REVISTA MATEMÁTICA HISPANO-AMERICANA

TOMO VI

MADRID
1924

F. Klein

REVISTA MATEMÁTICA
HISPANO-AMERICANA

TOMO VII — SEPTIEMBRE DE 1925 — NÚM. 7

EL PROFESOR F. KLEIN (*)

Datos biográficos: Nació el 25 de Abril de 1849 en Düsseldorf. Se doctoró en Filosofía en la Universidad de Bonn el año 1868, explicando varios cursos como docente privado en Gotinga y también como Profesor extraordinario en la misma ciudad y luego en Erlangen. Desde 1875 a 1880 fué Profesor en la Escuela politécnica de Múnich; desde 1880 a 1886 Profesor ordinario en Leipzig, y desde el 86 hasta 1923 en Gotinga. Era miembro de la mayor y más importante parte de las Corporaciones científicas alemanas y extranjeras.

Con el Profesor F. Klein, pierde la Matemática uno de sus más geniales y fervorosos investigadores y la actual generación uno de sus Maestros más sugestivos. Difícilmente se encontrará un matemático de fin de siglo y comienzos del presente que no haya sufrido su profunda y benéfica influencia, ejercida siempre a través de sus concurridos cursos y seminarios de las Universidades de Leipzig y Gotinga. En la imposibilidad de ofrecer a los lectores de nuestra REVISTA un estudio detenido y completo de la obra del ilustre matemático, tanto en la investigación como en la enseñanza, nos limitaremos aquí, a mostrar en rápida ojeada, los principales trabajos que la Matemática debe a Klein. En su enumeración seguiremos el orden en que han sido por él mismo agrupados.

(*) Ya en prensa el número de Junio se recibió la noticia de su muerte ocurrida el 22 de Junio de 1925, a los setenta y seis años de edad, en la misma ciudad donde tantos maestros e investigadores matemáticos han sido por él formados u orientados, Gotinga.

La Geometría y el Programa de Erlangen.—Aunque ya antes había aplicado las ideas de *Sophus Lie*, camarada y compañero de Profesorado, al estudio de la Geometría de los complejos de rectas y a la Geometría de Lie (de las esferas), fué precisamente en su célebre Programa de Erlangen (*) donde las geniales ideas de aquél, fecundaron más intensamente la Geometría, que en su ulterior desarrollo no ha hecho más que perfilar e intentado llenar las lagunas señaladas por Klein en su discurso-proyecto. En él, se concibe como problema más general de la Geometría el siguiente: Dado un espacio abstracto de cualquier número de dimensiones, y un grupo de operaciones entre sus elementos, investigar aquellas propiedades de las figuras de este espacio, que no son alteradas por las transformaciones del grupo. Junto con esta definición de Geometría, enunció su célebre *Principio,* que permite generalizar toda Geometría, adoptando grupos cada vez más amplios, que comprenden a los anteriores como subgrupos. Esta visión panorámica que da la Teoría de grupos del campo total de la Geometría, no ha sido aún superada, aunque sí ampliada, especialmente en la actualidad, y excitado por los nuevos conceptos de Einstein y Weyl, por el Profesor Cartan, los cuales han puesto de manifiesto la importancia de las ideas de Klein en su relación con los fundamentos de la Geometría y con un fino análisis matemático del problema del espacio.

Los grupos de substituciones y la teoría de las ecuaciones algebraicas.—También en este orden de ideas, los trabajos de Klein son definitivos y marcan el punto de partida y métodos a seguir en problemas análogos más generales. Bien conocidas y fundamentales son sus investigaciones sobre la ecuación de 5.° grado. Aquí es capital el concepto de *resolución* de una ecuación algebraica; así corrientemente se dice que la ecuación de 5.° grado se resuelve por funciones elípticas, expresión que carece de exactitud si se la toma en correspondencia con la de resolución por radicales; las funciones elípticas entran en la solución de aquélla, del mismo modo que se podría decir que entran los logaritmos en la solución por radicales. Klein entiende por resolución de una ecuación su

(*) El lector puede, para más detalles, consultar la obra del Dr. Rey Pastor, "Fundamentos de la Geometría proyectiva superior", donde además de hallar expuestas con gran claridad las sistematizadoras ideas de Klein, podrá obtener copioso caudal de datos bibliográficos para un estudio ulterior más profundo de la cuestión.

reducción a ciertas ecuaciones algebraicas normales. Así obtuvo la ecuación normal de la de 5.º grado, su célebre *ecuación del icosaedro.* El método empleado en el tratamiento de estas cuestiones está fundado en los grupos de sustituciones lineales, como se halla expuesto en sus elegantes y sugestivas *Vorlesungen über das Ikosaeder,* 1884. Posteriormente, se ha estudiado y resuelto el problema de Klein para las ecuaciones de grados 6 y 7.

LA TEORÍA DE FUNCIONES DE RIEMANN. FUNCIONES HIPERELÍPTICAS Y ABELIANAS. FUNCIONES AUTOMORFAS.—Puede decirse que ha sido siempre Riemann el faro que ha guiado todas las investigaciones del Prof. Klein, y que el objeto y resultado más importante de sus trabajos ha consistido en dar vida a las geniales ideas de aquél. Él ha sido el primero en concretar y aplicar los conceptos de teoría de funciones contenidas en las escasas y abstrusas memorias de su antecesor en la Universidad de Gotinga, y con ellos impulsar fuertemente el estudio de la teoría de funciones algebraicas y abelianas, desarrollando las ideas topológicas, base escondida de los pensamientos de Riemann. Gracias a Klein, han sido dilucidados muchos de los numerosos e interesantes problemas sobre las curvas algebraicas, tanto desde el punto de vista real, como complejo, y de él parten los trabajos de Noether, Brill, Harnack, Hilbert, Rohn, etcétera. Con la directriz funcional de Riemann y los conceptos grupales de Lie, fundidos en una admirable síntesis, obtiene el hermoso edificio de la Teoría de funciones automorfas, ya iniciado, desde un punto de vista algo diferente, por Schwarz y Poincaré (con sus funciones fuchsianas).

En particular, por lo que se refiere a la teoría de funciones elípticas, hiperelípticas y abelianas, y generalizando los conceptos de la teoría de invariantes, introducidos por Clebsch en el estudio de dichas funciones, llegó a formular el siguiente programa, desarrollado en un caso particular en su gran obra, hecha en colaboración con su discípulo Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen,* y más tarde en sus *Vorlesungen über Automorphen Funktionen* (2 vol.): Dado el grupo discontinuo

$$u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

$$\omega'_1 = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \qquad \omega'_2 = \gamma \omega_1 + \delta \omega_2,$$

la primera tarea es la construcción de todos sus subgrupos. Entre éstos, los más sencillos son los llamados por él *de congruencia,* y corresponden a valores tales que

$$\left.\begin{array}{lll} m_1 \equiv 0, & \alpha \equiv 1, & \beta \equiv 0 \\ m_2 \equiv 0, & \gamma \equiv 0, & \delta \equiv 1 \end{array}\right\} \quad (\text{mód. } n).$$

La segunda cuestión es determinar todos sus invariantes y las relaciones entre ellos. Este punto de vista tan general abarca las teóricas clásicas; así, para $n = 1$, se tiene la de Weierstrass, mientras que para $n = 2$ resulta la de Jacobi; el caso de $u = 0$, es el desarrollado en la primera de las obras citadas, por ese carácter distintivo de las funciones modulares.

Con esto hemos señalado los tres órdenes de ideas en que se ha movido el espíritu de Klein. Como se puede sospechar, y se comprueba estudiando sus obras, su mente matemática es formidablemente intuitiva, o mejor, como él mismo dice, lógico intuitiva, esto es, utiliza en la investigación la intuición refinada, que no es propiamente una intuición, sino que tiene su origen en el desarrollo lógico de los axiomas considerados como perfectamente rigurosos. Esto es lo que domina en sus célebres cursos autografiados (*), modelos de exposición magistral, desprovistos de toda minucia inútil y perjudicial y repletos de sugestiones e incitaciones a relacionar estrechamente las nociones y problemas matemáticos más aparentemente separados.

No hay obras más propias para excitar a los jóvenes en la investigación matemática como éstas de Klein, y por eso nunca serán demasiado recomendadas. En ellas es donde está más patente y vivo el verdadero espíritu de Maestro genial que poseía el Profesor Klein.

T. R. BACHILLER.

(*) Una lista completa de sus cursos y todas sus memorias, se encuentra en el tomo III de sus *Gesammelte Mathematische Abhandlungen,* publicadas por J. Springer, Berlín, 1921-22-23, y recopiladas por el mismo Klein y los Profesores Fricke, Ostrowski, Vermeil y Bessel-Hagen. De los cursos litografiados, uno de los más hermosos pronto estará publicado en español, el titulado *La Matemática elemental desde un punto de vista superior,* que la SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA edita, por creer ha de ser sumamente útil a todos, y en especial a los Profesores o aspirantes al profesorado elemental.