Los orígenes de la teoría de haces

CONCEPCIÓN ROMO SANTOS
Departamento de Algebra
Universidad Complutense de Madrid

*Dedicado al profesor Etayo Miqueo
como testimonio de afecto y reconocimiento
a su contribución al desarrollo de las Matemáticas en España*

INTRODUCCION

La generalización del concepto de variedad algebraica, lleva a la construcción de Grothendieck de la Geometría Algebraica, utilizando el lenguaje de los esquemas.

En esta construcción, el Algebra y la Topología, intervienen tan estrechamente unidas, que es con frecuencia difícil deslindar sus campos. La teoría de haces proporciona el lenguaje indispensable para interpretar en términos «geométricos» las nociones esenciales del Algebra Conmutativa, y para «globalizarlas» y desempeña un papel fundamental en la elaboración actual de la Geometría Algebraica. Y en su base, está el concepto de haz, donde aparecen íntimamente ligados el aspecto algebraico y el topológico.

Sin entrar en una discusión histórica, indicamos que un cierto número de ideas básicas de la teoría de haces y sucesiones espectrales, fue introducido por Leray a partir de 1945. La noción general de sucesión espectral, fue definida explícitamente por Koszul y la primera exposición de la teoría de haces, sistematizada, se debe a Cartan.

La teoría de haces, ha alcanzado un gran desarrollo, llegando a un grado de generalidad máxima. Esta generalidad, se ha revelado muy útil: sus métodos son, en muchos aspectos, considerablemente más sencillos que los empleados anteriormente. El progreso más importante consiste probablemente en haber podido construir una teoría razonable, válida para todo espacio topológico. Esta construcción se debe a Grothendieck. Sin embargo, en opinión de Godement, parece justo reconocer que la cuestión posiblemente ni siquiera se hubiese planteado, sin los trabajos de Serre sobre las variedades algebraicas.

La topología de Zariski de una variedad abstracta es perfectamente apropiada para aplicarle ciertas técnicas de topología algebraica y dar lugar a una teoría cohomológica. Esta topología permite definir en perfecta analogía con el caso de variedades diferenciales o analíticas, la noción de «espacio fibrado». Poco después de Weil, Serre tuvo la idea de extender a estas variedades, así topologizadas, la teoría de haces coherentes. La definición de variedad algebraica que da Serre es la que se presta más naturalmente a la extensión de este concepto, llevada a cabo por Grothendieck. La idea de definir la estructura de variedad, dando un haz de anillos, es anterior a Serre. Se debe a Cartan, que la tomó como base para su teoría de espacios analíticos. Serre expone así sus puntos de vista:

«Los métodos homológicos y, particularmente la teoría de haces, desempeña un papel de importancia creciente, no sólo en teoría de funciones de varias variables complejas, sino también en Geometría Algebraica clásica (basta recordar los trabajos de Kodaira-Spencer, sobre el teorema de Riemann-Rock). El carácter algebraico de estos métodos permitía pensar que era posible aplicarlos igualmente a Geometría Algebraica abstracta».

Grothendieck considera este trabajo de Serre, como una exposición intermedia entre el punto de vista clásico y el punto de vista de los esquemas.

El objeto de este trabajo es estudiar los fundamentos de la teoría de haces y con el fin de clarificar las ideas estudiaremos los cuatro apartados siguientes:

1. La categoría de los prehaces.
2. La categoría de los haces.
3. Imagen directa de un prehaz. Comportamiento en las fibras.
4. Naturaleza local de un haz.

1. LA CATEGORIA DE LOS PREHACES

Definición de prehaz. Definición 1-1

Sea X espacio topológico. Si U, V $\in \tau$ (X), definiremos los morfismos de U en V de la manera siguiente

$$[U,V] \to \begin{cases} \varnothing & U \subset V \\ [i], & U \subset V,\ i: U \to V, \text{ inclusión de U en V} \end{cases}$$

Entonces $\{\tau(X), [\ ]\}$ es una categoría. Sea C una categoría cualquiera. Lllamaremos prehaz sobre X con valores en C a todo functor contravariante de la categoría $\{\tau(X), [\ ]\}$ en la categoría C.

Sea P prehaz sobre X con valores en C, si U $\subset$ V, al morfismo que existe de P(V) en P(U) le llamamos restricción de V a U y se representará por p_v^u

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & P(U) \arrow[d, "p_v^u"] \\ V \arrow[r] & P(V) \end{tikzcd}$$

Se verifica que $p_u^u = 1_{P(U)}$, $\forall U \in \tau$ (X)

Si U $\subset$ V $\subset$ W se verifica que $p_v^u \cdot p_w^v = p_w^u$

$$\begin{tikzcd} P(U) & \\ P(V) \arrow[u, "p_v^u"] & P(W) \arrow[l] \arrow[ul, "p_w^u"'] \end{tikzcd}$$

Definición 1-2

Llamaremos morfismo entre dos prehaces P y P' sobre X con valores en C a toda traslación natural entre ellos. Así si φ: $P \to P'$ es un morfismo entre dos prehaces, $\varphi = \{\varphi_u\}_{u\in\tau(X)}$ verificándose:

1. φ_u: P(U) $\to$ P'(U), $\forall$U $\in \tau$ (X)
2. Si U $\subset$ V, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r, "\varphi_u"] & P'(U) \\ P(V) \arrow[u, "p_v^u"] \arrow[r, "\varphi_v"'] & P'(V) \arrow[u, "p'^u_v"'] \end{tikzcd}$$

Llamaremos P(X,C) a la categoría de los prehaces sobre X con valores en C.

Nota 1.3. Definiremos un functor de la categoría C en la categoría P(X,C) de la manera siguiente:

$\forall$A $\in \theta$ C; definiremos $i_A \in P$(X,C) construido así:

$\forall$U $\in \tau$ (X), i_A (U) = A y si U,V $\in \tau$ (X), U $\subset$ V entonces $p_v^u = 1_A$

Si A, B $\in \theta$ C, a todo morfismo A $\to$ B le corresponde un morfismo $i_A \to i_B$, ya que $\forall$U $\in \tau$ (X), i_A (U) = A, i_B (U) = B y el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Hemos definido un functor entre las categoría $C \xrightarrow{i} P$(X,C), este functor es de inmersión (es fiel y transforma morfismos distintos en morfismos distintos), es decir la aplicación siguiente es inyectiva

$$[A,B] \to [i_A,i_B]$$
$$\varphi \to i(\varphi)$$

De esta manera las propiedades de C se pueden trasladar a P(X,C). Se verifican las siguientes:

(i) Si C es una categoría con imágenes, núcleos, conúcleos, coimágenes $\Rightarrow$ P(X,C) es una categoría con imágenes, núcleos, conúcleos, coimágenes.

(ii) C es una categoría aditiva $\Rightarrow$ $P(X,C)$ es una categoría aditiva.
(iii) C es una categoría exacta $\Rightarrow$ $P(X,C)$ es una categoría exacta.
(iv) C es una categoría abeliana $\Rightarrow$ $P(X,C)$ es una categoría abeliana.
De todas estas propiedades demostraremos la siguiente:

Proposición 1-4

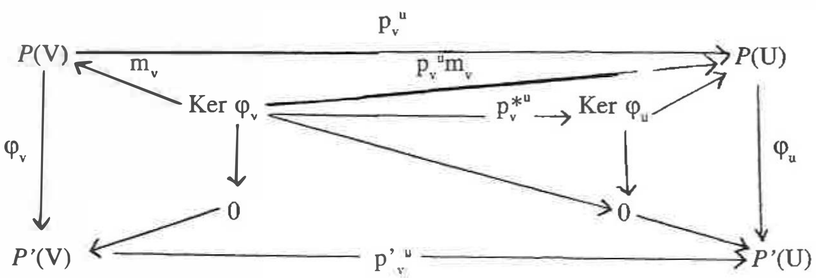
C es una categoría que posee núcleos $\Rightarrow$ $P(X,C)$ es una categoría que posee núcleos.

Demostración

Sean P, P' prehaces, $\varphi: P \to P'$ morfismo. Entonces $\forall U \in \tau(X)$, podemos construir el morfismo $\varphi_u: P(U) \to P'(U)$ y sabemos que existe Ker φ_u siendo el diagrama siguiente un diagrama cartesiano o tirador

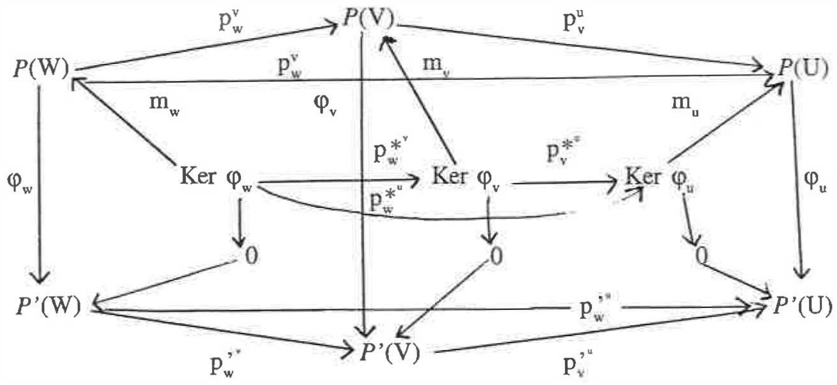
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\ \varphi_u \arrow[r, "m_u"] \arrow[d] & P(U) \arrow[d, "\varphi_u"] \\ 0 \arrow[r] & P'(U) \end{tikzcd}$$

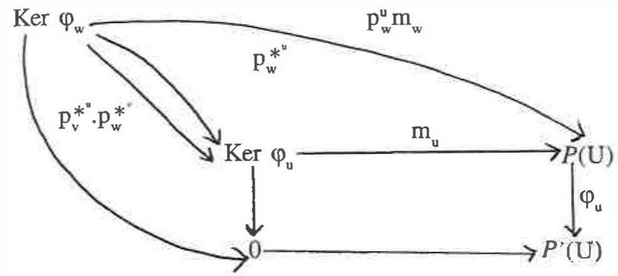
Si U, V $\in \tau$ (X) y U $\subset$ V, podemos construir el diagrama siguiente



$$\varphi_u p_v{}^u m_v = p'_v{}^u \varphi_v m_v = 0$$

Por ser tirador $\$p_v{*}^u$: Ker j_v ® Ker j_u
si U, V, W $\in \tau$ (X), U $\subset$ V $\subset$ W, construiremos el diagrama siguiente





$p^{*u}_w = p^{*u}_v . p^{*v}_w$

en virtud de la unicidad del morfismo.

De todo lo anterior se deduce que podemos construir el prehaz siguiente
Ker φ: u $\to$ Ker φ_u, $\forall U \in \tau$ (X) y este prehaz es efectivamente el núcleo, ya que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\ \varphi \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d, "\varphi"] \\ 0 \arrow[r] & P' \end{tikzcd}$$

pues son conmutativos $\forall$U los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\ \varphi_u \arrow[r] \arrow[d] & P(U) \arrow[d, "\varphi_u"] \\ 0 \arrow[r] & P'(U) \end{tikzcd}$$

y si G es un prehaz cualquiera, y h un morfismo tal que

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "h"] \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[dd, bend right] & & P \arrow[dd, "\varphi"] \\ \mathrm{Ker}\ \varphi \arrow[rru, "m"] \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[rr] & & P' \end{tikzcd}$$

$\varphi h = 0$, existe un morfismo único k | mk = h

La existencia de K se deduce de que $\forall U \in \tau(X)$, $\exists$ los morfismos K_u de $G(U)$ en Ker φ_u

$$\begin{tikzcd} G(U) \arrow[rrd] \arrow[rd, dashed, "K_u"] \arrow[rdd, bend right] & & \\ & \mathrm{Ker}\ \varphi_u \arrow[r] \arrow[d] & P(U) \arrow[d, "\varphi_u"] \\ & 0 \arrow[r] & P'(U) \end{tikzcd}$$

2. LA CATEGORIA DE LOS HACES

Definición 2-1

Definición de solución de problema universal

Sea C categoría $(A_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in I\times I}$ familia de objetos de C tales que $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, $\forall(\alpha,\beta) \in I \times I$; $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ otra familia de objetos de C; $(p_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in I\times I}$ familia de morfismos $A_\alpha \to A_{\alpha\beta}$. Llamaremos solución del problema universal planteado por las familias $(A_\alpha)(A_{\alpha\beta})(p_{\alpha\beta})$ a un par compuesto por $A \in \theta\, C$ y una familia de morfismos $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$, $p_\alpha: A \to A_\alpha$ de manera que la correspondencia definida $\forall B \in \theta\, C$

$$[B,A] \to \pi_{\alpha\in I}\, [B,A_\alpha]$$

$$p \to (p_\alpha \cdot p)$$

es biyectiva sobre el subconjunto de $\pi_{\alpha\in I}\, [B,A_\alpha]$ formado por los elementos $(\overline{p}_\alpha)$ tales que $p_{\alpha\beta}\overline{p}_\alpha = p_{\beta\alpha}\overline{p}_\beta$.

Definición 2-2

Definición de haz según Grothendieck

Sea X espacio topológico, C categoría con solución de problemas universales. Diremos que un prehaz sobre X con valores en C es un haz si verifica la condición siguiente [condición (F)]: $\forall$ abierto $U \in \tau(X)$, $\forall$ recubrimiento de U por abiertos contenidos en él, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$; $(P(U), p_u^{u_\alpha})$ es solución del problema universal planteado por las familias: $\{P(U_\alpha)\}\{P(U_\alpha \cap U_\beta\}\ \{p_{u_\alpha}^{u_\alpha\cap u_\beta}\}$.

Haces con valores en la categoría de conjuntos (Godement)

Definición 2-3

Diremos que un prehaz sobre un espacio topológico X con valores en la categoría de conjuntos C es un haz si y sólo si satisface las condiciones siguientes:

G-1. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia arbitraria de abiertos de X y $U = U_{\alpha\in I}\, U_\alpha$ se verifica que $\forall(S_\alpha)_{\alpha\in I}$, $S_\alpha \in P(U_\alpha)$, $\forall\alpha \in I$ y $p_{u_\alpha\cap u_\beta}^{u_\alpha} S_\alpha = p_{u_\alpha\cap u_\beta}^{u_\beta} S_\beta \Rightarrow \exists\, S \in P(U)$ tal que $p_{u_\alpha}^{u}(S) = S_\alpha$, $\forall\alpha \in I$.

G-2. Si $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una familia arbitraria de abiertos de X, $U = \cup U_\alpha$. Si S, S' $\in P(U)$ son tales que $p_{u_\alpha}^{u}(S) = p_{u_\alpha}^{u}(S')$, $\forall\alpha \in I \Rightarrow S = S'$.

Consecuencia 2-4. Si P es un haz de conjuntos sobre X tal que $\exists U \in \tau(X)$ con $P(U) \neq \varnothing$, entonces $P(\varnothing)$ posee sólo un elemento.

Teorema 2-5

Teorema de equivalencia

Un haz de conjuntos definido según Grothendieck es un haz de conjuntos definido según Godement si y sólo si $F(\varnothing)$ consta de un sólo elemento.

Demostración

Haz de Godement $\Rightarrow$ haz de Grothendieck y $F(\varnothing)$ es un elemento único.

Sea $U \in \tau(X)$, $U = \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$, $U_\alpha \subset U$.

Sea C conjunto, familia aplicaciones $C \xrightarrow{a_\alpha} F(U_\alpha)$ de forma que todos los diagramas siguientes sean conmutativos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a_\alpha"] \arrow[d, "a_\beta"'] & F(U_\alpha) \arrow[d, "p^{u_\alpha}_{u_\alpha\cup u_\beta}"] \\ F(U_\beta) \arrow[r, "p^{u_\beta}_{u_\alpha\cap u_\beta}"] & F(U_\alpha \cap U_\beta) \end{tikzcd}$$

En estas condiciones existe morfismo C $\rightarrow$ F(U) que hace conmutativos los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "a_\alpha"] \arrow[dr] & & F(U_\alpha) \\ & F(U) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Sea c $\in$ C, consideremos $\{a_\alpha(c)\}_{\alpha\in I}$, $a_\alpha(c) \in F(U_\alpha)$

$$p_{u_\alpha\cap u_\beta}^{u_\alpha}\, a_\alpha(c) = p_{u_\alpha\cap u_\beta}^{u_\beta}\, a_\beta(c)$$

por G-1, $\exists$ a(c) $\in$ F(u)

$$p_{u_\alpha}^{u}\, a(c) = a_\alpha(c);\ \forall\alpha \in I$$

por G-2, a(c) es único

Si $\exists$ a' | $p_{u_\alpha}^{u}\, a'(c) = a_\alpha(c) = p_{u_\alpha}^{u}\, a(c)$

$$p^{u}_{u_\alpha}(\underbrace{a'(c)}_{s}) = p^{u}_{u_\alpha}(\underbrace{a(c)}_{s'}) \overset{G-2}{\underset{\forall\alpha\in I}{\Rightarrow}} a(c) = a'(c),\ \forall c \in C \Rightarrow a = a'.$$

F haz de Grothendieck, $F(\emptyset) = \{x\} \Rightarrow F$ haz de Godement.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$

$s_\alpha \in F(U_\alpha)$, $p_{u_\alpha\cap u_\beta}^{u_\alpha}\, s_\alpha = p_{u_\alpha\cap u_\beta}^{u_\beta}\, s_\beta$

$$\begin{tikzcd} \{y\} \arrow[drr, "\alpha"] \arrow[dr] \arrow[ddr, "\beta"'] & & \\ & F(U) \arrow[r] \arrow[d] & F(U_\alpha) \arrow[d] \\ & F(U_\beta) \arrow[r] & F(U_\alpha \cap U_\beta) \end{tikzcd}$$

$\{y\} \overset{\alpha}{\rightarrow} F(U_\alpha)$

$y \rightarrow s_\alpha$

$\exists$h: $\{y\} \rightarrow F(U)$ tal que $p^{u}_{u_\alpha} h = \alpha$, $p^{u}_{u_\alpha} h(y) = \alpha(y) = s_\alpha$, $\forall\alpha$ luego se verifica G-1.

La aplicación es única luego también se verifica G-2.

$$S, S' \in F(U),\ p^{u}_{u_\alpha}(s) = p^{u}_{u_\alpha}(s'),\ \forall\alpha \in I$$

$\{y\} \overset{\alpha}{\rightarrow} F(U_\alpha)$

$y \rightarrow p^{u}_{u_\alpha}(s) = p^{u}_{u_\alpha}(s')$

por la condición F $\Rightarrow$ s = s'

3. IMAGEN DIRECTA DE UN PREHAZ. COMPORTAMIENTO EN LAS FIBRAS

Nota 3.1. Construcción del functor fibra

Sea C categoría que posea límites inductivos filtrantes, $P \in P(X,C)$. Sea x $\in$ X $\{P(U), p_v^{u}\}$ es un sistema inductivo filtrante, construimos el límite inductivo filtrante que será la fibra en el punto x, $P_x = \underset{x\in U}{\overset{\lim}{\rightarrow}} P(U)$.

Si P y P' son dos prehaces, $\varphi \in$ Hom (P,P'), entonces $\forall$U consideramos φ_u: $P(u) \rightarrow P'(U)$, podemos construir φ_x: $P_x \rightarrow P'_x$, luego hemos definido un functor (el functor fibra): $P(X,C) \rightarrow C$.

Construcción de φ_x

$$\begin{tikzcd} P(V) \arrow[rrr, "\varphi_v"] \arrow[dr, "a_1"] \arrow[dd, "p_v^u"'] & & & P'(V) \arrow[dl, "b_1"'] \arrow[dd, "p'^u_v"] \\ & P_x \arrow[r, "\varphi_x"] & P'_x & \\ P(U) \arrow[rrr, "\varphi_u"'] \arrow[ur, "a_2"] & & & P'(U) \arrow[ul, "b_2"] \end{tikzcd}$$

Consideramos los morfismos $\{b_1\varphi_v, b_2\varphi_u\}$

$b_2\varphi_u p_v^{u} = b_2 p'^{u}_{v}\varphi_v = b_1\varphi_v$

luego $\exists$' · φ_x: $P_x \rightarrow P'_x$ tal que

$\varphi_x a_1 = b_1\varphi_v$

$\varphi_x a_2 = b_2\varphi_u$

Definición 3.2

Definición de imagen directa de un prehaz

Sea C categoría; X, Y espacios topológicos; ψ aplicación continua X $\rightarrow$ Y; $P \in P(X,C)$. Sea U abierto de Y, $\psi^{-1}(U) \in \tau(X)$ y podemos definir la correspondencia

$$\tau(Y) \rightarrow \theta C$$
$$V \rightarrow P(\psi^{-1}(V))$$

Si $V \subset V' \Rightarrow \psi^{-1}(V) \subset \psi^{-1}(V')$ y por lo tanto existe el morfismo $P(\psi^{-1}(V')) \to P(\psi^{-1}(V))$. Luego hemos definido un prehaz $\psi_*(P) \in P(Y,C)$ que llamaremos imagen directa de P mediante ψ.

Si tenemos un morfismo entre dos prehaces $P \to P'$, consideremos las imágenes directas $\psi_*(P)$, $\psi_*(P')$

Si $U \in \tau(Y)$

$$\begin{array}{c} \psi_*(P)(U) = P(\psi^{-1}(U)) \\ \downarrow \ \varphi_{\psi^{-1}(U)} \\ \psi_*(P')(U) = P'(\psi^{-1}(U)) \end{array}$$

Si $U \subset V$, $\psi^{-1}(U) \subset \psi^{-1}(V)$, luego el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \psi_*(P)(U) = P(\psi^{-1}(U)) & \to & \psi_*(P')(U) = P'(\psi^{-1}(U)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi_*(P)(V) = P(\psi^{-1}(V)) & \to & \psi_*(P')(V) = P'(\psi^{-1}(V)) \end{array}$$

Es un functor. Hemos demostrado la proposición siguiente:

Proposición 3-3. A cada aplicación continua $\psi: X \to Y$ se le puede asociar un functor covariante de $P(X,C) \to P(Y,C)$ al que llamaremos imagen directa.

Nota 3-4. Se verifica que si ψ es una aplicación continua $X \to Y$, ψ' es una aplicación continua $Y \to Z$, entonces $(\psi' \cdot \psi)_* = \psi'_* \cdot \psi_*$. Luego podemos definir un functor entre las categorías siguientes:

{Espacios topológicos, aplicaciones continuas $\to P$

(objetos, las categorías de los prehaces y morfismos ψ_*)

$$X \to P(X,C)$$

$$\psi \text{ continua: } X \to Y \to \psi_* = P(X,C) \to P(Y,C)$$

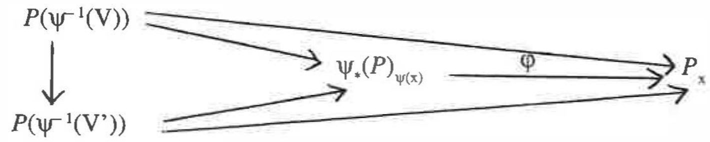
$$\psi'\psi \to \psi'_* \cdot \psi_*$$

Nota 3-5. Comportamiento en las fibras

Sean X,Y espacios topológicos, ψ aplicación continua $X \to Y$, C categoría que posee límites inductivos, $P \in P(X,C)$, $\psi_*(P) \in P(Y,C)$; Si $x \in X$, $\psi(x) \in Y$, la fira de $\psi_*(P)$ en $\psi(x)$ será

$$\psi_*(P)_{\psi(x)} = \underset{\psi(x)\in v}{\overset{\lim}{\to}} \psi_*(P)(V) = \underset{\psi(x)\in v}{\overset{\lim}{\to}} P\left(\psi^{-1}(V)\right) = \underset{x\in\psi^{-1}(v)}{\overset{\lim}{\to}} P\left(\psi^{-1}(V)\right)$$

$$P_x = \lim_{x\in U} P(U),\ U \in \tau(X)$$



ψ–1(V) es un abierto de X que contiene a x, luego existe un morfismo único φ: $\psi_*(P)_{\psi(x)} \to P_x$, φ no tiene por qué ser ni inyectiva, ni suprayectiva.

Ejemplo

$X = \{1,2,3\}$

$\tau(x) = \{\varnothing, (1,2), (1,3), (1), (1,2,3)\}$

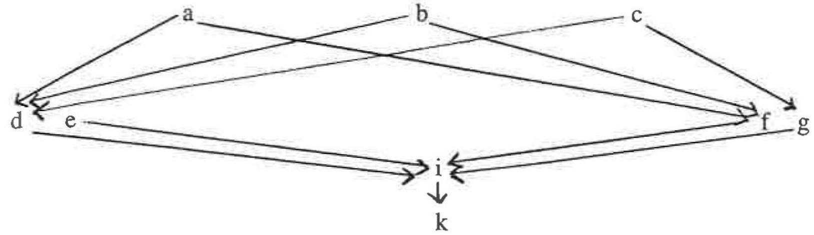
$P(1,2,3) = (a,b,c)$

$P(1,2) = (d,e)$

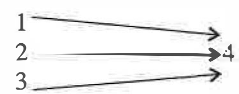
$P(1,3) = (f,g)$

$P(1) = i$

$P(\varnothing) = K$



Aplicación $X \to Y$, $Y = \{4\}$, $\tau(Y) = \{\phi, \{4\}\}$



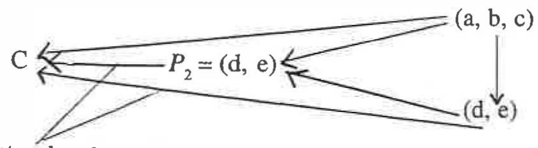
$$\psi_*(P)\begin{cases} \varnothing \to P(\varnothing) = K \\ \{4\} \to P(\{1,2,3\}) = (a,b,c) \end{cases}$$

$\psi_*(P)_{(4)} = \{a,b,c\}$

$$P_2 = \underset{2\in U}{\overset{\lim}{\to}} P(U)$$

$\psi(x) = 4$

$$\psi_* P_4 = \lim_{4\in v} \psi^* P(V) = \lim P_{\psi^{-1}(4)} = \{a,b,c\}$$



estas dos dos aplicaciones son iguales

$P_x = \{d,e\} = P_2$

$$\begin{tikzcd} \{a, b, c\} \arrow[r, bend left] \arrow[r] \arrow[r, bend right] & \{d, e\} \end{tikzcd}$$

morfismo que no es ni inyectivo ni suprayectivo.

Proposición 3-6. Si ψ es homeomorfismo se verifica

$$P_x \approx \psi_*(P)_{\psi(x)}$$

Demostración. Al ser ψ aplicación continua de X en Y, $P \in P(X,C)$ podemos construir $\psi_*(P) \in P(Y,C)$. Al ser ψ^{-1} continua, $\psi_*(P) \in P(Y,C)$, $\psi_*^{-1}\psi_*(P) \in P(X,C)$ y $\psi_*^{-1}\psi_*(P) = P$.

$$\psi_*(P)_{\psi(x)} = \lim_{\psi(x) \in V} \psi_*(P)(V) = \lim_{x \in \psi^{-1}(V)} P\left(\psi^{-1}(V)\right)$$

$$P_x = \lim_{x \in U} P(U) = \lim_{x \in U} P\left(\psi^{-1}\psi(U)\right)$$

$$\begin{tikzcd} P(\psi^{-1}(V)) \arrow[dd, "m"'] \arrow[dr, "d'_1"] \arrow[drr, "c'_1"] & & & P(\psi^{-1}(U)) \arrow[dd, "n"] \arrow[dll, "c_1"'] \arrow[dl, "d_1"'] \\ & (\psi_*(P))_{\psi(x)} \arrow[r, "a", shift left] & P_x \arrow[l, "b", shift left] & \\ P(\psi^{-1}(V')) \arrow[ur, "d'_2"] \arrow[urr, "c'_2"'] & & & P(\psi^{-1}\psi(U')) \arrow[ul, "d_2"] \arrow[ull, "c_2"] \end{tikzcd}$$

Los morfismos del colímite cancelan a la izquierda, luego se verificará

$$\begin{cases} bac_1 = bd_1 = c_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow ba = 1_{\psi_* P_{\psi(x)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} abc'_2 = ad'_2 = c'_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow ab = 1_{P_x} \end{cases}$$

Nota 3-7. Sean X,Y espacios topológicos, $X \xrightarrow{\psi} Y$, ψ aplicación continua, *C* categoría con solución de problemas universales. Sean *F*(X,*C*), *F*(Y,*C*) las categorías de haces sobre X e Y con valores en *C*. Si consideramos *F* $\in$ *F*(X,*C*), como también *F* es prehaz, construimos $\psi_*(F) \in P(Y,C)$. Como *F* verifica la condición F para todos los abiertos de X, la verificará también para todos los que provengan de Y, luego $\psi_*(F) \in F(Y,C)$.

Si llamamos τ a la categoría de los espacios topológicos y aplicaciones continuas, *F* a la categoría cuyos objetos son las categorías de haces sobre espacios topológicos y morfismos functores que provienen de aplicaciones continuas. Existe functor

$$C \to F$$
$$X \to F(X,C)$$
$$\psi : X \to Y \to \psi_*: F(X,C) \to F(Y,C)$$

Nota 3.8. Ejemplos de imágenes directas y su comportamiento en las fibras

i) Sea X un espacio topológico, sea *P* un punto y A un grupo abeliano. Definimos un haz $i_p(A)$ sobre X como sigue: $i_p(A)(U) = A$ si $P \in U$, 0 en otro caso. Comprobaremos que la fibra de $i_p(A)$ es A en cada punto $Q \in \{\bar{p}\}$ y 0 en el resto. También demostraremos que este haz es $i_*(A)$ siendo A el haz constante en el subespacio cerrado $\{\bar{p}\}$ y i: $\{\bar{p}\} \to X$ es la inclusión.

$$i_p(A)_Q = \varinjlim_{u \in Ent(Q)} i_p(A)(U)$$

Si $Q \notin \{\bar{p}\} \Rightarrow \exists U \in Ent(Q), U \cap \{p\} = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists U \in Ent(Q), p \notin U \Rightarrow i_p(A)(U) = 0 \Rightarrow i_p(A)_Q = 0$

Si $Q \in \{\bar{p}\} \Rightarrow \forall U \in Ent(Q), U \cap \{p\} \neq \varnothing \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall U \in Ent(Q),\ p \in U \Rightarrow i_p(A)_Q = \varinjlim_{U \in Ent(Q)} i_p(A)(U) = \varinjlim A = A$$

Consideremos ahora

i: $\{\bar{p}\} \to X$, $i_*(A)$ es tal que

$U \subset X$, U abierto, $i_*(A)(U) = A(i^{-1}(U)) =$

$$= \begin{cases} \text{si } i^{-1}(U) = U \cap \{\bar{p}\} \neq \phi;\ A(i^{-1}(U)) = A(U \cap \{\bar{p}\} = \\ = A \\ \text{si } i^{-1}(U) = U \cap \{\bar{p}\} \neq \phi;\ A(i^{-1}(U) = A(\phi) = 0 \end{cases}$$

Por tanto $\forall U \subset X$ abierto, $i_*(A)(U) = i_p(A)(U)$

Luego $i_*(A) = i_p(A)$.

ii) Sea X un espacio topológico; sea Z un subconjunto cerrado, i: Z $\to$ X inclusión. Sea U = X - Z y la inclusión j: U $\to$ X. Sea *F* un haz sobre Z. Comprobaremos que la fibra $(i_*F)_p$ del haz imagen directa sobre X es F_p si $p \in Z$ y 0 si $p \notin Z$.

$$(i_*F)_p = \varinjlim_{U \in Ent(p)} i_*F(U) = \varinjlim_{U \in Ent(p)} F(i^{-1}(U)) = \varinjlim_{U \in Ent(p)} F(U \cap Z)$$

$$\text{Si } p \in Z, F_p = \varinjlim_{V \in Ent_Z(p)} F(V) = \varinjlim_{U \in Ent_X(p)} F(U \cap Z) = (i_*F)_p$$

pues V ∈ Ent(p) en Z ⇔ ∃U ∈ Ent(p) en X tal que U ∩ Z = V luego $(i_*F)_p = F_p$. Si P ∉ Z; como Z es cerrado, ∃V ∈ Ent(p) | V ∩ Z = ∅ ⇒ F(V ∩ Z) = 0 ∀U ∈ Ent(p), V ∩ Z ⊆ U ∩ Z, entonces $(i_x F)_p = 0$.

4. NATURALEZA LOCAL DE UN HAZ

Definición 4-1

Definición de ψ-morfismo

Sean X, Y espacios topológicos, ψ aplicación continua X → Y, *P* ∈ *P* (Y,*C*), *P'* ∈ *P*(X,*C*). Llamaremos ψ-morfismo de *P* en *P'* a todo morfismo de *P* en $\psi_*(P')$

$$[P, \psi_*(P')] = [P,P']_\psi$$

Definición 4-2. Definición de imagen recíproca de un prehaz

Sean X, Y espacios topológicos, ψ aplicación continua X → Y, *C* categoría, *P* ∈ *P*(Y,*C*). Llamaremos imagen recíproca de *P* mediante ψ a un par compuesto por:

1. un haz *F* sobre X con valores en *C*, 2. un ψ-morfismo de prehaces *P* → *F* → *F* al que designaremos por P_p de forma que la correspondencia

$$[P, G]_\psi \xrightarrow{\sim} [F, G]$$

definida de la manera siguiente:

$$u \to \psi_*(u)\, P_p \in [P,G]_\psi$$

sea biunívoca para todo haz *G* sobre X. A *F* le llamaremos $\psi^*(P) = F$, $\psi_*(u)\, P_p = u^b$ y si $v \in [P,G]_\psi$, existe un único morfismo de *F* en *G* al que designamos por $V^\#$ tal que $\psi_*(V^\#)P_p = v$

$(V^\#)^b = V$, $(u^b)^\# = u$

Nota 4-3. Si *C* es una categoría que posee imágenes recíprocas, entonces a cada *P* ∈ *P* (X,*C*), le asignamos un haz $F = 1_x{}^*(P)$, haz asociado a *P*.

Definición 4-4. Si φ: *F* → *G* es un morfismo de haces, diremos que φ es isomorfismo cuando posea inverso, para ello es necesario que ∀U ∈ τ(X), φ(U): *F*(U) → *G*(U), exista $\psi(U) = \varphi(U)^{-1}$: *G*(U) → *F*(U), entonces $\psi = \varphi^{-1}$ se construirá de la manera siguiente, $\psi = \{\psi(U)\}_{U \in \tau(X)}$.

Nota 4-5. Sean *F*, *G* ∈ *F*(X,*C*). φ: *F* → *G*. Se verifica la equivalencia siguiente

$$\varphi \text{ isomorfismo} \Leftrightarrow \varphi_x: F_x \to G_x \text{ es isomorfismo, } \forall x \in X$$

Definición 4-6

i) Sea φ: *F* → *G* morfismo de haces, definiremos Ker φ, Imag φ como los prehaces siguientes

U → Ker φ(U) ∀U ∈ τ(X)
U → Imag φ(U) ∀U ∈ τ(X)

Se verifica que Ker φ es un haz pero Imag φ es simplemente un prehaz.

ii) Si φ: *F* → *G* es un morfismo de haces, definimos Ker φ como el prehaz Ker φ. Se verifica que Ker φ es un subhaz de *F*.

iii) Si φ: *F* → *G* es un morfismo de haces, definimos Imag φ como el haz asociado al prehaz Imag φ. Se verifica que Imag φ es un subhaz de *G*.

iv) Diremos que un morfismo de haces φ: *F* → *G* es inyectivo si Ker φ = 0.

v) Diremos que un morfismo de haces φ: *F* → *G* es suprayectivo si Imag φ = *G*.

vi) Diremos que una sucesión $\to F^{i-1} \xrightarrow{p^{i-1}} F^i \xrightarrow{p^i} F^{i+1} \to \ldots$ de haces y morfismos es exacta si Ker φ^i = Imag φ^{i-1}.

Nota 4-7. Un morfismo φ: *F* → *G* de haces es inyectivo si y sólo si φ(U) es inyectivo, ∀U ∈ τ(X). Esta propiedad para morfismos suprayectivos no es cierta, si φ: *F* → *G* es suprayectivo, φ(U): *F*(U) → *G*(U) no tiene por qué ser suprayectivo. Se demuestra sin embargo que φ es suprayectivo si y sólo si $\varphi_x: F_x \to G_x$ son suprayectivos ∀x ∈ X.

De todo lo anterior se deduce la siguiente propiedad: Una sucesión de haces y morfismos es exacta si y sólo si es exacta en las fibras, demostración de la naturaleza local de los haces.

Nota 4-8. Con el fin de hacer más patente la naturaleza local de un haz, pondremos un ejemplo de un morfismo sobre haces φ: *F* → *G* y un abierto U tal que φ(U): *F*(U) → *G*(U) no es sobre.

Sea X una variedad analítica compleja, y consideramos los haces *F* y *G* siguientes: Para todo abierto U ⊆ X, *F*(U) es el conjunto de las funciones holomorfas en U y *G*(U) es el conjunto de las funciones holomorfas y que son distintas de cero en todo punto de U.

Se tiene un homomorfismo *F* → *G* asociando a toda función φ(x) holomorfa en U la función $e^{\varphi(x)}$; como localmente toda función holomorfa que no se anula es de la forma $e^{\varphi(x)}$, este homomorfismo de haces es sobre; pero es bien conocido que si U no es simplemente conexo, la aplicación $\varphi \to e^\varphi$ de *F*(U) en *G*(U) no es sobre.

5. REFERENCIAS

Dieudonné, J.: «Cours de géométrie algébrique, 1, 2». Presses Universitaires de France, 1974.

Giraud, J.; Grothendieck, A., y Kleiman, S. L.: «Dix exposés sur la cohomologie des schémas». North-Holland. Amsterdam, 1968.
Godement, R.: «Topologie Algébrique et théorie des Faisceaux». Hermann, París, 1958.
Grothendieck, A.: «Eléments de Géométrie Algébrique», redigés avec la collaboration de J. Dieudonné. I: «Le langaje des schémas». II: «Etude globale élémentaire de quelques classes de morphismes». III: «Etude cohomologique des faisceaux». IV: «Etude locale des schémas et des morphismes de schémas». *Publications Mathématiques núms. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28,...,* IHES.
— «Fondements de la Géométrie Algébrique». Seminario Bourbaki, 1957-1962.
— «Géométrie formalle et géométrie algébrique». Seminario Bourbaki, 1962.
Hartshone, R.: «Algebraic Geometry». Graduate Texts in *Mathematics, 52.* Springer-Verlag, New York, 1977.
Knutson, D.: «Algebraic spaces». Lecture Notes in *Mathematics,* vol. 203. Springer-Verlag, Berlín-New York, 1971.
Kubota, K.: «Ample sheaves». J. Fac. Sci. Universidad de Tokyo. Sect. IA. *Math, 17.*
Manin: «Lectures on algebraic geometry». Moscow State University, 1968.
Mumford, D.: «Introduction to algebraic geometry». Harvard University Notes.
Serre, J. P.: «Faisceaux algébriques cohérents». *Ann of Math (2) 61,* 1955.
— «Géométrie Algébrique et Géométrie Analitique». *Ann.* Inst. Fourier, 1955-1956.
Shafarevich, I. R.: «Basic Algebraic Geometry». Springer-Verlag. Berlín-Heidelberg-New York, 1974.
Weidenfeld, G., y Weidenfeld, M.: «Faisceaux et complétions universelles». *Cahiers Topologie Géom. Différentielle, 15,* 1974.
Weil, A.: «Foundation of Algebraic Geometry». *Amer. Math. Soc. Publ.,* 1946.
Zariski, O.: «Algebraic sheaf theory». *Bull. Amer. Math. Soc., 62,* 1956.
— «Algebraic Geometry». Arcata, 1974. *Proc. of Symposia in pure Math., 29.* Providence, 1975.