

# Utilización de material divulgativo para la enseñanza de la Topología

F. G. LUPIÁÑEZ

Departamento de Geometría y Topología  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Universidad Complutense de Madrid  
E-28040 Madrid. Spain  
fg\_lupianez@mat.ucm.es

## ABSTRACT

Se describe la experiencia didáctica de utilización de material divulgativo (artículos, libros, comics) para la enseñanza universitaria de la Topología en el primer ciclo de la titulación de Ciencias Matemáticas.

We describe the learning experience of use of popular science articles, books, and comics, for university teaching of topology in the first cycle of the degree in Mathematics.

*Key words:* Experiencia didáctica, enseñanza universitaria, Topología, material didáctico, divulgación matemática

*2010 Mathematics Subject Classification:* 97C70,54D99

En los estudios de Licenciatura (o Grado) en Matemáticas, en España, desde hace más de 10 años hay una asignatura de Introducción a la Topología en Primer Ciclo, que tiene carácter troncal, es decir, es absolutamente obligatoria para todos los alumnos que cursen esa titulación. En los planes de estudios anteriores, esa situación no se daba. La Topología sólo la cursaban los alumnos de las especialidades de Matemática fundamental y de Metodología (en las universidades en que esta última especialidad existía). La situación actual origina un grave problema de fracaso entre los estudiantes, ya que en las aulas donde se explica Topología hay alumnos de 2º o 3er curso de carrera que, posteriormente se inclinarán, unos hacia Matemática fundamental, pero otros a cosas tales como Estadística, Matemática Computacional, Astronomía... especialidades en las que es bastante dudosa la utilidad de la Topología. Además, el carácter abstracto de los conceptos que aparecen en la asignatura, unido a la gran abundancia de conceptos nuevos que presentamos a los estudiantes a lo largo del curso, les abrumba.

Ya en las primeras semanas de curso se advierte un abandono de la asistencia a clase de Topología por parte de bastantes alumnos, puesto que es algo que, en muchos casos, no entienden y que ven alejado de aplicaciones prácticas.

En el presente curso, he comenzado a tomar medidas directas para motivar a los alumnos al estudio de la Topología, independientemente de la especialidad matemática por la que luego se inclinen. El hecho de hacerlo en este curso precisamente es debido al cambio de plan de estudios (de Licenciatura a Grado) que se está realizando y que, en la actualidad, está en el 3er curso. En los estudios de Grado existe la posibilidad de dedicar alguna de las clases prácticas a “seminario”. Yo he tomado la decisión de hacer consistir esos seminarios de alguna de las horas de prácticas en la exposición y comentario de material divulgativo sobre Topología a nivel de primer ciclo. Aunque pueda, en principio, parecer raro, este tipo de material (libros, artículos, comics) es relativamente abundante, bonito y motivador para los estudiantes que se inician en el estudio de la Topología. El procedimiento práctico que se puede seguir en las clases podría variar en función del número de alumnos presentes en el aula. Si hubiera muchos alumnos, el profesor podría realizar transparencias de las páginas del libro o artículo que piensa usar en la clase de ese día e ir, en su caso, aclarando o comentando en la pizarra los conceptos que vayan apareciendo en ese material divulgativo. Si el número de alumnos presentes en el aula es pequeño, el profesor puede distribuir entre los alumnos fotocopias del material que va a usar en la clase de ese día y, luego, ir comentando o aclarando en la pizarra lo que estime conveniente. Mi experiencia es que, por desgracia, si a los alumnos se les avisa de que la clase práctica del día siguiente va a consistir en la exposición y comentario en clase de material divulgativo sobre Topología, la asistencia a esa clase práctica baja considerablemente. Eso, parece que no tiene arreglo, puesto que hay alumnos que se desentienden de aquello que los profesores no le van a preguntar en los exámenes.

El material divulgativo existente sobre Topología, no cubre todos los temas de la asignatura que se explica en el Grado, pero hay variedad suficiente para amenizar varios de los conceptos o espacios topológicos que aparecen a lo largo del curso. Concretamente, se expone material sobre espacios cociente interesantes, como la banda de Moebius y la botella de Klein; se motiva la definición de curva topológica mostrando previamente la curva de Peano, la alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger; se muestran aproximaciones a la clasificación de las superficies compactas,...

A continuación, vamos a mostrar los diversos materiales utilizados.

### 1. Sobre la banda de Moebius y la botella de Klein

Aquí he utilizado, fundamentalmente los artículos divulgativos realizados por la Profa. M. Macho Stadler [7,8,9,10] y el comic “El Topologicón” de J. P. Petit [11] del cual, como ejemplo, presento una página (véanse los Anexos 1, 2, 3 y 4).

### 2. Sobre el concepto de curva

Aquí he utilizado principalmente el libro de Boltyanskii y Efremovich [1], y el material elaborado por dos profesores de la Universidad Politécnica de Madrid para un curso de fractales en la red (véase el Anexo 5).

### 3. Clasificación de superficies compactas

Exposiciones divulgativas de la clasificación topológica de superficies compactas se pueden encontrar en los ya citados libro de Boltyanskii y Efremovich [1] y artículo de Macho Stadler [7], donde hay dibujos con utilidad didáctica para esta asignatura.

#### 4. Generalidades sobre Topología

El comic “El Topologicón” [11] inicia al alumno en las aplicaciones de la Topología a otras ramas de la Matemática. Otros libros con dibujos bonitos y atrayentes para los alumnos, son [2], [3], [4], [12] y [13].

Con este material se trata de motivar a los alumnos para el estudio de la Topología en 1er ciclo y, en lo posible, entusiasmarlos para que continúen con estudios topológicos más avanzados.

Siguen los anexos mencionados en el texto.

## ANEXO 1



Möbius, la banda y Listing

Si se toma una tira de papel y se pegan los extremos como muestra la figura de debajo, se obtiene un cilindro, es decir, una superficie que tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados (la cara interior y la exterior de la figura).

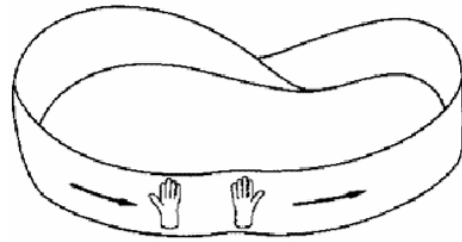


Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos 180 grados, el objeto que se obtiene es una banda de Möbius.



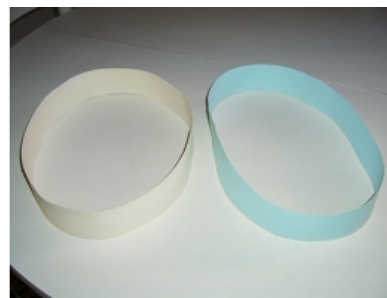
La banda de Möbius posee dimensión dos –como el cilindro–, pero sorprendentemente tiene un único borde (el doble de largo: su longitud es la suma de las de las dos circunferencias que forman el borde del cilindro) y una única cara. Para comprobarlo, basta con pasar un dedo por el borde de la cinta, hasta verificar que se ha recorrido todo sin levantarla en ningún momento; y pasar un lápiz por la cara de la banda, constatando que al regresar al punto de partida, las supuestas dos caras del objeto han quedado marcadas.

La banda de Möbius es no orientable: todas sus propiedades singulares (y de cualquier otro objeto que “la contenga”) se derivan de esta última propiedad. En efecto, si se dibuja una mano sobre la banda y se mueve a lo largo de su única cara, al regresar al punto de partida, ¡la mano ha cambiado de sentido!

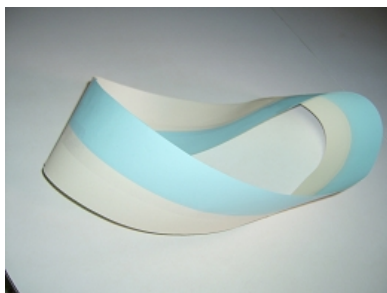


¿Qué sucede si antes de pegar los extremos de la banda de papel se gira uno de ellos 360 grados? Se obtiene (*topológicamente*) un cilindro, ya que este objeto y el obtenido al pegar sin realizar ningún giro son *homeomorfos*. Es fácil comprobar que, de hecho, sólo hay dos posibilidades al pegar una banda por dos de sus extremos opuestos: o bien se obtiene un cilindro (si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo par de 180 grados) o bien una banda de Möbius (en caso contrario).

Vamos a hacer un par de experimentos de extraño resultado. Si cortamos por la altura mitad un cilindro, se obtienen dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original:



Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, parece que lo lógico sería obtener dos bandas de Möbius más pequeñas. Pero, no... se obtiene una única cinta, que es un cilindro, pues posee dos caras.



## ANEXO 2

Se pueden realizar algunas experiencias con la banda de Möbius, que dan resultados paradójicos:

- Si se corta la banda por su mitad, como muestra la Figura 41, aparece una cinta el doble de larga, que contiene 4 semivuelatas, dos caras y dos bordes, luego no es una banda de Möbius, sino un cilindro;
- Si se corta la banda de Möbius a la altura  $1/3$ , se obtienen dos bandas de Möbius entrelazadas, una más larga que otra: la altura  $1/2$  es la única *especial*.

La banda de Möbius ha inspirado a artistas y científicos, como muestran los ejemplos que siguen.



El dibujante e ilustrador Jean Giraud *Möbius* (1938- ), y su autocaricatura, portada del libro *Mi doble y yo*.



*Las hormigas de Escher*.



Elisabeth Zimmermann y sus bufandas de Möbius.



Figura 42.

ANEXO 3

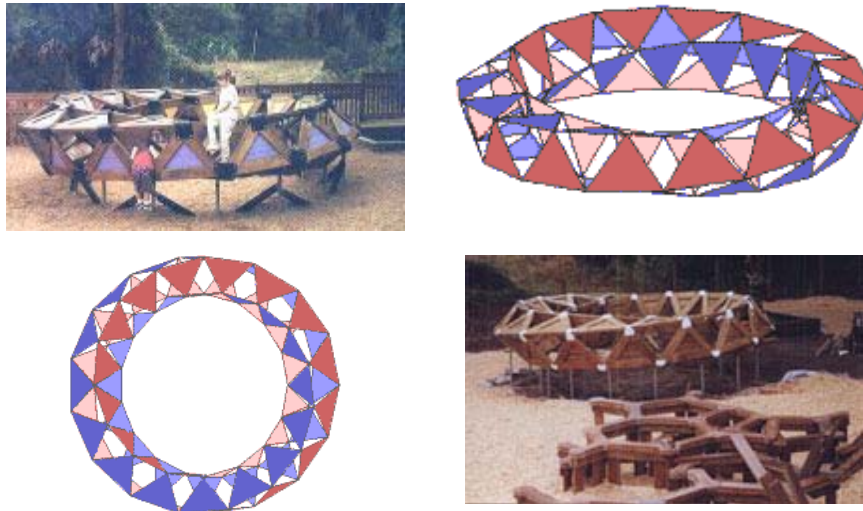


Figura 44.

10.2. La botella de Klein

La *botella de Klein* es una superficie obtenida al identificar los lados de un cuadrado como muestra la Figura 45:

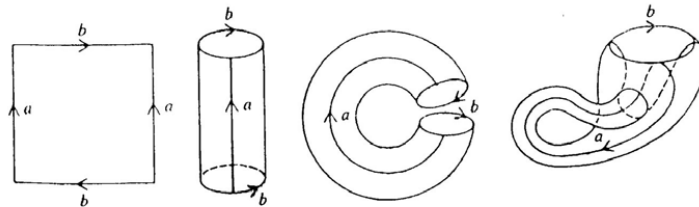
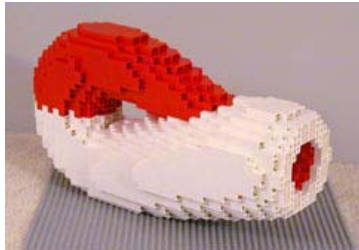


Figura 45.

Esta figura no puede construirse en el espacio de dimensión tres sin autointersecarse, pero sí que está contenida en el espacio de dimensión cuatro.

La botella de Klein presenta varias propiedades paradójicas: posee **un** solo lado (no tiene cara interior ni cara exterior) y **no** tiene borde: de hecho, puede obtenerse esta superficie a partir de dos bandas de Möbius, y por ello hereda sus **extrañas** propiedades.

La botella de Klein ha servido de modelo para muchas construcciones extraordinarias, como muestran las imágenes que aparecen a continuación.



La botella de Klein de LEGO de Andrew Lipson.

La botella de Klein de origami de Robert Lang.

Figura 46.

En la Figura 47 aparecen algunas botellas de Klein de Cliff Stoll, de la *Acme Klein Bottle*.



Figura 47.

ANEXO 4



## ANEXO 5

**Example 18** The Polish mathematician Sierpiński constructed an interesting curve. We divide a square into nine equal squares and discard the central square (Figure 39a). Then we divide each of the remaining squares into nine equal squares and again discard the central square (Figure 39b). After one more such operation we arrive at the figure shown in Figure 39c. In the limit we obtain a one-dimensional figure  $C$ , i.e., a curve (known as the *Sierpiński carpet*).

The figure  $C$  is a *universal plane curve*: If a curve  $l$  can be embedded in the plane, then it can be embedded in the *Sierpiński carpet*, i.e., there is a curve  $l' \subseteq C$  that is homeomorphic to  $l$ . It is clear that a curve that cannot be embedded in the

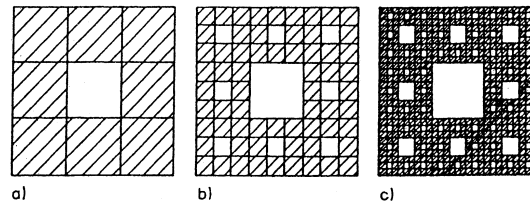


FIGURE 39.

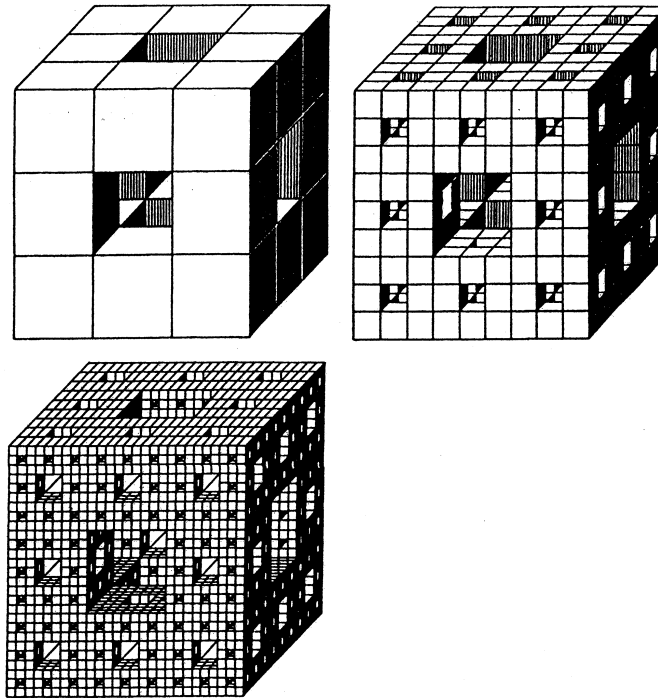


FIGURE 40.

plane cannot be embedded in the Sierpiński carpet either. But as was shown by the Austrian mathematician Menger, there is a curve in space, analogous to the Sierpiński carpet (Figure 40), in which any curve can be embedded.

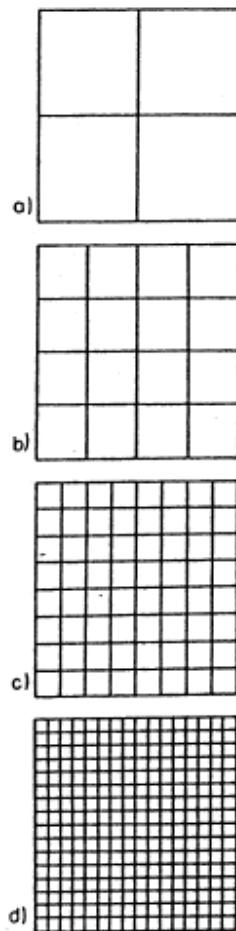


FIGURE 42.

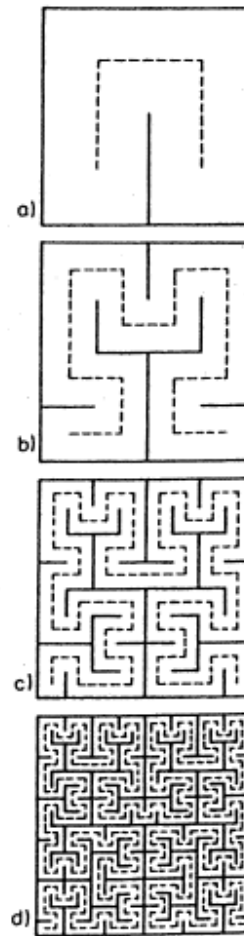


FIGURE 43.

To obtain a Peano curve we construct in a square  $Q$  ever more winding strips and take the limit of their midlines. This is a shorthand description of the following procedure: We divide the square into 4, 16, 64, ...,  $4^n$ , ... congruent squares (Figure 42). At each stage of subdivision we remove some of the sides of the "subsquares" of the square. The leftover sides form non-removable partitions that determine the successive strips. In each strip we introduce its midline. (The first few winding strips and their midlines are shown in Figure 43; the midlines are the broken lines.) The limit of these midlines is a path that fills the whole square, i.e., a Peano curve.

## Referencias

- [1] Boltyanskii, V.G. and Efremovich, V.A. (2001). *Intuitive combinatorial Topology*. New York: Springer.
- [2] Carlson, S.C. (2001). *Topology of surfaces, knots, and manifolds: a first undergraduate course*. New York: John Wiley & Sons.
- [3] Francis, G.K. (2007). *A topological picturebook*. New York: Springer.
- [4] Huggett, S. and Jordan, D. (2001). *A topological aperitif*. New York: Springer.
- [5] Luque, B. y Agea, A. Curva de Hilbert, <http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/4.html> en “Fractales en la red”. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- [6] Luque, B. y Agea, A. Alfombra de Sierpinski y Esponja de Menger, <http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/5.html> en “Fractales en la red”. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- [7] Macho Stadler, M. (2002). ¿Que es la Topología? *Sigma*, n° 20, 63-77.
- [8] Macho Stadler, M. (2006). La paradoja en la ciencia y el arte. *Matematicalia*, Vol 2, n° 2.
- [9] Macho Stadler, M. (2008). Las sorprendentes aplicaciones de la banda de Möbius, en “Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y en la Arquitectura”. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, pp. 29-61.
- [10] Macho Stadler, M.(2009). Listing, Möbius y su famosa banda, en “Un paseo por la Geometría”. Bilbao: Universidad del País Vasco, pp. 59-78.
- [11] Petit, J-P. (2006) El Topologicón, *Savoir sans frontières*, en <http://www.jp-petit.com>
- [12] Prasolov, V.V.(1995). *Intuitive Topology*. Providence: AMS.
- [13] Sauvy, J. and S. (1974). *The child’s discovery of space: from hopscotch to mazes: an introduction to intuitive Topology*. Harmondsworth: Penguin Books.