionado en dichas hipótesis y a continuación, aplicando 2.2., demostraremos que todas las soluciones están acotadas. Con ello, habremos terminado, pues la unicidad de soluciones se sigue inmediatamente de la forma de (1).

Designemos por h_m, H_m, h_p, H_p las cuatro rectas cuyas ecuaciones son

$$h_m = \{(u, v) \mid \underline{b}_1 - \bar{c}_{11} u - \bar{c}_{12} v = 0\}$$

$$H_m = \{(u, v) \mid \underline{b}_1 - \underline{c}_{11} u - \underline{c}_{12} v = 0\}$$

$$h_p = \{(u, v) \mid \underline{b}_2 - \bar{c}_{21} u - \bar{c}_{22} v = 0\}$$

$$H_p = \{(u, v) \mid \underline{b}_2 - \underline{c}_{21} u - \underline{c}_{22} v = 0\}$$

donde m y p representan a los cocientes $\frac{\underline{b}_1}{\underline{c}_{11}} = m_0$, $\frac{\underline{b}_2}{\underline{c}_{22}} = p$.

Los valores extremos de m y p dan la intersección de dichas rectas con el eje Ou , para h_m, H_m , ó el Ov , para h_p, H_p . (Véase la figura 1 y nótese que la posición relativa de las cuatro rectas y los signos de sus pendientes han de ser los representados debido a las condiciones (2) y (1)).

Sean $R = (r_1, r_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ dos puntos del primer cuadrante tales que

$$(6) \quad \underline{b}_2 - \underline{c}_{21} r_1 - \underline{c}_{22} r_2 < 0 < \underline{b}_1 - \bar{c}_{11} r_1 - \bar{c}_{12} r_2$$

$$\underline{b}_1 - \underline{c}_{11} q_1 - \underline{c}_{12} q_2 < 0 < \underline{b}_2 - \bar{c}_{21} q_1 - \bar{c}_{22} q_2$$

y, por lo demás, arbitrarios.

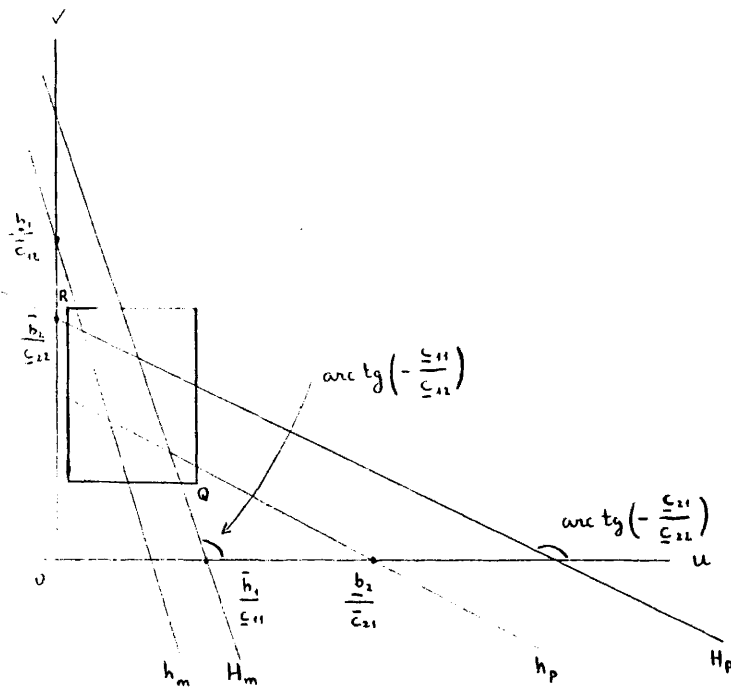


Figura 1.

Definimos pues el conjunto D como el rectángulo de lados paralelos a los ejes y con vértices en Q, R

$$(7) \quad D = \{(u, v) \mid r_1 < u < q_1, \quad q_2 < v < r_2\}.$$

Veamos ahora que, para todo punto $(u_0, v_0) \in D$, la solución $(u(t), v(t))$ de (1) que pasa por (u_0, v_0) para $t = t_0$ permanece en D para $t \geq t_0$.

Sean las funciones

$$V_1(u, v) = -u + r_1$$

$$V_2(u, v) = u - q_1$$

$$\begin{aligned} V_3(u,v) &= -v + q_2 \\ V_4(u,v) &= v - r_2 \end{aligned} \quad (u,v) \in \Omega \equiv D.$$

Sea δ la distancia de (u_0, v_0) a ∂D , $\delta > 0$, y ϵ un número real $0 < \epsilon < \delta$ suficientemente pequeño para que los cuatro números

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= r_1 + \epsilon \\ \tilde{r}_2 &= r_2 - \epsilon \\ \tilde{q}_1 &= q_1 - \epsilon \\ \tilde{q}_2 &= q_2 + \epsilon \end{aligned}$$

sustituidos en lugar de r_1, r_2, q_1, q_2 (o parte de ellos) verifiquen las condiciones (6). Por último D_ϵ será el rectángulo de lados paralelos a D con vértices en $R = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ y $Q = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$. (Véase la figura 2).

(El propósito de las anteriores definiciones es tener, inicialmente, a la solución $(u(t), v(t))$ en D_ϵ , observando que la frontera de D_ϵ está incluida en la unión de los conjuntos $V_{i,-\epsilon} = \{(u,v) \in \Omega \mid V_i(u,v) = -\epsilon\}$, $i=1,2,3,4$. Si podemos calcular el signo de ∇_i sobre $V_{i,-\epsilon}$, demostraremos la acotación de $(u(t), v(t))$).

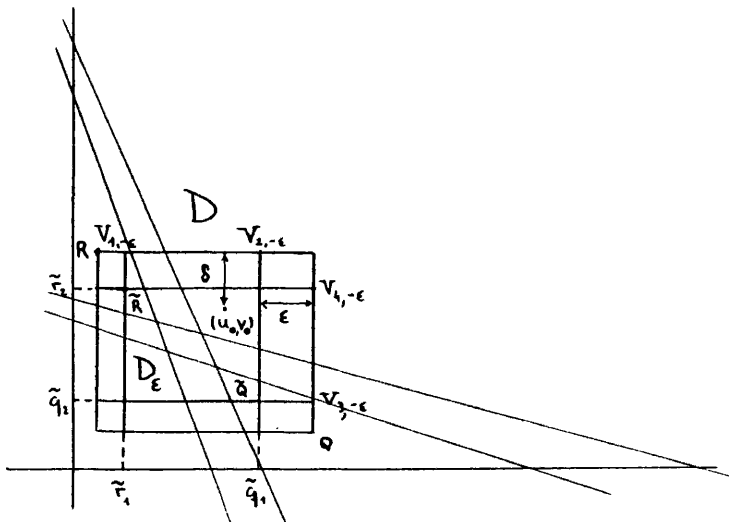


Figura 2.

En primer lugar es inmediato comprobar que

$$(8) \quad V_i(u(t_0), v(t_0)) < -\epsilon \quad i=1,2,3,4.$$

Además,

$$(9) \quad \dot{v}_i < 0 \quad \text{en los puntos de } V_{i,-\epsilon}.$$

En efecto, por definición de $V_{1,-\epsilon}$,

$$(u,v) \in V_{1,-\epsilon} \Rightarrow u = r_1 + \epsilon = \tilde{r}_1, \quad 0 < v < r_2$$

por tanto, para $(u,v) \in V_{1,-\epsilon}$

$$\begin{aligned} V_1 = -\dot{u} &= -u(b_1 - c_{11}u - c_{12}v) < \\ &< -\tilde{r}_1(b_1 - c_{11}\tilde{r}_1 - c_{12}r_2) < -\tilde{r}_1(\underline{b}_1 - \bar{c}_{11}\tilde{r}_1 - \bar{c}_{12}r_2) < 0 \end{aligned}$$

por definición de \tilde{r}_i, \tilde{q}_i . La demostración para $i=2,3,4$ es totalmente análoga.

Veamos, finalmente, que $(u(t), v(t)) \in D_\epsilon, \forall t \geq t_0$. Si no fuera así, la teoría standard de prolongación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias nos dice que existiría un intervalo maximal $I = [t_0, t_1)$ tal que

$$(u(t), v(t)) \in D_\epsilon \quad t \in I$$

y

$$(u(t_1), v(t_1)) \in \partial D_\epsilon.$$

pero, por construcción de D_ϵ , eso implicaría

$$(u(t_1), v(t_1)) \in V_{j,-\epsilon}$$

para cierto $j \in \{1,2,3,4\}$, con lo cual

$$V_j(u(t_1), v(t_1)) = -\epsilon.$$

Esto contradice el lema 2.2 en cuyas hipótesis nos encontramos por (8) y (9). Es decir, la solución que pasa por

(u_0, v_0) , que era un punto arbitrario, está en $D_{\epsilon} \subset D$ y por tanto acotada. Como esa era la única hipótesis de III.1 que necesitaba comprobación hemos probado la existencia de una solución T -periódica de (1). c.q.d.

2.4. Acotación de soluciones periódicas.

2.4.1. Si nos fijamos de nuevo en el sistema (3) de coeficientes constantes

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= u(B_1 - C_{11}u - C_{12}v) \\ \dot{v} &= v(B_2 - C_{21}u - C_{22}v) \end{aligned}$$

podemos afirmar, pensando en términos de soluciones periódicas, que existe una de ellas (en este caso estacionaria, pues se trata del punto crítico (u_0, v_0) , $u_0 > 0$, $v_0 > 0$) y que en el resto del primer cuadrante, $u > 0$, $v > 0$, no hay otras soluciones periódicas. Todo ello puede deducirse por sencillos argumentos geométricos sobre el campo vectorial asociado a (3) y en particular porque los signos de sus componentes se conocen en todos esos puntos, a excepción del punto crítico, y tales signos ponen de manifiesto el comportamiento que acabamos de describir. Si volvemos a (1), observamos que el campo vectorial asociado está perfectamente definido y parece asegurar un comportamiento análogo al de (3) fuera de las franjas $h_m - H_m, h_p - H_p$ determinadas por las rectas h_m, H_m y h_p, H_p , e incluso en éstas si se exceptúa su intersección F

$$F = \{(u, v) \mid \begin{aligned} & \underline{b}_1 - \underline{c}_{11}u - \underline{c}_{12}v < 0, \quad \bar{b}_1 - \bar{c}_{11}u - \bar{c}_{12}v > 0, \\ & \underline{b}_2 - \underline{c}_{21}u - \underline{c}_{22}v < 0, \quad \bar{b}_2 - \bar{c}_{21}u - \bar{c}_{22}v > 0 \end{aligned}\},$$

puesto que se conoce el signo al menos de una de las componentes del referido campo. Dicho brevemente: sospechamos

que las posibles soluciones T-periódicas de (1) no pueden estar fuera de F, el conjunto donde no se sabe nada sobre el campo vectorial asociado a (1).

En el presente párrafo veremos que, sin recurrir a métodos distintos de los utilizados en esta sección, se puede determinar con relativa justeza una región del plano donde deben estar las soluciones T-periódicas de (1), de parte de las cuales hemos demostrado la existencia en el párrafo anterior.

Hay aquí dos expresiones que requieren explicación: hemos demostrado la existencia, al menos por ahora, de una parte de las soluciones T-periódicas de (1), las que están en el conjunto D definido en 2.3.; enseguida veremos que esas son todas las soluciones T-periódicas de (1). Por otro lado, el conjunto D se puede "ceñir" al conjunto F, en un sentido que enseguida precisaremos, de forma que las soluciones T-periódicas aparecen donde era de esperar: con una parte, al menos, de su gráfica en F. Esta es la "relativa justeza" arriba mencionada.

Con lo dicho tenemos el esquema del contenido de este párrafo: demostrar, primero, que no hay soluciones T-periódicas fuera de D y, segundo, definir, dentro de nuestras posibilidades, el "mínimo" D.

2.4.2. Lema.

Sea D el conjunto definido por la fórmula (7) de 2.3 y $z_0 = (u_0, v_0)$ $u_0 > 0, v_0 > 0$ un punto tal que $z_0 \notin D$. Sea $z(t) = (u(t), v(t))$ la solución de (1) que pasa por z_0 para $t = t_0, t_0 \in \mathbb{R}$ y arbitrario. Si $z(t) \notin D \quad \forall t \geq t_0$ entonces $z(t)$ no puede ser T-periódica.

Demostración.

Con z_0 fijo podemos elegir $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$ tales que el rectángulo $D_1 = (0, l_1) \times (0, l_2)$ verifique

$$z_0 \in D_1$$

$$D \subset D_1$$

(véase la figura 3). Un razonamiento análogo al de 2.3 de_ muestra que $z(t) \in D_1$ para todo t y, como estamos suponiendo $z(t) \notin D$, se tiene

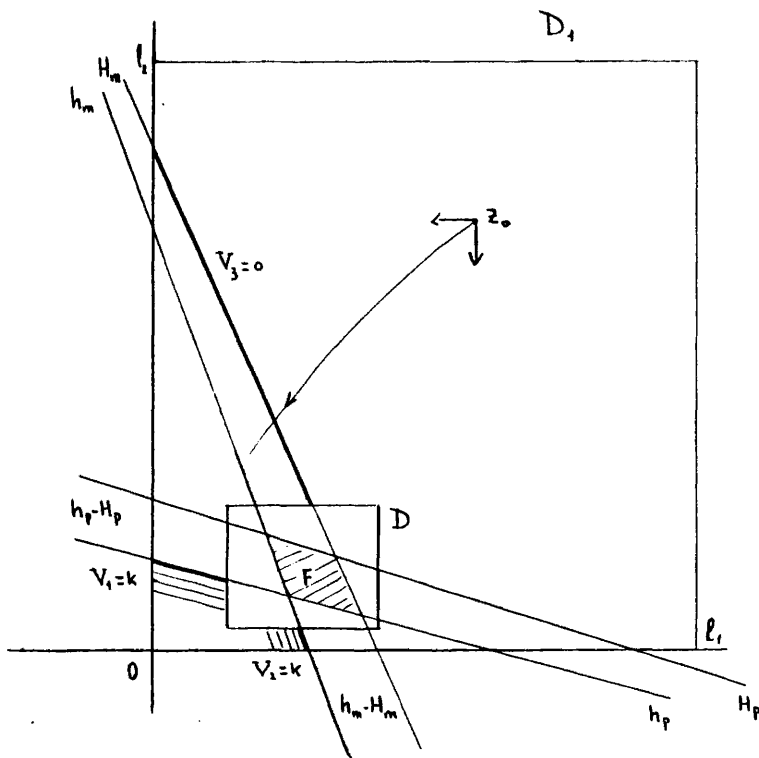


Figura 3.

$$z(t) \in D_1 \setminus D \quad \forall t \geq t_0$$

El resto de la demostración difiere según la posición de z_0 relativa a las rectas h_m, H_m, h_p, H_p , pero las adaptaciones a los distintos casos no ofrecen ninguna dificultad. Supongamos por ejemplo, que z_0 , está en la región que se muestra en la figura 3.

Es inmediato comprobar que las funciones

$$V_1(u, v) \equiv +b_2 - \bar{c}_{21}u - \bar{c}_{22}v$$

$$V_2(u, v) \equiv +b_1 - \bar{c}_{11}u - \bar{c}_{12}v$$

verifican el lema 2.2 en $\Omega = D_1 \setminus D$ con $0 < k < b_i$, $i=1,2$. Es decir, las rectas h_p, h_m son "barreras", impiden el paso de la solución $z(t)$. Nótese que h_m es la curva de nivel $v_2=0$ y h_p la $v_1=0$

Se nos plantea entonces la segunda alternativa: o bien el signo de $\dot{u}(t)$ (de $\dot{v}(t)$) no cambia a lo largo de $z(t)$ y por tanto $z(t)$ no es periódica, o bien $\dot{u}(t)$ ($\dot{v}(t)$) cambia de signo y la única posibilidad, por la forma de (1), de que eso ocurra es que $z(t)$ atraviese $H_m(H_p)$. Pero entonces, razonando como antes con la función auxiliar

$$V_3(u, v) = -b_1 + \underline{c}_{11}u + \underline{c}_{12}v$$

$$(V_4(u, v) = -b_2 + \underline{c}_{21}u + \underline{c}_{22}v),$$

aparece una nueva barrera: la recta $H_m(H_p)$, que es la curva $V_3=0$ ($V_4=0$), y que impide que $z(t)$ vuelva a z_0 . Por tanto $z(t)$ no es periódica. c.q.d.

2.4.3. Todas las soluciones T-periódicas de (1) están en la adherencia M de la intersección del conjunto D_0

$$D_0 = (p_1, q_1) \times (q_2, p_2),$$

con las franjas $h_m - H_m$, $h_p - H_p$. Donde $P_0 = (p_1, p_2)$ y $Q_0 = (q_1, q_2)$ son los puntos de intersección de h_m con H_p y h_p con H_m , respectivamente, véase la figura 4.

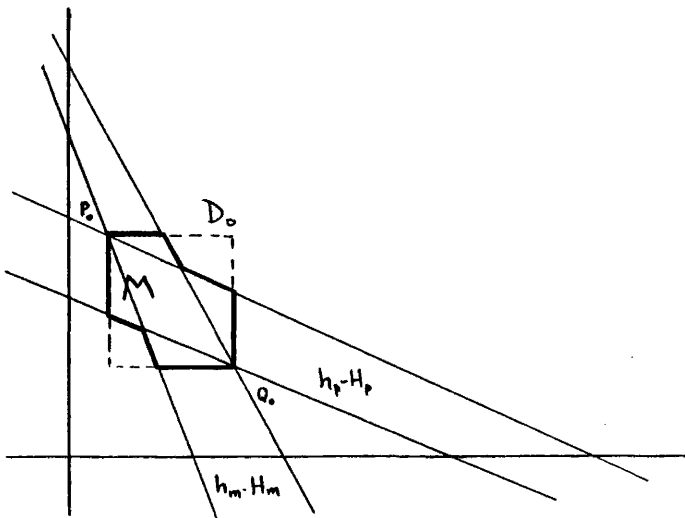


Figura 4.

No demostraremos aquí con todo detalle la afirmación anterior. Nos limitaremos a hacer observar que 2.3, donde se afirmaba que las soluciones periódicas estaban en una familia de rectángulos D , implica el hecho de que estén en D_0 . Basta tomar los puntos P y Q que definían D tan próximos como sea necesario a P_0 y Q_0 . Por lo que se refiere a que tampoco puede haber soluciones T -periódicas fuera de las franjas $h_m - H_m$ y $h_p - H_p$, nos referimos al capítulo VII, párrafo VII.2.3, donde se ve con detalle la forma

de sustituir la parte de la frontera de D que cae fuera de dichas franjas por ramas de hipérbola tan próximas como se desee a las rectas que las limitan.

Nótese finalmente que las soluciones T -periódicas no pueden estar exclusivamente en $M \setminus F$, basta razonar como antes sobre el signo de las componentes del campo vectorial asociado a (1). En otras palabras: toda solución T -periódica tiene al menos una parte de su gráfica en F y desde luego no sale de M .

3. El método de las funciones guía. La ecuación logística.

3.1. Aunque el presente ejemplo pueda parecer sencillo no es trivial, tiene los suficientes rasgos de interés como para traerlo aquí, como introducción para quién no esté familiarizado con el método, pues presenta todos los puntos esenciales que definen a las funciones guía y describen su aplicación.

3.2. Existencia de soluciones periódicas.

Sea la ecuación

$$(10) \quad \dot{u} = u(b(t) - c(t)u) \quad \dot{u} \equiv \frac{du}{dt}$$

donde b y c son funciones reales, regulares, T -periódicas y positivas

$$b(t+T) = b(t)$$

$$c(t+T) = c(t)$$

$$0 < B_1 \leq b(t)$$

$$0 < C_1 \leq c(t)$$

Según explicamos en II.1.2 y II.1.3, hagamos el cambio de variables

$$(11) \quad x = \log u$$

con lo cual (10) se convierte en

$$(12) \quad \dot{x} = b(t) - c(t)e^x$$

y toda solución T -periódica de (12) se corresponde biunívocamente con una solución T -periódica estrictamente positiva de (10).

Teorema. Existe al menos una solución T -periódica no trivial de (10).

Demostración.

Con lo dicho más arriba, basta probar que existe una solución T -periódica de (12). Pretendemos usar, para ello, el teorema III.5.10. Por tanto, a la vista de sus hipótesis, tendremos que construir una función auxiliar V , demostrar que es una función guía y comprobar que es radialmente no acotada.

A efectos de notación, observemos que las condiciones sobre $b(t)$ y $c(t)$ aseguran la existencia de B_2, C_2 tales que

$$b(t) \leq B_2$$

$$c(t) \leq C_2,$$

con lo cual, si llamamos

$$(13) \quad P_1 = \frac{B_1}{C_2} \quad P_2 = \frac{B_2}{C_1}$$

se tiene

$$0 < P_1 \leq \frac{b(t)}{c(t)} \leq P_2.$$

Tomemos la función de \mathbb{R} en \mathbb{R} , $V: x \rightarrow V(x)$ definida por

$$V(x) = -x^2:$$

V es una función guía porque

$$(\text{grad } V(x), h(t) - c(t)e^x) = -2x(h(t) - c(t)e^x) > 0$$

siempre que $|x| \geq r$ con $r = \max(|\log P_1|, |\log P_2|)$. (Basta estudiar por separado $x > 0$, $x < 0$).

Como, por otro lado,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = -\infty$$

se aplica el lema III.2 y esto termina la demostración.

c.q.d.

3.3. Acotación de las soluciones.

(Nota. Aparte del interés que este párrafo tiene en sí mismo, el razonamiento que en él se hará puede ayudar a la comprensión del papel que una función guía tiene respecto al comportamiento de las soluciones T -periódicas. Un papel que, en el caso general, es el núcleo de la demostración de la parte más interesante del teorema III.5.10 que acabamos de aplicar).

Como ya se ha hecho en otras ocasiones, véase III.4.1 y III.4.3, vamos a examinar por un momento la ecuación (10) suponiendo sus coeficientes constantes. El punto crítico $\frac{b}{c}$ es una solución periódica no trivial y no hay más entre otras razones, porque fuera de él, en los intervalos $(0, b/c)$ y $(b/c, \infty)$, el signo de la derivada \dot{u} es constante en cada uno de esos intervalos.

Si volvemos al caso de coeficientes variables, tenemos que el signo de la derivada \dot{u} (x , si se piensa en (12)) tiene un comportamiento similar fuera del intervalo $[P_1, P_2]$ ($[\log P_1, \log P_2]$ para x). Parece razonable conjeturar que la, o las soluciones T -periódicas cuya existencia

acabamos de demostrar se encontrarán en dicho intervalo $[P_1, P_2]$ y es lo que vamos a probar ahora constructivamente modificando la función guía que aparece en el párrafo anterior. La forma de dicha modificación nos la vamos a sugerir

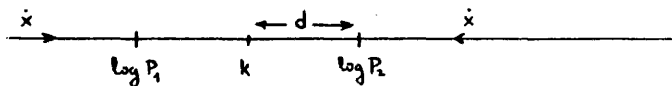


Figura 5

la definición de función guía aplicada al caso concreto de (12). Tenemos que, si V es la función guía en cuestión,

$$(14) \quad \left(\frac{dv}{dx}, b(t) - c(t)e^x\right) > 0$$

fuera de cierto entorno acotado. Si $x(t)$ es una solución T -periódica de (31) la derivada $V(x(t))$ de V a lo largo de $x(t)$

$$V(x(t)) = \left(\frac{dv}{dx}, \lambda(t)\right) > 0$$

no puede anularse fuera de ese entorno acotado. Por tanto, los puntos de $x(t)$ donde $V(x(t))$ alcance sus valores máximos y mínimos (que sabemos que existen) estarán dentro de él y, el resto de los puntos $x(t)$ no podrá andar muy lejos. Concluimos de aquí que lo más interesante para nuestro propósito sería que el entorno acotado fuera del cual se tiene (14) coincidiese con el intervalo $[\log P_1, \log P_2]$ (recuérdese que estamos trabajando con la ecuación (12) en x). Eso no es muy difícil de conseguir teniendo en cuenta el signo de λ representado en la figura 5. En efecto, si definimos

$$k = \frac{\log P_1 + \log P_2}{2}, \quad d = \frac{\log P_2 - \log P_1}{2}$$

y

$$(15) \quad V(x) \equiv -(x-k)^2,$$

tenemos que

$$(16) \quad (\text{grad } V, b(t) - c(t)e^x) = -2(x-k)[b(t) - c(t)e^x] > 0$$

para todo $x \notin [\log P_1, \log P_2]$. No nos queda, pues, más que formalizar el proceso esbozado más arriba para demostrar que, si $x(t)$ es una solución T -periódica de (12),

$$x(t) \in [\log P_1, \log P_2]$$

y por tanto,

$$u(t) \equiv e^{x(t)} \in [P_1, P_2]$$

donde $u(t)$ es una solución T -periódica no trivial (arbitraria) de (10). Vamos con los detalles.

Sea $x(t)$ una solución T -periódica arbitraria de (12). Por la regularidad de todas las funciones implicadas, existen dos puntos, $x(t_1)$ y $x(t_2)$, donde la función V , definida en (15), evaluada a lo largo de $x(t)$, $V(x(t))$, toma respectivamente sus valores mínimo y máximo

$$(17) \quad V(x(t_1)) \leq V(x(t)) \leq V(x(t_2))$$

Con ello tendremos que

$$\nabla(x(t_i)) = (\text{grad } V, \dot{x}(t)) = 0$$

por la condición de máximo o mínimo y, comparando con (16), resulta que

$$(18) \quad x(t_i) \in [\log P_1, \log P_2].$$

Este es el primer resultado que buscábamos. Por lo que respecta a los demás puntos de $x(t)$ tenemos la acotación (17) que, combinada con (18) y escrita de forma más explícita, nos dá

$$-d^2 \leq -(x(t_1) - k)^2 \leq -(x(t) - k)^2 \leq -(x(t_2) - k)^2 < 0$$

que a su vez implica

$$x(t) \in [\log P_1, \log P_2],$$

la relación a donde queríamos llegar. Hemos demostrado, por tanto, que

Toda solución T-periódica no trivial, $u(t)$, de (10) verifica la siguiente desigualdad

$$P_1 \leq u(t) \leq P_2$$

3.4. Nota.

Aunque más adelante insistiremos sobre ello (véase VI.1), la potencia de la técnica que hemos usado, el teorema III.5.10, tiene como contrapartida la dificultad de su aplicación en ocasiones como la de la sección siguiente e incluso la imposibilidad de dicha aplicación aún en casos tan sencillos como el que pasamos a exponer.

Se trata de considerar la ecuación (10)

$$(10) \quad \dot{u} = u(b(t) - c(t)u)$$

sin efectuar el cambio de variables (11). Vamos a ver que no puede existir una función V guía para (10) y, a la vez, radialmente no acotada. En efecto, si existiera una tal V , tendríamos que

$$(19) \quad (\text{grad } V(u), u(b(t) - c(t)u)) > 0$$

para $|u| \geq r$, $r > 0$. Pero, con la notación (13), para $|u| > P_2$, la función escalar $u[b(t) - c(t)u]$ es siempre negativa, con lo

cual (19) implica

$$(20) \quad \text{grad } V(u) < 0$$

para $|u| > \max(r, p_2) \equiv r_0$. Y aquí se tiene una contradicción pues, para cualquier bola $B(0, R)$ de radio $R > r_0$, (20) implica que el grado de Brouwer de la función escalar $\text{grad } V(u)$ es nulo, mientras que la no acotación de V

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} V(u) = +\infty \quad (\text{ó } -\infty)$$

$$|u| \rightarrow \infty$$

implica que dicho grado es 1 (ó -1) (Véase, por ejemplo, Rouché-Mawhin (1973)).

4. El método de las funciones guía. Competición.

4.1. Pasamos a exponer otro ejemplo de aplicación del grado topológico por medio de funciones guía. Construiremos una función guía, no tan simple, ni mucho menos, como la que aparece en la sección anterior y ahí está parte del interés de esta sección: no es fácil encontrar funciones guía no triviales en forma explícita y que resuelvan un verdadero problema. No hay conceptos nuevos en cuanto al punto de partida de la técnica, teorema III.5.10, solamente un mayor desarrollo analítico del que pueden deducirse pistas para construcciones similares en otros problemas.

Consideramos el mismo problema planteado en 2.1, es decir, nos interesamos por las soluciones T -periódicas no triviales del sistema (1)

$$(1) \quad \begin{aligned} 0 &= u[b_1(t) - c_{11}(t)u - c_{12}(t)v] \\ 0 &= v[b_2(t) - c_{21}(t)u - c_{22}(t)v] \end{aligned}$$

con las condiciones (2)

$$(2) \quad b_2 \bar{c}_{12} < b_1 \underline{c}_{22} \quad b_1 \bar{c}_{21} < b_2 \underline{c}_{11}$$

y las mismas definiciones de 2.1 para la notación empleada.

Puesto que buscamos soluciones estrictamente positivas efectuamos el cambio de variables

$$(21) \quad \begin{array}{ll} x = \log u & u = e^x \\ y = \log v & v = e^y \end{array}$$

con el cual (1) se convierte en

$$(22) \quad \begin{array}{l} \dot{x} = b_1(t) - c_{11}(t)e^x - c_{12}(t)e^y \\ \dot{y} = b_2(t) - c_{21}(t)e^x - c_{22}(t)e^y \end{array}$$

4.2. En la sección 2 no se hizo este cambio porque los resultados sobre acotación ya implican que las soluciones obtenidas son estrictamente positivas. Aquí, la distinta técnica que se vá a aplicar no permitiría afirmar tanto sin, al menos, una traslación de coordenadas. El cambio (21) tiene la ventaja de que la mera existencia de soluciones T-periódicas para (22) ya da soluciones T-periódicas no triviales para (1) sin perjuicio de que, después, se intente precisar su localización.

4.3. Nos referimos también aquí a las consideraciones geométricas que en 2.1 y 2.3 se hacen sobre (1) y el correspondiente sistema (3) de coeficientes constantes. Las mismas consideraciones pasadas al plano de coordenadas (x,y) definidas por (21), nos llevan a una configuración del campo de direcciones asociado a (22) como la que se muestra en la figura 6, donde g_m, G_m, g_p y G_p son las curvas de ecuaciones

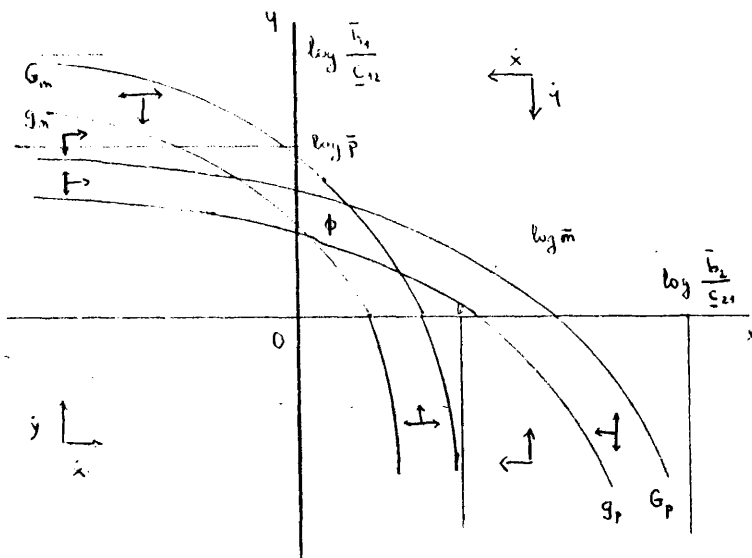


Figura 6.

$$q_m: b_1 - c_{11} e^x - c_{12} e^y = 0$$

$$G_m: \bar{b}_1 - \bar{c}_{11} e^x - \bar{c}_{12} e^y = 0$$

$$q_p: b_2 - c_{21} e^x - c_{22} e^y = 0$$

$$G_p: \bar{b}_2 - \bar{c}_{21} e^x - \bar{c}_{22} e^y = 0$$

y, si designamos por $q_m - G_m$ la franja comprendida entre las curvas q_m y G_m , con el sentido análogo para $q_p - G_p$, se tiene que los puntos donde x puede ser cero en algún instante son los de $q_m - G_m$ y aquellos donde y puede anularse son los de $q_p - G_p$.

Para terminar con lo referente a notación designaremos por ϕ a la imagen mediante (21) del conjunto F definido en 2.4, es decir

$$\phi = (q_m - G_m) \cap (q_p - G_p).$$

$\bar{\phi}$ es claramente acotado por serlo \bar{F} y por la continuidad de

(21).

4.4. Teorema. El sistema (1) con la condición (2) tiene al menos una solución T -periódica no trivial.

Demostración.

Basta que probemos la existencia de una solución T -periódica de (22) y para ello, según las hipótesis del teorema III.5.10. que

(i) definamos una función auxiliar $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

(ii) comprobemos que $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} V(x,y) = +\infty$ (ó $-\infty$) y que

(iii) V es una función guía para (22)

(ii) y (iii) implican que puede aplicarse el teorema III.5.10 a (22) y eso habrá terminado la demostración.

(1) Considérense las siguientes funciones

$$P_2(x,y) = \begin{cases} -2(y + \frac{1}{2}) & y \leq -1 \\ y^2 & -1 \leq y \leq 0 \\ 0 & 0 \leq y \end{cases}$$

$$P_4(x,y) = \begin{cases} -2(x + \frac{1}{2}) & x \leq -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \end{cases}$$

$$E_2(x,y) = \begin{cases} \exp[k_2(x - \log \bar{m})^2] & x > \log \bar{m} \\ 1 & x \leq \log \bar{m} \end{cases}$$

$$E_4(x,y) = \begin{cases} \exp[k_4(y - \log \bar{p})^2] & y > \log \bar{p} \\ 1 & y \leq \log \bar{p} \end{cases}$$

con $k_2, k_4 > 0$, más adelante se hará una elección más precisa de k_i . Nótese que la única razón para los términos cuadráticos de transición en P_2, P_4 es que así se obtienen funciones de clase 1 y que ello es necesario para aplicar teoría del grado. Nótese también que, para todo (x, y)

$$(23) \quad P_i \geq 0 \quad E_i > 0 \quad i=2,4.$$

Definimos

$$V(x, y) = P_2(x, y) + P_4(x, y) + E_2(x, y) + E_4(x, y).$$

(ii). Si $|(x, y)| \rightarrow \infty$, se produce al menos una de las siguientes situaciones

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E_2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P_4 = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} E_4 = +\infty \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} P_2 = +\infty$$

esto, con (23), implica

$$\lim_{|(x, y)| \rightarrow \infty} V(x, y) = +\infty,$$

que es la primera condición que queríamos verificar.

(iii) Observemos que V es la suma de \dot{P}_i y \dot{E}_i y que las funciones P_2, P_4, E_2, E_4 han sido elegidas de manera que su derivada fuese cero en aquellas regiones en las que el campo no es favorable a la condición que define una función guía. En efecto

$$\begin{aligned} \dot{P}_2 &= 0 && \text{para } y \geq 0 \\ \dot{P}_4 &= 0 && \text{para } x \geq 0 \\ \dot{E}_2 &= 0 && \text{para } x \leq \log \bar{m} \\ \dot{E}_4 &= 0 && \text{para } y \leq \log \bar{p}, \end{aligned}$$

por tanto, en cada punto del plano, fuera de una bola con centro en el origen y que incluya el punto $(\log m, \log p)$, solamente dos de las cuatro derivadas P_2, P_4, E_2, E_4 son distintas de cero y las interacciones entre las mismas se realizan sólo en determinadas regiones que definiremos a continuación.

Sean las regiones

$$Z_1^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \log \bar{m} \leq x, \log \bar{p} \leq y\}$$

$$Z_1^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b_1 - \bar{c}_{11} e^x \leq \bar{c}_{12} e^y, x < \log \bar{m}, 0 < y\}$$

$$Z_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \log \bar{p} \leq y, \bar{c}_{12} e^y < b_1 - \bar{c}_{11} e^x\}$$

$$Z_3^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \log \bar{p}, x < \log \bar{m}\}$$

$$Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \log \bar{m} \leq x, \bar{c}_{21} e^x < b_2 - \bar{c}_{22} e^y\}$$

$$Z_1'' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b_2 - \bar{c}_{22} e^y \leq \bar{c}_{21} e^x, y < \log \bar{p}, 0 < x\}$$

y sea $B(0, r)$ la bola abierta con $r > 0$ tal que

$$\emptyset \subset B(0, r)$$

y

$$(24) \quad (\log \bar{m}, \log \bar{p}) \in B(0, r)$$

Si llamamos $\tilde{Z}_i^j = Z_i^j \setminus B(0, r)$ es inmediato comprobar que todo punto del plano, fuera de $B(0, r)$, está en alguna de las regiones \tilde{Z}_i^j es decir

$$\mathbb{R}^2 \setminus B(0, r) = \bigcup \tilde{Z}_i^j.$$

Por tanto quedará demostrado que V es una función guía si probamos que $V < 0$ en cada una de las regiones \tilde{Z}_i^j .

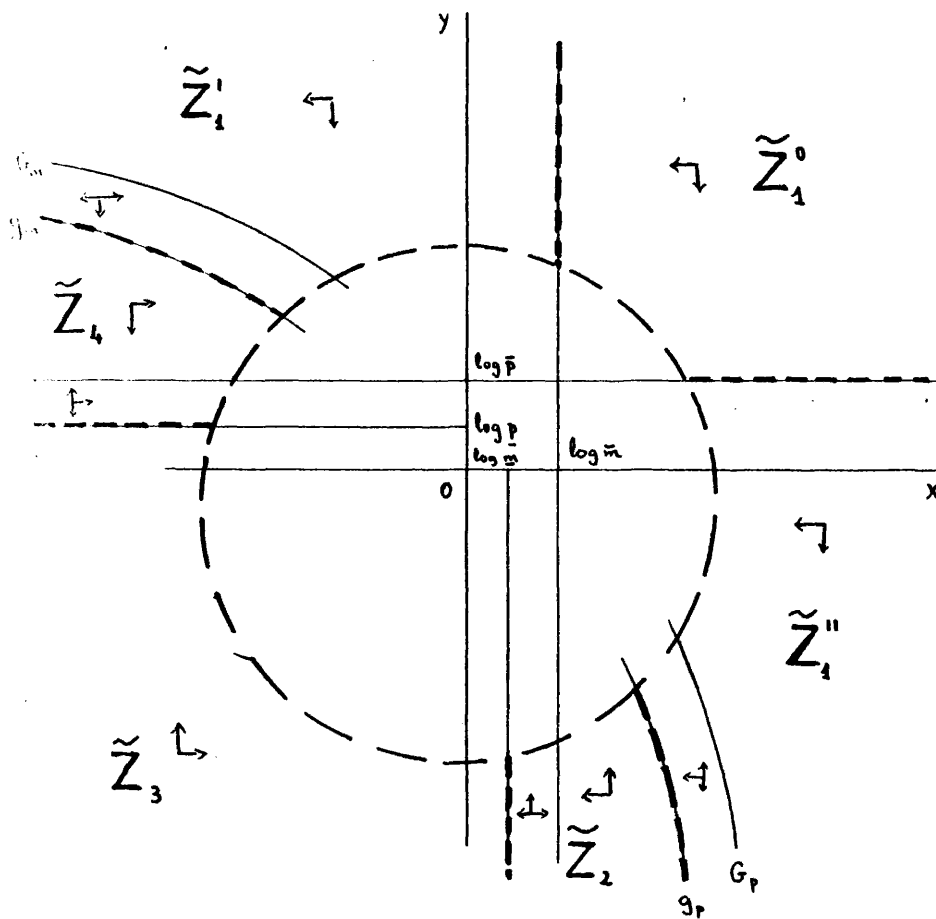


Figura 7.

En efecto,

\tilde{Z}_1^0 .

$$\begin{aligned} \nabla(x,y) &= \dot{E}_2(x,y) + \dot{E}_4(x,y) = \\ &= 2k_2(x - \log \bar{m}) \dot{E}_2(x,y) + 2k_4(y - \log \bar{p}) \dot{E}_4(x,y) < 0 \end{aligned}$$

Nótese que la condición (24) impide que \dot{E}_2 y \dot{E}_4 se anulen simultáneamente en \tilde{Z}_1^0 .

$\tilde{Z}_1', \tilde{Z}_1''$.

Tomemos, por ejemplo, \tilde{Z}_1'

$$V(x,y) = \dot{E}_4(x,y) + \dot{P}_4(x,y) = 2k_4(y - \log \bar{p})y E_4(x,y) + \dot{P}_4(x,y).$$

\dot{P}_4 tiene tres distintas expresiones algebraicas,

$-2(b_1 - c_{11}e^x - c_{12}e^y)$, $2x(b_1 - c_{11}e^x - c_{12}e^y)$, y 0 según sea $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 0$ ó $0 \leq x$. El factor x , que diferencia a las dos primeras expresiones, es menor que 1 en valor absoluto en su región de validez, por tanto

$$\begin{aligned} V(x,y) &\leq 2k_4(y - \log \bar{p})(b_2 - c_{21}e^x - c_{22}e^y)E_4(x,y) + \\ &+ 2|b_1 - c_{11}e^x - c_{12}e^y| < \\ (25) \quad &< 2k_4(y - \log \bar{p})(b_2 - c_{22}e^y)E_4(x,y) + 2(c_{11}\bar{m} + c_{12}e^y), \end{aligned}$$

pues, en \tilde{Z}_1' , $b_1 - c_{11}e^x - c_{12}e^y < 0$ y hemos aplicado además que $x < \log \bar{m}$. Para probar que $V < 0$ distinguiremos dos casos según sea $y > M$ ó $y \leq M$ para cierto $M > 0$ que enseguida definiremos. En el primer caso haremos uso del carácter exponencial del primer sumando del segundo miembro de (25) y en el segundo utilizaremos la constante k_4 que aún está a nuestra disposición.

(a) Como

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(y - \log \bar{p})(b_2 - c_{22}e^y)E_4}{c_{11}\bar{m} + c_{12}e^y} = -\infty$$

existe $M > 0$ tal que, para $y > M$

$$\frac{(y - \log \bar{p})(b_2 - c_{22} e^y) E_k}{c_{11} \bar{m} + c_{12} e^y} < -1.$$

Por tanto

$$2(y - \log \bar{p})(b_2 - c_{22} e^y) E_k - 2(c_{11} \bar{m} + c_{12} e^y) < 0$$

para $y > M$, M definido cuatro líneas más arriba. Como el primer término de la anterior desigualdad es negativo para y suficientemente grande,

$$2k_4 (y - \log \bar{p})(b_2 - c_{22} e^y) E_k \leq 2(y - \log \bar{p})(b_2 - c_{22} e^y) E_k < 0$$

si $k_4 \geq 1$, lo cual podemos imponer. Llevándolo todo a (25)

$$(26) \quad \forall (x, y) < 0$$

para $y > M$, $k_4 \geq 1$

(b) Sea ahora $y \leq M$. Habremos de probar dos cosas: que \dot{P}_4 está acotada y que \dot{E}_4 es menor que cualquier número negativo, para k_4 adecuada. Veámoslo.

$$\begin{aligned} \dot{P}_4(x, y) &\leq 2|b_1 - c_{11} e^x - c_{12} e^y| < 2(c_{11} \bar{m} + c_{12} e^M) \leq \\ &\leq 2(\bar{c}_{11} \bar{m} + \bar{c}_{12} e^M) \equiv D, \end{aligned}$$

es decir \dot{P}_4 está acotada por D .

Para estudiar \dot{E}_4 hemos de darnos cuenta de que, si r es suficientemente grande, la diferencia $y - \log \bar{p}$ es positiva para todo $(x, y) \in Z_1'$ e incluso existe $\delta > 1$ tal que

$$(27) \quad y - \log \bar{p} \geq \log \delta > 0$$

(basta observar que el conjunto de puntos de Z_1' , y con mayor razón de \tilde{Z}_1' , que están por debajo de la recta de ecuación $y = \log \bar{p}$ es un conjunto acotado (véase la definición

de Z_1') y por tanto puede incluirse en $B(0,r)$ para r adecuado). Este hecho, (27), tiene dos consecuencias esenciales para el estudio de \dot{E}_4 ,

$$\dot{E}_4(x,y) = 2k_4(y - \log \bar{p})(b_2 - c_{21}e^x - c_{22}e^y)E_4(x,y).$$

La primera y obvia es que proporciona una cota superior del factor $y - \log \bar{p}$. En segundo lugar, el factor $b_2 - c_{21}e^x - c_{22}e^y$ es negativo, condición tácitamente usada en la parte (a) de este razonamiento, pues

$$b_2 - c_{21}e^x - c_{22}e^y < b_2 - c_{21}e^x - c_{22}e^{\log \bar{p}} = b_2 - c_{21}e^x - c_{22}\frac{b_2}{c_{22}} < -c_{21}e^x < 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \nabla(x,y) &= \dot{E}_4(x,y) + \dot{P}_4(x,y) \leq 2k_4(y - \log \bar{p})(b_2 - c_{21}e^x - c_{22}e^y)E_4 + \\ &+ D < 2k_4 \log \delta (b_2 - c_{22}e^y) e^{k_4(y - \log \bar{p})^2} + D \leq \\ &\leq 2k_4 \log \delta (b_2 - c_{22}e^{\log \bar{p} + \log \delta}) e^{k_4 \log^2 \delta} + D \leq \\ &\leq 2k_4 \log \delta (b_2 - c_{22}\frac{b_2}{c_{22}}\delta) \delta^{k_4 \log \delta} + D = \\ &= 2k_4 \log b_2 (1 - \delta) \delta^{k_4 \log \delta} + D < 0 \end{aligned}$$

para un k_2 que, obviamente, puede elegirse con esa condición, y para $y \leq M$.

Por tanto, de (26) y (28), $\nabla < 0$ en \tilde{Z}_1' y un razonamiento análogo prueba que $\nabla < 0$ también en \tilde{Z}_1'' , pues k_4 y k_2 se eligen de forma totalmente independiente.

\tilde{Z}_4, \tilde{Z}_2

Para \tilde{Z}_4

$$\nabla(x,y) = \dot{E}_4(x,y) + \dot{P}_4(x,y),$$

pero en \tilde{Z}_1 , $\dot{E}_1(x,y) \leq 0$ y, como los puntos (x,y) de Z_1 para los cuales $x > -1$ constituyen un conjunto acotado, se puede tomar r de forma que $(x,y) \in \tilde{Z}_1 \Rightarrow x \leq -1$ con lo cual

$$\dot{P}_1(x,y) = -2x < 0,$$

es decir

$$\forall (x,y) \in \tilde{Z}_1, \dot{E}_1 + \dot{P}_1 < 0$$

en \tilde{Z}_1 y, análogamente, en \tilde{Z}_2 .

\tilde{Z}_3 .

$$\forall (x,y) \in \tilde{Z}_3, \dot{P}_2(x,y) + \dot{P}_1(x,y) < 0$$

El resultado es una consecuencia inmediata de las definiciones de \tilde{Z}_1, P_2 y P_1 .

Hemos cumplido el objetivo señalado en la página 53, hemos demostrado que $\forall < 0$ en todas las regiones Z_1^j (en cuya definición r será el máximo de todos los utilizados en el transcurso de este largo razonamiento) y por tanto V es una función gufa y la demostración queda así completa.

c.q.d.

CAPITULO V: ANALISIS GLOBAL DE TODAS LAS SOLUCIONES

1. Nos proponemos en este capítulo estudiar el conjunto de soluciones del sistema

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{u}_1 &= a_1(t)u_1(1-u_1-\beta_1(t)u_2) \\ \dot{u}_2 &= a_2(t)u_2(1-\beta_2(t)u_1-u_2) \end{aligned}$$

con las condiciones

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{\beta}_1 < \underline{a}_1 \underline{a}_2, \quad \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{\beta}_2 < \underline{a}_2 \underline{a}_1 \\ a_2 \beta_2 < a_1, \quad a_1 \beta_1 < a_2 \quad \text{para todo } t. \end{aligned}$$

En particular, nos interesa el comportamiento de dicho conjunto de soluciones con respecto a las soluciones T -periódicas no triviales cuya existencia se demostró en el capítulo anterior (véase IV.2.3 y IV.4.4). De esta forma, podrán responderse las preguntas planteadas en el capítulo II sobre aparición o no del fenómeno del caos, los posibles periodos de las soluciones periódicas y el número y estabilidad de éstas.

Como instrumento, utilizaremos básicamente la conocida técnica de linealización y, sobre todo, el estudio del operador de traslación, ya esbozado anteriormente (véase III.3), tal como los desarrollan de Mottoni-Schiaffino (1981), Cushing (1980_a) y Hale-Somolinos (1982).

El sistema (1) es una forma particular del sistema habitualmente estudiado en los capítulos anteriores (con la notación de los mismos, (1) se obtendría en el caso $b_i = c_{ij}$ $i=1,2$) que vamos a utilizar aquí por la enorme simplificación que introduce en los desarrollos que seguirán. Por otra parte la información y los resultados que se obtengan para (1) se pueden trasladar en su integridad a un

sistema de la forma

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= u(b_1(t) - c_{11}(t)u - c_{12}(t)v) \\ \dot{v} &= v(b_2(t) - c_{21}(t)u - c_{22}(t)v) \end{aligned}$$

pues se puede pasar de (3) a (1) mediante un cambio de variables

$$\begin{aligned} u_1(t) &= q_1(t)u(t) \\ u_2(t) &= q_2(t)v(t) \end{aligned}$$

donde q_i son funciones regulares T -periódicas y estrictamente positivas que pueden determinarse a partir de los coeficientes de (3) (véase de Mottoni-Schiafino (1981)).

2. Recordemos brevemente algunos conceptos en torno al operador de traslación, P , a lo largo de las soluciones de (1). Sea $Z_0(t; Z_0)$ la solución de (1), $Z = (u_1, u_2)$, tal que $Z(0; Z_0) = Z_0 \equiv (u_{10}, u_{20})$. Definimos $PZ_0 = Z(T; Z_0)$, donde T es el periodo de las funciones a_i, β_i .

Sabemos que los puntos fijos de P se corresponden con las soluciones T -periódicas de (1) (véase el lema III.3.1 y la observación que le precede) y que el comportamiento global de las soluciones, periódicas o no, de (1) tiene en muchos casos una traducción paralela en el comportamiento del sistema dinámico discreto, $\{P^k\}$, engendrado por P . En particular, la estabilidad de las soluciones T -periódicas de (1) se corresponde con la de los puntos fijos, \hat{Z} , de P respecto al sistema $\{P^k\}$ y ésta, a su vez, queda determinada por los autovalores de la derivada de Frechet, DP , de P en \hat{Z} . Dicha derivada no es otra cosa que la matriz de monodromía de (1) linealizado en torno a la solución periódica $Z(t; \hat{Z})$. (En la demostración del teorema IV.2.3 quedó probada la unicidad y prolongabilidad de

soluciones de (1) por todo punto de la adherencia del primer cuadrante, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$. Por tanto, P está bien definido. De hecho se demuestra fácilmente por el mismo procedimiento que (1) es disipativo: todas las soluciones en el primer cuadrante terminan en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

Como consecuencia del principio de comparación de Kamke (véase Kamke (1932), o Coppel (1965), o Hirsch (1982)) o, directamente, por argumentos analíticos sobre inecuaciones diferenciales, se tiene una interesante propiedad geométrica de monotonía del operador P para cuyo enunciado necesitaremos algunas definiciones.

3. Definiciones.

Designaremos por R_+^2 el primer cuadrante de R^2

$$R_+^2 = \{ (u_1, u_2) \mid u_1 > 0, u_2 > 0 \}$$

y por Ω y O , respectivamente, los cuadrados cerrado o semabierto de lado 1

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$O = (0, 1] \times (0, 1]$$

Para un punto arbitrario $\hat{Z} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \in R_+^2$ definimos los cuadrantes abiertos relativos a \hat{Z} de la siguiente forma

$$[\hat{Z}]_1 = \{ (u_1, u_2) \in R_+^2 \mid u_1 > \hat{u}_1, u_2 > \hat{u}_2 \}$$

$$[\hat{Z}]_2 = \{ (u_1, u_2) \in R_+^2 \mid u_1 < \hat{u}_1, u_2 > \hat{u}_2 \}$$

$$[\hat{Z}]_3 = \{ (u_1, u_2) \in R_+^2 \mid u_1 < \hat{u}_1, u_2 < \hat{u}_2 \}$$

$$[\hat{Z}]_4 = \{ (u_1, u_2) \in R_+^2 \mid u_1 > \hat{u}_1, u_2 < \hat{u}_2 \}$$

1.1. Lema (Hale-Somolinos)

Sea P el operador de traslación a lo largo de soluciones de (1), $i=2,4$, y $\hat{Z} \in \mathbb{R}_+^2$ arbitrario. Si

$$P^{k_0} \hat{Z} \in \overline{P^{k_0-1} \hat{Z}}_i \setminus \{P^{k_0-1} \hat{Z}\}$$

para cierto k_0 , entonces

$$P^{k+1} \hat{Z} \in \overline{P^k \hat{Z}}_i$$

para todo $k \geq k_0$.

Para la demostración véase Hale-Somolinos (1982) y también de Mottoni-Schiaffino (1981).

Geométicamente el lema significa que, si en un determinado paso, k_0 , P tiene su imagen en el cuadrante cerrado $2, 6$ 1 , a partir de ahí conserva el cuadrante $2, 6$ 4 .

El resultado anterior tiene numerosas consecuencias referentes a la existencia de puntos fijos de P y a la estructura global del sistema dinámico discreto $\{P^k\}$. En nuestro lenguaje, se trata de consecuencias sobre las soluciones periódicas, triviales o no, de (1) y el comportamiento del resto de las soluciones respecto de las mismas. La primera, y quizá una de las más llamativas, es la que enunciamos en el teorema que sigue.

1.2. Teorema.

Toda solución de (1) con punto inicial en $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ tiende a una solución T -periódica.

(La demostración puede verse en Hale-Somolinos (1982), que lo prueban para sistemas disipativos competitivos, o cooperativos, de los cuales (1) es un ejemplo, ó en el citado artículo de Mottoni-Schiaffino (1981)).

El resultado anterior implica, entre otras cosas, que

no puede haber soluciones con infinitos períodos diferentes y, más aún, que no hay soluciones subharmónicas. En otras palabras, el fenómeno del caos queda excluido de (1).

5. En lo que sigue, vamos a reproducir tres lemas de éste último artículo, consecuencias también de 4.1, y un resultado de Cushing (obtenido por métodos totalmente distintos, véase III.4) que nos permitirán demostrar la unicidad y estabilidad asintótica global de la solución obtenida en el capítulo anterior para (1) con (2).

También necesitaremos previamente las siguientes definiciones.

5.1. Definiciones.

1) Sea $\hat{z} \in \Omega$ un punto fijo de P , designaremos por $A(\hat{z})$ "dominio de atracción de \hat{z} ", al conjunto de puntos atraídos por \hat{z} .

$$A(\hat{z}) = \{ z \in \mathbb{R}_+^2 \mid P^n z \rightarrow \hat{z} \}$$

2) $A^{-1}(\hat{z})$ designa el dominio de repulsividad de \hat{z} y se define como el dominio de atracción para el operador inverso P^{-1} .

3) Por último, un paréntesis con el subíndice cero, designa el promedio sobre un período de la función que figure dentro del paréntesis

$$(f)_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

El primer lema se refiere al punto fijo $(0,0)$. No ofrece ninguna dificultad demostrar por linealización que $0=(0,0)$ es un foco inestable para (1). El lema describe su dominio de repulsividad y se incluye aquí porque, junto con el siguiente, nos servirá para localizar las soluciones periódicas no triviales de (1), paso previo a la demostración de la unicidad.

5.2.Lema. La frontera de $A^{-1}(0)$ está formada por :1) el segmento $\{0\} \times [0,1]$, 2) el segmento $[0,1] \times \{0\}$ y 3) la gráfica Γ de una función continua decreciente que une los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$, y es T-invariante.

5.3.Lema. Todos los puntos fijos de P, excepto $(0,0)$, se encuentran sobre la curva Γ definida en el lema 5.2.

A continuación tenemos una caracterización completa de la estabilidad de los dos restantes puntos fijos triviales $(0,1)$ y $(1,0)$. (Nótese que en este caso, el punto fijo de P y la correspondiente solución periódica de (1) son una misma cosa, pues esta última es estacionaria. Nótese también que este hecho se deriva de la forma particular del sistema (1)). La necesitaremos para probar que la estabilidad de las soluciones T-periódicas no triviales es global en \mathbb{R}_+^2 .

5.4.Lema. Si $\{a_1(1-b_1)\}_0 < 0$ (ó respectivamente, $\{a_2(1-b_2)\}_0 < 0$) entonces $(0,1)$ (ó respectivamente, $(1,0)$) es asintóticamente estable.

Si $\{a_1(1-b_1)\}_0 > 0$ (ó respectivamente, $\{a_2(1-b_2)\}_0 > 0$) entonces $(0,1)$ (ó respectivamente, $(1,0)$) es un puerto cuya variedad estable es el semieje positivo $0u_2$ ($u_2=0, u_2>0$) (ó respectivamente, el semieje positivo $0u_1$ ($u_1>0, u_2=0$)).

Incluimos finalmente el siguiente lema de Cushing (1980_a) que proporciona, según enunciábamos en III.4.3., condiciones suficientes de estabilidad de las soluciones periódicas no triviales de (1).

5.5.Lema. Sea el sistema

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1 (b_1 - c_{11} u_1 - c_{12} u_2) \\ \dot{u}_2 &= u_2 (b_2 - c_{21} u_1 - c_{22} u_2) \end{aligned}$$

con b_j, c_{ij} funciones continuas y T-periódicas y supongamos que

$$c_{11}(t) > c_{21}(t) \quad c_{22}(t) > c_{12}(t)$$

para todo t . Entonces toda solución T -periódica no trivial de (4) es (localmente) uniformemente asintóticamente estable.

5.6. Teorema (Unicidad y estabilidad).

El sistema (1) con las condiciones (2) tienen una única solución T -periódica no trivial y dicha solución es global, en \mathbb{R}_+^2 , y asintóticamente estable.

Demostración.

En IV.2.3 ó IV.4.4 hemos demostrado la existencia de una solución T -periódica no trivial, por lo menos. Aquí probaremos sucesivamente que dicha solución, o soluciones, son (localmente) asintóticamente estables, que sólo hay una y por último que la estabilidad es global.

Para la estabilidad local basta verificar que 5.5 se aplica a nuestro problema y dicha verificación es trivial.

La unicidad se obtiene razonando sobre los puntos fijos del operador de traslación P . Hasta el momento sabemos que existen puntos fijos no triviales que, por 5.5, son asintóticamente estables respecto al sistema discreto $\{P^k\}$ y que, por 5.3, se encuentran sobre la curva Γ definida en 5.2. Si hubiese dos de estos puntos en Γ , que serían asintóticamente estables, al ser Γ una gráfica decreciente y T monótono en el sentido del lema 4.1 se seguiría la existencia de un punto fijo inestable entre ellas. Pero la inestabilidad contradice 5.5 y por tanto existe un único punto fijo y una única solución T -periódica no trivial.

Por el teorema 4.2 toda solución de (1) que comienza en $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ tiende a una solución T -periódica. Pero ahora ya sabemos que sólo hay cuatro soluciones T -periódicas de (1), la no trivial y las tres soluciones estacionarias $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$. Por otra parte, $(0,0)$ es un foco inestable, y, por 5.4, $(0,1)$ y $(1,0)$ son puertos cuyas variedades estables están sobre los ejes de coordenadas. En otras palabras, ninguna solución que comience en \mathbb{R}_+^2 tiende a $(0,0)$, $(0,1)$ ni

(1,0). La estabilidad global de la solución no trivial se sigue, pues, inmediatamente. c.q.d.

6. En conclusión, tenemos completo el cuadro de todas las soluciones de (1), con (2), en el primer cuadrante, ejes incluidos.

- las únicas soluciones periódicas son las soluciones T-periódicas.
- hay exactamente cuatro soluciones T-periódicas de las cuales tres son triviales.
- no existe ninguna solución no periódica que no tienda a una solución T-periódica, más aún
- toda solución no trivial tiende a la única solución T-periódica no trivial.

CAPITULO VI: EL METODO DE LAS FUNCIONES BARRERA.

1. Introducción

Consideremos de nuevo el teorema 5.8 del capítulo III y observemos detalladamente el trabajo que plantea su aplicación a un problema en el que estemos buscando información sobre soluciones periódicas. Las etapas de dicho trabajo se corresponden con las hipótesis (a), (b) y (c) que hay que comprobar.

(a) En primer lugar tendremos que ver que $\|z\| \neq R$ para toda solución T -periódica z de la ecuación

$$(1) \quad \dot{z} = \lambda r(t, z), \quad \lambda \in (0, 1]$$

para lo cual es suficiente comprobar que todas las soluciones T -periódicas están en un conjunto acotado.

(b) Por otro lado los ceros de la aplicación

$$r_0: p \in \mathbb{R}^n \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T r(t, p) dt \in \mathbb{R}^n$$

tampoco pueden estar en la frontera de la bola $B(0, R)$ y

(c) El grado de Brouwer de r_0 en dicha bola que, por (b), está bien definido, ha de ser

$$d(r_0, B(0, R), 0) \neq 0$$

En el mismo capítulo III (III.5.10) hemos visto que dicho programa de trabajo se podía realizar de una sola vez si se disponía de una función guía radialmente acotada y en el capítulo IV (IV.3 y IV.4) se ofrecen algunos ejemplos con no pocos detalles (Este último no es un comentario ocioso, como podrá verse en seguida).

Una reflexión sobre el trabajo realizado sugiere dos observaciones. La primera es que una función guía radialmente no acotada parece, y es, un instrumento muy poderoso. En efecto, permite afirmar (véase la demostración del teorema III.5.10) que

(a.1) Todas las soluciones periódicas de (1) están en un conjunto definido constructivamente por la función guía.

(a.2) Dicho conjunto es acotado.

(b) No hay ceros de r_0 en su frontera.

(c) El estudio del grado de r_0 se reduce al del gradiente de la función guía y así se ve que es distinto de cero.

La segunda observación es que no cabe esperar que sea fácil construir una función tan llena de buenas cualidades, incluso, puede ser imposible. Eso es lo que viene a confirmar los ejemplos del capítulo IV.

Se plantea entonces la siguiente pregunta. Si la técnica que resuelve simultáneamente los cuatro problemas (a.1) (a.2) (b) y (c) resulta difícil o, en casos concretos, inaplicable ¿no se podría encomendar la solución de esos cuatro problemas distintos a cuatro técnicas distintas y, presumiblemente, más sencillas?. En concreto, y puesto que la comprobación directa de (b) y (c) es relativamente más fácil, pretendemos definir funciones sin tantas condiciones como las funciones guía radialmente no acotadas, pero con las suficientes para que hagan su mismo papel en el problema (a.1): definir en términos explícitos conjuntos donde están las soluciones periódicas. Aún en el caso de que ninguno de esos conjuntos esté acotado, podemos tratar de obtener varios de ellos cuya intersección sí sea acotada, y ésto constituirá la segunda técnica, dirigida al problema (a.2).

Este es, pues, el resumen del presente capítulo: definir las funciones barrera (llamadas así porque impiden el paso de soluciones periódicas por los puntos de determinados conjuntos) estudiar sus propiedades y, con ellas, dar forma a una técnica que permita resolver sucesivamente los problemas (a.1) y (a.2).

Con ello generalizamos de alguna forma ideas de Krasnoselskii (1968). En el contexto de su teoría del operador de traslación utiliza funciones guía no acotadas y también rasgos aislados de éstas en diversas combinaciones, pero nunca se queda con el mero hecho de que el signo de la derivada de una función auxiliar V a lo largo de soluciones sea constante sobre los puntos de un conjunto tan general como $V(x)=k$.

2. Definición (Punto sin T-retorno)

Sea el sistema

$$(2) \quad \dot{z} = r(t, z)$$

con r una función T -periódica $r: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diremos que un punto $z_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto sin T -retorno para (2) si no existe ningún $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $z(t_0 + T; z_0) = z_0$, donde $z(t; z_0)$ es una solución de (2) tal que $z(t_0; z_0) = z_0$. En otras palabras, z_0 no pertenece a ninguna solución T -periódica de (2).

3. Lema.

Sea Ω un dominio (abierto conexo) de \mathbb{R}^n , V una función C^1 de Ω en \mathbb{R} y $k \in \mathbb{R}$ tal que en el conjunto

$V_k = \{z \in \Omega \mid V(z) = k\}$ se verifica

$$(3) \quad (\text{grad } V(z), r(t, z)) < 0$$

para todo $t \in [0, T]$; $z \in V_k$. Si $z(t)$ es una solución de (2) tal que $z(t) \in \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y para un $t_0 \in I$, $V(z(t_0)) < k$,

entonces $V(z(t)) < k \quad \forall t \geq t_0, t \in I$.

Nota.-Se trata del lema 2.2 del capítulo IV; véase su demostración y los comentarios que la preceden y la siguen.

4. Lema

Si toda solución T -periódica de (2) está contenida en un dominio Ω de \mathbb{R}^n , V es una función C^1 de Ω en \mathbb{R} y $k \in \mathbb{R}$ tal que en $V_k = \{z \in \Omega \mid V(z) = k\}$ se verifica (3) $(\text{grad } V(z), r(t, z)) < 0$ para todo $t \in [0, T]$, $z \in V_k$, entonces todos los puntos de V_k son puntos sin T -retorno.

Demostración.

Sea $z_0 \in V_k$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Sea $z(t; z_0)$ una solución de (2) tal que $z(t_0; z_0) = z_0$.

Si $z(t; z_0)$ sale de Ω no puede ser T -periódica, puesto que todas las soluciones periódicas están en Ω , y, por tanto, z_0 es un punto sin T -retorno.

Si $z(t; z_0)$ permanece en Ω , vamos a estudiar la función $V(t) \equiv V(z(t; z_0))$. Probaremos, primero, que existe $\epsilon > 0$ tal que $V(t) < k$ para $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ y, segundo, que $V(t)$ no puede volver a tomar el valor k .

Tenemos que $V(t_0) = V(z(t_0; z_0)) = k$. Por (3), $\frac{dV(t_0)}{dt} < 0$ y, por continuidad, existe $\epsilon > 0$ tal que $\frac{dV(t)}{dt} < 0$ para

$t \in [t_0, t_0 + \epsilon]$, por tanto $V(t) < k$, para tales valores de t , excepto t_0 .

Que $V(t)$ no vuelve a alcanzar el valor k es parte de la demostración del lema 3.

Finalmente, puesto que $V(z(t; z_0)) \neq k$ para todo $t > t_0$, $z(t; z_0) \neq z_0$ para todo t y en particular para el valor $t_0 + T$. Como t_0 era arbitrario, hemos demostrado que z_0 es un punto sin T-retorno.

Nota.- También aquí subsiste la validez del lema si se cambia (3) por

$$(3') \quad (\text{grad } V(z), r(t, z)) > 0.$$

5. A veces resulta que el conjunto V_k no es conexo y que la condición $\nabla < 0$ (o bien > 0) se cumple sólo en una de sus componentes conexas. El siguiente lema afirma que, en ciertas condiciones, ese hecho es suficiente para probar que los puntos de dicha componente de V_k son sin T-retorno. Por otra parte, las condiciones adicionales son las fácilmente satisfechas en la práctica.

6. Lema

Si toda solución T-periódica de (2) está contenida en un dominio Ω de \mathbb{R}^n , V es una función C^1 de Ω en \mathbb{R} , $k \in \mathbb{R}$ es tal que en una componente conexa $V_{1,k}$ del conjunto

$V_k = \{z \in \Omega \mid V(z) = k\}$ se verifica (3), $D_1 \subset \Omega$ es un dominio tal que

$$D_1 \cap V_k = V_{1,k} \quad \text{y}$$

$$(4) \quad \Omega \cap \partial D_1 \cap \{z \mid V(z) \geq k\} = \emptyset,$$

entonces todos los puntos de $V_{1,k}$ son puntos sin T-retorno.

(la figura 1 ilustra el enunciado anterior).

Demostración.

Sea $z_0 \in V_{1,k}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Sea $z(t)$ una solución

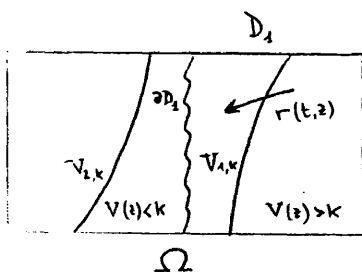


Figura 1

de (2) tal que $z(t_0) = z_0$. Vamos a estudiar tres posibilidades mutuamente excluyentes.

Para $t \geq t_0$:

a) Si $z(t)$ sale de Ω no puede ser T-periódica, puesto que todas las soluciones T-periódicas es

tán en Ω , y por tanto, z_0 es un punto sin T-retorno.

b) Si $z(t)$ permanece en D_1 , dicho conjunto D_1 está en la hipótesis del anterior lema, 4, y, por tanto, z_0 es un punto sin T-retorno.

c) Si $z(t)$ permanece en Ω , pero sale de D_1 , vamos a demostrar que, para volver a z_0 , habrá de tener puntos en $\partial D_1 \cap \Omega$, en alguno de esos puntos, $z(\tau), V(z(\tau)) > k$, eso contradice la condición (4) y, por tanto, z_0 es un punto sin T-retorno.

En efecto, supongamos que existen $t_1 > t_0$ y $t_2 > t_1$ tales que

$$(5) \quad z(t_1) \in \Omega \setminus D_1$$

$$(6) \quad z(t_2) = z_0 \in V_{1,k} \subset D_1,$$

es decir, $z(t)$ sale de D_1 o, lo que es lo mismo, tiene un punto $z(t_1)$ fuera de D_1 , condición (5) y, después, vuelve a pasar por z_0 , condición (6).

Como Ω es conexo, (5) y (6) implican que existe un τ máximo menor que t_2 y tal que

$$z(\tau) \in \partial D_1 \cap \Omega \quad \tau < t_2$$

$$z(t) \in D_1 \quad \text{para todo } t \text{ tal que } \tau < t < t_2.$$

Estudiamos la función $V(t) \equiv V(z(t))$ en el intervalo $[\tau, t_2]$ que acabamos de definir. Probaremos que $V(t) \geq k$ en $[\tau, t_2]$ y de ahí obtendremos la contradicción, $V(\tau) \geq k$, que demuestra que $z(t)$ no puede retornar a z_0 .

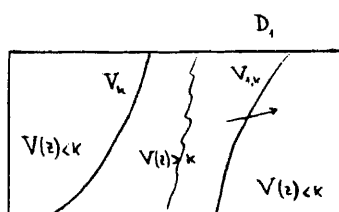
Si para algún \bar{t} , $\tau < \bar{t} < t_2$, $V(\bar{t}) < k$, aplicando el lema 3 tenemos

$$V(t) < k \quad \forall t | \bar{t} \leq t \leq t_2 \quad (*)$$

pero, eso no es posible pues, por (6), $V(t_2) = k$. Por tanto, $V(t) \geq k$ para todo t tal que $\tau < t \leq t_2$ y, por continuidad, $V(\tau) \geq k$. c. q. d.

Notas.

1. Un lema similar se obtiene si se cambia (3) por (3') y el conjunto que aparece en (4) por $\{z | V(z) < k\}$.
2. En la práctica puede ocurrir que no se aplique exactamente ni el lema anterior ni la modificación indicada en la nota 1, pero sí algunas de las ideas de la demostración.



Ω
Figura 2

Por ejemplo, si la frontera de una componente conexa del conjunto $V_p = \{z \in \Omega | V(z) < k\}$ no contiene más puntos de V_k que los de $V_{1,k}$, hay una elección inmediata de D_1 mediante la cual sólo son posibles los casos a) y

(*) De hecho se puede afirmar algo más: $V(t) < k$, $\bar{t} \leq t < t_2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$ pues, al ser D_1 abierto, $z(t) \in D_1$ para ese intervalo de valores de t y ahí es donde se aplica 3.

b) de la anterior demostración (véase el esquema de la figura 2). Con ello resulta inmediato establecer que los puntos de $V_{1,k}$ son sin T-retorno.

7. Aplicaciones.

Aunque las aplicaciones de todo lo expuesto en el presente capítulo se tratan detalladamente en el siguiente, vamos a apuntar aquí las líneas comunes a todas ellas.

Nótese en primer lugar que el lema 4, ó el 6, descarta la posibilidad de que las soluciones T-periódicas de (1) pasen por determinados puntos: los del conjunto llamado V_k , ó $V_{1,k}$ en su caso. Que tales puntos sean "muchos" o "pocos" depende de diversos factores, particularmente de que haya varios valores de k , en concreto un intervalo de la recta real, para los cuales se cumpla el lema.

La técnica que vamos a describir pretende explotar este hecho usando el lema 4, ó el 6, de forma reiterada hasta demostrar que los puntos por los que no pueden pasar soluciones T-periódicas de (1), es decir, los puntos sin T-retorno, son "tantos" que el resto, el conjunto donde pueden estar dichas soluciones, es un dominio acotado.

De una forma algo más precisa: Si elegimos una función V_1 definida en $\Omega_1 = \mathbb{R}^n$, donde ciertamente están todas las soluciones T-periódicas, el lema 4, ó el 6, nos proporciona una región menor, Ω_2 , en la que buscaremos otra función V_2 . Nuevamente por medio del lema, obtendremos otra región más pequeña y más manejable. De esta forma se continúa el proceso

con la esperanza de llegar finalmente a una región acotada Ω_N con lo que se habrá alcanzado el objetivo que se plantea en la introducción de este capítulo.

Recuérdese que un conjunto Ω_N de tales características no basta para probar la existencia de soluciones periódicas. Quedan por resolver los problemas (b) y (c) planteados en dicha introducción. Pero, incluso cuando no se puede llegar a demostrar que existen soluciones periódicas de (1), los lemas demostrados y el método expuesto en el párrafo anterior permiten estimar la amplitud de las oscilaciones posibles. Este es un dato muy interesante cuando se trata de evitar oscilaciones: en caso de que existan se tiene al menos la seguridad de que no sobrepasan ciertas cotas.

Por otra parte, es claro que un número finito de aplicaciones de los lemas 4 y 6 no tiene por qué terminar necesariamente con la obtención de un Ω_N que contenga todas las soluciones T -periódicas de (1) y sea acotado.

De hecho puede que se obtenga una sucesión de creciente de regiones Ω_i , no acotadas, cada una de las cuales ha de contener toda posible solución T -periódica de (1). Cuando tal cosa ocurre puede pensarse que no existen soluciones de ese tipo y, en algunos casos, la demostración es inmediata. En efecto, basta demostrar que cualquier punto z de \mathbb{R}^n queda fuera de alguna de las regiones Ω_i . Es lo que haremos en la sección 3 del próximo capítulo en la que puede encontrarse una exposición detallada de

esta segunda modalidad de aplicación de la técnica de las funciones barrera.

8. Nota.

El método de perturbación utilizado por Rosenblat (1980) y el de bifurcación utilizado por Cushing (1980_a), no proporcionan cotas de la amplitud de todas las soluciones periódicas. Por otra parte, de Mottoni y Schiaffino (1981) que utilizan la técnica del operador de traslación, o de Poincaré, sí obtienen resultados sobre la estructura global de todas las soluciones, pero no disponen de métodos constructivos que permitan precisar las regiones que contienen todas las soluciones T-periódicas de (1).

CAPITULO VII. APLICACION DE LA TECNICA DE LAS FUNCIONES BARRERA.

1. Introducción.

En el presente capítulo demostraremos la existencia de soluciones periódicas para las ecuaciones de interacción entre dos especies en varios casos. En primer lugar tratamos de la competición, que ya fué estudiada en el capítulo IV con unas condiciones que hacían relativamente sencilla la construcción de una función guía. Aquí demostraremos la existencia de soluciones periódicas en los casos excluidos del capítulo IV. A continuación, y con la misma técnica, probaremos que las ecuaciones del modelo conocido como simbiosis o mutualismo tienen o no soluciones periódicas según sea más o menos débil la interacción entre las dos especies en un sentido que se precisará más adelante. Siempre que se afirme la existencia de soluciones periódicas, el mismo método de la demostración proporcionará una estimación calculable de la amplitud de dichas oscilaciones.

2. Competición.

2.1. Sean u y v dos especies cuyo comportamiento se rige por el sistema de ecuaciones de Volterra-Lotka

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(b_1 - c_{11}u - c_{12}v) \\ \frac{dv}{dt} &= v(b_2 - c_{21}u - c_{22}v) \end{aligned}$$

donde b_i, c_{hk} son funciones periódicas positivas con el mismo período mínimo T , $b_i(t+T) = b_i(t)$ para todo t , etc. De la misma forma que en el cuarto capítulo, definimos

$$(2) \quad B_i = \frac{1}{T} \int_0^T b_i(s) ds, \quad \underline{b}_i = \min b_i(t), \quad \overline{b}_i = \max b_i(t)$$

y análogamente $C_{ij}, \underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}$.

Las condiciones

$$(3) \quad B_2 C_{12} > B_1 C_{22} \quad B_1 C_{21} > B_2 C_{11}$$

aseguran que el sistema

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= u(B_1 - C_{11}u - C_{12}v) \\ \dot{v} &= v(B_2 - C_{21}u - C_{22}v) \end{aligned} \quad (\dot{u} = \frac{du}{dt})$$

cuyos coeficientes son los promedios de los coeficientes de (1), tiene un único punto crítico estrictamente positivo (en el primer cuadrante) y que es inestable^(*). La comprobación de este hecho es inmediata y el que aquí llamemos la

(*) (El caso en que dicho punto es estable se estudió anteriormente. Véase IV.2 y IV.4).

atención sobre él se debe a que su sentido biológico es la motivación para las condiciones que vamos a imponer a (1). En efecto, si supusiéramos que las especies rivales u, v viven en un medio ambiente invariable con el transcurso del tiempo, tomaríamos el sistema (4) como modelo matemático y la observación precedente sobre la inestabilidad del único punto crítico positivo (\bar{u}, \bar{v}) de (4) nos llevaría a la conclusión de que ambas especies u y v no pueden coexistir: la más pequeña desviación de (u, v) respecto a las dos únicas trayectorias que tienden a (\bar{u}, \bar{v}) daría lugar a una nueva trayectoria que tendería a un punto crítico sobre uno de los ejes de coordenadas, es decir una especie se extinguiría. Si ahora suponemos que los parámetros, b_i, c_{ij} , que describen el medio ambiente, son funciones periódicas, es decir, que el sistema (1) es un modelo más ajustado a la realidad y que (4) es una simplificación de (1) la pregunta que nos planteamos es ¿podrían coexistir las especies u y v regidas por (1)?.

Se trata, por tanto, de formular unas condiciones sobre (1) que impliquen las condiciones (3) y, fundamentalmente, que aseguren la existencia de soluciones periódicas no triviales de (1).

Con este planteamiento pretendemos formalizar y dar respuesta al problema, sugerido por Bremermann (1979), que formulábamos en I.1. *Phs* mutantes de *E. Coli*, uno de los

cuales no metaboliza la glucosa mientras que el otro no puede metabolizar lactosa, estarían abocados a la extinción de uno de ellos en un medio invariable y, por ejemplo, pobre en lactosa. Pero supongamos que la glucosa es abundante en invierno y la lactosa en verano, ¿podrían coexistir las dos poblaciones en tales condiciones periódicas?

Por otra parte, éste es un cuadro distinto del que proponen Koch (1974) y Cushing (1980_a) en el cual una catástrofe periódica afecta simultáneamente a ambas especies.

2.2. Teorema

Sea el sistema (1). Si, con la notación (2), se cumplen las condiciones

$$(5) \quad \underline{b}_2 \underline{c}_{12} > \overline{b}_1 \overline{c}_{22} \quad \underline{b}_1 \underline{c}_{21} > \overline{b}_2 \overline{c}_{11}$$

entonces (1) tiene al menos una solución periódica estrictamente positiva.

Demostración.

Puesto que buscamos soluciones estrictamente positivas, excluimos las triviales con el cambio de variables que se introdujo en el capítulo II.

$$\begin{aligned} u &= e^x & x &= \log u \\ v &= e^y & y &= \log v \end{aligned}$$

con lo cual el sistema (1) toma la forma

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= b_1 - c_{11} e^x - c_{12} e^y \\ \dot{y} &= b_2 - c_{21} e^x - c_{22} e^y \end{aligned}$$

y todo lo que hemos de demostrar es que (6) tiene soluciones T-periódicas.

En la figura 1 hemos bosquejado el campo de

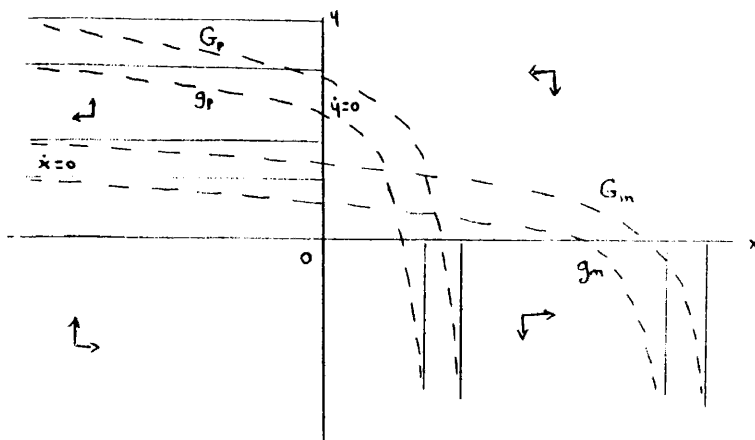


Figura 1

direcciones del sistema (6). Al ser los coeficientes funciones de t , no hay puntos críticos y el lugar de los puntos donde $\dot{x}=0$ ó $\dot{y}=0$ se mueve periódicamente en el plano de las fases entre las posiciones extremas q_m y q_p , g_p y g_m respectivamente, definidas como sigue

$$q_m = \{ (x, y) \mid \bar{b}_1 - \bar{c}_{11} e^x - \bar{c}_{12} e^y = 0 \}$$

$$q_p = \{ (x, y) \mid \underline{b}_1 - \underline{c}_{11} e^x - \underline{c}_{12} e^y = 0 \}$$

$$g_p = \{ (x, y) \mid \bar{b}_2 - \bar{c}_{21} e^x - \bar{c}_{22} e^y = 0 \}$$

$$g_m = \{ (x, y) \mid \underline{b}_2 - \underline{c}_{21} e^x - \underline{c}_{22} e^y = 0 \}$$

donde la notación m, p ($m = \frac{b_1}{c_{11}}, p = \frac{b_2}{c_{22}}$) alude a una de las asintotas de las curvas que acabamos de definir: $x = \log m$, $x = \log \bar{m}$ para g_m, G_m e $y = \log p$, $y = \log \bar{p}$ para g_p, G_p .

La familia de ecuaciones auxiliares

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda (b_1 - c_{11} e^x - c_{12} e^y) \\ \dot{y} &= \lambda (b_2 - c_{21} e^x - c_{22} e^y) \end{aligned} \quad \lambda \in [0, 1]$$

tiene, para $\lambda \neq 0$, el mismo campo de direcciones que (6) y, según el teorema 5.8 del capítulo III, habremos demostrado que (6) tiene soluciones T -periódicas y, por tanto, (1) soluciones T -periódicas estrictamente positivas si probamos que existe $R > 0$ tal que

(a) para todo $\lambda \in (0, 1]$ toda posible solución T -periódica de (7) verifica

$$\|(x, y)\| = \sup |(x(t), y(t))| \neq R$$

(b) Cualquier raíz (p_1, p_2) del sistema de ecuaciones

$$(3) \quad \begin{aligned} 0 &= f_{1,0}(p_1, p_2) \equiv B_1 - c_{11} e^{p_1} - c_{12} e^{p_2} \\ 0 &= f_{2,0}(p_1, p_2) \equiv B_2 - c_{21} e^{p_1} - c_{22} e^{p_2} \end{aligned}$$

es tal que $\|(p_1, p_2)\| \neq R$.

(c) El grado de Brower de la aplicación $f_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida en (8) es no nulo,

$$d(f_0, B(0, R), 0) \neq 0.$$

Tomemos, en Ω_2 , la función $V_2 = x - \log \tilde{m}$. Para todo $k \geq 0$ se tiene $\dot{V}_2 < 0$ sobre $V_2 = k$ y de nuevo por el lema VI.4 se sigue que la región Ω_3 , donde deben encontrarse todas las soluciones T-periódicas, es la región bajo la recta $V_1 = 0$ y a la izquierda de la recta $V_2 = 0$.

En Ω_3 definimos la función $V_3 = (x - x_0)(y - y_0)$. Si

tomamos $x_0 = \log \frac{b_2}{c_{21}}$, $y_0 = \log \frac{b_1}{c_{12}}$ se puede hallar un número R_3

suficientemente grande para que la rama inferior de la hipérbola $V_3 = R_3$ esté debajo de las curvas g_m y g_p y la rama superior sobre las curvas G_p y G_m . Estudiemos la derivada

$$\dot{V}_3 = \dot{x}(y - y_0) + \dot{y}(x - x_0)$$

para ese R_3 . Sobre la rama inferior de $V_3 = R_3$, tenemos $\dot{x} > 0$ e $\dot{y} > 0$, de forma que $\dot{V}_3 < 0$. Sobre la rama superior de $V_3 = R_3$, tenemos $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} < 0$, de forma que $\dot{V}_3 < 0$. Los mismos resultados son válidos para cualquier $R > R_3$. Se tiene, por tanto que las soluciones T-periódicas están en una región, Ω_4 , contenida en Ω_3 y más pequeña.

Pero, utilizando las condiciones (5), podemos conseguir un resultado todavía mejor. Sean $x_0 = \log(\frac{b_2}{c_{21}} + \epsilon)$ e $y_0 = \log(\frac{b_1}{c_{12}} + \epsilon)$. Podemos elegir R_3 suficientemente grande para que la rama superior de $V_3 = R_3$ esté sobre las curvas

G_p y G_m y la parte central de la rama inferior bajo las curvas g_m y g_p (véase la figura 2).

La derivada de V_3 es

$$V_3 = \lambda(y-y_0) \cdot (x-x_0) \dot{y} = \lambda [(b_1 - c_{11} e^x - c_{12} e^y)(y-y_0) + (x-x_0)(b_2 - c_{21} e^x - c_{22} e^y)].$$

El término $(x-x_0) \cdot \dot{y}$ es positivo en la parte más exterior de la rama inferior de la hipérbola que se encuentra en el segundo cuadrante ($x > 0, y < 0$), pero está acotado. Por otra parte, λ es positiva y a distancia positiva de cero, con lo cual podemos hacer que el otro término, $\lambda(y-y_0)$, sea negativo y muy grande en valor absoluto eligiendo R_3 suficientemente grande. De esta forma se tiene $V_3 < 0$ en el segmento de la rama inferior que estamos considerando. Nótese que la condición $b_1 c_{21} > b_2 c_{11}$ es necesaria para la construcción efectuada. Utilizando la condición $b_2 c_{12} > b_1 c_{22}$ se demuestra análogamente que $V_3 < 0$ en la parte más externa de la hipérbola situada en el cuarto cuadrante ($x < 0, y > 0$).

Por el lema VI.4, todos los puntos situados bajo la rama inferior de la hipérbola $V_3 = R_3$ son puntos sin T-retorno. La región Ω_4 está limitada por las rectas $V_1 = 0, V_2 = 0$ y la rama inferior de $V_3 = R_3$.

Sea $-R_4 < 0$ la abscisa del punto de intersección de la rama inferior de $V_3 = R_3$ con G_m . Definamos $V_4 = x + R_4$. En Ω_4

los puntos de la recta $V_4=k$, para todo $k \leq 0$, están por encima de la curva G_m . Por tanto, $\dot{x} < 0$ y, evidentemente, $V_4 < 0$ sobre esa recta. Los puntos a la izquierda de $V_4=0$ son, pues, puntos sin T-retorno.

Sea $-R_5 < 0$ la ordenada del punto de intersección de la rama de $V_5=R$, con G_p . Definimos $V_5=y+R_5$. En Ω_4 , y para todo $k \leq 0$, los puntos de $V_5=k$ están a la derecha de G_p . Para tales puntos $\dot{y} < 0$ y $V_5 < 0$. Por tanto, todos los puntos de Ω_4 bajo la recta $V_5=0$ son puntos sin T-retorno.

Finalmente, si elegimos $R' = \max\{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}, \sqrt{R_1^2 + R_4^2}, \sqrt{R_2^2 + R_5^2}\}$, se sigue que todos los puntos del conjunto complementario de la bola $B(0, R')$ son puntos sin T-retorno. Eso demuestra que toda solución T-periódica de (7) permanece en $B(0, R')$ y concluye esta parte (a)

Demostración de (b).

Un sencillo cálculo prueba que las condiciones (5) implican que el sistema de ecuaciones (8) tiene una única raíz (p_1, p_2) . Para un valor apropiado $R \geq R'$, el punto (p_1, p_2) está en el interior de $B(0, R)$ y por tanto $|(p_1, p_2)| \neq R$.

Demostración de (c)

Se trata de calcular el grado de Brower de f_0 . Pero f_0 es una función de $C^1(\mathbb{R}^2)$ y tiene un único cero en $B(0, R)$. El jacobiano de f_0 es distinto de cero si $C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \neq 0$ es y eso es una consecuencia de las condiciones (5). Por tanto el grado es no nulo.

Habiendo comprobado las condiciones (a),(b) y (c) , hemos probado que el teorema III.5.8 se aplica a (6). Existe pues al menos una solución T-periódica de (6) en $B(0,R)$ y, correlativamente, una solución T-periódica estrictamente positiva de (1). c.q.d.

2.3.Nota.

Obsérvese que el número R encontrado en el transcurso de la demostración ya nos ofrece una primera cota de la amplitud de las soluciones T-periódicas de (7) y, por tanto, de (1): todas ellas están en la bola $B(0,R)$. De hecho se puede afinar más la construcción y demostrar que todos los puntos fuera de las bandas $G_m - g_m$ y $G_p - g_p$ son puntos sin T-retorno.

3. Simbiosis

Consideremos ahora las ecuaciones.

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= u(b_1 - c_{11}u + c_{12}v) \\ \dot{v} &= v(b_2 + c_{21}u - c_{22}v) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} b_1, c_{ij} \text{ funciones } T\text{-peri} \\ \text{ódicas de } t. \end{array}$$

que difieren de las de la sección previa en el signo de los coeficientes c_{12}, c_{21} . Es claro que si allí medían la influencia negativa de una especie sobre el crecimiento de la otra, aquí medirán la influencia beneficiosa. De la misma forma que las condiciones (5) de este capítulo y las (2) del capítulo IV plantean situaciones distintas, aquí distinguiremos dos casos

$$\underline{\Delta} \equiv \underline{c}_{11}\underline{c}_{22} - \underline{c}_{12}\underline{c}_{21} > 0 \quad \text{y} \quad \overline{\Delta} \equiv \overline{c}_{11}\overline{c}_{22} - \overline{c}_{12}\overline{c}_{21} \leq 0$$

que, para el sistema promediado

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u(B_1 - C_{11}u + C_{12}v) \\ \dot{v} &= v(B_2 + C_{21}u - C_{22}v) \end{aligned}$$

corresponden a que exista o no un punto crítico no trivial en el primer cuadrante.

Para el caso $\underline{\Delta} > 0$ demostraremos que existe al menos una solución T -periódica no trivial. De la demostración de ese hecho se deducirá además un procedimiento constructivo para acotar la región del primer cuadrante donde se encuentra la gráfica de la, o las, soluciones T -periódicas. Para el caso $\overline{\Delta} \leq 0$ demostraremos que no existe ninguna solución T -periódica no trivial. Para los dos resultados se utilizará la técnica de definir funciones barrera y demostrar, por aplicaciones sucesivas del lema VI.4, que determinados puntos son puntos sin T -retorno.

3.1. Caso $\Delta = \underline{c}_{11} \underline{c}_{22} - \bar{c}_{12} \bar{c}_{21} > 0$

3.1.1. Introducción.

Con el cambio de variables habitual

$$u = e^x \quad v = e^y,$$

(9) se transforma en

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (b_1 - c_{11} e^x + c_{12} e^y) \\ \dot{y} &= (b_2 + c_{21} e^x - c_{22} e^y) \end{aligned} \quad \dot{z} = f(t, z)$$

y hay una correspondencia biunívoca entre soluciones T-periódicas de (10) y soluciones T-periódicas no triviales de (9).

Definimos las curvas g_m, G_m, g_p y G_p de la siguiente forma

$$g_m = \{ (x, y) \mid b_1 - c_{11} e^x + c_{12} e^y = 0 \}$$

$$G_m = \{ (x, y) \mid b_1 - c_{11} e^x + \bar{c}_{12} e^y = 0 \}$$

$$g_p = \{ (x, y) \mid b_2 + c_{21} e^x - c_{22} e^y = 0 \}$$

$$G_p = \{ (x, y) \mid b_2 + \bar{c}_{21} e^x - c_{22} e^y = 0 \}$$

y vamos a demostrar dos lemas que den alguna luz sobre su forma y posición. (Nótese que las cuatro curvas tienen asíntotas de pendiente 1 para $x \rightarrow +\infty$ y que además, g_m, G_m tienen asíntotas verticales y g_p, G_p horizontales).

3.1.2. Lema

Las curvas G_m y G_p tienen un único punto de intersección $F = (F_1, F_2)$. La semirrecta b , de ecuación

$$y = x + F_2 - F_1 \quad x > F_1$$

no corta a G_m ni G_p y está en la región abierta formada por los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$(11) \quad b_1 - c_{11}e^x + \bar{c}_{12}e^y < 0$$

$$y \quad b_2 + \bar{c}_{21}e^x - c_{22}e^y < 0 ,$$

es decir los puntos situados bajo la curva G_m y por encima de la curva G_p . (Véase la figura 1),

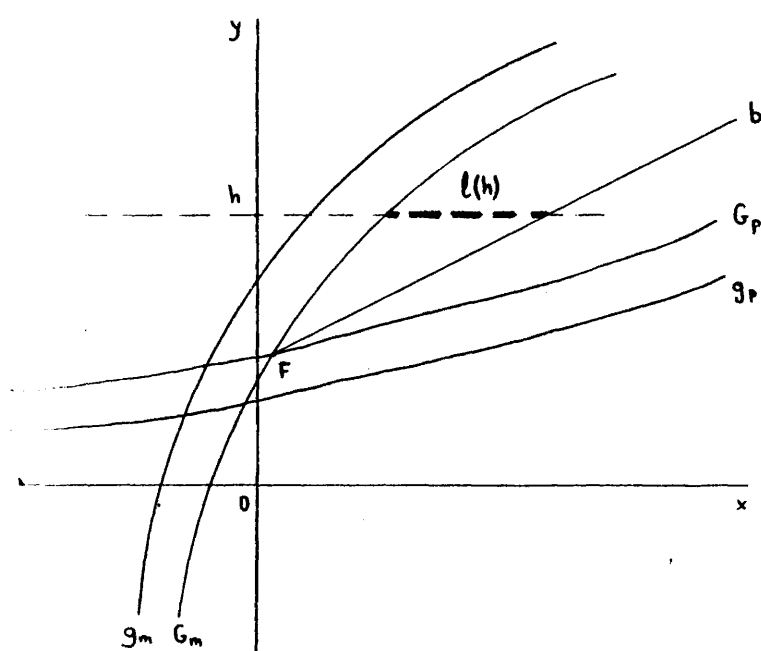


Figura 1.

Demostración

La condición

$$\underline{\Delta} = c_{11} c_{22} - \bar{c}_{12} \bar{c}_{21} > 0$$

implica que las rectas de ecuaciones

$$b_1 - c_{11} u + \bar{c}_{12} v = 0$$

$$b_2 + \bar{c}_{21} u - c_{22} v = 0$$

se cortan en un único punto y que las coordenadas de dicho punto son estrictamente positivas. Por tanto, las curvas G_m y G_p , obtenidas de dichas rectas por la biyección (3), también se cortan en un solo punto. Así se tiene la primera parte del lema.

Sea ahora $h > F_2$. Trazamos la recta $y = h$ y llamamos $l(h)$ a la longitud del segmento de esa recta comprendido entre la semirrecta b y la curva G_m ,

$$l(h) = h + F_1 - F_2 - \log \frac{b_1 + \bar{c}_{12} e^h}{c_{11}}$$

es decir, la diferencia entre las abscisas de los puntos de intersección de $y = h$ con b y G_m , respectivamente.

La función l es continua, derivable y se tiene que

$$(12) \quad \frac{dl}{dh} = l'(h) = 1 - \frac{\bar{c}_{12} e^h}{b_1 + \bar{c}_{12} e^h} > 0$$

con

$$(13) \quad l(F_2) = 0$$

De (12) y (13) se deduce fácilmente que los puntos de b verifican la desigualdad (11), en otras palabras que

b está debajo, o, si se quiere, a la derecha de la curva G_m . La posición respecto a G_p se encuentra análogamente y eso termina la demostración del lema. c.q.d.

3.1.3. Lema

Sean (α, β) y (p, q) dos puntos de la semirecta b definida en el lema anterior con $\alpha < p$, $\beta < q$. Sean δ_1, δ_2 las longitudes de los segmentos de las rectas $y = \beta$, $x = \alpha$ comprendidos entre b y G_m , para $y = \beta$, y entre b y G_p , para $x = \alpha$. Sea (x, y) un punto tal que

$$(14) \quad b_1 - c_{11} e^x + c_{12} e^y \geq 0$$

$$\beta < y < q$$

(o, respectivamente $b_2 + c_{21} e^x - c_{22} e^y \geq 0$, $\alpha < x < p$). Entonces

$$|x - p| > \delta_1$$

(o, respectivamente, $|y - q| > \delta_2$). (Véase la figura 2)

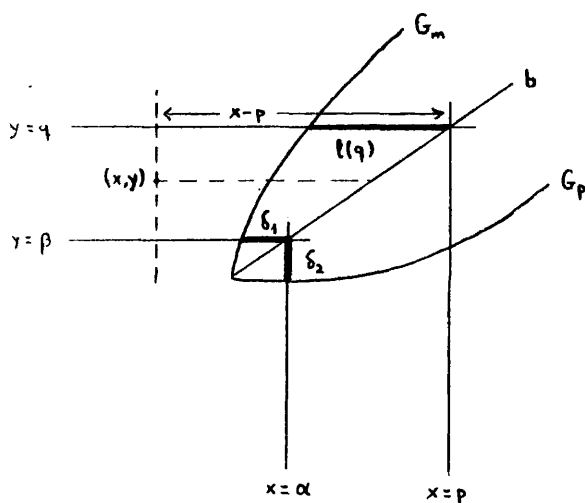


Figura 2.

Demostración

Con la notación del lema anterior, por ser $y < q$ y estar (x, y) en la región a la izquierda de \hat{q}_n , condición (14), la propiedad (12) de 1 implica que

$$|x-p| > 1(y) > 1(q) > 1(\beta) = \delta_1 \quad \text{c.q.d.}$$

3.1.4. Según el lema 3.1.2, el campo de direcciones del sistema (10), así como del

$$(15) \quad \dot{z} = \lambda f(t, z) \quad 0 < \lambda \leq 1$$

tiene el aspecto que ofrece la figura 3 con m y p definidos así

$$m(t) = \frac{b_1(t)}{c_{11}(t)} \quad n(t) = \frac{b_2(t)}{c_{22}(t)}$$

y siendo $\underline{m}, \underline{n}$ los mínimos de $m(t), n(t)$.

Las franjas comprendidas entre las curvas $G_m - g_m$ ó $G_p - g_p$ son las regiones donde puede anularse alguna de las dos componentes del campo, \dot{x} ó \dot{y} .

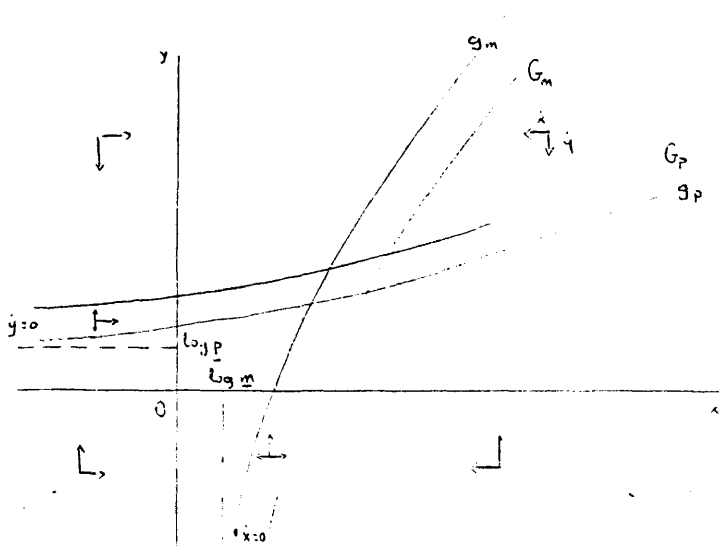


Figura 3.

Pretendemos demostrar sucesivamente que

(a) todas las posibles soluciones T -periódicas $x(t), y(t)$ de (15) cumplen la condición

$$(x(t), y(t)) \notin \partial B(0, R)$$

para cierto $R > 0$.

(b) el sistema de ecuaciones

$$(16) \quad \begin{aligned} f_{1,0}(x,y) &\equiv B_1 - C_{11}e^x + C_{12}e^y = 0 \\ f_{2,0}(x,y) &\equiv B_2 + C_{21}e^x - C_{22}e^y = 0 \end{aligned}$$

donde $B_i = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} b_i(s) ds$, $C_{ij} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} c_{ij}(s) ds$, tiene una única solución (x_0, y_0) que no pertenece a $\partial B(0, R)$.

(c) el grado de Brouwer de la aplicación f_0 definida por el primer miembro de (16) es no nulo,

$$d(f_0, B(0, R), 0) \neq 0.$$

Una vez que hayamos probado (a), (b) y (c) estaremos en condiciones de aplicar el teorema III.5.8.

3.1.5. Teorema

Sea el sistema (9) con la condición

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} > 0$$

Existe al menos una solución T -periódica no trivial de (9).

Demostración.

Teniendo en cuenta el teorema III.5.8. basta que probemos los resultados (a), (b) y (c) de la introducción precedente.

(a) Vamos a definir funciones barrera que, por pasos sucesivos, van a ir restringiendo el dominio donde puede encontrarse la gráfica de cualquier posible solución T -periódica de

con

$$\begin{aligned} A_1 &= F_1 + \eta \\ A_2 &= F_2 + \eta \end{aligned} \quad \eta > 0 .$$

S denota al punto de intersección de la curva g_p con la recta $x = \log \underline{m}$, asíntota de g_m , $S = (S_1, S_2)$. Entonces las cuatro rectas que definen Ω , son, véase la fig.4,

$$\begin{aligned} x - \log \underline{m} &\equiv x - S_1 = 0 \\ y - S_2 &= 0 \\ x - A_1 &= 0 \\ y - A_2 &= 0 \end{aligned}$$

Veamos, sucesivamente, que los siguientes puntos son sin T-retorno.

(a.1) Puntos situados a la izquierda de $x - \log \underline{m} = 0$.
En efecto, llamando

$$V_1(x, y) \equiv x - \log \underline{m},$$

los puntos (x, y) tales que $V_1(x, y) = k, \forall k < 0$, verifican que

$$\dot{V}_1(x, y) = \dot{x} > 0$$

y por tanto son sin T-retorno según el lema VI.4.

Definimos $\Omega_1 = \{(x, y) \in \Omega_0 \mid x > \log \underline{m}\}$ y estudiemos

(a.2). Los puntos de Ω_1 por debajo de la recta $y - S_2 = 0$.
Si definimos

$$V_2(x, y) \equiv y - S_2$$

se tiene que para todo $k \leq 0$ los puntos (x, y) de Ω_1 tales que $V_2(x, y) = k$ verifican que

$$\dot{V}_2(x, y) = \dot{y} > 0$$

Como todas las posibles soluciones T-periódicas están en Ω_1 por el resultado anterior, se puede aplicar de

nuevo el lema VI.4, y dichos puntos son sin T-retorno.

Sea $\Omega_2 = \{(x, y) \in \Omega_1 \mid y > S_2\}$ y estudiemos

(a.3) Los puntos, Ω_2' , de Ω_2 a la derecha de $x - A_1 = 0$ ó por encima de $y - A_2 = 0$.

Dividamos Ω_2' en zonas Z_N definidas de la siguiente manera

$$Z_N = \{(x, y) \mid A_1 + N < x \leq A_1 + N + 1, S_2 < y \leq A_2 + N + 1\} \cup$$

$$\cup \{(x, y) \mid \log m < x \leq A_1 + N + 1, A_2 + N < y \leq A_2 + N + 1\}$$

$$N = 0, 1, 2, \dots$$

(véase la figura 4).

Vamos a hacer pasar por cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_N$ la rama inferior de una hipérbola equilátera de ecuación

$$(x-p)(y-q) = \epsilon^2$$

con (p, q) un punto de $b\Omega(Z_N \cup Z_{N+1})$ cuyas coordenadas así como el valor del parámetro ϵ determinaremos de forma que la función

$$V_\epsilon(x, y) = (x-p)(y-q)$$

sea barrera sobre los puntos de la rama inferior de dicha hipérbola.

El siguiente lema describe una primera determinación de los parámetros p, q, ϵ .

3.1.6. Lema.

Dado un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_N$

1. Existen ternas de números p, q, ϵ tales que (\bar{x}, \bar{y}) pertenece a la rama inferior de la hipérbola $(x-p)(y-q) = \epsilon^2$.

2. Si p, q, ϵ es una de tales ternas, para todo $\epsilon' < \epsilon$ existen p', q' tales que p', q', ϵ' sigue verificando 1 y se puede elegir ϵ' de forma que además se tengan las dos propiedades siguientes.

2.1. Los ejes de la hipérbola $(x-p')(y-q') = \epsilon'^2, x=p', y=q'$, se cortan en un punto (p', q') de $Z_N \cup Z_{N+1}$ que pertenece a la semirrecta b de ecuación $y = x + F_2 - F_1$.

2.2. La porción de rama inferior de dicha hipérbola comprendida entre sus intersecciones con las rectas $x = \log m, y = S_2$ está contenida en $Z_N \cup Z_{N+1}$.

Demostración.

Por definición de Z_N se tiene al menos una de las dos posibilidades siguientes

$$(17) \quad \begin{matrix} A_1 + N < \bar{x} < A_1 + N + 1, & S_2 < \bar{y} < A_2 + N + 1 \\ \delta \end{matrix}$$

$$(18) \quad A_2 + N < \bar{y} < A_2 + N + 1, \quad S_1 = \log m < \bar{x} < A_1 + N + 1.$$

Supongamos, para fijar las ideas, que se verifica la segunda y sea, además

$$\bar{y} \geq \bar{x} + F_2 - F_1$$

(En los restantes casos, $\bar{y} < \bar{x} + F_2 - F_1$ ó (17), la demostración se hace análogamente).

Elijamos un q cualquiera tal que $\bar{y} < q$ y definimos

$$p = q - F_2 + F_1$$

$$(19) \quad \epsilon^2 = (\bar{x} - p)(\bar{y} - q).$$

(Esta última igualdad es posible porque

$$q > \bar{y} \geq \bar{x} + F_2 - F_1$$

implica

$$p = q - F_2 + F_1 > \bar{x}$$

y, por tanto, los dos factores de (19) son negativos).

Con las anteriores definiciones, es fácil ver que los números p, q, ϵ verifican la parte 1. del lema.

Sea ahora $\epsilon' < \epsilon$. La función $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) = (\bar{x} - x + F_2 - F_1)(\bar{y} - x)$$

definida a partir del segundo miembro de (19) es continua y monótona creciente para $x \geq \bar{y}$ ($\phi'(x) = -(\bar{y} - x) - (\bar{x} - x + F_2 - F_1) > 0$) y como se anula para $x = \bar{y}$ y vale ϵ^2 para $x = q$ existe un valor q' tal que

$$\begin{aligned} \bar{y} < q' < q \\ \phi(q') &= (\bar{x} - q' + F_2 - F_1)(\bar{y} - q') = \epsilon'^2, \end{aligned}$$

es decir

$$(20) \quad (\bar{x} - p')(\bar{y} - q') = \epsilon'^2 \quad \text{con } p' = q' - F_2 + F_1.$$

Esto prueba la primera afirmación de la parte 2 del lema.

Por otra parte, de (18) se tiene

$$\bar{y} < A_2 + N + 2$$

y, para un ϵ' elegido convenientemente, se puede volver a utilizar la continuidad y monotonía de ϕ y su inversa para obtener q' que verifique (20) y

$$A_2 + N < \bar{y} < q' < A_2 + N + 2$$

todo lo cual implica el aserto 2.1.

Finalmente, si definimos

$$\epsilon_0 = \bar{y} - A_2 - N$$

también por (18) se tiene que $\epsilon_0 > 0$. Entonces, volviendo a llamar ϵ' al valor mínimo entre ϵ_0 y el ϵ' obtenido para 2.1, el punto $(p' - \epsilon', q' - \epsilon')$, de intersección de la hipérbola de ecuación $(x - p')(y - q') = \epsilon'^2$ con la semirrecta b ,

verifica

$$(p' - \epsilon', q' - \epsilon') \in Z_N \cup Z_{N+1}$$

pues

$$A_2 + N = \bar{y} - \epsilon_0 \leq \bar{y} - \epsilon' < q' - \epsilon' < q' < A_2 + N + 2$$

$$A_1 + N = A_2 + F_1 - F_2 + N \leq q' + F_1 - F_2 - \epsilon' = p' - \epsilon' < p' < A_1 + N + 2$$

Debido a la forma de $Z_N \cup Z_{N+1}$ y la hipérbola, lo mismo ocurre para el resto de los puntos de la hipérbola mencionados en 2.2. y eso completa la demostración del lema.

c.q.d.

Sea ahora $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega'_2$ arbitrario, N un número natural tal que $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_N$ y p, q, ϵ números reales satisfaciendo todas las condiciones 1, 2.1 y 2.2 del lema 3.1.6.

(En el razonamiento que sigue podrá ser necesario tomar para ϵ un valor inferior al valor de partida recién mencionado y, correlativamente, alterar los valores correspondientes de p y q . El lema 3.1.6 asegura que tal modificación es legítima en el sentido de que siempre podremos contar con los asertos 1, 2.1 y 2.2 de dicho lema).

Definimos la función $V_3: \Omega'_2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V_3(x, y) = (x - p)(y - q)$$

y vamos a demostrar que, para ϵ suficientemente pequeño, el lema VI.4 se aplica a la función V_3 , sobre los puntos (x, y) en los que $V_3(x, y) = \epsilon^2$. Es decir, probaremos que V_3 es función barrera, los puntos mencionados son sin T-retorno y, como (\bar{x}, \bar{y}) es uno de ellos, habremos demostrado que todos los puntos de Ω'_2 son sin T-retorno.

Estudiemos primero la región abierta situada entre las curvas G_m y G_p . La comprobación del lema VI.4 no ofrece

dificultades pues

$$(21) \quad V_3(x,y) = \hat{x}(y-q) + (x-p)\hat{y} > 0$$

para los (x,y) tales que $V_3(x,y) = \epsilon^2$. (Los cuatro factores: $\hat{x}, y-q, x-p, \hat{y}$, son negativos).

Veamos que V_3 es también positiva en el resto de la hipérbola $V_3(x,y) = \epsilon^2$. Por ejemplo, y para fijar las ideas, en los puntos (x,y) a la izquierda de la curva G_m

$$\bar{b}_1 - \bar{c}_1 e^x + \bar{c}_2 e^y \geq 0,$$

siendo análoga la demostración para los puntos por debajo de G_p . Sobre tales puntos se tiene que

$$V_3(x,y) = \hat{x}(y-q) + (x-p)\hat{y}$$

donde el término $(x-p)\hat{y}$ es positivo mientras que $\hat{x}(y-q)$ puede ser negativo. Vamos a probar que se puede elegir ϵ de forma que

$$|\hat{x}(y-q)| < |(x-p)\hat{y}|$$

y, por tanto, $V_3(x,y) > 0$. Para ello acotaremos inferiormente los términos $|x-p|$ e $|\hat{y}|$ y superiormente los $|\hat{x}|, |y-q|$.

Tomando $\alpha = A_1 + N, \beta = A_2 + N$ y (x,y) en la hipérbola $V_3(x,y) = \epsilon^2$ el lema 3.1.3 implica que

$$(22) \quad |x-p| > \delta_1$$

y por tanto

$$(23) \quad |y-q| < \frac{\epsilon^2}{\delta_1},$$

que son dos de las cotas que buscamos. Por otro lado, el conjunto donde nos encontramos (puntos de $Z_N \cup Z_{N+1}$ situados en δ a la izquierda de la curva G_m) es compacto^(*) y en él

(*) En todo rigor para que sea compacto hay que añadirle un segmento de la recta $x = \log m$ que no está en $Z_N \cup Z_{N+1}$, pero eso no afecta a la validez del razonamiento.

la función continua y periódica

$$|\dot{y}(t)| = \lambda [c_{22}(t)e^y - b_2(t) - c_{21}(t)e^x]$$

es estrictamente positiva para todo $t \in [0, T]$. Es decir, existe $M_1 > 0$ tal que

$$(24) \quad |\dot{y}| \geq M_1.$$

Finalmente, por lo que se refiere a $|\dot{x}|$, si λ es menor o igual que cero, $\lambda(y-q) \geq 0$ y por tanto $\forall \delta_1 > 0$. En consecuencia, supondremos $\lambda > 0$ con lo cual

$$(25) \quad \lambda = |\dot{x}| = \lambda [b_1(t) - c_{11}(t)e^x + c_{12}(t)e^y] < \lambda (\bar{b}_1 + \bar{c}_{12} e^{A_2 + N + 2}) = M_2$$

De (22), (23), (24) y (25), y suponiendo $\lambda > 0$,

$$(26) \quad \forall_3(x, y) = \lambda(y-q) + (x-p)\dot{y} > -M_2 \frac{\epsilon^2}{\delta_1} + M_1 \delta_1 > 0$$

si tomamos $\epsilon^2 < \frac{M_1 \delta_1^2}{M_2}$ y (x, y) tal que $\forall_3(x, y) = \epsilon^2$.

Con la observación precedente sobre el signo de λ , (21) y (26) concluyen este apartado (a.3) pues, de acuerdo con el lema VI.4 prueban que todos los puntos de la hipérbola de ecuación $\forall_3(x, y) = \epsilon^2$ son sin T-retorno y, como se puede hacer pasar una de tales hipérbolas por cualquier punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega'_2$, todos los puntos de Ω'_2 son sin T-retorno.

Resumiendo los apartados (a1), (a2) y (a3) tenemos que todas las posibles soluciones T-periódicas $(x(t), y(t))$ de (15) se encuentran en el dominio acotado Ω_3 definido en las páginas 95 y 96 y, por tanto, existe $R_1 > 0$ tal que

$$(x(t), y(t)) \in \overline{B(0, R_1)}.$$

(b) De la hipótesis $\underline{c}_{11} \underline{c}_{22} - \bar{c}_{12} \bar{c}_{21} > 0$ se deduce fácilmente, de forma análoga al lema 3.1.2, que la función f_0 definida en (16) tiene exactamente un cero (x_0, y_0) . En consecuencia

se puede elegir $R_2 \geq R_1$ tal que

$$(x_0, y_0) \notin \partial B(0, R_2)$$

(c) Como la aplicación f_0

$f_0 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (B_1 - C_{11}e^x + C_{12}e^y, B_2 + C_{21}e^x - C_{22}e^y) \in \mathbb{R}^2$
es continuamente diferenciable,

$$d(f_0, B(0, R_2), 0) = \text{sgn } J(f_0)(x_0, y_0)$$

donde $J(f_0)$ es el jacobiano de f_0

$$J(f_0) = \begin{vmatrix} -C_{11}e^x & C_{12}e^y \\ C_{21}e^x & -C_{22}e^y \end{vmatrix} = e^x e^y (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) >$$

$$> \underline{C}_{11} \underline{C}_{22} - \underline{C}_{12} \underline{C}_{21} > 0$$

es decir

$$d(f_0, B(0, R_2), 0) \neq 0.$$

Finalmente, de (a), (b) y (c) (note: e que (a) también es válido para $B(0, R_2)$ por ser $R_2 \geq R_1$), deducimos que nos encontramos en las hipótesis del teorema III.5.8 y por tanto, que existe al menos una solución T -periódica de (10) y una solución T -periódica no trivial de (9).

c.q.d.

3.2. Caso $\underline{C}_{11} \underline{C}_{22} - \underline{C}_{12} \underline{C}_{21} < 0$

3.2.1. Nota

Vamos a probar que la presente hipótesis, $\underline{\lambda} < 0$, hace crecer ambas especies ilimitadamente. Eso nos hace pensar que la condición $\underline{\lambda} > 0$ no es uno más de los posibles casos que se presentan al estudiar el modelo, sino que

forma parte del mismo modelo. Reconociendo todas las diferencias entre los dos modelos, se trata de algo análogo a lo que ocurre con la ecuación logística

$$(27) \quad y' = y(b - cy)$$

donde nada se opone, desde el punto de vista del análisis, a considerar el caso $c < 0$. Sin embargo, (27) con $c < 0$ carece de sentido como modelo que pretende corregir la excesiva simplificación del crecimiento exponencial ($y' = by$) y, simplemente, no se estudia en ese contexto.

En relación con este punto pueden verse los modelos propuestos por Frauenthal (1979), Hirsch-Smale (1974), May (1973) y Cushing (1976_a) y observar que, sean o no el mismo que el nuestro, todos ellos incluyen alguna hipótesis tan restrictiva o más que nuestra condición $\underline{\Delta} > 0$.

Es elemental comprobar que las curvas g_m y g_p (Véanse las definiciones en 3.1.1 y la figura 5) son, respectivamente, convexa y cóncava y tienen como asíntotas las rectas de ecuaciones

$$(28) \quad y = x + \log \frac{\bar{c}_{11}}{c_{12}} \quad \text{para } g_m$$

$$(29) \quad y = x + \log \frac{c_{21}}{\bar{c}_{22}} \quad \text{para } g_p.$$

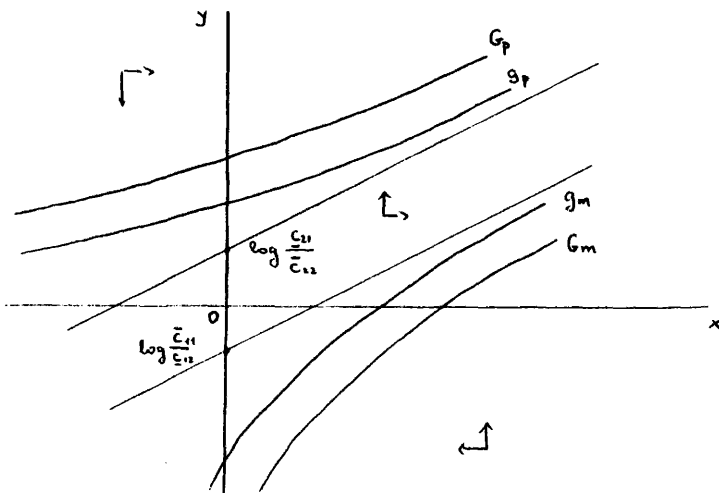


Figura 5.

La condición $\bar{c}_{11}\bar{c}_{22} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{21} < 0$ implica, por tanto, que g_p y g_m no se cortan y que, a fortiori, las bandas $g_p - G_p$ y $g_m - G_m$ tienen intersección vacía como aparece en la figura 5.

En relación con este hecho hay otro resultado que enunciamos a continuación y utilizaremos para la demostración del próximo teorema.

3.2.2. Lema.

Sea $d > 0$ la distancia entre las rectas paralelas (28) y (29). Sea $R_v \geq \log m$ arbitrario y definamos $R_{v+1}, R_{v+2}, R_{v+3}$, de la siguiente forma: R_{v+1} es la ordenada del punto de intersección de la curva g_p con la recta $x = R_v$;

R_{v+2} es la abscisa del punto de intersección de la curva g_m con la recta

$y = R_{v+1}$. R_{v+3} es la ordenada del punto de intersección de la curva g_p con la recta $x = R_{v+2}$.

(Véase la figura 6).

Existe $k > 0$ tal que $R_{v+3} - R_{v+1} > k$ y $R_{v+2} - R_v > k$ y el valor de k no depende del número de partida R_v . (Un valor de k es, por ejemplo, $k = \sqrt{2}d$).

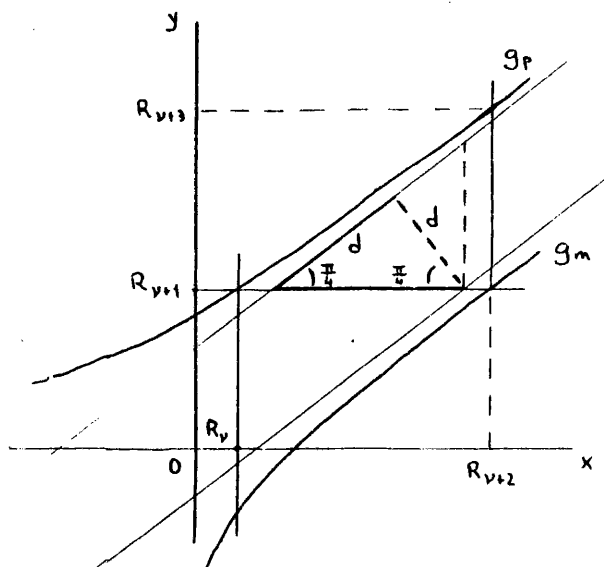


Figura 6

Demostración.

Basta observar que $R_{v+3} - R_{v+1}$ es mayor que la longitud

del segmento de la recta $x=R_{v+2}$ comprendido entre las rectas (28) y (29) y $R_{v+2}-R_v$ mayor que la longitud del segmento análogo para la recta $y=R_{v+1}$. Dichas longitudes no dependen más que de la distancia d entre las rectas (28) y (29) y valen exactamente $\sqrt{2}d$. c.q.d.

3.2.3. Teorema.

El sistema (1) con la condición

$$\bar{c}_{11}\bar{c}_{22}-\bar{c}_{12}\bar{c}_{21}<0$$

no tiene ninguna solución T-periódica no trivial.

Demostración.

Vamos a definir una sucesión decreciente de regiones $\Omega_n \subset \mathbb{R}^2$ con la propiedad de que cualquier posible solución T-periódica de (10) tiene su gráfica en $\Omega_n, \forall n$. A continuación probaremos que la intersección de todas las regiones Ω_n es vacía. Con eso se habrá demostrado que no existen soluciones T-periódicas de (10) ni, por construcción de dicho sistema (10), soluciones T-periódicas no triviales de (9).

Si definimos

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^2$$

$$V_1(x, y) = x^{-R_1} \quad R_1 = \log m$$

se tiene que

$$V_1(x, y) = \lambda > 0$$

para todo punto (x, y) tal que

$$(x, y) \in C_{1,k} \equiv \{(x, y) \in \Omega_0 \mid V_1(x, y) = k, k \leq 0\}$$

Por el lema VI.4, tales puntos son sin T-retorno y, por tanto, todas las posibles soluciones T-periódicas de (10) están en

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \Omega_0 \mid R_1 < x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1 < x\}$$

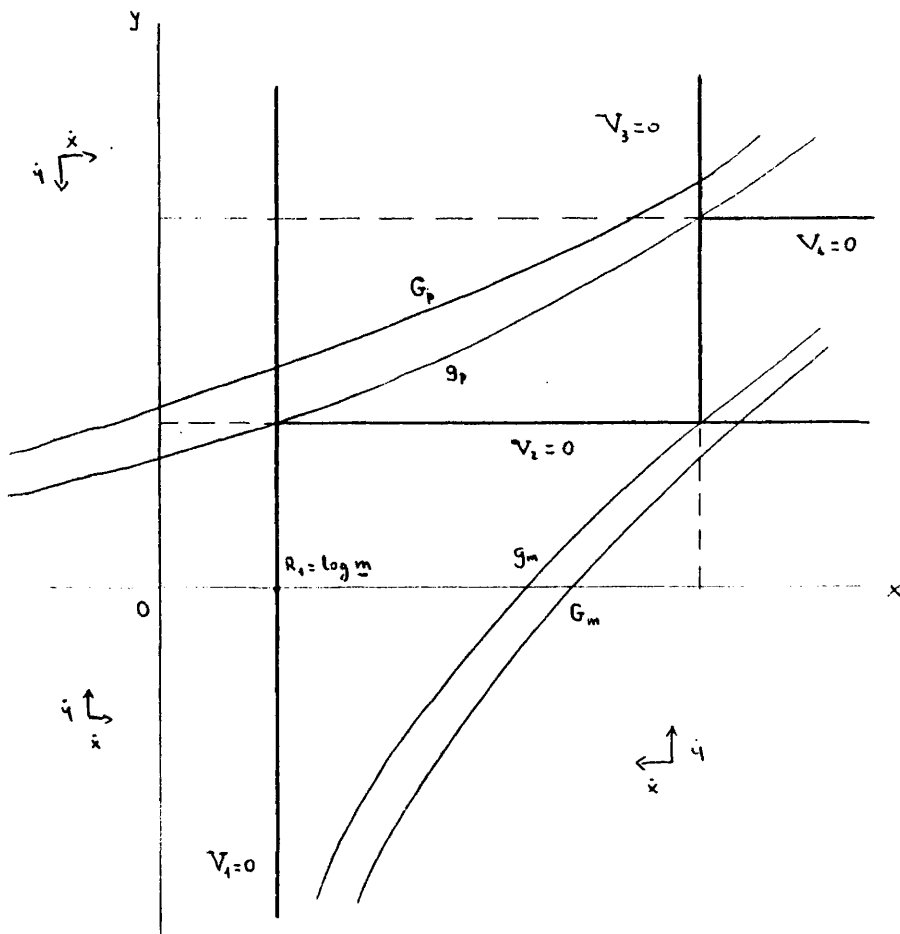


Figura 7.

Si R_2 es la ordenada del punto de intersección de la curva g_p con la recta $V_1=0$, véase la figura 7, definimos

$$V_2(x,y) = y - R_2$$

y tenemos de nuevo que

$$V_2(x, y) = \dot{y} > 0$$

$$V(x, y) \in C_{2, k} = \{(x, y) \in \Omega_1 \mid V_2(x, y) = k, k \leq 0\}$$

y que la región

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \Omega_1 \mid R_2 < y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_1 < x, R_2 < y\}$$

contiene todas las posibles soluciones T-periódicas.

V_n, Ω_n se definen a partir de V_{n-1}, Ω_{n-1} de forma análoga a la descrita para $n=1, n=2$ y, también de forma análoga, se prueba por inducción que todas las posibles soluciones T-periódicas deben estar en

$$\Omega_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_{n-1+i} < x, R_{n-i} < y, i=0 \text{ si } n \text{ es par, } i=1 \text{ si } n \text{ es impar}\}, V_n.$$

Entonces sólo queda por probar que para cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\bar{x}, \bar{y}) \notin \Omega_n.$$

Pero eso es inmediato pues basta tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{x} &\leq R_1 + mk \\ \bar{y} &\leq R_2 + mk \end{aligned}$$

con $k > 0$ la cantidad definida en el lema 3.2.2. Por el mismo lema 3.2.2. se tiene

$$\bar{x} \leq R_1 + mk < R_{2m+1}$$

$$\bar{y} \leq R_2 + mk < R_{2m+2}$$

y por tanto llamando n a $2m+2$,

$$(\bar{x}, \bar{y}) \notin \Omega_n.$$

En consecuencia, hemos probado que ningún punto (\bar{x}, \bar{y}) pertenece a todos los Ω_n , es decir, su intersección

es vacía. Como las posibles soluciones T -periódicas de (10) deberían estar en todos los Ω_n , se deduce que no existe ninguna. c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

- V.V.AMEL'KIN;I.V.GAISHUN;N.N.LADIS (1976):"Periodic solutions in the case of a constantly acting perturbation".Ordinary differential equations, páginas 1569-1573.Traducción del original ruso en *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol.11, No.12, 2115-2120, 1975.
- I.BERSHTEIN;A.HALANAY (1956): "Indice de puntos singulares y existencia de soluciones periódicas para ecuaciones con pequeños parámetros"(Ruso) *Doklady Akademi Nauk*,1956, tomo 111,nº5,923-925.
- H.J.BREMERMANN (1979):"Theory of spontaneous cell fusion. Sexuality....." *J.Theor. Biol.*(1979) 76, 311-334.
- E.A.CODDINGTON,N.LEVINSON (1955):" Theory of ordinary differential equations".Mc.Graw-Hill, New York.
- W.A.COPPEL (1965): "Stability and Asymptotic Behavior of Differential equations", D.C.Heath and Company, Boston.
- J.M.CUSHING (1976_a):"Stable limit cycles of time dependent multispecies interactions", *Mathematical Biosciences* 31, 259-273.
- J.M.CUSHING (1976_b):" Periodic solutions of Volterra's population equation with hereditary effects", *SIAM J.Appl.Math.*31 (No.2), 251-261.

- J.M.CUSHING (1977_a): "Errata to <<Periodic solutions of Volterra's population equation with hereditary effects>>", SIAM J.Appl.Math.32 (No.4), 895.
- J.M.CUSHING (1977_b): "Periodic time-dependent predator-prey systems", SIAM J.Appl.Math 32 (No.1) 82-95.
- J.M.CUSHING (1977_c): "Stable positive periodic solutions of the time-dependent logistic equation under possible hereditary influences". J.Math.Analysis and Applications 60,747-754.
- J.M.CUSHING (1977_d): "Integrodifferential equations and delay models in population dynamics", Lecture Notes in Biomathematics 20, Springer, New York.
- J.M.CUSHING (1977_e): "Bifurcation of periodic solutions of integrodifferential systems with applications to time delay models in population dynamics", SIAM J.Appl.Math. 33(No.4), 640-654.
- J.M.CUSHING (1979_a): "Nontrivial periodic solutions of some volterra integral equations", Proc.Symp. on Volterra equations, Lecture Notes in Mathematics 737, Springer, 50-66.
- J.M.CUSHING (1979_b): "Nontrivial periodic solutions of integrodifferential equations", Journal of Integral equations 1, 165-181.
- J.M.CUSHING (1980_a): "Two species competition in a periodic environment", J.Math.Biology 10, 385-400.
- J.M.CUSHING (1980_b): "Periodic Kolmogorov systems". Notas de University of Arizona, Tucson, Arizona.



- J.M.CUSHING,S.D.SIMMES (1980):" Bifurcation of asymptotically periodic solutions of Volterra integral equations".J.Integral Equations 4, 339-361.
- G.FLOQUET (1883):"Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques".Ann.Sci.École, Norm.Sup.,12,47-89.
- J.C.FRAUENTHAL (1979):"Introduction to population modeling" Education Development center, UMAP, 55 chapel St.,Newton, Massachussets.
- J.K.HALE (1969):" Ordinary differential equations", Wiley-Interscience, New York.
- J.K.HALE;A.SOMOLINOS (1982):" Competition for fluctuating nutrient". Próxima publicación.
- E.HEINZ (1959):" An elementary analytic theory of degree of mapping in n-dimensional space".J.Math.Mech. 8,231-247.
- M.W.HIRSCH (1982):" Systems of differential equations which are competitive or cooperative.I:Limit sets" SIAM J.Math.Anal. (Próxima publicación).
- M.W.HIRSCH,S.SMALE (1974):"Differential equations, dynamical systems and lineal algebra", Academic Press, New York.
- F.JOHN (1965):" Ordinary differential equations", Notas,CIMS New York University, New York.
- E.KAMKE (1932):"Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher differentialgleichungen",II, Acta Math.58, 57-85.
- A.L.KOCH (1974):" Coexistence resulting from an alternation of density dependent and density independent growth".J.Theor.Biol.44, 373-386.

- M.A.KRASNOSEL'SKII (1966): "On the theory of periodic solutions of nonautonomous differential equations" Russian Math.Surveys 21, 53-74.
- M.A.KRASNOSEL'SKII (1968): "The operator of translation along the trajectories of differential equations" Amer.Math.Soc., Providence, R.I.
- J.LERAY; J.SCHAUDER (1934): "Topologie et équations fonctionnelles", Ann.Sci.École Norm.Sup.(3) 51, 45-78.
- A.J.LOTKA (1925): "Elements of physical biology" Williams and Wilkins, Baltimore. Reeditado por Dover, New York, 1956 con el título "Elements of mathematical biology".
- J.L.MASSERA (1950): "The existence of periodic solutions of systems of differential equations". Duke Math. J. 17, 457-475.
- J.MAWHIN (1969): "Équations intégrales et solutions périodiques de systèmes différentiels non linéaires" Acad.Roy.Belg.Bull.Cl.Sci. (5) 55, 934-947.
- J.MAWHIN (1971_a): "Periodic solutions of nonlinear functional differential equations". J. Differential Equations 10, 240-261.
- J.MAWHIN (1971_b): "Équations non linéaires dans les espaces de Banach", Rapport no. 39, Sémin.Math.appl. Méc.Un.Cath.Louvain, Vander, Louvain.
- J.MAWHIN (1972): "Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory" J.Differential equations 12, 610-636.
- R.M.MAY (1973): "Stability and complexity in model ecosystems". Princeton University Press, Princeton.

- P.de MOTTONI;A.SCHIAFFINO (1981):"Competition systems with periodic coefficients:a geometric approach" J.Math.Biol.11, 319-335.
- S.ROSENBLAT (1980):" Population models in a periodically fluctuating environment", J.Math.Biol.9, 23-36.
- N.ROUCHE;J.MAWHIN (1973):" Équations différentielles ordinares". Masson et Cie., Paris.
- D.H.SATTINGER (1973): " Topics in stability and bifurcation theory",Lecture notes in Mathematics (309), Springer, Berlin.
- J.T.SCHWARTZ (1964):" Nonlinear functional analysis", New York University lecture notes, New York.
- S.SMALE (1966):" Structurally stable systems are not dense", Am.J.Math.87, 491-496.
- S.UTIDA (1957):" Cyclic fluctuations of population density intrinsic to the host-parasite system" Ecology 38, 442-449.
- V.VOLTERRA (1926):" Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi" Mem.Acad.Lincei. 2, 31-113.Traducción inglesa en Chapman (1931)."Animal ecology", New York.
- T.YOSHIZAWA (1975):" Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions", Springer, New York.

