PROCEEDINGS

OF THE

INTERNATIONAL CONGRESS

OF

MATHEMATICIANS

Cambridge, Massachussetts, U. S. A.

August 30—September 6, 1950

PUBLISHED BY THE

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

80 Waterman Street, Providence, R. I.

1952

PROCEEDINGS OF THE

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS

Cambridge, Massachusetts, U. S. A.

1950

Under the Auspices of the

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

VECTOR SPACES AND MATRICES

VARIÉTÉ FONDAMENTALE PAR RAPPORT D'UNE CORRESPONDANCE ALGÉBRIQUE

PEDRO ABELLANAS

Hypotèses et notations. Soit k un corps des constantes avec une infinité d'éléments; $\{x_0, \cdots, x_n; y_0, \cdots, y_m\}$ deux séries d'indeterminées; $A = k[x_0, \cdots, x_n; y_0, \cdots, y_m]$; $I = A(F_1(x; y), \cdots, F_\alpha(x; y))$ un idéal premier et bihomogène de A; T la correspondance algébrique déterminée par I; (ξ) et (η) éléments de A/I tels que $x_i \equiv \xi_i(I), y_j \equiv \eta_j\ (I), i = 0, \cdots, n, j = 0, \cdots, m$; V et V' les variétés originale et imâge, respectivement, avec les points généreaux $(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ et $(\eta_0, \cdots, \eta_m)$, respectivement; $r + 1$, $s + 1$, $a + 1$, et $b + 1$, les dégrés de transcendance de Σ et Σ' sur k et de Ω sur Σ et Σ' respectivement. Soient $\lambda_{i,j}$, $i, j = 0, \cdots, m$, $(m + 1)^2$ indéterminées sur Ω et $y_i = \sum_{j=0}^{m} \lambda_{ij} y_j^*$; $K = k(\lambda_{ij})$; $A^* = K[x_0, \cdots, x_n; y_0^*, \cdots, y_m^*]$, $I^* = A^*(F_1(x; \Sigma\lambda y^*), \cdots, F_\alpha(x; \Sigma\lambda y^*))$; $\bar{A} = K[\xi_0, \cdots, \xi_n; y_0^*, \cdots, y_m^*]$, $\bar{I} = \bar{A}(F_1(\xi; \Sigma\lambda y^*), \cdots, F_\alpha(\xi; \Sigma\lambda y^*))$, $\tilde{A} = K(\xi)[y_0^*, \cdots, y_m^*]$; $\tilde{I} = \tilde{A}\,\bar{I}$; $y_0^*, \cdots, y_a^*$ tous les (y^*) indépendants par rapport à $\tilde{I}$; $\hat{A} = K(\xi)[y_0^*, \cdots, y_{a+1}^*]$; $J = \tilde{I} \cap \hat{A}$; $\hat{J} = K(\xi; y_0^*, \cdots, y_a^*)[y_{a+1}^*]J$.

Resultats. THÉORÈME 1. *Si la sous-variété W de V est fondamentale* (pour la définition de ce concept voir ma mémoire: *Théorie arithmétique des correspondances algébriques*, Revista Matemática Hispano-Americana (1949)) *par rapport à W' et ceci n'ést pas fondamentale par rapport à la compossante de sa transformée dans T^{-1} qui contient à W, on a*

$$\dim (W') > \dim (W) + a - b.$$

THÉORÈME 2. *Si la correspondance algébrique T est telle que $b = 0$ et que la sous-variété fondamentale dans V', par rapport à T^{-1} est vide, on a que la condition necessaire et suffisante pour qu'une sous-variété, W, de V soit fondamentale par rapport à la composante W' de sa transformée dans T est que*

$$\dim (W') > \dim (W) + a.$$

L'idéal $\hat{J}$ est premier et principal: $\hat{J} = (\Psi)$, où

$$\Psi = H(\xi; \lambda)y_{a+1}^{*p} + a_1(\xi; \lambda; y_0^*, \cdots, y_a^*)y_{a+1}^{*p-1} + \cdots + a_p(\xi; \lambda; y_0^*, \cdots, y_a^*);$$

ce polynôme est bihomogène par rapport des (ξ) et (y^*) et il s'évanouit pour la substitution $y^* \to \eta^*$, où $\eta_i = \sum_{j=0}^{m} \alpha_{ij}\eta_j^*$. L'équation qu'on obtient par ce substitution on peut simplifier, s'il est nécessaire, et écrire dans la forme suivante

$$H_1(\xi; \lambda)\eta_{a+1}^{*p} + c_1(\xi; \lambda; \eta_0^*, \cdots, \eta_a^*)\eta_{a+1}^{*p-1} + \cdots + c_p(\xi; \lambda; \eta_0^*, \cdots, \eta_a^*) = 0$$

tel que si on représente par $\mathfrak{F}$ l'idéal qu'on obtient quand on exclut du radical de $(H_1(\xi; \lambda))$ toutes les composantes premières dont les bases appartiennent à P, on a le suivant

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que la sous-variété déterminée par l'idéal premier et homogène* β *soit fondamentale est que*

$$\mathfrak{F} \equiv 0 \ (P[\lambda]\beta).$$

COROLLAIRE. *La dimension de la variété fondamentale de* V *n'est pas supérieure à dim* $(V)-2$

UNIVERSITY OF MADRID,
MADRID, SPAIN.

SOME PROPERTIES OF THE DIEUDONNÉ DETERMINANT

WALLACE GIVENS

Let K be a division ring (= skew field), K^* the multiplicative group of its nonzero elements, and let C be the commutator subgroup of K^*. Then Dieudonné has shown [Bull. Soc. Math. France vol. 71 (1943) pp. 27–45] that a square matrix A of order m with elements in K determines a unique coset, $\Delta(A)$, of C in K^*, or determines the zero element of K if A^{-1} does not exist. It is convenient to regard the determinant $\Delta(A)$ as a "determinantal class" of elements in K rather than as an element of the quotient group K^*/C (augmented with a "zero" element).

Defining $\Delta(A)\cdot\Delta(B)$ and $\Delta(A) + \Delta(B)$ as the class of all products and sums, respectively, of an element of $\Delta(A)$ and one of $\Delta(B)$, the former is a single determinantal class and the latter is a union of such classes. Let $C = A \otimes B$ be the matrix of order mn with elements $c_{(i,\alpha)(j,\beta)} = a_{ij}b_{\alpha\beta}$ where (i, α) and (j, β) have the range $(1, 1)$ to (m, n) in some order. Then $\Delta(A \otimes B) = [\Delta(A)]^n \cdot [\Delta(B)]^m$ holds for the direct product just as in the commutative case.

If A, B, and C are of the same order and have identical elements except in the ith row (or column), where they have row (column) vectors u_1, u_2, and $u_1 + u_2$, respectively, it can be proved that $\Delta(C) \subset \Delta(A) + \Delta(B)$. The inclusion relation implies equality in the commutative case since the determinantal classes then contain only one element.

The determinantal class of A can also be defined in terms of the (always possible) factorization of A into a product of factors of the form $I_n + M$, where M is of rank one: $\Delta(A) =$ the class of all values of $\prod_{i=1}^{N}(1 + v_i u_i)$, where $A = \prod_{i=1}^{N}(I_n + u_i v_i)$, the u_i being matrices of one column and the v_i matrices of one row. This suggests an extension of the definition of determinant to matrices over a principal ideal domain.

UNIVERSITY OF TENNESSEE,
KNOXVILLE, TENN., U. S. A.