UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa

TESIS DOCTORAL

Control Estocastico de modelos con expectativas racionales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Emilio Cerda Tena

DIRECTOR:

Pilar Ibarrola Muñoz

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Estadística e Investigación Operativa

CONTROL ESTOCASTICO DE MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES

Emilio Cerdá Tena
Madrid, 1989

Colección Tesis Doctorales. N.º 144/89

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria
Madrid, 1989
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-21508-1989

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

CONTROL ESTOCASTICO DE MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES.

EMILIO CERDA TENA

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS
REALIZADA BAJO LA DIRECCIÓN DE LA DRA. Dª PILAR IBARROLA MUÑOZ.

MADRID, ABRIL DE 1987

NOTA PREVIA

El interés por el tema de Control Estocástico, en el que se enmarca este trabajo, surgió a partir de un curso de doctorado, impartido por la profesora Pilar Ibarrola.

Tras una fase de estudio de la bibliografía básica, la directora de la tesis, profesora Ibarrola, sugirió que tomáramos como tema concreto de investigación algún problema de control que estuviera planteado en la literatura económica, dado mi interés por la Economía y mi trabajo en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. A mi me pareció bien la idea. Pasé, entonces, por una fase de indagación y búsqueda en la literatura económica. Finalmente, el artículo de W. Buiter "Control and Expectations", publicado en 1983 en la revista Economie Appliquée, que me facilitó la profesora Rosa Barbolla, dió la pista sobre el tema a investigar.

El proceso ha sido largo y con altibajos. Tengo muy claro que yo solo hubiera sido incapaz de culminar el trabajo. Sin las ayudas y apoyos recibidos me hubiera quedado en el camino. Quiero, por tanto, expresar mi agradecimiento a las personas con las que estoy en deuda.

En primer lugar, quiero agradecer a la profesora Pilar Ibarrola, directora del Departamento de Estadística e Investigación Operativa y directora de la tesis, su apoyo y ayuda, fundamental y decisiva en el desarrollo del trabajo.

A Rosa Barbolla, catedrática de Matemáticas para Economistas, le tengo que agradecer su orientación, estímulo y el interés que siempre ha tenido en que esta tesis saliera adelante.

Alfonso Novales, profesor titular de Econometría, me ha ayudado a establecer la conexión de los resultados matemáticos con la Economía y, en particular, a la elaboración de los ejemplos económicos del capítulo V.

A Charo Romera, Angel Sarabia y Javier Yañez siempre les he tenido a mi disposición con sus conocimientos y experiencia, tras haber realizado su tesis sobre Control Estocástico en la Facultad de Matemáticas. Además, el proyecto de investigar en equipo ha supuesto para mi un aliciente.

A Arthur Treadway le quiero agradecer el interés y tiempo que me dedicó en la fase de búsqueda del tema de control en la literatura económica.

Quiero agradecer a la Fundación de Estudios de Economía Aplicada (FEDEA), las facilidades que me ha dado, a través de Alfonso Novales, para utilizar sus locales y equipo en la preparación de los ejemplos del capítulo V.

A Paloma Fernández y Merche Barinaga les agradezco su eficiencia y rapidez en la ingrata tarea del mecanografiado del texto.

Finalmente, a todos los familiares, amigos y compañeros que me han ayudado en esta tarea y me han tenido que soportar en algunos momentos difíciles, les agradezco su comprensión y apoyo.

INDICE

P R O L O G O

PROLOGO

El objetivo del trabajo es elaborar una teoría de control para un tipo de modelos que se presentan en Economía: los modelos con expectativas racionales para los que no sirven las técnicas habituales.

Estudiamos dos tipos de sistemas con expectativas racionales:

a) Aquellos en que el valor de la variable de estado en el presente, depende de expectativas sobre el valor que dicha variable tomará en determinados períodos futuros (les llamamos modelos con expectativas futuras); b) Aquellos en que el valor de la variable de estado en el presente, depende de expectativas que, sobre el valor de dicha variable en el presente, fueron tomadas en períodos pasados (les llamamos modelos con expectativas actuales, tomadas en el pasado).

Los problemas que estudiamos se refieren a sistemas lineales, con funcional objetivo cuadrático y formulados en tiempo discreto, ya que es de esta forma como aparecen planteados en la literatura económica, como señalamos en el capítulo I.

El trabajo consta de cinco capítulos: el primero es de introducción; en los capítulos II,III y IV se desarrolla la teoría matemática y en el capítulo V se aplican los resultados obtenidos a dos ejemplos económicos y se recogen las conclusiones finales. Además, hay un apéndice, en que aparecen los programas para ordenador utilizados en las aplicaciones del capítulo V.

En el capítulo I se parte del trabajo de Kydland y Presscot (1977), en el que llegan a la conclusión de que la teoría de control no sirve para modelos económicos con expectativas racionales. A continuación se analiza el papel de la teoría de juegos y de las expectativas en modelos económicos viendo que, en general, un sistema con expectativas racionales será no causal, por lo que no serán aplicables las técnicas usuales de teoría de control. Se analizan las aportaciones de Aoki-Canzoneri, Chow, Driffil y Buiter y se ve que, en determinadas condiciones, sí son aplicables las técnicas usuales de control, que hay algunas aportaciones sobre nuevas técnicas y que es un campo sobre el que hace falta más investigación.

En el capítulo II se estudia el problema de control, caso de información completa, para modelos con expectativas futuras. Se parte de la solución que propone Chow para un caso particular, se analizan y discuten aspectos de esa solución y luego se resuelve el problema para el caso general, en los casos de variables exógenas estocásticas y determinísticas, probándose que el resultado final al que llegamos es más general que el de Chow y que, bajo determinadas condiciones ambos resultados coinciden. Finalmente se estudia la versión determinística del problema.

El capítulo III se dedica a modelos con expectativas futuras, para el caso de información incompleta. En primer lugar se resuelve el problema de control: la solución que se obtiene es la misma que en el caso de información completa, pero apareciendo la esperanza condicionada del vector de estado en lugar de dicho vector de estado. Se estudia tambien el problema de estimación, para los casos Gaussiano y no Gaussiano, obteniéndose la generalización del filtro de Kalman para estos modelos. Al relacionar el problema de estimación con el problema de control, en el caso Gaussiano, se comprueba que, a diferencia de lo que ocurre en modelos sin expectativas, no hay separación entre estimación y control.

En el capítulo IV analizamos modelos con expectativas actuales tomadas en el pasado. Resolvemos el problema de control, para el caso de información completa, cuando las expectativas se han tomado con uno y dos períodos de antelación. A continuación, para el caso de información incompleta, resolvemos el problema de estimación, en los casos Gaussiano y no Gaussiano, cuando las expectativas se han tomado hasta con p períodos de anticipación, obteniendo la generalización del filtro de Kalman para este tipo de modelos.

El capítulo V comienza con un ejemplo en el que se resuelve un problema de control para un sistema con expectativas racionales con una variable de estado (la tasa de inflación) y una variable de control (la tasa de variación de la oferta monetaria); el objetivo es llevar la tasa de inflación a cero, partiendo de una tasa inicial dada. En el ejemplo 2 tenemos dos variables de estado (tasa de inflación y tipo de interés nominal) y una variable de control (tasa de variación de la oferta monetaria) y el objetivo es que las variables de estado se mantengan tan próximas como sea posible a unos valores prefijados, a partir de una situación inicial. En los dos ejemplos se simulan los ruidos, se encuentran las soluciones óptimas utilizando los resultados obtenidos en los capítulos anteriores y se estudia la influencia de determinados cambios en los parámetros del problema. El capítulo termina con las conclusiones finales del trabajo.

C A P I T U L O - I

INTRODUCCION.

El control óptimo ha sido utilizado con éxito en ingeniería y en economía de la empresa: así, ha permitido ganancias importantes de eficiencia en la planificación de la producción y en el control de inventarios. Ha sido el instrumento básico para describir el comportamiento de individuos y empresas, cuando la actividad económica se desarrolla a través del tiempo. También se ha utilizado en macroeconomía -Kendrick (1976) analiza alrededor de noventa aplicaciones- aunque el éxito es más discutible. Hay gran cantidad de trabajos sobre el control óptimo aplicado a sistemas macroeconómicos: por ejemplo, podemos citar los libros de Aoki (1976); Chow (1975) y (1981), B. Friedman (1975), Pindyck (1973), Pitchford y Turnovsky (1977), Kendrick (1981) y Murata (1982).

Kydland y Prescott (1977) investigan la aplicabilidad de métodos de control óptimo a sistemas macroeconómicos y llegan a la conclusión de que tales métodos no sirven para sistemas económicos formulados con expectativas racionales. Vamos a comentar este artículo, que tomaremos como punto de partida de nuestro trabajo.

1.- EL TRABAJO DE KYDLAND Y PRESCOTT (1977).

Consideran el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \text{MAX } S\ (y_1,\ldots,y_T,\ x_1,\ldots,\ x_T) & (1) \\ y_t = Y_t\ (y_1,\ldots,\ y_{t-1},\ \ x_1,\ldots,\ x_T),\ \text{para } t=1,2,\ldots,T & (2) \\ x_t \in C_t,\ \text{para } t=1,2,\ldots,T & \end{cases}$$

en donde $x=(x_1, x_2, \ldots, x_T)$ es el conjunto de políticas (variables de decisión de la autoridad económica planificadora), $y=(y_1, y_2, \ldots, y_T)$ es el conjunto de variables de decisión de los agentes económicos; $S(y_1, \ldots, y_T, x_1, \ldots, x_T)$ es la función objetivo, sobre la que hay acuerdo social.

Una política óptima x^*, si existe, es aquella que es factible y maximiza la función objetivo (1), sujeta a la restricción (2).

A continuación definen el concepto de consistencia, de la siguiente forma:

Una política x es consistente si, para cada período de tiempo t, x_t maximiza (1), tomando como dadas las decisiones previas $y_1, \ldots, y_{t-1}$, $x_1, \ldots, x_{t-1}$ y teniendo en cuenta que las decisiones políticas futuras (x_s, para $s > t$), se seleccionan de manera similar.

La inconsistencia de la política óptima es fácilmente demostrada en el siguiente caso, con T=2.

$$\begin{cases} \text{MAX } S(y_1, y_2, x_1, x_2) \\ y_1 = Y_1(x_1, x_2) \\ y_2 = Y_2(y_1, x_1, x_2) \end{cases}$$

Vamos a extendernos algo más que Kydland y Prescott, calculando tres soluciones.

1) Solución óptima: $x^1=(x_1^1, x_2^1)$

Suponiendo diferenciabilidad, la solución óptima verificará las condiciones de optimalidad de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial y_2}\left[\frac{\partial Y_2}{\partial y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial S}{\partial x_1} = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial S}{\partial y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial y_2}\left[\frac{\partial Y_2}{\partial y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Y_2}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0 \quad (2) \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^1 = (x_1^1,\ x_2^1)$$

2) Solución consistente no anticipada: $x^2 = (x_1^1,\ x_2^2)$

En el período 1 se utiliza la política óptima x_1^1 y los agentes económicos toman x_2^1, política óptima en el período 2, como expectativa. En cuanto llega el período 2, tomando x_1, y_1 como dados, la política óptima predeterminada resulta subóptima y el planificador tiene incentivos para cambiar x_2, calculándola de manera que cumpla la condición:

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0 \quad (3) \rightarrow x_2^2$$

La solución consistente ignora el efecto de x_2 sobre y_1. Comparando (2) con (3), vemos que la solución consistente coincidirá con la solución óptima sólo si $\frac{\partial Y_1}{\partial x_2} = 0$

o bien si $\frac{\partial S}{\partial y_1} + \frac{\partial S}{\partial y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} = 0$

3) Solución consistente anticipada: $x^3 = (x_1^3,\ x_2^3)$.

En t=2, fijados y_1, x_1, el planificador calcularía x_2 a partir de:

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0 \rightarrow x_2^3 = x_2\,(y_1,\ x_1)$$

Los agentes económicos forman sus expectativas teniendo en cuenta que en el período 2 se seguirá esa política, función de y_1 y de x_1, con lo cual la política óptima en t=1 verificará:

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} f'(x_1) + \frac{\partial S}{\partial y_2} \left\{ \frac{\partial y_2}{\partial y_1} f'(x_1) + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{d\, x_2}{d\, x_1} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdot \frac{d\, x_2}{d\, x_1} = 0 \rightarrow x_1^1$$

en donde:

$$f'(x_1) = \frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}}{1 - \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1}} \quad ; \quad \frac{d\, x_2}{d\, x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_1} f'(x_1) + \frac{\partial x_2}{\partial x_1}$$

Consideremos el ejemplo que utilizan Holly-Zarrop (1983)

$$\begin{cases} \text{MAX } S = -y_1^2 - (y_2 - 1)^2 - 2\, x_2^2 \\ y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

- Solución óptima: $x_1^1 = \frac{1}{2}$; $x_2^1 = \frac{-1}{4}$ $\rightarrow$ $y_1^1 = \frac{1}{4}$; $y_2^1 = \frac{3}{4}$; $S^1 = \frac{-1}{4} = -0.25$

- Solución consistente no anticipada: $x_1^1 = \frac{1}{2}$; $x_2^2 = \frac{-1}{6}$. En este caso $y_1^2 = \frac{1}{4}$, ya que los agentes económicos habían considerado en t=1, la expectativa de $x_2 = \frac{-1}{4}$); $y_2^2 = \frac{2}{3}$, con lo cual el valor objetivo es: $S^2 = \frac{-1}{16} - \frac{1}{6} = -0.2291$ (mejor que para la solución 1).

- Solución consistente anticipada: $x_1^3 = \frac{5}{11}$; $x_2^3 = \frac{-2}{11}$ $y_1^3 = \frac{3}{11}$; $y_2^3 = \frac{7}{11}$; $S^3 = -0.619$

La inconsistencía en el tiempo reside en el hecho de que el plan óptimo que empieza en t=2 y toma lo anterior como dado no es una continuación del plan óptimo que empieza en t=1 y toma como dados sólo los sucesos previos a t=1. No es aplicable, por tanto, el principio de optimalidad de Bellman.

En el trabajo que estamos comentando, el modelo expuesto se aplica a dos problemas económicos: uno referente a la relación entre inflación-desempleo y otro sobre políticas de crédito a la inversión. En ambos casos, la política óptima es inconsistente.

Kydland y Prescott consideran que se deberían utilizar sólo políticas en bucle abierto que habría que anunciar con anterioridad o al principio de la planificación y con restricciones a la libertad de elegir la política en cada período, de manera que se forzara a las autoridades a mantener los planes previamente anunciados. Este resultado ha sido utilizado como argumento a favor de reglas como tasas de crecimiento monetario constantes o presupuestos equilibrados, frente a la discreción implicada por la utilización de los métodos de control óptimo para optimizar la política en cada período de decisión.

Los trabajos de Calvo (1978) y Prescott (1977) están en la línea del trabajo que estamos comentando y llegan a las mismas conclusiones. Una visión general del problema de la inconsistencía en el tiempo en sistemas económicos con revisión de toda la literatura aparece en Stutzer (1984).

La conclusión radical de Kydland y Prescott de que el control óptimo no es aplicable a sistemas económicos con expectativas racionales, es respondida y rechazada en trabajos que comentaremos posteriormente. De todas formas, en el trabajo que estamos comentando tenemos una enseñanza importante y es que, como señala Buiter (1983), algunas técnicas de optimización, como la programación dinámica, desarrolladas y ampliamente utilizadas en física e ingeniería, han sido aplicadas directamente, durante algunos años, a sistemas sociales y, especialmente, a sistemas económicos, sin caer en la cuenta de que hay, al menos, dos diferencias fundamentales entre sistemas físicos y sistemas sociales, que hacen que no sea posible una transferencia directa de las mismas técnicas de unos sistemas a otros: la primera de estas diferencias se refiere al elemento de teoría de juegos inherente a la mayoría de los sistemas económicos; la segunda, al papel de las expectativas en modelos económicos. Estos dos aspectos aparecen claramente en el trabajo de Kydland y Prescott. Antes de pasar a comentar algunos trabajos posteriores sobre este tema, vamos a detenernos para analizar estas dos diferencias importantes.

2.- EL PAPEL DE LA TEORIA DE JUEGOS.

En este comentario vamos a seguir básicamente a Buiter (1983).

El control óptimo, en sistemas de física o de ingeniería, es un juego trivial, con un jugador controlando un sistema pasivo; es decir, es un juego contra la naturaleza. En economía y en ciencias sociales en general, se deben de tener en cuenta a muchos agentes (jugadores), actuando independientemente, a menudo de manera no cooperativa, con objetivos diferentes y, posiblemente, en conflicto.

En aplicaciones macroeconómicas, los agentes pueden representar economías domésticas, empresas, sindicatos, organizaciones empresariales, ramas del gobierno o países extranjeros. Incluso para el análisis de una economía cerrada, la modelización de la interacción sector público-sector privado como un juego dinámico está aún en sus primeros pasos.

Para ilustrar las ideas que estamos exponiendo, vamos a considerar el siguiente modelo dinámico, en el que intervienen los agentes 1,2,...,P

$$y_t = A_t y_{t-1} + \sum_{p=1}^{P} C_{pt} x_{pt} + b_t + u_t \quad , \text{ para } t=1,2,\dots, T$$

en donde: y_t :es un vector de variables de estado en el período t.

x_{p_t}:es un vector de variables de control para el agente p, en t.

b_t :es un vector de variables exógenas

$\{u_t\}$: son vectores aleatorios incorrelados, con $Eu_t=0, \ \forall t$.

Cada jugador p minimiza

$$E_o W_p = E_o \left\{ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_{pt})' K_{pt} (y_t - a_{pt}) \right\} , \text{ para } p=1,2,\dots,P$$

Necesitamos definir conceptos de equilibrio apropiados para resolver los problemas de este tipo.

<u>La solución de Stackelberg</u>, muy utilizada, se basa en la idea lider-seguidor. Se supone que el seguidor o los seguidores (por ejemplo, agentes privados) toman las acciones del lider (por ejemplo, el gobierno) como parámetros cuando seleccionan sus estrategias óptimas mientras que el lider sabe que el comportamiento de los seguidores va a depender de las acciones que tome.

En el modelo que hemos considerado, suponemos que el jugador 1 es el lider o jugador dominante y que los jugadores 2,3,...,P son los seguidores. El lider reconoce y explota el hecho de que el comportamiento de los seguidores viene expresado por la función de reacción:

$$x_{pt}=G^{*}_{pt}\, y_{t-1}+G^{**}_{pt}\, x_{1t}+g^{*}_{pt} \quad , \text{ para } p\neq 1$$

Sustituyendo, la ecuación del sistema queda, desde el punto de vista del lider, en la forma:

$$y_t = (A_t+\sum_{p=2}^{P} C_{pt}\, G^{*}_{pt})y_{t-1}+ (C_{1t}+\sum_{p=2}^{P} C_{pt}G^{**}_{pt})x_{1t} + (\sum_{p=2}^{P} C_{pt}g^{*}_{pt}+b_t)+u_t$$

que permite calcular fácilmente la regla de control óptimo -- del lider:

$$y_{1t}=G_{1t}y_{t-1}+g_{1t}$$

La ecuación del sistema, desde el punto de vista - del seguidor p será:

$$y_t=(A_t+\sum_{\substack{j=2\\ j\neq p}}^{P} C_{jt}G^{*}_{jt})y_{t-1}+C_{pt}x_{pt}+(C_{1t}+\sum_{\substack{j=2\\ j\neq p}}^{P} C_{jt}G^{**}_{jt})x_{1t}+b_t+\sum_{j=2}^{P} C_{jt}g^{*}_{jt}+u_t$$

que permite calcular $x_{pt}=G^{*}_{pt}\, y_{t-1}+G^{**}_{pt}\, x_{1t}+g^{*}_{pt}$, para $p=2,\dots,P$

Los valores de $G_{1t},g_{1t},G^{*}_{pt},G^{**}_{pt}$,g^{*}_{pt} , aparecen en - Buiter (1983).

<u>Solución de Nash</u>: es aquella solución en la que ningún jugador puede reducir su pérdida esperada, cambiando unilateralmente su estrategia.

Para el modelo que estamos considerando:

$(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_p^*)$ es una solución de equilibrio de Nash, si:

$$E_0W_p(x_1^*, \ldots\ldots, x_p^*, \ldots\ldots, x_P^*) \leq E_0W_p(x_1^*, \ldots\ldots, x_p, \ldots\ldots, x_P^*),$$

para $p = 1, 2, \ldots\ldots, P$

La solución de Nash, para el ejemplo que estamos considerando, es de la forma: $x_{pt} = G_{pt}y_{t-1} + g_{pt}$, y aparece explicitada en el artículo de Buiter. En este caso la estrategia óptima de cada jugador se determina conjuntamente con las estrategias óptimas de los demás jugadores y depende de ellas. Para $P=1$, esta solución de Nash coincide con la solución conocida del problema.

Chow (1981) calcula las soluciones Stackelberg y Nash para un modelo análogo al considerado aquí, con $P=2$ y, además, trata el tema de la estimación de parámetros en ambos casos.

Otros tipos de soluciones propuestas han sido la del comportamiento lider-lider y también soluciones cooperativas (por ejemplo, en Fisher (1980)).

En el trabajo de Kydland y Prescott (1977) que hemos analizado se sigue la idea de solución de Stackelberg, con la autoridad planificadora como lider y los demás agentes económicos como seguidores.

3.- EXPECTATIVAS.

En la mayoría de las decisiones económicas no triviales interviene la variable tiempo. En economía, las decisiones de los indivíduos en un momento del tiempo dependen de su visión del futuro, es decir, de sus expectativas. Lo mismo ocurre en el comportamiento de los agregados económicos que forman los modelos macroeconómicos.

Las expectativas van a ser importantes en nuestro trabajo, ya que nos proponemos estudiar el problema de control, cuando el sistema contiene "expectativas racionales" de las variables de estado, caso en el que no son aplicables las técnicas matemáticas conocidas.

Veamos algunos ejemplos sencillos, que nos ayuden a ilustrar el tema:

- Consideremos la teoría del comportamiento del consumidor. Una decisión de ahorrar implica la decisión de posponer el consumo al futuro. Así, en decidir si ahorrar o no o en decidir cuanto ahorrar en un período dado, se necesitaría considerar la tasa futura de inflación y la expectativa de ingreso futuro.

- Cuando los contratos salariales se fijen en términos nominales, pero las empresas y los trabajadores, sin tener ilusión monetaria, se preocupen sólo de salarios reales, será necesario que los negociadores tengan en cuenta la tasa de inflación que prevean a lo largo del período que dure el contrato.

- Consideremos una decisión de inversión: el inversor se preguntará. ¿Cuánto vale la pena pagar para adquirir un bien de capital duradero con el que se va

a fabricar un producto que se destinará a la venta?.
La teoría nos dice que el valor presente V, que indica lo que merece la pena pagar es:

$$V = \frac{(P_1Q_1-U_1)(1-t_1)}{(1+i)^1} + \frac{(P_2Q_2-U_2)(1-t_2)}{(1+i)^2} + \ldots\ldots + \frac{(P_nQ_n-U_n)(1-t_n)}{(1+i)^n} + \\ + \frac{J_n\ (1-t_n)}{(1+i)^n}$$

en donde n es la vida, en años, del bien de capital, Q es el output, P el precio de venta; U el coste; J el valor al final; t el impuesto; i la tasa de interés.

Un intento racional de calcular el valor presente del activo, requerirá evaluar, de alguna forma, los valores que tomarán en el futuro n,J,Q,P,U,t,i.

Podríamos poner muchos más ejemplos, pero los anteriores resultan suficientes para ilustrar el tema. Es clara la necesidad de que la teoría económica incorpore las expectativas y los factores que dan lugar a cambios en ellas.

Shaw (1984) señala que, desgraciadamente, en general las expectativas no han sido tratadas de manera acorde con su importancia. Muchos modelos económicos no tratan para nada de expectativas o las tratan sólo implícitamente, suponiendo que ya van incorporadas en los valores de los parámetros.

Veamos ahora brevemente la consideración que se ha dado al tema de las expectativas y su modelización, en economía.

<u>Keynes y las expectativas</u>.

Una de las aportaciones de Keynes fué reconocer que la teoría macroeconómica necesitaba incorporar el papel de las expectativas. Según él, haciendo referencia a asuntos económicos, "el conocimiento del futuro es fluctuante, vago e incierto"; sobre el futuro económico incierto no caben cálculos razonables, a diferencia de lo que ocurre en un juego de poker o en una lotería.

Para Keynes las expectativas no pueden ser tratadas como variables endógenas en un modelo económico formal. El decidió tratarlas como variables exógenas. En su Teoría General, analiza el comportamiento de las variables endógenas, en un momento del tiempo, condicionadas a un conjunto de expectativas exógenas sobre el futuro. Es entonces natural analizar las propiedades de estática comparativa del modelo, suponiendo un cambio exógeno en las expectativas.

Este apartado aparece mucho más desarrollado en Begg(1982) y Shaw (1984).

-<u>Expectativas estáticas</u>.

Constituyen la manera más simple de introducir expectativas en un modelo. Se supone que las condiciones de hoy se mantendrán en el futuro. Por tanto, las expectativas de las variables futuras, serán indentificadas con los valores actuales.

Las expectativas se pueden referir a variables como precios o niveles de output futuros (identificados con sus valores actuales) o a ritmos de crecimiento de variables (así tendremos, por ejemplo, tasa de inflación futura o tasa de crecimiento económico futuro, identificados con tasa de inflación o tasa de crecimiento económico actuales). En cualquier caso, la hipótesis de expectativas estáticas supone que la economía ha alcanzado un estado de equilibrio estable. Gran parte de la economía clásica, suponía tácitamente la existencia de expectativas estáticas.

Por tanto, en expectativas estáticas: $y^*_{t+k/t}=y_t$; $y^*_{t/t-k}=y_{t-k}$, para k=1,2,3,... en donde $y^*_{i/j}$ es la expectativa que en t=j se tiene del valor que la variable y, tomará en t=i.

Un análisis de las ventajas e inconvenientes de las expectativas estáticas aparece en el libro de Shaw.

- **Expectativas adaptativas**.

Esta modelización de las expectativas fué ideada por Cagan (1956) en el contexto de una situación de hiperinflación. La doctrina de las expectativas adaptativas supone que los agentes económicos formarán sus expectativas a la luz de la experiencia pasada y que, en particular, aprenderán de sus propios errores. La hipótesis establece que:

$$y^*_{t/t-1} - y^*_{t-1/t-2} = \alpha(y_{t-1} - y^*_{t-1/t-2}), \quad \text{con } 0<\alpha<1$$

en donde $y^*_{i/j}$ es la expectativa que se tiene en t=j, del valor que tomará la variable y, en t=i.

Teniendo en cuenta que $y^*_{t-1/t-2} = y^*_{t-2/t-3} +$

$+ \alpha(y_{t-2} - y^*_{t-2/t-3})$, y sustituyendo de manera recursiva, obtenemos:

$$y^*_{t/t-1} = \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \ldots\ldots + \alpha(1-\alpha)^n \cdot$$
$$\cdot y_{t-n-1} + (1-\alpha)^{n+1} y^*_{t-n-1/t-n-2}$$

Todos los sumandos, excepto el último, son observables. Al ser $0<\alpha<1$, $(1-\alpha)^{n+1}$ es menor cuanto mayor es n. Suponiendo que el valor de esta expectativa final es finito, podemos despreciar este último sumando, considerando un valor de n suficientemente grande. Por tanto, $y^*_{t/t-1}$ se considera, en la hipótesis de expectativas adaptativas, como un valor obtenido a partir de los valores pasados ponderados de la propia variable.

La hipótesis de expectativas adaptativas supuso un avance considerable, pero encontró objeciones importantes, entre las que destacamos las siguientes: 1ª) La hipótesis sólo tiene en cuenta lo ocurrido en el pasado. Supongamos que la OPEC tiene una reunión la próxima semana pero el resultado de sus deliberaciones es un asunto formal, ya que se sabe que anunciarán que se doblan los precios del petróleo. Seguramente los economistas estarán prediciendo mayor inflación desde el momento en que aparecen las primeras noticias sobre la subida del petróleo. La hipótesis de expectativas adaptativas establece que los agentes económicos alzan las expectativas de inflación, sólo después de que inflación más alta ha tenido ya lugar. Utilizando una regla así, los indivíduos cometerán errores sistemáticos, infravalorando la tasa de inflación real, algunos períodos después de que suban los precios del petróleo. 2ª) En la hipótesis de expectativas adaptativas se supone que las únicas variables que tienen que considerarse son valores pasados de la variable sobre la que se van a tomar las expectativas. Este análisis de equilibrio parcial no se ajusta a la tradición macroeconómica en la que el equilibrio general o efectos globales en el sistema son de gran importancia. Por ejemplo, datos sobre tasas pasadas de crecimiento monetario pueden complementar a datos de tasas de inflación pasadas en predecir inflación futura.

Un análisis más detallado aparece en los libros de Begg, Shaw y Attfield-Demery-Duck (1985).

- Expectativas racionales.

La insatisfacción con la hipótesis de las expectativas adaptativas dió lugar a la búsqueda de formulaciones alternativas, surgiendo la hipótesis de las expectativas racionales, ideada por Muth (1961), formalizando un trabajo anterior de Modigliani y Grunberg (1954). El primero en aplicar la hipótesis a la macroeconomía fué Lucas en 1972.

El punto de partida de las expectativas racionales es que los agentes económicos no deben cometer errores sistemáticos, lo cual quiere decir que sus pronósticos sobre el futuro deben ser correctos, en media, si los individuos están satisfechos con su mecanismo de formación de expectativas. Si no es así, cambiarán el mecanismo.

Existen varias versiones de la hipótesis de expectativas racionales, dependiendo de la información que se supone poseen los agentes económicos. La que nos interesa a nosotros es la versión de Muth, que es la que más se ha utilizado en discusiones académicas y la que ha generado mayores implicaciones y conclusiones en política económica. Esta versión, que es la más fuerte en cuanto a exigencias, supone que los agentes conocen la estructura completa del modelo y los valores previos de todas las variables relevantes en el modelo, además de las políticas del gobierno en operación. Además, si el modelo es estocástico, se supone que los agentes conocen las propiedades estadísticas de las perturbaciones aleatorias.

DEFINICION:

La hipótesis de expectativas racionales, en el sentido de Muth, supone que la expectativa que tienen los agentes económicos en un instante t, sobre el valor que tomará una variable en el futuro (que es subjetiva e inobservable), es la esperanza matemática condicionada a la información que se posee en t, implicada por el modelo.

La hipótesis supone, por tanto, que los individuos actúan como si conocieran el modelo y formaran sus expectativas de acuerdo con él.

Debemos señalar que, aunque la definición que hemos dado anteriormente es la que aparece normalmente en la literatura, es más restringida que la que dió Muth. En efecto: en su trabajo original de 1961, Muth establece que las expectativas de los agentes (o más generalmente, la distribución de probabilidad subjetiva de los resultados), coinciden, para el mismo conjunto de información, con las predicciones de la teoría (o la distribución de probabilidad "objetiva" de los resultados). El hecho de que la mayoría de los trabajos sobre expectativas racionales indentifiquen las expectativas de los agentes con las esperanzas matemáticas implicadas por el modelo, lo justifica Shiller (1978), diciendo por una parte que, para el caso lineal, modelos que incluyen simplemente esperanzas matemáticas de variables son fácilmente manejados y, por otra, que la mayor parte de las caracterizaciones del comportamiento humano en la literatura macroeconómica práctica que precedió al desarrollo de los modelos con expectativas racionales, depende de simples esperanzas matemáticas de futuras variables, y de ningún otro momento.

Por tanto:

$$y^*_{t+k/t} = E \quad (y_{t+k}/I_t)$$

en donde el conjunto de información disponible en el tiempo t contiene el conocimiento de la estructura del modelo y de todas las variables del modelo que son conocidas por los agentes en el tiempo t.

Veamos un ejemplo:

Consideremos el siguiente modelo macroeconómico, que aparece en el libro de Minford y Peel (1983):

$$m_t = p_t + y_t \qquad (1)$$

$$p_t = p^*_{t/t-1} + \delta (y_t - \bar{y}) \quad (2)$$

$$m_t = \bar{m} + \varepsilon_t \qquad (3)$$

en donde m_t, p_t, y_t, son los logaritmos de la oferta monetaria, del nivel de precios y del output, respectivamente; $\bar{y}$ es el objetivo del output; $\bar{m}$ es el objetivo monetario (ambos valores se supone que son constantes conocidas). $\{\varepsilon_t\}$ se supone que son variables aleatorias normales, de media cero, incorreladas. $p^*_{t|t-1}$ es la expectativa que, en el período t-1, tienen los agentes sobre el valor que tomará la variable p en el período t.

La primera ecuación del modelo es una función de demanda de dinero, con elasticidad de interés cero y elasticidad de ingreso uno. La segunda ecuación es una curva de Phillips, que establece que la tasa de inflación iguala a la expectativa de inflación del período anterior más una función del exceso de demanda. La tercera ecuación del modelo es una función de oferta de dinero. Los períodos se supone que son trimestres.

La hipótesis de expectativas racionales establece que

$$p^{*}_{t/t-1} = E(p_t | I_{t-1})$$

en donde I_{t-1}, en este caso, se refiere al conocimiento de las ecuaciones del modelo y a los valores pasados de todas las variables. Veamos cuánto valdría:

Tomando esperanzas condicionadas a I_{t-1} en (2):

$$E(p_t | I_{t-1}) = E(p_t | I_{t-1}) + \delta\left[E(y_t | I_{t-1}) - \bar{y}\right] \rightarrow E(y_t | I_{t-1}) = \bar{y}$$

Haciendo lo mismo en (3), y teniendo en cuenta que $E(\epsilon_t | I_{t-1}) = 0$, $\quad E(m_t | I_{t-1}) = \bar{m}$

A partir de (1):

$$E(m_t | I_{t-1}) = E(p_t | I_{t-1}) + E(y_t | I_{t-1})$$

$$E(p_t | I_{t-1}) = E(m_t | I_{t-1}) - E(y_t | I_{t-1}) = \bar{m} - \bar{y}$$

Por tanto: $p^{*}_{t/t-1} = E(p_t | I_{t-1}) = \bar{m} - \bar{y}$

En nuestro trabajo vamos a construir la teoría de control sobre modelos que contienen expectativas racionales de las variables endógenas. Nos ocuparemos de dos tipos de sistemas:

$$1)\ y_t = B_t y^*_{t/t-1} + B_{1t} y^*_{t+1/t-1} + A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$$

(para t= 1,2,....,T)

en donde: y_t es un vector de variables endógenas

x_t es un vector de variables de control

b_t es un vector que recoge los efectos combinados de las variables exógenas no sujetas a control

u_t es un vector aleatorio.

Las expectativas son racionales. Por tanto:

$$y^*_{t+i/t-1} = E(y_{t+i} | I_{t-1}) \quad , \text{ para } i=0,1$$

$$2)\ y_t = \sum_{i=1}^{P} B_{it} y^*_{t/t-i} + A_t y_{t-1} + C_t x_t + u_t$$

en donde $y^*_{t/t-i} = E(y_t | I_{t-i})$, para $i=1,2,...,P$

El tema de las expectativas racionales es de mucha importancia y actualidad, en economía. Incluso ha dado lugar a una importante escuela de pensamiento, representada principalmente por R. Lucas y T. Sargent, llamada la escuela de las expectativas racionales o de los nuevos macroeconomistas clásicos. Debemos aclarar, como señalan Dornbush y Fisher (1985), que una cosa son las expectativas racionales como teoría de las expectativas, y otra la escuela de las expectativas racionales, que mantiene posiciones que van más allá de la identificación de la expectativa con la esperanza condicionada, como son su enfoque de equilibrio de los mercados, su opinión sobre el papel de la política monetaria y de la política fiscal, su postura ante el desempleo o su criterio sobre la capacidad que tienen las autoridades económicas en influir en las variables reales.

Un análisis de las críticas a la hipótesis y de los argumentos de los defensores aparece en el libro de Begg.

Entre la abundante bibliografía sobre expectativas racionales, podemos citar: Begg (1982), Minford y Peel (1983), Sheffrin (1983), Shaw (1984), Attfield-Demery y Duck (1985), sobre descripción de la hipótesis y sus implicaciones en econometría y macroeconomía. El libro de Mishkin (1983) tiene un enfoque empírico. Whiteman (1983) presenta un enfoque técnico de manejo de sistemas lineales con expectativas racionales. El libro editado por Fisher (1980) recoge una serie de trabajos de diversos autores sobre implicaciones en politics económica. El libro editado por Lucas y Sargent (1981) contiene una selección de 34 artículos importantes sobre el tema. El artículo de Shiller (1978) revisa críticamente la literatura existente.

4.- SISTEMAS CAUSALES Y NO CAUSALES.

Vamos a distinguir entre el tipo de sistemas usuales en la literatura de control (que llamaremos sistemas causales) y otro tipo de sistemas que no cumplen una de sus hipótesis fundamentales (a los que llamaremos no causales), entre los que se encontrarán los modelos económicos con expectativas racionales. Estos modelos y su utilización en problemas de control óptimo, van a constituir el objeto de nuestro trabajo.

Una de las hipótesis fundamentales sobre la función de transición de estados en la teoría de sistemas usual es que es causal: dada una función input admisible x, la transición del estado y(to) en el instante t=to, al estado $y(t_1)=\emptyset\ (t_1,to,y(to),x)$ en el instante t_1, sólo puede depender de x, a través de los valores que toma x desde el instante to al instante t_1. Si dos funciones input toman los mismos valores entre to y t_1, entonces deben llevar al sistema al mismo estado en t_1. Así, el sistema $y_t=Ay_{t-1}+Cx_t+u_t$ es causal y su utilización en optimización dinámica no presenta ningún problema (es aplicable el principio de optimalidad de Bellman).

En algunos sistemas que aparecen en la literatura económica esa hipótesis no se verificará. Veamos un importante caso que nos sirva para ilustrar esa característica fundamental:

Consideremos el modelo de ecuación:

$$y_t=Ay_{t-1}+By^*_{t+1/t}+Cx_t+u_t$$

en donde: y_t es un vector de variables endógenas

x_t es un vector de variables de control (instrumentos políticos)

$\{u_t\}$ son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados de media cero.

$y^*_{t+1/t}$ es la expectativa que, en el período t, tienen los agentes sobre el valor que la variable y tomará en el período t+1.

El modelo anterior puede ser interpretado como el de una economía en la que los agentes privados son seguidores Stackelberg, que toman como dadas las acciones del gobierno, que controla con las variables x_t.

Supongamos:

a) Que las expectativas se consideran estáticas.

Entonces $y^{*}_{t+1/t}= y_t$, y el sistema queda:

$y_t=(I-B)^{-1}Ay_{t-1}+(I-B)^{-1}Cx_t+(I-B)^{-1}\ u_t$, luego es un sistema causal.

b) Expectativas adaptativas:

En tal caso: $y^{*}_{t+1/t}=\emptyset\ y_t+\emptyset(I-\emptyset)y_{t-1}+\emptyset(I-\emptyset)^2y_{t-2}+\dots$

El sistema queda:

$$y_t=Ay_{t-1}+B\emptyset y_t+B\emptyset(I-\emptyset)y_{t-1}+B\emptyset(I-\emptyset)^2y_{t-2}+\dots+Cx_t+\ u_t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad y_t=(I-B\emptyset)^{-1}\left[A+B\emptyset(I-\emptyset)\right]\ y_{t-1}+(I-B\emptyset)^{-1}B\emptyset(I-\emptyset)^2y_{t-2}+$$
$$+(I-B\emptyset)^{-1}B\emptyset(I-\emptyset)^3y_{t-3}+\dots\dots+(I-B\emptyset)^{-1}Cx_t+(I-B\emptyset)^{-1}u_t$$

que es un sistema causal.

c) Expectativas racionales:

Entonces $y^{*}_{t+1/t}=E(\ y_{t+1}|I_t\ )$, en donde el con-- junto de información I_t incluye la estructura del modelo y -- todos los valores presentes y pasados de las variables endógenas y de las variables exógenas.

Tenemos, por tanto, el sistema:

(1) $y_t=Ay_{t-1}+BE(\ y_{t+1}|I_t\ )+Cx_t+u_t$

Vamos a resolverlo, utilizando el método llamado de coeficientes indeterminados, usual en la literatura sobre expectativas racionales.

Establecemos la hipótesis de que la solución tomará la siguiente forma:

$$(2)\ y_t = \pi_1 y_{t-1} + \pi_2 x_t + \pi_3 u_t + \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i E(x_{t+i}|I_t)$$

Ahora vamos a calcular los valores de π_i y de Ω_i. Para ello, a partir de (2):

$$y_{t+1} = \pi_1 y_t + \pi_2 x_{t+1} + \pi_3 u_{t+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i E(x_{t+i+1}|I_t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(y_{t+1}|I_t) = \pi_1 y_t + \pi_2 E(x_{t+1}|I_t) + \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i E(x_{t+i+1}|I_t)$$

Sustituyendo en (1):

$$(3)\ y_t = (I-B\pi_1)^{-1} A y_{t-1} + (I-B\pi_1)^{-1} C x_t + (I-B\pi_1)^{-1} u_t +$$
$$+ (I-B\pi_1)^{-1} B\pi_2 E(x_{t+1}|I_t) + \sum_{i=1}^{\infty} (I-B\pi_1)^{-1} B\Omega_i$$
$$E(x_{t+1+i}|I_t)$$

Igualando los coeficientes de (2) y (3), obtenemos:

$$\pi_1 = (I-B\pi_1)^{-1} A$$

$$\pi_2 = (I-B\pi_1)^{-1} C$$

$$\pi_3 = (I-B\pi_1)^{-1}$$

$$\Omega_1 = (I-B\pi_1)^{-1} B\pi_2$$

$$\Omega_j = (I-B\pi_1)^{-1} B\Omega_{j-1}, \quad \text{para } j > 1$$

La ecuación (3) representa a un sistema en el que su estado en un momento del tiempo es función de inputs pasados y presentes (x_{t-i}, u_{t-i}, $i \geq 0$) y de inputs futuros anticipados ($E(x_{t+i}|I_t)$, $i > 0$). La ecuación (3) puede que no sea no causal en el sentido estricto del término, porque $E(x_{t+1+i}|I_t)$, $i > 0$, es sólo función de la información disponible en el tiempo t. En el caso en que el sistema sea determinístico expectativas racionales equivalen a previsión perfecta y, para el modelo que estamos viendo:

$$y_t=(I-B\,\pi_1)^{-1}Ay_{t-1}+(I-B\,\pi_1)^{-1}Cx_t+(I-B\,\pi_1)^{-1}B\,\pi_2x_{t+1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}(I-B\,\pi_1)^{-1}B\,\Omega_i x_{t+1+i}$$

que ya es claramente no causal en el sentido estricto del término. Independientemente de lo apropiado del término no causal para sistemas del tipo (1) o (3), el hecho de que expectativas actuales de variables de control futuras afecten al estado actual, hace que el sistema sea cualitativamente diferente del sistema standard causal, cuando vaya a utilizarse para control óptimo.

En general, para modelos económicos con expectativas no habrá ningún problema en la utilización de las técnicas usuales de control óptimo si las expectativas no son racionales. En el caso de expectativas racionales, el modelo es cualitativamente diferente del tipo de sistemas usuales en la literatura de control y no son aplicables sus métodos (al menos directamente aplicables). Kydland y Prescott llegaron a la conclusión de que esaa técnicas no se pueden utilizar, en ningún caso y bajo ninguna forma en sistemas económicos con expectativas racionales. Hay trabajos posteriores que discuten y rechazan esta conclusión. A continuación vamos a comentar algunos de ellos.

5.- **TRABAJOS POSTERIORES AL DE KYDLAND Y PRESCOTT.**

Vamos a comentar los trabajos de Aoki-Canzoneri (1979), Chow (1980) Driffill (1981) y Buiter (1983). Todos ellos tratan el problema de control óptimo, cuando el sistema contiene expectativas racionales de variables futuras.

Aoki-Canzoneri: En su trabajo tratan fundamentalmente otro tipo de sistemas con expectativas racionales (de variables actuales, tomadas en el pasado), que comentaremos en el apartado siguiente. Como extensión consideran también el caso que nos ocupa:

$$y_t=Ay_{t-1}+By^*_{t+1/t-1}+Cx_t+u_t \quad \text{con} \quad y^*_{t+1/t-1}=E(y_{t+1}|I_{t-1})$$

suponen que $x_t=G_t y_{t-1}+v_t$, en donde $\{G_t\}$ es una secuencia de matrices políticas determinísticas y $\{v_t\}$ son vectores aleatorios incorrelados, de media cero. Los conjuntos de información son: $I_{t-i}=\{G_t, y_{t-i}, x_{t-i}, y_{t-i-1}, x_{t-i-1}\},\ldots\ldots$

Efectuan transformaciones en el sistema, obteniendo:

$$y_t=Ay_{t-1}+By_{t+1}+Cx_t-B(u_{t+1}+Cv_{t+1})+(I-BW_1)u_t-BW_1Cv_t$$

en donde W_1 no está especificado. Imponen (arbitrariamente) - $W_1=0$, con lo cual se puede poner:

$$y_{t+1}=B^{-1}y_t-B^{-1}Ay_{t-1}-B^{-1}Cx_t+u_{t+1}-B^{-1}u_t+Cv_{t+1}$$

y, en esta forma, el sistema ya puede ser utilizado para control.

Tratan también el caso en que B es singular y señalan las transformaciones a realizar.

A continuación estudian modelos del tipo:

$$y_t = Ay_{t-1} + By^*_{t/t-1} + Dy^{*2}_{t/t-1} + Cx_t + u_t$$

$$x_t = G_t y_{t-1} + v_t$$

en donde $y^{*2}_{it/t-1} = E\left[(y_{i,t} - y^*_{i,t/t-1})^2 \mid I_{t-1}\right]$

y reducen el sistema a una forma adecuada para utilizar las técnicas usuales de control.

Chow:

Formula el problema en los siguientes términos:

$$\text{MIN } E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) \qquad (1)$$

$$y_t = By^*_{t/t-1} + B_1 y^*_{t+1/t-1} + Ay_{t-1} + Cx_t + b_t + v_t \quad (2) \quad t=1,2,\ldots,T$$

suponiendo que las expectativas son racionales.

(y_t son variables endógenas: x_t variables de control; b_t variables exógenas; v_t perturbaciones aleatorias, mutuamente incorreladas, de media cero).

Estudia: a) Evalusción política (tratamiento del sistema (2)). b) Optimización.

a) Evaluación política:

Analiza en primer lugar el caso $B_1=0$; luego el caso $B_1 \neq 0$ y por último el caso no lineal.

Para el caso lineal: efectúa transformaciones en el sistema, de manera que desaparezcan las expectativas de las variables endógenas (variables de estado) apareciendo expectativas de variables exógenas y de las variables de control. Para el caso $B_1 \neq 0$, el problema no tiene solución única, por lo que añade una condición adicional para obtener unicidad: propone que en T, instante final, $y^*_{T+1/T-1}$ sea igual o proporcional a $y^*_{T/T-1}$

Para el caso no lineal, propone linealizar el modelo a partir de una solución tentativa, aplicar los métodos para sistemas lineales, obtener la solución del modelo linealizado, volver a linealizar a partir de la solución obtenida y seguir iterando hasta llegar a la convergencia.

b) Optimización.

- Caso lineal: Si $B_1=0$, llega a la conclusión de que se pueden aplicar las técnicas usuales de control óptimo, apoyándose en la forma del sistema obtenida en a).

Si $B_1 \neq 0$, presenta un método para resolver el problema, cuando y_t puede hacerse estacionario en covarianza a través del tiempo. Este método lo comentaremos con detalle, criticaremos y generalizaremos en el próximo capítulo.

Indica cómo hay que plantear el problema para resolverlo numéricamente en los casos: 1) Se busca una política en bucle abierto. 2) Se busca una política en bucle cerrado, de la forma: $x_t=Gy_{t-1}+g$, siendo G,g invariantes en el tiempo.

- Caso no lineal: Propone linealizar el modelo y aplicar los métodos para sistemas lineales.

<u>Driffil</u>:

Generaliza la formulación del sistema que proponen

Kydland y Prescott al caso estocástico, aunque lo restringe al caso lineal.

En su trabajo encontramos las tres aportaciones siguientes:

- Presenta un método de cálculo de la política óptima por el que encuentra la política que sería óptima si el -- sistema fuera determinístico y luego la va corrigiendo a medida que pasa el tiempo y va teniendo información de los shocks que se van produciendo.

$$x_t = x_{t/1} + \gamma_{t,1}\, u_1 + \gamma_{t,2}\, u_2 + \dots + \gamma_{t,t-1}\, u_{t-1}$$

- Para el caso lineal demuestra que no hay inconsistencia en el tiempo y, por tanto, son aplicables las técnicas usuales de control óptimo, cuando el número de variables de control independientes coincide con el número de variables que aparecen en la función objetivo, en los siguientes casos:

a) Las únicas variables que aparecen en la función objetivo son las variables de estado.

b) La función objetivo incluye también ciertos valores presentes descontados de las variables de control.

- Para sistemas de tipo $y_t = Ay_{t-1} + By^*_{t/t-1} + Cx_t + u_t$ son aplicables las técnicas usuales de control óptimo.

__Buiter:__

Se refiere sólo al caso de sistemas lineales.

Hace una presentación exhaustiva del problema y revisa toda la literatura.

Para un modelo sencillo utiliza el método de Driffill para encontrar la solución óptima.

Señala que hace falta investigación para encontrar nuevas técnicas de optimización para modelos no causales como los que estamos estudiando.

6.- MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES DE VARIABLES ACTUALES, TOMADAS EN EL PASADO.

En los trabajos de Aoki-Canzoneri (1979), Visco -- (1981, 1984), Broze-Szafarz (1984) y Schonfeld (1984), aparecen modelos con expectativas racionales, de la siguiente forma:

$$y_t = Ay_{t-1} + B_1 y^*_{t/t-1} + B_2 y^*_{t/t-2} + \cdots\cdots + B_p y^*_{t/t-p} +$$

$$+ Cx_t + u_t$$

en donde

$$y^*_{t/t-i} = E\,(y_t | I_{t-i})$$

Estos modelos contienen expectativas racionales, - pero son diferentes a los que hemos visto en los apartados - anteriores. La variable y_t no depende de expectativas (racionales) de variables futuras, sino de expectativas (racionales) de la propia variable y_t, tomadas en períodos anteriores.

Veamos un ejemplo, que hemos tomado de Visco (1981):

$$y_t = \gamma y_{t-1} + \alpha(p_t - p^*_{t/t-1}) + \beta(p_t - p^*_{t/t-2}) + u_{1t}$$

$$p_t = x_t - y_t + u_{2t}$$

en donde todas las variables son logaritmos y_t es el nivel de output real actual (o la desviación de su nivel "natural"), p_t es el nivel de precios agregado actual; x_t es la oferta monetaria actual; u_{1t} y u_{2t} son perturbaciones aleatorias, de media cero y varianzas $\sigma^2(u_1)$ y $\sigma^2(u_2)$. La primera ecuación es una función de oferta agregada; la segunda puede ser interpretada como una forma especial de una función de demanda agregada o una ecuación que determina el nivel de precios agregado, siguiendo, por ejemplo, la teoría cuantitativa de dinero.

Los trabajos citados que tratan estos modelos presentan métodos para encontrar una "forma reducida" del sistema, entendiendo por tal cualquier representación que no contenga ningún término con expectativas.

Aoki-Canzoneri y Visco, tras presentar sus métodos respectivos para encontrar la forma reducida del sistema, hacen algunos comentarios sobre el problema de control para estos modelos. Ambos llegan a la conclusión de que en el caso p=1, la forma reducida que obtienen puede utilizarse para resolver el problema standard de control. Para $p > 1$, la forma reducida -- que se obtiene no puede ser utilizada en formulaciones standard del problema de control. Visco indica que sí puede ser utilizada en el caso en que aparezca x_{t-p+1}, en lugar de x_t en la formulación del sistema. Ambos señalan que hace falta que se desarrollen nuevos métodos que resuelvan el problema.

7.- PLAN QUE SE SIGUE EN LOS CAPITULOS SIGUIENTES.

En el capítulo 2 estudiamos basicamente el siguiente problema de control:

$$\text{MIN } E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t)$$

$$y_t=B_t y^*_{t/t-1} + B_{1t} y^*_{t+1/t-1} + A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$$

,partiendo de la solución de Chow (1980) para el caso particular en que el sistema se puede hacer estacionario en convarianza a través del tiempo. Nosotros vamos a resolver el problema para el caso general. Mantenemos en todo el estudio la -- formulación y notación de Chow.

En el capitulo 3 estudiamos el problema para el caso de información incompleta:

$$\text{MIN } E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t)$$

$$y_t=B_t y^*_{t/t-1} + B_{1t} y^*_{t+1/t-1} + A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$$

$$z_t=M_t y_t + v_t$$

Tratamos el problema de estimación y el problema de control, estudiando la separación entre estimación y control. Estos - problemas no están tratados en la literatura que hemos manejado. Burmeister-Wall (1982), para un modelo particular, con expectativas racionales, con significado económico concreto - para cada una de las variables, reformulan el sistema para -- utilizar el filtro de Kalman .

En el capitulo 4 estudiamos en primer lugar el problema de control siguiente:

$$\text{MIN } E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t)$$

$$y_t=A_t y_{t-1} + B_{1t} y^*_{t/t-1} + B_{2t} y^*_{t/t-2} + C_t x_t + \eta_t$$

A continuación estudiamos el problema de estimación para el caso:

$$y_t = A_t y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} B_{it} y^*_{t/t-i} + \eta_t$$

$$z_t = M_t y_t + v_t$$

siendo la formulación del sistema, con expectativas racionales de variables actuales tomadas en el pasado, análoga a la que aparece en los trabajos de Aoki-Canzoneri y Visco, en los que nos hemos apoyado.

En el capítulo V analizamos dos ejemplos económicos y establecemos las conclusiones finales del trabajo.

C A P I T U L O - II

MODELOS CON EXPECTATIVAS FUTURAS. INFORMACION COMPLETA.

1.- **CUESTIONES PREVIAS**: El problema standard de control para modelos sin expectativas.

PROBLEMA II.1.1.

$$\text{MIN } E_0 W = E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t),$$ siendo K_t matriz simétrica definida positiva o semidefinida positiva

(1.1) $y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$, para $t=1,2,\ldots,T$

y_0, dado

Los vectores aleatorios $\{u_t\}$ se supone que son incorrelados, y $Eu_t = 0$, $\forall t$

en donde: y_t: es un vector de variables endógenas (variables de estado).

x_t: es un vector de instrumentos políticos (variables de control).

b_t: es un vector que recoge los efectos combinados de las variables exógenas no sujetas a control.

Vamos a resolver el problema por programación dinámica. La ecuación de Bellman, para cada $t=1,2,\ldots,T$, será:

$$\hat{V}_t(y_{t-1}) = \underset{x_t}{\text{MIN}}\ E_{t-1}\left[(y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) + \hat{V}_{t+1}(y_t)\right]$$

con $\hat{V}_{T+1}(y_T) = 0$

Notación: $E_{t-1}(X) = E(X/y_{t-1})$

Estudiaremos dos casos: a) Las variables exógenas $\{b_t\}$ son no estocásticas. b) Las variables exógenas $\{b_t\}$ -- son estocásticas.

a) CASO EN QUE LAS VARIABLES $\{b_t\}$ SON NO ESTOCASTICAS. Este caso es el que aparece usualmente en la literatura.

Suponemos, por tanto, que $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_T$ son dados, conocidos de antemano.

Vamos a seguir el enfoque de Chow (1975)

TEOREMA II 1.1.

La solución al problema II.1.1. es la siguiente:

$$\hat{x}_t = G_t y_{t-1} + g_t, \text{ siendo } \begin{array}{l} G_t = -(C_t' H_t C_t)^{-1} C_t' H_t A_t \\ g_t = -(C_t' H_t C_t)^{-1} C_t' (H_t b_t - h_t) \end{array}$$

en donde:
$$H_{t-1} = K_{t-1} + (A_t + C_t G_t)' H_t (A_t + C_t G_t), \quad \text{con } H_T = K_T$$
$$h_{t-1} = K_{t-1} a_{t-1} + (A_t + C_t G_t)' (h_t - H_t b_t), \quad \text{con } h_T = K_T a_T$$
$$c_{t-1} = a_{t-1}' K_{t-1} a_{t-1} + (b_t + C_t g_t)' H_t (b_t + C_t g_t) - 2(C_t g_t + b_t)' h_t +$$
$$+ E_{t-1} u_t' H_t u_t + c_t, \qquad \text{con } c_T = a_T' K_T a_T$$

Además:
$$\hat{V}_t(y_{t-1}) = y_{t-1}'(A_t + C_t G_t)' H_t (A_t + C_t G_t) y_{t-1} - 2 y_{t-1}' (A_t + C_t G_t)' (h_t - H_t b_t) +$$
$$+ (C_t g_t + b_t)' H_t (C_t g_t + b_t) - 2(C_t g_t + b_t)' h_t + E_{t-1}(u_t' H_t u_t) + c_t$$

DEM.: Por inducción sobre t

PARA T

$$V_T(y_{T-1}) = E_{T-1}\{(y_T - a_T)' K_T (y_T - a_T)\} = E_{T-1} \, (y_T' K_T y_T - 2 y_T' K_T a_T +$$
$$+ a_T' K_T a_T) =$$

$= E_{T-1}(y_T' H_T y_T - 2y_T' h_T + c_T)$, en donde $H_T = K_T$; $h_T = K_T a_T$;

$c_T = a_T' K_T a_T$

podemos poner:

$$V_T(y_{T-1}) = E_{T-1} \{(A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T + u_T)' H_T (A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T + u_T) -$$

$$-2(A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T + u_T)' h_T + c_T\} = (A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T)' H_T (A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T) -$$

$$-2(A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T)' h_T + E_{T-1}(u_T' H_T u_T) + c_T$$

→ Cond. de mínimo:

$$\frac{\partial V_T}{\partial X_T} = 0 = 2C_T' H_T (A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T) - 2C_T' h_T \rightarrow \underline{\hat{x}_T = G_T y_{T-1} + g_T}$$

siendo

$$G_T = -(C_T' H_T C_T)^{-1} C_T' H_T A_T$$

$$g_T = -(C_T' H_T C_T)^{-1} C_T' (H_T b_T - h_T)$$

$$\rightarrow \hat{V}_T(y_{T-1}) = \min_{X_T} V_T(y_{T-1}) = \left[(A_T + C_T G_T) y_{T-1} + C_T g_T + b_T\right]' H_T \left[(A_T + C_T G_T) y_{T-1} + \right.$$

$$\left. + C_T g_T + b_T\right] - 2\left[(A_T + C_T G_T) y_{T-1} + C_T g_T + b_T\right]' h_T + E_{T-1}(u_T' H_T u_T) + c_T =$$

$$= y_{T-1}'(A_T + C_T G_T)' H_T (A_T + C_T G_T) y_{T-1} - 2y_{T-1}'(A_T + C_T G_T)'(h_T - H_T b_T) +$$

$$+ (C_T g_T + b_T)' H_T (C_T g_T + b_T) - 2(C_T g_T + b_T)' h_T + E_{T-1}(u_T' H_T u_T) + c_T$$

(Nota: $(A_T + C_T G_T)' H_T C_T = 0$, por lo cual no aparece el sumando --

$$2y_{T-1}'(A_T + C_T G_T)' H_T C_T g_T)$$

Supongamos que el teorema es cierto para t .

Vamos a demostrar que se cumple <u>PARA t-1</u>

$$V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\left\{(y_{t-1}-a_{t-1})'K_{t-1}(y_{t-1}-a_{t-1})+\hat{V}_t(y_{t-1})\right\}=$$

$$=E_{t-2}\ (y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1})\ ,\ \text{en donde:}$$

$$\begin{cases} H_{t-1}=K_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t) \\ h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'\ (h_t-H_tb_t) \\ c_{t-1}=a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+(C_tg_t+b_t)'H_t(C_tg_t+b_t)-2(C_tg_t+b_t)'h_t+ \\ \quad +E_{t-1}(u'_tH_t\ u_t)+c_t \end{cases}$$

ya que por la hipótesis de inducción podemos poner en lugar de $\hat{V}_t(y_{t-1})$ la expresión que aparece en el enunciado del teorema.

Podemos poner:

$$V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\left\{\left[A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1}\right]'H_{t-1}\right.$$

$$\left[A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1}\right]-2\ (A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1})'$$

$$\left.h_{t-1}+c_{t-1}\right\}=(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}y_{t-2}+$$

$$+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1})\ -2\ (A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1})'h_{t-1}+$$

$$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}\ u_{t-1})+c_{t-1}$$

Cond. de mínimo:

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x_{t-1}}=0=2\ C'_{t-1}H_{t-1}(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1})-2\ C'_{t-1}\ h_{t-1}$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{t-1}=G_{t-1}y_{t-2}+g_{t-1}$$

$$\text{siendo} \begin{cases} G_{t-1} = -(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1} \\ g_{t-1} = -(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}(H_{t-1}b_{t-1}-h_{t-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{V}_{t-1}(y_{t-2}) = \underset{Xt-1}{\text{MIN}} \; V_{t-1}(y_{t-2}) = \Big[(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}+C_{t-1}g_{t-1}+$$
$$+b_{t-1}\Big]' H_{t-1}\Big[(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}+C_{t-1}g_{t-1}+b_{t-1}\Big] - 2\Big[(A_{t-1}+C_{t-1}$$
$$G_{t-1})y_{t-2}+C_{t-1}g_{t-1}+b_{t-1}\Big]'h_{t-1}+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}\,u_{t-1}) + c_{t-1} =$$
$$= y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2} - 2y'_{t-2}(A_{t-1}+$$
$$+C_{t-1}G_{t-1})'\,(h_{t-1} - H_{t-1}b_{t-1}) + (C_{t-1}g_{t-1}+b_{t-1})'H_{t-1}(C_{t-1}g_{t-1}+$$
$$+b_{t-1}) - 2\,(C_{t-1}g_{t-1}+b_{t-1})'h_{t-1}+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1}) + c_{t-1}$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

b) CASO EN QUE LAS VARIABLES b_t SON ESTOCASTICAS

Nos parece interesante analizar este caso ya que hemos comprobado que en la literatura económica muchas veces las variables exógenas se modelizan como variables estocásticas. Más adelante, al estudiar modelos con expectativas futuras, nos aparecerán variables exógenas estocásticas por lo que, como referencia, analizamos también el caso del problema standard.

Notación: Para cualquier variable aleatoria V_t,

$$E_{t-j}(V_t) = E(V_t | y_{t-j}) = E(V_t | I_{t-j}) = V^*_{t/t-j}$$

en donde I_{t-j} : Es la información de que disponemos al final del período t-j.

TEOREMA II.1.2.

La solución al problema planteado es la siguiente:

$$\hat{x}_t = G_t y_{t-1} + g_t, \quad \text{siendo} \quad \begin{array}{l} G_t = -(C_t' H_t C_t)^{-1} C_t' H_t A_t \\ g_t = -(C_t' H_t C_t)^{-1} C_t' (H_t\, b^*_{t/t-1} - h^*_{t/t-1}) \end{array}$$

en donde
$$\begin{cases} H_{t-1} = K_{t-1} + (A_t + C_t G_t)' H_t (A_t + C_t G_t) \quad , \text{ con } H_T = K_T \\ h_{t-1} = K_{t-1} a_{t-1} + (A_t + C_t G_t)' (h^*_{t/t-1} - H_t b^*_{t/t-1}) , \text{ con } h_T = K_T a_T \\ c_{t-1} = a'_{t-1} K_{t-1} a_{t-1} + E_{t-1} \left[(b_t + C_t g_t)' H_t (b_t + C_t g_t) \right] - \end{cases}$$

$$-2\, E_{t-1} \left[(b_t + C_t g_t)' h_t \right] + E_{t-1}(u_t' H_t u_t) + E_{t-1}(c_t),$$

$$\text{con } c_T = a_T' K_T a_T$$

Además:

$$\hat{V}_t(y_{t-1}) = y'_{t-1}(A_t + C_t G_t)' H_t (A_t + C_t G_t) y_{t-1} - 2 y'_{t-1}(A_t + C_t G_t)'(h^*_{t/t-1} -$$

$$H_t b^*_{t/t-1}) + E_{t-1} \left[(C_t g_t + b_t)' H_t (C_t g_t + b_t) \right] - 2\, E_{t-1} \quad (b_t + C_t g_t)' h_t$$

$$+ E_{t-1}(u_t' H_t u_t) + E_{t-1}(c_t)$$

Demostración: Por inducción sobre t.

PARA T $\quad V_T(y_{T-1}) = E_{T-1} \left[(y_T - a_T)' K_T (y_T - a_T) \right] = E_{T-1} \; (y_T' H_T y_T -$

$- 2 y_T' h_T + c_T)$

en donde $H_T = K_T$; $h_T = K_T a_T$; $c_T = a_T' K_T a_T$

Podemos poner: $V_T(y_{T-1}) = E_{T-1} \left[(A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T + u_T)' H_T (A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T + \right.$

$\left. + u_T) - 2\, (A_T y_{T-1} + C_T x_T + b_T + u_T)' h_T + c_T \right] =$

$$=(A_T y_{T-1}+C_T x_T)'H_T(A_T y_{T-1}+C_T x_T)+ 2(A_T y_{T-1}+C_T x_T)'H_T\ b^*_{T/T-1}+$$

$$+E_{T-1}(b_T'H_T b_T)+ E_{T-1}(u_T'H_T u_T) - 2\ (A_T y_{T-1}+C_T x_T+b^*_{T/T-1})'h_T+c_T$$

➔ condición de mínimo (necesaria y suficiente por convexidad).

$$\frac{\partial V_T}{\partial X_T}=0 = 2\ C_T'H_T(A_T y_{T-1}+C_T x_T)+2\ C_T'H_T b^*_{T/T-1} - 2C_T'h_T$$

$$\Rightarrow \hat{x}_T= G_T y_{T-1}+g_T \quad \text{en donde} \quad \begin{array}{l} G_T=-(C_T'H_T C_T)^{-1}C_T H_T A_T \\ g_T=-(C_T'H_T C_T)^{-1}C_T'(H_T b^*_{T/T-1}-h_T) \end{array}$$

(NOTA: $g_T=g^*_{T/T-1}$, pero, en general $g_T\neq g^*_{T/T-j}$, para $j>1$)

$$\Rightarrow \quad \hat{V}_T(y_{T-1})= E_{T-1}\Big\{\Big[(A_T+C_T G_T)y_{T-1}+ (b_T+C_T g_T)+u_T\Big]'$$
$$H_T\Big[(A_T+C_T G_T)y_{T-1}+(b_T+C_T g_T)+ u_T\Big] - 2\ \Big[(A_T+C_T G_T)y_{T-1}+$$
$$+(b_T+C_T g_T)+ u_T\Big]'\ h_T+c_T\Big\} =$$

$$=y_{T-1}'(A_T+C_T G_T)'H_T(A_T+C_T G_T)y_{T-1} + 2y_{T-1}'(A_T+C_T G_T)'H_T$$
$$(C_T g_T+b^*_{T/T-1}) + E_{T-1}\Big[(b_T+C_T g_T)'H_T(b_T+C_T g_T)\Big] +$$
$$+E_{T-1}(u_T'H_T u_T) - 2\ y_{T-1}'\ (A_T+C_T G_T)'h_T - 2(b^*_{T/T-1}+C_T g_T)'h_T+$$
$$+c_T = y_{T-1}'(A_T+C_T G_T)'H_T(A_T+C_T G_T)y_{T-1} - 2y_{T-1}'(A_T+C_T G_T)'$$
$$(h_T-H_T\cdot b^*_{T/T-1}) + E_{T-1}\ (b_T+C_T g_T)'H_T(b_T+C_T g_T) -$$
$$- 2\ (C_T g_T+b^*_{T/T-1})'h_T +E_{T-1}(u_T'H_T\ u_T)+c_T$$

<u>**NOTA**</u>: $(A_T+C_T G_T)'H_T C_T=0$, por lo cual no aparece el sumando

$$2y_{T-1}'(A_T+C_T G_T)'H_T C_T g_T$$

supongamos que el teorema es cierto <u>para t</u>

<u>PARA t-1</u>

$$V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\left[(y_{t-1}-a_{t-1})'K_{t-1}(y_{t-1}-a_{t-1})+\hat{V}_t(y_{t-1})\right]=$$

$$E_{t-2}(y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1}),\text{ en donde:}$$

$$\begin{cases} H_{t-1}=K_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t) \\ h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'(h^*_{t/t-1}-H_tb^*_{t/t-1}) \\ c_{t-1}=a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+E_{t-1}(C_tg_t+b_t)'H_t(C_tg_t+b_t)- \end{cases}$$

$$-2E_{t-1}\left[(b_t+C_tg_t)'h_t\right]+E_{t-1}(u'_tH_tu_t)+E_{t-1}c_t$$

ya que por la hipótesis de inducción podemos poner la expre-- sión del enunciado en lugar de $\hat{V}_t(y_{t-1})$

Podemos poner:

$$V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\left[(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1})'H_{t-1}\right.$$

$$(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1})-2(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1})'$$

$$\left.h_{t-1}+c_{t-1}\right]=(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1})+$$

$$+2(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1})'H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}+E_{t-2}(b'_{t-1}H_{t-1}b_{t-1})+$$

$$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})-2(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1})'h^*_{t-1/t-2}-$$

$$-2E_{t-2}(b'_{t-1}h_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1})$$

→ condición de mínimo:

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x_{t-1}} = 2\, C'_{t-1}H_{t-1}(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1})+2\, C'_{t-1}H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}-$$

$$-\ 2\, C'_{t-1}\, h^*_{t-1/t-2}$$

$$\Rightarrow\ \hat{x}_{t-1}=G_{t-1}y_{t-2}+g_{t-1} \qquad G_{t-1}= -(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}\, H_{t-1}\, A_{t-1}$$

en donde

$$g_{t-1}= -(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}(H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}- h^*_{t-1/t-2})$$

(NOTA: $g_{t-1}=g^*_{t-1/t-2}$, pero en general distinto de $g^*_{t-1/t-j}$, para $j>2$)

$$\Rightarrow\ \hat{V}_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\left[(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}+(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})+u_{t-1}\right]'$$

$$H_{t-1}\left[(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}+(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})+ u_{t-1}\right]-$$

$$-\ 2\left[((A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}+(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})+u_{t-1})'h_{t-1}+c_{t-1}\right] =$$

$$= y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})\, y_{t-2} +$$

$$+\ 2\, y'_{t-2}\, (A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'\, H_{t-1}b^*_{t-1/t-2} +E_{t-2}(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'$$

$$H_{t-1}(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})+ E_{t-2}\, u'_{t-1}H_{t-1}\, u_{t-1}\ -$$

$$-\ 2\, y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'h^*_{t-1/t-2} - 2E_{t-2}\left[(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'h_{t-1}\right]$$

$$+\ E_{t-2}\, c_{t-1} =$$

$$=y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}-$$

$$-\ 2\, y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'(h^*_{t-1/t-2}-H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}) +$$

$$+\ E_{t-2}\, (b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'H_{t-1}(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})\ -$$

$$-\ 2\, E_{t-2}\, (b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'h_{t-1}\ +E_{t-2}c_{t-1}+E_{t-2}\, u'_{t-1}H_{t-1}\, u_{t-1}$$

con lo que queda probado el teorema.

Comentarios a los dos casos estudiados.

1ª) Supongamos que en el caso b) de variables exógenas estocásticas, sustituimos las b_t por sus esperanzas $E_o b_t = b^*_{t/o}$, conocidas y resolvemos el problema como en el caso a). Pretendemos estudiar si en esta situación particular se verifica el principio de equivalencia cierta. Es decir, nos planteamos, ¿Serán las reglas de decisión óptimas idénticas en ambos casos?. Veamos, con un contraejemplo, que en general no coincidirán .

Problema $\quad \text{MIN } E_o(y_1^2 + y_2^2)$

$$\text{con } \begin{cases} y_1 = y_o + \frac{1}{2} x_1 + b_1 + u_1 \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{2} x_2 + b_2 + u_2 \\ y_o = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $K_1 = K_2 = 1$; $a_1 = a_2 = 0$; $A_1 = A_2 = 1$; $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

u_1 y u_2 son variables aleatorias incorreladas de media 0 y varianza 1.

Suponemos que b_1, b_2 son procesos estocásticos autoregresivos de orden 1. O sea:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = \frac{1}{2} b_o + \varepsilon_1 \\ b_2 = \frac{1}{2} b_1 + \varepsilon_2 \end{array}\right\} \text{, siendo } b_o = 3$$

ε_1, ε_2 son variables aleatorias incorreladas entre si y con u_1, u_2, de media 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} b^*_{1/o} = \frac{1}{2}\, b_o = \frac{3}{2} \\ b^*_{2/o} = \frac{1}{2}\, b^*_{1/o} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

a) Consideramos $b^*_{1/o} = \frac{3}{2}$; $b^*_{2/o} = \frac{3}{4}$, dados. Lo utilizamos en lugar de b_1 y b_2 en el sistema y resolvemos el problema con el teorema II.1.1.

$$\begin{array}{llllll} H_2 = 1 & \rightarrow & G_2 = -2 & \rightarrow H_1 = 1 & \rightarrow & G_1 = -2 \\ h_2 = 0 & \rightarrow & g_2 = \frac{-3}{2} & & & \\ \Downarrow & & & & & \\ h_1 = 0 & \rightarrow & g_1 = -3 & & & \end{array}$$

POR TANTO $\begin{cases} \hat{x}_1 = -2y_o - 3 \\ \hat{x}_2 = -2y_1 - \frac{3}{2} \end{cases}$

b) Tratamos a b_1, b_2 como estocásticos. Utilizaremos las expresiones obtenidas en el teorema II.1.2.

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2}\, b_o + \epsilon_1 \\ b_2 = \frac{1}{2}\, b_1 + \epsilon_2 \\ b_o = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b^*_{1/o} = \frac{3}{2} \\ b^*_{2/o} = \frac{3}{4} \end{array}$$

Supongamos que al final del período 1 se observa que $b_1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \epsilon_1 = \frac{1}{4}$

$$b^*_{2/1} = \frac{1}{2}\, b_1 = \frac{7}{8}$$

Entonces $G_1 = -2$; $G_2 = -2$, como en el apartado a)

$$\left.\begin{array}{l} h_2=0=h_1 \\ g_2=\frac{-7}{4}\ ;\ g_1=-3 \end{array}\right\} \qquad \text{POR TANTO} \left\{\begin{array}{l} \hat{x}_1=-2y_o-3 \\ \hat{x}_2=-2y_1-\frac{7}{4} \end{array}\right.$$

Vemos, por tanto, que las reglas de decisión óptimas difieren para $\hat{x}_2$.

2º) Veamos cómo en el caso b) de variables exógenas estocásticas se calculan los valores de G_t, g_t correspondientes a las reglas de decisión óptimas.

En cuanto a las matrices G_t vemos que son exactamente iguales que en el caso a) de variables exógenas no estocásticas. La secuencia de matrices que iríamos calculando sería:

$$H_T \rightarrow G_T \rightarrow H_{T-1} \rightarrow G_{T-1} \rightarrow H_{T-2} \rightarrow G_{T-2} \rightarrow \ldots \rightarrow H_1 \rightarrow G_1$$

Todos los datos que necesitamos para el cálculo de esas matrices son conocidos desde el principio por lo que ya al comienzo del período 1 se conocen todas las matrices H_t y G_t.

Los vectores g_t son diferentes al caso a). Veamos cómo en el caso b), habría que ir efectuando los cálculos.

$h_T= K_Ta_T=cte$ $\rightarrow g_T$, depende de $b^*_{T/T-1}$. (Podemos poner $g_T= \phi_T(b^*_{T/T-1})$, y en donde ϕ_T será conocido desde el principio).

$\Downarrow$

h_{T-1} : depende de h_T y de $b^*_{T/T-1}$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$h^*_{T-1/T-2}$: depende de h_T y de $b^*_{T/T-2}$ $\rightarrow$ g_{T-1}, depende de $b^*_{T-1/T-2}$ y de $h^*_{T-1/T-2}$ y, por tanto, de $b^*_{T-1/T-2}$ y de $b^*_{T/T-2}$.

$\Downarrow$

(O sea: $g_{T-1}=\phi_{T-1}(b^*_{T-1/T-2}, b^*_{T/T-2})$. ϕ_{T-1} conocida).

h_{T-2}: depende de $h^*_{T-1/T-2}$, $b^*_{T-1/T-2}$

$\Downarrow$

$h^*_{T-2/T-3}$: depende de $h^*_{T-1/T-3}$, $b^*_{T-1/T-3}$ $\rightarrow$ g_{T-2} , depende de $b^*_{T-2/T-3}$, y de $h^*_{T-2/T-3}$ y, por tanto, de $b^*_{T-2/T-3}$, $b^*_{T-1/T-3}$, $b^*_{T/T-3}$

$\Downarrow$

(O sea: $g_{T-2}=\phi_{T-2}$ $(b^*_{T-2/T-3}, b^*_{T-1/T-3}, b^*_{T/T-3})$ T-2: conocida).

h_1 depende de $h^*_{2/1}$ y de $b^*_{2/1}$

$\Downarrow$

$h^*_{1/o}$: depende de $h^*_{2/o}$ y de $b^*_{2/o}$ $\rightarrow$ g_1, depende de $b^*_{1/o}$ y de $h^*_{1/o}$ y, por tanto, de $b^*_{1/o}, b^*_{2/o}, \dots, b^*_{T/o}$

(O sea: $g_1=\phi_1(b^*_{1/o}, b^*_{2/o}, \dots, b^*_{T/o})$, con ϕ , conocida.

POR TANTO:

$\forall t=1,2,\dots,T$

$g_t=\phi_t(b^*_{t/t-1}, b^*_{t+1/t-1}, \dots, b^*_{T/t-1})$, con los ϕ_t conocidos desde el principio.

Para cada t, al final del período t-1 habrá que calcular los $b^*_{j/t-1}$, $j=t,\dots,T$, sustituir en la función ϕ_t, con lo que obtendremos g_t.

3ª) Enlazando con el final del comentario 2º cabe preguntarse. ¿En la práctica, se conocerán al final del período t-1, los valores $b^*_{j/t-1}$, $\forall j=t,t+1,\ldots,T$?. Veamos cómo se -- trabaja normalmente en la práctica econométrica.

Recordemos que b_t representa un vector de variables exógenas no sujetas a control. "Por variables exógenas queremos decir que el proceso que determina los valores de b_t no - depende de los procesos que determinan las variables endóge-- nas y^*_t (Begg, 1982, Pág. 90).

En cualquier instante t-1, el considerar $b^*_{j/t-1}$, - conocido $\forall j=t,t+1,\ldots,T$ es usual en la práctica econométrica como nos han confirmado algunos expertos consultados y como - aparece en la literatura que hemos manejado (Wallis (1980), - Pesaran (1981), Begg (1982), Chow (1983)).

En la práctica usual se considera que b_t sigue un proceso AR(p), es decir:

$$b_t = \sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i} + \xi_t$$

en donde $\{\xi_t\}$ es un proceso estocástico de media cero, serialmente incorrelado, independiente de las perturbaciones que entran en el sistema que explica y_t, y en donde los coeficientes R_i pueden estimarse a partir de la regresión de b_t sobre $\{b_{t-1}, b_{t-2}, \ldots, b_{t-p}\}$. Haciendo que p tienda a infinito y poniendo restricciones a los R_i, se puede considerar que b_t sigue un proceso ARMA (p,q). (De hecho sabemos por la descomposición de Wold que todo proceso regular estacionario en covarianza admite una representación autoregresiva, quizá de -- orden infinito).

$\rightarrow\; b^*_{t/t-1} = \sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i}$, luego es conocido al final del período t-1.

$b^*_{t/t-2} = R_1 b^*_{t-1/t-2} + \sum_{i=2}^{p} R_i b_{t-i}$, luego es conocido al final del período t-2

$b^*_{t/t-r} = \sum_{i=1}^{r-1} R_i b^*_{t-i/t-r} + \sum_{i=r}^{p} R_i b_{t-i}$ (siendo $r \leq p$), conocido al final del período t-r.

$b^*_{t/t-s} = \sum_{i=1}^{p} R_i b^*_{t-i/t-s}$ (siendo $s > p$), conocido al final del período t-s.

Por tanto, en el momento inicial se conocen $b^*_{1/o}$, $b^*_{2/o}, \ldots, b^*_{T/o}$. Al final del período 1 se conocen, además -- b_1, $b^*_{2/1}$, $b^*_{3/1}, \ldots, b^*_{T/1}$. Al final del período 2 se conocen, además, b_2, $b^*_{3/2}$, $b^*_{4/2}, \ldots, b^*_{T/2}$ y así sucesivamente.

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO EN MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES DE VARIABLES FUTURAS EN EL CASO DE INFORMACION COMPLETA.

PROBLEMA II.2.1.

$\text{MIN } E_o W = E_o \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)$, siendo K_t matriz simétrica, definida positiva o semidefinida positiva.

(2.1.) $y_t = B_t y^*_{t/t-1} + B_{1t} y^*_{t+1/t-1} + A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t$

(para $t=1,2,\ldots,T$)

en donde:

y_t es un vector de variables endógenas (y_o, es un - vector dado)

x_t es un vector de instrumentos políticos (variables de control)

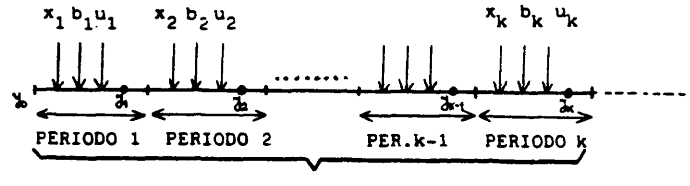
b_t es un vector que recoge los efectos combinados de las variables exógenas no sujetas a control.

$u_1, u_2, \ldots, u_T$: son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados, de media 0.

$y^*_{t/k} = E(\, y_t \mid I_k\,)$, en donde suponemos que $I_k = \{y_k, \ldots, y_o;$

$u_k, u_{k-1}, \ldots, u_1, x_k, \ldots, x_1\; b_k, \ldots, b_1.\}$

Es decir: I_k recoge toda la información al final del período k, según el siguiente esquema:



I_k: información de lo ocurrido en ese tiempo.

Suponemos que los vectores a_t, así como las matrices $K_t, B_t, B_{1t}, A_t, C_t$ son datos del problema

<u>**Comentario general sobre la solución del problema:**</u>

Este problema lo resolvió Chow (1980) para un caso particular: aquel en el que los coeficientes del sistema B_t, B_{1t}, A_t C_t así como a_t, K_t son constantes y además, el sistema (2.1) se puede hacer estacionario en covarianza a través -

del tiempo. El problems para el caso general no aparece resuelto en la literatura.W Buiter (1983), tras exponer la solución de Chow para el caso particular resuelto, dice: "Ahora falta ver si esta solución puede ser extendida al caso en que y_t no sea estacionario en covarianza".

Nosotros, tras una proposición previa, partiremos del desarrollo de Chow, y luego resolveremos el problema para el caso más general.

PROPOSICION II.2.1. (Chow, 1980)

El sistema (2.1) se puede expresar de la siguiente forma:

$$(2.2)\quad y_t=\tilde{B}_{1t}\, y^*_{t+1/t-1}+\tilde{A}_t y_{t-1}+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

en donde:

$$\tilde{B}_{1t}=(I-B_t)^{-1}\, B_{1t}$$

$$\tilde{A}_t=(I-B_t)^{-1}A_t$$

$$\tilde{C}_t=(I-B_t)^{-1}C_t$$

$$\tilde{b}^*_{t/t-1}=(I-B_t)^{-1}b^*_{t/t-1}$$

$$\eta_t=C_t(x_t-x^*_{t/t-1})+(b_t-b^*_{t/t-1})+u_t$$

DEM:

Partimos de (2.1): $y_t=B_t y^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+$
$+C_t X_t+b_t+u_t$

$$\Rightarrow\quad y^*_{t/t-1}=B_t y^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+$$
$$+C_t x^*_{t/t-1}+b^*_{t/t-1}$$

$$\Rightarrow \; y_t = y^*_{t/t-1} + C_t(x_t - x^*_{t/t-1}) + (b_t - b^*_{t/t-1}) + u_t =$$

$$= (I-B_t)^{-1} \, (B_{1t} y^*_{t+1/t-1} + A_t y_{t-1} + C_t x^*_{t/t-1} + b^*_{t/t-1}) \; + \eta_t \; ,$$

con lo que queda demostrada la preposición.

NOTA 1: Chow en su trabajo considera B, B_1, A, C : matrices constantes. Nosotros permitimos que varien en el -- tiempo, siendo la proposición igualmente válida, como hemos demostrado.

NOTA 2: Suponemos que los $\eta_t = C_t(x_t - x^*_{t/t-1}) + (b_t - b^*_{t/t-1}) + u_t$, son incorrelados en el tiempo, y tienen media cero, tal como hace Chow.

NOTA 3: Suponemos que, para cada t, la matriz $(I-B_t)$ es no - singular.

3.- METODO QUE PROPONE CHOW PARA RESOLVER EL PROBLEMA II.2.1 EN UN CASO PARTICULAR.

Vamos a exponer el método tal como aparece en Chow (1980).

PROBLEMA II.3.1.

$$\text{MIN } E_0 \quad \sum_{t=1}^{T} (y_t - a)' K (y_t - a),$$ siendo K definida positiva o semidefinida positiva.

$$(3.1) \quad y_t = B y^*_{t/t-1} + B_1 y^*_{t+1/t-1} + A y_{t-1} + C x_t + b_t + v_t$$

, con y_0, dado

Se supone, además, que el sistema se puede hacer - estacionario en covarianza en el tiempo.

Por la proposición II.2.1., sabemos que el sistema (3.1) se puede expresar como:

$$(3.2) \quad y_t = \tilde{B}_1 y^*_{t+1/t-1} + \tilde{A} y_{t-1} + \tilde{C} x^*_{t/t-1} + \tilde{b}^*_{t/t-1} + \eta_t$$

En esta expresión se considera a $y^*_{t+1/t-1}$ como dado (tal como si fuera una constante) y, entonces, se aplica la programación dinámica, obteniendo, tras identificar $\hat{x}_t$ con $\hat{x}^*_{t/t-1}$, la siguiente ecuación de control:

$$(3.3) \quad \hat{x}_t = G_{1t} y^*_{t+1/t-1} + G_{2t} y_{t-1} + g_t$$

Bajo ciertas condiciones referentes a los parámetros del sistema, los coeficientes G_{1t}, G_{2t}, g_t pueden hacerse invariantes en el tiempo al crecer T. También puede ocurrir que G_{1t} y G_{2t} sean invariantes y g_t cambie en el tiempo para reflejar cambios en $\tilde{b}^*_{t/t-1}$, pero el sistema bajo control permanecerá estacionario en convarianza.

Supongamos que el sistema se puede hacer estacionario en convarianza, utilizando la regla de control dada. Sustituyendo $\hat{x}_t = \hat{x}^*_{t/t-1}$ dado por (3.3) en el sistema (3.2) se obtiene:

$$(3.4) \quad y_t = R_1 y^*_{t+1/t-1} + R_2 y_{t-1} + r + \eta_t, \text{ en donde}$$

$$\begin{cases} R_1 = \tilde{B}_1 + \tilde{C} G_1 \\ R_2 = \tilde{A} + \tilde{C} G_2 \\ r = \tilde{b}^*_{t/t-1} + \tilde{C} g_t \end{cases}$$

Si el sistema (3.4) es estacionario en covarianza, debe existir un sistema observacionalmente equivalente:

(3.5) $y_t = Qy_{t-1} + q + \eta_t$, en donde los autovalores de Q son menores que uno, en valor absoluto.

Para encontrar Q y q utilizamos el método de solución llamado de coeficientes indeterminados, para una ecuación en diferencias con expectativas racionales:

$$y_{t+1} = Qy_t + q + \eta_{t+1} \qquad y^*_{t+1/t-1} = Qy^*_{t/t-1} + q$$

Pero, a partir de (3.5), obtenemos: $y^*_{t/t-1} = Qy_{t-1} + q$

Por tanto:

$$(3.6)\ y^*_{t+1/t-1} = Q\left[Qy_{t-1} + q\right] + q = Q^2 y_{t-1} + (Q+I)q$$

Sustituyendo en (3.4)

$$y_t = R_1(Q^2 y_{t-1} + (Q+I)q) + R_2 y_{t-1} + r + \eta_t$$

O sea que:

$$y_t = (R_1 Q^2 + R_2) y_{t-1} + R_1(Q+I)q + r + \eta_t$$

Identificando los coeficientes de esta última ecuación con los del sistema (3.5), tenemos

$$Q = (I - R_1 Q)^{-1} R_2$$

$$q = (I - R_1(Q+I))^{-1} r$$

Habiendo calculado Q y q a partir de estas expresiones, podemos obtener $y^*_{t+1/t-1}$ en (3.6) y llevarlo a la expresión (3.3), para obtener $\hat{x}_t$, obteniendo una expresión de la forma $\hat{x}_t = F_t y_{t-1} + f_t$, con lo que el problema queda resuelto.

4.- COMENTARIOS Y CRITICA AL TRABAJO DE CHOW.-

Como hemos visto en el apartado anterior, lo primero que hace Chow es considerar a $y^*_{t+1/t-1}$ como dado en el sistema (3.2) y aplicar la programación dinámica, obteniendo, tras identificar x_t con $x^*_{t/t-1}$ la expresión (3.3), en donde G_{1t}, G_{2t}, g_t se calculan a partir de los datos iniciales del problema. A continuación sustituye en el sistema dado el valor obtenido para el control óptimo, obteniendo un sistema de ecuaciones en diferencias con expectativas racionales, sin variables de control. Necesita, entonces, resolver el sistema y lo hace por el método de coeficientes indeterminados para lo cual necesita imponer las condiciones de partida señaladas en el apartado anterior. Tras resolver el sistema puede calcular $y^*_{t+1/t-1}$ y llevarlo a la expresión de $\hat{x}_t$, con lo que el problema queda resuelto.

Nosotros básicamente vamos a tomar las ideas de Chow, pero llegados al punto de resolver el sistema, lo vamos a hacer por otro método, precisamente el que el propio Chow propone en la primera parte del mismo trabajo, al tratar de la evaluación política, para lo cual no necesitamos exigir que el sistema se haga estacionario en covarianza a través del tiempo, ni que los coeficientes del sistema ni los de la función objetivo sean constantes, si bien necesitaremos una condición de transversalidad (utilizaremos la que propone Chow: que en el instante final T: $y^*_{T+1/T-1}=\Gamma y^*_{T/T-1}$).

Además de las ideas generales expresadas, tenemos que hacer algunas puntualizaciones al trabajo de Chow.

Escribe en su artículo: "Tratando a $y^*_{t+1/t-1}$ como dado en el sistema de ecuación $y_t=\tilde{B}_1 y^*_{t+1/t-1}+\tilde{A}y_{t-1}+\tilde{C}x^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$, y minimizando la esperanza de una función de pérdida cuadrática para T períodos, podemos aplicar la programa ción dinámica como en Chow (1975 Cap.8), para encontrar una ecuación de control óptimo en bucle cerrado: $\hat{x}_t=G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+$ $+G_{2t}y_{t-1}+g_t$". Este párrafo nos merece los dos comentarios siguientes:

1º) La cita anterior significa que $\hat{x}_t$ se calcularía de la siguiente forma:

El sistema dado se puede expresar: $y_t=\tilde{A}y_{t-1}+\tilde{C}x^*_{t/t-1}+$ $+(\tilde{b}^*_{t/t-1}+\tilde{B}_1y^*_{t+1/t-1})+\eta_t$, en donde el término que aparece entre parentesis sería el b_t del problema standard de control - (sistema 1.1).

Identificando x_t con $x^*_{t/t-1}$, como hace Chow, y aplicando el teorema II.1.1, obtenemos:

$$(4.1) \qquad x_t=\bar{G}_t y_{t-1}+\bar{g}_t$$

en donde:

$$\begin{cases} \bar{G}_t= -(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'H_t\tilde{A} \\ \bar{g}_t= -(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'\left[H_t(\tilde{b}^*_{t/t-1}+\tilde{B}_1y^*_{t+1/t-1})-h_t\right]= \\ = -(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'H_t\tilde{B}_1y^*_{t+1/t-1}-(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}' \\ \qquad \left[H_t\tilde{b}^*_{t/t-1}-h_t\right] \end{cases}$$

Definimos:

$$\begin{cases} (4.2) \quad G_{1t}= -(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'H_t\tilde{B}_1 \\ (4.3) \quad G_{2t}=\bar{G}_t= -(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'H_t\tilde{A} \\ (4.4) \quad g_t= -(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}\left[H_t\tilde{b}^*_{t/t-1}-h_t\right] \end{cases}$$

con lo cual (4.1) queda

$$(4.5) \quad \hat{x}_t=G_{1t}y^*_{t+1|t-1}+G_{2t}y_{t-1}+g_t$$

en donde las matrices G_{1t}, G_{2t}, g_t dependen de H_t y h_t. Veamos cuáles son:

$$(4.6)\quad H_{t-1}=K_{t-1}+(\tilde{A}+\tilde{C}G_{2t})'H_t(\tilde{A}+\tilde{C}G_{2t}) \quad \text{con } H_T=K_T$$

(por tanto, las matrices G_{1t}, G_{2t} las podemos ir calculando sin problemas, a partir de los coeficientes del sistema y de la función objetivo).

$$(4.7)\quad h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+(\tilde{A}+\tilde{C}G_{2t})'\left[h_t-H_t(\tilde{b}^*_{t/t-1}+\tilde{B}_1y^*_{t+1/t-1})\right]$$

con $h_T=K_Ta_T$, que depende de $y^*_{t+1/t-1}$. Por tanto, los vectores g_t no se pueden calcular a partir de los coeficientes del sistema y de la función objetivo. Vemos que g_t depende de h_t que a su vez, para $t < T$ depende de $y^*_{t+2/t}$. Esto no parece tenerlo en cuenta Chow, cuando sustituye (3.3) en el sistema (3.2), obteniendo (3.4), que utilizará posteriormente para calcular $y^*_{t+1/t-1}$.

2º) Siguiendo con la exposición que hemos hecho en el punto 1º, no sería correcta la identificación que hace Chow, de que $\hat{x}_t=\hat{x}^*_{t/t-1}$. En efecto:

$$\hat{x}_t=G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+G_{2t}y_{t-1}+g_t$$

pero
$$\begin{cases} g_t= -(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'\left[H_t\tilde{b}^*_{t/t-1}-h_t\right] \\ h_t= K_ta_t+(\tilde{A}+\tilde{C}G_{2,t+1})'\left[h_{t+1}-H_{t+1}(\tilde{b}^*_{t+1/t}+\tilde{B}_1y^*_{t+2/t})\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{x}^*_{t/t-1}= G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+G_{2t}y_{t-1}+g^*_{t/t-1}$$

pero
$$\begin{cases} g^*_{t/t-1}= -(\tilde{C}'H_t\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'\left[H_t\tilde{b}^*_{t/t-1}-h^*_{t/t-1}\right] \\ h^*_{t/t-1}= K_ta_t+(\tilde{A}+\tilde{C}G_{2,t+1})'\left[h^*_{t+1/t-1}-H_{t+1}(\tilde{b}^*_{t+1/t-1}+\tilde{B}_1y^*_{t+2/t-1})\right] \end{cases}$$

En general: $h_t\neq h^*_{t/t-1} \Rightarrow g_t\neq g^*_{t/t-1} \Rightarrow \hat{x}_t\neq\hat{x}^*_{t/t-1}$

En nuestro trabajo corregimos estas dos posibles deficiencias.

A continuación del párrafo comentado anteriormente, escribe Chow: "Bajo ciertas condiciones de los parámetros del sistema, tal como vienen en Chow (1975 pág. 170-172), los coeficientes G_{1t}, G_{2t}, g_t pueden llegar a ser invariantes en el tiempo cuando T crece. Puede también ocurrir que G_{1t}, G_{2t} sean invariantes en el tiempo pero que g_t cambie para reflejar cambios en $b^*_{t/t-1}$ pero el sistema bajo control óptimo siga siendo estacionario en covarianza. Supongamos que el sistema dado puede hacerse estacionario en covarianza utilizando tal regla; es decir, cuando $\hat{x}_t=G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+G_{2t}y_{t-1}+g_t$ sustituye a $x^*_{t/t-1}$ en la ecuación del sistema, obtendremos un sistema estacionario en covarianza: $y_t=\underset{\sim}{R}_1 y^*_{t+1/t-1}+R_2y_{t-1}+r+\eta_t$, en donde $R_1=\underset{\sim}{B}_1+\underset{\sim}{C}G_1$; $R_2=\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{C}G_2$ y $r=b^*_{t/t-1}+\underset{\sim}{C}g_t$. Si este sistema es estacionario en covarianza bajo expectativas racionales, debe existir un sistema observacionalmente equivalente: $y_t=Qy_{t-1}+q+\eta_t$, en donde los autovalores de la matriz Q son todos ellos menores que uno en valor absoluto". Este párrafo también nos merece algunos comentarios.

1º) Estamos ocupados en un problema en el que T es fijo, finito. Entendemos que el plantearnos qué ocurre cuando T crece y estudiar condiciones de convergencia de las matrices G_{1t},G_{2t},g_t corresponde a otro problema, interesante pero diferente al que nos ocupa.

2º) Si se consideran las matrices G_{1t}, G_{2t} definidas en (4.2) y (4.3) referidas a la matriz H_t, obtenida en (4.6), es fácil estudiar condiciones de convergencia de G_1,G_2 y H (se puede utilizar el teorema que aparece en Bertsekas (1976), pág. 75, adaptado a este caso que resulta más riguroso, nos parece, que el análisis que hace Chow (1975)). El problema es que si fuera así, el planteamiento sería incorrecto, tal como hemos señalado anteriormente, a parte de que no podríamos calcular los vectores g_t.

Al tratar de corregir estas deficiencias en nuestro trabajo, nos encontramos con que las matrices G_{1t}, G_{2t} siguen valiendo lo mismo que en (4.2) y (4.3) pero con respecto a una matriz H_t diferente a la obtenida en (4.6). Con ello, al plantearnos el problema del tiempo infinito se nos complica muchísimo el estudio de la convergencia de las matrices H_t y, por consiguiente de G_{1t} y G_{2t}.

3º) Es cierto que, aunque $\tilde{b}^*_{t/t-1}+\tilde{C}g_t$ dependa del tiempo, el sistema seguirá siendo estacionario en covarianza. En ese caso $\tilde{b}^*_{t/t-1}+\tilde{C}g_t$ variará con el tiempo y habrá que utilizar la notación r_t y no r. Entendemos que el que ese término no sea constante o varíe con el tiempo no tiene nada que ver con que el sistema sea estacionario en covarianza o no lo -- sea pero si tendrá que ver con la solución del sistema.

Es decir: Si r es constante $\rightarrow$ La solución del sistema

$y_t=R_1y^*_{t+1/t-1}+R_2y_{t-1}+r+\eta_t$, se puede calcular por el método de coeficientes indeterminados, tal como hace Chow en su artículo y, por tanto, el sistema observacionalmente equivalente será el que allí aparece.

Si r no es constante (r_t), el sistema seguirá siendo estacionario en covarianza, pero no es cierto que la solución al sistema sea la que expresa Chow en su artículo. En efecto:

Sea el sistema: $y_t=R_1y^*_{t+1/t-1}+R_2y_{t-1}+r_t+\eta_t$

a) Veamos que no puede ser solución: $y_t=Qy_{t-1}+q+\eta_t$ (siendo q: constante)

$$\Rightarrow y_{t+1}=Qy_t+q+\eta_{t+1} \quad ; \quad y^*_{t/t-1}=Qy_{t-1}+q$$

$$y^*_{t+1/t-1}=Qy^*_{t/t-1}+q=Q\left[Qy_{t-1}+q\right]+q=Q^2y_{t-1}+Qq+q$$

Sustituyendo este valor en el sistema, queda:

$$y_t=R_1\left[Q^2y_{t-1}+(Q+I)q\right]+R_2y_{t-1}+r_t+\eta_t=(R_1Q^2+R_2)y_{t-1}+R_1\left[Q+I\right]q+$$
$$+r_t+\eta_t \quad \Rightarrow \quad Q=R_1Q^2+R_2$$

$$q=R_1\left[Q+I\right]q+r_t \qquad q=\left[I-R_1(Q+I)\right]^{-1}r_t$$

Imposible: todo es constante excepto r_t, que varía en el tiempo.

b) Calculemos la solución correcta

La solución tiene que ser $y_t=Qy_{t-1}+q_t+\eta_t$ (con los autovalores de Q, menores que 1 en valor absoluto).

$$\Rightarrow y^*_{t/t-1}=Qy_{t-1}+q^*_{t/t-1}$$

$$y_{t+1}=Qy_t+q_{t+1}+\eta_{t+1} \Rightarrow y^*_{t+1/t-1}=Qy^*_{t/t-1}+q^*_{t+1/t-1}=$$
$$=Q\left[Qy_{t-1}+q^*_{t/t-1}\right]+q^*_{t+1/t-1}$$

Luego: $y_t=R_1\left[Q^2y_{t-1}+Qq^*_{t/t-1}+q^*_{t+1/t-1}\right]+R_2y_{t-1}+r_t+\eta_t=$

$$=(R_1Q^2+R_2)y_{t-1}+R_1(Qq^*_{t/t-1}+q^*_{t+1/t-1})+r_t+\eta_t$$

Identificando coeficientes, nos queda:

$$Q=R_1Q^2+R_2 \quad \Rightarrow \quad Q=(I-R_1Q)^{-1}R_2$$

$$q_t = R_1 \, (Q q^*_{t/t-1} + q^*_{t+1/t-1}) + r_t$$ (Si r es constante, nos queda q, constante con el mismo valor que obtiene Chow)

En resumen: Si r no es constante no sirve el método de coeficientes indeterminados, al menos tal como lo utiliza Chow. Por tanto, si r cambia con el tiempo la solución del sistema (el sistema observacionalmente equivalente que el considera) no será correcta y ello tiene repercusiones en el control y en la evolución del sistema.

Terminamos este apartado señalando de nuevo, porque nos parece muy importante, que la convergencia de G_{1t}, G_{2t}, g_t tiene que ver con la de las matrices H_t y h_t que no aparecen en el artículo de Chow. Si H_t, h_t fueran las dadas por (4.6) y (4.7), hemos visto deficiencias importantes, o sea que el problema estaría mal abordado. Si no son estas ¿Cuáles son?. En nuestro trabajo hemos encontrado otras H_t y h_t con las que eliminamos las deficiencias señaladas, pero cuando nos planteamos el problema cuando T fuera infinito nos encontramos con enormes dificultades para estudiar la convergencia.

5.- ESTUDIO DEL CASO GENERAL.-

a) CASO DE VARIABLES EXOGENAS ESTOCASTICAS.

TEOREMA II.5.1.

Consideramos el problema II.2.1. Suponemos que para t=T (período final), se verifica que $y^*_{T+1/T-1} = \Gamma y^*_{T/T-1}$. Suponemos que las variables b_t son estocásticas.

Tratando a los vectores $y^*_{t+1/t-1}$ como dados, utilizamos la programación dinámica, obteniendo.

$$(5.1) \quad \hat{x}_t = G_t y_{t-1} + G_{1t} y^*_{t+1/t-1} + g_t$$

con lo cual la evolución del sistema controlado, se puede expresar como:

$$(5.2) \quad y_t = P_t y_{t-1} + s_t + \eta_t$$

en donde:

$$\begin{cases} G_t = -(\tilde{C}'_t H_t \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}'_t H_t \tilde{A}_t \\ G_{1t} = -(\tilde{C}'_t H_t \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}'_t H_t \tilde{B}_{1t} \\ g_t = -(\tilde{C}'_t H_t \tilde{C}_t)^{-1} \tilde{C}'_t (H_t \tilde{b}^*_{t/t-1} - h^*_{t/t-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_t = (I - R_{1t} P_{t+1})^{-1} R_t, \text{ siendo } P_{T+1} = \Gamma \\ s_t = (I - R_{1t} P_{t+1})^{-1} (r_t + R_{1t} s^*_{t+1/t-1}), \text{ siendo } s_{T+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_t = \tilde{A}_t + \tilde{C}_t G_t \\ R_{1t} = \tilde{B}_{1t} + \tilde{C}_t G_{1t} \\ r_t = \tilde{b}^*_{t/t-1} + \tilde{C}_t g_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_t=K_t+P'_{t+1}H_{t+1}P_{t+1} \quad , \text{ con } H_T=K_T \\ h_t=K_ta_t+P'_{t+1}(h^*_{t+1/t}-H_{t+1}s_{t+1}), \text{ con } \quad h_T=K_Ta_T \\ c_t= a'_tK_ta_t+s'_{t+1}H_{t+1}s_{t+1}-2s'_{t+1}h^*_{t+1/t}+E_t(\eta'_{t+1}H_{t+1}\eta_{t+1})+ \\ \qquad + E_t(c_{t+1}), \qquad \text{con } \; c_T=a'_TK_Ta_T \end{cases}$$

Además, $\hat{V}_t(y_{t-1})=y'_{t-1}P'_tH_tP_ty_{t-1}-2y'_{t-1}P'_t(h^*_{t/t-1}-H_ts_t)+s'_tH_ts_t-$

$-2s'_th^*_{t/t-1}+E_{t-1}(\eta'_tH_t\eta_t)+E_{t-1}(c_t)$

Calculando $y^*_{t+1/t-1}$ a partir de (5.2) y sustituyendo en (5.1), queda finalmente:

$$\boxed{\hat{x}_t=F_ty_{t-1}+f_t} \quad , \text{ en donde } \begin{cases} F_t=G_t+G_{1t}P_{t+1}P_t \\ f_t=g_t+G_{1t}(P_{t+1}s_t+s^*_{t+1/t-1}) \end{cases}$$

<u>**DEMOSTRACION**</u> Por inducción sobre t.

$\boxed{\textbf{PARA } t=T}$

$V_T(y_{T-1})=E_{T-1}\left[(y_T-a_T)'K_T(y_T-a_T)\right] = E_{T-1}(y'_TK_Ty_T -$

$- 2y'_TK_Ta_T+a'_TK_Ta_T) = E_{T-1}(y'_TH_Ty_T-2y'_Th_T+c_T),$

$$\text{en donde} \quad \begin{cases} H_T=K_T \\ h_T=K_Ta_T \\ c_T=a'_TK_Ta_T \end{cases}$$

Sustituyendo y_T por el valor obtenido en (2.2) queda:

$V_T(y_{T-1})=E_{T-1}\left[(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T)'\right.$

$$H_T(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T)-$$

$$\left.-2(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T)'h_T+c_T\right] =$$

$$=(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1})'\; H_T(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+$$

$$+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1})+E_{T-1}(\eta'_TH_T\eta_T) -$$

$$-2(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1})'h_T+c_T$$

<u>Condición necesaria de mínimo</u>:

$$\frac{\partial V_T}{\partial x^*_{T/T-1}} = 0 = 2\tilde{C}'_TH_T(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1})-2\tilde{C}'_Th_T$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}^*_{T/T-1}=G_Ty_{T-1}+G_{1T}y^*_{T+1/T-1}+g_T$$

en donde

$$\begin{cases} G_T= -(\tilde{C}'_TH_T\tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}'_T\; H_T\tilde{A}_T \\ G_{1T}= -\; (\tilde{C}'_TH_T\tilde{C}'_T)^{-1}\tilde{C}'_TH_T\tilde{B}_{1T} \\ g_T= -\; (\tilde{C}'_TH_T\tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}'_T\; (H_T\tilde{b}^*_{T/T-1}-h_T) \end{cases}$$

(Observese que $g_T=g^*_{T/T-1} \neq g^*_{T/T-j}$, para $j>1$)

(En general)

Por estar optimizando un programa convexo, la condición es también suficiente de optimalidad global

Llevando el valor obtenido $\hat{x}^*_{T/T-1}$ al sistema (2.2), particularizado en T, queda:

$$y_T=R_Ty_{T-1} + R_{1T}y^*_{T+1/T-1}+ r_T+\eta_T \text{ , en donde } \begin{cases} R_T=\tilde{A}_T+\tilde{C}_TG_T \\ R_{1T}=\tilde{B}_{1T}+\tilde{C}_TG_{1T} \\ r_T=\tilde{b}^*_{T/T-1}+\tilde{C}_Tg_T \end{cases}$$

(Por tanto: $r_T = r^*_{T/T-1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(En general)}}}{\neq} r^*_{T/T-j}$, para $j > 1$)

Al ser $y^*_{T+1/T-1} = \Gamma y^*_{T/T-1}$, queda:

$$y_T = R_T y_{T-1} + R_{1T} \Gamma y^*_{T/T-1} + r_T + \eta_T$$

Entonces: $y^*_{T/T-1} = R_T y_{T-1} + R_{1T} \Gamma y^*_{T/T-1} + r_T \Rightarrow y^*_{T/T-1} = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1}$ $(R_T y_{T-1} + r_T)$

$$y_T = y^*_{T/T-1} + \eta_T = P_T y_{T-1} + s_T + \eta_T \text{, con } \begin{cases} P_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} R_T \\ s_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} r_T \end{cases}$$

(Nota: $s_T = s^*_{T/T-1} \underset{\text{En general}}{\neq} s^*_{T/T-j}$, para $j > 1$)

$$y^*_{T/T-1} = P_T y_{T-1} + s_T \Rightarrow y^*_{T+1/T-1} = \Gamma P_T y_{T-1} + \Gamma s_T$$

Por tanto:

$$\hat{x}^*_{T/T-1} = G_T y_{T-1} + G_{1T}(\Gamma P_T y_{T-1} + \Gamma s_T) + g_T = F_T y_{T-1} + f_T$$

$$\text{en donde } \begin{cases} F_T = G_T + G_{1T} \Gamma P_T \\ f_T = g_T + G_{1T} \Gamma s_T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{V}_T(y_{T-1}) = (P_T y_{T-1} + s_T)' H_T (P_T y_{T-1} + s_T) + E_{T-1}(\eta'_T H_T \eta_T) -$$

$$-2(P_T y_{T-1} + s_T)' h_T + c_T = y'_{T-1} P'_T H_T P_T y_{T-1} - 2y'_{T-1} P'_T (h_T - H_T s_T) +$$

$$+ s'_T H_T s_T - 2 s'_T h_T + E_{T-1}(\eta'_T H_T \eta_T) + c_T$$

que coincide con la expresión que aparece en el enunciado, - particularizada para T, ya que $h_T=h^*_{T/T-1}$ y $c_T=E_{T-1}(c_T)$.

Hemos calculado $\hat{x}^*_{T/T-1}=\widehat{E[x_T|I_{T-1}]}$, pero no $\hat{x}_T$ que es lo que nos interesa. A partir del esquema del apartado 2, se ve que cuando se conoce I_{T-1} no ocurre ningún acontecimiento (shock, variable exógena etc) antes de que x_T actúe sobre el sistema. Parece lógico, por tanto, que tenga que ser $x_T=x^*_{T/T-1}$ y, por tanto $\hat{x}_T=\hat{x}^*_{T/T-1}$. Además, en este caso, esta identificación no presenta ningún problema matemático, ya que $g_T=g^*_{T/T-1}$. Es decir: hacemos

$$\hat{x}_T=G_Ty_{T-1}+G_{1T}y^*_{T+1/T-1}+g_T$$

$$\Rightarrow \hat{x}^*_{T/T-1}=G_Ty_{T-1}+G_{1T}y^*_{T+1/T-1}+g_T \text{ Coincide con } \hat{x}_T,$$

por ser $g^*_{T/T-1}=g_T$

(sin embargo, en general $\hat{x}_T\neq\hat{x}^*_{T/T-j}$, para $j>1$, ya que

$g_T\neq g^*_{T/T-j}$, para $j>1$)

SUPONEMOS QUE EL TEOREMA ES CIERTO PARA t (Según la hipótesis de inducción).

Para t-1

$$V_{t-1}(y_{t-2})= E_{t-2}\Big[y'_{t-1}K_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+$$
$$+a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+\hat{V}_t(y_{t-1})\Big] =$$
$$= E_{t-2}\ (y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1})$$

en donde:
$$\begin{cases} H_{t-1}= K_{t-1}+P_t'H_tP_t \\ h_{t-1}= K_{t-1}a_{t-1}+P_t'(h^*_{t/t-1}-H_ts_t) \\ c_{t-1}=a_{t-1}'K_{t-1}a_{t-1}+s_t'H_ts_t-2\,s_t'h^*_{t/t-1}+ \\ \quad +E_{t-1}(\eta_t'H_t\eta_t)+E_{t-1}(c_t) \end{cases}$$

Podemos poner:

$$V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\Big[(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}^*_{t-1/t-2}+\eta_{t-1})'$$
$$H_{t-1}(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}^*_{t-1/t-2}+\eta_{t-1})-$$
$$-2(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}^*_{t-1/t-2}+\eta_{t-1})'h_{t-1}+$$
$$+c_{t-1}\Big]=(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}^*_{t-1/t-2})'H_{t-1}$$
$$(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}^*_{t-1/t-2})+E_{t-2}(\eta_{t-1}'H_{t-1}\eta_{t-1})-$$
$$-2(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}^*_{t-1/t-2})'h^*_{t-1/t-2}+$$
$$+E_{t-2}(c_{t-1})$$

<u>Condición necesaria de mínimo:</u>

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x^*_{t-1/t-2}}=0=2\,\tilde{C}_{t-1}'H_{t-1}(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+$$
$$+\tilde{b}^*_{t-1/t-2})-2\,\tilde{C}_{t-1}'h^*_{t-1/t-2}$$

$$\Rightarrow\quad \hat{x}^*_{t-1/t-2}=G_{t-1}y_{t-2}+G_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+g_{t-1}$$

en donde:

$$\begin{cases} G_{t-1} = -(\tilde{C}'_{t-1} H_{t-1} \tilde{C}_{t-1})^{-1} \tilde{C}'_{t-1} H_{t-1} \tilde{A}_{t-1} \\ G_{1,t-1} = -(\tilde{C}'_{t-1} H_{t-1} \tilde{C}_{t-1})^{-1} \tilde{C}'_{t-1} H_{t-1} \tilde{B}_{1,t-1} \\ g_{t-1} = -(\tilde{C}'_{t-1} H_{t-1} \tilde{C}_{t-1})^{-1} \tilde{C}'_{t-1} (H_{t-1} \tilde{b}^*_{t-1/t-2} - h^*_{t-1/t-2}) \end{cases}$$

(NOTA: $g_{t-1} = g^*_{t-1/t-2} \underset{\downarrow}{\neq} g^*_{t-1/t-j}$, para $j > 2$)

(En general)

(Es también condición suficiente, por convexidad)

Sustituyendo el valor obtenido de $\hat{x}^*_{t-1/t-2}$ en el sistema (2.2) particularizado para t-1 queda:

$$y_{t-1} = R_{t-1} y_{t-2} + R_{1,t-1} y^*_{t/t-2} + r_{t-1} + \eta_{t-1}$$

en donde:

$$\begin{cases} R_{t-1} = \tilde{A}_{t-1} + \tilde{C}_{t-1} G_{t-1} \\ R_{1,t-1} = \tilde{B}_{1,t-1} + \tilde{C}_{t-1} G_{1,t-1} \\ r_{t-1} = \tilde{b}^*_{t-1/t-2} + \tilde{C}_{t-1} g_{t-1} \end{cases}$$

(NOTA: $r_{t-1} = r^*_{t-1/t-2} \underset{\downarrow}{\neq} r^*_{t-1/t-j}$, para $j > 2$)

(En general)

Teniamos: $y_t = P_t y_{t-1} + s_t + \eta_t$

$$\Rightarrow y^*_{t/t-2} = P_t y^*_{t-1/t-2} + s^*_{t/t-2}$$

$$y^*_{t-1/t-2} = R_{t-1} y_{t-2} + R_{1,t-1} y^*_{t/t-2} + r_{t-1} = R_{t-1} y_{t-2} + R_{1,t-1} P_t y^*_{t-1/t-2} + R_{1,t-1} s^*_{t/t-2} + r_{t-1}$$

$$\Rightarrow y^*_{t-1/t-2} = (I - R_{1,t-1} P_t)^{-1} (R_{t-1} y_{t-2} + R_{1,t-1} s^*_{t/t-2} + r_{t-1})$$

$$\Rightarrow \quad y_{t-1}= y^*_{t-1/t-2}+ \eta_{t-1}= P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}+ \eta_{t-1} \quad \text{, en donde:}$$

$$\begin{cases} P_{t-1}=(I-R_{1,t-1}P_t)^{-1}R_{t-1} \\ s_{t-1}=(I-R_{1,t-1}P_t)^{-1}(R_{1,t-1}s^*_{t/t-2}+r_{t-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^*_{t-1/t-2}=P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1} \quad \Rightarrow \quad y^*_{t/t-2}=P_tP_{t-1}y_{t-2}+P_ts_{t-1}+s^*_{t/t-2}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}^*_{t-1/t-2}=G_{t-1}y_{t-2}+G_{1,t-1}(P_tP_{t-1}y_{t-2}+P_ts_{t-1}+s^*_{t/t-2})+g_{t-1}=$$

$$=F_{t-1}y_{t-2}+f_{t-1}, \text{ en donde } \quad \begin{array}{l} F_{t-1}=G_{t-1}+G_{1,t-1}P_tP_{t-1} \\ f_{t-1}=g_{t-1}+G_{1,t-1}(P_ts_{t-1}+s^*_{t/t-2}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad V_{t-1}(y_{t-2})=(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})'H_{t-1}(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})+$$

$$+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\,\eta_{t-1})-2(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})'h^*_{t-1/t-2}+$$

$$+E_{t-2}(c_{t-1})=y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}P_{t-1}y_{t-2}+2y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}+$$

$$+s'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\,\eta_{t-1}) - 2\, y'_{t-2}P'_{t-1}h^*_{t-1/t-2} -$$

$$-2\, s'_{t-1}h^*_{t-1/t-2}+E_{t-2}(c_{t-1})= y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}P_{t-1}y_{t-2}-$$

$$-2y'_{t-2}P'_{t-1}(h^*_{t-1/t-2}-H_{t-1}s_{t-1})+s'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}-2\, s'_{t-1}h^*_{t-1|t-2}+$$

$$+\, E_{t-2}\,(\eta'_{t-1}H_{t-1}\eta_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1})$$

Como hemos hecho para el caso T, identificamos $\hat{x}_{t-1}=\hat{x}^*_{t-1/t-2}$, lo cual no nos plantea problemas matemáticos por ser $g_{t-1}=g^*_{t-1/t-2}$ y, además, parece lógico que así sea ya que para decidir $\hat{x}_t$ no se va a disponer de más información que la de I_{t-2}.

El teorema queda demostrado.

Comentarios al teorema

1º) Condición de que $y^*_{T+1/T-1} = \Gamma y^*_{T/T-1}$, con Γ matriz dada, para T, instante final.

Esta condición la justifica Chow, cuando trata el problema de evaluación política econométrica escribiendo: "Para el propósito de evaluación política, consideramos la ecuación (4) para el período T.

$$(4)\quad y_t = By^*_{t/t-1} + B_1 y^*_{t+1/t-1} + Ay_{t-1} + Cx_t + b_t + v_t$$

Explica y_T, utilizando $y^*_{T+1/T-1}$. Para obtener un único modelo estocástico para y_T, y de hecho para todo $y_t(t=1,2,\ldots,T)$, supondremos que $y^*_{T+1/T-1}$ es una función lineal dada de $y^*_{T/T-1}$ (y de y_{T-1} si es necesario). Cada función lineal supuesta dará un modelo para y_T y de ahí, para y_t $(t=1,2,\ldots,T)$. Esto no supone proporcionar una respuesta general al problema de solución multiple, apareciendo en modelos con expectativas racionales, tal como se discute en Taylor (1977) y en Shiller (1978), por ejemplo. Estamos sugiriendo que para llegar a una única secuencia de predicciones, un partidario de las expectativas racionales necesita proporcionar una condición adicional y que la ecuación (4) para T, período final, es un lugar conveniente para poner y examinar tal condición. Cuando T es suficientemente grande, es razonable suponer que elementos escogidos de $y^*_{T+1/T-1}$ son iguales o proporcionales a los elementos correspondientes de $y^*_{T/T-1}$, para hacer una evaluación política en el período 1. Esta suposición puede ser reemplazada por la suposición de igualdad o proporcionalidad entre $y^*_{T+1/o}$ e $y^*_{T/o}$" (Chow, 1980 pág. 49-50).

Nosotros tomamos esa condición, que utilizaremos como una condición de transversalidad, en la que nos apoyamos para resolver el sistema hacia atrás en el tiempo. La solución del problema, como hemos visto, depende de esta condición. Su influencia en la solución será tanto menor cuanto mayor sea el horizonte temporal.

Si $y_{T+1}= \Gamma y_T+u_T$, siendo u_T variable aleatoria de media cero, incorrelada con I_{T-1}, entonces $y^*_{T+1/T-1}= \Gamma y^*_{T/T-1}$. Se puede interpretar, por tanto, la condición -- que estamos comentando, como la hipótesis de que $y_{T+1}= \Gamma y_T+ u_T$(*). Esta hipótesis no será contrastable.

El método de solución propuesto es válido independientemente del supuesto que se haga de la relación (*). En particular se pueden suponer distintas estructuras como -- $y_{T+1}= \Gamma y_T+ \gamma +u_T$; $y_{T+1}= \Gamma_1 y_T+ \Gamma_2 y_{T-1}+u_T$ etc. En todos los casos se resolvería el problema de manera análoga a la del teorema y llegando siempre a que el sistema controlado evolucionará de acuerdo con ecuaciones de la forma:

$$y_t=M_t y_{t-1}+m_t+u_t \qquad \{u_t\} \text{ : incorrelados, de media cero.}$$

2º) A la vista del gran número de ecuaciones que aparecen en el teorema, cabe preguntarse si realmente servirían en la práctica para resolver un problema concreto.

Veamos cuál sería el orden en que habría que ir calculando las expresiones:

PARTIMOS DE: $\tilde{A}_t$, $\tilde{B}_{1t}$, $\tilde{C}_t$, a_t, K_t conocidos, $\forall t=1,2,\dots,T$

Además, al final del período t-j, suponemos que los $\tilde{U}^*_{t/t-j}$ son conocidos , $\forall t= 1,2,\dots,T$
$\forall_j=1,2,\dots,t$

La matriz Γ es también conocida.

PARA T+1

$$\text{Hacer}\begin{cases} P_{T+1}=\Gamma \\ s_{T+1}=0 \end{cases}$$

PARA T

Hacer $H_T=K_T$

Calcular $G_T= -(\tilde{C}_T'H_T\tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T'H_T\tilde{A}_T$

$G_{1T}= -(\tilde{C}_T'H_T\tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T'H_T\tilde{B}_{1T}$

Calcular $R_T=\tilde{A}_T+\tilde{C}_TG_T$

$R_{1T}=\tilde{B}_{1T}+\tilde{C}_TG_{1T}$

Calcular $P_T=(I-R_{1T}P_{T+1})^{-1}R_T$

Calcular $F_T=G_T+G_{1T}P_{T+1}P_T$

Hacer $h_T=K_Ta_T$

Calcular $g_T= -(\tilde{C}_T'H_T\tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T'\left[H_T\tilde{b}^*_{T/T-1}-h_T\right]=g_T(\tilde{b}^*_{T/T-1})$, con $g_T(.)$ conocida

Calcular $r_T=\tilde{b}^*_{T/T-1}+\tilde{C}_Tg_T= r_T(\tilde{b}^*_{T/T-1})$, con $r_T(.)$ función conocida

Calcular $s_T= (I-R_{1T}P_{T+1})^{-1}\, r_T= s_T(\tilde{b}^*_{T/T-1})$, con $s_T(.)$ función conocida

Calcular $f_T= g_T+G_{1T}(P_{T+1}s_T)= f_T(\tilde{b}^*_{T/T-1})$, con $f_T(.)$ función conocida

Estos cálculos y los que expresaremos a continuación hay que realizarlos antes de decidir el valor de las variables de control en el primer período, cuando aún no conocemos el valor de $\tilde{b}^*_{T/T-1}$, por lo que los resultados nos quedan en función de $\tilde{b}^*_{T/T-1}$.

Las funciones g_T, r_T, s_T serán lineales en -- $\tilde{b}^*_{T/T-1}$, por lo que: $\forall_i = 1,2,\ldots,T$ se verificará.

$$g^*_{T/T-i} = g_T(\tilde{b}^*_{T/T-i}); \quad r^*_{T/T-i} = r_T(\tilde{b}^*_{T/T-i}) \; ; \quad s^*_{T/T-i} = s_T(\tilde{b}^*_{T/T-i})$$

PARA T-1

Hacer: $H_{T-1} = K_{T-1} + P'_T H_T P_T$

Calcular: $G_{T-1} = -(\tilde{C}'_{T-1} H_{T-1} \tilde{C}_{T-1})^{-1} \tilde{C}'_{T-1} H_{T-1} \tilde{A}_{T-1}$

$G_{1,T-1} = -(\tilde{C}'_{T-1} H_{T-1} \tilde{C}_{T-1})^{-1} \tilde{C}'_{T-1} H_{T-1} \tilde{B}_{1,T-1}$

Calcular: $R_{T-1} = \tilde{A}_{T-1} + \tilde{C}_{T-1} G_{T-1}$

$R_{1,T-1} = \tilde{B}_{1,T-1} + \tilde{C}_{T-1} G_{1,T-1}$

Calcular $P_{T-1} = (I - R_{1,T-1} P_T)^{-1} R_{T-1}$

Calcular $F_{T-1} = G_{T-1} + G_{1,T-1} P_T P_{T-1}$

Hacer: $h_{T-1} = K_{T-1} a_{T-1} + P'_T (h_T - H_T s_T)$: depende de $\tilde{b}^*_{T/T-1}$

Calcular $h^*_{T-1/T-2} = K_{T-1} a_{T-1} + P'_T (h_T - H_T s^*_{T/T-2})$: depende de $\tilde{b}^*_{T/T-2}$

Calcular $g_{T-1} = (\tilde{C}'_{T-1} H_{T-1} \tilde{C}_{T-1})^{-1} \tilde{C}'_{T-1} H_{T-1} \tilde{b}^*_{T-1/T-2} - h^*_{T-1/T-2}) =$

$= g_{T-1}(\tilde{b}^*_{T-1/T-2}, \tilde{b}^*_{T/T-2})$

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Calcular} & r_{T-1}=\tilde{b}^*_{T-1/T-2}+\tilde{C}_{T-1}g_{T-1}=r_{T-1}(\tilde{b}^*_{T-1/T-2},\tilde{b}^*_{T/T-2}) \\ \text{Calcular} & s_{T-1}=(I-R_{1,T-1}P_T)^{-1}(r_{T-1}+R_{1,T-1}s^*_{T/T-2}) \\ & =s_{T-1}\ (\tilde{b}^*_{T-1/T-2},\ \tilde{b}^*_{T/T-2}) \\ \text{Calcular} & f_{T-1}=g_{T-1}+G_{1,T-1}(P_T s_{T-1}+s^*_{T/T-2})= \\ & = f_{T-1}(\tilde{b}^*_{T-1/T-2},\ \tilde{b}^*_{T/T-2})\end{array}\right.$$

en donde las funciones $g_{T-1}, r_{T-1}, s_{T-1}, f_{T-1}$ son conocidas, - lineales en $\tilde{b}^*_{T-1/T-2}$, $\tilde{b}^*_{T/T-2}$. $\forall i=1,2,\ldots,T$ tendremos: $g^*_{T-1/T-1-i}=$ $= g_{T-1}(\tilde{b}^*_{T-1/T-1-i}, \tilde{b}^*_{T/T-1-i})$; $r^*_{T-1/T-1-i}= r_{T-1}(\tilde{b}^*_{T-1/T-1-i}, \tilde{b}^*_{T/T-1-i})$

$$s^*_{T-1/T-1-i} = s_{T-1}\ (\tilde{b}^*_{T-1/T-1-i},\ \tilde{b}^*_{T/T-1-i})$$

Seguimos con T-2, T-3,..., y terminamos con t=1 de la siguiente forma:

PARA t=1

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Hacer} & H_1=K_1+P_2'H_2P_2 \\ \text{Calcular} & G_1= -(\tilde{C}_1'H_1\tilde{C}_1)^{-1}\tilde{C}_1'H_1\tilde{A}_1 \\ & G_{1,1}= -\ (\tilde{C}_1'H_1\tilde{C}_1)^{-1}\tilde{C}_1'H_1\tilde{B}_{1,1} \\ \text{Calcular} & R_1=\tilde{A}_1+\tilde{C}_1G_1 \\ & R_{1,1}=\tilde{B}_{1,1}+\tilde{C}_1G_{1,1} \\ \text{Calcular} & P_1=(I-R_{11}P_2)^{-1}R_1 \\ \text{Calcular} & F_1=G_1+G_{1,1}+P_2P_1\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \text{hacer} \quad h_1 = K_1 a_1 + P_2'(h^*_{2/1} - H_2 s_2) & \text{: depende de } h^*_{2/1} \text{ y de } \tilde{b}^*_{2/1} \\ \text{calcular} \quad h^*_{1/o} = K_1 a_1 + P_2'(h^*_{2/o} - H_2\, s^*_{2/o}) & \text{: depende de } h^*_{2/O} \text{ y de } \tilde{b}^*_{2/o} \\ \text{calcular} \quad g_1 = -(\tilde{C}_1' H_1 \tilde{C}_1)^{-1} \tilde{C}_1' (H_1 \tilde{b}^*_{1/o} - h^*_{1/o}) = g_1(\tilde{b}^*_{1/o}, \tilde{b}^*_{2/o}, \ldots, \tilde{b}^*_{T/o}) \\ \text{calcular} \quad r_1 = \tilde{b}^*_{1/O} + \tilde{C}_1 g_1 = r_1(\tilde{b}^*_{1/o}, \ldots, \tilde{b}^*_{T/o}) \\ \text{calcular} \quad s_1 = (I - R_{1,1} P_2)^{-1}(r_1 + R_{1,1}\, s^*_{2/o}) = s_1(\tilde{b}^*_{1/o}, \ldots, \tilde{b}^*_{T/o}) \\ \text{calcular} \quad f_1 = g_1 + G_{1,1}(P_2 s_1 + s^*_{2/o}) = f_1(\tilde{b}^*_{1/o}, \ldots, \tilde{b}^*_{T/o}) \end{cases}$$

POR TANTO : $\forall t = 1,2,\ldots,T$

$$\hat{x}_t = F_t y_{t-1} + f_t$$

F_t: conocido desde el principio

$f_t = f_t(\tilde{b}^*_{t/t-1}, \tilde{b}^*_{t+1/t-1}, \ldots, \tilde{b}^*_{T/t-1})$, con las funciones f_t conocidas desde el principio. Para cada t, al final del período t-1, habrá que calcular los $\tilde{b}^*_{j/t-1}$, para $j=t,\ldots,T$, sustituir en la función f_t, con lo que obtendremos el valor de f_t.

b) CASO DE VARIABLES EXOGENAS NO ESTOCASTICAS.

A continuación enunciaremos y demostraremos el teorema para el caso en que las variables b_t son no estocásticas. Supondremos, por tanto, que las variables exogenas $b_1, b_2, \ldots, b_T$ son conocidas de antemano. Seguiremos exactamente los mismos pasos que en el caso general. Posteriormente utilizaremos los resultados que obtengamos para comparar con la versión determinística del problema y estudiar el principio de equivalencia cierta.

En los trabajos de Buiter (1983), Driffil (1981) y Aoki-Canzoneri (1979) se considera un sistema como el que nosotros estamos estudiando pero sin que aparezca el vector b_t de variables exógenas no sujetas a control. Por otra parte, Shiller (1978) señala que, dado el sistema y dado el proceso que sigue el vector b_t, se puede reformular el sistema, de tal forma que no aparezcan variables exógenas no sujetas a control. Por todo ello nos parece también importante estudiar el caso en que $b_t=0$, $\forall t$. Será un corolario del teorema siguiente.

TEOREMA II.5.2.

Consideremos el problema II.2.1, en donde las variables exógenas son no estocásticas: o sea, se supone que los vectores $\tilde{b}_t=\tilde{b}^*_{t/t-j}$, $\forall t=1,2,\ldots,T$, $\forall j=1,2,\ldots,t$, son conocidos de antemano. Suponemos que, para $t=T$ (instante final), se verifica que $y^*_{T+1/T-1}=\Gamma\, y^*_{T/T-1}$.

Tratando a los vectores $y^*_{t+1/t-1}$ como dados, utilizamos la programación dinámica, obteniendo:

$$(5.3) \quad \hat{x}_t=G_t y_{t-1}+G_{1t} y^*_{t+1/t-1}+g_t$$

con lo cual la evolución del sistema controlado vendrá dada por: (5.4) $y_t=P_t y_{t-1}+s_t+\eta_t$, en donde:

$$G_t= -(\tilde{C}_t' H_t \tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}_t' H_t \tilde{A}_t \quad ; \quad G_{1t}= -(\tilde{C}_t' H_t \tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}_t' H_t \tilde{B}_{1t}$$

$$g_t= -(\tilde{C}_t' H_t \tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}_t'(H_t \tilde{b}_t-h_t)$$

$$\begin{cases} P_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}R_t, \text{ siendo } P_{T+1}=\Gamma \\ s_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}\ (r_t+R_{1t}s_{t+1}), \text{ siendo } s_{T+1}=0 \end{cases}$$

$$\left\{ R_t=\tilde{A}_t+\tilde{C}_tG_t \quad ; \quad R_{1t}=\tilde{B}_{1t}+\tilde{C}_tG_{1t} \quad ; \quad r_t=\tilde{b}_t+\tilde{C}_tg_t \right.$$

$$\begin{cases} H_t=K_t+P_{t+1}'H_{t+1}P_{t+1}\ , \text{ con } H_T=K_T \\ h_t=K_ta_t+P_{t+1}'(h_{t+1}-H_{t+1}s_{t+1}), \text{ con } h_T=K_Ta_T \\ c_t=a_t'K_ta_t+s_{t+1}'H_{t+1}s_{t+1}-2s_{t+1}'h_{t+1}+E_t(\eta_{t+1}'H_{t+1}\eta_{t+1})+c_{t+1} \end{cases}$$

$$\text{con } c_T=a_T'K_Ta_T$$

Además, $\hat{V}_t(y_{t-1})=y_{t-1}'P_t'H_tP_ty_{t-1}-2y_{t-1}'P_t'(h_t-H_ts_t)+s_t'H_ts_t-$

$-2s_t'h_t+E_{t-1}(\eta_t'H_t\eta_t)+c_t$

Calculando $y_{t+1/t-1}^*$, a partir de (5.4) y sustituyendo en (5.3), queda finalmente

$$\boxed{\hat{x}_t=F_ty_{t-1}+f_t}\ , \text{ en donde } \quad \begin{aligned} F_t&=G_t+G_{1t}P_{t+1}P_t \\ f_t&=g_t+G_{1t}(P_{t+1}s_t+s_{t+1}) \end{aligned}$$

__DEMOSTRACION__. Por inducción sobre t

PARA t=T

$V_T(y_{T-1})=E_{T-1}\ \{(y_T-a_T)'K_T(y_T-a_T)\}\ =E_{T-1}(y_T'K_Ty_T-2y_T'K_Ta_T+$

$+a_T'K_Ta_T)=E_{T-1}(y_T'H_Ty_T-2y_T'h_T+C_T)$

en donde: $H_T=K_T$; $h_T=K_Ta_T$; $c_T=a_T'K_Ta_T$

Sustituyendo y_T por el valor obtenido en (2.2) y teniendo en cuenta que $\tilde{b}_T=\tilde{b}^*_{T/T-j}$, $\forall_j$, queda:

$$\begin{aligned}
V_T(y_{T-1}) = E_{T-1}\Big[& (\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_T y_{T-1}+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}_T+\eta_T)' H_T \\
& (\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_T y_{T-1}+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}_T+\eta_T) - \\
& - 2(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_T y_{T-1}+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}_T+\eta_T)' h_T + c_T\Big] = \\
= & (\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_T y_{T-1}+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}_T)' H_T \\
& (\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_T y_{T-1}+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}_T)+E_{T-1}(\eta_T' H_T \eta_T) - \\
& - 2\,(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_T y_{T-1}+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}_T)' h_T + c_T
\end{aligned}$$

<u>Condición de mínimo</u>: (necesaria y suficiente de optimalidad global, por convexidad)

$$\frac{\partial V_T}{\partial x^*_{T/T-1}} = 0 = 2\,\tilde{C}_T' H_T\,(\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+\tilde{A}_T y_{T-1}+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}_T) - 2\tilde{C}_T' h_T$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}^*_{T/T-1} = G_T y_{T-1} + G_{1T} y^*_{T+1/T-1} + g_T$$

en donde:
$$\begin{cases}
G_T = -\,(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T' H_T \tilde{A}_T \\
G_{1T} = -\,(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T' H_T \tilde{B}_{1T} \\
g_T = -\,(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T'(H_T \tilde{b}_T - h_T)
\end{cases}$$

Llevando el valor obtenido $\hat{x}^*_{T/T-1}$ al sistema (2.2) particularizado en T, queda:

$$y_T = R_T y_{T-1} + R_{1T} y^*_{T+1/T-1} + r_T + \eta_T,$$

en donde $\begin{cases} R_T = \tilde{A}_T + C_T \tilde{G}_T \\ R_{1T} = \tilde{B}_{1T} + \tilde{C}_T G_{1T} \\ r_T = \tilde{b}_T + \tilde{C}_T g_T \end{cases}$

Al ser $y^*_{T+1/T-1} = \Gamma\, y^*_{T/T-1}$, queda $y_T = R_T y_{T-1} + R_{1T} \Gamma y^*_{T/T-1} + r_T + \eta_T$

Entonces: $y^*_{T/T-1} = R_T y_{T-1} + R_{1T}\, \Gamma\, y^*_{T/T-1} + r_T \Rightarrow y^*_{T/T-1} =$

$$= (I - R_1 \Gamma)^{-1} (R_T y_{T-1} + r_T)$$

$$\Rightarrow y_T = y^*_{T/T-1} + \eta_T = P_T y_{T-1} + s_T + \eta_T, \text{ con } \begin{matrix} P_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} R_T \\ s_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} r_T \end{matrix}$$

$$y^*_{T/T-1} = P_T y_{T-1} + s_T \Rightarrow y^*_{T+1/T-1} = \Gamma P_T y_{T-1} + \Gamma s_T$$

Por tanto: $\hat{x}^*_{T/T-1} = G_T y_{T-1} + G_{1T} (\Gamma P_T y_{T-1} + \Gamma s_T) + g_T = F_T y_{T-1} + f_T$

en donde $\begin{cases} F_T = G_T + G_{1T}\, \Gamma\, P_T \\ f_T = g_T + G_{1T}\, \Gamma\, s_T \end{cases}$

$$\Rightarrow \hat{V}_T(y_{T-1}) = (P_T y_{T-1} + s_T)' H_T (P_T y_{T-1} + s_T) + E_{T-1}(\eta'_T H_T \eta_T) -$$

$$-2(P_T y_{T-1} + s_T)' h_T + c_T =$$

$$= y'_{T-1} P'_T H_T P_T y_{T-1} - 2 y'_{T-1} P'_T (h_T - H_T s_T) + s'_T H_T s_T - 2 s'_T h_T +$$

$$+ E_{T-1}(\eta'_T H_T \eta_T) + c_T$$

Identificamos: $\hat{x}_T = \hat{x}^*_{T/T-1}$, tal como justificamos en el teorema II.5.1

SUPONEMOS QUE EL TEOREMA ES CIERTO PARA t (hipótesis de inducción)

$\boxed{\text{PARA } t-1}$

$$V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\ \{y'_{t-1}K_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+$$

$$+a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+\hat{V}_t(y_{t-1})\}=$$

$$=E_{t-2}\ (y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1})$$

en donde
$$\begin{cases} H_{t-1}=K_{t-1}+P'_tH_tP_t \\ h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+P'_t\ (h_t-H_ts_t) \\ c_{t-1}=a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+s'_tH_ts_t-2s'_th_t+E_{t-1}(\eta'_tH_t\eta_t)+c_t \end{cases}$$

Podemos poner:

$$V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\ \{(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+$$

$$+\tilde{b}_{t-1}+\eta_{t-1})'H_{t-1}(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}_{t-1}+\eta_{t-1})-$$

$$-2(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}_{t-1}+\eta_{t-1})'h_{t-1}+c_{t-1}\}=$$

$$=(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}_{t-1})'H_{t-1}$$

$$(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}_{t-1})+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\eta_{t-1})-$$

$$-2(\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+\tilde{b}_{t-1})'h_{t-1}+c_{t-1}$$

<u>Condición de mínimo</u>

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x^*_{t-1/t-2}}=0=2\ \tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\ (\tilde{B}_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x^*_{t-1/t-2}+$$

$$+\tilde{b}_{t-1})-2\tilde{C}'_{t-1}h_{t-1}$$

$$\Rightarrow \hat{x}^*_{t-1/t-2}=G_{t-1}y_{t-2}+G_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+g_{t-1}$$

en donde
$$\begin{cases} G_{t-1}=-(\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{C}_{t-1})^{-1}\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{A}_{t-1} \\ G_{1,t-1}=-(\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{C}_{t-1})^{-1}\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{B}_{1,t-1} \\ g_{t-1}=-(\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{C}_{t-1})^{-1}\tilde{C}'_{t-1}(H_{t-1}\tilde{b}_{t-1}-h_{t-1}) \end{cases}$$

sustituyendo el valor obtenido de $\hat{x}^*_{t-1/t-2}$ en el sistema, particularizado para t-1 queda:

$$y_{t-1}=R_{t-1}y_{t-2}+R_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+r_{t-1}+\eta_{t-1}$$

en donde
$$R_{t-1}=\tilde{A}_{t-1}+\tilde{C}_{t-1}G_{t-1}$$
$$R_{1,t-1}=\tilde{B}_{1,t-1}+\tilde{C}_{t-1}G_{1,t-1}$$
$$r_{t-1}=\tilde{b}_{t-1}+\tilde{C}_{t-1}g_{t-1}$$

Teniamos: $y_t=P_ty_{t-1}+s_t+\eta_t \qquad y^*_{t/t-2}=P_ty^*_{t-1/t-2}+s_t$

$$y^*_{t-1/t-2}=R_{t-1}y_{t-2}+R_{1,t-1}y^*_{t/t-2}+r_{t-1}=R_{t-1}y_{t-2}+R_{1,t-1}P_ty^*_{t-1/t-2}+$$
$$+R_{1,t-1}s_t+r_{t-1} \Rightarrow y^*_{t-1/t-2}=(I-R_{1,t-1}P_t)^{-1}(R_{t-1}y_{t-2}+$$
$$+R_{1,t-1}s_t+r_{t-1})$$

$\Rightarrow y_{t-1}=y^*_{t-1/t-2}+\eta_{t-1}=P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}+\eta_{t-1}$, en donde:

$$\begin{cases} P_{t-1}=(I-R_{1,t-1}P_t)^{-1}R_{t-1} \\ s_{t-1}=(I-R_{1,t-1}P_t)^{-1}(R_{1,t-1}s_t+r_{t-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^*_{t-1/t-2}=P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1} \Rightarrow y^*_{t/t-2}=P_tP_{t-1}y_{t-2}+P_ts_{t-1}+s_t$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{*}_{t-1/t-2}=G_{t-1}y_{t-2}+G_{1,t-1}(P_tP_{t-1}y_{t-2}+P_ts_{t-1}+s_t)+g_{t-1}=$$

$$=F_{t-1}y_{t-2}+f_{t-1}$$

en donde $\begin{cases} F_{t-1}=G_{t-1}+G_{1,t-1}P_tP_{t-1} \\ f_{t-1}=g_{t-1}+G_{1,t-1}(P_ts_{t-1}+s_t) \end{cases}$

$$\Rightarrow V_{t-1}(y_{t-2})=(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})'H_{t-1}(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})+$$

$$+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\eta_{t-1})-2(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})'h_{t-1}+E_{t-2}(c_{t-1})=$$

$$=y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}P_{t-1}y_{t-2}+2y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}+s'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}+$$

$$+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\eta_{t-1})-2y'_{t-2}P'_{t-1}h_{t-1}-2s'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1}=$$

$$=y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}P_{t-1}y_{t-2}-2y'_{t-2}P'_{t-1}(h_{t-1}-H_{t-1}s_{t-1})+s'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}-$$

$$-2s'_{t-1}h_{t-1}+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\eta_{t-1})+c_{t-1}$$

Como en el caso más general, identificamos $\hat{x}_{t-1}=\hat{x}^{*}_{t-1/t-2}$. El teorema queda demostrado.

NOTA:

Para este caso se verifica: $\begin{cases} h^{*}_{t/t-j}=h_t,\ \forall_t,\ \forall_j \\ r^{*}_{t/t-j}=r_t,\ \forall_t,\ \forall_j \\ s^{*}_{t/t-j}=s_t,\ \forall_t,\ \forall_j \\ g^{*}_{t/t-j}=g_t,\ \forall_t,\ \forall_j \end{cases}$

con lo cual se reducen considerablemente los cálculos, en re lación con el caso general.

COROLARIO: Si $\tilde{b}_t=0$, $\forall_t=1,2,\ldots,T$, nos quedan todas las expresiones exactamente igual que en el teorema que acabamos de ver, únicamente g_t, r_t quedarán algo más sencillas,

$$g_t=(\tilde{C}_t' H_t \tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}_t' h_t$$
$$r_t=\tilde{C}_t g_t$$

ORDEN DEL CALCULOS PARA ESTE CASO:

Partimos de : $\tilde{A}_t, \tilde{B}_{1t}, \tilde{C}_t, a_t, K_t$ conocidos, $\forall_t=1,2,\ldots,T$

$\tilde{b}_t$ conocido, $\forall_t=1,2,\ldots,T$

Γ conocido

PARA T+1

Hacer $\begin{cases} P_{T+1}=\Gamma \\ s_{T+1}=0 \end{cases}$

PARA T

$$\begin{cases}
\text{Hacer} & H_T=K_T \\
\text{Calcular} & G_T=-(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T' H_T \tilde{A}_T \\
 & G_{1T}=-(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T' H_T \tilde{B}_{1T} \\
\text{Calcular} & R_T=\tilde{A}_T+\tilde{C}_T G_T \\
 & R_{1T}=\tilde{B}_{1T}+\tilde{C}_T G_{1T} \\
\text{Calcular} & P_T=(I-R_{1T}P_{T+1})^{-1}R_T \\
\text{Calcular} & F_T=G_T+G_{1T}P_{T+1}P_T
\end{cases}$$

Hacer $h_T=K_T a_T$

Calcular $g_T=-(\tilde{C}_T'H_T\tilde{C}_T)^{-1}\tilde{C}_T'(H_T\tilde{b}_T-h_T)$

Calcular $r_T=\tilde{b}_T+\tilde{C}_T g_T$

Calcular $s_T=(I-R_{1T}P_{T+1})^{-1}\; r_T$

Calcular $f_T=g_T+G_{1T}P_{T+1}s_T$

PARA T-1

Hacer $H_{T-1}=K_{T-1}+P_T'H_TP_T$

Calcular $G_{T-1}=-(\tilde{C}_{T-1}'H_{T-1}\tilde{C}_{T-1})^{-1}\tilde{C}_{T-1}'H_{T-1}\tilde{A}_{T-1}$

$G_{1,T-1}=-(\tilde{C}_{T-1}'H_{T-1}\tilde{C}_{T-1})^{-1}\tilde{C}_{T-1}'H_{T-1}\tilde{B}_{1,T-1}$

Calcular $R_{T-1}=\tilde{A}_{T-1}+\tilde{C}_{T-1}G_{T-1}$

$R_{1,T-1}=\tilde{B}_{1,T-1}+\tilde{C}_{T-1}G_{1,T-1}$

Calcular $P_{T-1}=(I-R_{1,T-1}P_T)^{-1}R_{T-1}$

Calcular $F_{T-1}=G_{T-1}+G_{1,T-1}P_TP_{T-1}$

Hacer $h_{T-1}=K_{T-1}a_{T-1}+P_T'(h_T-H_Ts_T)$

Calcular $g_{T-1}=(\tilde{C}_{T-1}'H_{T-1}\tilde{C}_{T-1})^{-1}\tilde{C}_{T-1}'(H_{T-1}\tilde{b}_{T-1}-h_{T-1})$

Calcular $r_{T-1}=\tilde{b}_{T-1}+\tilde{C}_{T-1}g_{T-1}$

Calcular $s_{T-1}=(I-R_{1,T-1}P_T)^{-1}\;(r_{T-1}+R_{1,T-1}s_T)$

Calcular $f_{T-1}=g_{T-1}+G_{1,T-1}(P_Ts_{T-1}+s_T)$

<u>EN GENERAL</u> $\boxed{\textbf{PARA } t}$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{Hacer:} & H_t=K_t+P'_{t+1}H_{t+1}P_{t+1} \\[2ex]
\text{Calcular:} & G_t= -\,(\underset{\sim}{\tilde{C}}{}'_t H_t \underset{\sim}{\tilde{C}}_t)^{-1}\underset{\sim}{\tilde{C}}{}'_t H_t \underset{\sim}{\tilde{\Lambda}}_t \\
 & G_{1t}= -(C'_t H_t C_t)^{-1} C'_t H_t B_{1t} \\[2ex]
\text{Calcular:} & R_t=\underset{\sim}{\tilde{\Lambda}}_t+\underset{\sim}{\tilde{C}}_t G_t \\
 & R_{1t}=B_{1t}+C_t G_{1t} \\[2ex]
\text{Calcular:} & P_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}R_t \\[2ex]
\text{Calcular:} & F_t=G_t+G_{1t}P_{t+1}P_t
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{Hacer:} & h_t=K_t a_t+P'_{t+1}(h_{t+1}-H_{t+1}s_{t+1}) \\
\text{Calcular:} & g_t= -\,(\tilde{C}'_t H_t \tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}'_t\,(H_t\tilde{b}_t-h_t) \\
\text{Calcular:} & r_t=\tilde{b}_t+\tilde{C}_t g_t \\
\text{Calcular:} & s_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}(r_t+R_{1t}s_{t+1}) \\
\text{Calcular:} & f_t=g_t+G_{1,t}(P_{t+1}s_t+s_{t+1})
\end{array}\right.$$

Los cálculos finalizan cuando hemos efectuado los cálculos para $t=1$. Entonces, como y_o es conocido se puede calcular: $\hat{x}_1=F_1y_o+f_1$.

A final del período 1, al tener conocimiento de y_1, $\rightarrow$ $\hat{x}_2=F_2y_1+f_2$

En general, al final del período $t-1$, al ser conocido y_{t-1}, se calcula

$$\hat{x}_t=F_ty_{t-1}+f_t$$

6.- COMPARACION DEL RESULTADO FINAL DE CHOW CON EL NUESTRO.

Trabajo de Chow

Supongamos que al crecer t se hacen G_{1t}, G_{2t}, g_t constantes

$$\Rightarrow \hat{x}_t = G_1\, y^*_{t+1/t-1} + G_2 y_{t-1} + g$$

Entonces el sistema de puede expresar:

$$y_t = R_1 y^*_{t+1/t-1} + R_2 y_{t-1} + r + \eta_t \Leftrightarrow y_t = Q y_{t-1} + q + \eta_t$$

$$\text{en donde } \begin{cases} Q = (I-R_1Q)^{-1}R_2 \\ q = (I-R_1(Q+I))^{-1}r \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^*_{t+1/t-1} = Q^2 y_{t-1} + (Q+I)q$$

$$\Rightarrow \hat{x}_t = G_1(Q^2 y_{t-1} + (Q+I)q) + G_2 y_{t-1} + g = (G_1Q^2 + G_2)y_{t-1} + g + G_1(Q+I)q$$

Nuestro resultado: (Para poder comparar mejor llamaremos G_{2t} a lo que en el teorema II.5.1 llamamos G_t, analogamente R_{2t} por R_t, Q_t por P_t, q_t por s_t).

$$\hat{x}_t = G_{1t} y^*_{t+1/t-1} + G_{2t} y_{t-1} + g_t$$

$\Rightarrow$ El sistema se puede expresar: $y_t = R_{1t} y^*_{t+1/t-1} + R_{2t} y_{t-1} + r_t + \eta_t \Leftrightarrow y_t = Q_t y_{t-1} + q_t + \eta_t$

$$\text{en donde } \begin{cases} Q_t = (I-R_{1t}Q_{t+1})^{-1}R_{2t}, \quad \text{con } Q_{T+1} = \Gamma \\ q_t = (I-R_{1t}Q_{t+1})^{-1}(r_t + R_{1t} q^*_{t+1/t-1}) \end{cases}$$

con $q_{T+1} = 0$

Supongamos que se verifican condiciones suficientes para que $G_{1t}, G_{2t}, g_t, R_{1t}, R_{2t}, r_t, Q_t$ y q_t sean constantes en el tiempo:

$$\Rightarrow Q = (I-R_1Q)^{-1}R_2$$

$$q = (I-R_1Q)^{-1}(r + R_1 q) \Leftrightarrow q = (I-R_1(Q+I))^{-1}r$$

$$\rightarrow \quad \hat{x}_t=(G_1Q^2+G_2)y_{t-1}+g+G_1(Q+I)q$$

En estas condiciones nuestro resultado coincide con el de Chow. Con ello queda demostrado que nuestro planteamiento y solución es más general que el de Chow y este coincide con el nuestro en condiciones particulares.

7.- VERSION DETERMINISTICA DEL PROBLEMA (CASO DE PREVISION PERFECTA).

PROBLEMA II.7.1

$$\begin{cases} \text{MIN} \quad W=\sum_{t=1}^{T}(y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t), \text{ siendo } K_t \text{ matriz simétrica} \\ \qquad \text{definida positiva o semidefinida positiva.} \\ (7.1) \quad y_t=B_ty_t+B_{1t}y_{t+1}+A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t \quad (\text{para } t=1,2,\dots,T) \\ \qquad y_o \text{ dado} \end{cases}$$

En primer lugar veremos una proposición que nos va a permitir escribir el sistema (7.1) de manera más manejable. A continuación enunciaremos y demostraremos el teorema que nos resuelva el problema planteado.

PROPOSICION II.7.1

Consideramos el sistema (7.1). Supongamos que la matriz $(I-B_t)$ es no singular para cada $t=1,2,\dots,T$. Entonces el sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$(7.2) \quad y_t=\tilde{B}_{1t}y_{t+1}+\tilde{A}_ty_{t-1}+\tilde{C}_tx_t+\tilde{b}_t \quad \text{en donde} \begin{cases} \tilde{B}_{1t}=(I-B_t)^{-1}B_{1t} \\ \tilde{A}_t=(I-B_t)^{-1}A_t \\ \tilde{C}_t=(I-B_t)^{-1}C_t \\ \tilde{b}_t=(I-B_t)^{-1}b_t \end{cases}$$

DEM:

El sistema (7.1) lo podemos expresar:

$$(I-B_t)y_t=B_{1t}y_{t+1}+A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t \rightarrow$$

$$\rightarrow y_t=(I-B_t)^{-1}(B_{1t}y_{t+1}+A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t)=$$

$$= \tilde{B}_{1t}y_{t+1}+\tilde{A}_ty_{t-1}+\tilde{C}_tx_t+\tilde{b}_t$$

TEOREMA II.7.1

Consideramos el problema II.7.1. Suponemos que para t=T (período final) se verifica que $y_{T+1}=\Gamma y_T$.

Tratando a los vectores y_{t+1} como dados, al final del período t-1, utilizamos la programación dinámica, -obteniendo:

$$(7.3) \quad \hat{x}_t=G_ty_{t-1}+G_{1t}y_{t+1}+g_t$$

con lo cual la evolución del sistema controlado se puede expresar como:

$$(7.4) \quad y_t=P_ty_{t-1}+s_t$$

en donde:

$$\begin{cases} G_t=-(\tilde{C}_t'H_t\tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}_t'H_t\tilde{A}_t \\ G_{1t}=-(\tilde{C}_t'H_t\tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}_t'H_t\tilde{B}_{1t} \\ g_t= -(\tilde{C}_t'H_t\tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}_t'(H_t\tilde{b}_t-h_t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}R_t \quad , \text{ siendo } P_{T+1}=\Gamma \\ s_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}(r_t+R_{1t}s_{t+1}), \text{ siendo } s_{T+1}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_t=\tilde{A}_t+\tilde{C}_tG_t \\ R_{1t}=\tilde{B}_{1t}+\tilde{C}_tG_{1t} \\ r_t=\tilde{b}_t+\tilde{C}_tg_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_t=K_t+P'_{t+1}H_{t+1}P_{t+1} \quad , \text{ con } H_T=K_T \\ h_t=K_ta_t+P'_{t+1}(h_{t+1}-H_{t+1}s_{t+1}), \text{ con } h_T=K_Ta_T \\ c_t=a'_tK_ta_t+s'_{t+1}H_{t+1}s_{t+1}-2s'_{t+1}h_{t+1}+c_{t+1} \quad , \text{ con} \\ \qquad c_T=a'_TK_Ta_T \end{cases}$$

Además: $\hat{V}_t(y_{t-1})=y'_{t-1}P'_tH_tP_ty_{t-1}-2y'_{t-1}P'_t(h_t-H_ts_t)+s'_tH_ts_t-2s'_th_t+c_t$

Calculando y_{t+1} a partir de (7.4) y sustituyendo en (7.3), queda finalmente:

$$\boxed{\hat{x}_t=F_ty_{t-1}+f_t} \qquad \text{en donde} \qquad \begin{cases} F_t=G_t+G_{1t}P_{t+1}P_t \\ f_t=g_t+G_{1t}(P_{t+1}s_t+s_{t+1}) \end{cases}$$

<u>**DEMOSTRACION**</u> : Por inducción sobre t

PARA T

$$V_T(y_{T-1})=(y_T-a_T)'K_T(y_T-a_T)=y'_TK_Ty_T-2y'_TK_Ta_T+a'_TK_Ta_T=$$

$$= y'_TH_Ty_T-2y'_Th_T+c_T$$

en donde $H_T=K_T$, $h_T=K_Ta_T$, $c_T=a'_TK_Ta_T$

Sustituyendo y_T por el valor dado en (7.2) - para t=T, queda:

$$V_T(y_{T-1})=(\tilde{B}_{1T}y_{T+1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx_T+\tilde{b}_T)'H_T(\tilde{B}_{1T}y_{T+1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+$$
$$+\tilde{C}_Tx_T+\tilde{b}_T) - 2(\tilde{B}_{1T}y_{T+1}+\tilde{A}_Ty_{T-1}+\tilde{C}_Tx_T+\tilde{b}_T)'h_T+c_T$$

Tratamos a y_{T+1} como conocido

<u>Condición necesaria de mínimo</u> (también suficiente y global, por convexidad)

$$\frac{\partial V_T}{\partial x_T} = 0 = 2\,\tilde{C}_T' H_T\,(\tilde{B}_{1T} y_{T+1} + \tilde{A}_T y_{T-1} + \tilde{C}_T x_T + \tilde{b}_T) - 2\tilde{C}_T' h_T$$

$$\Rightarrow\ \hat{x}_T = G_T y_{T-1} + G_{1T} y_{T+1} + g_T$$

en donde
$$\begin{cases} G_T = -(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1} \tilde{C}_T' H_T \tilde{A}_T \\ G_{1T} = -(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1} \tilde{C}_T' H_T \tilde{B}_{1T} \\ g_T = -(\tilde{C}_T' H_T \tilde{C}_T)^{-1} \tilde{C}_T' (H_T \tilde{b}_T - h_T) \end{cases}$$

Sustituyendo en (7.2) el valor obtenido para $\hat{x}_T$, obtenemos:

$$y_T = R_T y_{T-1} + R_{1T} y_{T+1} + r_T = R_T y_{T-1} + R_{1T} \Gamma y_T + r_T \text{ en donde } \begin{cases} R_T = \tilde{A}_T + \tilde{C}_T G_T \\ R_{1T} = \tilde{B}_{1T} + \tilde{C}_T G_{1T} \\ r_T = \tilde{b}_T + \tilde{C}_T g_T \end{cases}$$

Por tanto:

$$y_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} R_T y_{T-1} + (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} r_T = P_T y_{T-1} + s_T$$

en donde
$$\begin{cases} P_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} R_T \\ s_T = (I - R_{1T}\Gamma)^{-1} r_T \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ y_{T+1} = \Gamma P_T y_{T-1} + \Gamma s_T$$

Luego: $\hat{x}_T = G_T y_{T-1} + G_{1T}(\Gamma P_T y_{T-1} + \Gamma s_T) + g_T = F_T y_{T-1} + f_T$

en donde $\begin{cases} F_T = G_T + G_{1T}\Gamma P_T \\ f_T = g_T + G_{1T}\Gamma s_T \end{cases}$

Por tanto $\hat{V}_T(y_{T-1}) = (P_T y_{T-1}+s_T)'H_T(P_T y_{T-1}+s_T) - 2(P_T y_{T-1}+s_T)'h_T + c_T =$

$= y'_{T-1}P'_T H_T P_T y_{T-1} + 2y'_{T-1}P'_T H_T s_T + s'_T H_T s_T - 2y'_{T-1}P'_T h_T - 2s'_T h_T + c_T =$

$= y'_{T-1}P'_T H_T P_T y_{T-1} - 2y'_{T-1}P'_T(h_T - H_T s_T) + s'_T H_T s_T - 2s'_T h_T + c_T$

SUPONGAMOS QUE EL TEOREMA ES CIERTO PARA t (según la hipótesis de inducción)

PARA t-1

$$V_{t-1}(y_{t-2}) = (y_{t-1}-a_{t-1})'K_{t-1}(y_{t-1}-a_{t-1}) + \hat{V}_t(y_{t-1}) =$$

$$= y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1} - 2y'_{t-1}h_{t-1} + c_{t-1}$$

en donde: $\begin{cases} H_{t-1} = K_{t-1} + P'_t H_t P_t \\ h_{t-1} = K_{t-1}a_{t-1} + P'_t(h_t - H_t s_t) \\ c_{t-1} = a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1} + s'_t H_t s_t - 2s'_t h_t + c_t \end{cases}$

Podemos poner: $V_{t-1}(y_{t-2}) = (\tilde{B}_{1,t-1}y_t + \tilde{A}_{t-1}y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1}x_{t-1} + \tilde{b}_{t-1})'H_{t-1}$

$(\tilde{B}_{1,t-1}y_t + \tilde{A}_{t-1}y_{t-2} + \tilde{C}_{t-1}x_{t-1} + \tilde{b}_{t-1}) - 2(\tilde{B}_{1,t-1}y_t + \tilde{A}_{t-1}y_{t-2} +$

$+ \tilde{C}_{t-1}x_{t-1} + \tilde{b}_{t-1})'h_{t-1} + c_{t-1}$

<u>Condición de mínimo</u> :

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x_{t-1}}=0=2\,\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}(\tilde{B}_{1,t-1}y_t+\tilde{A}_{t-1}y_{t-2}+\tilde{C}_{t-1}x_{t-1}+\tilde{b}_{t-1})-$$

$$-2\,\tilde{C}'_{t-1}h_{t-1}\quad\Rightarrow\quad\hat{x}_{t-1}=G_{t-1}y_{t-2}+G_{1,t-1}y_t+g_{t-1}$$

en donde: $$\begin{cases} G_{t-1}=-(\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{C}_{t-1})^{-1}\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{A}_{t-1} \\ G_{1,t-1}=-(\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{C}_{t-1})^{-1}\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{B}_{1,t-1} \\ g_{t-1}=-(\tilde{C}'_{t-1}H_{t-1}\tilde{C}_{t-1})^{-1}\tilde{C}'_{t-1}(H_{t-1}\tilde{b}_{t-1}-h_{t-1}) \end{cases}$$

Sustituyendo el valor obtenido para $\hat{x}_{t-1}$ en el sistema (7.2), obtenemos:

$$y_{t-1}=R_{t-1}y_{t-2}+R_{1,t-1}y_t+r_{t-1}\quad\text{en donde}$$

$$\begin{cases} R_{t-1}=\tilde{A}_{t-1}+\tilde{C}_{t-1}G_{t-1} \\ R_{1,t-1}=\tilde{B}_{1,t-1}+\tilde{C}_{t-1}G_{1,t-1} \\ r_{t-1}=\tilde{b}_{t-1}+\tilde{C}_{t-1}g_{t-1} \end{cases}$$

Teniamos: $y_t=P_ty_{t-1}+s_t$

Por tanto: $y_{t-1}=R_{t-1}y_{t-2}+R_{1,t-1}(P_ty_{t-1}+s_t)+r_{t-1}$

$$\Rightarrow\quad y_{t-1}=(I-R_{1,t-1}P_t)^{-1}(R_{t-1}y_{t-2}+R_{1,t-1}s_t+r_{t-1})$$

Por tanto:

$$y_{t-1}=P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}\,,\ \text{en donde:}\begin{cases} P_{t-1}=(I-R_{1,t-1}P_t)^{-1}R_{t-1} \\ s_{t-1}=(I-R_{1,t-1}P_t)^{-1} \\ \qquad\cdot(R_{1,t-1}s_t+r_{t-1}) \end{cases}$$

$$y_t=P_tP_{t-1}y_{t-2}+P_ts_{t-1}+s_t$$

Luego:

$$\hat{x}_{t-1}=G_{t-1}y_{t-2}+G_{1,t-1}(P_tP_{t-1}y_{t-2}+P_ts_{t-1}+s_t)+g_{t-1}=$$

$$=F_{t-1}y_{t-2}+f_{t-1}$$

$$\text{en donde}\quad\begin{cases}F_{t-1}=G_{t-1}+G_{1,t-1}P_tP_{t-1}\\ f_{t-1}=g_{t-1}+G_{1,t-1}(P_ts_{t-1}+s_t)\end{cases}$$

$$\hat{V}_{t-1}(y_{t-2})=(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})'H_{t-1}(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})\ -$$

$$-2(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1})'h_{t-1}+c_{t-1}\ =\ y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}P_{t-1}y_{t-2}+$$

$$+2y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}+s'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}-\ 2y'_{t-2}P'_{t-1}h_{t-1}-$$

$$-2\ s'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1}=\ y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}P_{t-1}y_{t-2}\ -$$

$$-2y'_{t-2}P'_{t-1}(h_{t-1}-H_{t-1}s_{t-1})+s'_{t-1}H_{t-1}s_{t-1}-2\ s'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1}$$

El teorema queda demostrado.

<u>COROLARIO</u>:

Supongamos que $b_t=0$, $\forall t=1,2,\dots,T$ (No aparecen en el modelo variables exógenas no sujetas a control)

Entonces nos quedan todas las expresiones como en el teorema, con la excepción de:

$$g_t=\ (\tilde{C}'_tH_t\tilde{C}_t)^{-1}\tilde{C}'_th_t$$

$$r_t=\ \tilde{C}_tg_t$$

Estudio de equivalencia cierta.

El concepto de equivalencia cierta fue introducido por Simon (1956). Fué adoptado por Theil (1958) al problema de política macroeconómica.

Consideremos un problema de control estocástico. Se dice que se verifica el principio de equivalencia cierta cuando la solución óptima x_t es la misma que obtendríamos si el mismo problema fuera formulado como un problema determinístico, con todas las variables aleatorias sustituidas por sus valores esperados.

A la vista de los resultados que hemos obtenido, podemos decir que para el caso más general no se verificará el principio de equivalencia cierta para el problema de control estocástico con expectativas racionales. Si se verificará el principio para el caso en que $b_t = b^*_{t/t-j}$, $\forall t, \forall j$ y, por consiguiente, se verificará también para el caso en que en el modelo no aparezcan variables exógenos b_t. Es decir, se verificará el principio de equivalencia cierta sólo en el caso en que las variables exógenas $\{ b_t \}$ sean no estocásticas.

C A P I T U L O - III

MODELOS CON EXPECTATIVAS FUTURAS, INFORMACION INCOMPLETA.

Tras el estudio realizado en el Capítulo II nos parece natural pasar a estudiar el caso de información incompleta, como es usual en los tratados de control estocástico. Pretendemos estudiar el problema de control óptimo y el de estimación en modelos con expectativas racionales. Este caso de información incompleta no aparece en el trabajo de Chow del que hemos partido en el capítulo anterior ni en ningún otro de los trabajos que hemos manejado sobre modelos con expectativas racionales.

1.- CUESTIONES PREVIAS: El problema standard de control con información incompleta para modelos sin expectativas.

PROBLEMA III.1.1

MIN $E_0 W = E_0 \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)$, siendo K_t matriz simétrica definida positiva o semidefinida positiva

$$y_t = A_t y_{t-1} + C_t x_t + b_t + u_t \;, \quad \text{para } t=1,2,\ldots,T$$

$$z_t = M_t y_t + v_t \qquad \text{para } t=0,1,2,\ldots,T$$

siendo, y_t: vector de variables endógenas (variables de estado), en el período t.

x_t: vector de instrumentos políticos (variables de control) en el período t.

b_t: vector que recoge los efectos combinados de las variables exógenas, no sujetas a control, en el período t.

z_t: vector de observaciones, en el período t.

u_t: vector de ruidos del sistema, en el período t.

v_t: vector de ruidos de observación en el período t.

Suponemos que $y_o, u_1, u_2, \ldots, u_T, v_o, v_1, v_2, \ldots, v_T$ son incorrelados

Además $Eu_t=0$; $Ev_t=0$, $\forall t$

Llamamos $I_k=(z_k', z_{k-1}', \ldots, z_o', x_k', x_{k-1}', \ldots, x_1')'$ (vector de información en el período k)

La ecuación de Bellman, para cada t=1,2,....,T, será:

$$\hat{V}_t(I_{t-1})=\underset{x_t}{MIN}\ E_{t-1}\ \{ (y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t)+\hat{V}_{t+1}(I_t) \}$$

$$\text{con } \hat{V}_{T+1}(I_T)=0$$

<u>Notación</u>: Para cualquier variable aleatoria V_t

$$E_{t-j}(V_t)=E(V_t|I_{t-j})=V^*_{t/t-j}$$

en donde I_{t-j} es la información de que disponemos al final del período t-j.

Al igual que hicimos en el caso de información completa, vamos a estudiar dos situaciones distintas: a) Aquella en la que las variables exógenas $\{b_t\}$ son no estocásticas. b) Las variables exógenas $\{b_t\}$ son estocásticas.

a) CASO EN QUE LAS VARIABLES $\{b_t\}$ SON NO ESTOCASTICAS.

Este caso es el que aparece en la literatura.

Suponemos, por tanto, que $b_1, b_2, \ldots, b_T$ son vectores dados, conocidos de antemano.

Vamos a seguir a Chow (1975).

TEOREMA III.1.1

La solución al problema III.1.1 es la siguiente:

$\hat{x}_t = G_t E_{t-1}(y_{t-1}) + g_t$, siendo G_t, g_t iguales a las expresiones obtenidas en el caso de información completa. Siguen siendo válidas las mismas expresiones para las matrices H_t y los vectores h_t.

Además:

$$\hat{V}_t(I_{t-1}) = E_{t-1}\left[y'_{t-1}(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t)y_{t-1}\right] -$$

$$-2\bar{y}'_{t-1}(A_t+C_tG_t)'(h_t-H_tb_t)+(b_t+C_tg_t)'H_t(b_t+C_tg_t) -$$

$$-2(b_t+C_tg_t)'h_t+c_t+E_{t-1}(u'_tH_tu_t)+$$

$$+E_{t-1}\left[(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})'G'_tC'_tH_tC_tG_t(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})\right]$$, en donde:

$$c_{t-1} = a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+(b_t+C_tg_t)'H_t(b_t+C_tg_t)-2(b_t+C_tg_t)'h_t+$$

$$+c_t+E_{t-1}(u'_tH_tu_t)+E_{t-1}\left[(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})'G'_tC'_tH_tC_tG_t(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})\right]$$

con $c_T = a'_TK_Ta_T$

(NOTACION: $\bar{y}_{t-1} = E_{t-1}(y_{t-1})$)

DEMOSTRACION: Por inducción sobre t.

PARA T

$$V_T(I_{T-1}) = E_{T-1}\{(y_T-a_T)'K_T(y_T-a_T)\} = E_{T-1}(y'_TK_Ty_T-2y'_TK_Ta_T+$$

$$+a'_TK_Ta_T) = E_{T-1}(y'_TH_Ty_T-2y'_Th_T+c_T)$$, en donde $H_T = K_T$;

$h_T = K_Ta_T$; $c_T = a'_TK_Ta_T$

Sustituyendo y_T por su valor, queda:

$$V_T(I_{T-1})=E_{T-1}\ \{(A_Ty_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T)'H_T(A_Ty_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T)\}-$$

$$-2E_{T-1}\ \{(A_Ty_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T)'h_T\}+c_T=$$

$$=E_{T-1}\ (y'_{T-1}A'_TH_TA_Ty_{T-1})+(C_Tx_T+b_T)'H_T(C_Tx_T+b_T)+2(C_Tx_T+b_T)'H_TA_T\bar{y}_{T-1}+$$

$$+E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)-2\bar{y}'_{T-1}A'_Th_T-2(C_Tx_T+b_T)'h_T+c_T$$

Condición de mínimo:

$$\frac{\partial V_T}{\partial x_T}=0=\ 2C'_TH_T(C_Tx_T+b_T)+2C'_TH_TA_T\bar{y}_{T-1}-2C'_Th_T$$

$$\Rightarrow\ \hat{x}_T=G_T\bar{y}_{T-1}+g_T\quad,\quad \text{en donde}\quad \begin{array}{l} G_T=-(C'_TH_TC_T)^{-1}C'_TH_TA_T \\ g_T=-(C'_TH_TC_T)^{-1}C'_T(H_Tb_T-h_T) \end{array}$$

Entonces, queda:

$$\hat{V}_T(I_{T-1})=E_{T-1}\ \{(A_Ty_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T)'H_T(A_Ty_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+$$

$$+b_T+C_Tg_T)\}-2(A_T\bar{y}_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T)'h_T+c_T+E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)\ =\ *$$

Ponemos: $\bar{y}_{T-1}=y_{T-1}+(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})$, y utilizamos: $(A_T+C_TG_T)'H_TC_T=0$

$$*\ =E_{T-1}\{\left[A_Ty_{T-1}+C_TG_Ty_{T-1}+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T\right]'$$

$$H_T\left[A_Ty_{T-1}+C_TG_Ty_{T-1}+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T\right]\}-$$

$$-\ 2\left[(A_T+C_TG_T)y_{T-1}+(A_T+C_TG_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T\right]'h_T+c_T+$$

$$+E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)\ =\ E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_T(A_T+C_TG_T)y_{T-1}\}+$$

$$+E_{T-1}\ \{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'G'_TC'_TH_TC_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}+$$

$$+2\bar{y}'_{t-1}(A_T+C_TG_T)'H_Tb_T+(b_T+C_Tg_T)'H_T(b_T+C_Tg_T)-2\bar{y}'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'h_T-$$

$$-2(b_T+C_Tg_T)'h_T+c_T+E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)=$$

$$=E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_T(A_T+C_TG_T)y_{T-1}\} \quad -2y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'\cdot$$

$$\cdot(h_T-H_Tb_T)+(b_T+C_Tg_T)'H_T(b_T+C_Tg_T) \quad -2(b_T+C_Tg_T)'h_T+c_T+$$

$$+E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)+E_{T-1} \quad \{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'G'_TC'_TH_TC_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}$$

el teorema queda demostrado para T

Supongamos que el teorema es cierto para t

Vamos a demostrar que se cumple PARA t-1

De acuerdo con la ecuación de Bellman:

$$\hat{V}_{t-1}(I_{t-2})= \underset{x_{t-1}}{\text{MIN}} \quad E_{t-2}\{ (y_{t-1}-a_{t-1})'K_{t-1}(y_{t-1}-a_{t-1})+\hat{V}_t(I_{t-1})\}$$

Por tanto:

$$V_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2} \{y'_{t-1}K_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+$$

$$+\hat{V}_t(I_{t-1})\} = E_{t-2}(y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1})$$

en donde:

$$H_{t-1}=K_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t)$$

$$h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'(h_t-H_tb_t)$$

$$c_{t-1}=a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+(b_t+C_tg_t)'H_t(b_t+C_tg_t)' \quad +c_t+$$

$$+E_{t-1}(u'_tH_tu_t)+E_{t-1} \quad \{(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})'G'_tC'_tH_tC_tG_t(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})\}-$$

$$-2(b_t+C_tg_t)'h_t$$

Nos queda exactamente lo mismo que en el caso T, pero con t-1 en lugar de T. Repitiendo lo mismo con el cambio de T por t-1 queda demostrado el teorema.

<u>NOTA</u>: El resultado de que el control óptimo es $\hat{x}_t=G_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+g_t$ para el caso de información incompleta, siendo el control óptimo para información completa: $\hat{x}_t=G_ty_{t-1}+g_t$, con G_t,g_t idénticos en ambos casos es muy importante en teoría del control. Este resultado se verifica por ser el sistema lineal y el funcional objetivo cuadrático. Recibe el nombre de teorema de separación.

b) CASO EN QUE LAS VARIABLES $\{b_t\}$ SON ESTOCASTICAS.

Este caso no aparece en la literatura que hemos manejado. Al igual que hicimos en el caso de información completa nos parece interesante analizarlo.

Suponemos, como hemos comentado y justificado anteriormente, que

$$b_t=\sum_{i=1}^{p} R_ib_{t-i}+\xi_t$$

en donde $\{\xi_t\}$ es un proceso estocástico, de media cero, serialmente incorrelado, independiente de las perturbaciones que entran en el sistema que explica y_t, de los ruidos de observación y de la variable aleatoria y_0. (Se puede considerar p finito, con lo cual $\{b_t\}$ es un proceso AR(p), o bien $p=\infty$, con lo que $\{b_t\}$ es ARMA (p,q)).

<u>TEOREMA III.1.2</u>

La solución al problema planteado es la siguiente: $\hat{x}_t=G_tE_{t-1}(y_{t-1})+g_t$, siendo G_t,g_t iguales a las expresiones obtenidas en el caso de información completa, caso de

$\{b_t\}$ estócasticas. Siguen siendo válidas las mismas expresiones para las matrices H_t y los vectores h_t.

Además:

$$\hat{V}_t(I_{t-1})=E_{t-1}\left[y'_{t-1}(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t)y_{t-1}\right] -$$
$$-2\bar{y}'_{t-1}(A_t+C_tG_t)'(h^*_{t/t-1}-H_tb^*_{t/t-1})+$$
$$+E_{t-1}\{(C_tg_t+b_t)'H_t(C_tg_t+b_t)\}-2E_{t-1}\{(b_t+C_tg_t)'h_t\} +$$
$$+E_{t-1}(u'_tH_tu_t)+E_{t-1}(c_t)+E_{t-1}\{(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})'G'_tC'_tH_tC_tG_t$$
$$(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})\}$$

en donde:

$$c_{t-1}=a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+E_{t-1}\{(b_t+C_tg_t)'H_t(b_t+C_tg_t)\}-$$
$$-2E_{t-1}\{(b_t+C_tg_t)'h_t\}+E_{t-1}(c_t)+E_{t-1}(u'_tH_tu_t)+$$
$$+E_{t-1}\{(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})'G'_tC'_tH_tC_tG_t(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})\}$$

$$\text{con } c_T=a'_TK_Ta_T$$

(NOTACION: $\bar{y}_{t-1}=E_{t-1}(y_{t-1})$)

<u>DEMOSTRACION</u>: Por inducción sobre t

$\boxed{\text{PARA T}}$

$$V_T(I_{T-1})=E_{T-1}\{(y_T-a_T)'K_T(y_T-a_T)\}=E_{T-1}(y'_TK_Ty_T-$$
$$-2y'_TK_Ta_T+a'_TK_Ta_T)=E_{T-1}(y'_TH_Ty_T-2y'_Th_T+c_T), \text{ en donde}$$

$$H_T=K_T;\quad h_T=K_Ta_T;\quad c_T=a'_TK_Ta_T$$

Podemos poner:

$$V_T(I_{T-1})=E_{T-1}\ \{(A_Ty_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T)'H_T(A_Ty_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T)\}-$$

$$-2E_{T-1}\{\ (A_Ty_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T)'h_T\}\ +c_T\ =\ E_{T-1}(y'_{T-1}A'_TH_TA_Ty_{T-1})+$$

$$+x'_TC'_TH_TC_Tx_T+E_{T-1}(b'_TH_Tb_T)+\ E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)+2x'_TC'_TH_TA_T\bar{y}_{T-1}+$$

$$+2\ E_{T-1}(y'_{T-1}A'_TH_Tb_T)+2x'_TC'_TH_Tb^*_{T/T-1}-2\bar{y}'_{T-1}A'_Th_T\ -2x'_TC'_Th_T-$$

$$-2b^{*\prime}_{T/T-1}h_T+c_T$$

Condición de mínimo:

$$\frac{\partial\ V_T}{\partial\ x_T}=0=2C'_TH_TC_Tx_T+2C'_TH_TA_T\bar{y}_{T-1}+2C'_TH_Tb^*_{T/T-1}-2C'_Th_T$$

$$\Rightarrow\ \hat{x}_T=G_T\bar{y}_{T-1}+g_T$$

$$G_T=-(C'_TH_TC_T)^{-1}C'_TH_TA_T$$

$$g_T=-(C'_TH_TC_T)^{-1}C'_T(H_Tb^*_{T/T-1}-h_T)$$

$$\Rightarrow\ \hat{V}_T(I_{T-1})=E_{T-1}\ \{\ (A_Ty_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T)'H_T$$

$$(A_Ty_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T)\ \}-$$

$$-2\ E_{T-1}\quad(A_Ty_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T)'h_T\quad+c_T=\ *$$

Ponemos $\bar{y}_{T-1}=y_{T-1}+(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})$, y utilizamos:

$$(A_T+C_TG_T)'H_TC_T=0$$

$$*\ =E_{T-1}\ \{\left[(A_T+C_TG_T)y_{T-1}+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T+u_T\right]'H_T$$

$$\left[(A_T+C_TG_T)y_{T-1}+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T+u_T\right]\}-$$

$$-2E_{T-1}\{\left[(A_T+C_TG_T)y_{T-1}+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T+u_T\right]'h_T\}+$$

$$+c_T = E_{T-1}\ \{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_T(A_T+C_TG_T)y_{T-1}\} +$$

$$+E_{T-1}\ \{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'G'_TC'_TH_TC_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}+E_{T-1}\{(b_T+C_Tg_T)'H_T$$

$$(b_T+C_Tg_T)\}+E_{T-1}(u'_TH_Tu_T)+2\ \bar{y}'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_Tb^*_{T/T-1}-$$

$$-2\ \bar{y}'_{T-1}\ (A_T+C_TG_T)'h_T-2E_{T-1}\ \{(b_T+C_Tg_T)'h_T\}\ +c_T,$$

que coincide con la expresión que aparece en el enunciado, particularizada para T, teniendo en cuenta que $c_T=E_{T-1}(c_T)$ y $h_T= h^*_{T/T-1}$.

NOTA: En la última igualdad del desarrollo anterior hemos utilizado, de acuerdo con la definición de $\{b_t\}$, la siguiente propiedad:

$$E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_Tb_T\} = E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_T$$

$$(b^*_{T/T-1}+\xi_T)\} = E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_Tb^*_{T/T-1}\} =$$

$$= \bar{y}'_{T-1}(A_T+C_TG_T)'H_Tb^*_{T/T-1}$$

SUPONGAMOS QUE EL TEOREMA ES CIERTO PARA t

Vamos a demostrarlo para t-1

$$V_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\ \{(y_{t-1}-a_{t-1})'K_{t-1}(y_{t-1}-a_{t-1})+\hat{V}_t(I_{t-1})\} =$$

$$=E_{t-2}\ \{y'_{t-1}K_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+\hat{V}_t\ \ (I_{t-1})\} =$$

$$= E_{t-2}\ (y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1})$$

en donde:

$$H_{t-1}=K_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t)$$

$$h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'\ (h^*_{t/t-1}-H_tb^*_{t/t-1})$$

$c_{t-1}=$ a la expresión que aparece en el enunciado.

Por tanto:

$$V_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\ \{(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1})'H_{t-1}$$

$$(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1})\} -$$

$$-2E_{t-2}\ \{(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1})'h_{t-1}\} +E_{t-2}(c_{t-1})=$$

$$=E_{t-2}(y'_{t-2}A'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}y_{t-2})+x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1}x_{t-1}+E_{t-2}(b'_{t-1}H_{t-1}b_{t-1})+$$

$$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})+2x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}\bar{y}_{t-2}+2E_{t-2}(y'_{t-2}A'_{t-1}H_{t-1}b_{t-1})+$$

$$+2\ x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}-2E_{t-2}(y'_{t-2}A'_{t-1}h_{t-1})-2x'_{t-1}C'_{t-1}h^*_{t-1/t-2}-$$

$$-\ 2\ E_{t-2}(b'_{t-1}h_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1})$$

<u>Condición de mínimo</u>:

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x_{t-1}} =0=2\ C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1}x_{t-1}+2C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}\bar{y}_{t-2}+$$

$$+2C'_{t-1}H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}-2C'_{t-1}h^*_{t-1/t-2}$$

$$\Rightarrow\ \hat{x}_{t-1}=G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+g_{t-1}$$

en donde $G_{t-1} = -(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}$

$g_{t-1} = -(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}\cdot$

$(H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}-h^*_{t-1/t-2})$

$$\rightarrow \hat{V}_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1})'$$

$$H_{t-1}(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1})\}-$$

$$-2E_{t-2}\{(A_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1})'h_{t-1}\}+$$

$$+E_{t-2}(c_{t-1}) = *$$

Ponemos $\bar{y}_{t-2}=y_{t-2}+(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})$, y utilizamos:

$$(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}C_{t-1}=0$$

$$* = E_{t-2}\{\left[(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+\right.$$

$$\left.+u_{t-1}\right]'H_{t-1}\left[(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+b_{t-1}+\right.$$

$$\left.+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}\right]\} -2E_{t-2}\{\left[(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+\right.$$

$$\left.+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}\right]'h_{t-1}\} +E_{t-2}(c_{t-1}) =$$

$$=E_{t-2}\{y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}\} +$$

$$+E_{t-2}\{(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})'G'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}+$$

$$+E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'H_{t-1}(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})\} + E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})+$$

$$+2\bar{y}'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}b^*_{t-1/t-2} -$$

$$-2\bar{y}'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'h^*_{t-1/t-2} - 2E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'h_{t-1}\}+$$

$+E_{t-2}(c_{t-1})$

con lo que el teorema está demostrado

NOTA:

Vemos, tras el resultado que acabamos de probar, que el teorema de separación tambien se verifica en el caso en que las variables exógenas $\{b_t\}$ son estocásticas del tipo señalado.

A continuación vamos a plantearnos y a resolver el problema análogo al que acabamos de estudiar, para el caso en que el sistema contenga expectativas racionales de variables futuras. En particular nos interesa estudiar si para este caso se verifica el teorema de separación.

2.- EL PROBLEMA DE CONTROL EN MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES DE VARIABLES FUTURAS EN EL CASO DE INFORMACION INCOMPLETA

PROBLEMA III.2.1

MIN $E_oW= E_o \sum_{t=1}^{T} (y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t)$ siendo K_t matriz simétrica definida positiva o semidefinida positiva.

(2.1) $y_t=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t+u_t$

para $t=1,2,\ldots,T$

(2.2) $z_t=M_ty_t+v_t$ para $t=0,1,2,\ldots,T$

Suponemos que $y_o, u_1, u_2, \ldots, u_T, v_o, v_1 v_2, \ldots, v_T$ son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados, tales que:

$$Eu_t=0 \quad ; \quad Eu_t u_t'=U_t$$

$$Ev_t=0 \quad ; \quad Ev_t v_t'=V_t$$

$$Ey_o=m \quad ; \quad E(y_o-m)(y_o-m)'=S \quad .$$

Además, suponemos que V_t es definida positiva, para cada t.

EN ESTE CASO $y^*_{t/k}=E(y_t | I_k)$, siendo $I_k=\{z_k, z_{k-1}, \ldots, z_o; x_k, \ldots, x_1; b_k, \ldots, b_1\}$, pero no contiene a $y_k, y_{k-1}, \ldots, y_o$ ya que son desconocidos

PROPOSICION III.2.1:

El sistema (2.1) se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+$$
$$+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

en donde:

$$\tilde{B}_{1t}=(I-B_t)^{-1}B_{1t}$$
$$\tilde{A}_t=(I-B_t)^{-1}A_t$$
$$\tilde{C}_t=(I-B_t)^{-1}C_t$$
$$\tilde{b}^*_{t/t-1}=(I-B_t)^{-1}b^*_{t/t-1}$$

$$\eta_t=C_t(x_t-x^*_{t/t-1})+(b_t-b^*_{t/t-1})+u_t$$

DEMOSTRACION

Consideramos el sistema (2.1). Tomando en los dos miembros esperanzas condicionadas a I_{t-1}, queda:

$$y^*_{t/t-1}=B_t y^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+C_t x^*_{t/t-1}+$$
$$+b^*_{t/t-1}$$

$$\Rightarrow y^*_{t/t-1}=(I-B_t)^{-1}\left[B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+C_t x^*_{t/t-1}+\right.$$
$$\left.+b^*_{t/t-1}\right]$$

Por tanto:

$$y_t=y^*_{t/t-1}+A_t y_{t-1}-A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+\eta_t=$$
$$=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+$$
$$+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

COROLARIO 1:

En el caso de información completa tenemos - $I_k=\{y_k,y_{k-1},\dots,y_0;\ x_k,\dots,x_1;\ b_k,\dots,b_1\}$ con lo cual nos queda: $y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+\tilde{A}_t y_{t-1}+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$, re-- sultado que coincide con el que obteníamos en ese caso.

COROLARIO 2:

Si en el modelo no aparecen expectativas futuras o sea si $B_{1t}=0$, nos queda $y_t=A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$.

COROLARIO 3 :

Si en el modelo no aparecen variables de control, o sea si $C_t=0$, nos queda:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

COROLARIO 4:

Si las variables exógenas $\{b_t\}$ son deterministas y, por tanto, conocidas de antemano, queda:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+$$
$$+\tilde{b}_t+\eta_t \qquad \text{con} \quad \tilde{b}_t=(I-B_t)^{-1}b_t$$

NOTA: Suponemos, como en el caso de información completa, que los vectores $\eta_t=C_t(x_t-x^*_{t/t-1})+(b_t-b^*_{t/t-1})+u_t$, son incorrelados en el tiempo y tienen media cero. Además: $y_o,\eta_1,\dots,\eta_T$, $v_o,v_1,\dots,v_T$ son mutuamente incorrelados.

$$\text{Sea } E\eta_t=0 \quad ; \quad E\,\eta_t\eta_t'=R_t$$

Suponemos, tambien, que para cada t la matriz $(I-B_t)$ es no singular.

Antes de pasar a enunciar y demostrar el teorema que resuelva el problema III.2.1, vamos a plantearnos un problema previo, cuya solución utilizaremos de manera auxiliar en el teorema que nos interesa.

Problema previo: Problema de control con información incompleta para una formulación particular del sistema, sin expectativas.

PROBLEMA III.2.2

MIN $E_o \; W = E_o \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)$, siendo K_t, matriz simétrica definida positiva o semidefinida - positiva

$y_t = D_t y_{t-1} + (A_t - D_t) E_{t-1}(y_{t-1}) + C_t x_t + b_t + u_t$, para $t=1,2,\ldots,T$

$z_t = M_t y_t + v_t$ para $t=0,1,2,\ldots,T$

Suponemos que $y_o, u_1, u_2, \ldots, u_T, v_o, v_1, \ldots, v_T$ son incorrelados

Además $Eu_t=0$; $Ev_t=0$, $\forall t$

Vamos a suponer que las variables exógenas $\{b_t\}$ son estocásticas. Como hemos supuesto anteriormente

$$b_t = \sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i} + \xi_t$$

en donde $\{\xi_t\}$ es un proceso estocástico, de media cero, serialmente incorrelado, independiente de las perturbaciones que entran en el sistema que explica y_t, de los ruidos de observación y de la variable aleatoria y_o.

TEOREMA III2.1 (Solución al problema III.2.2)

La solución al problema planteado es la siguiente:

$\hat{x}_t = G_t E_{t-1}(y_{t-1}) + g_t$, siendo G_t, g_t iguales a las expresiones obtenidas en el teorema III.1.2, siendo también válidas las mismas expresiones para las matrices H_t y los vectores h_t.

Además:

$$\hat{V}_t(I_{t-1})=E_{t-1}\{ y'_{t-1}(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t)y_{t-1}\} -$$

$$-2\bar{y}'_{t-1}(A_t+C_tG_t)'(h^*_{t/t-1}-H_tb^*_{t/t-1})+$$

$$+E_{t-1}\ \{(C_tg_t+b_t)'H_t(C_tg_t+b_t)\}\ -2E_{t-1}\ \{(b_t+C_tg_t)'h_t\}+$$

$$+E_{t-1}(u'_tH_tu_t)+E_{t-1}(c_t)+E_{t-1}\{(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})'$$

$$\left[(A_t-D_t+C_tG_t)'H_t(A_t-D_t+C_tG_t)-2(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t-D_t)\right](\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})\}$$

siendo:

$$c_{t-1}=a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+E_{t-1}\ \{(b_t+C_tg_t)'H_t(b_t+C_tg_t)\} -$$

$$-2E_{t-1}\ \{(b_t+C_tg_t)'h_t\}+E_{t-1}(c_t)+E_{t-1}(u'_tH_tu_t)+$$

$$+E_{t-1}\{(\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})'\ \left[(A_t-D_t+C_tG_t)'H_t(A_t-D_t+C_tG_t)-\right.$$

$$\left.-2(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t-D_t)\right](\bar{y}_{t-1}-y_{t-1})\}\ ,\ \text{con } c_T=a'_TK_Ta_T$$

DEMOSTRACION: Por inducción sobre t

$\boxed{\text{PARA T}}$ $V_T(I_{T-1})=E_{T-1}\{(y_T-a_T)'K_T(y_T-a_T)\}=$

$$=E_{T-1}\ (y'_TK_Ty_T-2y'_TK_Ta_T+a'_TK_Ta_T)\ =$$

$$=E_{T-1}(y'_TH_Ty_T-2y'_Th_T+c_T)$$ en donde $H_T=K_T$; $h_T=K_Ta_T$;

$c_T=a'_TK_Ta_T$

sustituyendo y_T por su valor queda:

$$V_T(I_{T-1})=E_{T-1}\{\left[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T\right]'$$

$$H_T\ \left[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T\right]\}-$$

$$-2E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_Tx_T+b_T+u_T]'h_T\}+c_T =$$

$$=E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}]'H_T[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}]\}$$

$$+x_T'C_T'H_TC_Tx_T+E_{T-1}(b_T'H_Tb_T)+E_{T-1}(u_T'H_Tu_T)+2x_T'C_T'H_TA_T\bar{y}_{T-1}+$$

$$+2E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}]'H_Tb_T\}+$$

$$+2x_T'C_TH_Tb^*_{T/T-1}-2\bar{y}_{T-1}'A_T'h_T-2x_T'C_T'h_T-2b^{*\prime}_{T/T-1}h_T+c_T$$

Condición de mínimo:

$$\frac{\partial V_T}{\partial x_T}=0=2C_T'H_TC_Tx_T+2C_T'H_TA_T\bar{y}_{T-1}+2C_T'H_Tb^*_{T/T-1}-2C_T'h_T$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}_T=G_T\bar{y}_{T-1}+g_T$$

$$G_T=-(C_T'H_TC_T)^{-1}C_T'H_TA_T$$
$$g_T=-(C_T'H_TC_T)^{-1}C_T'(H_Tb^*_{T/T-1}-h_T)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{V}_T(I_{T-1})=E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T]'H_T$$
$$[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T]\}-$$
$$-2E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)\bar{y}_{T-1}+C_TG_T\bar{y}_{T-1}+b_T+C_Tg_T+u_T]'h_T\}+c_T=*$$

Ponemos $\bar{y}_{T-1}=y_{T-1}+(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})$, y utilizamos $(A_T+C_TG_T)'H_TC_T=0$

$$*=E_{T-1}\{[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)y_{T-1}+(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+C_TG_Ty_{T-1}+$$
$$+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T+u_T]'H_T[D_Ty_{T-1}+(A_T-D_T)y_{T-1}+$$
$$+(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+C_TG_Ty_{T-1}+C_TG_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_Tg_T+u_T]\}-$$

$$-2\ E_{T-1}\{[D_T y_{T-1}+(A_T-D_T)y_{T-1}+(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+C_T G_T y_{T-1}+$$

$$+C_T G_T(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})+b_T+C_T g_T+u_T]'\ h_T\}+c_T=$$

$$=E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_T G_T)'H_T(A_T+C_T G_T)y_{T-1}\}+E_{T-1}\{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'$$

$$(A_T-D_T+C_T G_T)'H_T(A_T-D_T+C_T G_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}+$$

$$+E_{T-1}\{(b_T+C_T g_T)'H_T(b_T+C_T g_T)\}+E_{T-1}(u'_T H_T u_T)-2\bar{y}'_{T-1}(A_T+C_T G_T)'h_T-$$

$$-2E_{T-1}\{(b_T+C_T g_T)'h_T\}+c_T+2\bar{y}'_{T-1}(A_T+C_T G_T)'H_T b^*_{T/T-1}+$$

$$+2E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_T G_T)'H_T(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}$$

En el último sumando ponemos $y_{T-1}=\bar{y}_{T-1}-(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})$, y queda de la siguiente forma:

$$E_{T-1}\{[(A_T+C_T G_T)\ (\bar{y}_{T-1}-(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1}))]'H_T(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}=$$

$$=-E_{T-1}\{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'(A_T+C_T G_T)'H_T(A_T-D_T)(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}$$

Por tanto:

$$\hat{V}_T(I_{T-1})=E_{T-1}\{y'_{T-1}(A_T+C_T G_T)'H_T(A_T+C_T G_T)y_{T-1}\}$$

$$-2\bar{y}'_{T-1}(A_T+C_T G_T)'(h_T-H_T b^*_{T/T-1})+E_{T-1}\{(b_T+C_T g_T)'H_T(b_T+C_T g_T)\}-$$

$$-2\ E_{T-1}\{(b_T+C_T g_T)'h_T\}+c_T+E_{T-1}(u'_T H_T u_T)+E_{T-1}\{(\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})'$$

$$[(A_T-D_T+C_T G_T)'H_T(A_T-D_T+C_T G_T)-2(A_T+C_T G_T)'H_T(A_T-D_T)](\bar{y}_{T-1}-y_{T-1})\}$$

Tengase en cuenta que $c_T=E_{T-1}(c_T)$ y $h_T=h^*_{T/T-1}$. Queda de-- mostrado el teorema para T.

SUPONGAMOS EL TEOREMA CIERTO PARA t

Vamos a demostrarlo PARA t-1

La ecuación de Bellman es:

$$\hat{V}_{t-1}(I_{t-2})= \underset{x_{t-1}}{\mathrm{MIN}} \; E_{t-2}\{ (y_{t-1}-a_{t-1})'K_{t-1}(y_{t-1}-a_{t-1})+\hat{V}_t(I_{t-1})\}$$

siendo $\hat{V}_t(I_{t-1})$ igual al valor que aparece en el enunciado del teorema, por la hipótesis de inducción en t.

Por tanto: $V_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{ y'_{t-1}K_{t-1}y_{t-1}-$

$$-2y'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+a'_{t-1}K_{t-1}a_{t-1}+\hat{V}_t(I_{t-1}) \}=$$

$=E_{t-2}(y'_{t-1}H_{t-1}y_{t-1}-2y'_{t-1}h_{t-1}+c_{t-1})$, en donde:

$$H_{t-1}=K_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'H_t(A_t+C_tG_t)$$

$$h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+(A_t+C_tG_t)'(h^*_{t/t-1}-H_tb^*_{t/t-1})$$

$c_{t-1}=$ expresión que aparece en el enunciado del teorema

Sustituyendo y_{t-1} por su valor, queda:

$$V_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{\left[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1}\right]'$$

$$H_{t-1}\left[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1}\right]\}-$$

$$-2\,E_{t-2}\{\left[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}x_{t-1}+b_{t-1}+u_{t-1}\right]'h_{t-1}\}+$$

$$+E_{t-2}\,(c_{t-1}) = E_{t-2}\{\left[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}\right]'H_{t-1}\left[D_{t-1}y_{t-2}+\right.$$

$$\left.+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}\right]\}+ x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1}x_{t-1}+E_{t-2}(b'_{t-1}H_{t-1}b_{t-1})+$$

$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})+2\,x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}\bar{y}_{t-2}+2\,E_{t-2}\Big\{\Big[D_{t-1}y_{t-2}+$

$+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}\Big]'H_{t-1}b_{t-1}\Big\}+2x'_{t-1}C'_{t-1}H_{t-1}b^{*}_{t-1/t-2}-$

$-\,2\,E_{t-2}\{\,[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}]'h_{t-1}\}\;-\;2x'_{t-1}C'_{t-1}h^{*}_{t-1/t-2}-$

$-\,2\,E_{t-2}(b'_{t-1}h_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1}).$

<u>Condición de mínimo</u>

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x_{t-1}}=0=2\,C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1}x_{t-1}+2C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}\bar{y}_{t-2}+$$

$$+2\,C'_{t-1}H_{t-1}b^{*}_{t-1/t-2}-2C'_{t-1}h^{*}_{t-1/t-2}$$

$$\Rightarrow\quad \hat{x}_{t-1}=G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+g_{t-1}$$

en donde:

$$G_{t-1}=-(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}$$

$$g_{t-1}=-(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}(H_{t-1}b^{*}_{t-1/t-2}-h^{*}_{t-1/t-2})$$

$$\hat{V}_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{\big[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+$$

$$+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}\big]'\,H_{t-1}$$

$$\big[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}\big]\}$$

$$-2\,E_{t-2}\{\big[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})\bar{y}_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}\bar{y}_{t-2}+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+$$

$$+u_{t-1}\big]'h_{t-1}\}+E_{t-2}(c_{t-1})\;=\;*$$

Ponemos $\bar{y}_{t-2}=y_{t-2}+(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})$, y utilizamos $(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'$

$$H_{t-1}C_{t-1}=0$$

$$*= E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+$$

$$+C_{t-1}G_{t-1}y_{t-2}+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}]'H_{t-1}$$

$$[D_{t-1}y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+C_{t-1}G_{t-1}y_{t-2}+$$

$$+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}]\}-2E_{t-2}\{[D_{t-1}y_{t-2}+$$

$$+(A_{t-1}-D_{t-1})y_{t-2}+(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+C_{t-1}G_{t-1}y_{t-2}+$$

$$+C_{t-1}G_{t-1}(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})+b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1}+u_{t-1}]'h_{t-1}\}+E_{t-2}(c_{t-1})=$$

$$=E_{t-2}\{y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}\}+$$

$$+E_{t-2}\{(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})'(A_{t-1}-D_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})$$

$$(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}+E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'H_{t-1}(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})\}+$$

$$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})+2\bar{y}'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}-$$

$$-2\bar{y}'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'h^*_{t-1/t-2}-2E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'h_{t-1}\}+$$

$$+E_{t-2}(c_{t-1})+2E_{t-2}\{y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}$$

En el último sumando, ponemos: $y_{t-2}=\bar{y}_{t-2}-(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})$, y queda de la siguiente forma:

$$E_{t-2}\{[\bar{y}_{t-2}-(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})]'(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}=$$

$$=-E_{t-2}\{(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})'(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1})(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\}$$

POR TANTO:

$$\hat{V}_{t-1}(I_{t-2})=E_{t-2}\{y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})y_{t-2}\}-$$

$$-2y'_{t-2}(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'[h^*_{t-1/t-2}-H_{t-1}b^*_{t-1/t-2}]+$$

$$+E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'H_{t-1}(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})\}-2E_{t-2}\{(b_{t-1}+C_{t-1}g_{t-1})'h_{t-1}\}+$$

$$+E_{t-2}(u'_{t-1}H_{t-1}u_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1})+$$

$$+E_{t-2}\left\{(\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})'\left[(A_{t-1}-D_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_{t-1}G_{t-1})-2(A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}-D_{t-1})\right](\bar{y}_{t-2}-y_{t-2})\right\}$$

con lo que hemos demostrado el teorema.

NOTA: Hemos supuesto que las variables exógenas $\{b_t\}$ son estocásticas.

Para el caso de variables $\{b_t\}$ determinísticas el resultado es análogo. Se comprueba fácilmente siguiendo exactamente los mismos pasos. No lo desarrollamos aquí porque lo consideramos repetitivo.

Vamos a enunciar y demostrar a continuación el teorema que nos va a resolver el problema III.2.1 para modelos con expectativas racionales de variables futuras. Vamos a suponer que las variables exógenas $\{b_t\}$ son estocásticas en las condiciones señaladas en el problema previo.

TEOREMA III.2.2

Consideramos el problema III.2.1. Suponemos que para t=T (instante final), se verifica que $y^*_{T+1/T-1}=\Gamma y^*_{T/T-1}$

La solución es $\hat{x}_t=F_tE_{t-1}(y_{t-1})+f_t$, en donde F_t,f_t coinciden con las expresiones calculadas en el caso de información completa.

DEMOSTRACION:

Para el caso de información completa, veíamos que el sistema (2.1) se podía expresar:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+\tilde{A}_ty_{t-1}+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

Tratábamos a $y^*_{t+1/t-1}$ como dado y utilizábamos la programación dinámica, obteniendo:

$$\hat{x}^*_{t/t-1}=G_ty_{t-1}+G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+g_t$$

En el caso que nos ocupa hemos visto en la proposición III.2.1

que el sistema (2.1) se puede expresar:

$$(2.3)\quad y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+ +\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

Tratamos a $y^*_{t+1/t-1}$ como dado y utilizamos el teorema III.2.1 que nos resuelve lo que hemos llamado problema previo (problema III.2.2), obteniendo.

$$(2.4)\quad \hat{x}^*_{t/t-1}=G_tE_{t-1}(y_{t-1})+G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+g_t$$

en donde G_t, G_{1t}, g_t coinciden con las expresiones obtenidas en el caso de información completa.

Llevando este resultado a (2.3), obtenemos

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_t(G_tE_{t-1}(y_{t-1})+G_{1t}y^*_{t+1/t-1}+$$
$$+g_t)+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t=(\tilde{B}_{1t}+\tilde{C}_tG_{1t})y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t+\tilde{C}_tG_t)E_{t-1}(y_{t-1})+$$
$$+(\tilde{C}_tg_t+\tilde{b}^*_{t/t-1})+\eta_t \Rightarrow$$

$$(2.5)\Rightarrow y_t=R_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(R_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+r_t+\eta_t\,,$$

$$R_{1t}=\tilde{B}_{1t}+\tilde{C}_tG_{1t}$$
$$R_t=\tilde{A}_t+\tilde{C}_tG_t$$
$$r_t=\tilde{b}^*_{t/t-1}+\tilde{C}_tg_t$$

(NOTA: $r_t=r^*_{t/t-1}$, pero, en general $r_t\neq r^*_{t/t-j}$, para $j>1$)

Vamos a resolver este sistema. Demostraremos por inducción, que el sistema (2.5) se puede expresar:

$$(2.6)\quad y_t=A_ty_{t-1}+(P_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+s_t+r_t$$

en donde: $P_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}R_t$, para $t=1,2,\dots,T$ con $P_{T+1}=\Gamma$

$s_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}(r_t+R_{1t}s^*_{t+1/t-1})$,

para $t=1,2,\dots,T$, con $s_{T+1}=0$

$\boxed{\text{PARA T}}$ Particularizamos (2.5) en T:

$$y_T=R_{1T}y^*_{T+1/T-1}+A_Ty_{T-1}+(R_T-A_T)\ E_{T-1}(y_{T-1})+r_T+\eta_T$$

Al ser $y^*_{T+1/T-1}=\Gamma\, y^*_{T/T-1}$, queda:

$$y_T=R_{1T}\ \Gamma\, y^*_{T/T-1}+A_Ty_{T-1}+(R_T-A_T)E_{T-1}(y_{T-1})+r_T+\eta_T$$

$$\Rightarrow\ y^*_{T/T-1}=R_{1T}\,\Gamma\, y^*_{T/T-1}+A_TE_{T-1}(y_{T-1})+(R_T-A_T)E_{T-1}(y_{T-1})+r_T$$

$$\Rightarrow\ y^*_{T/T-1}=(I-R_{1T}\ \Gamma\ )^{-1}(R_TE_{T-1}(y_{T-1})+r_T)$$

Luego

$$y_T=y^*_{T/T-1}+A_Ty_{T-1}-A_TE_{T-1}(y_{T-1})+\eta_T=$$

$$=A_Ty_{T-1}+(P_T-A_T)E_{T-1}(y_{T-1})+s_T+\eta_T\ ,$$

en donde
$$P_T=(I-R_{1T}\ \Gamma)^{-1}R_T$$
$$s_T=(I-R_{1T}\ \Gamma)^{-1}r_T$$

SUPONGAMOS QUE ES CIERTO EL ENUNCIADO (2.6) PARA t+1

$$\Rightarrow\ y_{t+1}=A_{t+1}y_t+(P_{t+1}-A_{t+1})E_t(y_t)+s_{t+1}+\eta_{t+1}$$

Vamos a demostrarlo $\boxed{\text{PARA t}}$

Partimos de (2.5) $y_t=R_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(R_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+r_t+\eta_t$

A partir de la hipótesis de inducción para t+1, tenemos:

$$y^*_{t+1/t-1}=A_{t+1}y^*_{t/t-1}+(P_{t+1}-A_{t+1})y^*_{t/t-1}+s^*_{t+1/t-1}=$$

$$=P_{t+1}y^*_{t/t-1}+s^*_{t+1/t-1}$$

Llevando este resultado a (2.5) queda:

$$y_t=R_{1t}(P_{t+1}y^*_{t/t-1}+s^*_{t+1/t-1})+A_ty_{t-1}+(R_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+r_t+\eta_t$$

$$\Rightarrow\ y^*_{t/t-1}=R_{1t}P_{t+1}y^*_{t/t-1}+R_{1t}s^*_{t+1/t-1}+A_tE_{t-1}(y_{t-1})+$$

$$+(R_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+r_t$$

$$\Rightarrow\ y^*_{t/t-1}=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}(R_tE_{t-1}(y_{t-1})+r_t+R_{1t}s^*_{t+1/t-1})$$

Queda:

$$y_t=y^*_{t/t-1}+A_ty_{t-1}-A_tE_{t-1}(y_{t-1})+\eta_t=A_ty_{t-1}+(P_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+$$

$$+s_t+\eta_t$$

$$P_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}R_t$$

$$s_t=(I-R_{1t}P_{t+1})^{-1}(r_t+R_{1t}s^*_{t+1/t-1})$$

Queda así demostrada la expresión de la solución para el sistema (2.5)

Los valores de P_t,s_t que hemos obtenido coinciden con los calculados en el caso de información completa.

Tenemos:

$$(2.6)\quad y_t=A_ty_{t-1}+(P_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+s_t+\eta_t$$

$$\Rightarrow \quad y_{t+1}=A_{t+1}y_t+(P_{t+1}-A_{t+1})E_t(y_t)+s_{t+1}+\eta_{t+1}$$

$$\Rightarrow \quad y^*_{t+1/t-1}=A_{t+1}y^*_{t/t-1}+(P_{t+1}-A_{t+1})y^*_{t/t-1}+s^*_{t+1/t-1}=$$

$$=P_{t+1}y^*_{t/t-1}+s^*_{t+1/t-1}$$

De (2.6) obtenemos: $y^*_{t/t-1}=A_tE_{t-1}(y_{t-1})+(P_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+s_t=$

$$=P_tE_{t-1}(y_{t-1})+s_t$$

Por tanto:

$$y^*_{t+1/t-1}=P_{t+1}P_tE_{t-1}(y_{t-1})+P_{t+1}s_t+s^*_{t+1/t-1}$$

Llevando este resultado a (2.4), queda:

$$\hat{x}^*_{t/t-1}=G_tE_{t-1}(y_{t-1})+G_{1t}(P_{t+1}P_tE_{t-1}(y_{t-1})+P_{t+1}s_t+s^*_{t+1/t-1})+g_t=$$

$$=(G_t+G_{1t}P_{t+1}P_t)E_{t-1}(y_{t-1})+g_t+G_{1t}P_{t+1}s_t+G_{1t}s^*_{t+1/t-1}$$

Por tanto: $\hat{x}^*_{t/t-1}=\hat{x}_t=F_tE_{t-1}(y_{t-1})+f_t$,

en donde
$$F_t=G_t+G_{1t}P_{t+1}P_t$$
$$f_t=g_t+G_{1t}(P_{t+1}s_t+s^*_{t+1/t-1})$$

Vemos, por tanto, que F_t, f_t coinciden con las expresiones obtenidas en el caso de información completa y el teorema queda demostrado.

NOTA: En la demostración del teorema hemos supuesto que las variables exógenas $\{b_t\}$ son estocásticas, del tipo $b_t=\sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i}+\xi_t$. El teorema es igualmente cierto para el caso de variables $\{b_t\}$ determinísticas y la demostración es análoga.

Hemos resuelto el problema de control óptimo para el caso de información incompleta pero, tanto en el caso standard como en el caso de modelos con expectativas racionales de variables futuras, necesitamos calcular $E(y_{t-1}|I_{t-1})$. Este cálculo en general no es fácil; ahora bien, en el caso standard sabemos que si se cumple la hipótesis adicional de que todos los ruidos, así como la variable aleatoria y_o, son Gaussianos, esas esperanzas condicionadas se pueden calcular fácilmente utilizando el filtro de Kalman. En el siguiente apartado vamos a partir del filtro de Kalman y luego trataremos de generalizarlo para el caso de modelos con expectativas racionales de variables futuras.

3.- EL PROBLEMA DE ESTIMACION EN MODELOS SIN EXPECTATIVAS.

En este apartado vamos a seguir el enfoque de Bertsekas (1976).

a) RESULTADOS PREVIOS:

Sean x,y vectores aleatorios, tomando valores en R^n y R^m, respectivamente.

Sea $\hat{x}^*(y)$ el estimador mínimo cuadrático de x, dado y. Verifica, por tanto:

$$\underset{x}{E}\,(\|x-\hat{x}^*(y)\|^2/y) = \underset{z\in R^n}{\mathrm{MIN}}\ \underset{x}{E}(\|x-z\|^2/y),\ \text{para cada } y\in R^m$$

PROPOSICION III.3.1. $\hat{x}^*(y)=\underset{x}{E}(x/y),\ \forall y\in R^m$

Sea $\hat{x}(y)=\hat{A}y+\hat{b}$, estimador lineal mínimo cuadrático de x, dado y. Verifica, por tanto:

$$\underset{x,y}{E}\,(\|x-\hat{A}y-\hat{b}\|^2)=\underset{x,y}{E}\,\{(x-\hat{A}y-\hat{b})'(x-\hat{A}y-\hat{b})\} = \underset{A,b}{\mathrm{MIN}}\ \underset{x,y}{E}\,(\|x-Ay-b\|^2)$$

PROPOSICION III.3.2. Sean x,y conjuntamente Gaussianos

$$\Rightarrow\ \hat{x}^*(y)=\hat{x}(y)$$

PROPOSICION III.3.3

Sean x,y vectores aleatorios, tomando valores en R^n y R^m, respectivamente, con distribución de probabilidad conjunta dada. Los valores esperados y las matrices de covarianza de x,y se supone que existen y son denotadas por:

$$E\{x\}=\bar{x} \qquad E\{y\}=\bar{y}$$

$$E\{(x-\bar{x})(x-\bar{x})'\}=\Sigma_{xx} \qquad E\{(y-\bar{y})(y-\bar{y})'\}=\Sigma_{yy}$$

$$E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})'\}=\Sigma_{xy} \qquad E\{(y-\bar{y})(x-\bar{x})'\}=\Sigma_{yx}=\Sigma'_{xy}$$

Suponemos también que existe Σ_{yy}^{-1}

Entonces:

$$\hat{x}(y)=\bar{x}+\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y-\bar{y})$$

$$\underset{x,y}{E}\{[x-\hat{x}(y)][x-\hat{x}(y)]'\}=\underset{x,y}{E}\{\tilde{x}(y)\,\tilde{x}(y)'\}=$$

$$=\Sigma_{xx}-\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx}$$

en donde: $\tilde{x}(y)=x-\hat{x}(y)$ es el error de estimación.

COROLARIO 1:

$$\underset{y}{E}\{\hat{x}(y)\}=\bar{x}$$

COROLARIO 2 :

$\tilde{x}(y)=x-\hat{x}(y)$ es incorrelado con y, y tambien incorrelado con $\hat{x}(y)$.

COROLARIO 3:

Sea $z=Cx^1+Dx^2+E\hat{x}^3(y)+F\hat{x}^4(y)+h+u$

en donde: C,D,E,F son matrices de constantes; h es un vector de constantes, x^1,x^2,x^3,x^4,u son vectores aleatorios. El vector u tiene media 0 y es incorrelado con y

$\Rightarrow \hat{z}(y)=C\hat{x}^1(y)+D\hat{x}^2(y)+E\hat{x}^3(y)+F\hat{x}^4(y)+h$

COROLARIO 4:

Sea z, tomando valores en R^p, incorrelado con y.

$\Rightarrow \hat{x}(y,z)=\hat{x}(y)+\hat{x}(z)-\bar{x}$

COROLARIO 5:

Sea z, tomando valores en R^p, sin que y,z sean necesariamente incorrelados

$\Rightarrow \hat{x}(y,z)=\hat{x}(y)+\hat{x}\ [z-\hat{z}(y)]\ -\bar{x}$

b) EL FILTRO DE KALMAN

PROBLEMA III.3.1

Consideremos el sistema:

(3.1) $y_t=Q_t y_{t-1}+q_{t-1}+\eta_t$, para t=1,2,...,T

y el sistema de observación:

(3.2) $z_t=M_t y_t+v_t$, para t=0,1,2,...,T

Suponemos que $y_o, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_T, v_o, v_1, \ldots, v_T$ son vectores aleatorios mutuamente incorrelados, tales que:

$E\,\eta_t=0$, $E\,\eta_t\eta_t'=R_t$

$E\ v_t=0$, $Ev_t v_t'=V_t$

$Ey_o=m$, $E(y_o-m)(y_o-m)'=S$

Además, suponemos que V_t es definida positiva, para cada t.

Se trata de encontrar el estimador lineal mínimo cuadrático de y_t dados los valores de $z_o, z_1, \ldots, z_t$

Consideramos el vector $I_t' = (z_o', z_1', \ldots, z_t')'$

Notación: $\hat{y}_t(I_t) = \hat{y}_{t/t}$. En general: $\hat{y}_t(I_r) = \hat{y}_{t/r}$

El siguiente teorema nos da la solución al problema III.3.1, obtenida de manera recursiva.

TEOREMA III.3.1 (El filtro de Kalman)

En las condiciones de problema III.3.1, se obtiene:

$$\hat{y}_{t/t} = \hat{y}_t(I_t) = (I - D_t M_t)(Q_t \hat{y}_{t-1/t-1} + q_{t-1}) + D_t z_t$$

$$\text{CON } \hat{y}_{o/-1} = m \quad \rightarrow \hat{y}_{o/o} = (I - D_o M_o) m + D_o z_o$$

$$\text{siendo} \quad D_t = \Sigma_{t/t-1} M_t' (M_t \Sigma_{t/t-1} M_t' + V_t)^{-1}$$

$$\Sigma_{t/t-1} = Q_t \Sigma_{t-1/t-1} Q_t' + R_t$$

$$\Sigma_{t/t} = \Sigma_{t/t-1} - \Sigma_{t/t-1} M_t' (M_t \Sigma_{t/t-1} M_t' + V_t)^{-1} M_t \Sigma_{t/t-1}$$

$$\text{CON} \quad \Sigma_{o/-1} = S$$

DEMOSTRACION

Supongamos que hemos calculado $\hat{y}_{t/t-1}$, junto con $\Sigma_{t/t-1} = E(y_t - \hat{y}_{t/t-1})(y_t - \hat{y}_{t/t-1})'$. En el instante t, recibimos la medida adicional $z_t = M_t y_t + v_t$.

Utilizamos el corolario 5 de la proposición III. 3.3 para calcular el estimador lineal mínimo cuadrático de y_t, dados I_{t-1}, z_t. Tendremos

$$\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_{t/t-1}+\hat{y}_t\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]-E(y_t)$$

De acuerdo con el corolario 3 de la misma pro posición: $\hat{z}_t(I_{t-1})=M_t\hat{y}_{t/t-1} \Rightarrow E\{z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\}=$

$$=E\{M_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})+v_t\}=0$$

Utilizando la proposición III.3.3 tenemos:

$$\hat{y}_t\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]=\hat{y}_t\left[\tilde{z}_t(I_{t-1})\right]=E(y_t)+\Sigma_{y\tilde{z}}\,\Sigma^{-1}_{\tilde{z}\tilde{z}}\cdot(z_t-z_t(I_{t-1}))$$

siendo:

$$\Sigma_{y\tilde{z}}=E\{\left[y_t-E(y_t)\right]\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]'\}=$$

$$=E\{\left[y_t-E(y_t)\right]\left[M_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})+v_t\right]'\}=$$

$$=E\{y_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})'M_t'\}=E\{(y_t-\hat{y}_{t/t-1}+\hat{y}_{t/t-1})(y_t-\hat{y}_{t/t-1})'M_t'\}=$$

$$=\Sigma_{t/t-1}M_t'$$

$$\Sigma_{\tilde{z}\tilde{z}}=E\{\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]'\}=E\{\left[M_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})+v_t\right]\left[M_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})+v_t\right]'\}=M_t\,\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t$$

Por tanto: $\hat{y}_t\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]=E(y_t)+D_t(z_t-M_t\hat{y}_{t/t-1})$

en donde $D_t=\Sigma_{t/t-1}M_t'(M_t\,\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t)^{-1}$

Queda: $\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_{t/t-1}+D_t(z_t-M_t\hat{y}_{t/t-1})=(I-D_tM_t)\hat{y}_{t/t-1}+D_tz_t$

Aplicando el corolario 3 de la proposición III.3.3 al sistema (3.1), obtenemos:

$$\hat{y}_{t/t-1}=Q_t\hat{y}_{t-1/t-1}+q_{t-1} \rightarrow y_t-\hat{y}_{t/t-1}=Q_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1})+\eta_t$$

$$\Rightarrow \Sigma_{t/t-1}=E\{(y_t-\hat{y}_{t/t-1})(y_t-\hat{y}_{t/t-1})'\}=E\{\left[Q_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1})+\eta_t\right]$$

$$\left[Q_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1})+\eta_t\right]'\}=Q_t\,\Sigma_{t-1/t-1}Q_t'+R_t$$

Calculemos ahora $\Sigma_{t/t}=E\{(y_t-\hat{y}_{t/t})(y_t-\hat{y}_{t/t})'\}$

$$y_t-\hat{y}_{t/t}=y_t-\hat{y}_{t/t-1}-D_t(z_t-M_t\hat{y}_{t/t-1})=y_t-\hat{y}_{t/t-1}-$$

$$-D_tM_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})-D_tv_t$$

Por tanto:

$$\Sigma_{t/t}=\Sigma_{t/t-1}-\Sigma_{t/t-1}M_t'D_t'-D_tM_t\Sigma_{t/t-1}+D_tM_t\Sigma_{t/t-1}$$

$$M_t'D_t'+D_tV_tD_t'=\Sigma_{t/t-1}-\Sigma_{t/t-1}M_t'(M_t\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t)^{-1}M_t\Sigma_{t/t-1}$$

COROLARIO:

Si los ruidos $\{\eta_t\}$ y $\{v_t\}$ son, además, Gaussianos $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{y}_{t/t}=\hat{y}_t(I_t)=E(y_t|I_t)$, de acuerdo con la proposición - III.3.2

4.- EL PROBLEMA DE ESTIMACION EN MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES DE VARIABLES FUTURAS. CASO DE RUIDOS GAUSSIANOS.

PROBLEMA III.4.1

Consideramos el modelo:

(4.1) $y_t=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+b_t+u_t$, para $t=1,2,\ldots,T$

con el sistema de observación:

(4.2) $z_t=M_ty_t+v_t$, para $t=0,1,2,\dots,T$

Suponemos que $y_o,u_1,u_2,\dots,u_T$, $v_o,v_1,\dots,v_T$ son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados, tales que:

$Eu_t=0$; $Eu_tu_t'=U_t$

$Ev_t=0$; $Ev_tv_t'=V_t$

$Ey_o=m$; $E(y_om)(y_o-m)'=S$

Además, suponemos que V_t es definida positiva. para cada t.

En este caso: $y^*_{t/k}=E(y_t|I_k)$, siendo

$I_k=$ $\{z_kz_{k-1},\dots,z_o,\ b_k,\dots,b_1\}$, pero no contiene a $y_k,y_{k-1},\dots,y_o$, ya que son desconocidos.

Se trata de encontrar el estimador lineal -- mínimo cuadrático de y_t, dada la información I_t.

En primer lugar efectuaremos unastransformaciones en el sistema (4.1).

Luego para el sistema (4.1) en su nueva formulación y el sistema (4.2), seguiremos un proceso análogo al del apartado anterior, para obtener las ecuaciones de la generalización del filtro de Kalman a este nuevo problema, aunque necesitaremos imponer la hipótesis adicional de que los ruidos sean Gaussianos

PROPOSICION III.4.1

Consideramos el sistema (4.1) Suponemos que

$y^*_{T+1/T-1}=\Gamma y^*_{T/T-1}$, siendo T el período final. El sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_t=A_t y_{t-1}+(Q_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}+\eta_t$$

en donde

$$\begin{cases} Q_t=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{A}_t, & \text{con } Q_{T+1}=\Gamma \\ M_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1} & \\ M_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i}, & \text{para } i=t+1,\dots,T \end{cases}$$

siendo $\tilde{b}^*_{i/t-1}=(I-B_i)^{-1}b^*_{i/t-1}$

DEMOSTRACION:

Partimos del sistema (4.1). Como ya hemos demostrado anteriormente en el corolario 3 de la proposición III. 2.1, el sistema (4.1) se puede expresar:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

Vamos a probar la proposición, por inducción:

PARA T, tenemos:

$$y_T=\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+A_T y_{T-1}+(\tilde{A}_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T=$$

$$=\tilde{B}_{1T}\Gamma\, y^*_{T/T-1}+A_T y_{T-1}+(\tilde{A}_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T$$

$$\Rightarrow\ y^*_{T/T-1}=\tilde{B}_{1T}\Gamma\, y^*_{T/T-1}+A_T E(y_{T-1}|I_{T-1})+(\tilde{A}_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+$$

$$+\tilde{b}^*_{T/T-1}=$$

$$=\tilde{B}_{1T}\,\Gamma\, y^*_{T/T-1}+\tilde{A}_T E(y_{T-1}|I_{T-1})+\tilde{b}^*_{T/T-1}$$

Por tanto: $y^*_{T/T-1}=(I-\tilde{B}_{1T}\Gamma)^{-1}\left[\tilde{A}_T E(y_{T-1}|I_{T-1})+\tilde{b}^*_{T/T-1}\right]$

Entonces: $y_T=y^*_{T/T-1}+A_T y_{T-1}-A_T E(y_{T-1}|I_{T-1})+\eta_T=$

$$=A_T y_{T-1}+(Q_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+M_{T,T}\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T$$

en donde $Q_T=(I-\tilde{B}_{1T}\Gamma)^{-1}A_T$

$M_{T,T}=(I-\tilde{B}_{1T}\Gamma)^{-1}$

SUPONGAMOS LA PROPOSICION CIERTA PARA t+1

$$y_{t+1}=A_{t+1}y_t+(Q_{t+1}-A_{t+1})E(y_t|I_t)+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t}+\eta_{t+1}$$

PARA t

Partimos del sistema, particularizado en t.

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

Utilizamos la hipótesis de inducción en t+1, y tomamos esperanzas condicionadas a I_{t-1}:

$$y^*_{t+1/t-1}=A_{t+1}y^*_{t/t-1}+(Q_{t+1}-A_{t+1})y^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}=$$

$$=Q_{t+1}y^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}$$

sustituyendo en y_t:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}(Q_{t+1}y^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1})+A_t y_{t-1}+$$

$$+(\tilde{A}_t-A_t)\ E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

$$\Rightarrow\ y^*_{t/t-1}=\tilde{B}_{1t}(Q_{t+1}y^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1})+A_t E(y_{t-1}|I_{t-1})+$$

$$+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{b}^*_{t/t-1}$$

$$\Rightarrow y^*_{t/t-1}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\left[\tilde{A}_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+\sum_{i=t+1}^{T}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}+\right.$$
$$\left.+\tilde{b}^*_{t/t-1}\right]$$

$$\Rightarrow y_t=y^*_{t/t-1}+A_ty_{t-1}-A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+\eta_t=$$

$$=A_ty_{t-1}+(Q_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\sum_{i=t}^{T}M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}+\eta_t$$

en donde: $Q_t=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{A}_t$

$$M_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}$$

$$M_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i} \quad (i=t+1,\ldots,T)$$

con lo que le proposición queda demostrada.

COROLARIO 1:

En el caso de información completa, sabemos que los vectores $y_k,y_{k-1},\ldots,y_o$ pertenecen a I_k. En tal caso: $E(y_{t-1}|I_{t-1})=y_{t-1}$, con lo cual queda:

$$y_t=Q_ty_{t-1}+\sum_{i=t}^{T}M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}+\eta_t$$

COROLARIO 2:

Si los vectores $\{b_t\}$ son determinísticos $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{b}^*_{i/t-1}=\tilde{b}_i=(I-B_i)^{-1}b_i, \qquad \forall_i=t-1,\ldots,T$$
$$\forall_t=1,2,\ldots,T$$

NOTA:

Como hemos hecho anteriormente, suponemos que los vectores $\tilde{b}^*_{i/t-1}$ son conocidos, $\forall t$, al final del período t-1. Vamos a utilizar la notación:

$$q_{t-1} = \sum_{i=t}^{T} M_{t,i} b^*_{i/t-1}$$

Por tanto, el sistema (4.1) se puede expresar:

$$(4.3) \qquad y_t = A_t y_{t-1} + (Q_t - A_t) E(y_{t-1} \mid I_{t-1}) + q_{t-1} + \eta_t$$

Suponemos que y_o, η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_T$, $v_o, v_1, \ldots, v_T$ son vectores aleatorios mutuamente incorrelados.

Suponemos que $E\eta_t = 0$; $E\,\eta_t \eta_t' = R_t$

TEOREMA III.4.1 (Generalización del filtro de Kalman para este tipo de modelos).

Consideramos el problema III.4.1. Suponemos, además que y_o, $\{u_t\}$, $\{v_t\}$ son Gaussianos y que los vectores b_t son determinísticos, o bien estocásticos de la forma - $b_t = \sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i} + \varepsilon_t$ en donde $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso estocástico Guassiano, de media cero, serialmente incorrelado, independiente de $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, y_o.

En estas condiciones, se obtienen las siguientes ecuaciones recurrentes:

$$\hat{y}_{t/t} = (I - D_t M_t)(Q_t \hat{y}_{t-1/t-1} + q_{t-1}) + D_t z_t$$

$$\text{CON} \quad \hat{y}_{o/-1} = m \;\Rightarrow\; \hat{y}_{o/o} = (I - D_o M_o) m + D_o z_o$$

siendo: $D_t = \Sigma_{t/t-1} M_t'(M_t \Sigma_{t/t-1} M_t' + V_t)^{-1}$

$$\Sigma_{t/t-1} = A_t \Sigma_{t-1/t-1} A_t' + R_t$$

$$\Sigma_{t/t} = \Sigma_{t/t-1} - \Sigma_{t/t-1} M_t'(M_t \Sigma_{t/t-1} M_t' + V_t)^{-1} M_t \Sigma_{t/t-1}$$

CON $\Sigma_{o/-1} = S$

DEMOSTRACION

Partimos del sistema (4.1) en la forma dada por la proposición III.4.1 que aparece en (4.3) y del sistema de observación (4.2).

$$y_t = A_t y_{t-1} + (Q_t - A_t) E(y_{t-1} | I_{t-1}) + q_{t-1} + \eta_t \quad , \text{ para } t=1,2,\ldots,T$$

$$z_t = M_t y_t + v_t \quad , \text{ para } t=0,1,2,\ldots,T$$

Vamos a seguir los mismos pasos que en el teorema III.3.1

Supongamos que hemos calculado $\hat{y}_{t/t-1}$, junto con $\Sigma_{t/t-1} = E(y_t - \hat{y}_{t/t-1})(y_t - \hat{y}_{t/t-1})'$. En el período t, recibimos la medida adicional $z_t = M_t y_t + v_t$. Además q_{t-1} es conocido.

$$\Rightarrow \hat{y}_{t/t} = \hat{y}_{t/t-1} + \hat{y}_t \left[z_t - \hat{z}_t(I_{t-1}) \right] - E(y_t)$$

Al igual que en el teorema III.3.1

$$\hat{z}_t(I_{t-1}) = M_t \hat{y}_{t/t-1} \quad \text{y} \quad E\{z_t - \hat{z}_t(I_{t-1})\} =$$

$$= E\{M_t(y_t - \hat{y}_{t/t-1}) + v_t\} = 0$$

También:

$$\hat{y}_t\,[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})]=E(y_t)+\Sigma_{y\tilde{z}}\Sigma^{-1}_{\tilde{z}\tilde{z}}(z_t-\hat{z}_t(I_{t-1}),$$

$$\text{con}\quad \begin{aligned}\Sigma_{y\tilde{z}}&=\Sigma_{t/t-1}M_t'\\ \Sigma_{\tilde{z}\tilde{z}}&=M_t\,\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\hat{y}_t\,[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})]=E(y_t)+D_t(z_t-M_t\hat{y}_{t/t-1}),\ \text{con}\ D_t=\Sigma_{t/t-1}M_t'(M_t\,\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t)^{-1}$$

Queda, por tanto, igual que en el teorema III.3.1:

$$\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_{t/t-1}+D_t(z_t-M_t\hat{y}_{t/t-1})=(I-D_tM_t)\hat{y}_{t/t-1}+D_tz_t$$

Consideramos ahora el sistema (4.3):

$y_t=A_ty_{t-1}+(Q_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+q_{t-1}+\eta_t$ como por hipótesis estamos en el caso Gaussiano, sabemos que $E(y_{t-1}|I_{t-1})=\hat{y}_{t-1/t-1}$ por lo que podemos aplicar el corolario 3 de la proposición III.3.3, obteniendo:

$$\hat{y}_{t/t-1}=A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+(Q_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+q_{t-1}=$$

$$=Q_t\hat{y}_{t-1/t-1}+q_{t-1}=Q_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+q_{t-1}$$

$$\Rightarrow y_t-\hat{y}_{t/t-1}=A_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1})+\eta_t$$

$$\Rightarrow \Sigma_{t/t-1}=E\{(y_t-\hat{y}_{t/t-1})(y_t-\hat{y}_{t/t-1})'\}=E\{[A_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1})+\eta_t][A_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1})+\eta_t]'\}=A_t\,\Sigma_{t-1/t-1}A_t'+R_t$$

$\Sigma_{t/t}$ queda exactamente igual que en el teorema III.3.1. Es decir:

$$\Sigma_{t/t}=\Sigma_{t/t-1}-\Sigma_{t/t-1}M_t'(M_t\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t)^{-1}M_t\Sigma_{t/t-1}$$

Por tanto, agrupando términos, queda:

$$\hat{y}_{t/t}=(I-D_tM_t)(Q_t\hat{y}_{t-1/t-1}+q_{t-1})+D_tz_t$$

$$\text{CON}\quad \hat{y}_{o/-1}=m \Rightarrow \hat{y}_{o/o}=(I-D_oM_o)m+D_oz_o$$

siendo D_t, $\Sigma_{t/t-1}$, $\Sigma_{t/t}$ tal como aparecen en el enunciado con $\Sigma_{o/-1}=S$

NOTA:

Vamos a comprobar que al final del período t-1 conocemos Q_t, q_{t-1}.

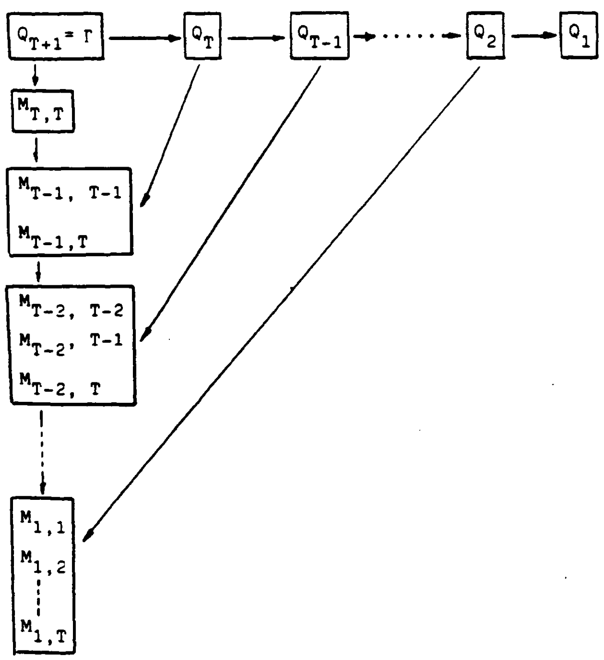
Recordemos que:

$$Q_t=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{A}_t,\quad \text{para}\quad t=1,2,\ldots,T,\quad \text{con } Q_{T+1}=\Gamma$$

$$q_{t-1}=\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1},\quad \text{con}\quad M_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}$$

$$M_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i},\ \forall i=t+1,\ldots,T$$

Las matrices Q_t y $M_{t,i}$ las podemos calcular al comienzo del período 1, $\forall t=1,2,\ldots,T$, $\forall i=t+1,\ldots,T$, ya que - todos los datos que necesitamos para su cálculo son conocidos desde el principio. El orden de los cálculos sería el que viene expresado por el siguiente esquema:



Por otra parte los vectores $b^*_{i/t-1}$, $\forall i=t,\ldots,T$ se conocen al final del período t-1, como hemos razonado en apartados anteriores. Por tanto, Q_t, q_{t-1} se conocen al final del período t-1.

En el último teorema hemos tenido que exigir normalidad en los ruidos. Nos preguntamos si es posible eliminar esa hipótesis. Vamos a ver a continuación que sí es posible quitarla, pero a cambio tendremos que sustituir $y^*_{i/t-1}$ por $\hat{y}_{i/t-1}$, con lo cual el sistema (4.1) ya no será , en general, un modelo con expectativas racionales. Vamos a estudiar ese caso en el apartado siguiente:

5.- EL PROBLEMA DE ESTIMACION EN MODELOS EN QUE APARECEN ESTIMADORES LINEALES MINIMO CUADRATICOS DE VARIABLES FUTURAS.

PROBLEMA III.5.1.

Consideramos el modelo

(5.1) $y_t=B_t\hat{y}_{t/t-1}+B_{1t}\hat{y}_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+b_t+u_t$, para $t=1,2,\dots,T$

con el sistema de observación:

(5.2) $z_t=M_ty_t+v_t$ para $t=0,1,2,\dots,T$

Suponemos que $y_o,u_1,u_2,\dots,u_T$, $v_o,v_1,\dots,v_T$ son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados con medias y covarianzas análogas al problema III.4.1.

En este caso $\hat{y}_{t/k}$ es el estimador lineal mínimo cuadrático de y_t, dada la información $I_k=\{z_k,z_{k-1},\dots,z_o,b_k,\dots,b_1\}$.

Se trata de encontrar el estimador lineal mínimo cuadrático de y_t, dada la información I_t.

En primer lugar efectuaremos unas transformaciones en el sistema (5.1). Luego, para el sistema (5.1) en su nueva formulación y el sistema (5.2), seguiremos un proceso análogo al de los dos apartados anteriores, para obtener las ecuaciones de la generalización del filtro de Kalman a este problema.

PROPOSICION III.5.1.

El sistema (5.1) se puede expresar de la siguiente forma:

(5.3) $y_t=\tilde{B}_{1t}\hat{y}_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+\hat{\tilde{b}}_{t/t-1}+\eta_t$

en donde

$$\begin{cases} \tilde{B}_{1t}=(I-B_t)^{-1}B_{1t} \\ \tilde{A}_t=(I-B_t)^{-1}A_t \\ \hat{\tilde{b}}_{t/t-1}=(I-B_t)\hat{b}_{t/t-1} \\ \eta_t=(b_t-\hat{b}_{t/t-1})+u_t \end{cases}$$

DEMOSTRACION

Partimos del sistema (5.1). Aplicando el corolario 3 de la proposición III.3.3, queda:

$$\hat{y}_{t/t-1}=B_t\hat{y}_{t/t-1}+B_{1t}\hat{y}_{t+1/t-1}+A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\hat{b}_{t/t-1}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t/t-1}=(I-B_t)^{-1}(B_{1t}\hat{y}_{t+1/t-1}+A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\hat{b}_{t/t-1})$$

Por tanto:

$$y_t=\hat{y}_{t/t-1}+A_t y_{t-1}-A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+b_t-\hat{b}_{t/t-1}+u_t=$$

$$=\tilde{B}_{1t}\hat{y}_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+\tilde{\hat{b}}_{t/t-1}+\eta_t$$

NOTA

Suponemos que los vectores $\eta_t=(b_t-\hat{b}_{t/t-1})+u_t$ son incorrelados en el tiempo y tienen media cero. Además, y_o $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_T,v_o,v_1,\ldots,v_T$ son mutuamente incorrelados.

Sea $E\eta_t=0$; $E\eta_t\eta_t'=R_t$

PROPOSICION III.5.2:

Consideramos el sistema (5.1). Suponemos que $\hat{y}_{T+1/T-1}=\Gamma\ \hat{y}_{T/T-1}$, siendo T el período final. El sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_t=A_t y_{t-1}+(Q_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+\sum_{i=t}^{T}M_{t,i}\tilde{\hat{b}}_{i/t-1}+\eta_t$$

en donde

$$\begin{cases} Q_t=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{A}_t, \quad \text{con} \quad Q_{T+1}=\Gamma \\ M_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1} \\ M_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i} \quad , \text{para } i=t+1,\ldots,T \end{cases}$$

siendo $\tilde{\hat{b}}_{i/t-1}=(I-B_i)^{-1}\hat{b}_{i/t-1}$

<u>**DEMOSTRACION**</u>:

Partimos del sistema (5.1). Como hemos demostrado en la proposición anterior el sistema se puede expresar:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}\hat{y}_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+\tilde{\hat{b}}_{t/t-1}+\eta_t$$

Vamos a demostrar la proposición por inducción:

$\boxed{\text{PARA T,}}$ tenemos:

$$y_T=\tilde{B}_{1T}\hat{y}_{T+1/T-1}+A_T y_{T-1}+(\tilde{A}_T-A_T)\hat{y}_{T-1/T-1}+\tilde{\hat{b}}_{T/T-1}+\eta_T=$$

$$=\tilde{B}_{1T}\Gamma\,\hat{y}_{T/T-1}+A_T y_{T-1}+(\tilde{A}_T-A_T)\hat{y}_{T-1/T-1}+\tilde{\hat{b}}_{T/T-1}+\eta_T$$

Aplicando el corolario 3 de la proposición III.3.3, queda:

$$\hat{y}_{T/T-1}=\tilde{B}_{1T}\Gamma\,\hat{y}_{T/T-1}+A_T\hat{y}_{T-1/T-1}+(\tilde{A}_T-A_T)\hat{y}_{T-1/T-1}+\tilde{\hat{b}}_{T/T-1}$$

$$=\tilde{B}_{1T}\Gamma\hat{y}_{T/T-1}+\tilde{A}_T\hat{y}_{T-1/T-1}+\tilde{\hat{b}}_{T/T-1}$$

Por tanto: $\hat{y}_{T/T-1}=(I-\tilde{B}_{1T}\Gamma)^{-1}(\tilde{A}_T\hat{y}_{T-1/T-1}+\tilde{\hat{b}}_{T/T-1})$

Entonces: $$y_T=\hat{y}_{T/T-1}+A_T y_{T-1}-A_T\hat{y}_{T-1/T-1}+\eta_T=$$

$$=A_T y_{T-1}+(Q_T-A_T)\hat{y}_{T-1/T-1}+M_{T,T}\tilde{\hat{b}}_{T/T-1}+\eta_T$$

en donde

$$Q_T=(I-\tilde{B}_{1T}\Gamma)^{-1}\tilde{A}_T$$

$$M_{T,T}=(I-B_{1T}\Gamma)^{-1}$$

$\boxed{\text{SUPONGAMOS LA PROPOSICION CIERTA PARA t+1}}$

$$y_{t+1}=A_{t+1}y_t+(Q_{t+1}-A_{t+1})\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=t+1}^{T} M_{t+1,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t}+\eta_{t+1}$$

$\boxed{\text{PARA } t}$

Partimos del sistema, particularizado en t

$$y_t=\tilde{B}_{1t}\hat{y}_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+\hat{\tilde{b}}_{t/t-1}+\eta_t$$

Utilizamos la hipótesis de inducción en t+1 y aplicamos el corolario 3 de la proposición III.3.3

$$\hat{y}_{t+1/t-1}=A_{t+1}\hat{y}_{t/t-1}+(Q_{t+1}-A_{t+1})\hat{y}_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T} M_{t+1,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}=$$

$$=Q_{t+1}\hat{y}_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T} M_{t+1,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}$$

Sustituyendo en y_t:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}\Big(Q_{t+1}\hat{y}_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T} M_{t+1,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}\Big)+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+$$
$$+\hat{\tilde{b}}_{t/t-1}+\eta_t$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t/t-1}=\tilde{B}_{1t}\Big(Q_{t+1}\hat{y}_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T} M_{t+1,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}\Big)+A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+$$
$$+(\tilde{A}_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+\hat{\tilde{b}}_{t/t-1}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t/t-1}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\Big(\tilde{A}_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\hat{\tilde{b}}_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}\Big)$$

$$\Rightarrow y_t=\hat{y}_{t/t-1}+A_t y_{t-1}-A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\eta_t=$$

$$=A_t y_{t-1}+(Q_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}+\eta_t$$

$$Q_t=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{A}_t$$

en donde $M_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}$

$$M_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i} \quad (i=t+1,\ldots,T)$$

con lo que la proposición queda probada.

COROLARIO 1:

Si las variables exógenas $\{b_t\}$ son determinísticas, entonces:

$$\hat{b}_{i/t-1}=b_i$$
$$\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}=(I-B_i)^{-1}b_i=\tilde{b}_i=\tilde{b}_{i/t-1}$$

Además, en tal caso, $\eta_t=u_t$

COROLARIO 2:

Si las variables exógenas $\{b_t\}$ son de la forma:

$b_t=\sum_{i=1}^{p}R_i b_{t-i}+\varepsilon_t$, en donde $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso estocástico Gaussiano de media cero, serialmente incorrelado

$$\Rightarrow \quad \hat{b}_{i/t-1}=b^*_{i/t-1}$$
$$\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}=(I-B_i)^{-1}\hat{b}_{i/t-1}=(I-B_i)^{-1}b^*_{i/t-1}=\tilde{b}^*_{i/t-1}$$

NOTA:

Como hemos hecho anteriormente, suponemos que los vectores $\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}$ son conocidos, $\forall_t$ al final del período -- t-1. Vamos a utilizar la notación:

$$\bar{q}_{t-1}=\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}$$

Por tanto, el sistema (5.1) se puede expresar:

$$(5.4) \qquad y_t=A_t y_{t-1}+(Q_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+\bar{q}_{t-1}+\eta_t$$

Suponemos que y_o, η_1, $\eta_2,\dots,\eta_T$, $v_o,v_1,\dots,v_T$ són vectores aleatorios mutuamente incorrelados. Sea $E\eta_t=0$, $E\,\eta_t\,\eta_t'=R_t$.

De acuerdo con los dos corolarios anteriores en el caso en que las variables $\{b_t\}$ sean determinísticas, o bien sean estocásticas en la forma señalada en el corolario 2, tendremos:

$$\bar{q}_{t-1}=\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}\hat{\tilde{b}}_{i/t-1}=\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}=q_{t-1}$$

TEOREMA III.5.1: (Generalización del filtro de Kalman para estos modelos)

La solución al problema III.5.1 viene dada por las siguientes ecuaciones recurrentes:

$$\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_t(I_t)=(I-D_tM_t)(Q_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\bar{q}_{t-1})+D_tz_t$$

$$\text{CON} \quad \hat{y}_{0/-1}=m \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_{o/o}=(I-D_oM_o)m+D_oz_o$$

en donde D_t, $\Sigma_{t/t-1}$, $\Sigma_{t/t}$ valen lo mismo que en los teoremas III.3.1 y III.4.1

DEMOSTRACION:

Partimos de (5.4) y (5.2)

$$y_t = A_t y_{t-1} + (Q_t - A_t)\hat{y}_{t-1/t-1} + \bar{q}_{t-1} + \eta_t$$

$$z_t = M_t y_t + v_t$$

De manera idéntica a los teoremas III.3.1 y III.4.1, llegamos a:

$$\hat{y}_{t/t} = (I - D_t M_t)\hat{y}_{t/t-1} + D_t z_t$$

A partir del sistema dado $y_t = A_t y_{t-1} + (Q_t - A_t)$ $\hat{y}_{t-1/t-1} + \bar{q}_{t-1} + \eta_t$, y aplicando el corolario 3 de la proposición III.3.3, queda:

$$\hat{y}_{t/t-1} = A_t \hat{y}_{t-1/t-1} + (Q_t - A_t)\hat{y}_{t-1/t-1} + \bar{q}_{t-1} = Q_t \hat{y}_{t-1/t-1} + \bar{q}_{t-1}$$

$$\Rightarrow y_t - \hat{y}_{t/t-1} = A_t (y_{t-1} - \hat{y}_{t-1/t-1}) + \eta_t$$

$\Sigma_{t/t-1}$, $\Sigma_{t/t}$ quedan igual que en los teoremas III.3.1 y III.4.1

Finalmente: $\hat{y}_{t/t} = (I - D_t M_t)\ (Q_t \hat{y}_{t-1/t-1} + \bar{q}_{t-1}) +$

$+ D_t z_t$

CON $y_{o/-1} = m$

COROLARIO 1:

Si los vectores de variables exógenas son determinísticos, o bien, son estocásticos de la forma $b_t = \sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i} + \varepsilon_t$ siendo $\{\varepsilon_t\}$ Gaussiano, de media cero, serialmente incorrelado e independiente de $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, y_o, entonces, al ser $\bar{q}_{t-1} = q_{t-1}$ como hemos visto en la nota anterior, el resultado al problema III.4.1, siendo $\{u_t\}$, $\{v_t\}$ normales, dado por el teorema III.4.1 coincide con el resultado obtenido en el teorema anterior.

COROLARIO 2:

Si, además de las condiciones del corolario 1, suponemos que y_o, $\{u_t\}$, $\{v_t\}$ son Gaussianos, al verificarse que $y^*_{i/t-1}=\hat{y}_{i/t-1}$, para i=t,t+1, el problema III.4.1 y el problema III.5.1 coinciden. Los resultados dados por los teorèmas III.4.1 y III.5.1 tambien coinciden.

6.- EL PROBLEMA DE ESTIMACION EN MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES DE VARIABLES FUTURAS QUE INCLUYEN VARIABLES DE CONTROL. CASO DE RUIDOS GAUSSIANOS.

En los problemas analizados en los apartados 3,4 y 5 no aparecen variables de control. A continuación vamos a introducir variables de control en modelos con expectativas racionales de variables futuras y deduciremos la generalización del filtro de Kalman a este caso, que necesitaremos posteriormente para relacionar el problema de estimación con el problema de control.

PROBLEMA III.6.1

Consideramos el modelo:

$$(6.1)\quad y_t=B_t y^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+C_t x_t+b_t+u_t\ ,$$

para t=1,2,...,T

con el sistema de observación:

$$(6.2)\quad z_t=M_t y_t+v_t,\qquad \text{para}\quad t=0,1,2,...,T$$

Suponemos que $y_o, u_1, u_2, \ldots, u_T, v_o, v_1, \ldots, v_T$ son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados, tales que:

$$Eu_t=0 \quad , \quad Eu_t u_t'=U_t$$

$$Ev_t=0 \quad , \quad Ev_t v_t'=V_t$$

$$Ey_o=m \quad , \quad E(y_o-m)(y_o-m)'=S$$

Además, suponemos que V_t es definida positiva, para cada t.

En este caso $y^*_{t/k}=E(y_t/I_k)$, con $I_k=\{z_k, z_{k-1}, \ldots, z_o, x_k, \ldots, x_1, b_k, \ldots, b_1\}$

Se trata de encontrar el estimador lineal mínimo cuadrático de y_t, dada la información I_t.

Vamos a seguir un tratamiento análogo al del apartado 4.

PROPOSICION III.6.1:

Consideramos el sistema (6.1) Suponemos que $y^*_{T+1/T-1}=\Gamma\, y^*_{T/T-1}$, siendo T el instante final. El sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$y_t=A_t y_{t-1}+(Q_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\sum_{i=t}^{T} N_{t,i}x^*_{i/t-1}+\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}b^*_{i/t-1}+$$

$$+\eta_t$$

en donde:

$$Q_t=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{A}_t \quad , \qquad \text{CON} \quad Q_{T+1}=\Gamma$$

$$N_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{C}_t$$

$$N_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}N_{t+1,i}, \qquad \text{para} \quad i=t+1,\ldots,T$$

$$M_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}$$

$$M_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i}, \quad \text{para } i=t+1,\dots,T$$

DEMOSTRACION:

Partimos del sistema (6.1). Como hemos demostrado en la proposición III.2.1 el sistema se puede expresar:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_t y_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_t x^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

Vamos a demostrar la proposición por inducción:

$\boxed{\textbf{PARA T,}}$ tenemos:

$$y_T=\tilde{B}_{1T}y^*_{T+1/T-1}+A_T y_{T-1}+(\tilde{A}_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+$$
$$+\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T=\tilde{B}_{1T}\,\Gamma\, y^*_{T/T-1}+A_T y_{T-1}+(\tilde{A}_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+$$
$$+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T$$

$$\Rightarrow\quad y^*_{T/T-1}=\tilde{B}_{1T}\,\Gamma\, y^*_{T/T-1}+A_T E(y_{T-1}|I_{T-1})+(\tilde{A}_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+$$
$$+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1}$$

$$\Rightarrow\quad y^*_{T/T-1}=(I-\tilde{B}_{1T}\,\Gamma)^{-1}\left[\tilde{A}_T E(y_{T-1}|I_{T-1})+\tilde{C}_T x^*_{T/T-1}+\tilde{b}^*_{T/T-1}\right]$$

Queda:

$$y_T=y^*_{T/T-1}+A_T y_{T-1}-A_T E(y_{T-1}|I_{T-1})+\eta_T=$$

$$=A_T y_{T-1}+(Q_T-A_T)E(y_{T-1}|I_{T-1})+N_{T,T}x^*_{T/T-1}+M_{T,T}\tilde{b}^*_{T/T-1}+\eta_T$$

en donde:
$$\begin{cases} Q_T=(I-\tilde{B}_{1T}\,\Gamma)^{-1}\tilde{A}_T \\ N_{T,T}=(I-\tilde{B}_{1T}\,\Gamma)^{-1}\tilde{C}_T \\ M_{T,T}=(I-\tilde{B}_{1T}\,\Gamma)^{-1} \end{cases}$$

Queda demostrada la proposición para T.

SUPONGAMOS LA PROPOSICION CIERTA PARA t+1

$$y_{t+1}=A_{t+1}y_t+(Q_{t+1}-A_{t+1})E(y_t|I_t)+\sum_{i=t+1}^{T} N_{t+1,i}x^*_{i/t}+\sum_{i=t+1}^{T} M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t}+\eta_{t+1}$$

PARA t

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

Pero utilizando la hipotesis de inducción en t+1, tenemos:

$$y^*_{t+1/t-1}=A_{t+1}y^*_{t/t-1}+(Q_{t+1}-A_{t+1})y^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}N_{t+1,i}x^*_{i/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}=Q_{t+1}y^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}N_{t+1,i}x^*_{i/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}$$

Sustituyendo:

$$y_t=\tilde{B}_{1t}(Q_{t+1}y^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}N_{t+1,i}x^*_{i/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1})+A_ty_{t-1}+(\tilde{A}_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

$$\Rightarrow\ y^*_{t/t-1}=\tilde{B}_{1t}(Q_{t+1}y^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}N_{t+1,i}x^*_{i/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1})+\tilde{A}_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}$$

$$\Rightarrow y^*_{t/t-1}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\Big[\tilde{A}_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+\sum_{i=t+1}^{T}\tilde{B}_{1t}N_{t+1,i}x^*_{i/t-1}+$$

$$+\tilde{C}_tx^*_{t/t-1}+\sum_{i=t+1}^{T}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}+\tilde{b}^*_{t/t-1}\Big]$$

$$\Rightarrow\ y_t=y^*_{t/t-1}+A_ty_{t-1}-A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+\eta_t=$$

$$=A_ty_{t-1}+(Q_t-A_t)E\ (y_{t-1}|I_{t-1})+\sum_{i=t}^{T}N_{t,i}x^*_{i/t-1}+\sum_{i=t}^{T}M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}+$$

$$+\eta_t$$

en donde:

$$\begin{cases}\begin{cases}Q_t=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{A}_t\\ N_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{C}_t\\ N_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}N_{t+1,i} & ,\quad i=t+1,\dots,T\end{cases}\\ \begin{cases}M_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\\ M_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}Q_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i} & ,\quad (i=t+1,\dots,T)\end{cases}\end{cases}$$

con lo que la proposición queda demostrada.

<u>COROLARIO 1</u>:

En el caso de información completa, sabemos que los $y_k,y_{k-1},\dots,y_o$ pertenecen a I_k

$\Rightarrow$ $E\ (y_{t-1}|I_{t-1})=y_{t-1}$, con lo cual nos queda

$$y_t=Q_ty_{t-1}+\sum_{i=t}^{T}N_{t,i}x^*_{i/t-1}+\sum_{i=t}^{T}M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}+\eta_t$$

COROLARIO 2:

Si los vectores $\{b_t\}$ son determinísticos la expresión se simplifica, ya que, en tal caso $\tilde{b}^*_{i/t-1}=\tilde{b}_i=(I-B_i)^{-1}b_i$, $\forall t=1,2,\ldots,T,\ \forall i=t-1,\ldots,T$.

COROLARIO 3:

Si en el modelo no aparecen variables de control; o sea si $C_t=0$ queda:

$$y_t=A_t y_{t-1}+(Q_t-A_t)E\,(y_{t-1}|I_{t-1})\;+\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}+\eta_t$$

que, lógicamente coincide con la proposición III.4.1

NOTA: Utilizando la misma notación que en el apartado 4, podemos poner:

$$q_{t-1}=\sum_{i=t}^{T} M_{t,i}\tilde{b}^*_{i/t-1}$$

Por tanto, el sistema (6.1) se puede expresar:

$$(6.3)\quad y_t=A_t y_{t-1}+(Q_t-A_t)E(y_{t-1}|I_{t-1})+q_{t-1}+\sum_{i=t}^{T} N_{t,i}x^*_{i/t-1}+\eta_t$$

Suponemos que y_o, η_1, $\eta_2,\ldots,\eta_T,v_o,v_1,\ldots,v_T$ son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados. Sea $E\,\eta_t=0$; $E\,\eta_t\,\eta_t'=R_t$.

TEOREMA III.6.1: (Generalización del filtro de Kalman para el modelo que estamos considerando).

Partimos del problema III.6.1. Suponemos, -- además, que $\{u_t\}$, $\{v_t\}$ son Gaussianos y que los vectores b_t son determinísticos o bien son estocásticos de la forma

$b_t = \sum_{i=1}^{p} R_i b_{t-i} + \varepsilon_t$ en donde $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso estocástico Gaussiano, de media cero, serialmente incorrelado, independiente de $\{u_t\}$, $\{v_t\}$, y_o. Además suponemos que las variables de control x_t son de la forma $x_t = \alpha_t + \mathcal{L}(I_{t-1})$, en donde α_t es un vector constante y $\mathcal{L}(I_{t-1})$ es el subespacio vectorial generado por I_{t-1}.

En estas condiciones se obtienen las siguientes ecuaciones recurrentes:

$$\hat{y}_{t/t} = (I - D_t M_t)(Q_t \hat{y}_{t-1/t-1} + q_{t-1} + \sum_{i=t}^{T} N_{t,i} x^*_{i/t-1}) + D_t z_t$$

$$\text{CON } \hat{y}_{o/-1} = m \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_{o/o} = (I - D_o M_o) m + D_o z_o$$

siendo

$$D_t = \Sigma_{t/t-1} M_t' (M_t \Sigma_{t/t-1} + V_t)^{-1}$$

$$\Sigma_{t/t-1} = A_t \Sigma_{t-1/t-1} A_t' + R_t$$

$$\Sigma_{t/t} = \Sigma_{t/t-1} - \Sigma_{t/t-1} M_t' (M_t \Sigma_{t/t-1} M_t' + V_t)^{-1} M_t \Sigma_{t/t-1}$$

$$\text{CON } \Sigma_{o/-1} = S$$

<u>**DEMOSTRACION:**</u>

Partimos del modelo en la formadada por la expresión (6.3) y del sistema de observación.

$$y_t = A_t y_{t-1} + (Q_t - A_t) E(y_{t-1} | I_{t-1}) + q_{t-1} + \sum_{i=t}^{T} N_{t,i} x^*_{i/t-1} + \eta_t$$

$$z_t = M_t y_t + v_t$$

Por las condiciones que hemos impuesto:

$$E(y_{t-1} | I_{t-1}) = \hat{y}_{t-1/t-1} \quad \text{y} \quad x^*_{i/t-1} = \hat{x}_{i/t-1}, \quad \forall i = t, t+1, \ldots, T,$$

$$\forall t = 1, 2, \ldots, T$$

luego el sistema se puede expresar

$$y_t=A_t y_{t-1}+(Q_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+q_{t-1}+\sum_{i=t}^{T} N_{t,i}\hat{x}_{i/t-1}+n_t$$

Aplicando el corolario 3 de la proposición III.3.3, obtenemos:

$$\hat{y}_{t/t-1}=A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+(Q_t-A_t)\hat{y}_{t-1/t-1}+q_{t-1}+\sum_{i=t}^{T} N_{t,i}\hat{x}_{i/t-1}=$$

$$=Q_t\hat{y}_{t-1/t-1}+q_{t-1}+\sum_{i=t}^{T} N_{t,i}\hat{x}_{i/t-1}$$

Pero $y_t-\hat{y}_{t/t-1}=A_t(y_{t-1}-\hat{y}_{t-1/t-1})+n_t$ (como en los teoremas III.3.1 y III.4.1).

El resto de la demostración es idéntica a la de los teoremas III.3.1 y III.4.1.

NOTA:

Vemos cómo, en este caso, la estimación del estado del sistema en t depende de las expectativas que en el período t-1 se tienen del valor que tomarán las variables de control en todos los períodos futuros: $x^*_{t/t-1}$, $x^*_{t+1/t-1}, \ldots,$ $x^*_{T/t-1}$. Trataremos de llegar a resultados más concretos, analizando dos casos particulares. a) Política en bucle abierto $(x_1, x_2,\ldots,x_T)$ conocida de antemano. b) Política en bucle cerrado de la forma $x_t=\bar{F}_t E(y_{t-1}|I_{t-1})+\bar{f}_t$, suponiendo que $\{\bar{F}_t\}$ y $\{\bar{f}_t\}$, para t=1,2,....,T son tambien conocidos de antemano.

COROLARIO 1:

Supongamos que se sigue una política en bucle abierto $(x_1,x_2,\ldots,x_T)$, conocida de antemano. En tal caso $x^*_{i/t-1}=x_i$, $\forall i=t,t+1,\ldots,T$

Queda, por tanto:

$$\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_t(I_t)=(I-D_tM_t)(Q_t\hat{y}_{t-1/t-1}+q_{t-1}+\sum_{i=t}^{T} N_{t,i}x_i)+D_tz_t$$

siendo D_t, $\Sigma_{t/t-1}$, $\Sigma_{t/t}$ iguales a las expresiones que aparecen en el enunciado del teorema.

Tambien $\hat{y}_{o/-1}=m$; $\Sigma_{o/-1}=S$

COROLARIO 2:

Consideremos la política en bucle cerrado -- $x_t=\bar{F}_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+f_t$, suponiendo que $\{F_t\}$ y $\{f_t\}$ son conocidos desde el principio $\forall t=1,2,\dots,T$.

Entonces el problema se reduce al tipo estudiado en el apartado 4.

DEMOSTRACION:

Partimos del sistema (6.1)

$$y_t=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+C_tx_t+b_t+u_t \quad \text{para } t=1,2,\dots,T$$

Sustituyendo x_t por su valor, queda:

$$y_t=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1,t-1}+A_ty_{t-1}+C_t\left[\bar{F}_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+\bar{f}_t\right]+b_t+u_t=$$

$$=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+C_t\bar{F}_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+b_t+C_t\bar{f}_t+u_t$$

$$\Rightarrow y^*_{t/t-1}=B_ty^*_{t/t-1}+B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+C_t\bar{F}_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+$$

$$+b^*_{t/t-1}+C_t\bar{f}_t$$

$$\Rightarrow y^*_{t/t-1}=(I-B_t)^{-1}\left[B_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+C_t\bar{F}_tE(y_{t-1}|I_{t-1})+\right.$$

$$\left.+b^*_{t/t-1}+C_t\bar{f}_t\right]$$

$$\Rightarrow y_t = y^*_{t/t-1} + A_t y_{t-1} - A_t E(y_{t-1} | I_{t-1}) + (b_t - b^*_{t/t-1}) + u_t =$$

$$= \tilde{B}_{1t} y^*_{t+1/t-1} + A_t y_{t-1} + (\tilde{\tilde{A}}_t - A_t) E(y_{t-1} | I_{t-1}) + \tilde{\tilde{b}}^*_{t/t-1} + \eta_t$$

en donde

$$\begin{cases} \tilde{B}_{1t} = (I - B_t)^{-1} B_{1t} \\ \tilde{\tilde{A}}_t = (I - B_t)^{-1} (A_t + C_t \bar{F}_t) \\ \tilde{\tilde{b}}^*_{t/t-1} = (I - B_t)^{-1} (b^*_{t/t-1} + C_t \bar{f}_t) \\ \eta_t = C_t (x_t - x^*_{t/t-1}) + (b_t - b^*_{t/t-1}) + u_t = (b_t - b^*_{t/t-1}) + u_t \end{cases}$$

por lo que el problema se reduce al tipo ya estudiado en el - apartado 4.

7.- ESTIMACION Y CONTROL. MODELOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES DE VARIABLES FUTURAS.

Consideremos el problema III.2.1

Al analizar el problema de control para este tipo de modelos, en el teorema III.2.2, obteníamos que: $\hat{x}_t = F_t E_{t-1}(y_{t-1}) + f_t$, en donde F_t, f_t coincidían con las expresiones obtenidas en el caso de información completa, problema que teniamos ya resuelto. Tras estudiar el problema de estimación en la sección anterior, en donde veíamos como calcular las expresiones $E_{t-1}(y_{t-1})$ en determinadas condiciones, volvemos otra vez al problema de control.

Sabemos que en el caso en que todos los ruidos son Gaussianos $E_{t-1}(y_{t-1}) = \hat{y}_{t-1/t-1}$, que podemos calcular recursivamente, utilizando el filtro de Kalman. En el caso standard, sin expectativas, estos valores los calculábamos independientemen te de cual fuera el control óptimo. En el caso que nos ocupa no ocurre así. Veamos, a la vista de los resultados de los apartados anteriores como habría que ordenar los cálculos para resolver el problema que tenemos planteado.

1º) Calculamos las matrices $\{F_t\}$ y los vectores $\{f_t,\}$ para $t=1,2,\ldots,T$

2º) Sabiendo que $\hat{x}_t=F_tE_{t-1}(y_{t-1})+f_t$, utilizamos el filtro de Kalman de acuerdo con el corolario 2 del teorema III. 6.1. En el caso de ruidos Gaussianos, obtenemos los valores $\hat{y}_{t-1/t-1}=E_{t-1}(y_{t-1})$, que llevando a $\hat{x}_t=F_tE_{t-1}(y_{t-1})+f_t$ nos dan los controles óptimos que nos resuelven el problema. Vemos, por tanto, que, de manera diferente al caso en que no hay expectativas, en el problema que nos ocupa, necesitamos conocer los F_t,f_t para resolver el problema de estimación (cálculo de los $\hat{y}_{t-1/t-1}$) (en el caso de ruidos Gaussianos $\hat{y}_{t-1/t-1}=E_{t-1}(y_{t-1})$), que a su vez necesitamos para calcular el control óptimo:

$$\hat{x}_t=F_tE_{t-1}(y_{t-1})+f_t$$

Vamos a especificar con mayor detalle los pasos a seguir:

-Suponemos que todos los ruidos son Gaussianos. Sabemos que $\hat{x}_t=F_t\hat{y}_{t-1/t-1}+f_t=F_tE_{t-1}(y_{t-1})+f_t$

a) Calculamos las matrices F_t

Calculamos los vectores $f_t=f_t(b^*_{t/t-1},\ldots,b^*_{T/t-1})$ para $t=1,2,\ldots,T$

tal como hemos señalado al estudiar el problema de control en el caso de información completa para modelos con expectativas racionales de variables futuras.

Sabemos que las matrices F_t, y las funciones $f_t(,\ldots,)$ son conocidas al principio del período 1.

b) Sabiendo que $\hat{x}_t=F_tE_{t-1}(y_{t-1})+f_t$, el sistema (1) lo expresamos en la forma.

$$y_t=\tilde{B}_{1t}y^*_{t+1/t-1}+A_ty_{t-1}+(\tilde{\tilde{A}}_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+\tilde{\tilde{b}}^*_{t/t-1}+\eta_t$$

$$\text{en donde}\begin{cases}\tilde{\tilde{A}}_t=(I-B_t)^{-1}(A_t+C_tF_t)\\ \tilde{\tilde{b}}^*_{t/t-1}=(I-B_t)^{-1}(b^*_{t/t-1}+C_tf_t)\end{cases}$$

Por tanto, las matrices $\tilde{\tilde{A}}_t$, $t=1,2,\ldots,T$ las podemos calcular de manera que sean todas conocidas al principio del período 1. Los vectores $\tilde{\tilde{b}}^*_{t/t-1}$ serán conocidos al final del período t-1, para cada $t=1,2,\ldots,T$.

c) Expresamos el sistema (1) en la forma

$$y_t=A_ty_{t-1}+(\tilde{\tilde{Q}}_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+\sum_{i=t}^{T}\tilde{\tilde{M}}_{t,i}\tilde{\tilde{b}}^*_{i/t-1}+\eta_t$$

$$\text{en donde}\begin{cases}\tilde{\tilde{Q}}_t=(I-\tilde{B}_{1t}\tilde{\tilde{Q}}_{t+1})^{-1}\tilde{\tilde{A}}_t \quad , \text{ con } \tilde{\tilde{Q}}_{T+1}=\Gamma\\ \tilde{\tilde{M}}_{t,t}=(I-\tilde{B}_{1t}\tilde{\tilde{Q}}_{t+1})^{-1}\\ \tilde{\tilde{M}}_{t,i}=(I-\tilde{B}_{1t}\tilde{\tilde{Q}}_{t+1})^{-1}\tilde{B}_{1t}M_{t+1,i} \quad , \text{ para } i=t+1,\ldots,T\end{cases}$$

Por tanto, $\tilde{\tilde{Q}}_t$, $\tilde{\tilde{M}}_{t,t}$, $\tilde{\tilde{M}}_{t,i}$, $\forall t=1,2,\ldots,T$, $\forall i=t+1,\ldots,T$ son conocidos al principio del período 1.

Llamamos $\tilde{\tilde{q}}_{t-1}=\sum_{i=t}^{T}\tilde{\tilde{M}}_{t,i}\tilde{\tilde{b}}^*_{i/t-1}$, que será conocido al final del período t-1. Por tanto, el sistema se puede expresar,

$$y_t=A_ty_{t-1}+(\tilde{\tilde{Q}}_t-A_t)E_{t-1}(y_{t-1})+\tilde{\tilde{q}}_{t-1}+\eta_{t-1}$$

d) Utilizamos el teorema que generaliza el filtro de Kalman, que aparece en el apartado 4, por lo que obtenemos recursivamente los valores de $\hat{y}_{t-1/t-1}$.

e) $\hat{x}_t = F_t \hat{y}_{t-1/t-1} + f_t$, conocido al final del período t-1, con lo que el problema queda resuelto.

C A P I T U L O IV

MODELOS CON EXPECTATIVAS ACTUALES TOMADAS EN EL PASADO.

1.- EL PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO. CASO DE INFORMACION COMPLETA.

PROBLEMA IV.1.1:

$$\text{MIN } E_oW=E_o \sum_{t=1}^{T} (y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t), \text{ siendo } K_t \text{ matriz}$$

simétrica definida positiva o semidefinida positiva

$$(1.1) \quad y_t=A_ty_{t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it}y^*_{t/t-i}+C_tx_t+\eta_t$$

(para $t=p,p+1,\ldots,T$)

$y_o,y_1,\ldots\ldots,y_{p-1}$, dados

los vectores aleatorios $\{\eta_t\}$ se supone que son incorrelados con $E\eta_t=o$ $\forall t$

$y^*_{t/k}=E(y_t/I_k)$, con $I_k=\{y_k,y_{k-1},\ldots,y_o,$

$x_k,x_{k-1},\ldots\ldots,\eta_k,\eta_{k-1},\ldots\}$

Este problema aparece planteado, aunque no resuelto, para $p>1$ en la literatura económica. Así lo señalan, indicando que harían falta nuevos métodos que lo resolvieran, los trabajos de Aoki-Canzoneri (1979) y de Visco (1981). Por otra parte, diferente tratamiento de modelos de tipo (1.1), aunque sin plantear el problema de control, aparece en los trabajos de Broze-Szafarz (1984), Visco (1984) y Schönfeld (1984).

Nosotros vamos a resolver el problema para el caso en que p=2, inspirándonos en el tratamiento que utiliza Visco (1981) para sistemas del tipo (1.1) y tomando la idea de Chow (1980) que ya hemos utilizado en modelos con expectativas futuras.

Veremos en primer lugar una proposición previa, que utilizaremos posteriormente en el teorema que nos va a -- dar la solución al problema que nos ocupa.

PROPOSICION IV.1.1:

Consideramos el siguiente sistema:

$$y_t = R_t y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} R_{it} y^*_{t/t-i} + r_t + \eta_t \quad , \text{ para } t=p,p+1,\dots,T$$

con $y_o, y_1, \dots, y_{p-1}$, dados

r_t es un vector de constantes para cada t $\{\eta_t\}$ son vectores aleatorios incorrelados, de media cero.

Entonces, el sistema se puede expresar:

$$y_t = D_{pt} R_t y_{t-1} + D_{pt} r_t + \eta_t + \sum_{i=1}^{p-1} R_t^i P_t^i \ \eta_{t-i}$$

en donde:

$$\begin{cases} D_{kt} = (I - R_{1t} - R_{2t} - \dots - R_{kt})^{-1}, & \text{para } k=1,2,\dots,p \\ R_t^i = -D_{it} \sum_{j=i+1}^{p} R_{jt} D_{pt} & \\ P_t^i = R_t (D_{i-1,t-1} R_{t-1} D_{i-2,t-2} R_{t-2}, \dots, D_{1,t-i+1} R_{t-i+1}) & \end{cases}$$

Además:

$$y^*_{t/t-i} = D_{pt} R_t y_{t-1} + D_{pt} r_t + \sum_{K=1}^{p-1} M_t^k \ \eta_{t-k} \quad , \ \forall i=1,2,\dots,p$$

$$\text{en donde} \qquad M_t^k = \begin{cases} -D_{pt} P_t^k & , \text{ para } k=1,2,\dots,i-1 \\ R_t^k \ P_t^k & \text{ para } k=i,\dots,p-1 \end{cases}$$

DEMOSTRACION:

Definimos $S_{kt}=\sum_{i=1}^{K} R_{it}$; $D_{kt}=(I-S_{kt})^{-1}$ para $k=1,2,\ldots,p$

Es inmediato comprobar que $I+S_{kt}D_{kt}=I+D_{kt}S_{kt}=D_{kt}$

A partir del sistema dado, tenemos

$$y^*_{t/t-p}=R_t y^*_{t-1/t-p}+S_{pt}y^*_{t/t-p}+r_t \Rightarrow y^*_{t/t-p}=D_{pt}R_t y^*_{t-1/t-p}+D_{pt}r_t$$

Para $j < p$:

$$y^*_{t/t-j}=R_t y^*_{t-1/t-j}+S_{jt}y^*_{t/t-j}+\sum_{i=j+1}^{p} R_{it}y^*_{t/t-i}+r_t$$

Definimos ahora: $\chi(t,j)=y^*_{t/t-j}-y^*_{t/t-j-1}$. Asi tenemos $\chi(t,0)=y_t-y^*_{t/t-1}=\eta_t$

$$\chi(t,j)=(R_t y^*_{t-1/t-j}+S_{jt}y^*_{t/t-j}+\sum_{i=j+1}^{p} R_{it}y^*_{t/t-i}+r_t)-$$

$$-(R_t y^*_{t-1/t-j-1}+S_{j+1,t}y^*_{t/t-j-1}+\sum_{i=j+2}^{p} R_{it}y^*_{t/t-i}+r_t)=$$

$$=R_t\chi(t-1,j-1)+S_{jt}\chi(t,j) \Rightarrow \chi(t,j)=D_{jt}R_t\chi(t-1,j-1)$$

Por otra parte, podemos poner:

$$y_t=(y_t-y^*_{t/t-1})+(y^*_{t/t-1}-y^*_{t/t-2})+,\ldots+(y^*_{t/t-p+1}-y^*_{t/t-p})+y^*_{t/t-p}=$$

$$=\sum_{i=0}^{p-1}\chi(t,i)+y^*_{t/t-p}$$

$$y_{t-1}=(y_{t-1}-y^*_{t-1/t-2})+(y^*_{t-1/t-2}-y^*_{t-1/t-3})+\ldots+(y^*_{t-1/t-p+1}-$$

$$-y^*_{t-1/t-p})+y^*_{t-1/t-p}=\sum_{i=1}^{p-1}\chi(t-1,i-1)+y^*_{t-1/t-p}$$

$$\Rightarrow y_t=\chi(t,0)+\sum_{i=1}^{p-1}\chi(t,i)+D_{pt}R_t y^*_{t-1/t-p}+D_{pt}r_t=$$

$$=\eta_t+\sum_{i=1}^{P-1}\left[D_{it}R_t\chi(t-1,i-1)\right]+D_{pt}R_t\left[y_{t-1}-\sum_{i=1}^{P-1}\chi(t-1,i-1)\right]+$$

$$+D_{pt}r_t=D_{pt}R_t y_{t-1}+D_{pt}r_t+\eta_t+\sum_{i=1}^{P-1}(D_{it}-D_{pt})R_t\chi(t-1,i-1)$$

Pero:

$$D_{it}-D_{pt}=I+S_{it}D_{it}-I-S_{pt}D_{pt}=S_{it}D_{it}-S_{pt}D_{pt}=S_{it}D_{it}-(S_{it}+\sum_{j=i+1}^{P}R_{jt})D_{pt}=$$

$$=S_{it}(D_{it}-D_{pt})-\sum_{j=i+1}^{P}R_{jt}D_{pt}\quad\Rightarrow\quad D_{it}-D_{pt}=-D_{it}\sum_{j=i+1}^{P}R_{jt}D_{pt}=R_t^i$$

Por otra parte:

$$R_t\,\chi(t-1,i-1)=R_t\left[D_{i-1,t-1}R_{t-1}\chi(t-2,i-2)\right]=$$

$$=R_t\left[D_{i-1,t-1}R_{t-1}D_{i-2,t-2}R_{t-2}\chi(t-3,\ i-3)\right]=$$

$$=R_t\left[D_{i-1,t-1}R_{t-1}D_{i-2,t-2}R_{t-2},\dots,D_{1,t-i+1}R_{t-i+1}\right.$$

$$\left.\chi(t-i,0)\right]=P_t^i\eta_{t-i}$$

Queda, por tanto $y_t=D_{pt}R_t y_{t-1}+D_{pt}r_t+\eta_t+\sum_{i=1}^{P-1}R_t^iP_t^i\eta_{t-i}$

A partir de la expresión obtenida, calculamos:

$$y^*_{t/t-i}=D_{pt}R_t y^*_{t-1/t-i}+D_{pt}r_t+\sum_{k=1}^{P-1}R_t^kP_t^k\eta_{t-k}$$

Podemos poner:

$$y_{t-1}=(y_{t-1}-y^*_{t-1/t-2})+(y^*_{t-1/t-2}-y^*_{t-1/t-3})+\dots+(y^*_{t-1/t-i+1}-$$

$$-y^*_{t-1/t-i})+y^*_{t-1/t-i}=\sum_{k=1}^{i-1}\chi(t-1,k-1)+y^*_{t-1/t-i}\Rightarrow y^*_{t-1/t-i}=$$

$$=y_{t-1}-\sum_{k=1}^{i-1}\chi(t-1,k-1)$$

Por tanto:

$$y^{*}_{t/t-i}=D_{pt}R_t\left[y_{t-1}-\sum_{k=1}^{i-1} \chi(t-1,k-1)\right] +D_{pt}r_t+\sum_{k=i}^{p-1} R_t^k P_t^k \eta_{t-k}=$$

$$=D_{pt}R_t y_{t-1}+D_{pt}r_t \qquad -D_{pt}\sum_{k=1}^{i-1} R_t \chi(t-1,k-1)+\sum_{k=1}^{p-1} R_t^k P_t^k \eta_{t-k}=$$

$$=D_{pt}R_t y_{t-1}+D_{pt}r_t-D_{pt}\sum_{k=1}^{i-1} P_t^k \eta_{t-k}+\sum_{k=i}^{p-1} R_t^k P_t^k \eta_{t-k} =$$

$$= D_{pt}R_t y_{t-1}+D_{pt}r_t+\sum_{k=1}^{p-1} M_t^k \eta_{t-k}$$

con lo que la proposición queda demostrada.

<u>**COROLARIO**</u> (Caso p=2)

Consideramos el siguiente sistema:

$$y_t=R_t y_{t-1}+\sum_{i=1}^{2} R_{it} y^{*}_{t/t-i}+r_t+\eta_t \quad , \text{ para } t=2,3,\ldots,T$$

con y_o, y_1, dados.

r_t es un vector de constantes, para cada t.

$\{\eta_t\}$ son vectores aleatorios incorrelados, de media cero

Entonces el sistema se puede expresar:

$$y_t=P_t y_{t-1}+s_t+\eta_t+T_t\eta_{t-1}$$

en donde:

$$P_t=(I-R_{1t}-R_{2t})^{-1}R_t$$

$$s_t=(I-R_{1t}-R_{2t})^{-1}r_t$$

$$T_t=-(I-R_{1t})^{-1}R_{2t}(I-R_{1t}-R_{2t})^{-1}R_t=$$

$$=(I-R_{1t})^{-1}R_t-(I-R_{1t}-R_{2t})^{-1}R_t$$

Además: $y^*_{t/t-1}=P_t y_{t-1}+s_t+T_t\,\eta_{t-1}$

$y^*_{t/t-2}=P_t y_{t-1}+s_t-P_t\,\eta_{t-1}$

El problema anterior particularizado para p=2 quedará en la siguiente forma:

PROBLEMA IV.1.2:

MIN $E_o W=E_o \sum_{t=1}^{T} (y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t)$, siendo K_t matriz simétrica definida positiva o demidefinida positiva.

(1.2) $y_t= A_t y_{t-1}+B_{1t}y^*_{t/t-1}+B_{2t}y^*_{t/t-2}+C_t x_t+\eta_t$

$(t=2,3,\ldots,T)$

y_o,y_1, dados

Los vectores aleatorios $\{\eta_t\}$ se supone que son incorrelados con E $\eta_t=0$, $\forall t$

$y^*_{t/k}=E(y_t|I_k)$, con $I_k=\{y_k,y_{k-1},\ldots,y_o,$

$x_k,x_{k-1},\ldots,\eta_k,\eta_{k-1},\ldots\}$

Vamos a resolver el problema IV.1.2. Trataremos, en primera instancia, a los vectores $y^*_{t/t-i}$ como si fueran vectores de variables conocidas. Utilizaremos las ecuaciones de Bellman:

$$\hat{V}_t(y_{t-1})=\underset{x_t}{\text{MIN}}\ E_{t-1}\ \{(y_t-a_t)'K_t(y_t-a_t)+\hat{V}_{t+1}(y_t)\},$$

con $\hat{V}_{T+1}(y_T)=0$

Ello nos permitirá encontrar los controles óptimos en función de los vectores $y^*_{t/t-i}$. Sustituyendo estos controles por los valores obtenidos podremos conocer la evolución del sistema, en función de los valores $y^*_{t/t-i}$. Pero, por el corolario de la proposición anterior podremos calcular los valores de $y^*_{t/t-i}$ que sustituiremos en la expresión de los controles óptimos, quedando éstos en función de cantidades observables con lo cual -- tendremos resuelto el problema.

TEOREMA IV.1.1:

Para el problema IV.1.2 y, tratando a los vectores $y^*_{t/t-i}$ como conocidos, utilizamos la programación dinámica, obteniendo:

$$\hat{x}_t=G_t y_{t-1}+\sum_{i=1}^{2} G_{it} y^*_{t/t-i}+g_t$$

con lo cual, la evolución del sistema se puede expresar como:

$$y_t=R_t y_{t-1}+\sum_{i=1}^{2} R_{it} y^*_{t/t-i}+r_t+\eta_t$$

en donde:

$$\begin{cases} G_t=-(C_t'H_tC_t)^{-1}C_t'H_tA_t \\ G_{it}=-(C_t'H_tC_t)^{-1}C_t'H_tB_{it} \qquad (i=1,2) \\ g_t=(C_t'H_tC_t)^{-1}C_t'\bar{h}_t \\ \\ R_t=A_t+C_tG_t \\ R_{it}=B_{it}+C_tG_{it} \qquad (i=1,2) \\ r_t=C_tg_t \end{cases}$$

P_t, s_t, T_t: toman los valores que se indican en el corolario de la proposición IV.1.1

$$\begin{cases} H_t = K_t + P'_{t+1} H_{t+1} P_{t+1}, \quad \text{con } H_T = K_T \\ \bar{h}_t = K_t a_t + P'_{t+1}(\bar{h}_{t+1} - H_{t+1} s_{t+1}), \text{ con } \bar{h}_T = K_T a_T \\ c_t = a'_t K_t a_t + (s_{t+1} + T_{t+1}\, \eta_t)' H_{t+1} (s_{t+1} + T_{t+1}\, \eta_t) - \\ \qquad -2(s_{t+1} + T_{t+1} \eta_t)' \bar{h}_{t+1} + E_t(\eta'_{t+1} H_{t+1}\, \eta_{t+1}) + \\ \quad +2E_t(\eta'_{t+1} \phi_{t+1}\, \eta_{t+1}) + E_t(c_{t+1}), \quad \text{con } c_T = a'_T K_T a_T \\ \phi_t = P'_{t+1} H_{t+1} T_{t+1}, \quad \text{con } \phi_T = 0 \end{cases}$$

Por el corolario de la proposición anterior, podemos calcular los valores de $y^*_{t/t-1}$, $y^*_{t/t-2}$, que llevaremos a la expresión de $\hat{x}_t$, obteniendo finalmente.

$$\boxed{\hat{x}_t = F_t y_{t-1} + f_t + N_t\, \eta_{t-1},} \quad \text{en donde} \begin{cases} F_t = G_t + G_{1t} P_t + G_{2,t} P_t \\ f_t = g_t + G_{1,t} s_t + G_{2,t} s_t \\ N_t = G_{1,t} T_t - G_{2,t} P_t \end{cases}$$

Además:

$$\hat{V}_t(y_{t-1}) = y'_{t-1} P'_t H_t P_t y_{t-1} - 2y'_{t-1} P'_t (\bar{h}_t - H_t s_t - H_t T_t\, \eta_{t-1}) +$$

$$+(s_t + T_t\, \eta_{t-1})' H_t (s_t + T_t\, \eta_{t-1}) - 2(s_t + T_t\, \eta_{t-1})' \bar{h}_t + E_{t-1}(\eta'_t H_t \eta_t) +$$

$$+2E_{t-1}(\eta'_t \phi_t\, \eta_t) + E_{t-1}(c_t)$$

DEMOSTRACION:

Como ya hemos utilizado y justificado en capítulos anteriores, vamos a identificar: $x_t = x^*_{t/t-1}$, $\forall t$.

Vamos a demostrar el teorema por inducción - sobre t

PARA T

$$V_T(y_{T-1})=E_{T-1}\{(y_T-a_T)'K_T(y_T-a_T)\}=E_{T-1}(y_T'K_Ty_T-2y_T'K_Ta_T+$$

$$+a_T'K_Ta_T) = E_{T-1}(y_T'H_Ty_T-2y_T'h_T+c_T)$$ en donde $H_T=K_T$; $h_T=K_Ta_T$;

$$c_T=a_T'K_Ta_T$$

Podemos, por tanto, poner:

$$V_T(y_{T-1})=E_{T-1}\{(A_Ty_{T-1}+\sum_{i=1}^{2}B_{iT}y^*_{T/T-i}+C_Tx^*_{T/T-1}+\eta_T)'H_T$$

$$(A_Ty_{T-1}+\sum_{i=1}^{2}B_{iT}y^*_{T/T-i}+C_Tx^*_{T/T-1}+\eta_T)-2(A_Ty_{T-1}+\sum_{i=1}^{2}B_{iT}y^*_{T/T-i}+$$

$$+C_Tx^*_{T/T-1}+\eta_T)'h_T+c_T\}=(A_Ty_{T-1}+\sum_{i=1}^{2}B_{iT}y^*_{T/T-i}+C_Tx^*_{T/T-1})'H_T(A_Ty_{T-1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}B_{iT}y^*_{T/T-i}+C_Tx^*_{T/T-1})+E_{T-1}(\eta_T'H_T\eta_T)-2(A_Ty_{T-1}+\sum_{i=1}^{2}B_{iT}y^*_{T/T-i}+$$

$$+C_Tx^*_{T/T-1})'h_T+c_T$$

Condición de mínimo:

$$\frac{\partial V_T}{\partial x^*_{T/T-1}}=0=2C_T'H_T(A_Ty_{T-1}+\sum_{i=1}^{2}B_{iT}y^*_{T/T-i}+C_Tx^*_{T/T-1})-2C_T'h_T$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}_T=\hat{x}^*_{T/T-1}=G_Ty_{T-1}+\sum_{i=1}^{2}G_{iT}y^*_{T/T-i}+g_T$$

$$\text{en donde}\quad\begin{cases} G_T=-(C_T'H_TC_T)^{-1}C_T'H_TA_T \\ G_{iT}=-(C_T'H_TC_T)^{-1}C_T'H_TB_{iT} \qquad (i=1,2) \\ g_T=(C_T'H_TC_T)^{-1}C_T'h_T \end{cases}$$

Entonces, el sistema (1.2) se puede expresar:

$$y_T=R_Ty_{T-1}+\sum_{i=1}^{2} R_{iT}y^*_{T/T-i}+r_T+\eta_T \ , \quad \text{en donde} \begin{cases} R_T=A_T+C_TG_T \\ R_{iT}=B_{iT}+C_TG_{iT} \quad (i=1,2) \\ r_T=C_Tg_T \end{cases}$$

Por el corolario de la proposición anterior, podemos poner:

$$\text{Además:} \quad \begin{cases} y_T=P_Ty_{T-1}+s_T+\eta_T+T_T\eta_{T-1} \\ y^*_{T/T-1}=P_Ty_{T-1}+s_T+T_T\eta_{T-1} \\ y^*_{T/T-2}=P_Ty_{T-1}+s_T-P_T\eta_{T-1} \end{cases}$$

Por tanto: $\hat{x}_T=G_Ty_{T-1}+G_{1T}(P_Ty_{T-1}+s_T+\eta_T+T_T\eta_{T-1})+G_{2T}(P_Ty_{T-1}+$

$+s_T-P_T\eta_{T-1})+g_T=(G_T+G_{1T}P_T+G_{2T}P_T)y_{T-1}+(g_T+G_{1T}s_T+G_{2T}s_T)+$

$+(G_{1T}T_T-G_{2T}P_T)\eta_{T-1}=$

$=F_Ty_{T-1}+f_T+N_T\eta_{T-1}$,

$$\text{en donde} \quad \begin{cases} F_T=G_T+G_{1T}P_T+G_{2T}P_T \\ f_T=g_T+G_{1T}s_T+G_{2T}s_T \\ N_T=G_{1T}T_T-G_{2T}P_T \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \hat{V}_T(y_{T-1})= (P_Ty_{T-1}+s_T+T_T\eta_{T-1})'H_T(P_Ty_{T-1}+s_T+T_T\eta_{T-1})-$

$-2(P_Ty_{T-1}+s_T+T_T\eta_{T-1})'h_T+E_{T-1}(\eta'_TH_T\eta_T)+c_T=y'_{T-1}P'_TH_TP_Ty_{T-1}+$

$+2y'_{T-1}P'_TH_T(s_T+T_T\eta_{T-1})+(s_T+T_T\eta_{T-1})'H_T(s_T+T_T\eta_{T-1})-2y'_{T-1}P'_Th_T-$

$-2(s_T+T_T\eta_{T-1})'h_T+c_T+E_{T-1}(\eta'_TH_T\eta_T)=y'_{T-1}P'_TH_TP_Ty_{T-1}-2y'_{T-1}P'_T$

$$(\bar{h}_T-H_Ts_T-H_TT_T\,\eta_{T-1})+(s_T+T_T\eta_{T-1})'H_T(s_T+T_T\eta_{T-1})-2(s_T+T_T\eta_{T-1})'\bar{h}_T+$$

$$+E_{T-1}(\eta_T'H_T\,\eta_T)+2E_{T-1}(\eta_T'\emptyset_T\eta_T)+E_{T-1}(c_T)$$

siendo $\bar{h}_T=h_T$

$\emptyset_T=0$

con $c_T=E_{T-1}(c_T)$

Queda demostrado el teorema para T.

SUPONGAMOS QUE EL TEOREMA ES CIERTO PARA t

Vamos a demostrarlo **PARA t-1**

$$V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\{(y_{t-1}-a_{t-1})'K_{t-1}(y_{t-1}-a_{t-1})+\hat{V}_t(y_{t-1})\}=$$

$$=E_{t-2}(y_{t-1}'H_{t-1}y_{t-1}-2y_{t-1}'h_{t-1}+c_{t-1})$$

en donde:

$$\begin{cases} H_{t-1}=K_{t-1}+P_t'H_tP_t \\ h_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+P_t'(\bar{h}_t-H_ts_t-H_tT_t\,\eta_{t-1}) \\ c_{t-1}=a_{t-1}'K_{t-1}a_{t-1}+(s_t+T_t\eta_{t-1})'H_t(s_t+T_t\eta_{t-1})-2(s_t+T_t\eta_{t-1})'\bar{h}_t+ \\ +E_{t-1}(\eta_t'H_t\eta_t)+2E_{t-1}(\eta_t'\emptyset_t\eta_t)+E_{t-1}(c_t) \end{cases}$$

Podemos poner:

$h_{t-1}=\bar{h}_{t-1}-\emptyset_{t-1}\eta_{t-1}$, en donde $\bar{h}_{t-1}=K_{t-1}a_{t-1}+P_t'(\bar{h}_t-H_ts_t)$

$\emptyset_{t-1}=P_t'H_tT_t$

$$\Rightarrow V_{t-1}(y_{t-2})=E_{t-2}\{(A_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}B_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+C_{t-1}x^{*}_{t-1/t-2}+$$

$$+\eta_{t-1})'H_{t-1}(A_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}B_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+C_{t-1}x^{*}_{t-1/t-2}+\eta_{t-1})-$$

$$-2(A_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}B_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+C_{t-1}x^{*}_{t-1/t-2}+\eta_{t-1})'$$

$$(\bar{h}_{t-1}-\emptyset_{t-1}\eta_{t-1})+c_{t-1}\}=(A_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}B_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+C_{t-1}x^{*}_{t-1/t-2})'$$

$$H_{t-1}(A_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}B_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+C_{t-1}x^{*}_{t-1/t-2})+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\eta_{t-1})$$

$$-2(A_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}B_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+C_{t-1}x^{*}_{t-1/t-2})'\bar{h}_{t-1}+$$

$$+2E_{t-2}(\eta'_{t-1}\emptyset_{t-1}\eta_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1})$$

Condición de mínimo:

$$\frac{\partial V_{t-1}}{\partial x^{*}_{t-1/t-2}}=0=2C'_{t-1}H_{t-1}(A_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}B_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+C_{t-1}x^{*}_{t-1/t-2})-$$

$$-2C'_{t-1}\bar{h}_{t-1}$$

Por tanto:

$$\hat{x}_{t-1}=\hat{x}^{*}_{t-1/t-2}=G_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}G_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+g_{t-1}$$

$$\text{en donde}\quad\begin{cases}G_{t-1}=-(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}H_{t-1}A_{t-1}\\ G_{i,t-1}=-(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}H_{t-1}B_{i,t-1}\\ \qquad (i=1,2)\\ g_{t-1}=(C'_{t-1}H_{t-1}C_{t-1})^{-1}C'_{t-1}\bar{h}_{t-1}\end{cases}$$

Entonces:

$$y_{t-1}=R_{t-1}y_{t-2}+\sum_{i=1}^{2}R_{i,t-1}y^{*}_{t-1/t-1-i}+r_{t-1}+\eta_{t-1}$$

en donde: $\begin{cases} R_{t-1}=A_{t-1}+C_{t-1}G_{t-1} \\ R_{i,t-1}=B_{i,t-1}+C_{t-1}G_{i,t-1} \qquad (i=1,2) \\ r_{t-1}=C_{t-1}g_{t-1} \end{cases}$

Por el corolario de la proposición anterior:

$$y_{t-1}=P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}+\eta_{t-1}+T_{t-1}\eta_{t-2}$$

$$y^{*}_{t-1/t-2}=P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}+T_{t-1}\eta_{t-2}$$

$$y^{*}_{t-1/t-3}=P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}-P_{t-1}\eta_{t-2}$$

Por tanto:

$$\hat{x}_{t-1}=G_{t-1}y_{t-2}+G_{1,t-1}(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}+T_{t-1}\eta_{t-2})+G_{2,t-1}(P_{t-1}y_{t-2}+$$

$$+s_{t-1}-P_{t-1}\eta_{t-2})+g_{t-1}=(G_{t-1}+G_{1,t-1}P_{t-1}+G_{2,t-1}P_{t-1})y_{t-2}+$$

$$+(g_{t-1}+G_{1,t-1}s_{t-1}+G_{2,t-1}s_{t-1})+(G_{1,t-1}T_{t-1}-G_{2,t-1}P_{t-1})\eta_{t-2}=$$

$$=F_{t-1}y_{t-2}+f_{t-1}+N_{t-1}\eta_{t-2}$$

en donde: $\begin{cases} F_{t-1}=G_{t-1}+G_{1,t-1}P_{t-1}+G_{2,t-1}P_{t-1} \\ f_{t-1}=g_{t-1}+G_{1,t-1}s_{t-1}+G_{2,t-1}s_{t-1} \\ N_{t-1}=G_{1,t-1}T_{t-1}-G_{2,t-1}P_{t-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \hat{V}_{t-1}(y_{t-2})=(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}+T_{t-1}\eta_{t-2})'H_{t-1}(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}+$$

$$+T_{t-1}\eta_{t-2})+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\eta_{t-1})-2(P_{t-1}y_{t-2}+s_{t-1}+T_{t-1}\eta_{t-2})'\bar{h}_{t-1}+$$

$$+2E_{t-2}(\eta'_{t-1}\emptyset_{t-1}\eta_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1})=$$

$$=y'_{t-2}P'_{t-1}H_{t-1}P_{t-1}y_{t-2}-2y'_{t-2}P'_{t-1}(\bar{h}_{t-1}-H_{t-1}s_{t-1}-H_{t-1}T_{t-1}\eta_{t-2})+$$

$$+(s_{t-1}+T_{t-1}\eta_{t-2})'H_{t-1}(s_{t-1}+T_{t-1}\eta_{t-2})-2(s_{t-1}+T_{t-1}\eta_{t-2})'\bar{h}_{t-1}+$$

$$+E_{t-2}(\eta'_{t-1}H_{t-1}\eta_{t-1})+2E_{t-2}(\eta'_{t-1}\emptyset_{t-1}\eta_{t-1})+E_{t-2}(c_{t-1})$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

COMENTARIOS AL TEOREMA.

1º) El método que resuelve el problema no sirve para $p > 2$.

2º) En la proposición previa y en el teorema hemos supuesto que $(I-R_{1t})^{-1}$ y $(I-R_{1t}-R_{2t})^{-1}$ existen, $\forall t$. En tal caso, la solución del sistema que se obtiene: $y_t=R_t y_{t-1}+\sum_{i=1}^{p} R_{it}y^*_{t/t-i}+r_t+\eta_t$ es única a diferencia de lo que ocurría es modelos con expectativas de variables futuras, en donde, para quedarnos con una única solución añadíamos la condición adicional de que el instante final T, $y^*_{T+1/T-1}=\Gamma y^*_{T/T-1}$. Esta es una propiedad conocida en modelos con expectativas racionales: los sistemas en que aparecen expectativas racionales de variables futuras no tienen solución única en cambio los sistemas con expectativas sólo de variables actuales tomadas en el pasado tienen, en general, solución única (suponiendo no singularidad en algunas matrices).

3º) Al igual que hemos hecho en casos anteriores, vamos a ver como habría que ordenar los cálculos:

PARTIMOS DE: $A_t, B_{1t}, B_{2t}, c_t, a_t, K_t$ conocidos, $\forall t=2,3,\ldots,T$

PARA T

hacer $H_T=K_T$

Calcular $G_T=-(C'_T H_T C_T)^{-1}C'_T H_T A_T$

$G_{1T}=-(C_T'H_TC_T)^{-1}C_T'H_TB_{1T}$

$G_{2T}=-(C_T'H_TC_T)^{-1}C_T'H_TB_{2T}$

Calcular $R_T=A_T+C_TG_T$

$R_{1T}=B_{1T}+C_TG_{1T}$

$R_{2T}=B_{2T}+C_TG_{2T}$

Calcular $P_T=(I-R_{1T}-R_{2T})^{-1}R_T$

$T_T=(I-R_{1T})^{-1}R_T-(I-R_{1T}-R_{2T})^{-1}R_T$

Hacer $\emptyset_T=0$

Calcular $F_T=G_T+G_{1T}P_T+G_{2T}P_T$

$N_T=G_{1T}T_T-G_{2T}P_T$

Hacer $\bar{h}_T=K_Ta_T$

Calcular $g_T=(C_T'H_TC_T)^{-1}C_T'\bar{h}_T$

Calcular $r_T=C_Tg_T$

Calcular $s_T=(I-R_{1T}-R_{2T})^{-1}r_T$

Calcular $f_T=g_T+G_{1T}s_T+G_{2T}s_T$

$\boxed{\text{PARA T-1}}$

Hacer $H_{T-1}=K_{T-1}+P_T'H_TP_T$

$G_{T-1}=-(C_{T-1}'H_{T-1}C_{T-1})^{-1}C_{T-1}'H_{T-1}A_{T-1}$

$G_{1,T-1}=-(C_{T-1}'H_{T-1}C_{T-1})^{-1}C_{T-1}'H_{T-1}B_{1,T-1}$

$$G_{2,T-1}=-(C_T'H_{T-1}C_{T-1})^{-1}C_{T-1}'H_{T-1}B_{2,T-1}$$

$$R_{T-1}=A_{T-1}+C_{T-1}G_{T-1}$$

$$R_{1,T-1}=B_{1,T-1}+C_{T-1}G_{1,T-1}$$

$$R_{2,T-1}=B_{2,T-1}+C_{T-1}G_{2,T-1}$$

$$P_{T-1}=(I-R_{1,T-1}-R_{2,T-1})^{-1}R_{T-1}$$

$$T_{T-1}=(I-R_{1,T-1})^{-1}R_{T-1}-(I-R_{1,T-1}-R_{2,T-1})^{-1}R_{T-1}$$

$$\emptyset_{T-1}=P_T'H_T T_T$$

$$F_{T-1}=G_{T-1}+G_{1,T-1}P_{T-1}+G_{2,T-1}P_{T-1}$$

$$N_{T-1}=G_{1,T-1}T_{T-1}-G_{2,T-1}P_{T-1}$$

Hacer: $\bar{h}_{T-1}=K_{T-1}a_{T-1}+P_T'(\bar{h}_T-H_T s_T)$

$$g_{T-1}=(C_{T-1}'H_{T-1}C_{T-1})^{-1}C_{T-1}'\bar{h}_{T-1}$$

$$r_{T-1}=C_{T-1}g_{T-1}$$

$$s_{T-1}=(I-R_{1,T-1}-R_{2,T-1})^{-1}r_{T-1}$$

$$f_{T-1}=g_{T-1}+G_{1,T-1}s_{T-1}+G_{2,T-1}s_{T-1}$$

seguimos con T-2, T-3,... y terminamos con t=2, de la siguiente forma:

PARA t=2

Hacer $H_2=K_2+P_3'H_3P_3$

$$G_2=-(C_2'H_2C_2)^{-1}C_2'H_2A_2$$

$$G_{1,2}=-(C_2'H_2C_2)^{-1}C_2'H_2B_{1,2}$$

$$G_{2,2}=-(C_2'H_2C_2)^{-1}C_2'H_2B_{2,2}$$

$$R_2=A_2+C_2G_2$$

$$R_{1,2}=B_{1,2}+C_2G_{1,2}$$

$$R_{2,2}=B_{2,2}+C_2G_{2,2}$$

$$P_2=(I-R_{1,2}-R_{2,2})^{-1}R_2$$

$$T_2=(I-R_{1,2})^{-1}R_2-(I-R_{1,2}-R_{2,2})^{-1}R_2$$

$$\emptyset_2= P_3'H_3T_3$$

$$F_2=G_2+G_{1,2}P_2+G_{2,2}P_2$$

$$N_2=G_{1,2}T_2-G_{2,2}P_2$$

Hacer: $\bar{h}_2=K_2a_2+P_3'(\bar{h}_3-H_3s_3)$

$$g_2=(C_2'H_2C_2)^{-1}C_2'\bar{h}_2$$

$$r_2=C_2g_2$$

$$s_2=(I-R_{1,2}-R_{2,2})^{-1}r_2$$

$$f_2=g_2+G_{1,2}s_2+G_{2,2}s_2$$

Todas estas cantidades las podemos calcular al comienzo del primer período pues disponemos de datos para ello. Por tanto: F_t, f_t, N_t, para todo t, se conocen al principio.

4ª) La versión determinística del problema (previsión perfecta) es trivial, no sólo para p=2, sino para cualquier p.

En efecto

El sistema (1.1) será $y_t = A_t y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} B_{it} y_t + C_t x_t$

$\Rightarrow$ $y_t = D_{pt} A_t y_{t-1} + D_{pt} C_t x_t$

en donde $D_{pt} = (I - \sum_{i=1}^{p} B_{it})^{-1}$

(Suponemos que D_{pt} existe para cada t)

Por tanto, el problema es el siguiente:

$$\text{MIN } W = \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)$$

$$y_t = D_{pt} A_t y_{t-1} + D_{pt} x_t$$

que es un problema standard lineal cuadrático de control determinístico.

2.- EL PROBLEMA DE ESTIMACION EN ESTOS MODELOS.CASO DE RUIDOS GAUSSIANOS.

PROBLEMA IV.2.1:

Consideramos el modelo:

$$(2.1)\quad y_t = A_t y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} B_{it} y^*_{t/t-i} + \eta_t \quad , \quad \text{para } t=p,p+1,\dots,T$$

con el sistema de observación.

(2.2) $z_t = M_t y_t + v_t$, para $t=0,1,2,\dots,T$

Suponemos que $y_o y_1,\dots,y_{p-1},\eta_p,\eta_{p+1},\dots,\eta_T$, $v_o,v_1,v_2,\dots,v_T$ son vectores aleatorios <u>normales</u>, mutuamente - incorrelados, tales que:

$E\eta_t=0$, $E\,\eta_t\eta_t'=R_t$ (para $t=p,p+1,\dots,T$)

$Ev_t=0$, $Ev_tv_t'=V_t$ (para $t=0,1,2,\dots,T$)

$Ey_t=m_t$, $E(y_t-m_t)(y_t-m_t)'=S_t$ (para $t=0,1,2,\dots,p-1$)

En este caso $y^*_{t/k}=E(y_t|I_k)$, pero $I_k=\{z_k,z_{k-1},\dots,z_o\}$, pero no contiene a $y_k,y_{k-1},\dots,y_o$, ya que son desconocidos.

Se trata de encontrar el estimador lineal mínimo cuadrático de y_t, dada la información I_t.

Seguiremos exactamente el mismo desarrollo que en el caso de sistemas sin expectativas, y llegaremos a una expresión del filtro de Kalman, que será función de los vectores $y^*_{t/t-1}$, que no son directamente observables. Ahora bien, en el caso particular que nos ocupa: $y^*_{t/t-1}=E(y_t|I_{t-1})=\hat{y}_{t/t-1}$, por lo que podemos calcular esas expectativas utilizando precisamente el predictor de Kalman.

Procederemos de la siguiente manera:

-Cálculo de $\hat{y}_{o/o}$. A continuación, cálculo de $\hat{y}_{1/o},\hat{y}_{2/o},\dots,\hat{y}_{p/o}$

-Cálculo de $\hat{y}_{1/1}$. A continuación, cálculo de $\hat{y}_{2/1},\hat{y}_{3/1},\dots,\hat{y}_{p+1/1}$

-Cálculo de $\hat{y}_{t-1/t-1}$. A continuación, cálculo de $\hat{y}_{t/t-1},\hat{y}_{t+1/t-1},\dots,\hat{y}_{t+p-1/t-1}$

-Cálculo de $\hat{y}_{t/t}$ (que además de $\hat{y}_{t-1/t-1}$, dependerá de $y^*_{t/t-1}$, $\ldots\ldots y^*_{t/t-p}$, o lo que es lo mismo, de $\hat{y}_{t/t-1},\ldots\ldots,\hat{y}_{t/t-p}$, que ya habremos calculado previamente). A continuación, cálculo de $\hat{y}_{t+1/t},\hat{y}_{t+2/t},\ldots\ldots,\hat{y}_{t+p/t}$

<u>TEOREMA IV.2.1</u> (Generalización del filtro de Kalman para el tipo de modelos que estamos considerando).

Para el problema IV.2.1, se obtienen las siguientes ecuaciones recurrentes:

$$\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_t(I_t)=(I-D_tM_t)(A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it}\hat{y}_{t/t-i})+D_tz_t$$

(PARA $t=p,p+1,\ldots\ldots,T$)

CON:

$$\begin{cases} \hat{y}_{o/-1}=m_o \rightarrow \hat{y}_{o/o}=(I-D_oM_o)m_o+D_oz_o \\ \hat{y}_{1/o}=m_1 \rightarrow \hat{y}_{1/1}=(I-D_1M_1)m_1+D_1z_1 \\ \hat{y}_{2/o}=\hat{y}_{2/1}=m_2 \rightarrow \hat{y}_{2/2}=(I-D_2M_2)m_2+D_2z_2 \\ \\ \hat{y}_{p-1/o}=\hat{y}_{p-1/1}=\ldots\ldots=\hat{y}_{p-1/p-2}=m_{p-1} \rightarrow \hat{y}_{p-1/p-1}= \\ =(I-D_{p-1}M_{p-1})m_{p-1}+D_{p-1}z_{p-1} \end{cases}$$

siendo

$$\begin{cases} D_t=\Sigma_{t/t-1}M_t'(M_t\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t)^{-1} \\ \Sigma_{t/t-1}=A_t\Sigma_{t-1/t-1}A_t'+R_t \\ \Sigma_{t/t}=\Sigma_{t/t-1}-\Sigma_{t/t-1}M_t'(M_t\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t)^{-1}M_t\Sigma_{t/t-1} \\ \text{CON } \Sigma_{o/-1}=S_o;\ \Sigma_{1/o}=S_1;\ \Sigma_{2/1}=S_2,\ldots\ldots,\Sigma_{p-1/p-2}= \\ =S_{p-1} \end{cases}$$

Además

$$\begin{cases} \hat{y}_{t+1/t}=(I-B_{1,t+1})^{-1}(A_{t+1}\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=2}^{p} B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i}) \\ \hat{y}_{t+2/t}=(I-B_{1,t+2}-B_{2,t+2})^{-1}(A_{t+2}\hat{y}_{t+1/t}+\sum_{i=3}^{p} B_{i,t+2} \\ \qquad \hat{y}_{t+2/t+2-i}) \\ \\ \hat{y}_{t+p/t}=(I-\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+p})^{-1}A_{t+p}\hat{y}_{t+p-1/t} \end{cases}$$

<u>DEMOSTRACION</u>:

Supongamos que hemos calculado $\hat{y}_{t/t-1},\hat{y}_{t/t-2},$ $\ldots\ldots,\hat{y}_{t/t-p}$. También conocemos $\Sigma_{t/t-1}=E\left[y_t-\hat{y}_{t/t-1}\right]\left[y_t-\hat{y}_{t/t-1}\right]'$

En el período t, recibimos la observación adicional $z_t=M_t y_t+v_t$.

Como en el teorema III.3.1, tenemos:

$$\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_{t/t-1}+\hat{y}_t\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]-E(y_t)$$

$$\hat{z}_t(I_{t-1})=M_t\hat{y}_{t/t-1}$$

$$E\ \{z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\}=E\ \{M_t(y_t-\hat{y}_{t/t-1})+v_t\}=0$$

$$\Rightarrow\ \hat{y}_t\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]=\hat{y}_t\left[\tilde{z}_t(I_{t-1})\right]=E(y_t)+\Sigma_{y\tilde{z}}\,\Sigma^{-1}_{\tilde{z}\tilde{z}}\left[z_t-\right.$$
$$\left.-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]$$

en donde $\Sigma_{y\tilde{z}}=\Sigma_{t/t-1}M_t'$

$\Sigma_{\tilde{z}\tilde{z}}=M_t\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t$, como en el teorema III.3.1.

Por tanto:

$\hat{y}_t\left[z_t-\hat{z}_t(I_{t-1})\right]=E(y_t)+D_t\left[z_t-M_t\hat{y}_{t/t-1}\right]$, en donde

$$D_t = \Sigma_{t/t-1} M_t'(M_t \Sigma_{t/t-1} M_t' + V_t)^{-1}$$

Queda:

$$\hat{y}_{t/t} = \hat{y}_{t/t-1} + D_t(z_t - M_t \hat{y}_{t/t-1}) = (I - D_t M_t)\hat{y}_{t/t-1} + D_t z_t$$

Consideramos ahora el sistema (2.1). Tomando en los dos miembros esperanzas condicionadas a I_{t-1}, y teniendo en cuenta que $y^*_{t/t-1} = \hat{y}_{t/t-1}$, queda:

$$y^*_{t/t-1} = \hat{y}_{t/t-1} = A_t y^*_{t-1/t-1} + \sum_{i=1}^{p} B_{it} y^*_{t/t-i} = A_t \hat{y}_{t-1/t-1} + \sum_{i=1}^{p} B_{it} \hat{y}_{t/t-i}$$

$\Rightarrow y_t - \hat{y}_{t/t-1} = A_t(y_{t-1} - \hat{y}_{t-1/t-1}) + \eta_t$ (como en el caso sin expectativas)

$$\Rightarrow \Sigma_{t/t-1} = A_t \Sigma_{t-1/t-1} A_t' + R_t$$

$$y_t - \hat{y}_{t/t} = y_t - \hat{y}_{t/t-1} - D_t(z_t - M_t \hat{y}_{t/t-1}) = y_t - \hat{y}_{t/t-1} - D_t M_t(y_t - \hat{y}_{t/t-1}) - D_t v_t$$

$$\Rightarrow \Sigma_{t/t} = \Sigma_{t/t-1} - \Sigma_{t/t-1} M_t'(M_t \Sigma_{t/t-1} M_t' + V_t)^{-1} M_t \Sigma_{t/t-1}$$

Por tanto:

$$\hat{y}_{t/t} = (I - D_t M_t)(A_t \hat{y}_{t-1/t-1} + \sum_{i=1}^{p} B_{it} \hat{y}_{t/t-i}) + D_t z_t \quad \text{(PARA } t=p,p+1,\dots,T)$$

Calculemos ahora $\hat{y}_{t+1/t}, \hat{y}_{t+2/t}, \dots, \hat{y}_{t+p/t}$ - (suponiendo que $t+p \leq T$)

Si no es así, calculamos $\hat{y}_{t+1/t}, \hat{y}_{t+2/t}; \dots; \hat{y}_{T/t}$)

De acuerdo con (2.1):

$$y_{t+1} = A_{t+1} y_t + \sum_{i=1}^{p} B_{i,t+1} y^*_{t+1/t+1-i} + \eta_{t+1}$$

Tomando esperanzas condicionadas a I_t, en los dos miembros:

$$y^*_{t+1/t}=A_{t+1}E(y_t|I_t)+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+1}y^*_{t+1/t+1-i}=$$

$$=A_{t+1}\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}_{t+1/t}=y^*_{t+1/t}=(I-B_{1,t+1})^{-1}\left(A_{t+1}\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=2}^{p} B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i}\right)$$

Análogamente:

$$y_{t+2}=A_{t+2}y_{t+1}+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+2}y^*_{t+2/t+2-i}+\eta_{t+2}$$

$$\Rightarrow y^*_{t+2/t}=A_{t+2}y^*_{t+1/t}+B_{1,t+2}y^*_{t+2/t}+B_{2,t+2}y^*_{t+2/t}+$$

$$+\sum_{i=3}^{p} B_{i,t+2}y^*_{t+2/t+2-i}$$

o lo que es lo mismo.

$$\hat{y}_{t+2/t}=y^*_{t+2/t}=(I-B_{1,t+2}-B_{2,t+2})^{-1}\left(A_{t+2}\hat{y}_{t+1/t}+\sum_{i=3}^{p} B_{i,t+2}\hat{y}_{t+2/t+2-i}\right)$$

En general, para $k\in\{1,2,\ldots,p\}$

$$y_{t+k}=A_{t+k}y_{t+k-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+k}y^*_{t+k/t+k-i}+\eta_{t+k}$$

$$y^*_{t+k/t}=A_{t+k}y^*_{t+k-1/t}+\sum_{i=1}^{k} B_{i,t+k}y^*_{t+k/t}+\sum_{i=k+1}^{p} B_{i,t+k}y^*_{t+k/t+k-i}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+k/t}=\left(I-\sum_{i=1}^{k} B_{i,t+k}\right)^{-1}\left(A_{t+k}\hat{y}_{t+k-1/t}+\sum_{i=k+1}^{p} B_{i,t+k}\hat{y}_{t+k/t+k-i}\right)$$

Al igual que hicimos en el apartado 5 del capítulo III, vamos a ver que es posible quitar la hipótesis de normalidad, pero a cambio tendremos que sustituir $y^*_{t/t-i}$ por $\hat{y}_{t/t-i}$, con lo cual el sistema ya no será, en general un modelo con expectativas racionales. Estudiaremos este caso en el apartado siguiente.

3.- EL PROBLEMA DE ESTIMACION EN MODELOS EN QUE APARECEN ESTIMADORES LINEALES MINIMO CUADRATICOS EN LUGAR DE ESPERANZAS CONDICIONADAS.

PROBLEMA IV.3.1:

Consideramos el modelo:

(3.1) $y_t=A_t y_{t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it}\hat{y}_{t/t-i}+\eta_t$, para $t=p,p+1,\ldots,T$

con el sistema de observación:

(3.2) $z_t=M_t y_t+v_t$ para $t=0,1,2,\ldots,T$

Suponemos que $y_0,y_1,\ldots,y_{p-1},\eta_p,\eta_{p-1},\ldots,\eta_T,$ $v_0,v_1,\ldots,v_T$ son vectores aleatorios, mutuamente incorrelados, tales que:

$E\eta_t=0$, $E\eta_t\eta_t'=R_t$ (para $t=p,p+1,\ldots,T$)

$Ev_t=0$, $Ev_tv_t'=V_t$ (para $t=0,1,2,\ldots,T$)

$Ey_t=m_t$, $E(y_t-m_t)(y_t-m_t)'=S_t$ (para $t=0,1,2,\ldots,p-1$

En este caso $y^{*}_{t/k}=E(y_t|I_k)$, con $I_k=\{z_k,z_{k-1},\ldots,z_o\}$

Se trata de encontrar el estimador lineal mínimo cuadrático de y_t, dada la información I_t.

PROPOSICION IV.3.1.

Sea $z=Cx^1+D\hat{x}^3(y_1)+u$

en donde z,x^1,x^3,u son vectores aleatorios, C,D son matrices de constantes

$\Rightarrow$ $\hat{z}(y_1,y_2)=C\hat{x}^1(y_1,y_2)+D\hat{x}^3(y_1)$

Suponemos que el vector u tiene media cero y es incorrelado con y_1, y_2.

DEMOSTRACION:

Vamos a apoyarnos en la proposición III.3.3.

Por el corolario 5:

$$\hat{z}(y_1,y_2)=\hat{z}(y_1)+\hat{z}\left[y_2-\hat{y}_2(y_1)\right]-\bar{z}$$

Sea $\tilde{y}_2(y_1)=y_2-\hat{y}_2(y_1)$. Por el corolario 2, es incorrelado con y_1 y también con $\hat{y}_2(y_1)$.

Por el corolario 3: $\hat{z}(y_1)=C\hat{x}^1(y_1)+D\hat{x}^3(y_1)$

Además: $\hat{z}(\tilde{y}_2)=C\hat{x}^1(\tilde{y}_2)+D\left[\widehat{\hat{x}^3(y_1)}\right](\tilde{y}_2)$

$$\left[\widehat{\hat{x}^3(y_1)}\right](\tilde{y}_2)=\bar{x}^3+\Sigma_{\hat{x}^3 \tilde{y}_2}\ \Sigma^{-1}_{\tilde{y}_2 \tilde{y}_2}\ \tilde{y}_2(y_1)\ =\bar{x}^3, \text{ ya que}$$

$$\Sigma\ \hat{x}^3(y_1)\tilde{y}(y_1)=0$$

Por tanto:

$$\hat{z}(y_1,y_2)=C\hat{x}^1(y_1)+D\hat{x}^3(y_1)+C\hat{x}^1(\tilde{y}_2(y_1))+\bar{x}^3-\bar{z}=$$

$$=C\left[\hat{x}^1(y_1)+\hat{x}^1(y_2-\hat{y}_2(y_1))-\bar{x}^1\right]+D\hat{x}^3(y_1)=C\hat{x}^1(y_1,y_2)+D\hat{x}^3(y_1)$$

TEOREMA IV.3.1.: (Generalización del filtro de Kalman para el tipo de modelos que estamos considerando)

Para el problema IV.3.1 se obtienen las siguientes ecuaciones recurrentes:

$$\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_t(I_t)=(I-D_tM_t)(A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it}\hat{y}_{t/t-i})+D_tz_t$$

(para $t=p,p+1,\ldots,T$)

con
$$\begin{cases} \hat{y}_{o/-1}=m_o \rightarrow \hat{y}_{o/o}=(I-D_oM_o)m_o+D_oz_o \\ \hat{y}_{1/o}=m_1 \rightarrow \hat{y}_{1/1}=(I-D_1M_1)m_1+D_1z_1 \\ \hat{y}_{2/o}=\hat{y}_{2/1}=m_2 \rightarrow \hat{y}_{2/2}=(I-D_2M_2)m_2+D_2z_2 \\ \hat{y}_{p-1/o}=\hat{y}_{p-1/1}=\ldots\ldots=\hat{y}_{p-1/p-2}=m_{p-1} \rightarrow \hat{y}_{p-1/p-1}= \\ \qquad =(I-D_{p-1}M_{p-1})m_{p-1}+D_{p-1}z_{p-1} \end{cases}$$

siendo:
$$\begin{cases} D_t=\Sigma_{t/t-1}M_t'(M_t\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t)^{-1} \\ \Sigma_{t/t-1}=A_t\Sigma_{t-1/t-1}A_t'+R_t \\ \Sigma_{t/t}=\Sigma_{t/t-1}-\Sigma_{t/t-1}M_t'(M_t\Sigma_{t/t-1}M_t'+V_t)^{-1}M_t\Sigma_{t/t-1} \\ \text{con } \Sigma_{o/-1}=S_o;\ \Sigma_{1/o}=S_1;\ \Sigma_{2/1}=S_2,\ldots\ldots,\Sigma_{p-1/p-2}= \\ \qquad =S_{p-1} \end{cases}$$

Además:
$$\begin{cases} \hat{y}_{t+1/t}=(I-B_{1,t+1})^{-1}(A_{t+1}\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=2}^{p}B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i}) \\ \hat{y}_{t+p/t}=(I-\sum_{i=1}^{p}B_{i,t+p})^{-1}A_{t+p}\hat{y}_{t+p-1/t} \end{cases}$$

DEMOSTRACION:

Procediendo exactamente como en el teorema IV. 2.1. llegamos a que:

$$\hat{y}_{t/t}=(I-D_tM_t)\hat{y}_{t/t-1}+D_tz_t$$

Consideramos ahora el sistema (3.1). Aplicando la proposición IV. 3.1. obtenemos:

$\hat{y}_{t/t-1}=A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it}\hat{y}_{t/t-i}$ como en el teorema IV.2.1. Así obtenemos las mismas expresiones para $\Sigma_{t/t-1}$ y $\Sigma_{t/t}$.

Queda, por tanto:

$$\hat{y}_{t/t}=(I-D_tM_t)(A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it}\hat{y}_{t/t-i})+D_tz_t$$

(para $t=p,p+1,\ldots\ldots,T$)

Calculemos ahora $\hat{y}_{t+1/t};\hat{y}_{t+2/t},\ldots\ldots\ldots,\hat{y}_{t+p/t}$ (suponiendo que $t+p\leq T$. Si no es así, calculamos $\hat{y}_{t+1/t},\hat{y}_{t+2/t},\ldots\ldots,\hat{y}_{T/t}$).

De acuerdo con (3.1)

$$y_{t+1}=A_{t+1}y_t+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i}+\eta_{t+1}$$

Aplicando la proposición anterior

$$\hat{y}_{t+1/t}=A_{t+1}\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+1/t}=(I-B_{1,t+1})^{-1}(A_{t+1}\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=2}^{p}B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i})$$

En general, para $k=1,2,\ldots\ldots,p$

$$y_{t+k}=A_{t+k}y_{t+k-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+k}\hat{y}_{t+k/t+k-i}+\eta_{t+k}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+k/t}=A_{t+k}\hat{y}_{t+k-1/t}+\sum_{i=1}^{k} B_{i,t+k}\hat{y}_{t+k/t}+$$
$$+\sum_{i=k+1}^{p}B_{i,t+k}\hat{y}_{t+k/t+k-i}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+k/t}=(I-\sum_{i=1}^{k} B_{i,t+k})^{-1}(A_{t+k}\hat{y}_{t+k-1/t}+$$
$$+\sum_{i=k+1}^{p} B_{i,t+k}\hat{y}_{t+k/t+k-i})$$

COROLARIO:

Si los vectores aleatorios $y_o,y_1,\dots,y_{p-1}$, η_p, $\eta_{p+1},\dots\dots,\eta_T$, $v_o,v_1,\dots,v_T$ son normales al verificar se que $y^*_{t/t-1}=\hat{y}_{t/t-1}$, el problema IV.2.1 y el IV.3.1. coinciden. Los resultados dados por los teoremas IV.2.1 y IV.3.1, tambien coinciden.

4.- EL PROBLEMA DE ESTIMACION CUANDO EL MODELO INCLUYE VARIABLES DE CONTROL. CASO DE RUIDOS GAUSSIANOS.

PROBLEMA IV.4.1.

Consideremos el modelo:

$$(4.1)\qquad y_t=A_ty_{t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it}y^*_{t/t-i}+C_tx_t+\eta_t \qquad \text{(Para } t=p,p+1,\dots,T)$$

con el sistema de observación:

$$(4.2)\qquad z_t=M_ty_t+v_t \qquad\qquad \text{(para } t=0,1,2,\dots,T)$$

Suponemos que $y_o,y_1,\dots,y_{p-1}$, $\eta_p,\eta_{p+1},\dots\dots,\eta_T$, $v_o,v_1,\dots\dots,v_T$ son vectores aleatorios normales, mutuamente incorrelados, tales que:

$$E\eta_t=0 \quad ; \quad E\eta_t\eta_t'=R_t \quad \text{(para } t=p,p+1,\dots,T)$$

$$Ev_t=0 \quad ; \quad Ev_tv'_t=V_t \quad \text{(para } t=0,1,2,\dots,T)$$

$$Ey_t=m_t \quad ; \quad E(y_t-m_t)(y_t-m_t)'=S_t$$

$$\text{(para } t=0,1,2,\dots\dots,p-1)$$

En este caso $y^*_{t/k}=E(y_t|I_k)$ con $I_k=\{z_k, z_{k-1}, \dots\dots, z_o, x_k,x_{k-1},\dots\}$

Se trata de encontrar el estimador lineal - mínimo cuadrático de y_t, dada la información I_t.

TEOREMA IV.4.1.: (Generalización del filtro de Kalman para - este tipo de modelos).

Consideramos el problema IV.4.1. Suponemos, además, que las variables de control x_t son de la forma: $x_t=\alpha_t+$ $+\mathcal{L}(I_{t-1})$, en donde α_t es un vector constante y $\mathcal{L}(I_{t-1})$ es el subespacio vectorial generado por I_{t-1}.

En estas condiciones se obtienen las siguientes ecuaciones recurrentes:

$$\hat{y}_{t/t}=\hat{y}_t(I_t)=(I-D_tM_t)(A_t\hat{y}_{t-1/t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it}\hat{y}_{t/t-i}+C_tx^*_{t/t-1})+D_tz_t$$

(para $t=p,p+1,\ldots\ldots,T$)

siendo D_t, $\Sigma_{t/t-1}$, $\Sigma_{t/t}$ y las condiciones iniciales análogas al teorema IV.2.1.

Además:

$$\hat{y}_{t+1/t}=(I-B_{1,t+1})^{-1}\left[A_{t+1}\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=2}^{p}B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i}+C_{t+1}E(x_{t+1}|I_t)\right]$$

$$\hat{y}_{t+2/t}=(I-B_{1,t+1}-B_{2,t+2})^{-1}\left[A_{t+2}\hat{y}_{t+1/t}+\sum_{i=3}^{p} B_{i,t+2}\hat{y}_{t+2/t+2-i}+\right.$$
$$\left.+C_{t+2}E(x_{t+2}|I_t)\right]$$

$$\hat{y}_{t+p/t}=(I-\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+p})^{-1}\left[A_{t+p}\hat{y}_{t+p-1/t}+C_{t+p}E(x_{t+p}|I_t)\right]$$

DEMOSTRACION:

Es exactamente igual que en el teorema IV.2.1., sólo que ahora:

$$y_t=A_t y_{t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it} y^*_{t/t-i}+C_t x_t+\eta_t$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t/t-1}=A_t \hat{y}_{t-1/t-1}+\sum_{i=1}^{p} B_{it} \hat{y}_{t/t-i}+C_t x^*_{t/t-1}$$

Análogamente:

$$y_{t+1}=A_{t+1} y_t+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+1} y^*_{t+1/t+1-i}+C_{t+1} x_{t+1}+\eta_{t+1}$$

$$y^*_{t+1/t}=A_{t+1} E(y_t|I_t)+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+1} y^*_{t+1/t+1-i}+C_{t+1} E(x_{t+1}|I_t)$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{t+1/t}=(I-B_{1,t+1})^{-1}\left[A_{t+1}\hat{y}_{t/t}+\sum_{i=2}^{p} B_{i,t+1}\hat{y}_{t+1/t+1-i}+C_{t+1}E(x_{t+1}|I_t)\right]$$

$$y_{t+2}=A_{t+2} y_{t+1}+\sum_{i=1}^{p} B_{i,t+2} y^*_{t+2/t+2-i}+C_{t+2} x_{t+2}+\eta_{t+2}$$

$$\Rightarrow y^*_{t+2/t}=A_{t+2} y^*_{t+1/t}+B_{1,t+2} y^*_{t+2/t}+B_{2,t+2} y^*_{t+2/t}+$$

$$+\sum_{i=3}^{p} B_{i,t+2} y^*_{t+2/t+2-i}+C_{t+2} E(x_{t+2}|I_t)$$

Por tanto:

$$\hat{y}_{t+2/t}=(I-B_{1,t+2}-B_{2,t+2})^{-1}\left[A_{t+2}\hat{y}_{t+1/t}+\sum_{i=3}^{p} B_{i,t+2}\hat{y}_{t+2/t+2-i}+\right.$$

$$\left.+C_{t+2}E(x_{t+2}|I_t)\right]$$

En general, para $k=1,2,\ldots,p$ $\quad y_{t+k}=A_{t+k} y_{t+k-1}+\sum_{i=1}^{k} B_{i,t+k} y^*_{t+k/t+k-i}+$

$$+C_{t+k} x_{t+k}+\eta_{t+k}$$

$$\Rightarrow y^*_{t+k/t}=A_{t+k} y^*_{t+k-1/t}+\sum_{i=1}^{K} B_{i,t+k} y^*_{t+k/t}+\sum_{i=k+1}^{p} B_{i,t+k} y^*_{t+k/t+k-i}+$$

$$+C_{t+k} E(x_{t+k}|I_t)$$

Por tanto:

$$\hat{y}_{t+k/t}=(I-\sum_{i=1}^{k} B_{i,t+k})^{-1}\left[A_{t+k}\hat{y}_{t+k-1/t}+\sum_{i=k+1}^{p} B_{i,t+k}\hat{y}_{t+k/t+k-i}+\right.$$

$$\left.+C_{t+k}E(x_{t+k}|I_t)\right]$$

C A P I T U L O - V

EJEMPLOS Y CONCLUSIONES

EJEMPLO 1:

$$\text{MIN} \quad E_1 \sum_{t=2}^{T} \pi_t^2$$

$$\pi_t = B_1 \, \pi^{*}_{t+1/t-1} + A\,\pi_{t-1} + C m_t + v_t \quad (\text{para } t=2,3,\ldots,T)$$

con π_1 dado

en donde:

π_t: es la tasa de inflación en el período t (es, por - tanto, una variable escalar).

m_t: es la tasa de variación de la oferta monetaria en el período t. Es la variable de control, también escalar.

v_t: perturbación aleatoria en el período t. Suponemos que $v_2, v_3, \ldots, v_T$ son variables aleatorias mutuamente incorreladas, de media cero, y varianza Σ_v, idénticamente distribuidas.

B_1, A, C: son números reales dados.

Vamos a resolver el problema, aplicando el teorema II.5.2. Tras un análisis general, daremos valores a los parámetros, simularemos los ruidos y calcularemos la solución.

$\boxed{\text{PARTIMOS DE : } B_1, A, C, \ a=0, \ K=1, \ b=0, \ \Gamma \ \text{ conocidos}}$

Seguimos el orden de cálculos que hemos señalado a continuación del teorema. En este caso $\tilde{B}_{1t} = B_1$; $\tilde{A}_t = A$; $\tilde{C}_t = C$, siendo números reales.

$\boxed{\text{PARA } T+1}$ Hacer $\begin{cases} P_{T+1} = \Gamma \\ s_{T+1} = 0 \end{cases}$

PARA T

$H_T=1$

$G_T= - \frac{A}{C}$

$G_{1T}= - \frac{B_1}{C}$

$R_T=0$

$R_{1T}=0$

$P_T=0$

$F_T=G_T= - \frac{A}{C}$

$h_T=g_T=r_T=s_T=f_T=0$

PARA T-1

$H_{T-1}=1$

$G_{T-1}= - \frac{A}{C}$

$G_{1,T-1}= - \frac{B_1}{C}$

$R_{T-1}=0$

$R_{1,T-1}=0$

$P_{T-1}=0$

$F_{T-1}=G_{T-1}= - \frac{A}{C}$

$h_{T-1}=g_{T-1}=r_{T-1}=s_{T-1}=f_{T-1}=0$

En general

PARA t

$H_t=1$

$G_t=- \frac{A}{C}$

$G_{1t}= - \frac{B_1}{C}$

$R_t=0$

$R_{1t}=0$

$P_t=0$

$F_t=G_t=-\frac{A}{C}$

$h_t=g_t=r_t=s_t=f_t=0$

POR TANTO:
$$\left[\hat{m}_t=F_t\ \pi_{t-1}=G_t\ \pi_{t-1}=-\frac{A}{C}\ \pi_{t-1}\right]$$

Además, como se demuestra en el teorema II.5.2, al utilizar ese control, la evolución del sistema controlado, - vendrá dada pór:

$$\left[\pi_t=P_t\,\pi_{t-1}+s_t+v_t=v_t\right] \quad \text{, para } t=2,3,\ldots,T$$

y el valor de la función objetivo en el óptimo, será:

$$\hat{V}_2(\pi_1)=E_1\sum_{t=2}^{T} v_t^2=\sum_{t=2}^{T} E_1(v_t^2)=(T-1)\ \Sigma_v$$

Los resultados obtenidos merecen algunos <u>COMENTARIOS</u>:

1ª) La solución del problema coincide con la que se obtendría en el mismo sistema, sin que aparecieran las expectativas (es decir, con $B_1=0$)

$$\hat{m}_t=F_t\ \pi_{t-1}=G_t\,\pi_{t-1}$$

Este resultado tiene explicación: como hemos visto, $\forall t=2,3,\ldots,T$ la evolución del sistema controlado viene dada por: $\pi_t=v_t \Rightarrow \pi_{t+1}=v_{t+1}$.

$$\Rightarrow \pi^{*}_{t/t-1}=E\ (v_t|I_{t-1})=0$$

$$\pi^{*}_{t+1/t-1}=E\ (v_{t+1}|I_{t-1})=0$$

luego las expectativas son cero. Esto es así porque desde el período 2, al utilizar el control óptimo, el sistema alcanza el valor objetivo cero, salvo perturbaciones aleatorias de media cero.

2º) La solución del problema es independiente de Γ .

El significado de Γ es que, para t=T, período final, $\pi^{*}_{T+1/T-1}=\Gamma\pi^{*}_{T/T-1}$ pero, como hemos visto en el comentario 1º), $\pi^{*}_{T/T-1}=0 \Rightarrow \pi^{*}_{T+1/T-1}=0$, y Γ no juega ningún papel.

A continuación vamos a plantearnos diferentes posibilidades sobre CAMBIOS EN LOS PARAMETROS DEL PROBLEMA, para estudiar en qué medida variará la solución obtenida:

1º) Supongamos que K=D > 0, en lugar de ser K=1.

Esta modificación no influirá en la solución del problema.

Si revisamos las operaciones que hemos realizado anteriormente para la situación inicial (con K=1), D aparecerá multiplicando y dividiendo en los cálculos de G_t, G_{1t} y, por tanto, no influirá. El resultado es lógico ya que, para $D > 0$,

$\text{MIN}\ E_1 \sum_{t=2}^{T} D\,\pi_t^2 = D(\text{MIN}\ E_1 \sum_{t=2}^{T}\pi_t^2)$ y el valor de las variables de decisión que permiten alcanzar ese mínimo es el mismo que para $\text{MIN}\ E_1 \sum_{t=2}^{T}\pi_t^2$.

2ª) Analicemos ahora qué ocurriría si en el sistema apareciera un nuevo sumando: $B\ \pi^*_{t/t-1}$, con $B\neq 0$, $B\neq 1$.

Como hemos visto en la proposición II.2.1, en este caso hay que utilizar

$$\tilde{B}_1=\frac{B_1}{1-B}\ ;\quad \tilde{A}=\frac{A}{1-B}\ ;\quad \tilde{C}=\frac{C}{1-B}\ ,$$ en lugar de B_1, A, C, respectivamente.

Obtenemos por tanto, $\forall t=2,3,\dots,T$

$$G_t=-\frac{\tilde{A}}{\tilde{C}}=-\frac{\frac{A}{1-B}}{\frac{C}{1-B}}=-\frac{A}{C}$$

$$G_{1t}=-\frac{\tilde{B}_1}{\tilde{C}}=-\frac{\frac{B_1}{1-B}}{\frac{C}{1-B}}=-\frac{B_1}{C}$$

$$R_t=R_{1t}=P_t=0$$

$$F_t=G_t=-\frac{A}{C}\ \Rightarrow\ \hat{m}_t=-\frac{A}{C}\,\pi_{t-1}$$

La evolución del sistema controlado viene dada por: $\pi_t=v_t$.

Luego la solución es la misma que para el problema inicial.

El resultado es lógico ya que, como hemos explicado en el comentario 1ª) $\pi^*_{t/t-1}=0$, $\forall t=2,3,\dots,T$

3ª) Supongamos ahora que $a_t=a\neq 0$, y , $b_t=b\neq 0$, $\forall t=2,3,\dots,T$

Entonces: $\hat{m}_t=F_t\,\pi_{t-1}+f_t$, en donde los valores F_t siguen iguales al caso inicial pero los f_t ya no valdrán cero. Vamos a calcularlos:

PARA T

$h_T=a$

$g_T= - \frac{b-a}{C}$

$r_T=a$

$s_T=a$

$f_T= - \frac{b-a}{C} + \frac{-B_1}{C} \Gamma a$

PARA T-1

$h_{T-1}=a$

$g_{T-1}=g_T= - \frac{b-a}{C}$

$r_{T-1}=s_{T-1}=a$

$f_{T-1}= - \frac{b-a}{C} + \frac{-B_1}{C} a$

PARA t=2,3,....,T-1

$h_t=a$

$g_t= - \frac{b-a}{C}$

$r_t=s_t=a$

$f_t= - \frac{b-a}{C} + \frac{-B_1}{C} a$

Por tanto:

$$\hat{m}_T= - \frac{A}{C} \Pi_{t-1} - \frac{b-a}{C} + \frac{-B_1}{C} \Gamma a$$

$$\hat{m}_t= - \frac{A}{C} \Pi_{t-1} - \frac{b-a}{C} - \frac{B_1}{C} a \text{ , para } t=2,3,...,T-1$$

La evolución del sistema controlado viene dada por:

$$\Pi_t=a+v_t \quad , \qquad \text{para } t=2,3,....,T$$

Si $\underline{a=0}$, $\underline{b\neq 0}$

$$\Rightarrow \hat{m}_t = -\frac{A}{C} \quad \pi_{t-1} - \frac{b}{C} = G_t \ \pi_{t-1} + g_t \quad , \text{ para } t=2,3,\ldots,T$$

y la solución al problema es la misma que si no apareciera el sumando con la expectativa de la inflación (O sea, si $B_1=0$).

Si $\underline{a \neq 0}$

$\Rightarrow \hat{m}_t = G_t \ \pi_{t-1} + f_t$, para $t=2,3,\ldots,T$, con $f_t \neq g_t$ (suponiendo que $B_1 \neq 0$)

Veamos por qué:

$\forall t=2,3,\ldots,T$, el sistema controlado evoluciona según:

$$\pi_t = a + v_t \quad , \quad \forall t=2,3,\ldots,T$$

$$\Rightarrow \pi_{t+1} = a + v_{t+1} \quad , \quad \forall t=2,3,\ldots,T-1$$

$$\Rightarrow \pi^*_{t+1/t-1} = E\left[v_{t+1} | I_{t-1}\right] = a$$

Por otra parte, por hipótesis: $\pi^*_{T+1/T-1} = \Gamma \pi^*_{T/T-1} =$

$= \Gamma a$

Luego la solución óptima coincide con la del siguiente sistema sin expectativas:

$$\pi_t = A \quad \pi_{t-1} + Cm_t + \beta_t + v_t$$

en donde $\beta_t = \begin{cases} b+B_1 a & , \text{ para } t=2,3,\ldots,T-1 \\ b+B_1 \Gamma a & , \text{ para } t=T \end{cases}$

4º) Supongamos ahora que, con respecto al problema inicial, - B_{1t}, A_t, C_t varían en el tiempo.

Entonces, $\forall t=2,3,\ldots,T$

$$G_t = -\frac{A_t}{C_t}$$

$$G_{1t} = -\frac{B_{1t}}{C_t}$$

$$R_t = R_{1t} = P_t = 0$$

$$F_t = G_t = -\frac{A_t}{C_t}$$

Por tanto: $\left[\hat{m}_t = F_t\, \eta_{t-1} = G_t\, \eta_{t-1} = -\frac{A_t}{C_t}\, \eta_{t-1}\right]$

En tal caso, la evolución del sistema viene - dada por: $\eta_t = v_t$ y el valor óptimo de la función objetivo sigue siendo $\hat{V}_2(\eta_1) = (T-1)\,\Sigma_v$

5º) Veamos que si cambia la dimensión de η_t, varía totalmente la forma de la solución y su manera de calcularla.

Supongamos que η_t es de dimensión nx1

Partimos de B_1 (nxn); A(nxn); C(nx1); a=0; $K_t = I(nxn)$, $b=0, \Gamma$, conocidos.

PARA T+1

$$\begin{cases} P_{T+1} = I \\ s_{T+1} = 0 \end{cases}$$

PARA T

$H_T = K_T = I$

$G_T = -(C'C)^{-1}C'A$

$G_{1T} = -(C'C)^{-1}C'B_1$

$R_T = A + CG_T = A - C(C'C)^{-1}C'A$

$R_{1T} = B_1 + CG_{1T} = B_1 - C(C'C)^{-1}C'B_1$

pero, en general, R_T, R_{1T} no serán cero.

Así, por ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R_T = A + CG_t = A - C(C'C)^{-1}C'A = \begin{pmatrix} ½ & -½ \\ -½ & ½ \end{pmatrix}$

$P_T = (I - R_{1T}\,\Gamma)^{-1}R_T$ que, en general, no será cero.

$F_T = G_T + G_{1T}P_{T+1}P_T$

En general: H_t variará con $t \Rightarrow G_t$, G_{1t} variarán con $t \Rightarrow R_t$, R_{1t}, P_t variarán con t y, en general, no serán cero. F_t variará con t y, en general, será distinta de G_t.

Vamos a resolver, en concreto, el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{MIN } E_1 \sum_{t=2}^{50} \pi_t^2 \\ \pi_t = ½\,\pi^*_{t+1/t-1} + ½\,\pi_{t-1} + (1 + \frac{1}{t})m_t + v_t, \text{ para } t = 2,3,\dots,50 \\ \pi_1 = 12 \\ \text{Para cada } t,\ V_t = N(0,1), \text{ siendo } v_2, v_3, \dots, v_{50} \text{ incorrelados.} \end{cases}$$

De acuerdo con los razonamientos previos, el control óptimo se obtendrá de la siguiente forma:

$$\hat{m}_t = -\tfrac{1}{2}\ \frac{t}{t+1}\ \eta_{t-1} \quad , \quad t=2,3,\ldots.,50$$

y la evolución del sistema controlado vendrá dada por $\eta_t = v_t$

$t=2,3,\ldots.,50$

Hemos simulado con ordenador, valores para las variables v_t, de acuerdo con las condiciones del enunciado y hemos obtenido para el control óptimo los resultados que se recogen en el gráfico 1. Los valores de la variable de estado, correspondientes al sistema controlado, aparecen en el gráfico 2.

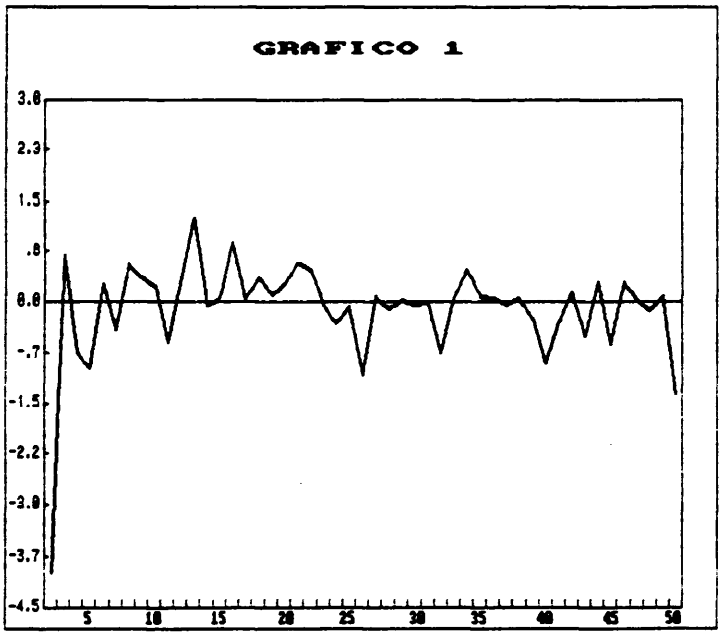


GRAFICO 1
3.0
2.3
1.5
.8
0.0
-.7
-1.5
-2.2
-3.0
-3.7
-4.5
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

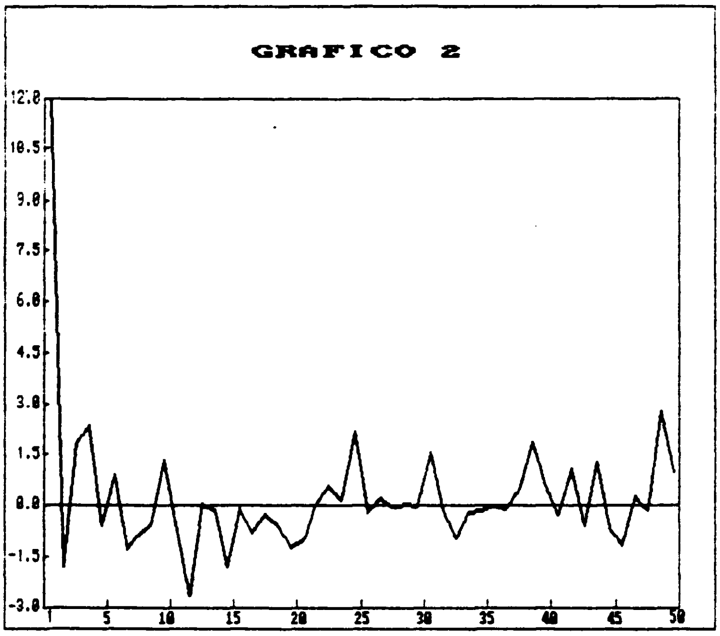


GRAFICO 2
12.0
10.5
9.0
7.5
6.0
4.5
3.0
1.5
0.0
-1.5
-3.0
1
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

EJEMPLO 2

$$\text{MIN} \quad E_1 W = E_1 \sum_{t=2}^{T} (y_{1t}-a_1)^2+(y_{2t}-a_2)^2$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^*_{1,t+1/t-1} \\ y^*_{2,t+1/t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} m_t + \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$$

(Para $t=2,3,\ldots.,T$)

CON $y_{1,1} = \bar{y}_{1,1}$

$y_{2,1} = \bar{y}_{2,1}$

en donde:

y_{1t}: es la tasa de inflación en el período t.

y_{2t}: es el tipo de interés nominal, en el período t.

(y_{1t}, y_{2t} son las variables de estado)

m_t: es la tasa de variación de la oferta monetaria. Es la variable de control.

$\binom{v_{1t}}{v_{2t}}$: son vectores aleatorios normales, de media cero y covarianza $\sigma^2 I$ serialmente incorrelados.

Interpretación del problema.

Es bien conocido en Economía el hecho de que existen correlaciones intertemporales significativas entre la tasa de variación de la oferta monetaria y las variables tasa de inflación y tipo de interés nominal. Una interpretación es que la autoridad económica controla, con bastante aproximación, la tasa de variación de la oferta monetaria y ésta tiene efectos sobre los precios, tanto contemporaneamente como a lo largo de un nº de períodos. A su vez, el tipo de interés nominal es la suma del tipo de interés real (que se supone aproximadamente constante), y la tasa esperada de inflación. El sistema anterior sugiere que tanto la tasa de inflación como el tipo de interés nominal dependen: 1) de su propio pasado. 2) de las expectativas de sus valores futuros. 3) de la actuación de la autoridad económica. 4) de shocks exógenos.

El significado de la función objetivo es que se penalizan las desviaciones de las variables de estado de los objetivos prefijados a_1 y a_2 respectivamente.

Con el objeto de llevar a cabo simulaciones numéricas, vamos a concretar los valores de los coeficientes, de los objetivos prefijados y del horizonte temporal:

$$\text{MIN} \quad E_1 W = E_1 \sum_{t=2}^{40} (y_{1t}-5)^2 + (y_{2t}-3)^2$$

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^*_{1,t+1/t-1} \\ y^*_{2,t+1/t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} m_t + \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$$

(para $t=2,3,\ldots.,40$)

CON $y_{1,1}=10$

$y_{2,1}=10$

siendo $\begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$: vectores aleatorios normales, de media cero y covarianza I, serialmente incorrelados.

Vamos a resolver el problema, utilizando el teorema II.5.2. Una vez obtenidas realizaciones de los procesos de perturbación, podremos calcular los valores de m_t y de las variables de estado para el sistema controlado. Antes de analizar los resultados numéricos obtenidos, vamos a plantear algunas cuestiones que nos parece interesante estudiar.

1) Cabe observar que el sistema comienza en un estado diferente el que queremos llegar, por lo que tiene sentido preguntarse:

i) Si podremos llevar el sistema cerca de los valores objetivo prefijados para cada variable de estado. Nótese que $y_{1t}=5$, $y_{2t}=3$ sería la solución que minimizaría la función objetivo sin restricciones. Sin embargo, la existencia de restricciones hará, en general, inaccesible tal solución.

ii) Si existe punto de equilibrio (estado estacionario), para la parte determinística del sistema controlado.

iii) Si el sistema controlado es asintóticamente estable, ya que si existe estado estacionario y el sistema - controlado es asintóticamente estable, al sistema convergerá al estado estacionario, que en general será distinto del (5,3).

iv) Si el sistema converge, ¿A qué velocidad?. Es decir ¿Cuántos períodos tardaremos en estar "suficientemente" cerca?.

v) La relación entre la distancia al estado al - que se tiende y el tamaño de los shocks exógenos del sistema

2) Efectos que sobre la solución, tiene la modificación de algunos parámetros del sistema. En particular:

i) Cambio en los coeficientes de la variable de control m_t. Si se incrementa, por ejemplo, la primera componente del vector coeficiente de m_t, estamos incrementando el efecto de m_t sobre y_{1t}, por lo que se necesitará por una parte, una intervención menor de la autoridad monetaria para conseguir un objetivo determinado en y_{1t}, pero, por otra parte, esa menor intervención hará difícil el logro del objetivo de y_{2t}. Si por el contrario, hacemos prioritario la consecución del objetivo de y_{2t}, entonces el mayor coeficiente de m_t en la variable y_{2t} puede producir cierta inestabilidad en el sistema.

ii) Cambio en la matriz de coeficientes de las expectativas, para permitir la posibilidad de efectos cruzados entre y_{1t}, y_{2t}.

La Teoría Económica sugiere que si la inflación esperada sube, ello provoca una subida en los tipos de interés nominales, por lo que nos plantearemos el caso en que la matriz vale $\begin{pmatrix} ½ & 0 \\ ½ & 1/4 \end{pmatrix}$

iii) Los coeficientes de m_t varían en el tiempo. Es decir, el efecto de la variable de política varía en el tiempo.

iv) Comparación con el caso en que la matriz $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ fuera cero. Es decir, con el caso del sistema sin expectativas.

Para el problema dado, hemos simulado las perturbaciones aleatorias, en las condiciones del enunciado, obteniendo para m_t, control óptimo, los valores que aparecen en el gráfico 3, siendo los valores de y_{1t}, y_{2t} del sistema controlado, los que aparecen en el gráfico 4.

La evolución del sistema controlado viene dada -

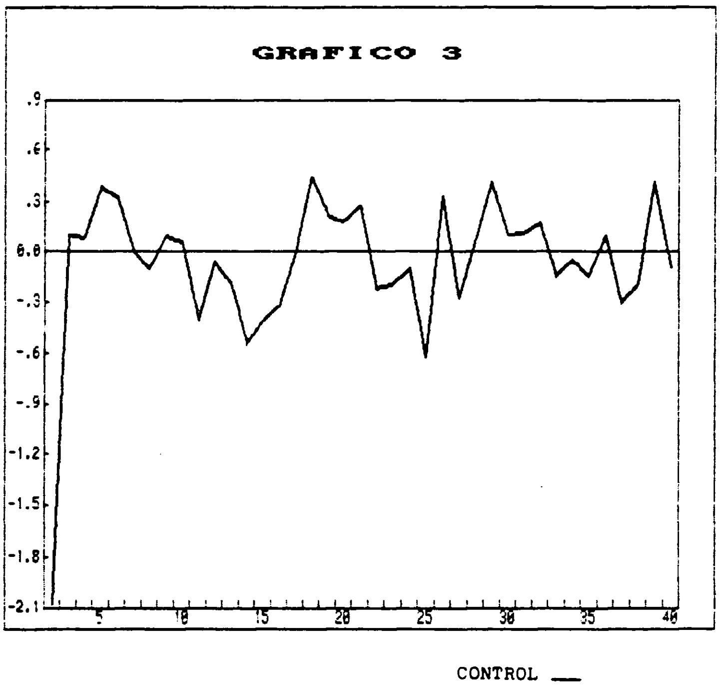


GRAFICO 3
.9
.6
.3
0.0
-.3
-.6
-.9
-1.2
-1.5
-1.8
-2.1
5
10
15
20
25
30
35
40
CONTROL

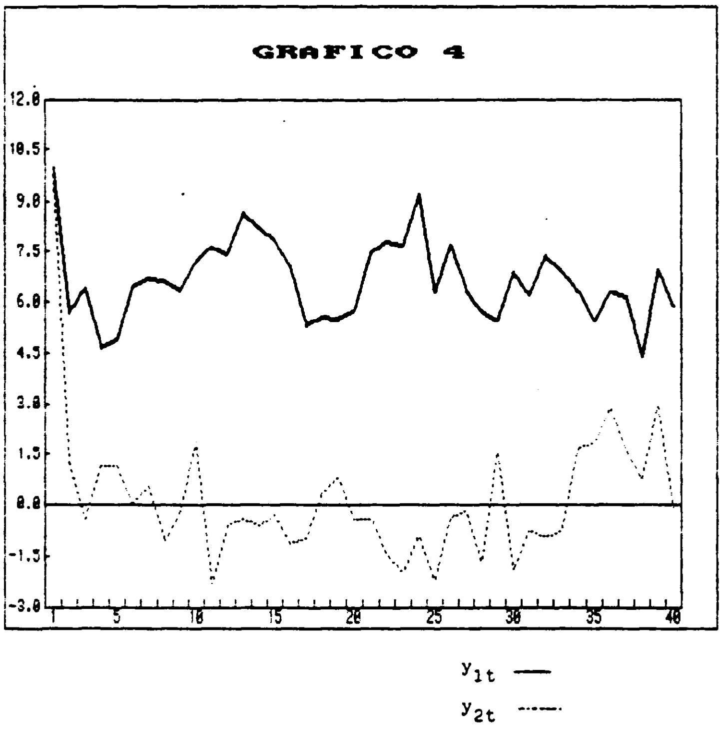


GRAFICO 4
12.0
10.5
9.0
7.5
6.0
4.5
3.0
1.5
0.0
-1.5
-3.0
1
5
10
15
20
25
30
35
40
y_{1t}
y_{2t}

por:

$$y_t=P_t y_{t-1}+s_t+v_t$$

en donde las matrices P_t y los vectores s_t vienen determinados por los parámetros del problema. En los listados observamos que se estabilizan en los valores:

$$P=\begin{pmatrix} 0.29 & -0.15 \\ -0.36 & 0.18 \end{pmatrix} \quad ; \quad s=\begin{pmatrix} 4.61 \\ 2.36 \end{pmatrix}$$

por lo que podemos calcular el estado estacionario (o punto de equilibrio) de la parte determinística del sistema controlado: $y_t=Py_{t-1}+s$, obteniendo $\bar{y}=\begin{pmatrix} 6.48 \\ 0.03 \end{pmatrix}$. Además, los autovalores de P son $\lambda_1=0$; $\lambda_2=0.47$ (son menores que uno en valor absoluto), por lo que el sistema es asintóticamente estable, lo cual quiere decir que cualquiera que sea el estado inicial, el sistema controlado se aproximará al estado estacionario, exceptuando la influencia de las perturbaciones aleatorias.

En los resultados vemos que en el período 2 (el primero en el que se actúa sobre el sistema), el valor de la variable de control es grande, en valor absoluto, (hay contracción de la oferta monetaria), con lo que se consigue llevar al sistema cerca del estado estacionario ya en el período 2. En los demás períodos parece que la variable de control sólo contrarresta los valores de las perturbaciones aleatorias (hay acomodación de la oferta monetaria) y el sistema controlado se mantiene en torno al valor que ya alcanzaba en el período 2.

Observamos también, a la vista de los ruidos que hemos obtenido, que desviaciones mayores o menores del estado estacionario se corresponden exactamente con valores mayores o menores de las variables v_t . Por otra parte, hemos hecho otras pruebas para diferentes covarianzas de los vectores v_t, de la forma αI, en lugar de I, notando que el efecto sobre el sistema consiste simplemente en ampliar esas desviaciones si $\alpha > 1$ y disminuirlas si $\alpha < 1$ sin cambiar en lo demás, la forma del gráfico.

A continuación vamos a estudiar los casos señalados en el apartado 2).

i) A la vista de que en el caso estudiado anteriormente, la variable de estado y_{2t} se aproximaba al valor estacionario 0.03, en lugar del valor 3, objetivo prefijado, y por tanto quedaba por debajo de lo que desearíamos, nos planteamos el caso en que se incremente el efecto de m_t sobre y_{2t}, aumentando su coeficiente en el sistema, para ver si de esa manera nos podemos aproximar más al objetivo prefijado.

Por tanto, modificamos el problema original, cambiando $\binom{1}{1}$, coeficiente de m_t, por $\binom{1}{3}$. Los resultados que hemos obtenido, para los mismos ruidos que han aparecido en el caso anterior, aparecen en los gráficos 5 y 6.

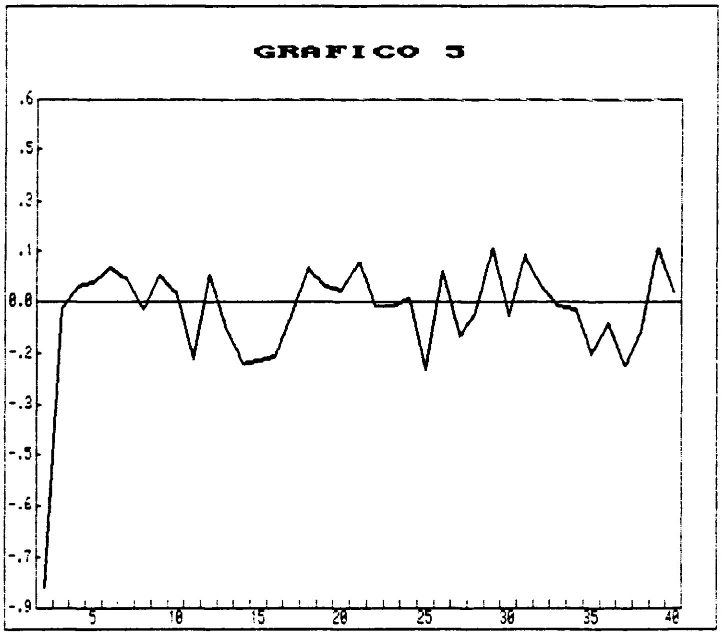
En este caso la evolución del sistema controlado viene dada por

$$y_t = P_t y_{t-1} + s_t + v_t$$

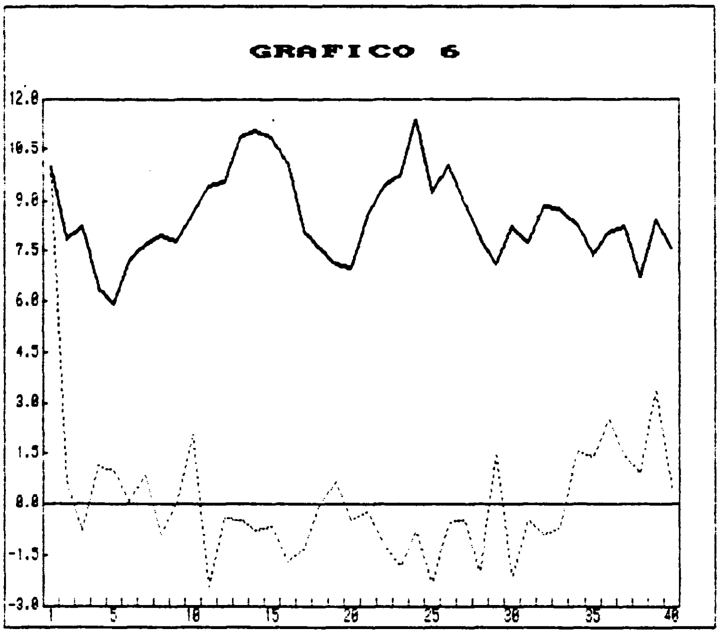
Las matrices P_t, y los vectores s_t se estabilizan en los valores:

$$P = \begin{pmatrix} .66 & -.11 \\ -.36 & .06 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 2.78 \\ 2.98 \end{pmatrix}$$

ii) Caso en que hay efectos cruzados entre y_{1t}, y_{2t}



CONTROL ——



y_{1t} ——

y_{2t} ------

Suponemos que cambiamos la matriz de coeficientes de las expectativas teniendo ahora $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1/4 \end{pmatrix}$, en lugar de $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Volvemos al vector $\binom{1}{1}$ como coeficiente de m_t.

Para las mismas realizaciones de las perturbaciones aleatorias que en los casos anteriores obtenemos los resultados, que aparecen en los gráficos 7 y 8.

En el gráfico 8 se observa, a diferencia de los casos anteriores una gran correlación entre y_{1t}, y_{2t}. Se ve que y_{2t} "va siguiendo" a y_{1t} con un poco de retraso.

El estado estacionario es, en este caso, $\bar{y}=\binom{4.27}{4.18}$ El sistema controlado es, además, asintóticamente estable. - Como en los casos anteriores vemos que hay una fuerte contracción de la oferta monetaria en el periodo 2 y acomodación en los demás períodos. El sistema controlado se aproxima al estado estacionario desde el período 2.

iii) Caso en que los coeficientes de m_t varían - en el tiempo.

Hemos estudiado, a) caso en que los coeficientes son $\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{t} \\ 1+\frac{1}{t} \end{pmatrix}$, es decir, disminuyen en el tiempo. b) Caso en que los coeficientes aumentan en el tiempo, siendo $\begin{pmatrix} 1-1/t \\ 1-1/t \end{pmatrix}$

En ambos casos hemos obtenido que el sistema controlado no cambia con respecto al caso de coeficientes $\binom{1}{1}$ y que el control óptimo, en este caso es:

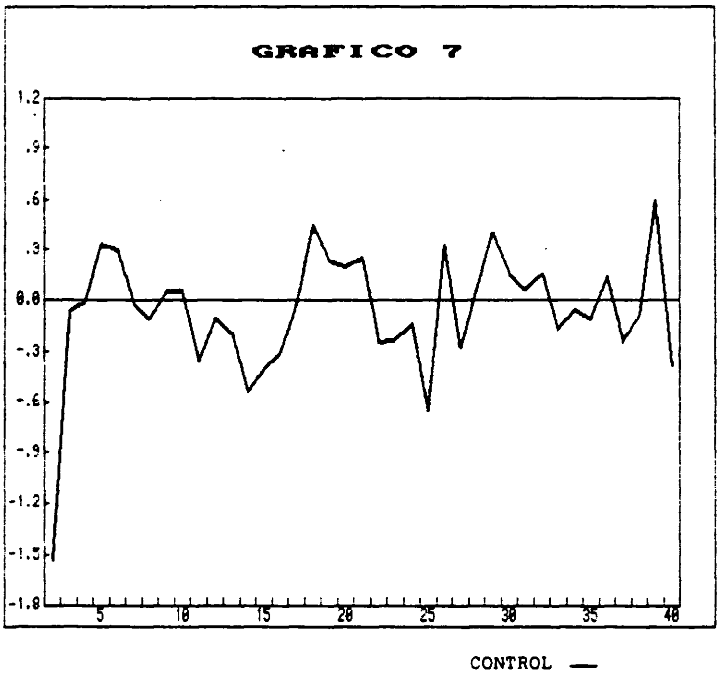
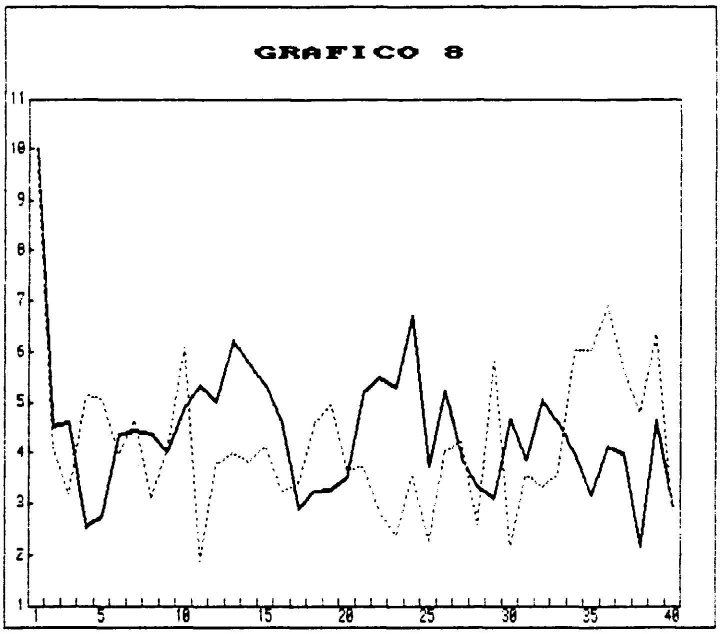


GRAFICO 7
1.2
.9
.6
.3
0.0
-.3
-.6
-.9
-1.2
-1.5
-1.8
5
10
15
20
25
30
35
40
CONTROL



y_{1t} —

y_{2t} -·-·-

$m_t = \dfrac{1}{c_t}\, m_t$, siendo m_t, control óptimo para el caso de coeficientes $\binom{1}{1}$ y siendo $c_t = 1 + \frac{1}{t}$, en el caso a) $c_t = 1 - \frac{1}{t}$, en el caso b).

Se obtiene, por tanto, un resultado de neutralidad, en el sentido de que estos cambios no influyen para nada en los valores de las variables de estado.

iv) Caso de que en el sistema no aparecieran expectativas, o lo que es lo mismo, $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$. Estamos ante un problema habitual de optimización dinámica lineal cuadrático.

Expresamos los resultados en los gráficos 9 y 10

En este caso el sistema es asintoticamente estable y el estado estacionario es $\bar{y} = \binom{4.89}{3.22}$

Hay que destacar el hecho de que, a diferencia de los casos anteriores tiene que haber una expansión monetaria mantenida.

Para terminar con este apartado queremos comentar el caso en que el sistema es

$$(*)\quad \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^*_{1,t+1/t-1} \\ y^*_{2,t+1/t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} m_t + \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$$

(simplemente hemos cambiado a_{22}, poniendo $\frac{1}{2}$, en lugar de 1/4).

En este caso el sistema controlado evoluciona según la ecuación

$$y_t = P_t y_{t-1} + s_t + v_t$$

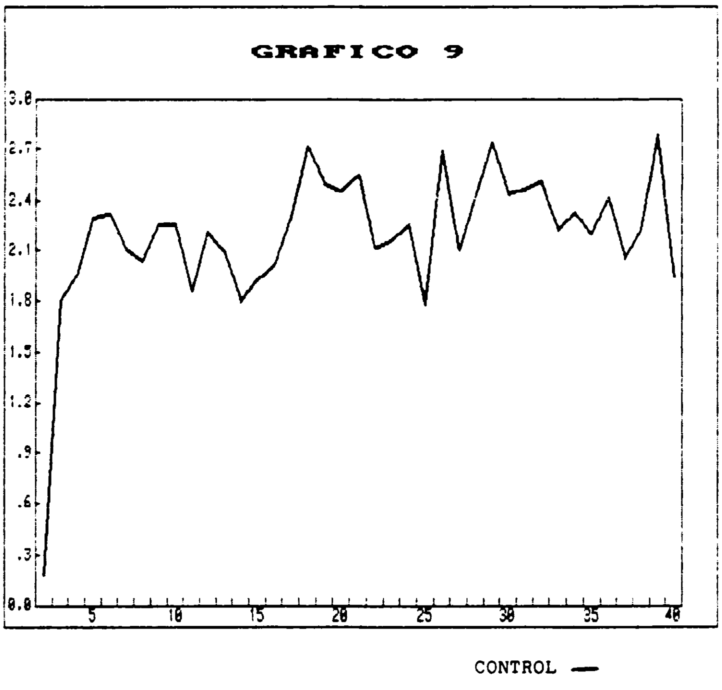
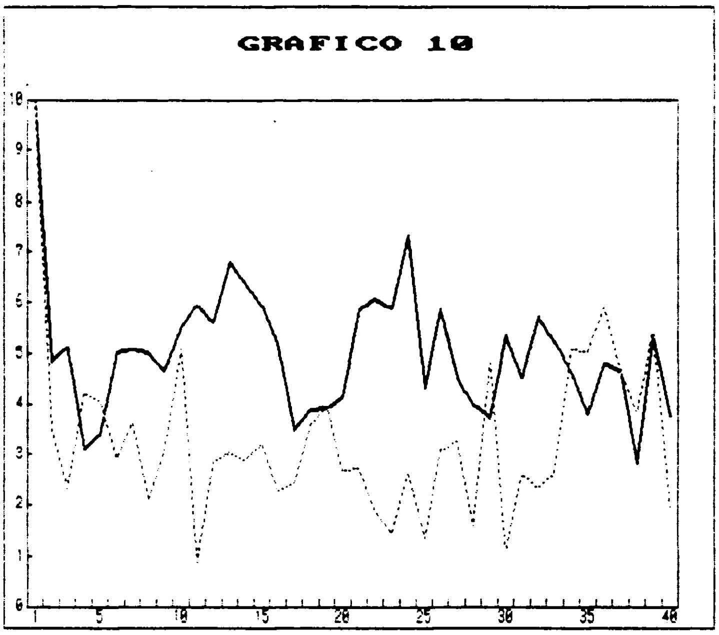


GRAFICO 9
3.0
2.7
2.4
2.1
1.8
1.5
1.2
.9
.6
.3
0.0
5
10
15
20
25
30
35
40
CONTROL



y_{1t} —

y_{2t} ----

pero $P_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $s_t = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, para cada t

Prescidiendo de las perturbaciones aleatorias v_t y, partiendo de unas condiciones iniciales $\bar{y}_{11} = A$; $\bar{y}_{21} = B$, - para el período 1, vemos que:

$$y_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A-B}{2} + 4 \\ \frac{B-A}{2} + 4 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A-B+4}{2} \\ \frac{B-A+4}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A-B}{2} + 4 \\ \frac{B-A}{2} + 4 \end{pmatrix}$$

$$y_t = y_3 = y_2, \quad \forall t \geq 3$$

Estamos claramente ante un sistema no controlable Si en el sistema dado exceptuamos las expectativas y las perturbaciones aleatorias, nos queda el sistema

$$(**) \quad \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} m_t$$

La matriz $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ tiene rango 1

luego es un sistema no controlable. Es posible, por tanto, - que exista relación entre la no controlabilidad de este sistema (*) y la del sistema (**), aunque no tenemos resultados teóricos que nos lo aseguren. Es un problema que queda abierto.

C O N C L U S I O N E S

Nuestro trabajo, en la línea de los artículos de Aoki-Canzoneri (1979), Chow (1980), Driffill (1981) y Buiter (1983) y en contra de la idea defendida por Kydland y Prescott (1977), confirma que los métodos de control óptimo sí son aplicables a sistemas económicos formulados con expectativas racionales, aunque requieren un tratamiento especial. En algunos casos necesitamos operar de determinada manera en el sistema y expresarlo de otra forma adecuada para poder utilizar los métodos usuales en teoría de control, en otros casos tenemos que elaborar unas variantes especiales de esos métodos para que se puedan utilizar en modelos con expectativas racionales.

La clase de modelos tratada en este trabajo es de gran interés en Economía: Bajo ciertas condiciones, el equilibrio general de una economía puede obtenerse como la solución a un problema de optimización resuelto por un agente planificador.

Generalmente, se asigna un significado negativo a las fluctuaciones que las variables económicas más relevantes como tasa de inflación, nivel de actividad o tipo de interés (vector de estado), experimentan alrededor de sus valores objetivo, lo que puede representarse por una función de pérdida cuadrática como la que hemos considerado. Por otra parte, en un contexto de incertidumbre, el valor actual del vector de estado, dependerá no sólo de su propio pasado, así como del control que se aplique sobre el sistema, sino también de las expectativas que los agentes económicos tengan, acerca de la evolución futura de dicho vector. Todo ello puede representarse por un modelo como el aquí considerado.

Los principales resultados que hemos obtenido en este trabajo son los siguientes:

- Para modelos con expectativas futuras (aquellos en que el valor de la variable de estado y_t depende de las expectativas $y^*_{t/t-1}$ e $y^*_{t+1/t-1}$):

Se generaliza el resultado de Chow (1980) para el caso general (sin exigir coeficientes constantes ni que el sistema se haga estacionario en covarianza a través del tiempo), eliminando algunas imperfecciones que aparecían en su trabajo y que discutimos en el nuestro. Se demuestra que nuestro resultado es más general que el de Chow y que, bajo determinadas condiciones, ambos resultados coinciden. Se estudia, como caso particular, la versión determinística del problema. Se aplican los resultados obtenidos a unos ejemplos económicos.

Se plantea, estudia y resuelve el problema de estimación, el problema de control y la relación entre ambos, en el caso de información incompleta. Estos problemas no aparecen desarrollados en la literatura. A pesar del consenso existente entre economistas en el sentido de que las series de datos económicos tienen siempre un componente de error de observación, es muy escaso el tratamiento que se ha dado en Economía a los modelos de optimización estocástica con información incompleta.

- Para modelos que incorporan expectativas de variables actuales tomadas en el pasado (aquellos en que el valor de la variable de estado y_t depende de las expectativas $y^*_{t/t-1}$, $y^*_{t/t-2}$, ..., $y^*_{t/t-p}$):

Se resuelve el problema de control para el caso de información completa, con p=2. Se resuelve el problema de estimación para el caso de información incompleta, con p cualquiera.

Entre las posibles líneas de trabajo, a partir de los resultados obtenidos, podemos señalar:

- El caso de horizonte infinito:

Para modelos con expectativas futuras nos hemos planteado el problema de control para horizonte infinito, suponiendo que el problema: es determinístico; tiene $a_t=b_t=0$, $\forall t$; las matrices $\tilde{B}_{1t}=\tilde{B}_1$; $\tilde{A}_t=\tilde{A}$; $\tilde{C}_t=\tilde{C}$; $K_t=K$ - son constantes en el tiempo. Es decir, hemos considerado el siguiente problema:

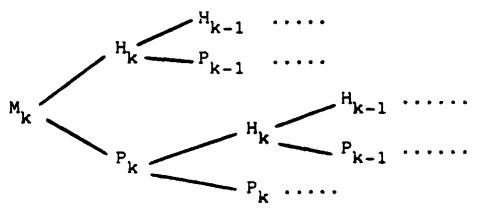
$$\text{MIN } V(y_o) = \sum_{t=1}^{\infty} y_t' K y_t$$

$$y_t=\tilde{B}_1 y_{t+1}+\tilde{A} y_{t-1}+\tilde{C} x_t, \text{ con } y_o, \text{ dado.}$$

Hemos intentado resolver el problema por dos métodos distintos: el que se utiliza en Bertsekas (1976) y el que aparece en Gihman-Skorohod (1979). Por los dos métodos llegamos a una situación en que necesitamos establecer condiciones que nos aseguren la convergencia de las matrices M_k siguientes:

$$\begin{aligned} M_k=(& \left[I- \left[\tilde{B}_1+\tilde{C} \quad -(\tilde{C}'H_k\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'H_k\tilde{B}_1\right] P_{k-1}\right]^{-1} \\ & \left[\tilde{A}+\tilde{C}\left[-(\tilde{C}'H_k\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'H_k\tilde{A}\right]\right])' \; H_k \\ & \left[I - \left[\tilde{B}_1+\tilde{C} \left[-(\tilde{C}'H_k\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'H_k\tilde{B}_1\right] P_{k-1}\right]^{-1} \right. \\ & \left. \left[\tilde{A}+\tilde{C}\left[-(\tilde{C}'H_k\tilde{C})^{-1}\tilde{C}'H_k\tilde{A}\right]\right]\right] \end{aligned}$$

con las relaciones de dependencia siguientes::



problema que no hemos resuelto.

- Para modelos con expectativas de variables actuales tomadas en el pasado, falta por estudiar el problema de control en información completa para $p > 2$ así como el problema de control en información incompleta para cualquier p.

- Estudiar los mismos problemas para el caso de tiempo contínuo. Su interés sería, en principio, puramente teórico, ya que, para facilitar su relación con el trabajo empírico, la mayor parte de trabajos sobre expectativas racionales y su aplicación a modelos concretos, se refieren a tiempo discreto.

- Estudiar el caso en que algunos coeficientes del sistema sean estocásticos.

- Estudiar los sistemas con expectativas racionales en dominio frecuencia (como en Whiteman, 1983) y estudiar las estrategias de control de mínima varianza, en la línea del capítulo VI de Astrom (1970).

- Analizar lineas adicionales de aplicación de la metodología aqui desarrollada a modelos económicos concretos.

- En cuanto al caso de sistemas no lineales, el problema es mucho más complicado (exceptuando los análisis que se hacen a partir de la aproximación lineal del sistema). Los métodos desarrollados en este trabajo no sirven para sistemas no lineales, ya que en ese caso no se pueden eliminar las expectativas de las variables endógenas , como en el caso lineal. Sobre modelos no lineales con expectativas racionales hay muy poco hecho, casi nada.

A P E N D I C E

A P E N D I C E

PROGRAMAS DE ORDENADOR PARA LOS EJEMPLOS 1 y 2 DEL CAPITULO V.

Hemos trabajado en un ordenador personal IBM, con 512K, equipado de un coprocesador matemático 8087, utilizando el paquete RATS. Versión 1.11 , 11/30/84.

PROGRAMA PARA EL EJEMPLO 1.

```
cal 40 1 1
all 20 89,1
eqv 1 to 7
v vaux y yaux control conaux f
*
dec vec shock (50)
seed 45
matrix shock = ran (1.0)
do i=1,50
   eval vaux(i)= shock (i)
end do i
*
set v 1 50 = vaux (t)
print 2 50 v
eval yaux (i) = 12.0
do i=2,50
    eval try1=i
    eval try2 =2*i+2
    eval try3 =tryi/try2
    set f i i = -try3
    set yaux i i = v(i)
    set conaux i i =f(i)* yaux (i-1)
end do i
*
```

```
set y 1 50 = yaux (t)
set control 2 50 = conaux (t)
print 1 50 y control
graph 1
# y 1 50
graph 1
# control 2 50
end
```

PROGRAMA PARA EL EJEMPLO 2.

```
bma compile 1500 global 500
EXP -       60
OPE -       10
DAT -      200
MAT -       30
GLO -      500
LOC -       10
CON -       50
COM -     1500
cal 40 1 1
all 25 79,1
clear
eqv 1 to 25
h11 h12 h21 h22 p11 p12 p21 p22 f1 f2 y1aux y2aux v1 v2 co-
naux
y1 y2 control v1aux v2aux s1 s2 hp1 hp2 fp
*
dec rect shock (40,2)
seed 20
matrix shock = ran (1.0)
*
do i = 1,40
eval v1aux (i) = shock (i,1)
eval v2aux (i) = shock (i,2)
end do i
*
```

```
set v1  1 40 = v1aux (t)
set v2  1 40 = v2aux (t)
print 2 40 v1 v2
eval y1aux (1) = 10.
eval y2aux (1) = 10.
*
dec vec c (2)
dec rect a (2,2)
dec rect b (2,2)
*
eval lambda = .50
*
eval c (1) = 1.
eval c (2) = 1.
eval a (1,1) = lambda
eval a (2,2) = .50*lambda
eval a (1,2) = .0
eval a (2,1) = .0
dec rect id2(2,2)
matrix id2 = iden (1.0)
eval b (1,1) = .50
eval b (1,2) = .0
eval b (2,1) = .0
eval b (2,2) = .50
*
dec vec ap(2)
eval alfa = 5.
eval rbeta = 3.
eval ap(1) = alfa
eval ap(2) = rbeta
*
eval h11 ((79,1))=1.0
eval h22 ((79,1))=1.0
eval h12 ((79,1)) = .0
eval h21 ((79,1)) = .0
*
```

```
dec vec hp(2)
eval hp(1) = alfa
eval hp(2) = rbeta
*
dec vec g(2)
dec vec gg (2)
dec vec f(2)
dec rect r (2,2)
dec rect rr (2,2)
dec rect p (2,2)
dec vec rp(2)
dec vec s(2)
*
matrix g = (tr (a)*(inv(tr(c)*))
matrix gg = (tr(b)*c)*(inv(tr(c)*c))
matrix r = a-(c*tr(g))
matrix rr = b-(c*tr(gg))
matrix p = (inv (id2-rr))*r
dec vec faux (2)
matrix faux = g+(tr(p)*gg)
eval f(1) = -faux(1)
eval f(2) = -faux(2)
*
dec vec gp(1)
dec vec fpm(1)
matrix gp = (inv(tr(c)*c))*(tr(c)*hp)
matrix rp = c*gp
matrix s = (inv(id2-rr))*rp
matrix fpm = gp+(tr(gg))*s
*
eval p11 (40) = p (1,1)
eval p12 (40) = p (1,2)
eval p21 (40) = p (2,1)
eval p22(40) = p(2,2)
eval f1 (40) = f(1)
eval f2 (40) = f(2)
*
```

```
eval s1 (40) = s(1)
eval s2 (40) = s(2)
eval fp (40) = fpm(1)
eval hp1 (40) = hp(1)
eval hp2 (40) = hp(2)
*
dec rect hold(2,2)
dec rect pold(2,2)
dec rect hnew(2,2)
dec rect pnew(2,2)
*
dec vec hpold(2)
dec vec sold(2)
dec vec hpnew(2)
dec vec snew(2)
*
do i=1,39
eval c(1)=1.
eval c(2)=1.
*
eval pold(1,1) = p11(41-i)
eval pold(2,2) = p22(41-i)
eval pold(2,1) = p21(41-i)
eval pold(1,2) = p12(41-i)
*
eval hold(1,1) = h11(41-i)
eval hold(1,2) = h12(41-i)
eval hold(2,1) = h21(41-i)
eval hold(2,2) = h22(41-i)
*
eval hpold(1) = hp1(41-i)
eval hpold(2) = hp2(41-i)
eval sold(1) = s1(41-i)
eval sold(2) = s2(41-i)
*
```

```
matrix hnew = id2+tr(pold)*(hold*pold)
matrix g = (tr(a)*hnew*c)*(inv(tr(c)*(hnew*c)))
matrix gg = (tr(b)*hnew*c)*(inv(tr(c)*(hnew*c)))
matrix r = a-(c*tr(g))
matrix rr = b-(c*tr(gg))
matrix pnew = inv(id2-(rr*pold))*r
matrix faux = g+(tr(pold*pnew)*gg)
eval f(1) = -faux(1)
eval f(2) = -faux(2)
*
matrix hpnew = ap+(tr(pold))*(hpold-(hold*sold))
matrix gp = (inv(tr(c)*hnew*c))*(tr(c)*hpnew)
matrix rp = c*gp
matrix snew = (inv(id2-(rr*pold)))*(rp+(rr*sold))
matrix fpm = gp+(tr(gg)*((pold*snew)+sold))
*
eval p11(40-i) = pnew(1,1)
eval p12(40-i) = pnew(1,2)
eval p21(40-i) = pnew(2,1)
eval p22(40-i) = pnew(2,2)
*
eval h11(40-i) = hnew(1,1)
eval h12(40-i) = hnew(1,2)
eval h21(40-i) = hnew(2,1)
eval h22(40-i) = hnew(2,2)
*
eval hp1(40-i) = hpnew(1)
eval hp2(40-i) = hpnew(2)
eval s1(40-i) = snew(1)
eval s2(40-i) = snew(2)
eval f1(40-i) = f(1)
eval f2(40-i) = f(2)
*
eval fp(40-i) = fpm(1)
*
end do i
*
```

```
do i=2,40
eval y1aux(i) = p11(i)*y1aux(i-1)+p12(i)*y2aux(i-1)+v1(i)+s1(i)
eval y2aux(i) = p21(i)*y1aux(i-1)+p22(i)*y2aux(i-1)+v2(i)+s2(i)
end do i
*
do i=2,40
eval conaux (i) = f1(i)*y1aux(i-1)+f2(i)*y2aux(i-1)+fp(i)
end do i
*.
set y1 1 40 = y1aux(t)
set y2 1 40 = y2aux(t)
set control 1 40 = conaux (t)
*
print 1 40 y1 y2 control
graph 2
# y1 1 40
# y2 1 40
graph 1
# control 2 40
*
end
```

B I B L I O G R A F I A

AOKI, M. (1976).- "Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis". North Holland.

AOKI, M. y CANZONERI, M. (1979).- "Reduced forms of Rational Expectations models". The Quarterly Journal of Economics, February.

ASTROM, K.J. (1970).- "Introduction to Stochastic Control Theory." Academic Press.

ATTFIELD, Demery, Duck (1985).- "Rational Expectations in Macroeconomics. An Introduction to theory and Evidence." Basil Blackwell.

BEGG, D. (1982).- "The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics. Theories and evidence". Philip Allan.

BERTSEKAS, D. (1976).- "Dynamic Programming and Stochastic Control". Academic Press.

BROZE, SZAFARZ (1984).- "On linear models with rational expectations which admit a unique solution". European Economic - Review 24, pág. 103-111.

BUITER, W. (1983).- "Expectations and control theory". Economie appliquée, Nº 1, pág. 129-156.

BURMEISTER; WALL (1982).- "Kalman Filtering Estimation of Unobserved Rational Expectations with an Application to German Hyperinflation". Journal of Econometrics, 11.

CAGAN, P. (1956).- "The monetary dynamics of hyperinflation"in M. Friedman (ed.), studies in the Quantity theory of Money". University of Chicago Press.

CALVO, G. (1978).- "On the time Consistency of Optimal Policy in a Monetary Economy". Económetrica, vol. 46, nº 6.

CHOW, G. (1975).- "Analysis and Control of Dynamic Economic - Systems". John Wiley sons.

CHOW, G. (1980).- "Econometric Policy Evaluation and Optimization under rational expectations". Journal of Economic Dynamics and Control vol. 2, nº 1, pág. 47-59.

CHOW, G. (1981).- "Econometric Analysis by Control Methods". - John Wiley and sons.

CHOW, G. (1981).- "Estimation and Optimal Control of Dynamic - Game Models under Rational Expectations". En Rational Expectations and Econometric practice Lucas y Sargent (ed.) pág. 681-689.

CHOW, G. (1983).- "Econometrics". Mc Graw-Hill.

DORNBUSCH; FISCHER (1985).- "Macroeconomía". Mc Graw-Hill.

DRIFFILL, E.J. (1981).- "Time Inconsistency and "rules vs. - discretion" in Macroeconomic Models with Rational Expecta tions". Discussion Papers in Economics and Econometrics. - University of Southampton.

FISCHER, S. (1980).- "Dynamic inconsistency, cooperation and the benevolent dissembling government". Journal of Economic Dynamics and Control 2. Pág. 93-107.

FISCHER, S. (ed.) (1980).- "Rational Expectations and Economic Policy". The University of Chicago Press.

FRIEDMAN, B.M. (1975).- "Economic Stabilization Policy. Methods in Optimization". North Holland.

GIHMAN, I.I.; **SKOROHOD**, A.V. (1979).- "Controlled Stochastic - Processes". Springer-Verlag.

HOLLY, S.; **ZARROP**, M.B. (1983).- "On optimality and time consistency when expectations are rational". European Economic Review 20 pág. 23-40.

KENDRICK, D (1976).- "Applications of control theory to macroe conomics". in Frontiers of Quantitative Economics. Intrilli gator (ed.). North-Holland.

KENDRICK, D. (1981).- "Stochastic control for economic models". Mc Graw-Hill.

KYDLAND y PRESCOTT (1977).- "Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans". Journal of Political Econo my, vol 85, nº 3.

LUCAS y SARGENT (ed.) (1981).- "Rational Expectations and Econo metric Practice". George Allen Unwin.

MINFORD and PEEL (1983).- "Rational Expectations and the new - Macroeconomics". Martín Robertson.

MISHKIN, F.S. (1983).- "A Rational Expectations Approach to Ma croeconometrics". The University of Chicago Press.

MODIGLIANI, F.; **GRUNBERG**, E. (1954).- "The predictability of social events". Journal of Political Economy 62, December - pág. 465-478.

MURATA, Y. (1982).- "Optimal Control Methods for Linear Discrete-Time Economic Systems". Springer-Verlag.

MUTH, J. (1961).- "Rational Expectations and the Theory of -- Price movements". Econométrica, vol. 29, nº 6.

PESARAN, M. H. (1981).- "Identificación of rational expecta-- tions models". Journal of Econometrics 16, pág. 375-398.

PINDYCK, R.S. (1973).- "Optimal Planning for Economic Stabilization". North Holland.

PITCHFORD y TURNOVSKY (ed.) (1977).- "Applications of Control Theory to Economic Analysis". North Holland.

PRESCOTT, E.C. (1977).- "Should Control Theory be Used for -- economic Stabilization". in Optimal policies Control Theory and Technology Exports. K. Brunner and A.H. Meltzer (eds). North Holland.

SCHONFELD, P. (1984).- "Dynamic linear models with rational - expectations of current endogenons variables". en Operations Research and Economic theory. Edited by H. Hanptmann, W. - Krelle y K.C. Mosler. Springer-Verlag. Berlin.

SHAW, G.K. (1984).- "Rational expectations. An elementary exposition". St. Martin's Press.

SHEFFRIN, S. (1983).- "Rational Expectations". Cambridge University Press.

SHILLER, R. (1978).- "Rational expectations and the dynamic - structure of macroeconomic models. A critical review". Journal of Monetary Economics 4, pág. 1-44.

SIMON, H.A. (1956).- "Dynamic programming Under Uncertainty - with a Quadratic Criterion Function". Econométrica, 24 (1), pág. 74-81.

STUTZER, M. J. (1984).- "Time consistency of optimal plans: An elementary primer". Federal Reserve Bank of Minneapolis. Research Department Staff Report 91.

TAYLOR, J. (1977).- "On conditions for unique solutions in stochastic macroeconomic models with price expectations". Económetrica 45. November.

THEIL, H. (1958).- "Economic Forecasts and Policy". North- -- Holland. Amsterdam.

VISCO, I. (1981).- "On the derivation of reduced forms of ra- tional expectations models". European Economic Review 16 Pág. 355-365.

VISCO, I. (1984).- "On linear models with rational expectations An addendum." European Economic Review 24, pág. 113-115.

WALLIS, K. (1980).- "Econometric implications of the Rational Expectations Hypothesis". Econometrica vol 48, nº 1.

WHITEMAN, C. (1983).- "Linear Rational Expectations Models: A User's Guide". University of Minnesota press.