

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
MÁSTER EN FÍSICA FUNDAMENTAL

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

UNITARIEDAD Y UNICIDAD
EN LA CUANTIZACIÓN
DE PERTURBACIONES COSMOLÓGICAS



UNITARITY AND UNIQUENESS
IN THE QUANTIZATION
OF COSMOLOGICAL PERTURBATIONS

Mikel Fernández Méndez
Instituto de Estructura de la Materia, CSIC
m.fernandez.m@csic.es

Director:
Guillermo A. Mena Marugán
Instituto de Estructura de la Materia, CSIC
mena@iem.cfmac.csic.es

ABSTRACT: In this work, we study the Fock quantization of the scalar perturbations about the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker model with a scalar massive field as matter content. We consider the case in which the spatial sections are compact, with the topology of a 3-sphere, as the prototypical case in which no infrared divergences appear in the quantization, since the perturbative modes, obtained from the eigenstates of the Laplace-Beltrami operator, form an infinite but discrete series. After expanding the perturbations in these modes, the Hamiltonian of the system is obtained up to terms quadratic in them. An almost complete gauge fixing is then introduced and a canonical transformation performed in order to reach a manageable and convenient formulation of the system. In the model so attained, in particular, the dynamical equations are derived. The rest of the work is devoted to the analysis of the ambiguities inherent to the choice of representation for the Fock quantization of the perturbations of the scalar field on the cosmological background provided by the homogeneous variables, described classically. We only consider quantizations determined by complex structures which share the $SO(4)$ rotation symmetry of the spatial sections. A particular choice of such a complex structure is selected and it is shown that the perturbations dynamics are unitarily implementable in the associated representation. Any other representation with an $SO(4)$ invariant vacuum and whose dynamics be unitary is proven unitarily equivalent to the aforementioned one and, therefore, they will both yield the same physical predictions, which can hence be considered robust.

KEYWORDS: quantum field theory on curved space, quantum cosmology, cosmological perturbations.

RESUMEN: En este trabajo se estudia la cuantización de Fock de las perturbaciones escalares al modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker con un campo escalar masivo como contenido material. Se considera el caso en el que las secciones espaciales son compactas, con la topología de una 3-esfera, como caso prototípico en el que no surgen divergencias infrarrojas en la cuantización, ya que los modos perturbativos, obtenidos a partir de los autoestados del operador de Laplace-Beltrami, forman una serie infinita pero discreta. Tras expandir las perturbaciones en estos modos, se obtiene el hamiltoniano del sistema hasta orden cuadrático en los mismos. Se introduce entonces una fijación casi completa del *gauge* y se realiza una transformación canónica para obtener una formulación manejable y conveniente del sistema. En el modelo así obtenido, en particular, se derivan las ecuaciones dinámicas. El resto del trabajo está dedicado al análisis de las ambigüedades intrínsecas a la elección de representación para la cuantización de Fock de la perturbación del campo escalar en el fondo cósmico dado por las variables homogéneas, descritas clásicamente. Se consideran tan sólo cuantizaciones determinadas por estructuras complejas que compartan la simetría bajo rotaciones $SO(4)$ de las secciones espaciales. Se selecciona una elección particular de una tal estructura compleja y se prueba que, en la representación asociada, la dinámica de las perturbaciones es unitariamente implementable. Cualquier otra representación en la que el vacío sea invariante bajo el grupo $SO(4)$ y cuya dinámica sea unitaria debe ser unitariamente equivalente a la seleccionada, y por lo tanto, no diferirá de ella en sus predicciones físicas, que pueden considerarse así robustas.

PALABRAS CLAVE: teoría cuántica de campos en espacios curvos, cosmología cuántica, perturbaciones cosmológicas.

CONTENIDOS

I. Introducción	1
II. Análisis clásico del modelo	2
A. Formulación hamiltoniana del modelo FLRW perturbado	2
B. Fijación de <i>gauge</i> . Reducción del sistema	4
C. Reformulación del sistema. Ecuaciones dinámicas	5
III. Unitariedad y unicidad de la cuantización	6
A. Consideraciones previas	6
B. Análisis asintótico de la ecuación dinámica	7
C. Unitariedad de la evolución	8
D. Equivalencia de otras representaciones invariantes con evolución unitaria	8
IV. Conclusiones	10
Referencias	11

I. INTRODUCCIÓN

La Relatividad General (RG) es, en la actualidad, la descripción clásica más precisa de la interacción gravitatoria. Uno de los pilares sobre los que se asienta es la idea de que dicha interacción es consecuencia de la curvatura del propio espacio-tiempo. Otro ingrediente esencial de la teoría es que es el contenido mismo del espacio el que da origen a esa curvatura, de una forma que codifican las célebres ecuaciones de Einstein. Como se constató inmediatamente después de su publicación, dichas ecuaciones pueden obtenerse de un principio variacional a partir de la acción de Einstein-Hilbert. Esta formulación lagrangiana sirve de punto de partida para realizar un tratamiento hamiltoniano [1], que recurre a la descomposición del espacio-tiempo en espacio y tiempo. Debido a la invariancia bajo difeomorfismos de la teoría, existe una gran libertad a la hora de realizar la descomposición. Esto se refleja en la aparición de multiplicadores de Lagrange en el hamiltoniano, el cual no resulta ser más que una combinación lineal de ligaduras. Entre otras razones, la formulación hamiltoniana de la RG tiene especial interés con vistas a la cuantización canónica de la teoría einsteiniana, aunque esta —a día de hoy— no ha podido llevarse a cabo con éxito.

Un campo donde la aplicación de la RG ha sido especialmente fructífera es la cosmología [2], donde ha proporcionado las bases para la teoría de la Gran Explosión. Según esta, el universo que observamos se encuentra en expansión —de acuerdo con las mediciones de la recesión de galaxias lejanas y del Fondo Cósmico de Microondas— a partir de un estado primitivo de elevada densidad.

A escala cosmológica, nuestro universo es homogéneo e isótropo y, por tanto, está descrito en primera aproximación por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Esta presenta secciones espaciales de curvatura constante (positiva, negativa o nula) que sólo difieren en su escala, la cual, retrocediendo en el tiempo cósmico, llega a anularse en el instante de la Gran Explosión (aunque, presumiblemente, el rango de aplicación de la teoría termina antes de llegar a la singularidad inicial). En realidad, la existencia de supercúmulos de galaxias demuestra que la homogeneidad se rompe a distancias todavía enormes, aunque ello no baste para eludir el origen singular del Cosmos. La RG permite —y este es uno de sus grandes éxitos— entender la formación de esa estructura a gran escala partiendo de pequeñas inhomogeneidades sobre un fondo homogéneo e isótropo, gracias a la teoría de perturbaciones cosmológicas [3]. No obstante, la explicación no es plenamente satisfactoria si no se incluyen algunas hipótesis adicionales. La más aceptada es la existencia de un periodo inflacionario en el que el universo, todavía joven, se expandió aceleradamente [4]. Este crecimiento, que resuelve diversos problemas de la cosmología estándar, se atribuye, por lo general, a un hipotético campo escalar (el inflatón), cuyas fluctuaciones cuánticas habrían dado lugar a las perturbaciones iniciales. La completa comprensión de la formación de

estructura, requiere, por tanto, un análisis cuántico, o, al menos, semiclásico, del proceso inflacionario.

En ausencia de una teoría cuántica de la gravedad plenamente satisfactoria, una primera aproximación al problema consiste en considerar el fondo homogéneo de forma clásica y realizar un tratamiento cuántico de las inhomogeneidades siguiendo técnicas convencionales de la Teoría Cuántica de Campos (TCC) en Espacios Curvos (EC) [5, 6]. Debido al número infinito de grados de libertad con que debe tratar la cuantización canónica en este contexto, aparece una serie de ambigüedades que no se dan en la Mecánica Cuántica ordinaria. Recordemos que, en el caso de la Mecánica Cuántica, el teorema de Stone-von Neumann [7] garantiza la unicidad —salvo equivalencia unitaria— de la representación (fuertemente continua, irreducible y unitaria) de las Relaciones de Conmutación Canónicas (RCC) en su forma de Weyl. En TCCEC, por el contrario, no sólo la elección de las variables clásicas consideradas fundamentales, sino también su representación cuántica conduce, en general, a cuantizaciones que no pueden relacionarse de forma unitaria, y no existe un criterio general que permita elegir una preferida de entre las infinitas posibilidades. Sin embargo, en algunos circunstancias particulares, esto sí puede hacerse. Es especialmente relevante el caso de campos en el espacio-tiempo de Minkowski, cuya elevada simetría permite seleccionar una única representación —siempre salvo equivalencia unitaria— imponiendo la invariancia Poincaré del vacío de la teoría. En situaciones con menor simetría, esta no basta por sí sola para escoger una cuantización, y es necesario recurrir a condiciones adicionales, por ejemplo, relativas a la energía si el espacio-tiempo en consideración es estacionario [8]. También en ciertos casos no estacionarios se ha conseguido alcanzar la unicidad de la representación exigiendo, además de la simetría del vacío, la unitariedad de la evolución [9–13]. Puesto que el presente trabajo entronca directamente con estos resultados, a continuación se expondrán con algo más de detalle, pero para ello es conveniente aclarar antes en qué consiste exactamente la cuantización de Fock de una teoría de campo [5, 6].

Centrémonos, por simplicidad, en un campo escalar. Para que el siguiente procedimiento sea válido, el campo ha de satisfacer una ecuación lineal. La cuantización de Fock parte del espacio Γ de soluciones a dicha ecuación —o, alternativamente, del conjunto de datos iniciales de la misma en una sección espacial dada— y de una estructura compleja definida sobre él que sea compatible con su estructura simpléctica Ω . Una estructura compleja J no es sino una aplicación lineal cuyo cuadrado es menos la identidad (es decir, tal que $J^2 = -\mathbb{I}$), y por compatible con la estructura simpléctica entendemos que $\Omega(J, \cdot)$ debe ser una aplicación bilineal (antilineal en el primer argumento) definida positiva. De forma natural, J descompone la complejización de Γ en dos subespacios de autovalores $\pm i$, llamados de frecuencia positiva y negativa, respectivamente. La compleción del subespacio de frecuencia positiva con respecto al producto escalar

$[\Omega(J \cdot, \cdot) - i\Omega(\cdot, \cdot)]/2$ —construido gracias a la compatibilidad de J con Ω — recibe el nombre de espacio de Hilbert de una partícula, \mathcal{H} . Dada una base ortonormal del mismo, $\{\psi_i\}$, cualquier solución $\phi \in \Gamma$ puede descomponerse en la forma

$$\phi = \sum_i (a_i \psi_i + a_i^* \psi_i^*). \quad (1)$$

Los coeficientes a_i^* y a_i se denominan variables de creación y destrucción, respectivamente.

El espacio de Hilbert de la teoría cuántica será el espacio de Fock simétrico asociado a \mathcal{H} ,

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_S^n \mathcal{H}, \quad (2)$$

y en él pueden definirse, siguiendo una prescripción estándar, los operadores de creación y destrucción, \hat{a}_i^\dagger y \hat{a}_i , que son la contrapartida cuántica de las variables homónimas y, por tanto, satisfacen las correspondientes RCC. Como es habitual, el estado de vacío se define como aquel que es aniquilado por todos los operadores de destrucción y, en consecuencia, queda completamente determinado una vez escogida la estructura compleja.

En espacio-tiempos estacionarios, una vez se escoge un vector de Killing temporal específico ∂_t , la dependencia temporal de las soluciones puede factorizarse (por lo menos localmente) en la forma $e^{i\omega t}$ (siendo ω la frecuencia asociada al tiempo escogido) y, por ello, existe una distinción natural entre frecuencias positivas y negativas. La estructura compleja correspondiente es $J = |\partial_t \partial_t|^{-1/2} \partial_t$. En estos casos, puede atribuirse un verdadero significado físico al concepto de partícula que, aunque no puede extenderse a la situación general, justifica la terminología empleada en la anterior descripción de la cuantización de Fock.

Ya estamos en condiciones de explicar los resultados de unicidad a los que se hizo referencia. En modelos cosmológicos con secciones espaciales compactas y dos vectores de Killing espaciales —conocidos como modelos de Gowdy [14]— la reducción por simetría del sistema permite escribir para las inhomogeneidades una ecuación que es, formalmente, la de un campo escalar con masa dependiente del tiempo en un espacio-tiempo auxiliar de menor dimensionalidad y con secciones espaciales circulares o esféricas (dependiendo del modelo de Gowdy concreto). Para cuantizarlas, una posible estructura compleja es la asociada naturalmente al campo sin masa, que posee todas las simetrías de las secciones espaciales del espacio-tiempo auxiliar. Esta elección conduce a una representación en la que la dinámica se implementa de forma unitaria, es decir, en la que la transformación canónica que rige la evolución clásica del sistema puede promocionarse a un operador unitario en su cuantización. Pues bien, cualquier otra estructura compleja con esta propiedad e idénticas simetrías debe ser equivalente a la mencionada mediante una transformación unitaria [9, 11] y, por tanto, las teorías cuánticas construidas a partir de una y

otra no diferirán en sus predicciones. Es más, en estos casos es posible probar que, si se reescala el campo con un factor dependiente del tiempo (usando, por ejemplo, funciones temporales del fondo), reescalando en consecuencia el momento canónicamente conjugado con el factor inverso —y sumándole, quizás, una contribución lineal en el campo, también dependiente del tiempo— no puede obtenerse una representación de Fock con la simetría adecuada y dinámica unitaria, a menos que la transformación sea en realidad independiente del tiempo [10, 11]. Estos mismos resultados han podido extenderse al caso de un campo escalar con masa dependiente del tiempo en la 3-esfera [12, 13], una situación muy cercana a la que nos ocupará en el cuerpo de este trabajo. El hecho de que, en todos estos sistemas, las secciones espaciales sean compactas no es casual, pues es clave en las demostraciones aportadas en las referencias citadas, a no ser que se ignore el comportamiento infrarrojo de los campos.

A continuación, se busca extender los anteriores resultados de unicidad a un caso de especial interés físico: el modelo FLRW perturbado escalarmente, con un campo escalar con masa como contenido material. En la sección II se realiza un tratamiento clásico del modelo, considerando sólo términos de hasta segundo orden en las perturbaciones. Para comenzar, en II A, se obtiene el hamiltoniano del sistema a partir del lagrangiano de RG. Tal y como se describe, el sistema posee grados de libertad redundantes, lo que lleva a efectuar una elección de *gauge* en la subsección II B. A continuación, en II C, se realiza una manipulación de las variables dinámicas para facilitar su análisis, y se obtienen las ecuaciones de movimiento de las mismas. La sección III está dedicada al estudio de las posibles cuantizaciones de la perturbación del campo escalar, asumiendo que el fondo puede describirse de forma clásica. En la subsección III A se reformula el sistema y, tras aclarar algunas cuestiones técnicas, se introducen las variables de creación y destrucción que serían naturales en un campo sin masa. Saber si esta elección permite o no una implementación unitaria de la dinámica requiere un análisis asintótico de los modos de alta frecuencia, que se realiza en III B. A partir de él, se constata en la subsección III C que, en efecto, la evolución puede implementarse de forma unitaria. Cualquier otra estructura compleja con las mismas simetrías que el espacio de fondo y dinámica unitaria es equivalente a la dada, como se demuestra en III D.

II. ANÁLISIS CLÁSICO DEL MODELO

A. Formulación hamiltoniana del modelo FLRW perturbado

Sea \mathcal{M} un espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Mediante la introducción de una función global de tiempo t , el mismo puede descomponerse en hipersuperficies de tipo espacial Σ_t con $t = \text{cte.}$ y métrica h_{ab} . En coorde-

nadas adaptadas a esta foliación, la métrica del espacio-tiempo viene dada por

$$ds^2 = -(N^2 - N_i N^i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (3)$$

donde N es la llamada función lapso y N^i , el vector desplazamiento. Los dos juntos permiten relacionar las hipersuperficies correspondientes a valores de t infinitesimalmente próximos y por ello no se consideran variables dinámicas (como veremos, desempeñan el papel de multiplicadores de Lagrange). Salvo que se indique lo contrario, los índices tensoriales se bajan y suben con la 3-métrica h_{ij} y su inversa h^{ij} , respectivamente.

En términos de la anterior descomposición (conocida como 3+1 o ADM [15]), la acción de Einstein-Hilbert de RG puede escribirse como la integral del lagrangiano

$$L_g = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{h} [(h^{i(k} h^{l)j} - h^{ij} h^{kl}) K_{ij} K_{kl} + {}^3R] d^3x, \quad (4)$$

siendo G la constante de Newton; h , el determinante de h_{ij} ; K_{ij} , la curvatura extrínseca de Σ_t y 3R , su escalar de curvatura (considerada como una variedad tridimensional). La curvatura extrínseca puede calcularse como

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + 2N_{(i;j)} \right). \quad (5)$$

La derivación covariante respecto a la 3-métrica se indica aquí con un punto y coma.

Para acoplar al campo gravitatorio un campo escalar Φ de masa m , basta con sumar al lagrangiano anterior el término

$$L_m = \frac{1}{2} \int N \sqrt{h} (h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi - m^2 \Phi^2) d^3x. \quad (6)$$

En el modelo FLRW con curvatura positiva, la métrica de las secciones temporales homogéneas es la de S^3 , Ω_{ij} , multiplicada por un factor de escala $(\sigma e^\alpha)^2$ que sólo depende del tiempo (la constante $\sigma = \sqrt{2/(3\pi)} G$ se ha incluido por conveniencia), mientras que el vector desplazamiento se anula.

Con el objetivo de romper la homogeneidad del modelo, se suman a las variables del caso homogéneo perturbaciones dependientes del punto. Para su descripción, son de enorme utilidad los armónicos hiperesféricos Q_{lm}^n [16, 17], autofunciones del operador de Laplace-Beltrami en S^3 , donde forman una base de las funciones escalares (de cuadrado integrable con la medida $\sqrt{\Omega} d^3x$). La correspondiente ecuación de autovalores es

$$\Omega^{ij} \nabla_i \nabla_j Q_{lm}^n(x^k) = -\omega_n^2 Q_{lm}^n(x^k), \quad (7)$$

siendo ∇ la derivada covariante en S^3 y $\omega_n^2 = n^2 - 1$. Como puede verse, los autovalores dependen sólo de $n = 1, 2, 3, \dots$ y no de l o m , que toman valores en los rangos $\{0, 1, \dots, n-1\}$ y $\{-l, 1-l, \dots, l\}$, respectivamente. Cada autovalor tiene, por tanto, degeneración $g_n = n^2$.

El conjunto $\{Q_{lm}^n\}$ es completo, y además ortonormal, en el sentido de que

$$\int \sqrt{\Omega} Q_{l'm'}^n Q_{lm}^n d^3x = \delta^{n'n} \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (8)$$

Mediante la derivación covariante pueden construirse armónicos vectoriales y tensoriales a partir de los escalares. Así se definen

$$(P_i)_{lm}^n = \frac{1}{n^2 - 1} \nabla_i Q_{lm}^n, \quad (9)$$

$$(P_{ij})_{lm}^n = \nabla_j (P_i)_{lm}^n + \frac{1}{3} \Omega_{ij} Q_{lm}^n. \quad (10)$$

Sin embargo, las cantidades construidas de esta forma son insuficientes: para obtener conjuntos completos es necesario añadir armónicos vectoriales y tensoriales genuinos (i. e., no derivados de los escalares). A pesar de ello, en el presente trabajo se consideran tan sólo perturbaciones construidas con armónicos escalares. Si esto es legítimo es gracias a que estos y aquellos siguen dinámicas completamente desacopladas, como se comprueba al realizar el tratamiento completo [16].

La perturbación de la 3-métrica, por ejemplo, será

$$h_{ij} = (\sigma e^\alpha)^2 (\Omega_{ij} + \epsilon_{ij}), \quad (11)$$

y, según lo anterior, puede desarrollarse como

$$\epsilon_{ij} = 6\sqrt{2}\pi \sum_n \left(a_n \frac{1}{3} \Omega_{ij} Q^n + b_n (P_{ij})^n \right), \quad (12)$$

donde los coeficientes a_n y b_n dependen únicamente del tiempo. Nótese que aquí *los índices n, l y m se han denotado colectivamente por n* . Es lo que se hará en lo que queda de la sección.

Del mismo modo,

$$N = \sigma N_0 \left(1 + \sqrt{2}\pi \sum_n g_n Q^n \right), \quad (13)$$

$$N_i = \sigma^2 e^\alpha \sqrt{2}\pi \sum_n j_n (P_i)^n, \quad (14)$$

$$\Phi = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \phi + \sum_n f_n Q^n \right). \quad (15)$$

En todos los sumatorios anteriores, el rango de n comienza en 2, pues los modos con $n = 1$ se consideran incluidos en las variables homogéneas. Como antes, los coeficientes f_n , g_n y j_n son funciones temporales; al anularlas idénticamente, se obtiene el modelo FLRW, en el que el campo escalar homogéneo ϕ , de masa m/σ , proporciona el contenido material.

Con las ecuaciones (11) a (15), los lagrangianos (4) y (6) pueden escribirse en función de las variables homogéneas α y ϕ y de los coeficientes a_n , b_n , f_n , g_n y j_n . Despreciaremos las contribuciones de orden superior al cuadrático en los últimos, puesto que estamos realizando un análisis perturbativo (las desviaciones de FLRW son pequeñas

por hipótesis). A partir del lagrangiano, se puede definir los momentos de la forma habitual, $\pi_q = \partial(L_g + L_m)/\partial\dot{q}$, y realizar la transformada de Legendre —de nuevo a segundo orden— para obtener el hamiltoniano del sistema. Algunos pasos intermedios del cálculo pueden consultarse en [16]. Nos limitamos aquí a exponer el resultado:

$$H = N_0 \left[H_{|0} + \sum_n (H_{|2}^n + g_n H_{|1}^n) \right] + \sum_n j_n H_{-1}^n. \quad (16)$$

Los subíndices de cada término indican si va asociado a la función lapso (|) o al vector desplazamiento (−), así como su orden perturbativo. El hamiltoniano de orden cero se escribe

$$H_{|0} = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} (-\pi_\alpha^2 + \pi_\phi^2 + e^{6\alpha} m^2 \phi^2 - e^{4\alpha}) \quad (17)$$

y las contribuciones de orden superior vienen dadas por

$$\begin{aligned} H_{|2}^n = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} & \left[\left(\frac{1}{2} a_n^2 + 10 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} b_n^2 \right) \pi_\alpha^2 + \left(\frac{15}{2} a_n^2 + 6 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} b_n^2 \right) \pi_\phi^2 - \pi_{a_n}^2 + \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \pi_{b_n}^2 + \pi_{f_n}^2 + \right. \\ & + (2a_n \pi_{a_n} + 8b_n \pi_{b_n}) \pi_\alpha - 6a_n \pi_{f_n} \pi_\phi + \\ & - e^{4\alpha} \left(\frac{1}{3} (n^2 - \frac{5}{2}) a_n^2 + \frac{1}{3} (n^2 - 7) \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} b_n^2 + \frac{2}{3} (n^2 - 4) a_n b_n - (n^2 - 1) f_n^2 \right) + \\ & \left. + e^{6\alpha} m^2 \left(\frac{3}{2} \phi^2 a_n^2 - 6 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} \phi^2 b_n^2 + f_n^2 + 6\phi a_n f_n \right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} H_{|1}^n = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} & \left[-a_n \pi_\alpha^2 - 3a_n \pi_\phi^2 - 2\pi_\alpha \pi_{a_n} + 2\pi_\phi \pi_{f_n} - \frac{2}{3} e^{4\alpha} \left((n^2 + \frac{1}{2}) a_n + (n^2 - 4) b_n \right) + \right. \\ & \left. + e^{6\alpha} m^2 \phi (2f_n + 3\phi a_n) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$H_{-1}^n = \frac{1}{3} e^{-\alpha} \left[\left(a_n + 4 \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} b_n \right) \pi_\alpha - \pi_{a_n} + \pi_{b_n} + 3f_n \pi_\phi \right]. \quad (20)$$

B. Fijación de *gauge*. Reducción del sistema

Como se apuntó en la subsección anterior, las variables N_0 y N^i no deben ser consideradas dinámicas, sino meros multiplicadores de Lagrange asociados a la invariancia bajo reparametrizaciones temporales y bajo difeomorfismos espaciales, respectivamente. En consecuencia, los factores que las multiplican en el hamiltoniano tienen que anularse idénticamente.

En el modelo FLRW perturbado, desempeñan el papel de multiplicadores de Lagrange las funciones N_0 , g_n y j_n , y por cada una de ellas se tiene una ligadura. Es evidente, por tanto, que no se han aislado los verdaderos grados de libertad dinámicos del sistema. Para proseguir el análisis, fijaremos la libertad *gauge* asociada a g_n y j_n haciendo $a_n = 0 = b_n$. Estas condiciones son admisibles, puesto que sus corchetes de Poisson con las ligaduras correspondientes — $H_{|1}^n = 0$ y $H_{-1}^n = 0$, respectivamente— no se anulan (salvo en el punto *singular* $\pi_\alpha = 0$):

$$\{a_n, H_{|1}^n\} = e^{-3\alpha} \pi_\alpha, \quad (21)$$

$$\{b_n, H_{-1}^n\} = -\frac{1}{3} e^{-\alpha}. \quad (22)$$

Para que esta elección de *gauge* sea consistente, las derivadas temporales de a_n y b_n —es decir, en este caso, sus corchetes de Poisson con el hamiltoniano— deben anularse, lo que se traduce en las condiciones adicionales

$$0 = -N_0 e^{-3\alpha} (\pi_{a_n} + g_n \pi_\alpha) - \frac{1}{3} e^{-\alpha} j_n, \quad (23)$$

$$0 = N_0 e^{-3\alpha} \frac{n^2 - 1}{n^2 - 4} \pi_{b_n} + \frac{1}{3} e^{-\alpha} j_n. \quad (24)$$

De ellas puede obtenerse el valor de los multiplicadores de Lagrange g_n y j_n en función del resto de variables. A su vez, el valor de los momentos π_{a_n} y π_{b_n} se infiere del sistema de ecuaciones que forman las ligaduras:

$$\pi_{a_n} = \frac{\pi_\phi}{\pi_\alpha} \pi_{f_n} + e^{6\alpha} m^2 \phi \frac{1}{\pi_\alpha} f_n, \quad (25)$$

$$\pi_{b_n} = \frac{\pi_\phi}{\pi_\alpha} \pi_{f_n} + \left(e^{6\alpha} m^2 \phi \frac{1}{\pi_\alpha} - 3\pi_\phi \right) f_n. \quad (26)$$

Tras fijar el *gauge*, $H_{|0}$ no cambia, y $H_{|2}^n$ se escribe

$$H_{|2}^n = \frac{e^{-3\alpha}}{2} (C_{\pi\pi}^n \pi_{f_n}^2 + 2C_{f\pi}^n f_n \pi_{f_n} + C_{ff}^n f_n^2), \quad (27)$$

donde

$$C_{\pi\pi}^n = 1 + \frac{3}{n^2 - 4} \frac{\pi_\phi^2}{\pi_\alpha^2}, \quad (28)$$

$$C_{f\pi}^n = -3 \frac{\pi_\phi^2}{\pi_\alpha} + \frac{3}{n^2 - 4} \frac{\pi_\phi}{\pi_\alpha} \left(e^{4\alpha} m^2 \phi \frac{1}{\pi_\alpha} - 3\pi_\phi \right), \quad (29)$$

$$C_{ff}^n = e^{4\alpha} (n^2 - 1) + e^{6\alpha} m^2 + 9\pi_\phi^2 - 6e^{6\alpha} m^2 \phi \frac{\pi_\phi}{\pi_\alpha} + \frac{3}{n^2 - 4} \left(e^{4\alpha} m^2 \phi \frac{1}{\pi_\alpha} - 3\pi_\phi \right)^2. \quad (30)$$

Con la elección de *gauge*, el modo $n = 2$ queda desprovisto de grados de libertad.

C. Reformulación del sistema. Ecuaciones dinámicas

A continuación, vamos a realizar una serie de transformaciones canónicas para facilitar el tratamiento del sistema. La primera de ellas es el denominado reescalado de Mukhanov, $f_n \mapsto \tilde{f}_n = e^\alpha f_n$, que se utiliza con frecuencia en el contexto del modelo FLRW para simplificar las ecuaciones de movimiento. Por supuesto, los momentos π_{f_n} y π_α deben cambiar en consecuencia:

$$\tilde{\pi}_{\tilde{f}_n} = e^{-\alpha} \pi_{f_n}, \quad (31)$$

$$\tilde{\pi}_\alpha = \pi_\alpha - \sum_n f_n \pi_{f_n}. \quad (32)$$

Puesto que π_α sólo difiere de $\tilde{\pi}_\alpha$ en términos de orden dos en los coeficientes perturbativos, la expresión funcional del hamiltoniano de orden cero no varía: $\tilde{H}_{|0}(\alpha, \tilde{\pi}_\alpha, \phi, \pi_\phi) = H_{|0}(\alpha, \pi_\alpha = \tilde{\pi}_\alpha, \phi, \pi_\phi)$. No ocurre lo mismo con los coeficientes del hamiltoniano de segundo orden, que con las nuevas contribuciones cambian de la siguiente manera:

$$\tilde{C}_{\pi\pi}^n(\alpha, \tilde{\pi}_\alpha, \phi, \pi_\phi) = e^{+2\alpha} C_{\pi\pi}^n(\alpha, \tilde{\pi}_\alpha, \phi, \pi_\phi), \quad (33)$$

$$\tilde{C}_{f\pi}^n(\alpha, \tilde{\pi}_\alpha, \phi, \pi_\phi) = C_{f\pi}^n(\alpha, \tilde{\pi}_\alpha, \phi, \pi_\phi) - e^{-3\alpha} \tilde{\pi}_\alpha, \quad (34)$$

$$\tilde{C}_{ff}^n(\alpha, \tilde{\pi}_\alpha, \phi, \pi_\phi) = e^{-2\alpha} C_{ff}^n(\alpha, \tilde{\pi}_\alpha, \phi, \pi_\phi). \quad (35)$$

Naturalmente, por consistencia, los términos de orden superior se desprecian

La presencia del término cruzado asociado a $\tilde{C}_{f\pi}^n$ en el hamiltoniano de orden dos se traduce en que el momento $\tilde{\pi}_{\tilde{f}_n}$ no es simplemente (proporcional a) la derivada temporal de \tilde{f}_n . Es conveniente buscar una transformación canónica que elimine dicho término. De hecho, como en el análisis que realizaremos en la próxima sección sólo nos interesará el comportamiento asintótico a n grande, basta con eliminar la contribución de orden cero en n del mismo. Con este fin, se introduce el cambio

$$\tilde{\pi}_{\tilde{f}_n} \longrightarrow \bar{\pi}_{\tilde{f}_n} = \tilde{\pi}_{\tilde{f}_n} - e^{-2\alpha} \tilde{f}_n \left(\frac{3\pi_\phi^2}{\tilde{\pi}_\alpha} + \tilde{\pi}_\alpha \right), \quad (36)$$

que puede completarse para constituir una transformación canónica hasta el orden perturbativo estudiado:

$$\bar{\alpha} = \alpha - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \left(\frac{3\pi_\phi^2}{\tilde{\pi}_\alpha} - 1 \right) \sum_n f_n^2, \quad (37)$$

$$\bar{\pi}_{\bar{\alpha}} = \tilde{\pi}_\alpha + e^{-2\alpha} \left(\frac{3\pi_\phi^2}{\tilde{\pi}_\alpha} - \pi_\alpha \right) \sum_n f_n^2, \quad (38)$$

$$\bar{\phi} = \phi + 3e^{-2\alpha} \frac{\pi_\phi}{\tilde{\pi}_\alpha} \sum_n f_n^2, \quad (39)$$

$$\bar{\pi}_{\bar{\phi}} = \pi_\phi. \quad (40)$$

En efecto, como se comprueba mediante el cálculo directo, tras esta transformación los paréntesis de Poisson siguen siendo canónicos al orden considerado.

Puesto que, como antes, las nuevas variables homogéneas difieren de las antiguas solamente en términos de segundo orden en las perturbaciones, se tiene que $\tilde{H}_{|0}(\bar{\alpha}, \bar{\pi}_{\bar{\alpha}}, \bar{\phi}, \pi_\phi) = H_{|0}(\bar{\alpha}, \bar{\pi}_{\bar{\alpha}}, \bar{\phi}, \pi_\phi)$. En cuanto al hamiltoniano de orden dos, se escribe ahora de la forma

$$\tilde{H}_{|2}^n = \frac{e^{-\bar{\alpha}}}{2} (\bar{C}_{\pi\pi}^n \pi_{f_n}^2 + 2\bar{C}_{f\pi}^n f_n \pi_{f_n} + \bar{C}_{ff}^n f_n^2), \quad (41)$$

donde

$$\bar{C}_{\pi\pi}^n = 1 + \frac{3}{n^2 - 4} \frac{\pi_\phi^2}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2}, \quad (42)$$

$$\bar{C}_{f\pi}^n = \frac{3e^{-2\bar{\alpha}}}{n^2 - 4} \frac{\pi_\phi}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} \left(\frac{3\pi_\phi^2}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} - 2\pi_\phi + e^{6\bar{\alpha}} m^2 \bar{\phi} \frac{1}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} \right), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ff}^n = & n^2 - \frac{1}{2} + e^{2\bar{\alpha}} m^2 - \frac{3}{2} \frac{\pi_\phi^2}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2} - \frac{1}{2} e^{-4\bar{\alpha}} \left(\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2 - 30\pi_\phi^2 + \frac{27\pi_\phi^4}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2} \right) - \frac{3}{2} e^{2\bar{\alpha}} m^2 \bar{\phi} \left[8 \frac{\pi_\phi}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} - \bar{\phi} \left(\frac{3\pi_\phi^2}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} - 1 \right) \right] + \\ & + \frac{3e^{-4\bar{\alpha}}}{n^2 - 4} \left(\frac{3\pi_\phi^3}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}^2} - 2\pi_\phi + e^{6\bar{\alpha}} m^2 \bar{\phi} \frac{1}{\bar{\pi}_{\bar{\alpha}}} \right)^2. \end{aligned} \quad (44)$$

A partir de ahora, trataremos siempre con estas variables, por lo que será innecesario distinguirlas de las originales. En consecuencia, *los gorros y tildes se omiten en lo que sigue*.

Para concluir esta sección, calcularemos las ecuaciones dinámicas del sistema. Comencemos por los coeficientes f_n de la perturbación del campo escalar. De las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{df_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi_{f_n}} = N_0 e^{-\alpha} (C_{\pi\pi}^n \pi_{f_n} + C_{f\pi}^n f_n), \quad (45)$$

$$\frac{d\pi_{f_n}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial f_n} = -N_0 e^{-\alpha} (C_{f\pi}^n \pi_{f_n} + C_{ff}^n f_n). \quad (46)$$

Por conveniencia, trabajaremos en tiempo conforme η , tal que $d\eta = N_0 e^{-\alpha} dt$. Denotaremos con un punto las derivadas respecto a él. Así, las últimas dos ecuaciones se escriben, sencillamente,

$$\dot{f}_n = C_{\pi\pi}^n \pi_{f_n} + C_{f\pi}^n f_n, \quad (47)$$

$$\dot{\pi}_{f_n} = -C_{f\pi}^n \pi_{f_n} - C_{ff}^n f_n, \quad (48)$$

y de aquí, inmediatamente,

$$\ddot{f}_n = \frac{\dot{C}_{\pi\pi}^n}{C_{\pi\pi}^n} \dot{f}_n - \left(\det C^n + \frac{\dot{C}_{\pi\pi}^n}{C_{\pi\pi}^n} C_{f\pi}^n - \dot{C}_{f\pi}^n \right) f_n, \quad (49)$$

donde se ha definido $\det C^n := C_{ff}^n C_{\pi\pi}^n - (C_{f\pi}^n)^2$.

En cuanto a las variables homogéneas, a primer orden,

$$\dot{\phi} = e^{-2\alpha} \pi_\phi, \quad (50)$$

$$\dot{\pi}_\phi = -e^{4\alpha} m^2 \phi, \quad (51)$$

$$\dot{\alpha} = -e^{-2\alpha} \pi_\alpha, \quad (52)$$

$$\dot{\pi}_\alpha = -\frac{1}{2} e^{2\alpha} (3\dot{\alpha}^2 - 3\dot{\phi}^2 + 3e^{2\alpha} m^2 \phi^2 - 1) \quad (53)$$

y, por tanto,

$$0 = \ddot{\phi} + 2\dot{\alpha}\dot{\phi} + e^{2\alpha} m^2 \phi, \quad (54)$$

$$0 = \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} (\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\phi}^2 - 3e^{2\alpha} m^2 \phi^2 + 1). \quad (55)$$

III. UNITARIEDAD Y UNICIDAD DE LA CUANTIZACIÓN

A. Consideraciones previas

En esta sección, se considera la cuantización de la perturbación del campo escalar Φ en el modelo FLRW en S^3 . En el gauge escogido, esta perturbación coincide con un invariante bajo transformaciones infinitesimales de coordenadas.

Trataremos las variables homogéneas α y ϕ clásicamente: serán, a efectos de la cuantización, meras funciones del tiempo. Es de esperar que esta sea un aproximación aceptable mientras los efectos de la gravedad y la geometría cuánticas no sean de gran importancia. Se centra así el estudio en los fenómenos debidos a las fluctuaciones

cuánticas de los grados de libertad locales, en vez de en los procesos cuánticos que afectan a las variables globales que determinan el subsistema homogéneo.

Como vimos en la sección anterior, mediante la introducción de los armónicos hiperesféricos Q_{lm}^n , la perturbación del campo escalar se descompone en modos f_{nlm} (de momento, desglosamos nuevamente los tres índices n , l y m), que no son, recordemos, los dados por (15), pues han sido convenientemente reescalados. En el *gauge* fijado, los momentos canónicamente conjugados de estos modos pueden despejarse de la ecuación (47) y son de la forma

$$\pi_{f_{nlm}} = [1 + p_n(\eta)] \dot{f}_{nlm} + q_n(\eta) f_{nlm}, \quad (56)$$

donde las funciones temporales p_n y q_n están dadas por

$$p_n = -\frac{3\pi_\phi^2}{(n^2 - 4)\pi_\alpha^2 + 3\pi_\phi^2}, \quad (57)$$

$$q_n = -C_{f\pi}^n + O(n^{-4}). \quad (58)$$

Por otra parte, la ecuación dinámica del sistema, (49), puede reescribirse como

$$\ddot{f}_{nlm} + r_n(\eta) \dot{f}_{nlm} + [\omega_n^2 + s_n(\eta)] f_{nlm} = 0, \quad (59)$$

donde, $\omega_n^2 = n^2 - 1$, una vez más, y

$$r_n = -\frac{6\pi_\phi}{\pi_\alpha} \frac{\pi_\alpha \dot{\pi}_\phi - \dot{\pi}_\alpha \pi_\phi}{(n^2 - 4)\pi_\alpha^2 + 3\pi_\phi^2}, \quad (60)$$

$$s_n = s + O(n^{-2}). \quad (61)$$

La expresión explícita de s es

$$s = \frac{1}{2} + e^{2\alpha} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\pi_\phi^2}{\pi_\alpha^2} - \frac{e^{-4\alpha}}{2} \left(\pi_\alpha^2 - 30\pi_\phi^2 + \frac{27\pi_\phi^4}{\pi_\alpha^2} \right) - \frac{3}{2} e^{2\alpha} m^2 \phi \left[8 \frac{\pi_\phi}{\pi_\alpha} - \phi \left(\frac{3\pi_\phi^2}{\pi_\alpha^2} - 1 \right) \right]. \quad (62)$$

Como los armónicos Q_{lm}^n son complejos, si se quiere garantizar que la suma $\sum f_{nlm} Q_{lm}^n$ sea real, debe permitirse que los coeficientes f_{nlm} tomen también valores complejos, pero sujetos a unas ciertas restricciones. En concreto, puesto que los armónicos hiperesféricos satisfacen $Q_{l-m}^n = (-1)^m (Q_{lm}^n)^*$, ha de cumplirse la condición $f_{nl-m} = (-1)^m f_{nlm}^*$ (en particular, $f_{n0} \in \mathbb{R}$). Esto no supone ningún inconveniente, pues, en virtud de la linealidad del sistema, y dado que p_n , q_n , r_n y s_n son reales, es admisible fijar $m \geq 0$ y tratar las partes real e imaginaria de cada f_{nlm} como campos reales independientes sujetos a las mismas ecuaciones que el propio f_{nlm} (y, de hecho, que cualquier coeficiente con el mismo valor de n). Eso es lo que se hará en adelante, aunque no explícitamente, por no sobrecargar la notación.

Para alcanzar los resultados de unicidad, basta con considerar un intervalo cerrado I del dominio temporal, sea cual sea este. Conviene comentar que, eligiendo adecuadamente I , pueden evitarse las singularidades de los

coeficientes de las expresiones anteriores, asociadas a la anulación de π_α . Llamaremos η_0 al extremo inferior de I , que tomaremos en adelante como tiempo de referencia.

Cualquier solución de la ecuación (59) queda completamente caracterizada por el par de valores iniciales $(f_{nlm}(\eta_0), \pi_{f_{nlm}}(\eta_0))$. Si se introducen los conjuntos

$$\mathcal{F}_n = \{f_{nlm}(\eta_0) : n \text{ fijo}\}, \quad (63)$$

$$\mathcal{P}_n = \{\pi_{f_{nlm}}(\eta_0) : n \text{ fijo}\}, \quad (64)$$

esto permite descomponer el espacio de fases Γ de la siguiente manera:

$$\Gamma = \bigoplus_n (\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{P}_n). \quad (65)$$

Como el operador de Laplace-Beltrami en S^3 , del que los armónicos Q_{lm}^n son autofunciones, conmuta con las transformaciones de $\text{SO}(4)$ de las secciones espaciales del espacio-tiempo, la actuación de estas sobre las variables f_{nlm} no mezcla modos con distinto n . En realidad, la actuación completa del grupo mezcla todos los modos con igual valor de n . Otro tanto sucede con los momentos $\pi_{f_{nlm}}$. Por tanto, \mathcal{F}_n y \mathcal{P}_n se transforman con una representación irreducible del grupo simetría $\text{SO}(4)$, que es la misma en ambos casos.

La cuantización de Fock del sistema se hace en términos de variables de creación y destrucción a_{nlm}^* y a_{nlm} . Elegimos estas en función de f_{nlm} y $\pi_{f_{nlm}}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{nlm} \\ a_{nlm}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} \begin{pmatrix} \omega_n & i \\ \omega_n & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{nlm} \\ \pi_{f_{nlm}} \end{pmatrix}. \quad (66)$$

En esta nueva base, la estructura compleja escogida —que llamaremos J_0 — toma, por definición, forma diagonal por bloques, con todos los bloques iguales a

$$j_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (67)$$

La separación entre frecuencias positivas y negativas no cambia al realizar rotaciones de $\text{SO}(4)$ en las secciones espaciales, dado que las variables de creación y destrucción no se mezclan entre sí, al estar definidas en términos de los modos del operador de Laplace-Beltrami. Por tanto, la estructura compleja escogida posee la simetría $\text{SO}(4)$ del espacio de fondo.

Puesto que todos los modos con el mismo valor de n siguen la misma dinámica y están desacoplados entre sí y de los demás, el operador U que da la evolución de las variables de destrucción y creación también viene representado por una matriz diagonal por bloques:

$$\begin{pmatrix} a_{nlm}(\eta) \\ a_{nlm}^*(\eta) \end{pmatrix} = \mathcal{U}_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} a_{nlm}(\eta_0) \\ a_{nlm}^*(\eta_0) \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Cada bloque \mathcal{U}_n representa una transformación real, luego puede escribirse en la forma

$$\mathcal{U}_n(\eta, \eta_0) = \begin{pmatrix} \alpha_n(\eta, \eta_0) & \beta_n(\eta, \eta_0) \\ \beta_n^*(\eta, \eta_0) & \alpha_n^*(\eta, \eta_0) \end{pmatrix} \quad (69)$$

y, como además los paréntesis de Poisson deben conservarse, los elementos de \mathcal{U}_n están sujetos a la condición $|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2 = 1$. Esta es la forma típica de escribir una transformación de Bogoliubov, como suele denominarse a los simplectomorfismos en este contexto. Los coeficientes α_n y β_n son los coeficientes de Bogoliubov.

Al cuantizar, la evolución de los operadores de destrucción y creación en la imagen de Heisenberg está descrita por la versión cuántica de la ecuación (68):

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{nlm}(\eta) \\ \hat{a}_{nlm}^\dagger(\eta) \end{pmatrix} = \mathcal{U}_n(\eta, \eta_0) \begin{pmatrix} \hat{a}_{nlm}(\eta_0) \\ \hat{a}_{nlm}^\dagger(\eta_0) \end{pmatrix}. \quad (70)$$

La condición necesaria y suficiente para que esta transformación pueda implementarse unitariamente resulta ser [18, 19]

$$\sum_{nlm} |\beta_n(\eta, \eta_0)|^2 = \sum_n g_n |\beta_n(\eta, \eta_0)|^2 < \infty \quad (71)$$

para todo $\eta \in I$ (recordemos que $g_n = n^2$ es la dimensión del espacio asociado al autovalor ω_n). Es decir, la sucesión $\{\sqrt{g_n}\beta_n(\eta, \eta_0)\}$ ha de ser de cuadrado sumable, condición que sólo depende del comportamiento asintótico de la misma para n alto.

Tal y como se ha descrito, la situación es muy parecida a la estudiada en [12]. En aquel caso $p_n = q_n = r_n = 0$ y s_n es una función arbitraria independiente de n , es decir, no contiene contribuciones $O(n^{-2})$. A continuación, se adaptarán los argumentos presentados en la citada referencia, comprobando que sus resultados no se ven afectados por las diferencias comentadas.

B. Análisis asintótico de la ecuación dinámica

Escribamos f_n (obviando de nuevo el resto de índices) en la forma

$$f_n(\eta) = A_n e^{\omega_n \Theta_n(\eta)} + A_n^* e^{\omega_n \Theta_n^*(\eta)}, \quad (72)$$

donde A_n es una constante y Θ_n , una función, ambas complejas. La libertad adicional introducida nos permite fijar condiciones iniciales para Θ ; en particular, haremos $\Theta(\eta_0) = 0$ y $\dot{\Theta}(\eta_0) = -i$, de modo que $f_n(\eta_0) = 2\Re(A_n)$ y $\dot{f}_n(\eta_0) = 2\omega_n \Im(A_n)$.

Para que f_n sea solución de (59), $\dot{\Theta}_n$ ha satisfacer la siguiente ecuación de Ricatti:

$$\omega_n \ddot{\Theta}_n + \omega_n r_n \dot{\Theta}_n + \omega_n^2 \dot{\Theta}_n^2 + \omega_n^2 + s_n = 0. \quad (73)$$

Si r_n y s_n se anulasen, estaríamos ante la ecuación de los modos de un campo libre sin masa y tendríamos, simplemente, $\dot{\Theta}(\eta) = -i$, $\forall \eta \in I$. Puesto que $\omega_n = O(n)$, $r_n = O(n^{-2})$ y $s_n = O(1)$, es de esperar que los términos discrepantes sean, no obstante, despreciables si n es suficientemente alto y que f_n se aproxime asintóticamente a la solución del caso sin masa. Esto sugiere un nuevo cambio,

$$\dot{\Theta}_n(\eta) = -i + \frac{W_n(\eta)}{\omega_n}, \quad (74)$$

con $W_n(\eta_0) = 0$, o lo que es lo mismo,

$$\Theta_n(\eta) = -i(\eta - \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{W_n(\bar{\eta})}{\omega_n} d\bar{\eta}. \quad (75)$$

Con esto, la ecuación (73) se transforma en

$$\dot{W}_n - 2i\omega_n W_n + s_n - i\omega_n r_n + W_n^2 + r_n W_n = 0. \quad (76)$$

Recordemos que sólo nos interesa el comportamiento asintótico de W_n a n alto. Asumiremos que los tres últimos términos del miembro de la izquierda son despreciables en este régimen, y que también podemos ignorar las contribuciones de s_n de orden n^{-2} o menor. Es decir, se trata ahora de estudiar la ecuación

$$\dot{\bar{W}}_n - 2i\omega_n \bar{W}_n + s = 0 \quad (77)$$

con la condición inicial $\bar{W}_n(\eta_0) = 0$. Es inmediato hallar su solución:

$$\bar{W}_n = -e^{2i\omega_n \eta} \int_{\eta_0}^{\eta} s(\bar{\eta}) e^{-2i\omega_n \bar{\eta}} d\bar{\eta}, \quad (78)$$

o, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \bar{W}_n(\eta) &= \frac{1}{2i\omega_n} \left(s(\eta) - s(\eta_0) e^{2i\omega_n(\eta - \eta_0)} \right) + \\ &\quad - \frac{e^{2i\omega_n \eta}}{2i\omega_n} \int_{\eta_0}^{\eta} \dot{s}(\bar{\eta}) e^{-2i\omega_n \bar{\eta}} d\bar{\eta}. \end{aligned} \quad (79)$$

Como, en general, la derivada \dot{s} existe y es integrable en todo subintervalo cerrado de I , existirá una función que

acote superiormente el módulo de la integral que aparece en esta ecuación y, por ende, otra función C tal que

$$|\bar{W}_n(\eta)| < \frac{C(\eta)}{\omega_n}. \quad (80)$$

Teniendo esto en cuenta, se comprueba que los términos despreciados en (76) son, efectivamente, a lo más, $O(n^{-1})$, mientras que el resto es de orden unidad, lo que justifica la aproximación efectuada.

Por tanto, a n alto, W_n decrece como n^{-1} o más rápido. Esto es todo lo que necesitamos saber para el análisis asintótico que llevaremos a cabo a continuación.

C. Unitariedad de la evolución

Los coeficientes de Bogoliubov α_n y β_n pueden calcularse mediante el siguiente procedimiento: i) escribir la variable de destrucción $a_n(\eta)$ en función de $f_n(\eta)$ y $\dot{f}_n(\eta)$, usando las ecuaciones (66) y (56); ii) sustituir $f_n(\eta)$ por su expresión (72); iii) recordar que A_n puede escribirse en función de los datos iniciales como

$$A_n = \frac{1}{2\omega_n} [\omega_n f_n(\eta_0) + i \dot{f}_n(\eta_0)] \quad (81)$$

y iv) deshacer la transformación del primer punto para expresar los datos $f_n(\eta_0)$ y $\dot{f}_n(\eta_0)$ en términos de $a_n(\eta_0)$ y $a_n^*(\eta_0)$. Los coeficientes $\alpha(\eta, \eta_0)$ y $\beta(\eta, \eta_0)$ serán, entonces, los factores que multipliquen a $a_n(\eta_0)$ y $a_n^*(\eta_0)$, respectivamente. Teniendo además en cuenta el cambio dado por (74), se alcanza el siguiente resultado:

$$\alpha_n(\eta, \eta_0) = \frac{1}{1 + p_n} \left\{ [1 + G_n(\eta)] [1 + F_n(\eta_0)] e^{\omega_n \Theta_n(\eta)} - G_n^*(\eta) F_n^*(\eta_0) e^{\omega_n \Theta_n^*(\eta)} \right\}, \quad (82)$$

$$\beta_n(\eta, \eta_0) = \frac{1}{1 + p_n} \left\{ [1 + G_n(\eta)] F_n(\eta_0) e^{\omega_n \Theta_n(\eta)} - G_n^*(\eta) [1 + F_n(\eta_0)] e^{\omega_n \Theta_n^*(\eta)} \right\}, \quad (83)$$

donde se han introducido las funciones

$$F_n = \frac{1}{2} \left(p_n - i \frac{q_n}{\omega_n} \right), \quad (84)$$

$$G_n = F_n^* + \frac{i}{2} (1 + p_n) \frac{W_n}{\omega_n}, \quad (85)$$

ambas de orden n^{-2} .

Puesto que $(1 + p_n)^{-1} = 1 + O(n^{-2})$ es fácil comprobar que $\alpha_n = e^{\omega_n \Theta_n} + O(n^{-2})$ y, como además, de acuerdo con (75),

$$|e^{\omega_n \Theta_n}| = e^{\omega_n \Re(\Theta_n)} = 1 + O(n^{-1}), \quad (86)$$

se concluye que $\beta_n = O(n^{-2})$. Con esto, queda probado que la dinámica puede implementarse unitariamente

en esta representación, pues los términos $g_n |\beta_n|^2$ son de orden n^{-2} y, en consecuencia, su suma converge, como queríamos demostrar.

D. Equivalencia de otras representaciones invariantes con evolución unitaria

Ahora que ya sabemos que la representación elegida, invariante bajo transformaciones de $SO(4)$, tiene dinámica unitaria, cabe preguntarse si existe otra no equivalente con las mismas propiedades.

Dada la estructura del espacio de fases, cualquier estructura compleja J invariante bajo la acción del grupo de simetría se descompone de la forma $\bigoplus_n J_n$, donde ca-

da J_n actúa sobre el espacio $\mathcal{F}_n \oplus \mathcal{P}_n$. En la base obtenida concatenando la base de \mathcal{F}_n formada por los modos f_{nlm} con la correspondiente base de \mathcal{P}_n , J_n puede escribirse por bloques como

$$\begin{pmatrix} J_n^{ff} & J_n^{f\pi} \\ J_n^{\pi f} & J_n^{\pi\pi} \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Consideremos entonces una transformación $T \in \text{SO}(4)$ cualquiera, representada por $D_n(T)$ en \mathcal{F}_n y, por tanto, también en \mathcal{P}_n . La condición de invariancia bajo T , a saber, $T^{-1}JT = J$, sólo puede satisfacerse si los cuatro bloques de J_n que aparecen en (87) conmutan con $D_n(T)$. Como esto ha de cumplirse $\forall T \in \text{SO}(4)$, el lema de Schur [20] implica que dichos bloques deben ser múltiplos de la matriz identidad. Luego la descomposición de la estructura compleja puede afinarse más: así, $J_n = \bigoplus_{lm} J_{nlm}$, donde J_{nlm} actúa sobre el subespacio que generan f_{nlm} y $\pi_{f_{nlm}}$ y su expresión matricial, que denotaremos por j_n en la base $\{a_{nlm}, a_{nlm}^*\}$, sólo depende de n .

Dado que que la nueva estructura compleja puede diagonalizarse bloque por bloque escogiendo unas nuevas variables de creación y destrucción *ad hoc*, tiene que existir un simplectomorfismo K tal que $J = KJ_0K^{-1}$, o, por bloques, $j_n = \mathcal{K}_n j_0 \mathcal{K}_n^{-1}$. Como ya se argumentó en el caso análogo del operador de evolución, los bloques \mathcal{K}_n de la transformación canónica K serán del tipo

$$\mathcal{K}_n = \begin{pmatrix} \kappa_n & \lambda_n \\ \lambda_n^* & \kappa_n^* \end{pmatrix}, \quad (88)$$

con $|\kappa_n|^2 - |\lambda_n|^2 = 1$. Una transformación canónica U será unitariamente implementable con respecto a la nueva estructura compleja J si y sólo si $K^{-1}UK$ lo es con respecto a J_0 [9]. Los bloques de $K^{-1}UK$ tendrán la forma

$$\mathcal{K}_n^{-1} \mathcal{U}_n \mathcal{K}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n^J & \beta_n^J \\ (\beta_n^J)^* & (\alpha_n^J)^* \end{pmatrix}. \quad (89)$$

El cálculo directo demuestra que

$$\beta_n^J = (\kappa_n^*)^2 \beta_n - \lambda_n^2 \beta_n^* + 2i\kappa_n^* \lambda_n \Im(\alpha_n). \quad (90)$$

Así pues, si U es unitariamente implementable con respecto a J , la sucesión $\{\sqrt{g_n} \beta_n^J(\eta, \eta_0)\}$ debe ser de cuadrado sumable. Supondremos, por hipótesis, que es ese el caso. Se trata, entonces, de probar que la sucesión $\{\sqrt{g_n} \lambda_n\}$ es también de cuadrado sumable, lo que basta para garantizar que la transformación K , que relaciona las dos estructuras complejas, puede implementarse unitariamente, de manera que ambas resulten equivalentes.

De la relación $|\kappa_n|^2 - |\lambda_n|^2 = 1$ se deduce que $|\kappa_n| > 1$,

por lo que, si $\{\sqrt{g_n} \beta_n^J(\eta, \eta_0)\}$ es de cuadrado sumable, también lo es $\{\sqrt{g_n} \beta_n^J(\eta, \eta_0) / (\kappa_n^*)^2\}$. De ahí, teniendo en cuenta la ecuación (90), el hecho de que $|\lambda_n / \kappa_n| < 1$ y la sumabilidad al cuadrado de $\{\sqrt{g_n} \beta_n(\eta, \eta_0)\}$, se alcanza la conclusión de que la sucesión

$$\left\{ \sqrt{g_n} \frac{\lambda_n}{\kappa_n^*} \Im[\alpha_n(\eta, \eta_0)] \right\} \quad (91)$$

debe ser de cuadrado sumable. Llegados a este punto, es difícil resistir la tentación de argumentar que, ya que α_n es del orden de la unidad, $\{\sqrt{g_n} \lambda_n / \kappa_n^*\}$ ha de ser de cuadrado sumable. Aunque la conclusión es correcta, la demostración requiere algo más de trabajo debido a que es sólo la parte imaginaria de α_n la que interviene y, en general, se trata de una función oscilante en el tiempo que puede anularse. Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de α_n , se obtiene que

$$\sqrt{g_n} \frac{\lambda_n}{\kappa_n^*} \Im(\alpha_n) = \sqrt{g_n} \frac{\lambda_n}{\kappa_n^*} \Im(e^{\omega_n \Theta_n}) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (92)$$

Por supuesto, la contribución de los términos de orden n^{-1} e inferior es de cuadrado sumable y puede ignorarse. Ahora bien, $e^{\omega_n \Theta_n} = e^{\omega_n \Re(\Theta_n)} e^{i\omega_n \Im(\Theta_n)}$ y, como $e^{\omega_n \Re(\Theta_n)} = 1 + O(n^{-1})$, este factor puede acotarse inferiormente por una cantidad positiva a partir de un cierto valor de n . De ello, se concluye que

$$\left\{ \sqrt{g_n} \frac{\lambda_n}{\kappa_n^*} \text{sen}(\omega_n \Im[\Theta_n(\eta)]) \right\} \quad (93)$$

tiene que ser de cuadrado sumable. Calculando por partes la integral de (79), y combinando dicha ecuación con (75), puede calcularse el argumento del seno, y así

$$\begin{aligned} \text{sen}(\omega_n \Im[\Theta_n(\eta)]) &= -\text{sen} \left[\omega_n(\eta - \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{s(\bar{\eta})}{2\omega_n} d\bar{\eta} \right] + \\ &+ O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (94)$$

En consecuencia, la sucesión

$$\left\{ \sqrt{g_n} \frac{\lambda_n}{\kappa_n^*} \text{sen} \left[\omega_n(\eta - \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{s(\bar{\eta})}{2\omega_n} d\bar{\eta} \right] \right\} \quad (95)$$

debe ser de cuadrado sumable para todo $\eta \in I$. Llamemos $Z(\eta)$ a la suma de sus términos al cuadrado, definida pues en todo I . En general, para una función s como la considerada, el teorema de Luzin [21] garantiza que $\forall \delta > 0$ existen un conjunto medible $E_\delta \subset I$ tal que la medida de su complemento $I \setminus E_\delta$ es menor que δ , y una función Z_δ continua en I que coincide con Z en E_δ . Este resultado nos permite escribir:

$$\sum_{n=1}^M g_n \left| \frac{\lambda_n}{\kappa_n} \right|^2 \int_{E_\delta} \text{sen}^2 \left[\omega_n(\eta - \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{s(\bar{\eta})}{2\omega_n} d\bar{\eta} \right] d\eta \leq \int_{E_\delta} Z(\eta) d\eta = \int_{E_\delta} Z_\delta(\eta) d\eta < \infty. \quad (96)$$

Dado que la integral del primer miembro puede acotarse inferiormente por una constante estrictamente positiva si n es mayor que un cierto número entero n_0 (véase el apéndice de [12]), la anterior desigualdad basta para probar que la sucesión $\{\sqrt{g_n}\lambda_n/\kappa_n\}$ es de cuadrado sumable, ya que las sumas parciales de sus elementos al cuadrado forman una sucesión no decreciente que está acotada superiormente. En particular, teniendo en cuenta la relación $|\kappa_n|^2 - |\lambda_n|^2 = 1$, esta sumabilidad conlleva que λ_n tiende a cero y, por ende, $|\kappa_n|$ ha de tender a 1. Así pues, la sucesión con elementos $|\kappa_n|$ puede acotarse superiormente. De ello, se concluye que también la sucesión $\{\sqrt{g_n}\lambda_n\}$ tiene que ser de cuadrado sumable, como se quería demostrar.

IV. CONCLUSIONES

Este trabajo ha comenzado con un análisis del modelo FLRW en la 3-esfera con un campo escalar como contenido material, perturbado escalarmente hasta segundo orden (hasta primer orden en las ecuaciones de movimiento), utilizando el formalismo hamiltoniano. La primera parte del mismo reproduce el desarrollo que puede encontrarse en el artículo [16]. Sin embargo, la consistencia de la condición de fijación de *gauge* se estudia aquí en mayor detalle, así como el reescalado de Mukhanov, y se introduce una transformación canónica que tiene el objetivo de evitar en lo posible términos cruzados entre momentos y variables de configuración de los modos de la perturbación del campo escalar en el hamiltoniano del sistema.

A continuación, se ha estudiado la cuantización de la perturbación del campo escalar, asumiendo que las variables homogéneas están adecuadamente descritas clásicamente. Éste puede considerarse el primer escalón hacia la cuantización completa del sistema, ignorando por el momento los procesos cuánticos que afectan directamente a los grados de libertad globales del mismo. Primeramente, se ha escogido una representación caracterizada por una estructura compleja que comparte las simetrías de las secciones espaciales sobre las que está definida la teoría: el grupo de rotaciones $SO(4)$. Como se ha probado, en esa representación la evolución de las perturbaciones está descrita por un operador unitario. Es más, se ha demostrado que las dos propiedades mencionadas —misma simetría que el fondo y unitariedad de la evolución— definen una clase de equivalencia unitaria entre las representaciones, lo que permite sortear las ambigüedades que son típicas de la TCCEC: basta apelar a estas dos condiciones para que la cuantización del sistema quede completamente determinada salvo equivalencia unitaria (que no afecta a las predicciones físicas). Con esto se extienden

los resultados de la referencia [12] a un caso más general en el que: i) la ecuación de movimiento no es simplemente la de un campo escalar con masa dependiente del tiempo, sino que además presenta un término lineal en la primera derivada y contribuciones adicionales a la masa, ambos subdominantes, y ii) los momentos canónicamente conjugados de los modos no son sencillamente sus derivadas, sino que aparecen nuevos términos, también subdominantes, que son lineales en el modo y su derivada. Tanto en un caso como en el otro, las nuevas contribuciones son de orden ω_n^{-2} y no modifican esencialmente las demostraciones que desarrolla la referencia citada. Esto amplía aún más el horizonte de generalizaciones de esos y otros resultados afines.

Por ejemplo, los argumentos presentados en [13] se extienden directamente a este caso. En ese artículo, se demuestra que, si el campo se reescala con una función del fondo (dependiente únicamente del tiempo) y el momento se modifica de tal forma que la transformación lineal resultante sea canónica, no podrá encontrarse una cuantización que permita la implementación unitaria de la dinámica (salvo si la transformación canónica es trivialmente constante). Este resultado completa la prueba de unicidad de la cuantización, dentro del conjunto de transformaciones canónicas y representaciones de Fock que es natural considerar en estos contextos con fondos cosmológicos.

Para concluir, existe otro motivo por el que el estudio realizado resulta de interés: su posterior aplicación en la cuantización completa del sistema siguiendo técnicas híbridas [22]. Dichas técnicas, propuestas recientemente [23], combinan la cuantización de Fock de las perturbaciones que describen las inhomogeneidades con el tratamiento cuántico de los grados de libertad homogéneos del sistema mediante métodos de la Cosmología Cuántica de Lazos [24]. Ésta última disciplina adapta la Gravedad Cuántica de Lazos —una prometedora candidata a teoría cuántica de la RG [25]— a sistemas obtenidos a partir de la teoría einsteiniana mediante la imposición de simetrías.

-
- [1] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press (1984).
- [2] E. W. Kolb y M. S. Turner, *The Early Universe*, Westview Press (1994).
- [3] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman y R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations*, Phys. Rept. **215**, 203 (1992)
- [4] A. R. Liddle y D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press (2000).
- [5] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, Chicago University Press (1994).
- [6] A. Corichi, J. Cortez y H. Quevedo, *Schrödinger and Fock representation for a field theory on curved spacetime*, Ann. Phys. **313**, 446 (2004)
- [7] B. Simon, *Topics in Functional Analysis*, Academic Press (1972).
- [8] A. Ashtekar y A. Magnon-Ashtekar, *A curiosity concerning the role of coherent states in quantum field theory*, Pramana **15**, 107 (1980)
- [9] A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 model: a uniqueness result*, Class. Quantum Grav. **23**, 6301 (2006)
- [10] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of the Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **75**, 084027 (2007)
- [11] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock representation of the Gowdy $S^1 \times S^2$ and S^3 models*, Class. Quantum Grav. **25**, 105005 (2008)
- [12] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Fock quantization of a scalar field with time dependent mass on the three-sphere: Unitarity and uniqueness*, Phys. Rev. D **81**, 044037 (2010)
- [13] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of fields with unitary dynamics in nonstationary spacetimes*, Phys. Rev. D **83**, 025002 (2011)
- [14] R. H. Gowdy, *Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and boundary conditions*, Ann. Phys. **83**, 203 (1974)
- [15] C. W. Misner, K. S. Thorn y J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).
- [16] J. J. Halliwell y S. W. Hawking, *Origin of structure in the Universe*, Phys. Rev. D **31**, 1777 (1985)
- [17] U. H. Gerlach y U. K. Sengupta, *Homogeneous collapsing star: Tensor and vector harmonics for matter and field asymmetries*, Phys. Rev. D **18**, 1773 (1978)
- [18] D. Shale, *Linear symmetries of free boson fields*, Trans. Am. Math. Soc. **103**, 149 (1962)
- [19] R. Honegger y A. Rieckers, *Squeezing Bogoliubov transformations on the infinite mode CCR-algebra*, J. Math. Phys. **37**, 4292 (1996)
- [20] A. A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag (1976).
- [21] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover (1999).
- [22] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Complete hybrid quantization of an inflationary universe with inhomogeneities*, en preparación.
- [23] M. Martín-Benito, L. J. Garay y G. A. Mena Marugán, *Hybrid quantum Gowdy cosmology: Combining loop and Fock quantizations*, Phys. Rev. D **78**, 083516 (2008)
- [24] A. Ashtekar, *Loop Quantum Cosmology: An overview*, Gen. Rel. Grav. **41**, 707 (2009)
- [25] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge University Press (2007).