

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS



TESIS DOCTORAL

**Método general de análisis del campo de tensiones alterado
por defectos intrínsecos o de diseño**

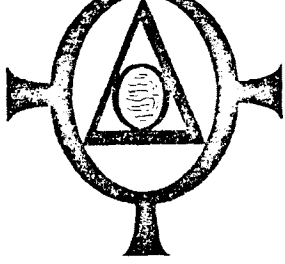
MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Francisco Molleda Sánchez

DIRECTOR:

Carlos Núñez Alvarez

Madrid, 2015



Departamento
de
Metalurgia

FACULTAD DE QUIMICA - UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5322347940

TI

684.01

72

METODO GENERAL DE ANALISIS DEL CAMPO DE TENSIONES

ALTERADO POR DEFECTOS INTRINSECOS O DE DISEÑO

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE - MADRID
Facultad de Ciencias Químicas
BIBLIOTECA
Nº Registro33627.....

Memoria presentada por
Francisco Molleda Sanchez
para aspirar al grado de
Doctor en Ciencias,
Sección Químicas
Madrid, septiembre 1978.



DEDICATORIA

A mis padres Ramón y Laura

A mi mujer M^a. Begoña

A mis hijos Francisco y Ramón



AGRADECIMIENTO

En primer lugar, quiero agradecer a mi profesor el Dr. D. Carlos Nuñez Alvarez, la dirección, la constante dedicación y la ayuda que me prestó a lo largo - de este trabajo, pero quizás debería resaltar, la gran ilusión que me inculcó siempre por el trabajo que había emprendido, dentro del campo de la Metalurgia.

Así mismo, mi agradecimiento al Prof. Dr. D. - Felipe A. Calvo, por su continuo estímulo y ayuda, y por todas las facilidades ofrecidas, sin las cuales - no hubiera podido realizarse este trabajo.

A mi mujer M^a Begoña, por su constante estímulo y por su ayuda a la hora de mecanografiar esta Memoria.

A mi hermana Laura, por poner a mi disposición, sus conocimientos matemáticos que me han servido para concluir este trabajo.

A todos mis compañeros del Dpto. de Metalurgia , por haber conseguido crear un ambiente propicio para el trabajo, y mantener constantemente la ilusión de cada - persona.



METODO GENERAL DE ANALISIS DEL CAMPO DE TENSIONES ALTERADO POR
DEFECTOS INTRINSECOS O DE DISEÑO

I.- INTRODUCCION.	7
1-1.- CONSECUENCIAS DE LA EXISTENCIA DE DEFECTOS EN LOS MATERIALES.	7
1-2.- NUCLEACION DE MICROGRIETAS Y EXALTACION DE LA TENSION.	10
1-3.- FUNCIONES DE TENSION Y CALCULO DEL ESTADO DE TENSION EN UN PUNTO.	17
II.- PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL Y EQUIPO.	22
2-1.- PREPARACION DE MODELOS Y BREVE DESCRIPCION DEL METODO FOTOELASTICO.	22
2-1-1.- BIRREFRINGENCIA NATURAL Y ACCIDENTAL.	25
2-1-2.- COMPOSICION DE VIBRACIONES: LUZ ELIPTICA, CIRCULAR Y NATURAL.	27
2-1-3.- EXAMEN CON LUZ BLANCA DE UN MODELO SOMETIDO A UN ESTADO DE TENSION .	36
2-2.- CALIBRADO Y CONSTANTE FOTOELASTICA.	42
2-2-1.- CALIBRADO : MEDIDA DE LA CONSTANTE FOTOELASTICA.	42
2-2-2.- CALCULO DE LA TENSION MAXIMA CORRESPONDIENTE A CADA ORDEN DE FRANJA.	50



2-3.- EQUIPO EXPERIMENTAL.	52
2-3-1.- EQUIPO	52
2-3-2.- BANCO DE CARGA	58
2-3-3.- MODELOS FOTOELASTICOS	61
III.- ESTUDIO TEORICO: SOLUCIONES ANALITICAS.	68
3-1.- DETERMINACION DE LAS FUNCIONES DE TENSION.	68
3-1-1.- LAMINA CON UN ORIFICIO CIRCULAR SOMETIDA A TRACCION UNIAXIAL.	82
3-1-2.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA.	86
3-1-3.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL CONTORNO CIRCULAR.	105
3-1-4.- ESTADO DE TENSION EN PUNTOS QUE ESTAN SOBRE EL CONTORNO DEL ORIFICIO CIRCULAR.	118
3-2.- PLACA CON UN ORIFICIO ELIPTICO SOMETIDA A UN ESTADO DE TRACCION UNIAXIL.	125
3-2-1.- CALCULO DEL ESTADO DE TENSION EN UN PUNTO, PARA UN MODE LO CON ORIFICIO ELIPTICO.	144
3-2-2.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA, PARA EL MODELO CON ORIFICIO ELIPTICO.	146
3-2-3.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL CONTORNO DEL ORIFICIO ELIPTICO.	185



3-2-4.- ESTADOS DE TENSION EN PUNTOS QUE ESTAN SOBRE EL CONTORNO DEL ORIFICIO ELIPTICO.	197
3-3.- PLACA CON UNA GRIETA ORIENTADA TRANSVERSALMENTE A LA DIRECCION DE APLICACION DE LA CARGA.	201
3-3-1.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE TENSION MAXIMA, PARA UN MODELO QUE CONTIENE UNA GRIETA.	213
3-3-2.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL VERTICE DE LA GRIETA.	221
3-4.- PLACA CON UN ORIFICIO CIRCULAR, SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIAL.	227
3-4-1.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE TENSION MAXIMA.	231
3-4-2.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL CONTORNO DEL ORIFICIO CIRCULAR.	236
3-5.- PLACA CON UN ORIFICIO ELIPTICO SOMETIDA A TRACCION BIAXIAL.	242
3-6.- PLACA CON UNA GRIETA SOMETIDA A UN ESTADO DE TRACCION BIAXIAL.	247
3-6-1.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE TENSION MAXIMA.	252
3-6-2.- SOLUCION DE WESTERGAARD PARA EL MODELO DE PLACA CON UNA GRIETA SOMETIDA A TENSION BIAXIAL.	256
3-6-3.- TRANSFORMACION ISOMETRICA DE LA ECUACION DE LA ISOCROMA, ENCONTRADA EN EL APARTADO ANTERIOR.	260



3-7.- PLACA CON DOS GRIETAS ALINEADAS Y SOMETIDA A UN ESTADO DE TRACCION UNIAXIL.	268
IV.- RESULTADOS EXPERIMENTALES.	271
4-1.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA PLACA CON ORIFICIO CIRCULAR.	271
4-2.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON ORIFICIO ELIPTICO.	275
4-3.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UNA GRIETA TRANSVER <u>S</u> AL A LA DIRECCION DE APLICACION DE LA CARGA.	284
4-4.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UN ORIFICIO CIRCULAR Y SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIAL.	286
4-5.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UN ORIFICIO ELIPTI <u>C</u> O SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIAL.	288
4-6.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UNA GRIETA SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIAL.	290
4-7.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON DOS GRIETAS ALINEA <u>A</u> DAS Y SOMETIDA A TENSION UNIAXIAL.	293
V.- DISCUSION.	296
VI.- CONCLUSIONES.	327
VII.- BIBLIOGRAFIA.	331



I.- INTRODUCCION

1-1.- CONSECUENCIAS DE LA EXISTENCIA DE DEFECTOS EN
LOS MATERIALES

1-2.- NUCLEACION DE MICROGRIETAS Y EXALTACION DE LA
TENSION

1-3.- FUNCIONES DE TENSION Y CALCULO DEL ESTADO DE
TENSION EN UN PUNTO



I.- INTRODUCCION

1.1. CONSECUENCIAS DE LA EXISTENCIA DE DEFECTOS EN LOS MATERIALES.

Un material homogéneo é isotropo se comporta, debido a los esfuerzos aplicados en su contorno, según está establecido en las teorías de la elasticidad y de la plasticidad, sin embargo, cuando en el interior de los sólidos existen discontinuidades ó - defectos, el comportamiento de los sólidos es completamente distinto.

La presencia de discontinuidades en los materiales, - ya sean debidas a necesidades de diseño o por defectos propios - - del material, ha sido y es actualmente objeto de gran preocupación y estudio, ya que su presencia modifica el campo de tensiones y - puede dar lugar al temido problema de la rotura frágil, que en general acarrea consecuencias imprevisibles y catastróficas, de ahí que las investigaciones más recientes estén encaminadas a determi-nar el campo de tensiones que produce dichas roturas frágiles, ha biéndose llegado a conclusiones importantes, como es el caso de - las tensiones exaltadas, que acompañan al crecimiento de grietas - y que por sí solas, ya constituyen una causa capaz de explicar el desencadenamiento de la rotura frágil. Por tanto, estas causas serían completamente conocidas, si se conociesen las expresiones que dan el estado de tensión en un punto por $\sigma_x, \sigma_y, \epsilon_{xy}$, o - bien por σ_1, σ_2 , en las proximidades del vértice de un defecto para cada modelo que contenga un tipo de defecto. Además a partir de estas expresiones sería calculable la expresión correspondien-



te a la cisión máxima asociada (τ_m), que permite la comprobación experimental de las mismas mediante el uso de una técnica de análisis de tensiones como es la FOTIELASTICIDAD, ya que los puntos en los que se verifica que la cisión máxima es constante, en FOTIELASTICIDAD constituyen las líneas isócronas (lugares geométricos de puntos del modelo, en los cuales la diferencia de tensiones principales es constante). La cisión máxima para estados de tensión planos está definida por $\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

Sin embargo, existen algunos criterios orientativos que pueden explicar la rotura frágil, de materiales como el vidrio. Así Griffith encontró, que la energía elástica acumulada en un material se empleaba en aumentar las dimensiones de una grieta preexistente hasta una longitud crítica, a partir de la cual la grieta se propaga bruscamente hasta la rotura, por tanto si E es la energía elástica acumulada por un material sometido a tensión, (dE/dA) es la energía de deformación elástica por unidad de área que se relaja en el proceso de rotura y si (dW/dA) es el trabajo de flujo plástico irreversible por unidad de superficie de grieta creada (este trabajo se nutre a expensas de la energía elástica acumulada por el material), se puede deducir que:

Si $(dE/dA) \leq (dW/dA)$ la rotura brusca no se producirá.

Si $(dE/dA) \geq (dW/dA)$ la grieta se propagará bruscamente autoalimentándose con la energía acumulada en el material.



Un procedimiento experimental que pretendía determinar la energía por unidad de superficie en aceros, consiste en el ensayo de resiliencia (5),(6),(7),(8),(9),(10),(11),(12), pero ya se ha visto que este ensayo mide varios tipos de energía a la vez, y que el desdoblamiento de la misma conduce a errores significativos.

Una magnitud que explica el desencadenamiento de la rotura frágil, es el llamado factor de intensidad de tensión (K_I), que da idea de como se distribuyen las tensiones en torno al vértice de una grieta), y la tenacidad de grieta o de rotura (K_{Ic}), que es el valor crítico del factor de intensidad de tensión, es decir - el valor para el cual la grieta se propaga bruscamente, y este factor de intensidad de tensión es considerado como la tensión exaltada en el vértice de la grieta (13).



1.2.- NUCLEACION DE MICROGRIETAS Y EXALTACION DE LA TENSION.

La nucleación de microgrietas en los materiales metálicos es debida en general a fenómenos de fatiga (17), que como es bien conocido son esfuerzos periódicos que actúan sobre el material alternativamente. El origen de estos defectos, tiene lugar a escala atómica y se explican con la Teoría de las dislocaciones.

Sin embargo vamos a ver algunos ejemplos puramente macroscópicos que pueden explicar de una forma satisfactoria los mecanismos de nucleación y propagación de grietas ó defectos.

A).- Cuando existe una interfase ó superficie de separación de dos zonas con diferente grado de deformación, tal como un límite de grano que separa dos regiones en que las orientaciones cristalinas han girado un cierto ángulo por deformación, una de las partes experimenta en una de sus fibras imaginarias una tensión de tracción debida a la cisión (τ), que actúa sobre ella, y cuyo valor viene dado por:

$$\sigma' = E(1 - \cos \alpha)$$

con lo que al ir girando una de las partes respecto a la otra, aumenta el valor de la tensión en la interfase de los dos granos, dando lugar a la nucleación de grietas sobre el límite de los dos granos.



B).- Supongamos ahora que un sólido que se deforma, absorbe energía en dos bandas localizadas de planos de deslizamiento que se cruzan, tales como la P y P' (fig.1). Si en una -

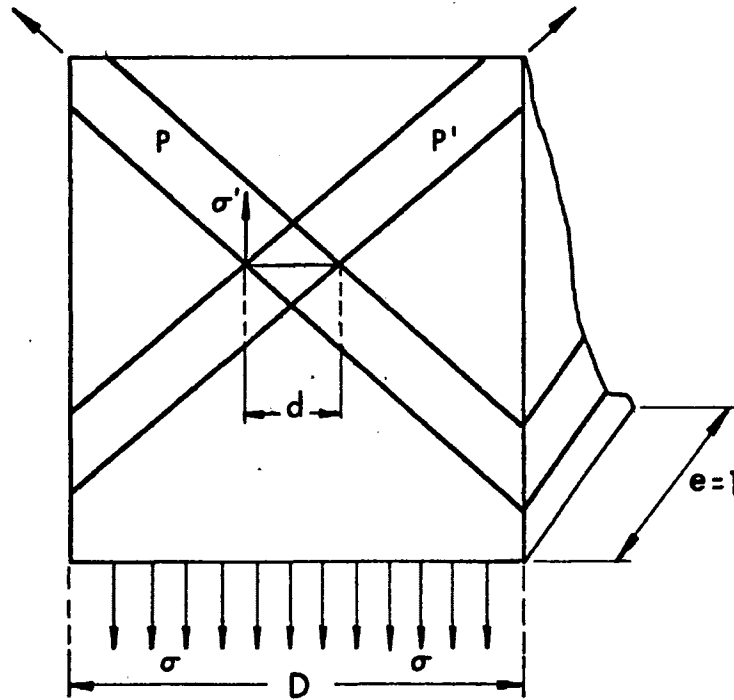


Fig. 1.- Bandas de deslizamiento que se cruzan, en un material sometido a un estado de tensión.

zona de ancho D y por unidad de espesor (e), que abarca las zonas de deslizamiento, en la que actúa una tensión de contorno σ , existe una zona de ancho (d) de intersección de dichas bandas, que es la que soporta una tensión elevada, la fuerza externa se expresará por:

$$F = \sigma \cdot D \cdot e$$



mientras que en (d), será, para equilibrar la fuerza externa:

$$F = \sigma' \cdot d \cdot e$$

por tanto:

$$\sigma' = \sigma \left(\frac{D}{d} \right)$$

que equivale a una tensión exaltada en el ancho d, que puede nuclear una microgrieta.

C).- Existe un análisis matemático debido a Inglis que da la tensión exaltada en el vértice del defecto, (en este caso se supuso el ejemplo de una grieta elíptica) y que viene dada por:

$$\sigma' = 2\sigma \left(\frac{C}{\rho} \right)^{1/2}$$

donde C, es la semilongitud del defecto, σ la tensión aplicada al contorno y ρ el radio de curvatura de la grieta elíptica en su parte de mayor acuidad, o sea en su vértice.

En el primer caso A), analizado, se ve que la tensión exaltada crece al aumentar θ , llegando al valor máximo para $\theta = 90^\circ$ ($\sigma' = E$).

Del segundo caso B), se ve que cuando las bandas de deslizamiento son muy estrechas $d \ll D$, con lo que $\sigma' \gg \sigma$.



En el tercer caso C), σ tiende a infinito, cuando ρ tiende a cero, ya que para las grietas ρ es del orden de las distancias interatómicas.

Como puede comprobarse en estos casos y otros que no han sido citados, la tensión exaltada es mucho mayor que la tensión de contorno, y su valor puede hacerse mayor que el de la cohesión interatómica y por tanto, además de nuclear una microgrieta la puede propagar hasta la rotura, si después de nucleada mantiene en su propagación su capacidad de exaltación. Incluso en un material frágil ó fragilizado la tensión exaltada en un orificio circular puede dar lugar a una rotura frágil, si aquella rebasa el límite elástico de dicho material, ya que prácticamente puede coincidir con la carga de rotura.

En 1920, Griffith aportó la idea básica para la comprensión del problema de la rotura. Su teoría está basada en consideraciones energéticas, sobre la resistencia del vidrio, en el que admite la existencia de microgrietas y a cuyas superficies libres se atribuyó una energía superficial, puesto que una rotura exige un consumo de energía en la creación de nuevas superficies de fractura.

La energía elástica acumulada en torno a una grieta de semilongitud (c) , y bajo una tensión externa, está dada por:



$$W_E = \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E}$$

y si w_s es la energía superficial por cm^2 de superficie libre de grieta creada y considerando un crecimiento de grieta de 0 a $2C$, - la energía absorbida será:

$$2w_s(2C - 0) = 4w_s C = W_s$$

donde W_s es la energía asociada al crecimiento de la grieta, la aplicación de un balance energético conduce a :

1.- Si $\Delta W = W_s - W_E > 0$, entonces la energía elástica disponible por el material es incapaz de hacer crecer la grieta.

2.- Si $\Delta W < 0$, la energía elástica acumulada en este caso, si es suficiente para hacer crecer la grieta y desencadenar la rotura frágil.

3.- Si $\Delta W = 0$, indica la inminencia de la rotura, y por tanto esta comenzará cuando:

$$\frac{d(\Delta W)}{dC} = 0$$

sea,

$$4w_s - \frac{2 C \sigma^2}{E} = 0$$



de donde:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2wsE}{C}}$$

donde σ_c sería la tensión de contorno que habría que aplicar al material, para que se desencadene la rotura frágil, en algún defecto — preexistente de semilongitud, C.

Si además tenemos en cuenta la ecuación propuesta por — Inglis, para la tensión exaltada, tendremos:

$$\sigma' = 2 \sqrt{\frac{2w_s E}{\pi \rho}}$$

lo cual nos permitirá conocer la tensión exaltada en función del módulo de elasticidad del material, de la energía superficial w_s y de la acuidad de la grieta ó defecto.

Sin embargo, aunque la teoría de Griffith era válida, para el cálculo de la tensión teórica de rotura en el vidrio, se vió que no era válida para predecir la tensión de rotura en los metales y sus aleaciones, por lo que Orowan é Irwin dieron una modificación de la — ecuación de Griffith, suponiendo que en cualquier pieza metálica existía un cierto grado de deformación plástica en la proximidad del vértice de la grieta, (como es bien conocido, la deformación plástica es la mejor garantía para prevenir la rotura frágil).



Por tanto además de considerar la energía superficial de la grieta creada (w_s), era preciso tener en cuenta la energía - de deformación plástica (w_p), y que la tensión que se debe aplicar al contorno, debe ser:

$$\sigma_c = \frac{2(w_s + w_p)E}{C}$$

se comprobó experimentalmente que $w_s \ll w_p$, por lo que la ecuación anterior se puede reducir a esta otra:

$$\sigma_c = \frac{2w_p \cdot E}{C}$$

que para materiales metálicos y sus aleaciones da mejores resultados que la ecuación de Griffith, sin ser exacta por supuesto.



1.3.- FUNCIONES DE TENSION Y CALCULO DEL ESTADO DE TENSION EN UN PUNTO.

Para estados de tensión planos, es posible dar funciones de tensión de variable real, para casos sencillos, (1), (2), (3), (4), a partir de las cuales se puedan encontrar expresiones para σ_y , σ_x , τ_{xy} , que dan el estado de tensión en un punto, según:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (c)$$

donde ϕ , es una función de tensión que se conoce también como función de tensión de Airy.

Ahora bien, para que la función responda al problema particular, es necesario que cumpla las siguientes condiciones:

A).- Deberá cumplir las condiciones de compatibilidad:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

B).- La función ϕ , deberá ser biarmónica:



$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad \text{ó} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = 0$$

C).- Tendrá que cumplir las condiciones de contorno.

En la solución de los problemas que nos ocupa, parece más conveniente utilizar funciones de tensión de variable compleja, es decir, de una variable de forma $(z = x + iy)$, ó en coordenadas polares $(z = r.e^{i\theta})$. En este caso, las funciones de tensión pueden contener uno ó más términos de una serie que contenga potencias positivas y negativas de z (2), así:

$$\Phi = (a_m + ib_m)z^m \quad (d)$$

$$\Psi = (p_m + iq_m)z^m \quad (e)$$

A partir de estas funciones de tensión, se obtienen las ecuaciones que dan el estado de tensión en un punto, y que vienen dadas por :

$$\sigma_r = 2\text{Re} \Phi' - \text{Re} \left[e^{2i\theta} (\bar{z} \Phi'' + \Psi') \right] \quad (f)$$

$$\sigma_\theta = 2\text{Re} \Phi' + \text{Re} \left[e^{2i\theta} (\bar{z} \Phi'' + \Psi') \right] \quad (g)$$

$$\tau_{r\theta} = \text{Im} \left(e^{2i\theta} (\bar{z} \Phi'' + \Psi') \right) \quad (h)$$

las ecuaciones (f),(g),(h), se utilizan en el caso de que el mode



lo tenga un contorno circular. En caso contrario, las ecuaciones - pueden expresarse en coordenadas cartesianas, y vienen dadas por:

$$\sigma_x = 2\text{Re} \phi' - \text{Re} (\bar{z} \phi'' + \psi') \quad (i)$$

$$\sigma_y = 2\text{Re} \phi' + \text{Re} (\bar{z} \phi'' + \psi') \quad (j)$$

$$\tau_{xy} = \text{Im} (\bar{z} \phi'' + \psi') \quad (k)$$

las que se obtienen por una sencilla transformación.

Ahora bien, es fácil comprobar que el invariante del estado de tensión, se obtiene a partir de la ecuación (f) y (g) ó de las ecuaciones (i) y (j), y es de la forma:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\text{Re} \phi' \quad (l)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re} \phi' \quad (m)$$

también se pueden obtener expresiones del siguiente tipo:

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i \tau_{r\theta} = 2[\bar{z} \phi''(z) + \psi'(z)] e^{2i\theta}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2[\bar{z} \phi''(z) + \psi'(z)]$$

donde \bar{z} , es el complejo conjugado de z , las que conducen a,

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i \tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy}) e^{2i\theta} \quad (n)$$



A partir de las ecuaciones (m) y (n), se obtienen fácilmente las expresiones para el estado de tensión en un punto, sin más que resolver el sistema correspondiente, y de esta forma se pueden obtener las tensiones principales y lo que es más importante la expresión para la tensión máxima que está dada por:

$$\tau_m = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

Con todo lo anterior, ya tenemos la línea a seguir para obtener las soluciones matemáticas a los distintos modelos objeto de estudio en esta memoria.



II.- PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL Y EQUIPO

2-1.- PREPARACION DE MODELOS Y BREVE DESCRIPCION DEL METODO FOTOELASTICO

2-1-1.- Birrefringencia natural y accidental

2-1-2.- Composición de vibraciones: Luz elíptica, circular y natural

2-1-3.- Examen con luz blanca de un modelo -
sometido a un estado de tensión

2-2.- CALIBRADO Y CONSTANTE FOTOELASTICA

2-2-1.- Calibrado: Medida de la constante fotoelástica

2-2-2.- Cálculo de la tensión máxima correspondiente a cada orden de franja

2-3.- EQUIPO EXPERIMENTAL

2-3-1.- Equipo

2-3-2.- Banco de carga



II.- PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL Y EQUIPO.-

2.1.- PREPARACION DE MODELOS Y BREVE DESCRIPCION DEL METODO FOTOELASTICO.

Se ha empleado para la fabricación de modelos, después de haber probado varios tipos de resinas, el araldit-0 y el endurecedor HY-956 por sus buenas propiedades de estabilidad y birrefringencia, similares a las de los plásticos que se emplean en Estados Unidos, Reino Unido y Francia.

La preparación requiere toda una serie de precauciones sin las cuales no es posible obtener buenos resultados y que vamos a resumir a continuación.

A.- El molde que se ha empleado es de aluminio, con el fin de que la eliminación del calor producido por la reacción de endurecimiento (que es exotérmica), entre el araldit y el endurecedor, sea lo mejor posible, de lo contrario se crearán en el material gran cantidad de tensiones residuales que distorsionarán la observación de las isóclinas.

B.- La mezcla del araldit y el endurecedor se deberá realizar lentamente y con mucha paciencia, para evitar la formación de burbujas, que al solidificarse pueden quedar atrapadas en el plástico, distorsionando en la observación fotoelástica las líneas isóclinas.



- C.- La mezcla se deberá realizar durante largo tiempo con el fin de que sea lo más homogénea posible, de lo contrario, las inhomogeneidades distorsionarán las líneas isócronas.
- D.- El molde deberá de prepararse con un desmoldeante con el fin de que el plástico no se pegue al aluminio. En la preparación del molde hemos empleado láminas de cloruro de polivinilo, que dan muy buenos resultados a la hora de desmoldear.
- E.- La temperatura de solidificación se debe de mantener alrededor de los 20 grados centígrados, con el fin de que no aparezcan en el plástico tensiones residuales lo que exige una refrigeración buena y sobretodo uniforme.
- F.- Para los modelos con grista, se ha moldeado la mezcla con una cuchilla que atraviesa el molde, que se eliminará despues de la solidificación mediante una electrolisis, actuando la cuchilla como anodo, hasta que se disuelve por completo. La electrolisis lo único que hace es acelerar el ataque y eliminación de la cuchilla.

Es necesario, para la buena extracción de la cuchilla, no dejar solidificar totalmente el plástico



es decir, dejarlo un poco blando, de lo contrario será
muy difícil poder sacarla.



2.1.1.- BIRREFRINGENCIA NATURAL Y ACCIDENTAL.

En el siglo XVII eran ya conocidas las propiedades birrefringentes de ciertas sustancias cristalizadas, debidas a la distribución de los átomos en la molécula (27), (32).

En 1813, Seebeck descubrió el fenómeno de la birrefringencia accidental en sustancias transparentes, homogéneas e isótropas, cuando sobre ellas actuaba un sistema de fuerzas exteriores que distorsionaban la red.

Brewster, en 1816, comprobó en barras de vidrio cargadas a flexión, que cuando sobre el material actúan tensiones de tracción el material pasa a ser uniaxial positivo, mientras que si está sometido a tensiones de compresión pasa a ser uniaxial negativo.

Ahora bien, un material se dice que es birrefringente, cuando produce en los rayos que inciden sobre él, una doble refracción, es decir, descompone el rayo incidente en dos rayos, uno llamado rayo ordinario y otro, que es el rayo extraordinario; el primero (ordinario), tiene la misma dirección del rayo incidente, mientras que el segundo (extraordinario), no. A la salida del cristal, ambos rayos se recompondrán para dar un haz elíptico. Si este haz se observa entre dos polaroides cruzados, resultará que se verá luz a través de los polaroides, ó extinciones, cuando la



diferencia de marcha entre los dos rayos, ordinario y extraordinario en el cristal, sea múltiplo de la longitud de onda del rayo - incidente.



2.1.2.- COMPOSICION DE VIBRACIONES: LUZ ELIPTICA, CIRCULAR Y NATURAL.

La luz es uno de los componentes del espectro electromagnético formada por un gran número de ondas, todas de carácter electromagnético, que tienen la misma velocidad de propagación y que difieren sólomente en su longitud de onda (y por consecuencia en su frecuencia), y cuya intersección determina una línea común, a la que se denomina dirección de propagación de la luz.

Ahora bien, cuando por algún procedimiento artificial se logra obtener una onda que vibra solamente en un plano, se dice que la luz ha sido polarizada. Esta polarización se consigue cuando se utilizan unas láminas de polaroid, formadas por finos cristales de per-ioduro de quinina, sulfato de idioquinina..... etc, con sus ejes ópticos orientados en la misma dirección y unidos por una double capa de acetato de celulosa a dos celuloides neutros.

Al conjunto formado por dos polaroides paralelos se denomina montaje polariscópico.

Las observaciones a través del montaje polariscópico, dependerán de la orientación de los ejes de transmisión de los dos polaroides, así si:

A.- Los polaroides están cruzados, el sistema polarisco



cópico no dejará pasar la luz a su través.

B.- Si los polaroides tienen sus ejes de transmisión - paralelos entonces a través del sistema polariscópico pasará toda la luz incidente.

Sea P el plano de vibración de un tren de ondas escogido al azar que llega al primer polaroide (polarizador) (fig. 2) de -

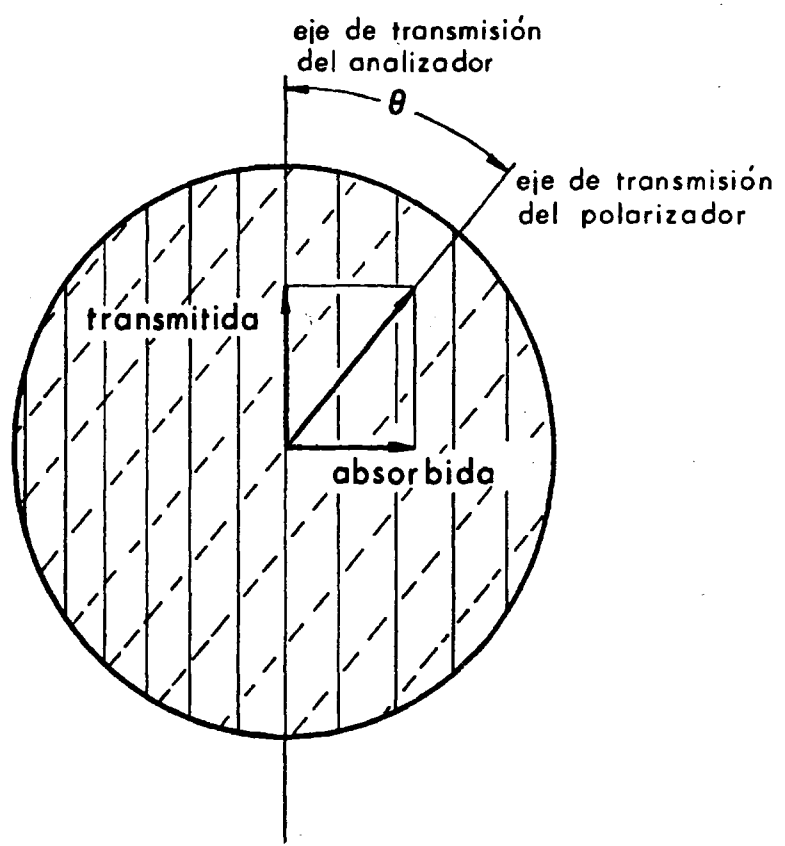


Fig.2.- Luz transmitida a través de un sistema polariscópico.



forma que el vector P forme un ángulo θ con el eje de transmisión del polarizador. Si este vector amplitud P, lo descomponemos según la dirección del eje de transmisión del polarizador y según la dirección ortogonal, tendremos las dos componentes siguientes:

$$P_y = P \cdot \cos \theta$$

$$P_x = P \cdot \sin \theta$$

la componente P_x es absorbida por la lámina polarizadora mientras que la componente P_y pasará a su través.

Si se coloca una segunda lámina polarizadora (analyzer), ocurrirá que si el analizador tiene su eje de transmisión paralelo al del polarizador, dejará pasar la vibración P_y , mientras que si está cruzado la absorberá (34), (32).

En este segundo caso, si se interpone entre polarizador y analizador, un cuerpo con birrefringencia natural ó accidental (debida a tensiones), la intensidad de luz transmitida será parcial.

Interesa entonces conocer, cómo se componen dos vibraciones cuyos planos de vibración son perpendiculares entre sí, y que tienen la misma longitud de onda.



Sean las ecuaciones de estas dos vibraciones las siguientes:

$$y = A.\cos wt \quad (o)$$

$$z = B.\cos (wt - \varphi) \quad (p)$$

La vibración resultante, será $x = y + z$, cuya amplitud variará con el tiempo y cuyo vector amplitud resultante girará en una elipse.

Para comprobar lo anterior y el sentido de giro del vector amplitud resultante, hagamos lo siguiente; en las ecuaciones (o), (p), dividamos ambos miembros por las amplitudes máximas, resultará:

$$\frac{y}{A} = \cos wt \quad (q)$$

$$\frac{z}{B} = \cos(wt - \varphi) \quad (r)$$

Si multiplicamos la ecuación (q) por $\cos \varphi$, tenemos:

$$\frac{y}{A} \cos \varphi = \cos wt.\cos \varphi \quad (s)$$



$$\frac{z}{A} = \cos wt \cdot \cos \varphi + \sin wt \cdot \sin \varphi \quad (t)$$

restando las ecuaciones (s) y (t), obtendremos:

$$\frac{z}{A} - \frac{y}{A} \cos \varphi = \sin wt \cdot \sin \varphi$$

Elevando al cuadrado esta última ecuación y sumándola con la que resulta al multiplicar la ecuación (a) por $\sin \varphi$, y elevada al cuadrado, resulta finalmente que:

$$\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2zy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (u)$$

que no es mas que la ecuación de una elipse de ejes $2A$ y $2B$.

El sentido de giro del vector vibración resultante, -viene dado por el signo del $\sin \varphi$, en la ecuación (p):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t=0} &= Bw \cdot \sin(wt - \varphi)_{t=0} = Bw \cdot \sin(-\varphi) = \\ &= -Bw \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Si $\sin \varphi$, es negativo, el giro es levogiro $0 \leq \varphi \leq \pi$

Si $\sin \varphi$, es positivo, el giro es dextrogiro $2\pi \leq \varphi \leq \pi$



La composición de vibraciones puede examinarse teniendo en cuenta las diferencias de fase, ó a partir de las diferencias de marcha.

A.- Si las vibraciones están en fase $\varphi = 2\pi n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, en este caso:

$$\cos \varphi = \cos 2\pi n = 1 \quad \text{y} \quad \sin \varphi = \sin 2\pi n = 0$$

la ecuación (u), quedará:

$$\frac{z^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2yz}{AB} = 0 \quad \text{ó} \quad \left(\frac{y}{A} - \frac{z}{B}\right)^2 = 0 \quad \text{ó} \quad y = A \frac{z}{B}$$

que es la ecuación de una recta. Quiere esto decir que la amplitud resultante vibra en un plano diagonal.

B.- Las vibraciones están en oposición de fase, entonces $\varphi = (2n + 1)\pi$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\cos \varphi = \cos (2n + 1)\pi = -1 ; \quad \sin \varphi = \sin (2n + 1)\pi = 0$$

entonces la ecuación (u), quedará:

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} + \frac{2zy}{AB} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{y}{A} + \frac{z}{B} = 0 \quad \text{ó} \quad y = -\frac{A}{B}z$$



que es analogo al caso anterior.

C.- Si las vibraciones no estan en fase, ni en oposici3n de fase entonces:

$$\varphi = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\cos \varphi = 0 \quad ; \quad \text{sen} \varphi = 1$$

En este caso, la ecuaci3n (u), quedar3:

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1$$

que es la ecuaci3n de una elipse.

Existe un segundo caso genral, para el cual las amplitudes m3ximas son iguales, es decir, $A = B$.

Para este caso la ecuaci3n (u), se puede simplificar multiplicando ambos miembros de dicha ecuaci3n por A^2 , con lo que finalmente obtendr3amos:

$$y^2 + z^2 - 2yz \cdot \cos \varphi = A^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi \quad (v)$$

con esta ecuaci3n, podemos analizar nuevamente los siguientes casos:



A.- Si las vibraciones están en fase, $\varphi = 2n\pi$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ entonces, $\cos \varphi = \cos 2n\pi = 1$; $\sin \varphi = \sin 2n\pi = 0$ y por tanto la ecuación (v), quedará:

$$y^2 + z^2 - 2yz = 0 \quad \text{ó} \quad y - z = 0 \quad \text{ó} \quad y = z$$

que es la ecuación de una recta.

B.- Cuando las vibraciones están en oposición de fase, entonces:

$$\varphi = (2n + 1)\pi \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\cos \varphi = \cos(2n + 1)\pi = -1 \quad ; \quad \sin \varphi = \sin(2n + 1)\pi = 0$$

la ecuación (v), quedará entonces:

$$y^2 + z^2 + 2yz = 0 \quad \text{ó} \quad y + z = 0 \quad \text{ó} \quad y = -z$$

que es la ecuación de una recta.

C.- Si las vibraciones no están en fase ni en oposición de fase entonces, $\varphi = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\cos \varphi = (\cos(2n + 1)\frac{\pi}{2}) = 0 \quad ; \quad \sin \varphi = \sin(2n + 1)\frac{\pi}{2} = 1$$



la ecuación (v), será entonces:

$$y^2 + z^2 = A^2$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio A, y la vibración tendrá por tanto una amplitud constante.

Diremos entonces que la luz es elíptica, cuando el vector amplitud al propagarse, gira en una superficie cilíndrica de — sección elíptica, describiendo una trayectoria helicoidal. Cuando — la superficie cilíndrica es de sección circular, diremos que la luz es circular (32).



2.1.3.- EXAMEN CON LUZ BLANCA DE UN MODELO SOMETIDO A UN ESTADO DE TENSION.

Cuando un modelo es sometido a un estado de tensión, aparece un fenómeno de birrefringencia, que nos va a permitir, - examinar el modelo entre dos polaroides cuando usamos luz blanca.

Cuando se usa luz blanca, solo interfieren las vibraciones que tienen la misma frecuencia, por tanto, cuando se extingue un color de los que componen esta luz, por el analizador emergerá una luz blanca a la que le falta uno de sus colores (rojo, - naranja, amarillo, verde, azul, añil y violeta), a este color emergente le llamaremos color complementario (13).

En la tabla que a continuación se presenta, se dan - los distintos colores complementarios:

Blanco - rojo = verde

Blanco - naranja = azul

Blanco - amarillo = violeta

Blanco - verde = rojo

Blanco - azul = naranja

Blanco - violeta = amarillo

La extinción de determinados colores de la luz blanca al atravesar un modelo sometido a tensiones, depende del estado de tensión que haya en cada punto del modelo, ya que tensiones —



distintas, producen diferencias de marcha distintas, y por lo tanto dan lugar a interferencias con extinciones de diferentes colores, con lo que el modelo se observa coloreado, con diferentes colores en cada zona, según los estados de tensión que haya en ellos.

El fenómeno de la aparición de una serie de colores en un modelo, se discute mediante la expresión que da la intensidad luminosa que emerge del analizador:

$$E = E_0 \left[\cos^2 \gamma - \sum_i \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2 \pi \frac{\delta}{\lambda_i} \right] \quad (x)$$

donde:

E_0 - intensidad de la luz blanca incidente.

E - intensidad de la luz emergente.

α - ángulo del primer eje óptico del modelo con el eje de transmisión del polarizador.

β - ángulo del primer eje óptico con el eje de transmisión del analizador.

$\gamma = \alpha - \beta$ - ángulo que forman los ejes de transmisión del polarizador y analizador.

El término $\cos^2 \gamma$, en la ecuación (x), depende solamente del ángulo que formen los ejes del polarizador y analizador. Entonces, según que estos ejes estén paralelos ($\gamma = 0$) ó cruzados - -



($\gamma = \pi/2$), habrá respectivamente paso de luz blanca ó extinción, aparte de los colores que pasen debidos al segundo término que depende de δ , es decir, de las diferentes interferencias de los colores de la luz blanca, por ello, a:

$\cos^2 \gamma$ - término blanco

$\sin^2 \pi \frac{\delta}{\lambda_i}$ - término coloreado

Examinemos la ecuación (x), y supongamos que se trabaja:

A.- Con luz monocromática.

B.- Con un modelo con birrefringencia accidental (debida a tensiones).

Entonces, se pueden plantear dos series de observaciones:

1.- Examen con polaroides cruzados ($\gamma = \pi/2$).

2.- Examen con polaroides paralelos ($\gamma = 0$)

1.- Polaroides cruzados: El término blanco $\cos^2 \gamma = 0$, y la ecuación (x), quedará entonces:



$$E_1 = E_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \pi \frac{\delta}{\lambda} \quad (y)$$

2.- Polaroides paralelos: En este caso $\alpha = \beta$; $\gamma = 0$ y por tanto la ecuación (x), quedará:

$$E_2 = E_0 \left[1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \pi \frac{\delta}{\lambda} \right] \quad (z)$$

conviene ahora tener presente que el polarizador y analizador, pueden girar simultáneamente, manteniéndose en el giro sus ejes cruza dos ó paralelos.

En el caso 1, ($\gamma = \pi/2$), se pueden dar los dos casos siguientes:

$$A'.- \alpha = 2n\frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad 2\alpha = n\pi \quad \text{ó} \quad \sin^2 2\alpha = 0$$

la ecuación (y), quedará entonces:

$$E_1 = 0 \quad \text{hay extinción completa.}$$

$$B'.- \alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad 2\alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \sin^2 2\alpha = 1$$

la ecuación (y), nos dará:

$$E_1 = E_0 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{\lambda} \pi \quad (a_1)$$



pero el término coloreado ($\text{sen}^2 \pi \frac{\delta}{\lambda}$) de la ecuación (a_1), nos proporciona dos posibilidades:

B₁.- Con luz monocromática ($\delta = k\lambda$; $k = 0, 1, 2, \dots$), y la ecuación (a_1), quedará:

$$E_1 = 0 \quad (\text{hay extinción total}).$$

B₂.- Con luz blanca, se extinguirá solamente un color, apareciendo un color complementario.

En la segunda serie ($\gamma = 0$), se dan los dos casos siguientes:

$$A.- \alpha = 2n\frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad 2\alpha = n\pi \quad \text{ó} \quad \text{sen}^2 2\alpha = 0$$

la ecuación (z), quedará para este caso particular:

$$E_2 = E_0 \quad (\text{hay paso total de luz}).$$

$$B.- \alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{4} \quad \text{ó} \quad 2\alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \text{sen}^2 2\alpha = 1$$

la ecuación (z), dará:

$$E_2 = E_0 \left(1 - \text{sen}^2 \pi \frac{\delta}{\lambda}\right) \quad (b_1)$$

pero de la ecuación (b_1), se pueden sacar dos condiciones debidas



al término $\text{sen}^2 \pi \frac{\delta}{\lambda}$

$$B_1.- \text{Si } \delta = k\lambda \quad ; \quad \text{sen}^2 \pi \frac{\delta}{\lambda} = 0$$

y por tanto la ecuación (b_1), dará:

$$E_2 = E_0 \quad (\text{hay paso total de luz})$$

2.2.- CALIBRADO Y CONSTANTE FOTOELASTICA

2.2.1.- CALIBRADO: MEDIDA DE LA CONSTANTE FOTOELASTICA.

El objetivo del calibrado es determinar la constante fotoelástica, para lo cual es necesario conocer la tensión en Kg/mm^2 necesaria para producir un orden de franja unidad, en un modelo, es decir, para pasar de un orden de franja $k = n$, a otro de orden $k = n + 1$, ó dicho de otra forma, el $\Delta(\sigma_1 - \sigma_2) = 2\tau_m$, necesario para pasar de una isócrona a la siguiente.

El calibrado a realizar sobre el material fotoelástico con el que se construye el modelo objeto de estudio, se practica eligiendo modelos para los que hay soluciones teóricas sencillas y exactas, así se puede conocer la tensión en cualquier punto. El calibrado permite, además, comparar la sensibilidad fotoelástica de diversos materiales, y por lo tanto su adecuabilidad a cada caso (32), (28).

De los procedimientos mas comunes de calibrado, como:

- Tracción pura
- Flexión pura
- Disco a compresión
- Carga normal (en lámina semi-infinita)

Solo se discuten los dos primeros.



Calibrado a tracción pura (tracción uniaxial).

Este método hace uso de una probeta plano paralela de tracción, construida con el material fotoelástico, que se somete en el banco de carga del polariscopio a una fuerza P , por lo que la tensión es $\sigma_1 = P/b.e$.

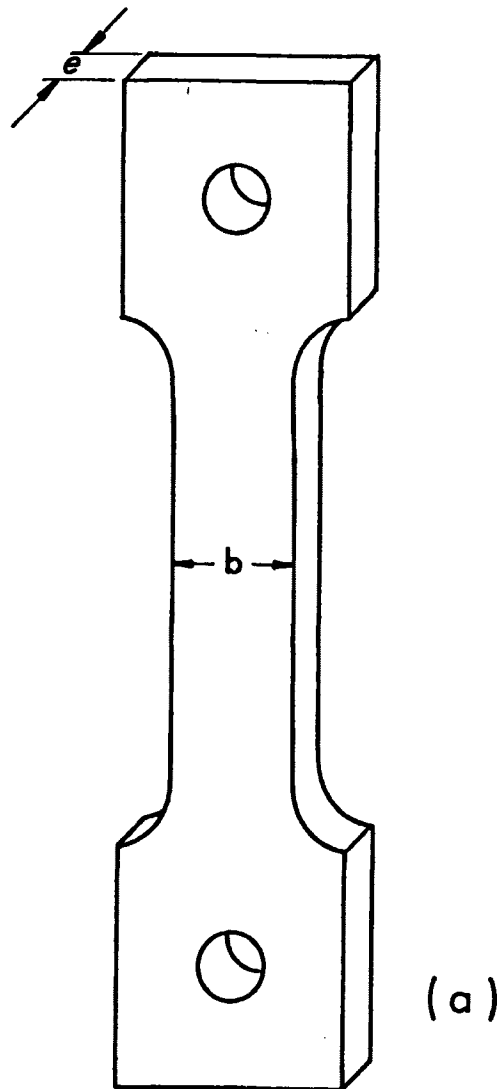


Fig. 3.- Probeta plano paralela para el ca
librado a tracción.



Puesto que $\sigma_2 = 0$, y $(\sigma_1 - \sigma_2) = P/be$, comparando esta ecuación con la ley de Maxwell - Wertheim.

$$k \lambda = \delta = C(\sigma_1 - \sigma_2)e, \quad (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{k}{C} \frac{\delta}{e}$$

resulta.

$$C = \frac{kb\lambda}{P}$$

y por tanto, conociendo λ , podemos conocer la constante fotoelástica relativa C que se mide en Berwsters.

Con fines prácticos, generalmente, se calcula en el calibrado el cociente.

$$\frac{\lambda}{C.e} = f$$

siendo f el llamado "valor de franja por unidad de espesor del modelo".

Debido a su definición, el valor de franja F es

$$F = f.e$$

y cada material fotoelástico tiene su "valor de franja" F .



En consecuencia, conocido $P/b.e = (\sigma_1 - \sigma_2)$, resulta

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{P}{b.e} = \frac{k}{C.e} = k.f.$$

Entonces el analizar un modelo, objeto de estudio, para una isócrona de orden $k = 0$, ó lo que es igual, para el lugar geométrico de los puntos que aparecen en color negro en el modelo, examinado con luz circularmente polarizada, $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$, es decir en estos puntos hay una cisión.

$$\tau_m = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} = 0$$

Para la primera isócrona de color sensible (violeta-indigo)-(rojo), $k = 1$ y $(\sigma_1 - \sigma_2) = f$.

De esta manera se pueden conocer los valores de $(\sigma_1 - \sigma_2)$ y por tanto las cisiones en todos los puntos del modelo, ya que k puede tomar valores fraccionarios, es decir, para cada isócrona ó curva monocolor, entre dos colores sensibles, el valor de k pasa de $k = n$, a $k = n + 1$, y en el caso de luz monocromática se procede ría a la interpolación entre dos isócronas de valor k entero.

Aquí se aprecia la ventaja que ofrece la luz blanca - circularmente polarizada:

1.- La isócrona de orden cero, $k = 0$, es de color negro



y por lo tanto inconfundible y rápidamente identificable.

2.- A cada isógrama de orden k entero, le corresponde un "tinte sensible" de la escala de Newton, con lo que el valor de k se conoce fácilmente.

3.- Con luz blanca es posible el trazado de isógramas monocolors, correspondientes a valores fraccionarios de k .

4.- Tiene el inconveniente de que es necesaria la fotografía en color para valores fraccionarios de k , ó bien mediante representación cuidadosa en papel.

El calibrado a tracción se puede hacer en la práctica con el polariscopio circular de Tardy. Con el se miden los ángulos que hay que girar en un mismo sentido los polaroides cruzados, y los pares de valores, Kg/mm^2 - ángulo de extinción, se representan y a partir de la gráfica, se puede medir θ , y el valor de la franja se obtiene mediante el producto de la pendiente de la recta por 180° , es decir.

$$f = 180 \cdot \tan \theta, \text{ y se tiene } F = f \cdot e$$

Calibrado a flexión pura.

Se prepara una probeta modelo (fig.4), y se somete al momento flector $M = P \cdot h$



Examinándola con luz blanca circular, y polaroides -
cruzados aparece una línea negra central en la fibra neutra, que
es la isócrona de orden cero.

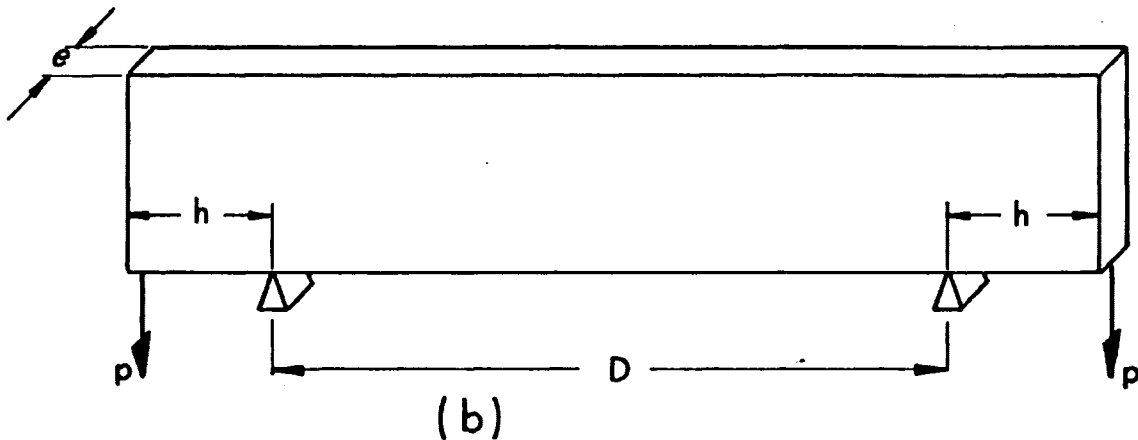


Fig. 4.- Probetas plano paralelas utilizadas para el calibrado a flexión.

Puesto que las fibras superiores del modelo están sometidas únicamente a tracción, es $\sigma_1 \neq 0$ y $\sigma_2 = 0$, esta tensión de tracción vale

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_1 = \frac{P \cdot h}{I \cdot e} y = \frac{k \lambda}{C \cdot e} = k \cdot f$$

donde $(P \cdot h)$, es el momento flector; (I) , el momento de inercia, (e) , es el espesor, siendo (y) , una variable en la dirección \bar{y} en que se encuentra la isócrona de orden $k = 1$.

Mediante el polariscopio de Tardy, podemos obtener una recta de calibrado similar a la del calibrado a tracción, representando tracciones y compresiones a uno y otro lado del eje y , en -



función del ángulo de extinción. El valor de la franja por este mé
todo viene dado por

$$f = \frac{P \cdot h}{I} \cdot \text{tag} \beta \cdot 180^\circ \quad , \quad y \quad F = f \cdot e$$

Medida de la constante fotoelástica.

Para la determinación experimental de la constante fo-
toelástica del material (C), se han utilizado probetas plano parale
las, como la presentada en la fig.3.

Las dimensiones de las probetas utilizadas, son:

b (Ancho de la probeta) = 14,80 mm.

e (Espesor de la probeta) = 5,00 mm.

En la Tabla I, se presentan las cargas empleadas para
producir un orden de franja unidad, la tensión que está actuando -
y el valor de la constante fotoelástica, así como el valor de la -
longitud de onda de la luz monocromática utilizada (amarilla de so
dio).

λ	P	σ	C
5890	19,43	26,25	44,87
5890	19,38	26,18	44,99
5890	19,48	26,21	44,94
5890	19,36	26,16	45,03

Tabla I. Valores de la constante fotoelástica



En la Tabla I, hemos llamado a:

λ - longitud de onda (\AA).

P - Carga aplicada a la probata (Mega-dinas).

σ - Tensión aplicada (Mega-dinas/cm²).

C - Constante fotoelástica del material (Brewsterd).

Se ha tomado como valor de la constante fotoelástica el siguiente:

C = 45 Brewsterd.



2.2.2.- CALCULO DE LA CISION MAXIMA CORRESPONDIENTE A CADA ORDEN DE FRANJA.

Una vez calculada la constante fotoelástica del plástico mediante el calibrado con modelos simples (tracción ó flexión), se pasa a calcular la cisión máxima correspondiente a cada orden de franja de cada una de las líneas isóchromas que aparecen en la observación fotoelástica, utilizando para ello la ecuación fundamental de la fotoelasticidad ó ecuación de Maxwell-Wertheim:

$$\delta = C(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot e$$

donde:

δ - diferencia de marcha

C - constante fotoelástica del material

$(\sigma_1 - \sigma_2)$ - diferencia de tensiones principales.

e - espesor del modelo

Si se tiene en cuenta que la cisión máxima viene dada por la ecuación:

$$\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$$

tendremos finalmente que:

$$\tau_m = \delta / 2Ce$$



Con esta última ecuación, se han calculado las cisiones máximas correspondientes a los diez primeros órdenes de franja, y que se dan en la Tabla II.

n	δ	$(\sigma_1 - \sigma_2) / 2$
1	λ	0,155
2	2λ	0,311
3	3λ	0,466
4	4λ	0,621
5	5λ	0,776
6	6λ	0,932
7	7λ	1,087
8	8λ	1,242
9	9λ	1,398
10	10λ	1,553

Tabla II.- Cisiones máximas correspondientes a cada orden de franja.



2.3.- EQUIPO EXPERIMENTAL.

2.3.1.- EQUIPO

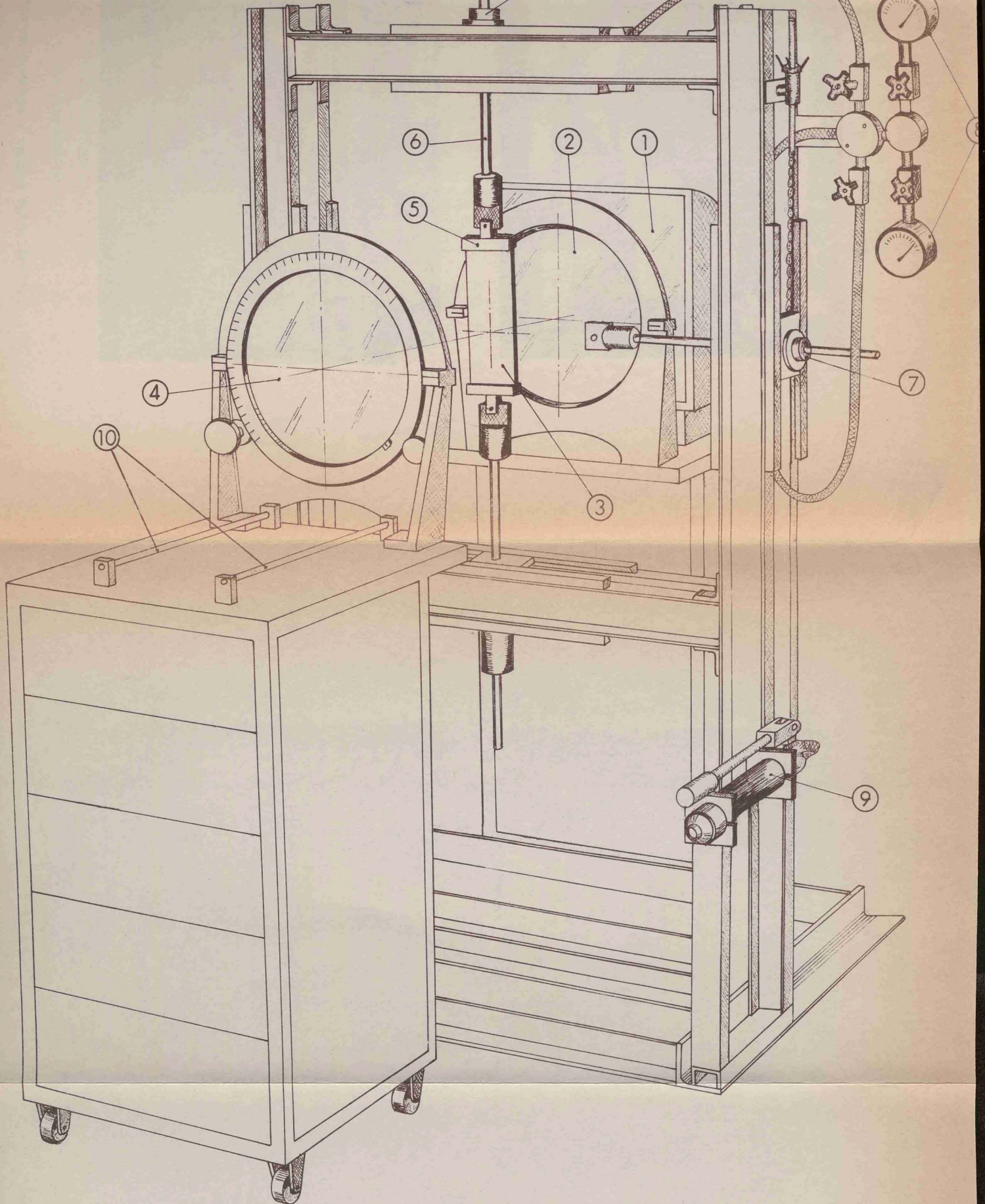
Para el ensayo de los distintos modelos que se presentan en esta memoria, ha sido utilizado un fotoelasticómetro de transmisión, y por consiguiente el análisis de tensiones ha tenido que realizarse - necesariamente, utilizando materiales plásticos que posean el fenómeno de la birrefringencia accidental (debida a tensiones), y cuya preparación se ha presentado en el apartado (2.1), donde además se especifican las precauciones que hay que adoptar para que en estos materiales no aparezcan tensiones residuales.

El fotoelasticómetro empleado, consta fundamentalmente de los elementos siguientes:

- Fuente de luz blanca ó monocromática.
- Lámina polarizadora.
- Lámina analizadora.
- Lámina cuarto de onda.
- Banco de carga.

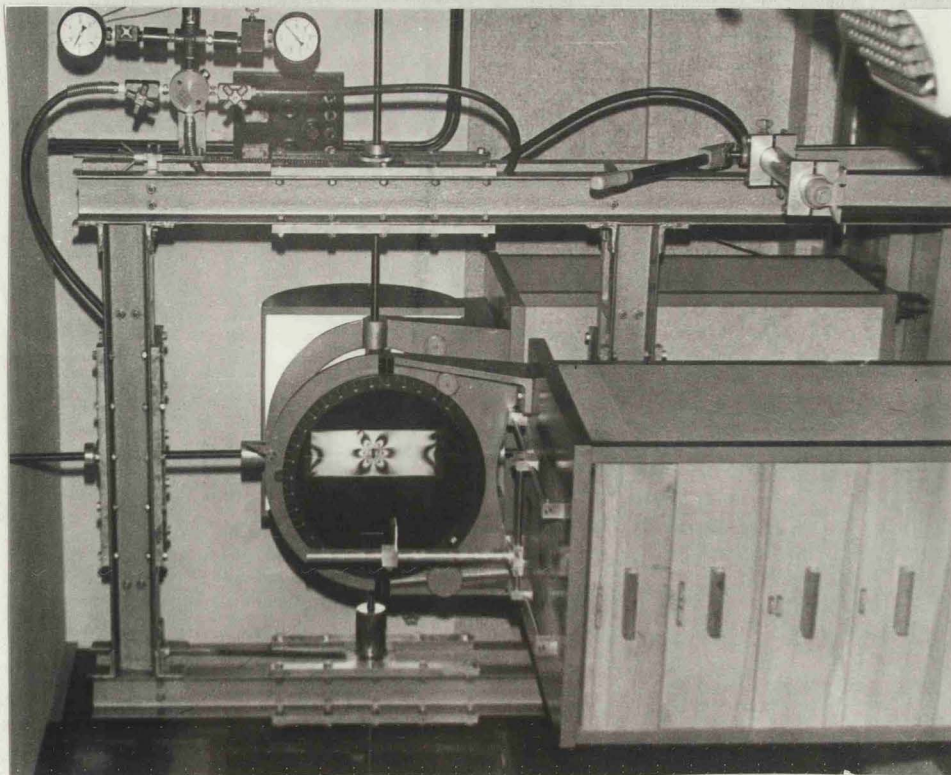
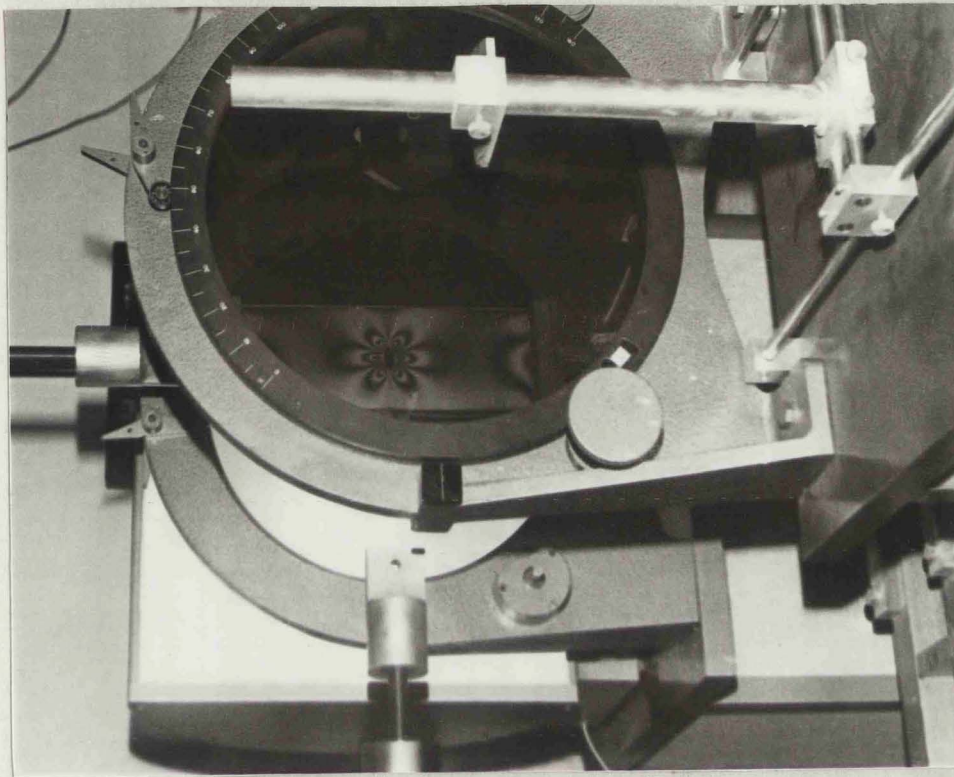
En la fig. 5 , se muestra el conjunto del equipo que ha sido utilizado.

La misión de cada uno de los elementos de que consta el - equipo fotoelástico, dejando a parte el banco de carga, que será comentado en el siguiente apartado, es:



EQUIPO FOTOELASTICO

- 1 - Fuente de luz 2 - Polarizador 3 - Modelo fotoelástico 4 - Analizador 5 - Mordazas
 6 - Husillos de carga 7 - Pistones hidraulicos 8 - Manómetros 9 - Bomba hidraulica
 10 - Soportes para equipo fotográfico



Conjunto de montaje y equipo fotoelástico.



A).- La fuente de luz, la cual puede ser usada de dos formas distintas, dependiendo del fin perseguido:

- con luz blanca.
- con luz monocromática.

Con luz blanca, se obtendrían modelos isocromáticos coloreados y que no ha sido empleada en la realización del trabajo experimental, ya que de lo contrario necesitaríamos el empleo de compensadores o tener siempre presentes las longitudes de onda de cada uno de los colores, resultando a la larga dificultoso y sin ningún interés experimental.

Con luz monocromática, se obtienen modelos isocromáticos de líneas negras, con los cuales se sabe directamente el orde de franja a medida que van apareciendo.

B).- El analizador y polarizador, que tienen como misión producir una extinción total a la salida del analizador, ya que toda observación fotoelástica para que exista máximo contraste debe realizarse de este modo, de aquí que ambos permanezcan cruzados, es decir, con sus ejes de transmisión perpendiculares, tengase en cuenta que el analizador solamente deja pasar las componentes de la luz procedente del polarizador que sean paralelas a su eje de transmisión.

C).- Las láminas cuarto de onda, que se emplean para la obtención de luz circularmente polarizada, lo que permite eliminar del campo de visión las líneas isóclinas (lugares geo-



métricos de puntos del modelo en los cuales las direcciones de las tensiones principales son constantes), y permitiremos observar solamente las líneas isócronas. El montaje de las láminas cuarto de onda, se realiza de forma inmediata, sin más que tener en cuenta que:

A.- La lámina cuarto de onda polarizadora, se montará inmediatamente antes del modelo y de forma que el eje de transmisión de dicha lámina forme con el eje de transmisión del polarizador, un ángulo de 45° .

B.- La lámina cuarto de onda analizadora, se colocará inmediatamente después del modelo ó inmediatamente antes del analizador, de forma que el eje de transmisión de la lámina cuarto de onda esté cruzado con el de la primera.

D).- El analizador, cruzado con el polarizador.



2.3.2.- BANCO DE CARGA.

Entre los elementos que constituyen el fotoelasticómetro cabe resaltar muy especialmente, el banco de carga.

Este banco de carga lo hemos diseñado en el Departamento de Metalurgia de la Facultad de Ciencias Químicas, y construido en el Taller de la misma.

El banco está formado por los elementos siguientes:

Doble estructura de perfil en U, que le confiere una gran resistencia mecánica, téngase en cuenta que es necesario en todo momento, no tener problemas de flexiones en la estructura, porque ello supondría una falta de linealidad en la carga aplicada al modelo. Las dos estructuras en U, están separadas por separadores de acero que las mantienen paralelas entre sí.

Sistema Hidráulico de aplicación de la carga, constituye la pieza clave del banco, y en esencia lo componen:

A.- Bomba manual de aceite, con válvula que permite mantener la presión de aceite constante.

B.- Dos cilindros de pistón perforado de doce toneladas cada uno, que permiten trabajar tanto a tracción como a compresión, - sin más que girarlos 180°.



C.- Trés manómetros contrastados con escalas crecientes para la medida de la carga aplicada.

D.- Los cilindros pueden deslizar en unos patines (cola de milano) a lo largo de la estructura, mediante un tornillo regulador y transmisión por cadena que además sirve para sujetar dichos cilindros.

E.- Los cilindros deslizan a lo largo del marco de carga sobre colas de milano, que son solidarias con él.

F.- Quizás la pieza clave a la hora de aplicación de la carga, sean las mordazas que sujetan al modelo, y que en la fig. 6 , puede verse que están constituidas por una caja en acero que soportan dos colas de milano. Con este sistema de mordaza, fué posible evitar la flexión que se producía debido al perfil de tensiones parabólico - que actuaba sobre dichas mordazas. Así mismo, fué posible eliminar la deformación lateral que sufrían las mordazas, debido esencialmente a la forma en cuña que presenta el contorno del modelo.

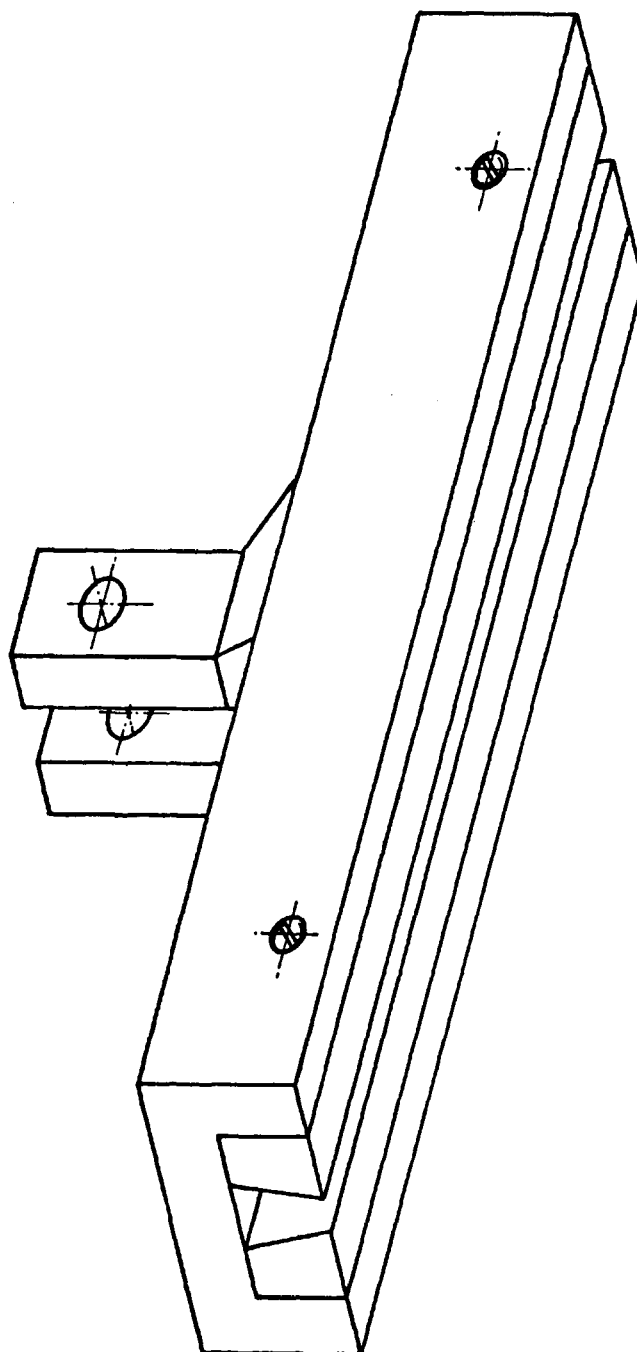


Fig. 6.- Mordazas para aplicación de la carga



2.3.3.- MODELOS FOTOELASTICOS.

Una vez obtenidos los plásticos, se procede al mecanizado de los mismos con el fin de darles la forma apetecida según se muestra en la fig. 7 , y en la que están representados cada uno - de los modelos objeto de estudio en esta memoria.

El espesor de 4 mm, se ha mantenido constante en todos los modelos ensayados, habiéndose elegido este espesor con el único objeto de reducir lo más posible la carga que hay que aplicar a cada caso. Por otra parte, el contorno se ha separado del defecto que se introduce en cada modelo con el fin de que no existan influencias del contorno sobre la red isocromática.

Antes de ensayar cada uno de los modelos, es necesario pulir las superficies lo mejor posible con el fin de que la transparencia sea óptima, de lo contrario la fotografía no se resolverá satisfactoriamente, y todo ello manteniendo el modelo perfectamente - plano paralelo.

Los modelos objeto de estudio son:

- placa con orificio circular sometida a tracción uniaxial
- placa con orificio elíptico sometida a tracción uniaxial
- placa con grieta sometida a tracción uniaxial.

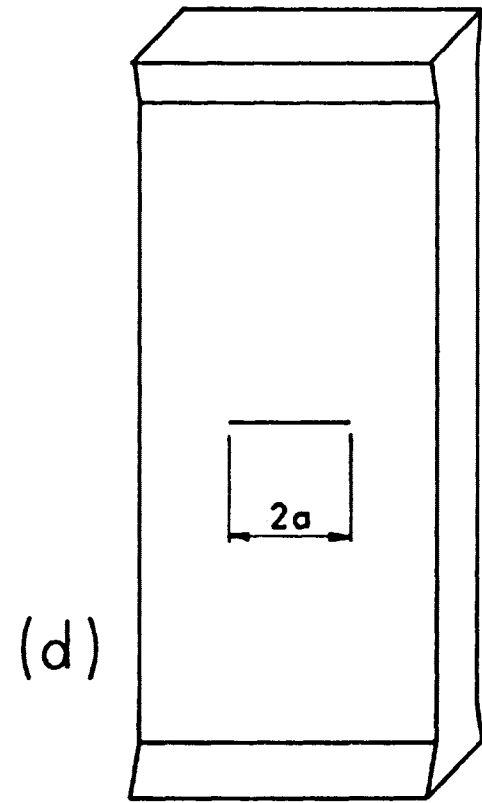
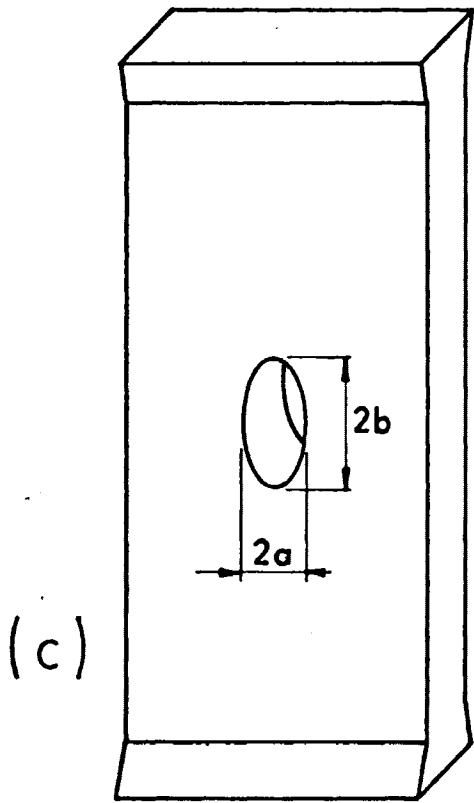
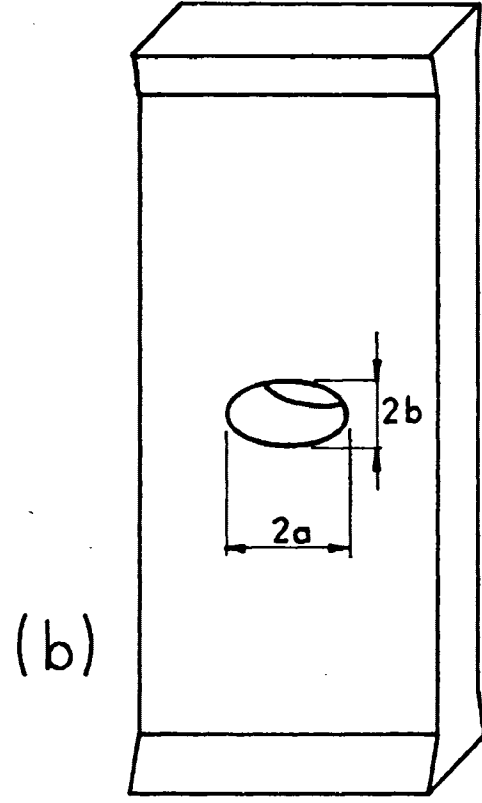
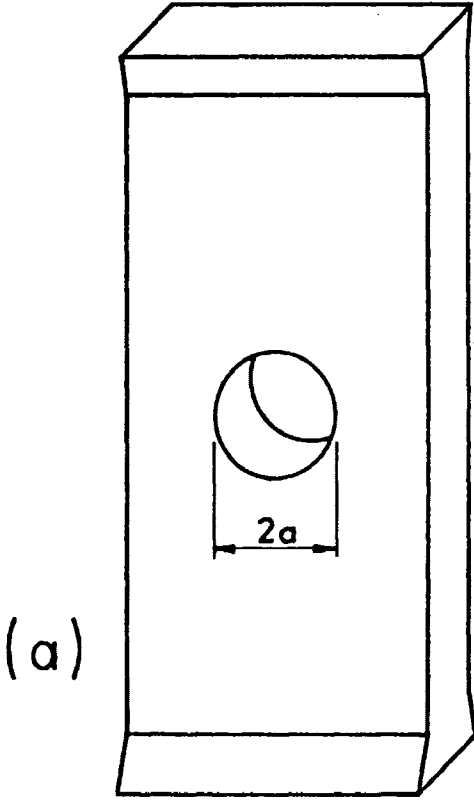
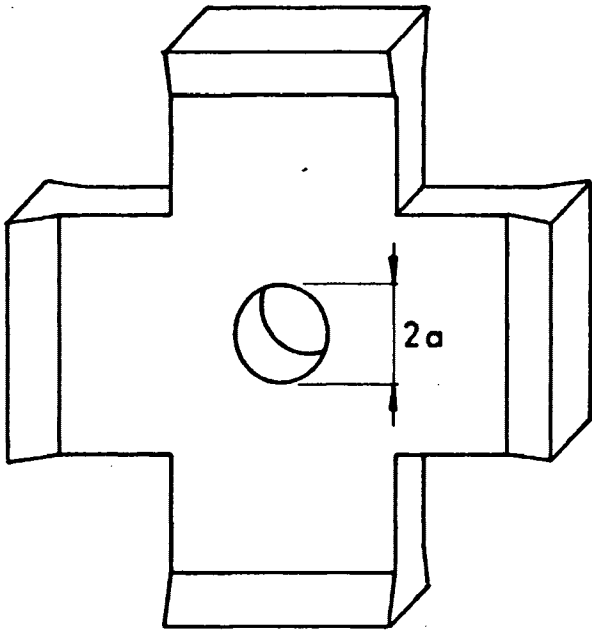
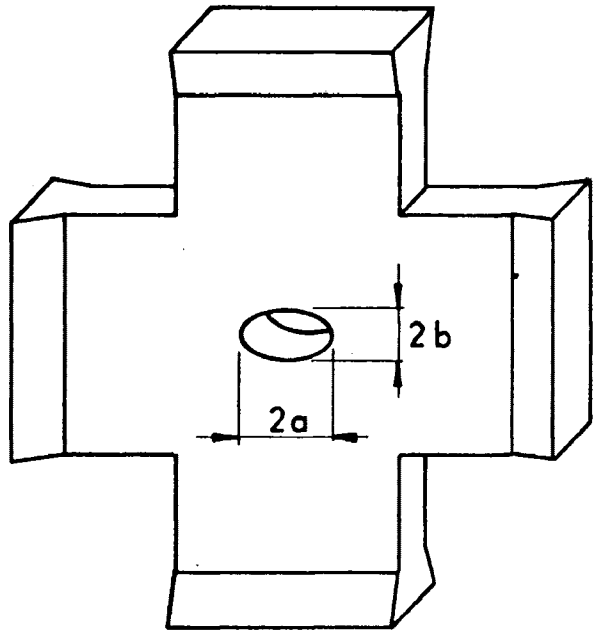


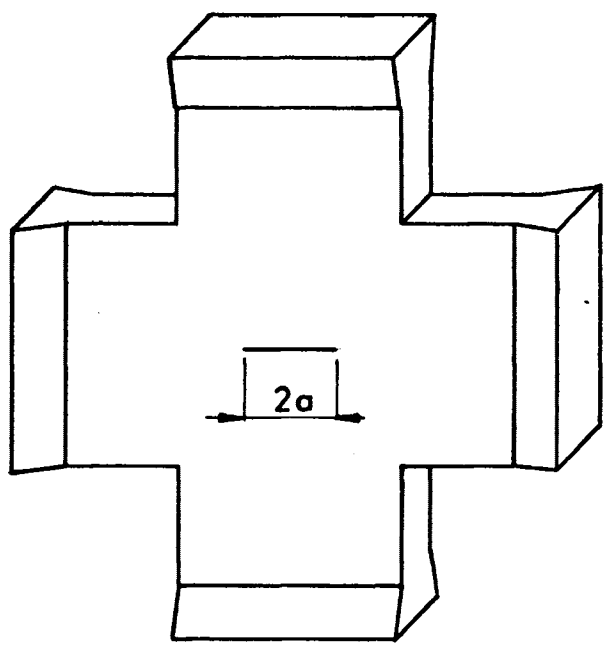
Fig. 7.- Modelos fotoelásticos



(e)



(f)



(g)



- los tres casos anteriores, pero a tracción biaxial
- placa con dos grietas alineadas a tracción uniaxial



III.- ESTUDIO TEORICO: SOLUCIONES ANALITICAS .

3.1.- DETERMINACION DE LAS FUNCIONES DE TENSION.

3.1.1.- LAMINA CON UN ORIFICIO CIRCULAR SOMETIDA A TRACCION UNIAXIAL.

3.1.2.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA.

3.1.3.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL CONTORNO CIRCULAR.

3.1.4.- ESTADO DE TENSION EN PUNTOS QUE ESTAN SOBRE EL CONTORNO DEL ORIFICIO CIRCULAR

3.2.- PLACA CON UN ORIFICIO ELIPTICO SOMETIDA A UN ESTADO DE TRACCION UNIAXIL.

3.2.1.- CALCULO DEL ESTADO DE TENSION EN UN PUNTO, PARA UN MODELO CON ORIFICIO ELIPTICO.

3.2.2.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA, PARA EL MODELO CON ORIFICIO ELIPTICO.

3.2.3.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL CONTORNO DEL ORIFICIO ELIPTICO.

3.2.4.- ESTADOS DE TENSION EN PUNTOS QUE ESTAN SOBRE EL CONTORNO DEL ORIFICIO ELIPTICO.



3.3.- PLACA CON UNA GRIETA ORIENTADA TRANSVERSALMENTE A LA DIRECCION DE APLICACION DE LA CARGA.

3.3.1.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA, PARA UN MODELO QUE CONTIENE UNA GRIETA.

3.3.2.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL VERTICE DE LA GRIETA.

3.4.- PLACA CON UN ORIFICIO CIRCULAR, SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIL.

3.4.1.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA.

3.4.2.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL CONTORNO DEL ORIFICIO CIRCULAR.

3.5.- PLACA CON UN ORIFICIO ELIPTICO, SOMETIDA A TRACCION BIAXIAL.

3.6.- PLACA CON UNA GRIETA Y SOMETIDA A UN ESTADO DE TRACCION BIAXIAL.

3.6.1.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA.

3.6.2.- SOLUCION DE WESTERGAARD PARA EL MODELO DE PLACA CON UNA GRIETA SOMETIDA A TENSION BIAXIAL.



3.6.3.- TRANSFORMACION ISOMETRICA DE LA ECUACION DE LA ISOCROMA, ENCONTRADA EN EL APARTADO ANTERIOR.

3.7.- PLACA CON DOS GRIETAS ALINEADAS Y SOMETIDA A UN ESTADO DE TRACCION UNIAXIL.



III.- ESTUDIO TEORICO: SOLUCIONES ANALITICAS Y RESULTADOS EXPERI- MENTALES

3.1.- DETERMINACION DE LAS FUNCIONES DE TENSION.

El problema a resolver, es el de hallar las funciones de tensión que nos permitan encontrar, ecuaciones para el estado de tensión en un punto y para la tensión máxima, en una lámina con un orificio elíptico, que está sometida a un estado de tensión en puntos alejados del orificio.

El planteamiento del problema será el siguiente:

1.- Calcularemos las tensiones en puntos situados en un camino elíptico trazado sobre una lámina sin orificios, y las funciones de tensión que resuelven este caso.

2.- Las tensiones obtenidas en el apartado precedente, cambiadas de signo, se utilizarán como valores de contorno, para resolver el problema de una lámina con un orificio elíptico, pero en la que no actúan estados de tensión en los contornos exteriores.

3.- Superponiendo las funciones de tensión obtenidas en los apartados precedentes, obtendremos la solución al problema planteado.



1. Lámina sin orificios sometida a un estado de tensión uniforme.

Si tenemos una lámina sometida a un estado de tensión uniforme (σ), aplicado a su contorno (fig.6), y superpuesto a este estado de tensión hay otro estado de tensión (σ'), de forma que - sea de tracción en la dirección (y), y de compresión en la dirección (x) (fig. 7), además de actuar una tensión cortante positiva (τ) sobre el contorno de la lámina.

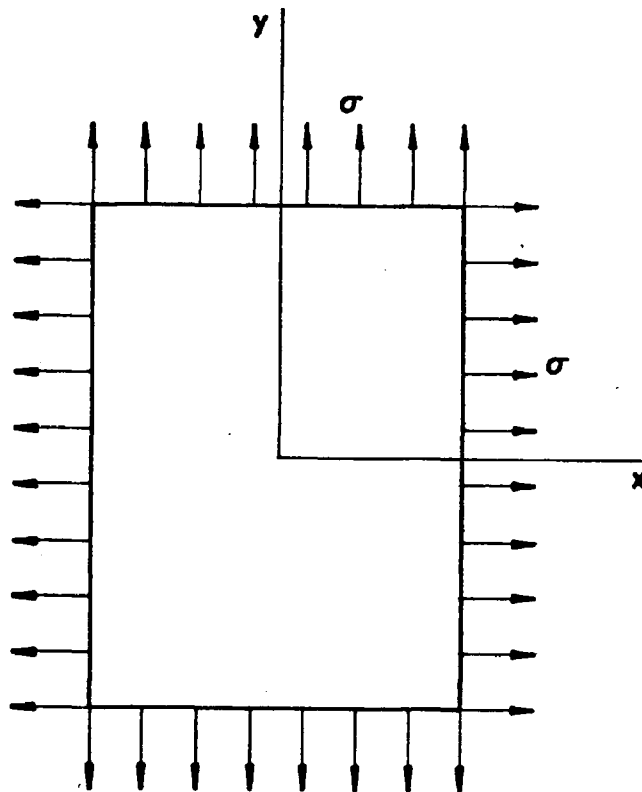


FIG. 6 .— Lámina sin orificio, sometida a un estado de tensión biaxial uniforme sobre su contorno exterior.

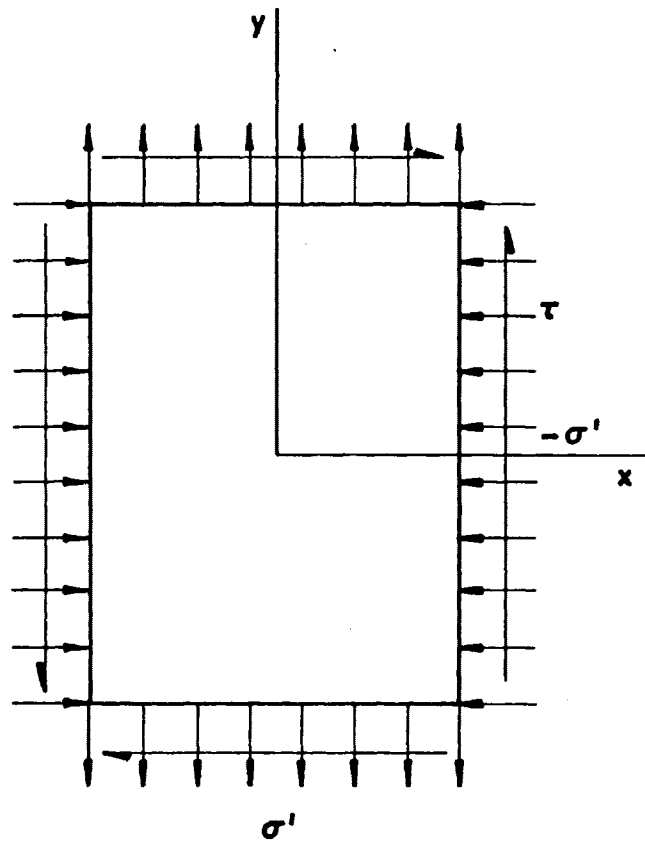


FIG. 7 .— Lamina sin orificio, sometida a un estado de tensión biaxial uniforme, de tracción en la dirección (y), y de compresión en la dirección (x), y tensiones cortantes positivos sobre el contorno.



La superposición de estos estados de tensión, darían para el estado de tensión en un punto, las ecuaciones siguientes:

$$\sigma_x = \sigma - \sigma'$$

$$\sigma_y = \sigma + \sigma'$$

$$\tau_{xy} = \tau$$

Si pasamos del sistema cartesiano, a un sistema de - coordenadas elíptico (fig. 8), (este sistema de coordenadas, es - el más apropiado para resolver el problema del orificio elíptico), tendremos:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y = 2\sigma \quad (1)$$

$$\sigma_\beta - \sigma_\alpha + 2i\tau_{\alpha\beta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \cdot e^{2i\eta} = 2(\sigma' + i\tau) \cdot e^{2i\eta} \quad (2)$$

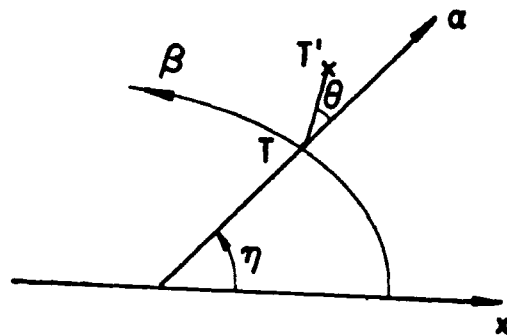


FIG. 8 . - Sistemade coordenadas elíptica.



En la ecuación (2), quedaría por determinar el valor de η en cualquier punto, para ello consideremos un pequeño segmento (TT') , inclinado un ángulo θ respecto a la normal (α) ; la longitud del segmento aun cuando no importa mucho, tendremos que asignarle el valor del incremento dZ ó $|d\zeta|$. Por tanto la longitud compleja la podríamos representar por:

$$dZ = |dZ| \cdot e^{i(\eta + \theta)} \text{ donde por } Z \text{ expresamos a la variable compleja de la forma } x + iy.$$

ó

$$d\zeta = |d\zeta| \cdot e^{i\theta} \text{ donde por } \zeta \text{ expresamos a la variable compleja de la forma } \alpha + i\beta.$$

La relación entre estas dos variables sería

$$Z = a \cdot \cos h \zeta \tag{3}$$

donde (a) , sería el semieje mayor de un camino elíptico.

Dividiendo la primera expresión, por la segunda, obtendremos:

$$e^{i\eta} = \frac{dZ}{d\zeta} / \left| \frac{dZ}{d\zeta} \right|$$

derivando la expresión (3), tendremos:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = a \cdot \text{sen } h \zeta$$



y teniendo en cuenta que:

$$|\operatorname{sen} h \zeta|^2 = \operatorname{sen} h \zeta \cdot \operatorname{sen} h \bar{\zeta}$$

obtendríamos como valor de $e^{2i\eta}$:

$$e^{2i\eta} = \frac{\operatorname{sen} h \zeta}{\operatorname{sen} h \bar{\zeta}}$$

por tanto las ecuaciones (1) y (2), las escribiríamos finalmente:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = 2\sigma \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha} + 2i \tau_{\alpha\beta} &= 2(\sigma' + i \tau) \cdot \frac{\operatorname{sen} \zeta}{\operatorname{sen} \bar{\zeta}} = \\ &= 2(\sigma' + i \tau) \quad (5) \end{aligned}$$

De las ecuaciones (4) y (5), se podrían calcular expresiones para σ_{α} , σ_{β} , $\tau_{\alpha\beta}$, pero prescindiremos de este cálculo y pasaremos a encontrar las funciones de tensión.

Teniendo en cuenta que:

$$\sigma_{\alpha} = 2\operatorname{Re} \phi' - \operatorname{Re}(\bar{Z}\phi'' + \psi') \quad (6)$$

$$\sigma_{\beta} = 2\operatorname{Re} \phi' + \operatorname{Re}(\bar{Z}\phi'' + \psi') \quad (7)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \operatorname{Im}(\bar{Z}\phi'' + \psi') \quad (8)$$

Sumando las ecuaciones (6) y (7), resulta:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = 4\text{Re}\phi' \Rightarrow \text{Re}\phi' = \frac{1}{4}(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta})$$

por tanto:

$$\phi' = \frac{1}{4}(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta})$$

é integrando :

$$\phi = \frac{1}{4}(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta})Z \quad (9)$$

Restando a la ecuación (7), la ecuación (6), tendremos:

$$\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha} = 2\text{Re}(\bar{Z}\phi'' + \psi') \quad (10)$$

Si a la ecuación (10), se le suma la ecuación (8), multiplicada por 2i, obtenemos:

$$\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha} + 2i\tau_{\alpha\beta} = 2\text{Re}(\bar{Z}\phi'' + \psi') + 2i\text{Im}(\bar{Z}\phi'' + \psi')$$

lo que equivale a :

$$\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha} + 2i\tau_{\alpha\beta} = 2(\bar{Z}\phi'' + \psi') \quad (11)$$

por tanto:



$$\bar{z}\phi'' + \psi' = \frac{1}{2} (\sigma_\beta - \sigma_\alpha + 2i\tau_{\alpha\beta})$$

y teniendo en cuenta (9), resulta que:

$$\phi'' = 0$$

y como consecuencia:

$$\psi' = \frac{1}{2} (\sigma_\beta - \sigma_\alpha + 2i\tau_{\alpha\beta})$$

é integrando:

$$\psi = \frac{1}{2} (\sigma_\beta - \sigma_\alpha + 2i\tau_{\alpha\beta})z \quad (12)$$

pasando las ecuaciones (9) y (12), a coordenadas elípticas, sin más que tener en cuenta (3), (4) y (5), resultará finalmente que:

$$\phi = \frac{1}{2} \sigma a \cos h \xi \quad (13)$$

$$\psi = (\sigma' + i\tau) a \cos h \xi \quad (14)$$

que son las funciones de tensión para este caso que estamos tratando.

2. Lámina con un orificio elíptico que no soporta ningún estado de -
tensión sobre dicho orificio elíptico.

Como ya hemos visto, nos interesa el cálculo de los es-



tados de tensión en la proximidad de un orificio elíptico en una lámina que soporta un estado de tensión sobre el contorno exterior, que está alejado de dicho orificio.

Calcularemos los estados de tensión en puntos que están sobre un camino elíptico trazado sobre una lámina sin orificios. Cambiando de signo estos estados de tensión los utilizaremos como valores de contorno para resolver el problema de una lámina que contiene un orificio elíptico cargado, mientras que los contornos exteriores están exentos de carga. Superponiendo esta solución a la obtenida anteriormente, obtendremos la solución del problema inicial.

Las tracciones sobre el orificio elíptico, se obtienen sin más que invertir los signos de las tensiones dadas por (1) y (2):

$$\sigma_{\alpha} - i\sigma_{\beta} = \phi + \bar{\phi}' - e^{2i\eta} (\bar{z}\phi'' + \psi')$$
(15)

como:

$$\phi' = \frac{1}{2}\sigma$$

$$\bar{\phi}' = \frac{1}{2}\sigma$$

$$(\bar{z}\phi'' + \psi')e^{2i\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha} + 2i\tau_{\alpha\beta}) = (\sigma' + i\tau).e^{2i\eta}$$

Resultará .

$$\sigma'_{\alpha} - i\sigma'_{\beta} = \sigma - (\sigma' + i\tau).e^{2i\eta}$$



tomando los complejos conjugados en ambos miembros, tendremos:

$$\sigma'_\alpha + i\sigma'_\beta = -\sigma + (\sigma' - i\tau)e^{-2i\eta} = -[\sigma - (\sigma' - i\tau)e^{-2i\eta}] \quad (16)$$

Teniendo en cuenta que la combinación de esfuerzos de la forma:

$$[\phi + z\bar{\phi}' + \bar{\psi}] = \int (\sigma'_\alpha + i\sigma'_\beta) dz = f \quad (17)$$

expresa las tracciones σ'_α y σ'_β que se ejercen en un punto del camino, y como:

$$\left. \begin{aligned} dz &= a \cdot \text{sen } h\bar{\zeta} \cdot d\bar{\zeta} \\ d\bar{\zeta} &= i d\beta \end{aligned} \right\} dz = i \cdot a \cdot \text{sen } h\bar{\zeta} d\beta$$

tendremos:

$$f = \int (\sigma'_\alpha + i\sigma'_\beta) dz = \int -[\sigma - (\sigma' - i\tau)e^{-2i\eta}] dz$$

$$f = \int -[\sigma - (\sigma' - i\tau)e^{-2i\eta}] \cdot i \cdot a \cdot \text{sen } h\bar{\zeta} d\beta$$

y también:

$$f = -ia \int [\sigma \cdot \text{sen } h\bar{\zeta} - (\sigma' - i\tau) \text{sen } h\bar{\zeta}] d\beta \quad (18)$$

Como la integración deberá realizarse a lo largo de un



camino para el cual α tiene un valor constante α_1 , conviene hacer $e^{\alpha_1 z} = \lambda$, y por tanto:

$$2 \operatorname{sen} h \bar{z} = \lambda \cdot e^{1/\beta} - \lambda^{-1} e^{-1/\beta}$$

$$2 \operatorname{sen} h \bar{z} = \lambda \cdot e^{-1/\beta} - \lambda^{-1} e^{1/\beta}$$

Efectuando la integración, tenemos:

$$\begin{aligned} [\phi + z\phi' + \bar{\psi}] = & -\frac{1}{2}a \left[\sigma(\lambda \cdot e^{1/\beta} + \lambda^{-1} e^{-1/\beta}) + \right. \\ & \left. + (\sigma' - i\tau)(\lambda e^{-1/\beta} + \lambda^{-1} e^{1/\beta}) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Como los esfuerzos se anulan en el infinito, los términos del segundo miembro que contenga a β positiva, deberán asociarse a las funciones conjugadas; dejando a parte estos términos, queda:

$$\phi = -\frac{1}{2}a \left[\sigma \lambda^{-1} e^{-1/\beta} + (\sigma' - i\tau) \lambda e^{-i/\beta} \right]$$

y en un punto interior de la lámina, la función ϕ será función de la variable compleja \bar{z} , por lo que la función correcta para ϕ , será:

$$\phi = -\frac{1}{2}a \left[\sigma \cdot e^{-\bar{z}} + (\sigma' - i\tau) \lambda^2 e^{-\bar{z}} \right] \quad (20)$$

Si a la ecuación (20), le sumamos la ecuación (13), resulta:

$$\phi = \frac{1}{2} \sigma \cdot a \cdot \operatorname{sen} h \bar{z} - \frac{1}{2}a(\sigma' - i\tau) \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\bar{z}} \quad (21)$$



Queda ahora por determinar la función ψ , y para este caso toma la forma:

$$\psi = - \left[\phi + \bar{z} \frac{d\phi}{dz} \right]$$

pero como:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{1}{a \cdot \operatorname{sen} h \zeta} \cdot \frac{d\phi}{d\zeta}$$

luego:

$$\psi = \frac{1}{2} a \left[(\sigma' + i\tau) e^{\zeta} - \frac{\sigma(\lambda^2 + \lambda'^2) + (\sigma' - i\tau)(\lambda^4 e^{2\zeta} + 1)}{2 \operatorname{sen} h \zeta} \right] \quad (22)$$

Las ecuaciones (21) y (22), son las funciones de tensión para una lámina que contiene un orificio elíptico exento de estados de tensión, pero que hay aplicado un estado de tensión en su contorno externo.

3. Funciones de tensión para una lámina con un orificio elíptico sometida a tracción uniaxial.

Si se aplica a una lámina con un orificio elíptico, una tensión uniaxial de tracción σ_0 , es decir, $\sigma = \sigma' = \sigma_0/2$, de tal forma que esta tensión sea perpendicular al eje mayor de la elipse, las funciones de tensión dadas por las ecuaciones (21) y (22), se reducen a estas otras:



$$\phi = \frac{1}{4} \sigma_0 a (\operatorname{sen} h \zeta - \lambda^2 e^{-\zeta}) \quad (23)$$

$$\psi = \frac{\sigma_0 a}{8} \left[\frac{e^{2\zeta} - \lambda^4 e^{-2\zeta} - (\lambda + \lambda^{-1})^2}{\operatorname{sen} h \zeta} \right] \quad (24)$$

donde:

$$\lambda = \frac{1}{a} (b + \sqrt{a^2 + b^2})$$

a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse.

Si $b = 0$, entonces $\alpha_1 = 0$ y por tanto $\lambda = 1$, y las ecuaciones (23) y (24), se transformarán en estas otras:

$$\phi = \sigma_0 a (e^{\zeta} - 3e^{-\zeta}) / 8 \quad (25)$$

$$\psi = \sigma_0 a (\operatorname{sen} h 2\zeta - 2) / 4 \operatorname{sen} h \zeta \quad (26)$$

que serían las funciones de tensión correspondientes a una lámina con una grieta de longitud $2a$, y sometida a tracción uniaxial, estando la carga aplicada normalmente a la dirección de la grieta.

Si $a = b$, $\lambda = 2,4$, y las ecuaciones (23) y (24), se convierten en estas otras:

$$\phi = \frac{1}{4} \sigma_0 a (\operatorname{sen} h \zeta - 5,76 \cdot e^{-\zeta}) \quad (27)$$



$$\psi = \frac{\sigma_0 a}{8} \left(\frac{e^{2\zeta} - 33,18 \cdot e^{-2\zeta} - 7,89}{\operatorname{sen} h \zeta} \right) \quad (28)$$

que serían las funciones de tensión correspondientes a una lámina con un orificio circular de radio $2a$, y sometida a tracción uniaxial.



3.1.1.- LAMINA CON UN ORIFICIO CIRCULAR SOMETIDA A TRACCION UNIAXIL.

En las ecuaciones (27) y (28), se dan las funciones de tensión correspondientes a este caso particular, y que han sido deducidas de las funciones de tensión encontradas para el caso de una lámina con un orificio elíptico y sometida a tracción uniaxial.

Sin embargo en el apartado (1.3), se ha expuesto el método general para el cálculo de las funciones de tensión, para modelos que contengan contornos circulares, así como el cálculo de la cisión máxima y las expresiones que dan el estado de tensión en un punto.

Aunque este caso está ya resuelto como caso "aislado", se ha estudiado en primer lugar como caso particular del método teórico general que empleamos para todo tipo de defectos, pero lo estudiaremos a partir de las funciones de tensión encontradas para modelos con contornos circulares, debido a la mayor simplicidad en el problema, a pesar de que las ecuaciones (27) y (28), seguirán siendo perfectamente válidas.

Las funciones de tensión para este caso, serán:

$$\phi = \frac{1}{4} \sigma_0 (Z - 2a^2 Z^{-1}) \quad (29)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \sigma_0 (Z - a^2 Z^{-1} - a^4 Z^{-3}) \quad (30)$$



donde:

ϕ y ψ , son las funciones de tensión
 Z es una variable compleja de la forma $x + iy$
 σ_0 es la tensión aplicada al contorno
 (a) es el radio del orificio circular.

Teniendo en cuenta que el estado de tensión en un punto referido a un sistema cartesiano (x,y) , viene dado por:

$$\sigma_r = 2\text{Re } \phi' - \text{Re} \left[e^{2i\theta} (\bar{Z} \cdot \phi'' + \psi') \right] \quad (31)$$

$$\sigma_\theta = 2\text{Re } \phi' + \text{Re} \left[e^{2i\theta} (\bar{Z} \cdot \phi'' + \psi') \right] \quad (32)$$

$$\tau_{r\theta} = \text{Im} \left[e^{2i\theta} (\bar{Z} \cdot \phi'' + \psi') \right] \quad (33)$$

de las ecuaciones (31), (32) y (33), se deduce inmediatamente que:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\text{Re } \phi' \quad (34)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2(\bar{Z} \cdot \phi'' + \psi') \cdot e^{2i\theta} \quad (35)$$

y por otra parte:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$$



$$\sigma_{\theta} - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\theta}$$

por tanto el estado de tensión en cualquier punto que viene dado por σ_x , σ_y y τ_{xy} , se expresa por las ecuaciones:

$$\sigma_x = \sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (36)$$

$$\sigma_y = \sigma_0 + \sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (37)$$

$$\tau_{xy} = -\sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (38)$$

Sin embargo, las observaciones fotoelásticas, nos permiten visualizar las líneas de tensión máxima, es por lo que nos interesa determinar la expresión correspondiente del esfuerzo cortante máximo, que es:

$$\tau_m = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (39)$$

si en la ecuación (39), sustituimos las expresiones dadas por (36), (37) y (38), se encuentra para la tensión máxima la ecuación siguiente:

$$\tau_m = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{4} + a^4 r^{-4} \left(\frac{5}{4} - 3a^2 r^{-2} + \frac{a^4}{4} r^{-4} \right) + a^2 r^{-2} \left[\cos 2\theta \left(\frac{3}{2} a^4 r^{-4} - a^2 r^{-2} + \frac{1}{2} \right) + \cos 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (39-a)$$



es de gran interés, conocer las expresiones correspondientes a las tensiones principales, cuyo cálculo es inmediato, para ello no habría más que resolver el sistema de ecuaciones dado por:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_m \quad ; \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

resultando en definitiva que:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + 2a^2 r^{-2} \cos 2\theta) + \tau_m \quad (40)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + 2a^2 r^{-2} \cos 2\theta) - \tau_m \quad (41)$$

donde τ_m está dada en la ecuación anterior.



3.1.2.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA.

A partir de la ecuación (39), se ha deducido en el apartado anterior (3.1.1.), la expresión que dá la cisión máxima, y que como puede comprobarse, es función de la tensión aplicada al contorno, del radio del orificio circular practicado en la placa y del punto donde se desea hallar dicha cisión máxima (r, θ).

Teniendo en cuenta por tanto, que fotoelásticamente podemos determinar de una forma experimental, la validez de dichas ecuaciones, tendremos que representar la forma analítica, dichas líneas de cisión máxima. Para ello, daremos a ζ_m , los valores que se encuentran en la Tabla II, que corresponde a órdenes enteros de franja é - ir deduciendo para cada tensión aplicada al contorno dichas líneas de cisión máxima.

A continuación, se presentan las tablas de valores deducidos para cada tensión de contorno y al mismo tiempo la representación de estas líneas de cisión máxima.

Teniendo en cuenta además, que se han deducido expresiones para las tensiones principales (ecs. (40), (41), y que no son muy complicadas, se han calculado los estados de tensión en puntos que estan sobre el contorno del orificio circular y de 15 en 15° .



a.- La tensión exaltada por el orificio circular, es tres veces mayor, que la tensión aplicada al contorno de la placa.

b.- En el punto de coordenadas $r = a$, $\theta = 60^\circ$, existe un punto singular, es decir, las tensiones principales (σ_1 y σ_2), son nulas en dicho punto.

Así mismo, se ha calculado la variación de las tensiones principales a medida que nos alejamos del orificio circular, sacándose una conclusión importante:

- La tensión principal 1, tiene el valor de la tensión de contorno, a medida que nos alejamos del orificio circular.

Por último, se hace una representación conjunta de la variación de la tensión principal 1, para tensiones aplicadas a la placa crecientes, a medida que nos separamos del contorno del orificio circular.



$\sigma_0 = 0,44 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_m	$r = 12$		$r = 16$		$r = 20$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	51,413	cos < -1	cos > 1	73,675	cos > 1	75,412
2	0,311	34,822	cos < -1	-----	-----	-----	-----
3	0,466	13,500	cos < -1	-----	-----	-----	-----
4	0,621	cos > 1	cos < -1	-----	-----	-----	-----

$\sigma_0 = 0,44 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_m	$r = 25$		$r = 30$		$r = 35$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	cos > 1	77,754	cos > 1	82,015	cos > 1	cos < -1
2	0,311	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3	0,466	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	0,621	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabla III

Como puede comprobarse en el modelo isocromático 1, los lóbulos señalados dentro del círculo (a), no corresponden a un orden de franja entero, es por lo que en el modelo isocromático teórico 1, no aparecen dichos lóbulos.

Se ha de señalar también que las líneas de trazos en -- las tablas corresponden a raíces imaginarias, que no tienen sentido físico real.



$\sigma_0 = 0,72 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_m	r = 12		r = 16		r = 20	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	59,537	76,832	cos > 1	81,737	cos > 1	84,529
2	0,311	47,540	cos < -1	cos > 1	68,817	cos > 1	70,475
3	0,466	37,619	cos < -1	17,541	50,661	28,115	52,234
4	0,621	26,958	cos < -1	-----	-----	-----	-----
5	0,776	11,564	cos < -1	-----	-----	-----	-----
6	0,932	cos > 1	cos < -1	-----	-----	-----	-----

$\sigma_0 = 0,72 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_m	r = 25		r = 30		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
2	0,311	cos > 1	71,295	cos > 1	72,410	cos > 1	74,154
3	0,466	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	0,621	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	0,776	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6	0,932	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabla IV



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,44 \text{ Kg/mm}^2$

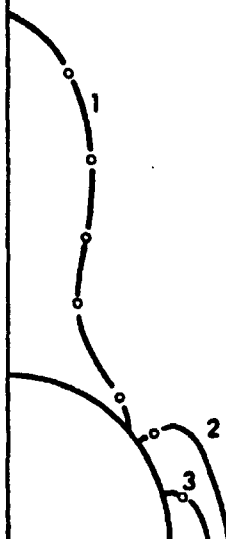


Fig. 9.- Red de isóchromas
calculada a partir de la
ecuación (39-a)

tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,72 \text{ Kg/mm}^2$

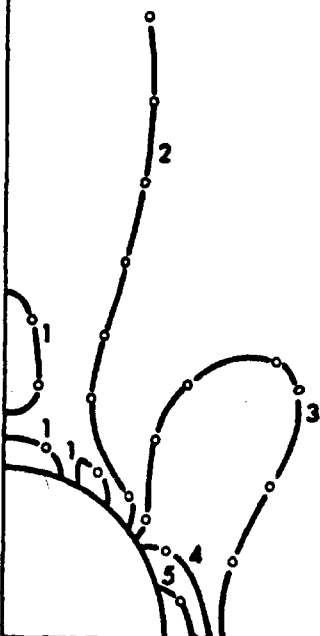


Fig. 10.- Red de isóchromas
calculada a partir de la -
ecuación (39-a)



$\sigma_0 = 1,09 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_{μ}	r = 12		r = 16		r = 20	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	-----	-----	cos > 1	89,132	cos > 1	cos < -1
2	0,311	64,336	69,613	cos > 1	77,802	cos > 1	79,590
3	0,466	48,918	cos < -1	cos > 1	69,211	cos > 1	70,784
4	0,621	42,013	cos < -1	cos > 1	58,867	17,382	60,545
5	0,776	35,261	cos < -1	-----	-----	-----	-----
6	0,932	28,009	cos < -1	-----	-----	-----	-----
7	1,087	19,351	cos < -1	-----	-----	-----	-----
8	1,242	1,271	cos < -1	-----	-----	-----	-----

$\sigma_0 = 1,09 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_{μ}	r = 25		r = 30		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
2	0,311	cos > 1	84,723	cos > 1	cos > 1	cos > 1	cos < -1
3	0,466	cos > 1	71,680	cos > 1	72,900	cos > 1	74,823
4	0,621	22,067	58,796	26,012	55,786	30,615	51,904
5	0,776	-----	-----	-----	-----	-----	-----
6	0,932	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	1,087	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabla V

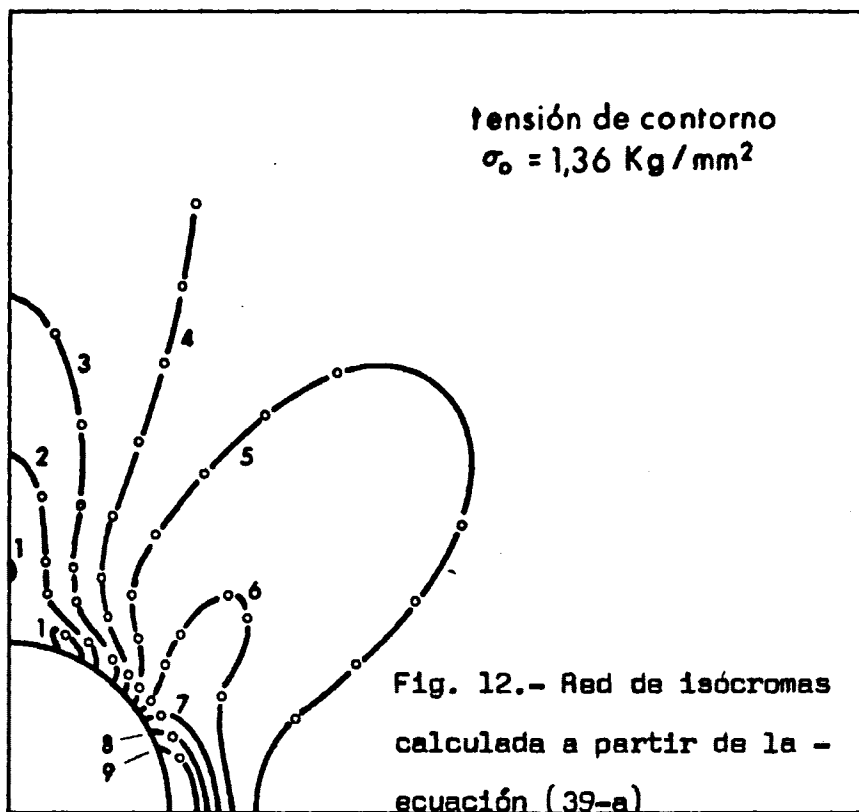
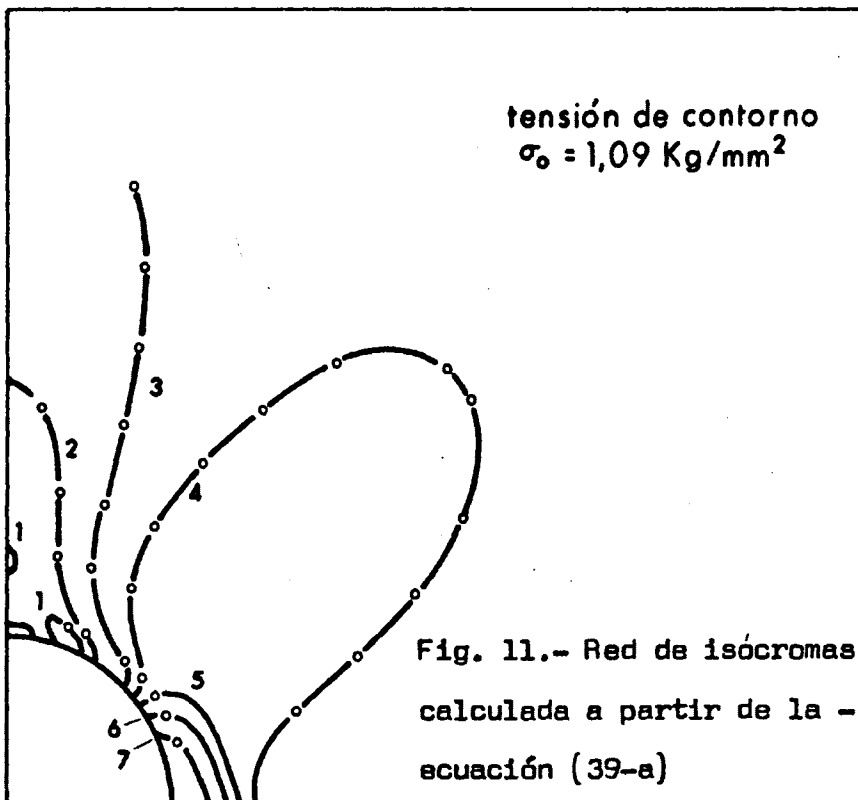


$\sigma_0 = 1,36 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_{m}	r = 12		r = 14		r = 16	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	-----	-----	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
2	0,311	63,272	70,940	cos > 1	79,510	cos > 1	80,912
3	0,466	53,531	cos > 1	cos > 1	70,853	cos > 1	74,239
4	0,621	47,455	cos > 1	cos > 1	61,992	cos > 1	67,217
5	0,776	41,973	cos > 1	cos > 1	51,556	cos > 1	58,738
6	0,932	36,546	cos > 1	cos > 1	36,335	27,265	43,810
7	1,087	30,938	cos > 1	-----	-----	-----	-----
8	1,242	24,737	cos > 1	-----	-----	-----	-----
9	1,398	17,055	cos > 1	-----	-----	-----	-----

$\sigma_0 = 1,36 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_{m}	r = 20		r = 25		r = 30	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	cos > 1	83,508	cos > 1	cos > 1	cos > 1	cos < -1
3	0,466	cos > 1	76,033	cos > 1	78,646	cos > 1	83,715
4	0,621	cos > 1	68,902	cos > 1	69,323	cos > 1	69,804
5	0,776	17,493	60,470	22,192	58,697	26,183	55,641
6	0,932	37,791	43,390	-----	-----	-----	-----

$\sigma_0 = 1,36 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_{m}	r = 35		r = 40		r = 45	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1		
4	0,621	cos > 1	70,736	cos > 1	71,892		
5	0,776	31,629	51,176	-----	-----		

Tabla VI





$\sigma_0 = 1,64 \text{ Kg/mm}^2$							
n	Z_m	r = 12		r = 14		r = 16	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	-----	-----	cos >	cos <	cos >	cos <
2	0,311	-----	-----	cos >	82,926	cos >	83,382
3	0,466	57,373	82,241	cos >	75,218	cos >	77,642
4	0,621	51,490	cos < -	cos >	68,140	cos >	72,102
5	0,776	46,639	cos < -	cos >	60,611	cos >	66,112
6	0,932	42,081	cos < -	cos >	51,794	cos >	58,936
7	1,087	37,618	cos < -	cos >	40,086	21,199	48,349
8	1,242	33,047	cos < -	cos >	12,729	-----	-----
9	1,398	28,150	cos < -	-----	-----	-----	-----
10	1,553	22,694	cos < -	-----	-----	-----	-----
11	1,708	15,954	cos < -	-----	-----	-----	-----
12	1,860	3,613	cos < -	-----	-----	-----	-----
13	2,015	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabla VII



$\sigma_0 = 1,64 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_m	$\theta_1, r = 20 \quad \theta_2$		$\theta_1, r = 25 \quad \theta_2$		$\theta_1, r = 30 \quad \theta_2$	
1	0,155	cos >	cos < -	cos >	cos < -	cos >	cos < -
2	0,311	cos >	87,473	cos >	cos < -	cos >	cos < -
3	0,466	cos >	79,665	cos >	84,898	cos >	cos < -
4	0,621	cos >	73,830	cos >	75,611	cos >	78,419
5	0,776	cos >	67,799	6,707	67,952	7,301	68,029
6	0,932	17,196	60,668	21,861	58,957	25,732	56,023
7	1,087	30,976	49,750	-----	-----	-----	-----

$\sigma_0 = 1,64 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_m	$\theta_1, r = 35 \quad \theta_2$		$\theta_1, r = 40 \quad \theta_2$		$\theta_1, r = 45 \quad \theta_2$	
3	0,466	cos >	cos < -	cos >	cos < -	cos >	cos < -
4	0,621	cos >	83,576	cos >	cos < -	cos >	cos < -
5	0,776	6,670	68,461	4,495	69,005	cos >	70,146
6	0,932	30,184	52,293	37,887	45,037	-----	-----

Tabla VII



$\sigma_0 = 1,78 \text{ Kg/mm}^2$							
n	τ_m	r = 12		r = 14		r = 16	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	-----	-----	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
2	0,311	-----	-----	cos > 1	84,483	cos > 1	84,422
3	0,466	59,207	77,500	cos > 1	76,910	cos > 1	78,944
4	0,621	53,166	cos < -1	cos > 1	70,386	cos > 1	73,873
5	0,776	48,490	cos < -1	cos > 1	63,672	cos > 1	68,558
6	0,932	44,202	cos < -1	cos > 1	56,156	cos > 1	62,521
7	1,087	40,082	cos < -1	cos > 1	47,101	7,899	54,951
8	1,242	35,949	cos < -1	cos > 1	33,947	32,884	38,898
9	1,398	31,648	cos < -1	-----	-----	-----	-----
10	1,553	27,057	cos < -1	-----	-----	-----	-----
11	1,708	21,895	cos < -1	-----	-----	-----	-----
12	1,860	15,660	cos < -1	-----	-----	-----	-----
13	2,015	4,295	cos < -1	-----	-----	-----	-----
14	2,170	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabla VIII



$\sigma_0 = 1,78 \text{ Kg/mm}^2$							
n	z_m	r = 20		r = 25		r = 30	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
2	0,311	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
3	0,466	cos > 1	81,129	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
4	0,621	cos > 1	75,652	cos > 1	78,103	cos > 1	82,602
5	0,776	cos > 1	70,245	cos > 1	71,002	cos > 1	72,000
6	0,932	11,009	64,229	15,528	63,511	17,723	62,270
7	1,087	22,722	56,679	28,555	53,383	37,788	45,041

$\sigma_0 = 1,78 \text{ Kg/mm}^2$							
n	z_m	r = 35		r = 40		r = 45	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
4	0,621	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
5	0,776	cos > 1	73,612	cos > 1	75,679	cos > 1	79,069
6	0,932	19,573	61,102	21,302	59,723	22,679	58,532
7	1,087	-----	-----	-----	-----	-----	-----

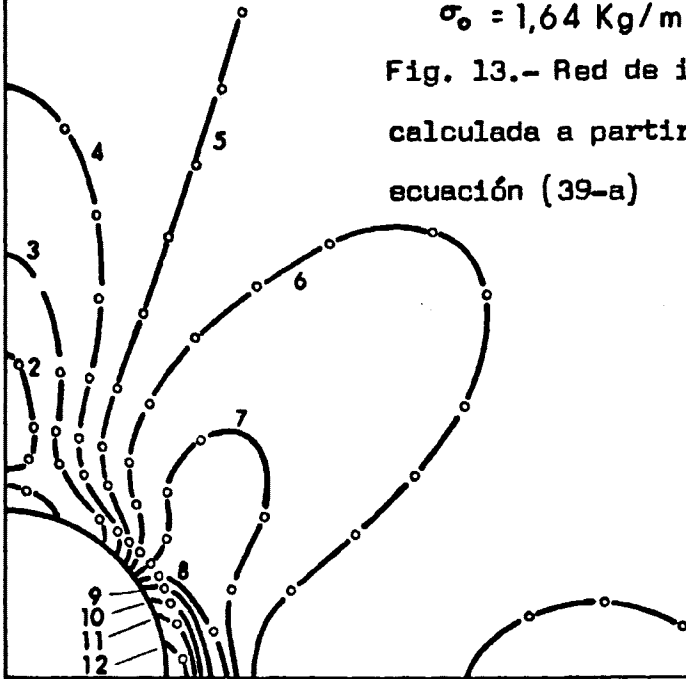
$\sigma_0 = 1,78 \text{ Kg/mm}^2$							
n	z_m	r = 50		r = 55			
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2		
5	0,776	cos > 1	83,507	cos > 1	cos < -1		
6	0,932	25,318	56,385	26,741	55,399		

Tabla VIII



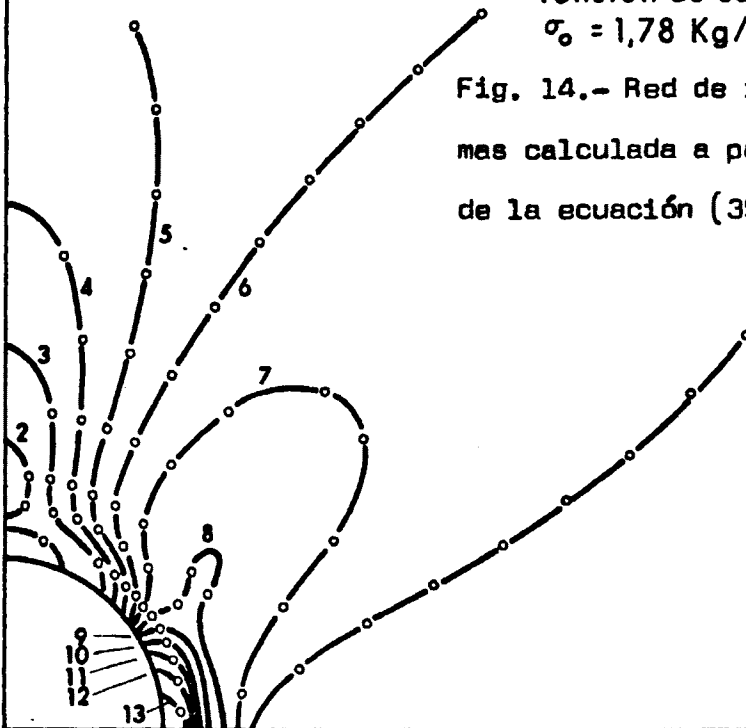
tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,64 \text{ Kg/mm}^2$

Fig. 13.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (39-a)



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,78 \text{ Kg/mm}^2$

Fig. 14.- Red de isócro
mas calculada a partir
de la ecuación (39-a)





$\sigma_0 = 1,92 \text{ Kg/mm}^2$							
n	Z_{us}	r = 12		r = 14		r = 16	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	-----	-----	-----	-----	-----	-----
2	0,311	-----	-----	cos > 1	86,118	cos > 1	85,398
3	0,466	61,180	73,939	cos > 1	78,390	cos > 1	80,070
4	0,621	54,698	cos < -1	cos > 1	72,285	cos > 1	75,361
5	0,776	50,126	cos < -1	cos > 1	66,180	cos > 1	70,551
6	0,932	46,041	cos < -1	cos > 1	59,567	cos > 1	65,273
7	1,087	42,182	cos < -1	cos > 1	52,016	cos > 1	59,120
8	1,242	38,373	cos < -1	cos > 1	42,430	17,482	50,701
9	1,398	34,480	cos < -1	cos > 1	26,497	-----	-----
10	1,553	30,446	cos < -1	-----	-----	-----	-----
11	1,708	26,100	cos < -1	-----	-----	-----	-----
12	1,860	21,297	cos < -1	-----	-----	-----	-----
13	2,015	15,269	cos < -1	-----	-----	-----	-----
14	2,170	4,802	cos < -1	-----	-----	-----	-----
15	2,325	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabla IX



$\sigma_0 = 1,92 \text{ Kg/mm}^2$							
n	z_{m}	$r = 20$		$r = 25$		$r = 30$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
2	0,311	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
3	0,466	cos > 1	82,456	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
4	0,621	cos > 1	77,210	cos > 1	80,404	cos > 1	cos < -1
5	0,776	cos > 1	72,253	cos > 1	73,551	cos > 1	75,444
6	0,932	1,358	66,964	9,361	66,916	9,843	66,909
7	1,087	16,918	60,851	21,553	59,198	25,317	56,372
8	1,242	28,061	52,307	38,859	43,801	-----	-----

$\sigma_0 = 1,92 \text{ Kg/mm}^2$							
n	z_{m}	$r = 35$		$r = 40$		$r = 45$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
4	0,621	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
5	0,776	cos > 1	78,440	cos > 1	83,216	cos > 1	cos < -1
6	0,932	10,687	66,760	10,310	66,874	8,762	67,451
7	1,087	29,559	52,852	36,130	46,727	-----	-----

Tabla IX



$\sigma_0 = 2,15 \text{ Kg/mm}^2$							
n	Z_m	r = 12		r = 14		r = 16	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	-----	-----	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
2	0,311	-----	-----	cos > 1	cos < -1	cos > 1	87,007
3	0,466	-----	-----	cos > 1	80,495	cos > 1	81,642
4	0,621	57,025	83,531	cos > 1	74,866	cos > 1	77,370
5	0,776	52,475	cos < -1	cos > 1	69,482	cos > 1	73,160
6	0,932	48,615	cos < -1	cos > 1	63,870	cos > 1	68,715
7	1,087	45,066	cos < -1	cos > 1	57,798	cos > 1	63,848
8	1,242	41,638	cos < -1	cos > 1	50,810	cos > 1	58,115
9	1,398	38,214	cos < -1	cos > 1	41,953	18,258	50,240
10	1,553	34,762	cos < -1	cos > 1	28,177	-----	-----
11	1,708	31,185	cos < -1	-----	-----	-----	-----
12	1,860	27,461	cos < -1	-----	-----	-----	-----
13	2,015	23,298	cos < -1	-----	-----	-----	-----
14	2,170	18,478	cos < -1	-----	-----	-----	-----
15	2,325	12,203	cos < -1	-----	-----	-----	-----
16	2,480	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabla IX



$\sigma_0 = 2,15 \text{ Kg/mm}^2$							
n	z_m	r = 20		r = 25		r = 30	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
2	0,311	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
3	0,466	cos > 1	84,486	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
4	0,621	cos > 1	79,366	cos > 1	84,229	cos > 1	cos < -1
5	0,776	cos > 1	74,916	cos > 1	77,077	cos > 1	81,245
6	0,932	cos > 1	70,403	cos > 1	71,200	cos > 1	72,263
7	1,087	7,878	65,547	12,822	65,156	14,492	64,418
8	1,242	18,407	59,850	23,228	57,873	27,630	54,398
9	1,398	28,629	51,817	-----	-----	-----	-----

$\sigma_0 = 2,15 \text{ Kg/mm}^2$							
n	z_m	r = 35		r = 40		r = 45	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
5	0,776	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1	cos > 1	cos < -1
6	0,932	cos > 1	73,963	cos > 1	76,159	cos > 1	79,809
7	1,087	15,643	63,867	16,470	63,249	16,714	62,968
8	1,242	33,327	49,420	-----	-----	-----	-----

Tabla IX



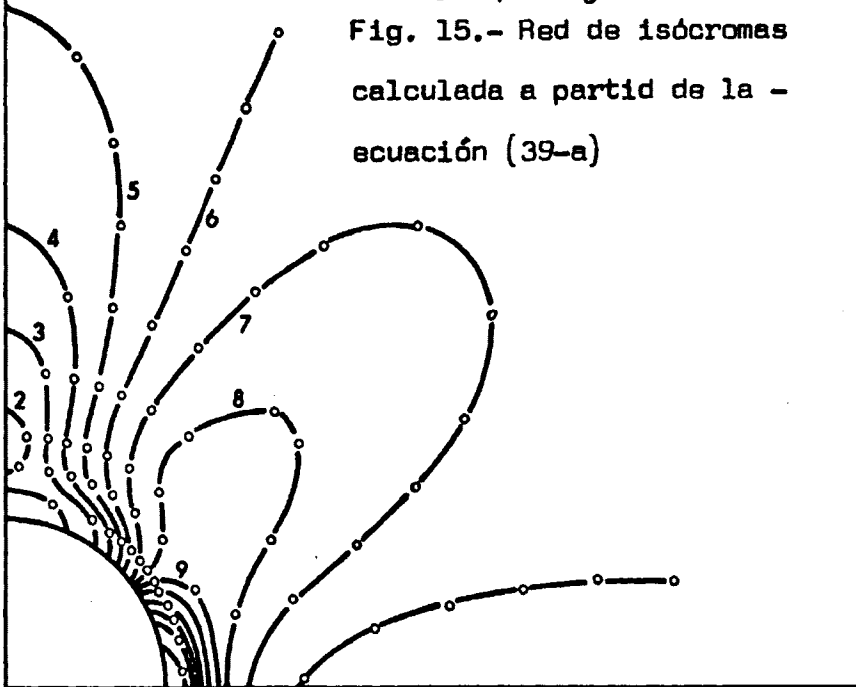
$\sigma_0 = 2,15 \text{ Kg/mm}^2$							
n	Z_m	$r = 50$					
		θ_1	θ_2				
5	0,776	$\cos > 1$	$\cos < -1$				
6	0,932	$\cos > 1$	85,089				
7	1,087	18,026	62,073				

Tabla X



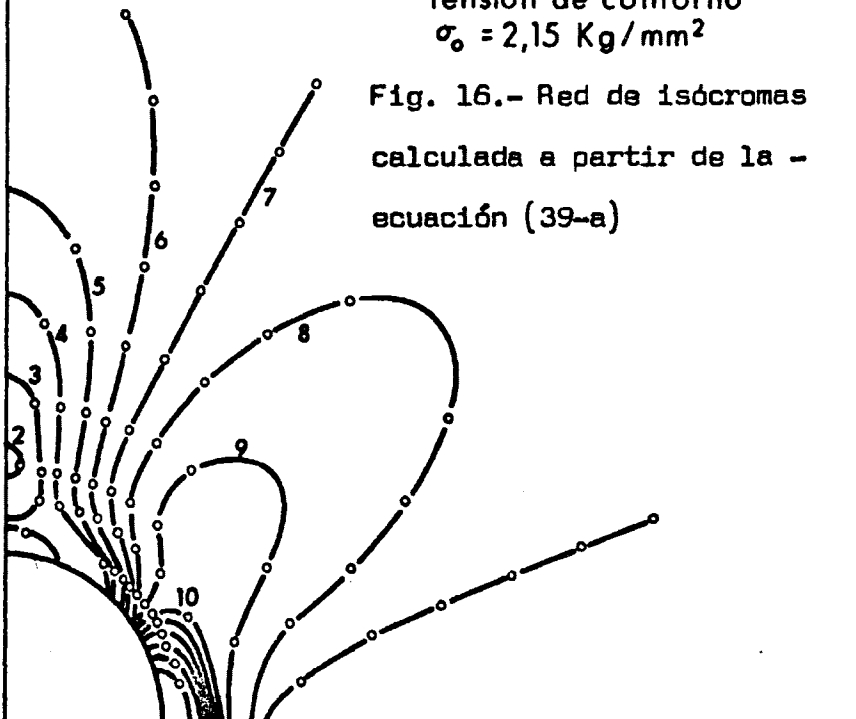
tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,92 \text{ Kg/mm}^2$

Fig. 15.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (39-a)



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 2,15 \text{ Kg/mm}^2$

Fig. 16.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (39-a)



3.1.3.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL CONTORNO CIRCULAR.

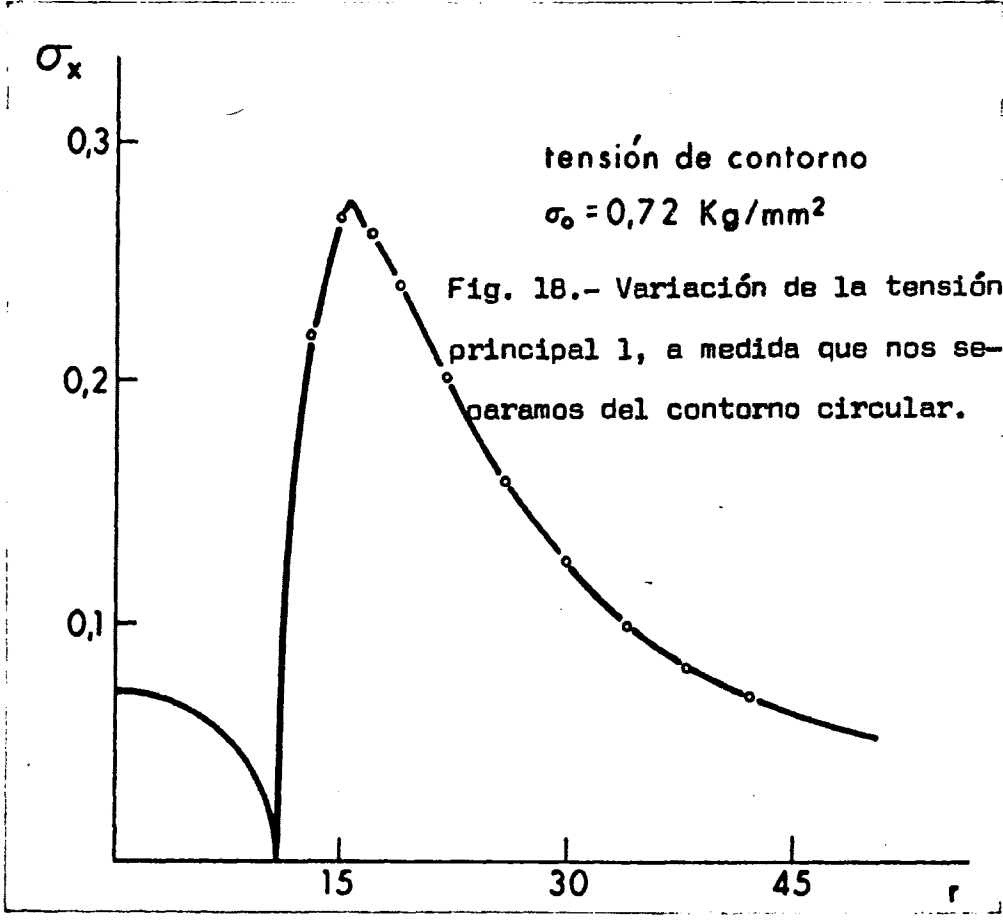
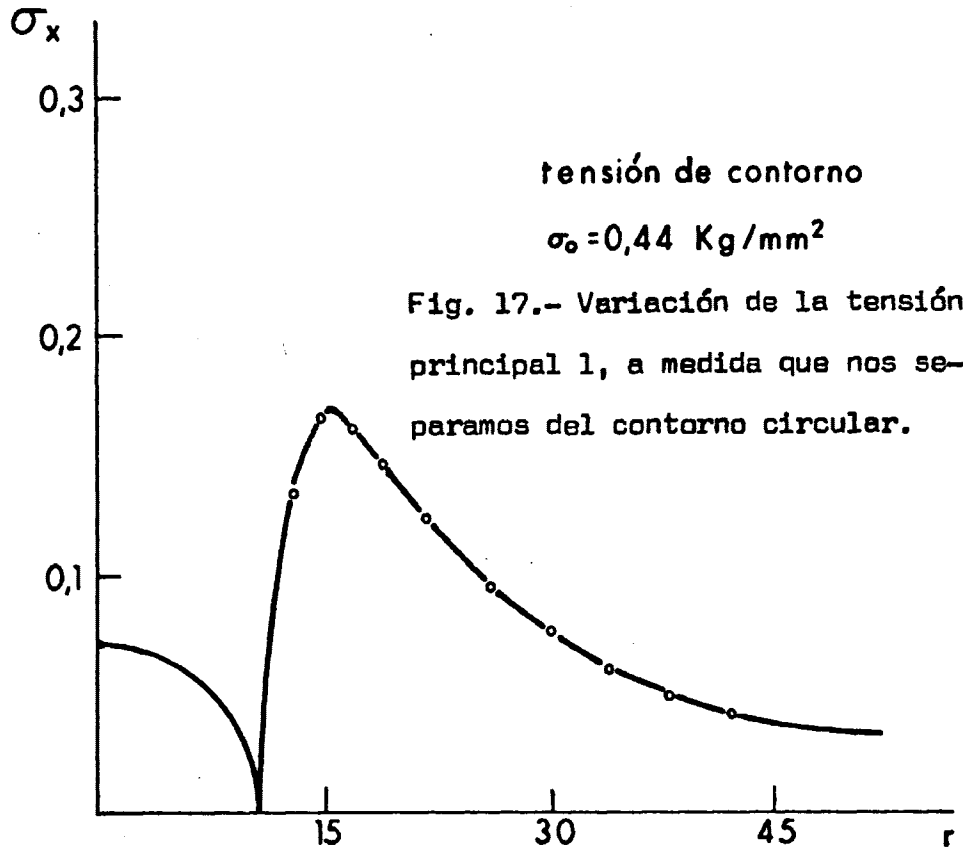


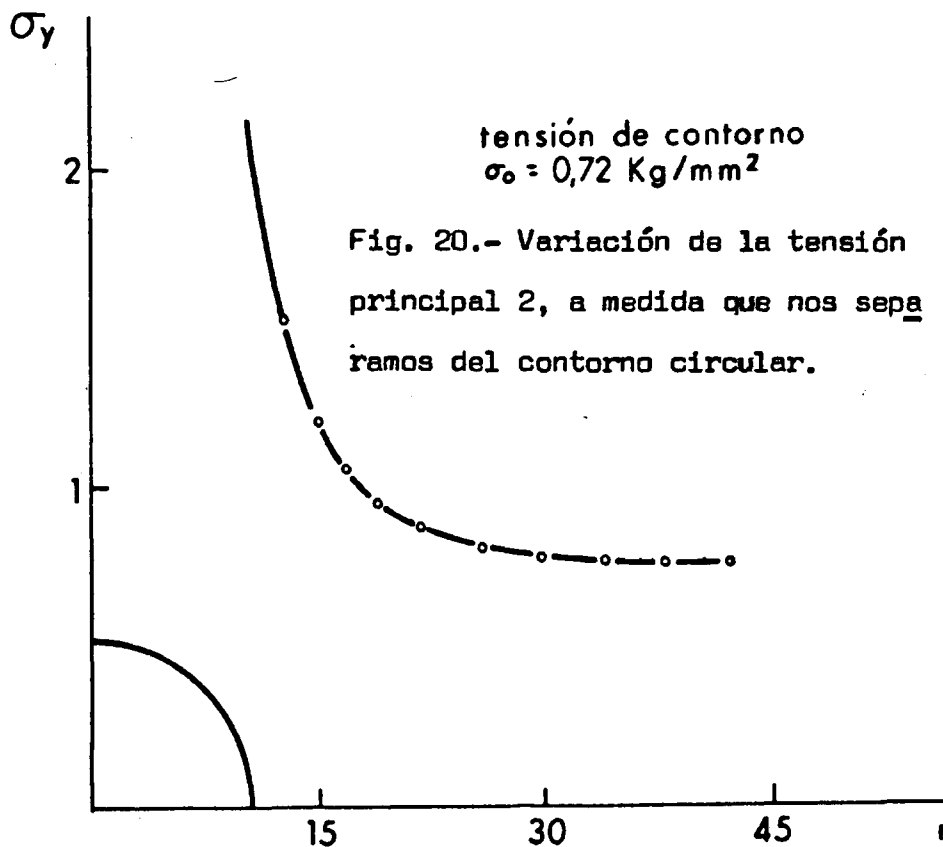
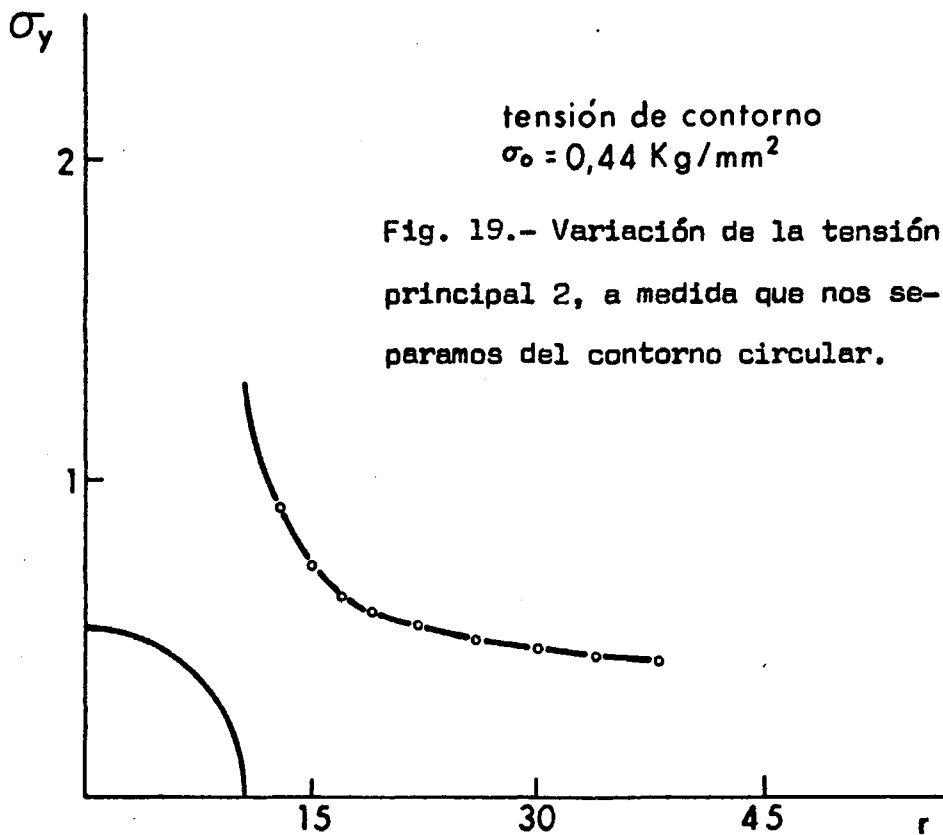
$\sigma_0 = 0,44$			
r	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	τ_{xy}
11	0	1,320	0
13	0,134	0,936	0
15	0,164	0,749	0
17	0,161	0,648	0
19	0,147	0,588	0
22	0,124	0,536	0
26	0,097	0,501	0
30	0,077	0,482	0

Tabla X I

$\sigma_0 = 0,72$			
r	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	τ_{xy}
11	0	2,160	0
13	0,220	1,531	0
15	0,268	1,226	0
17	0,263	1,060	0
19	0,241	0,962	0
22	0,202	0,878	0
26	0,159	0,819	0
30	0,126	0,788	0

Tabla XII





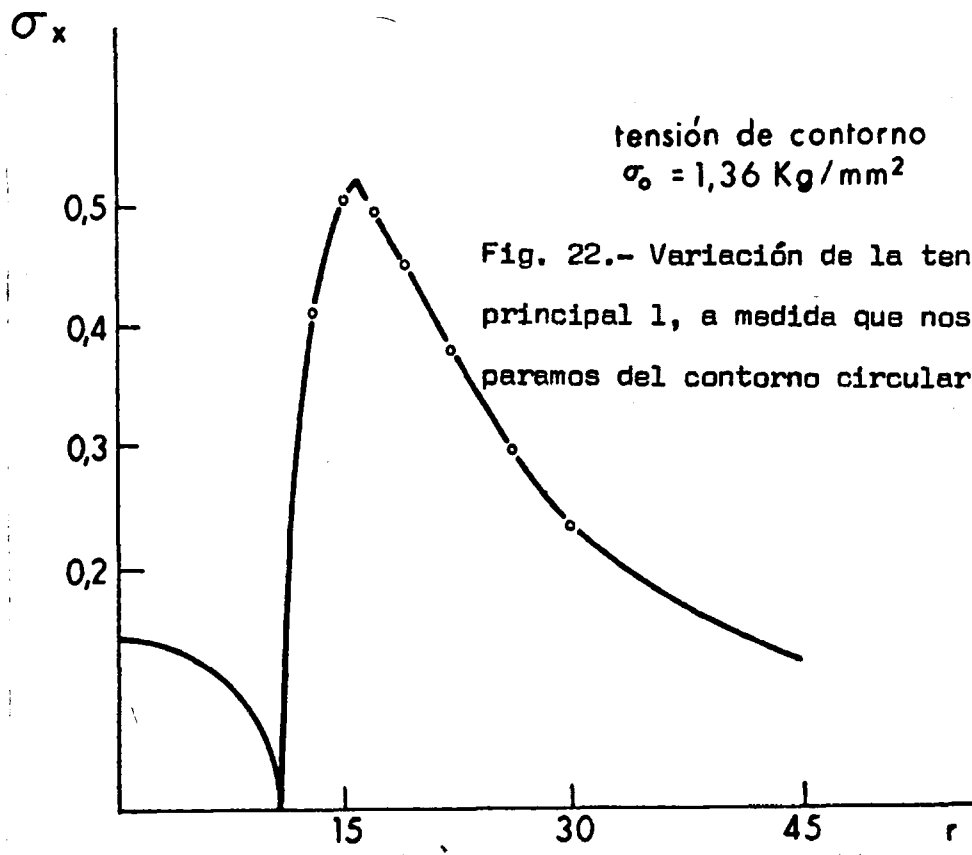
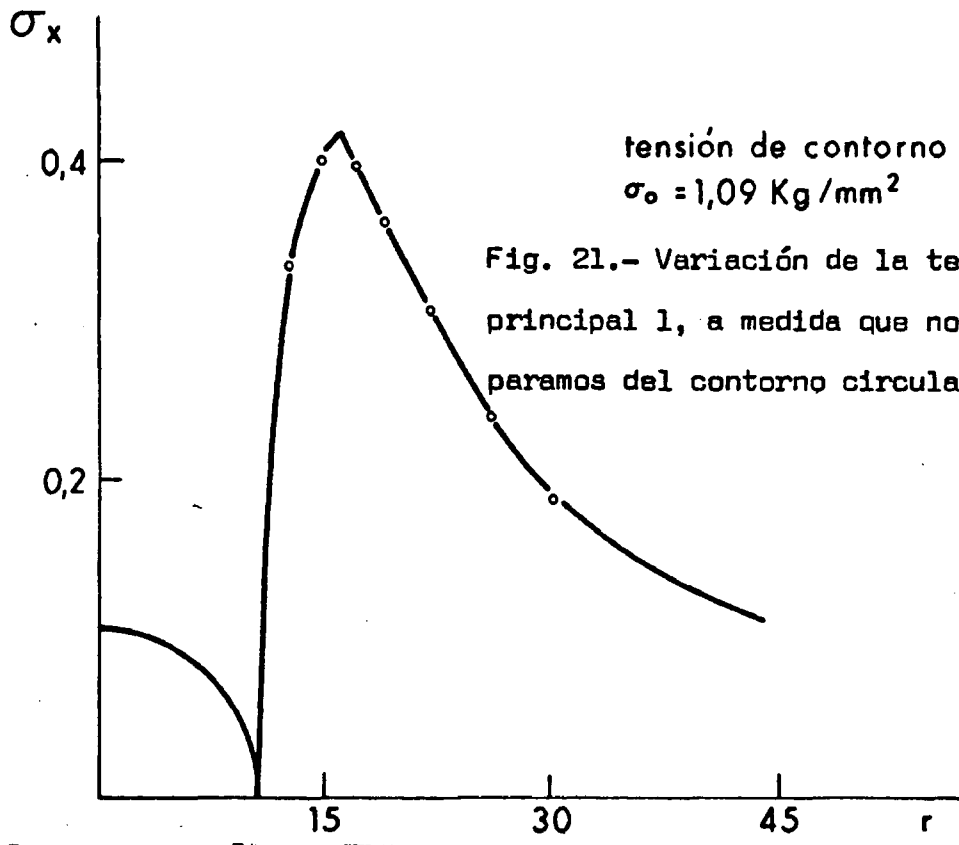


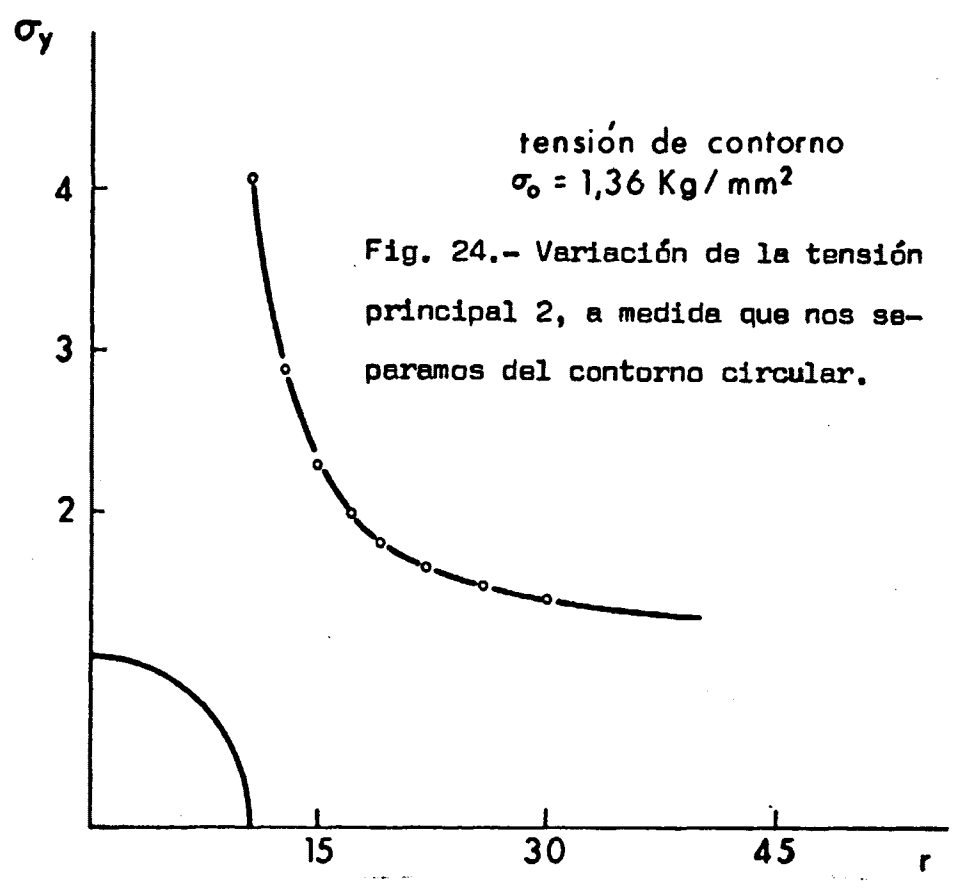
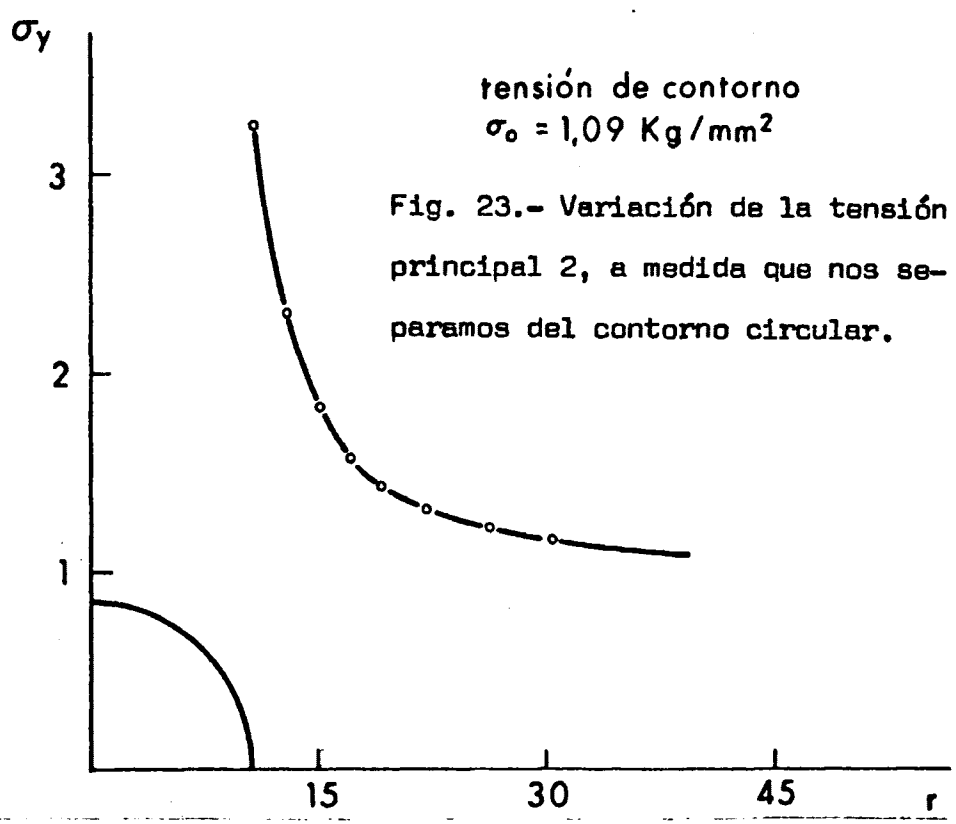
$\sigma_0 = 1,09$			
r	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	Σxy
11	0	3,270	0
13	0,332	2,318	0
15	0,406	1,856	0
17	0,398	1,605	0
19	0,364	1,456	0
22	0,307	1,328	0
26	0,240	1,240	0
30	0,190	1,173	0

Tabla XIII

$\sigma_0 = 1,36$			
r	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	Σxy
11	0	4,080	0
13	0,415	2,893	0
15	0,507	2,316	0
17	0,497	2,002	0
19	0,455	1,817	0
22	0,383	1,658	0
26	0,300	1,547	0
30	0,237	1,488	0

Tabla XIV





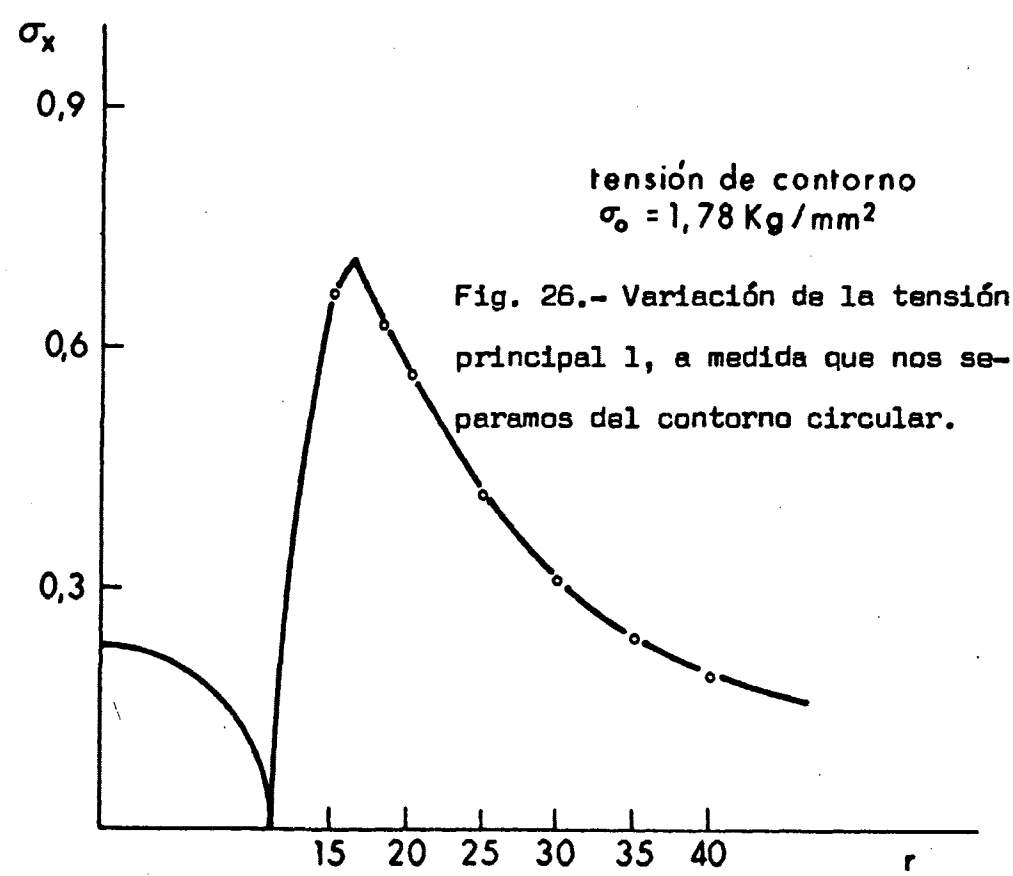
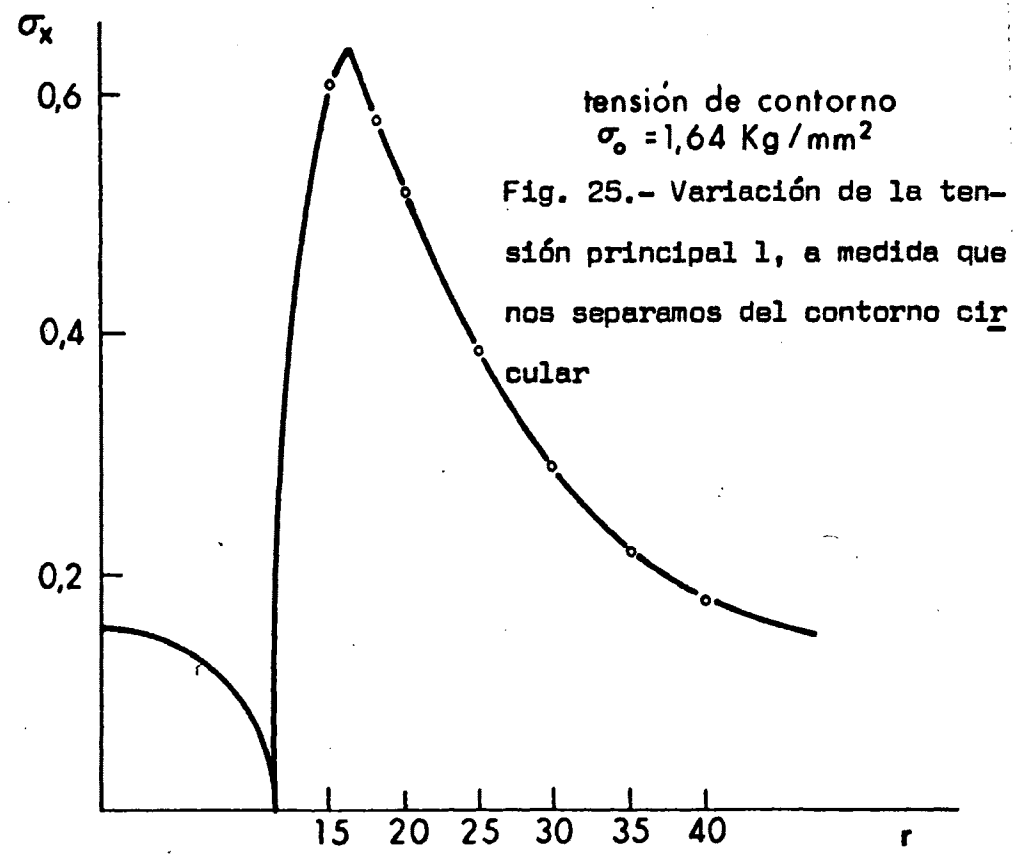


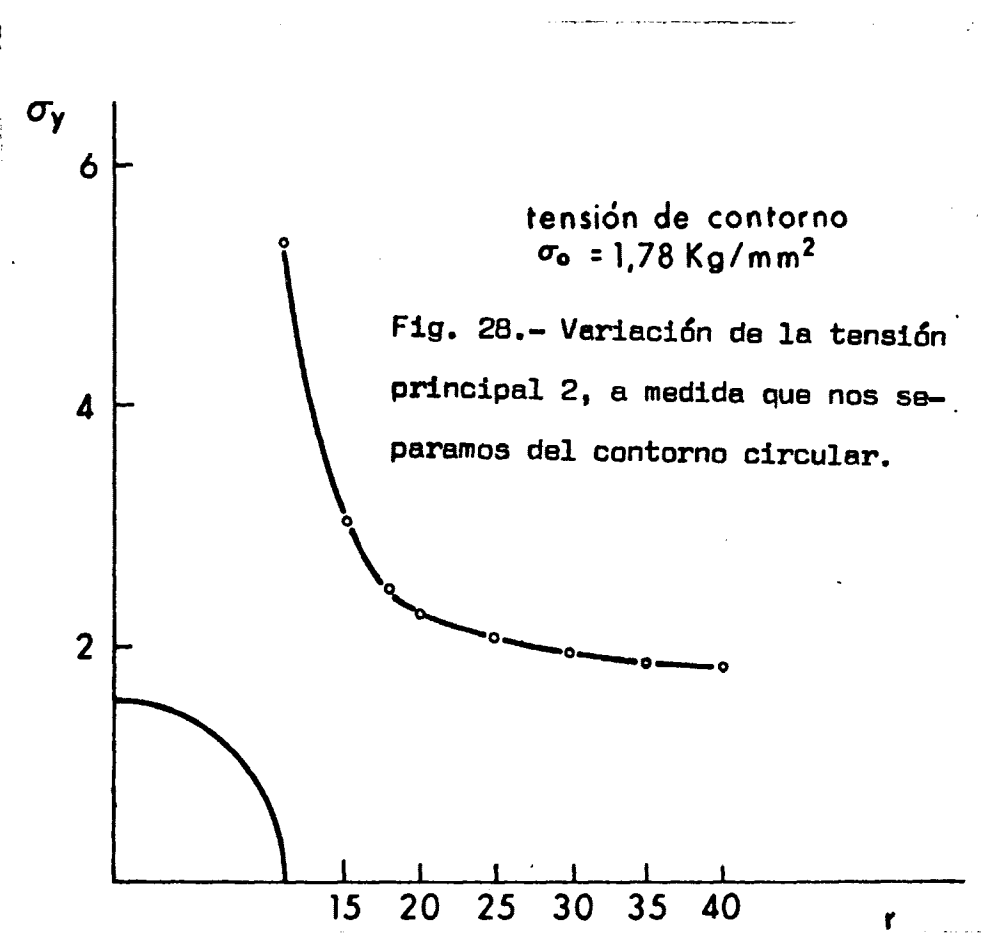
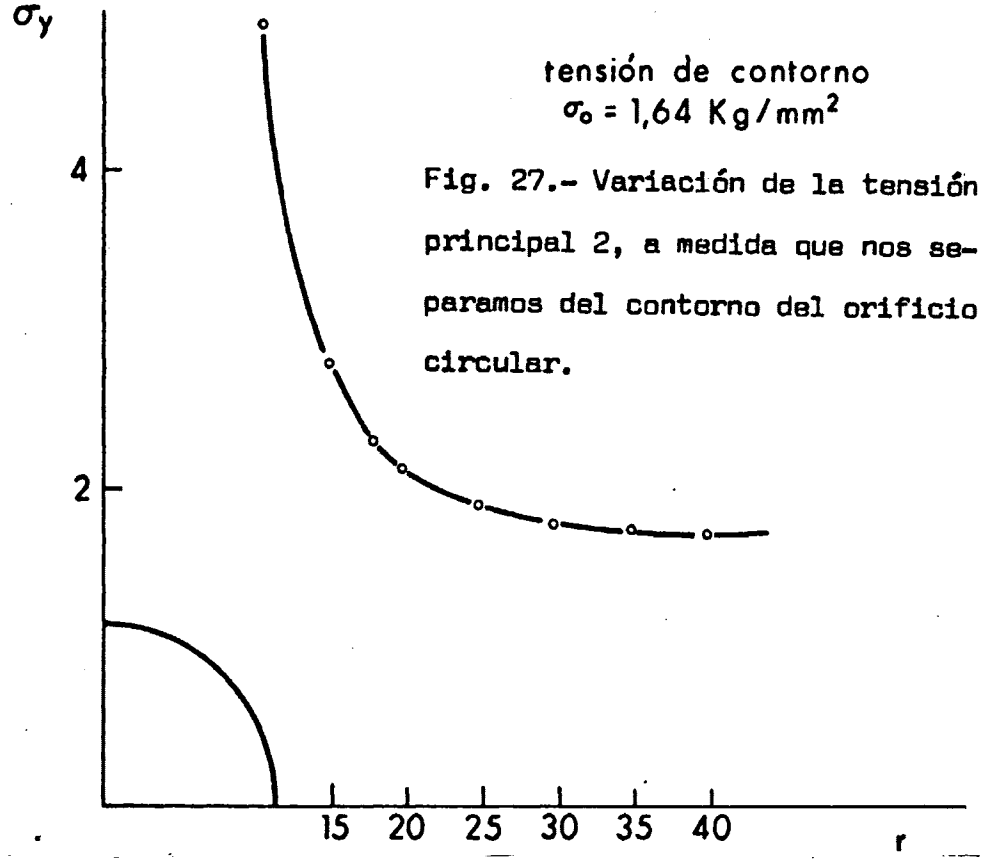
$\sigma_0 = 1,64$			
r	$\sigma_x \approx \sigma_2$	$\sigma_y \approx \sigma_3$	ε_{xy}
11	0	4,920	0
15	0,611	2,792	0
18	0,576	2,289	0
20	0,519	2,113	0
25	0,384	1,891	0
30	0,286	1,795	0
35	0,219	1,745	0
40	0,172	1,716	0

Tabla X IV

$\sigma_0 = 1,78$			
r	$\sigma_x \approx \sigma_2$	$\sigma_y \approx \sigma_3$	ε_{xy}
11	0	5,340	0
15	0,664	3,031	0
18	0,625	2,485	0
20	0,563	2,294	0
25	0,417	2,052	0
30	0,311	1,948	0
35	0,238	1,894	0
40	0,187	1,863	0

Tabla XVI



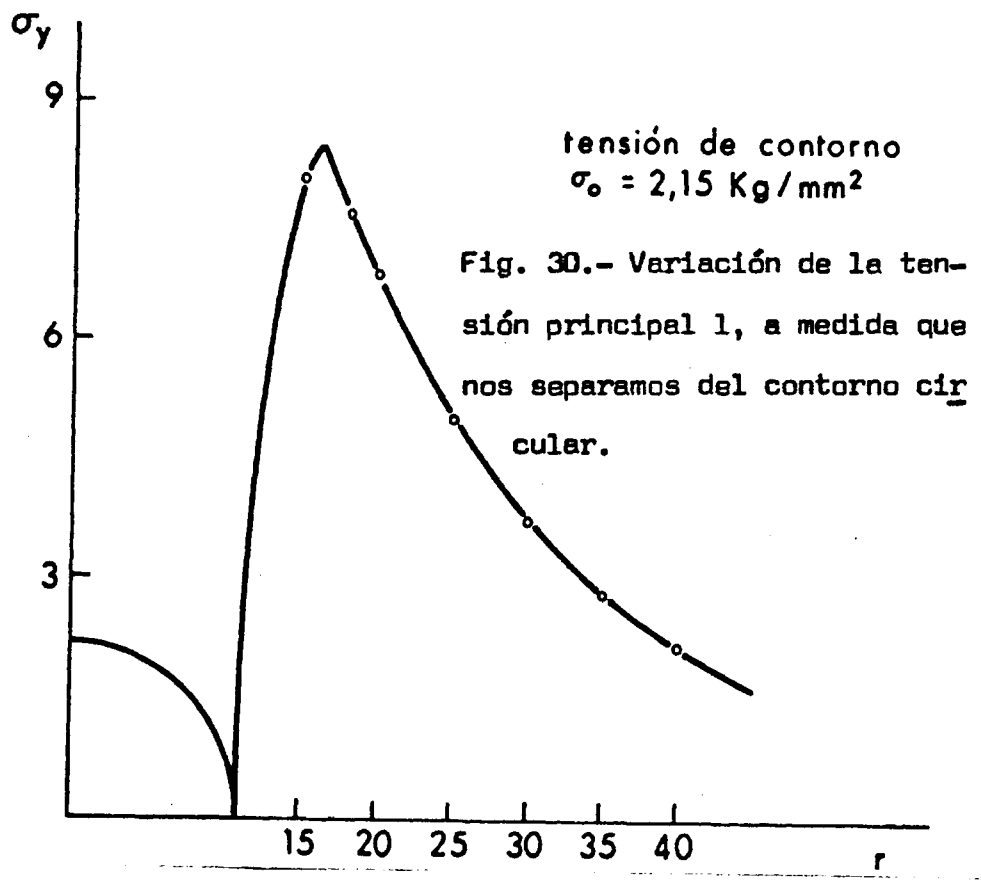
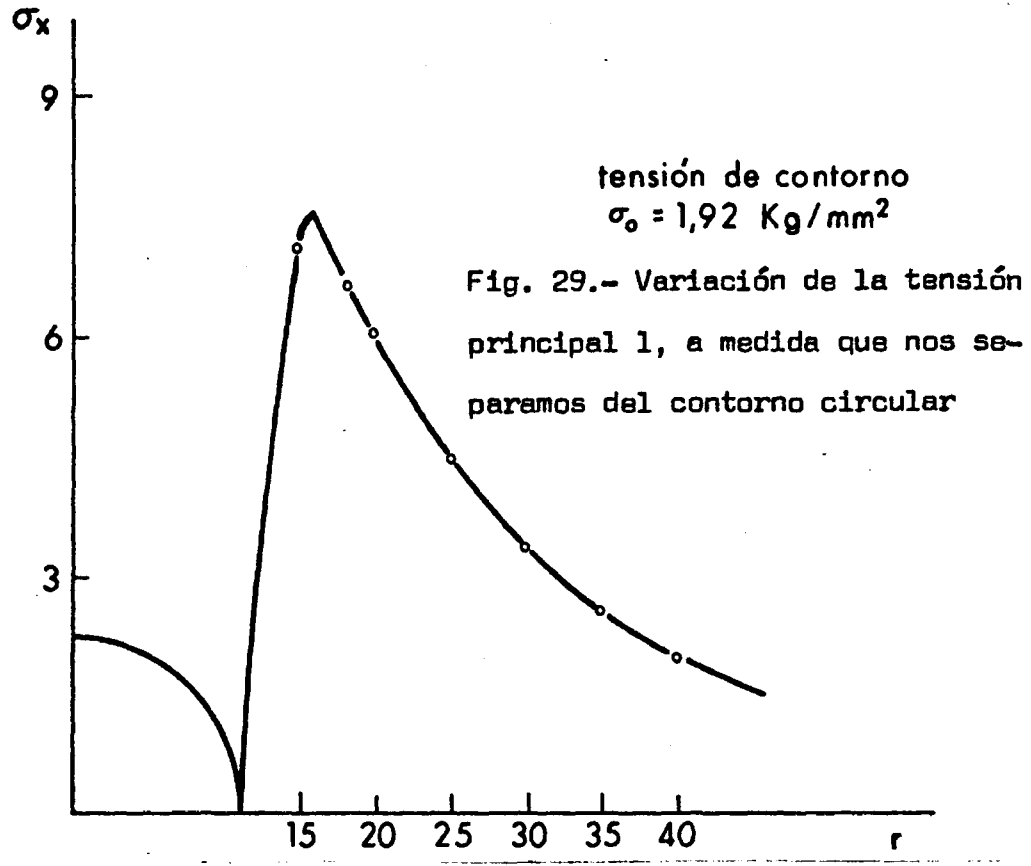


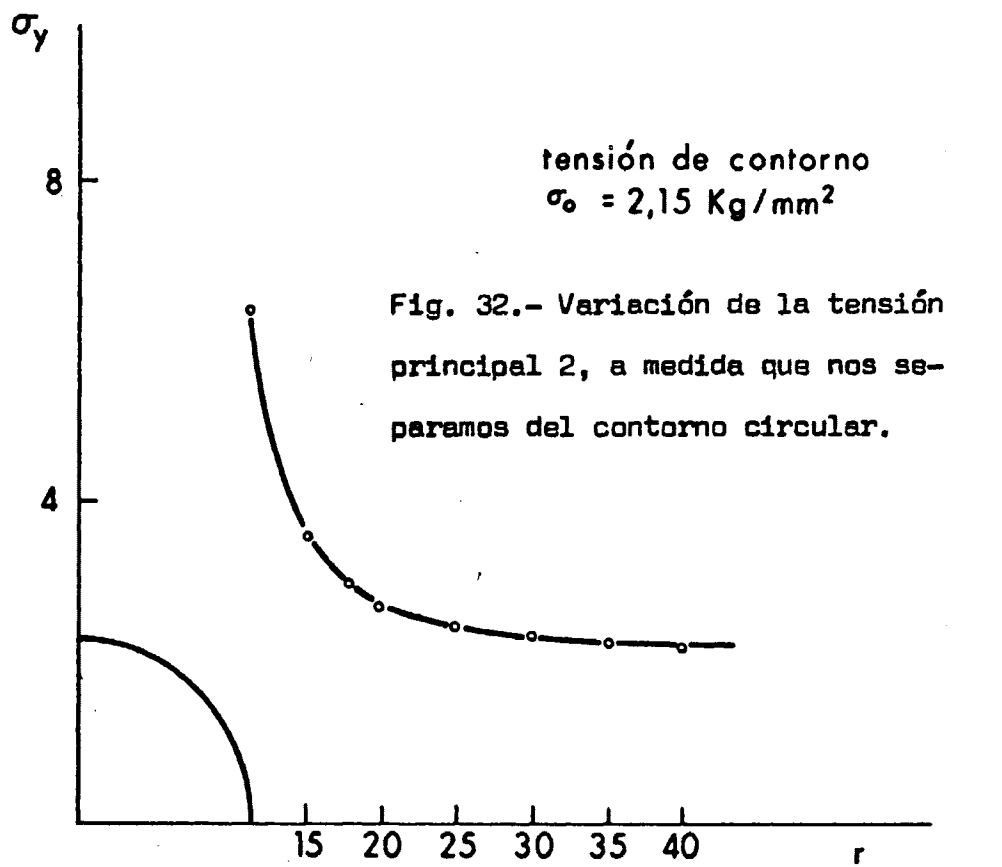
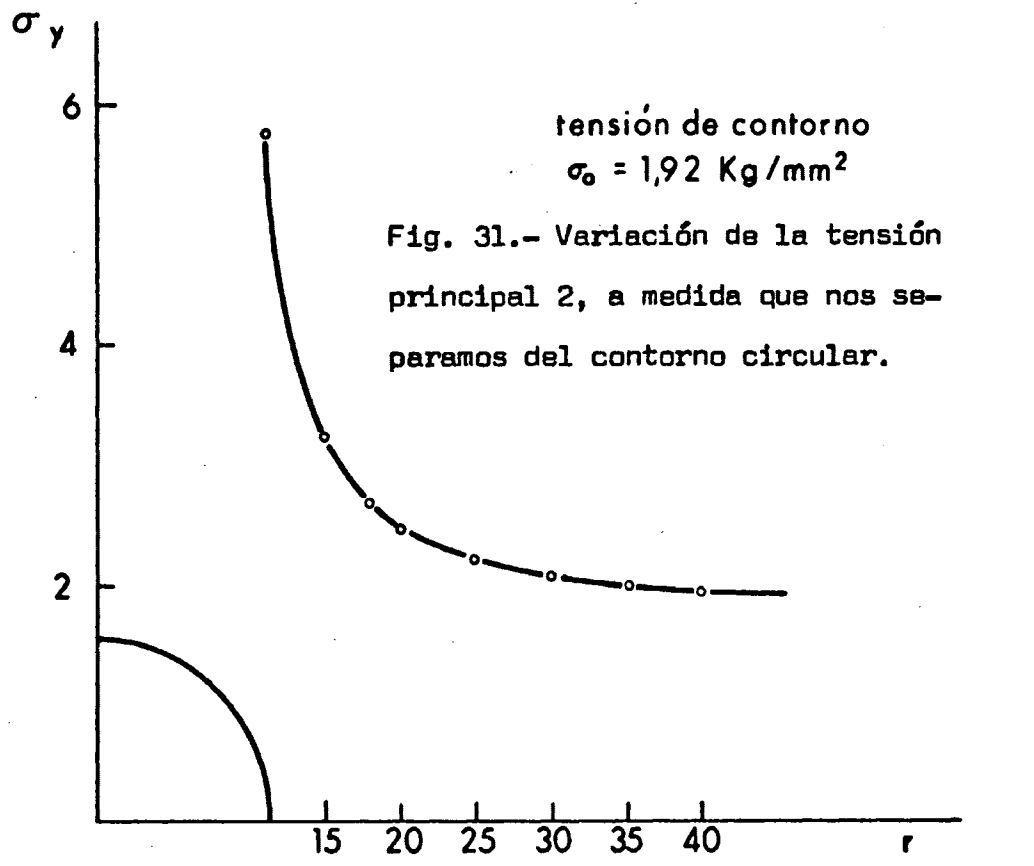
$\sigma_0 = 1,92$			
r	$\sigma_x \approx \sigma_2$	$\sigma_y \approx \sigma_1$	τ_{xy}
11	0	5,760	0
15	0,716	3,269	0
18	0,674	2,680	0
20	0,608	2,474	0
25	0,450	2,214	0
30	0,335	2,101	0
35	0,256	2,043	0
40	0,201	2,009	0

Tabla XVII

$\sigma_0 = 2,15$			
r	$\sigma_x \approx \sigma_2$	$\sigma_y \approx \sigma_1$	τ_{xy}
11	0	6,450	0
15	0,802	3,661	0
18	0,755	3,001	0
20	0,68 ^u	2,770	0
25	0,503	2,479	0
30	0,375	2,353	0
35	0,287	2,288	0
40	0,225	2,250	0

Tabla XVIII





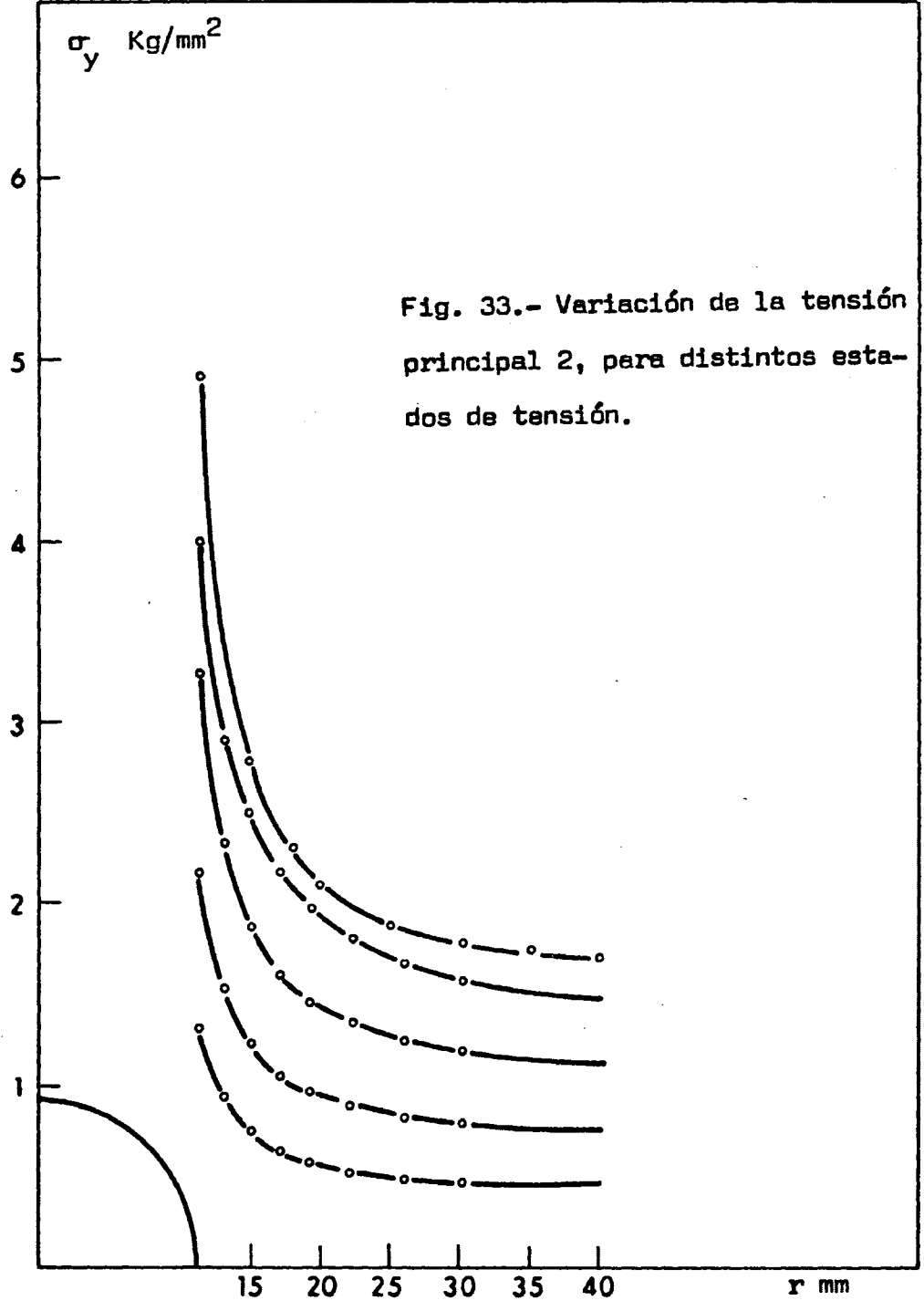


Fig. 33.- Variación de la tensión principal 2, para distintos estados de tensión.

3.1.4.- ESTADO DE TENSION EN PUNTOS QUE ESTAN SOBRE EL CON-
TORNO DEL ORIFICIO CIRCULAR-

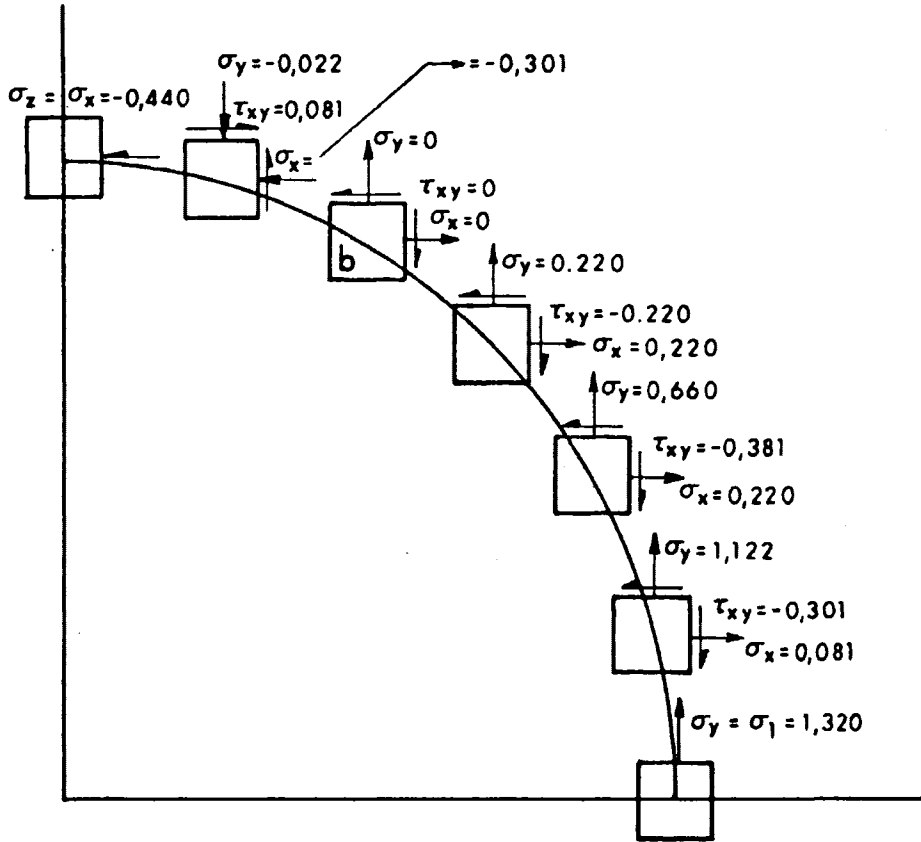


$\sigma_0 = 0,44$			
θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
0	0	1,320	0
15	0,081	1,122	-0,301
30	0,220	0,660	-0,381
45	0,220	0,220	-0,220
60	0	0	0
75	-0,301	-0,022	0,081
90	-0,440	0	0

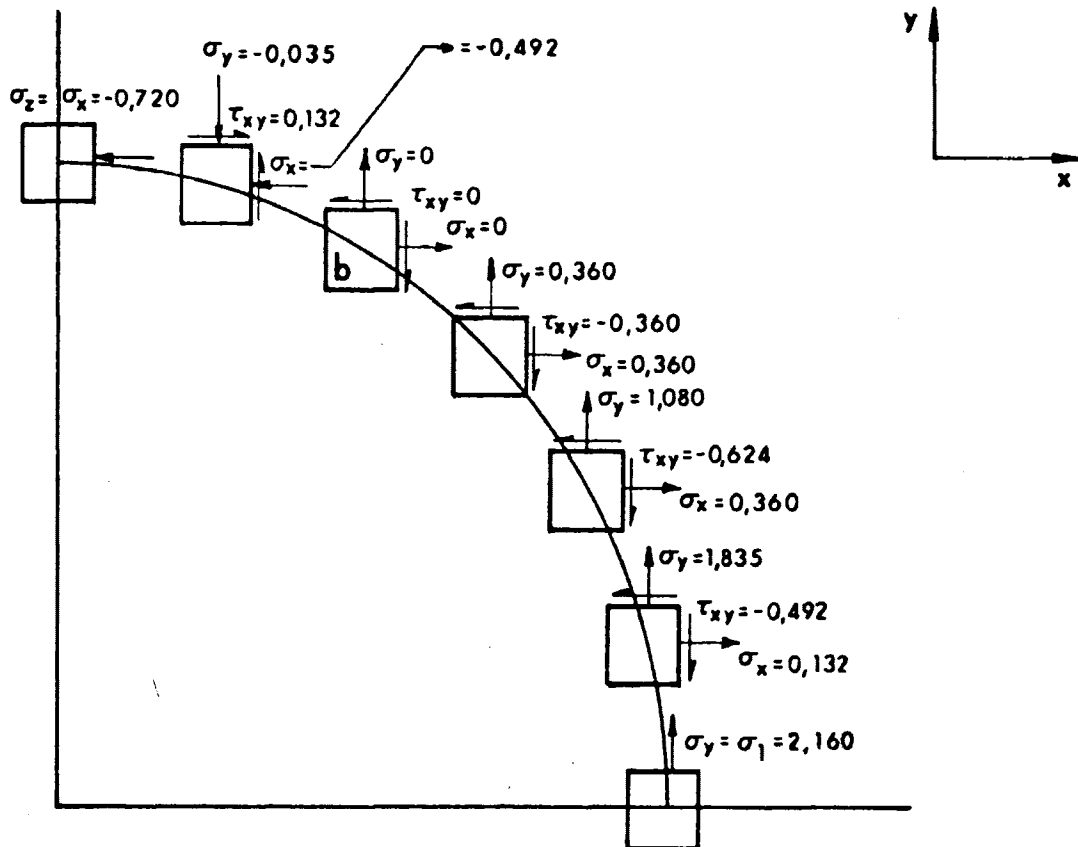
Tabla XIX

$\sigma_0 = 0,72$			
θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
0	0	2,160	0
15	0,132	1,835	-0,492
30	0,360	1,080	-0,624
45	0,360	0,360	-0,360
60	0	0	0
75	-0,492	-0,035	0,132
90	-0,720	0	0

Tabla XX



Figs. 34 y 35.- Cálculo de los estados de tensión en puntos que están sobre el contorno del orificio circular.



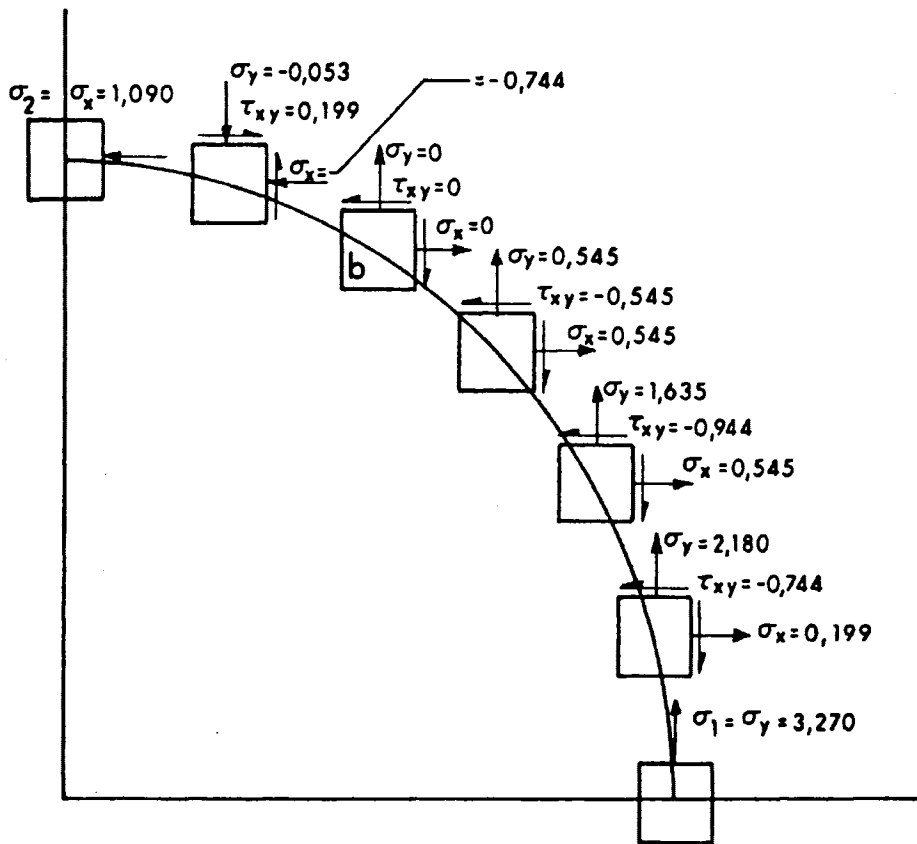


$\sigma_0 = 1,09$			
θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
0	0	3,270	0
15	0,199	2,180	-0,744
30	0,545	1,635	-0,944
45	0,545	0,545	0,545
60	0	0	0
75	-0,744	-0,053	0,199
90	-1,090	0	0

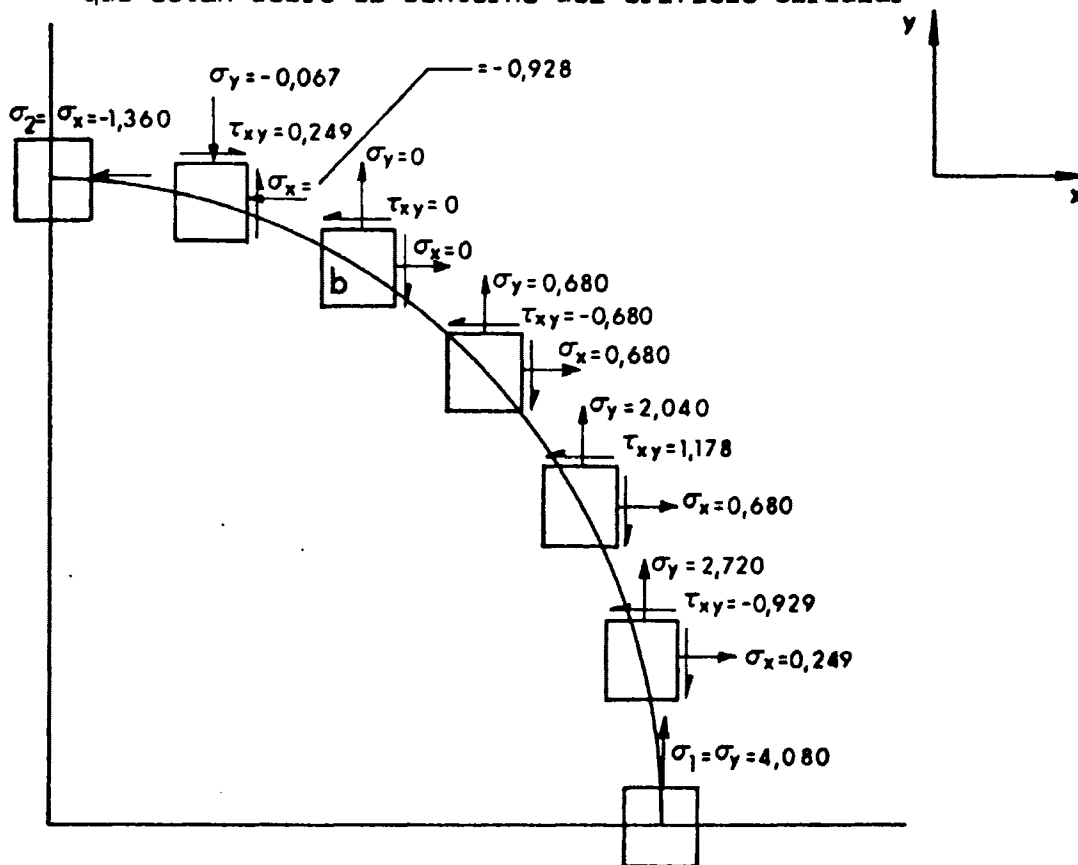
Tabla XXI

$\sigma_0 = 1,36$			
θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
0	0	4,080	0
15	0,249	2,720	-0,929
30	0,680	2,040	-1,178
45	0,680	0,680	-0,680
60	0	0	0
75	-0,928	-0,067	0,249
90	-1,360	0	0

Tabla XXII



Figs. 36 y 37.- Cálculo de los estados de tensión en puntos que estan sobre el contorno del orificio circular



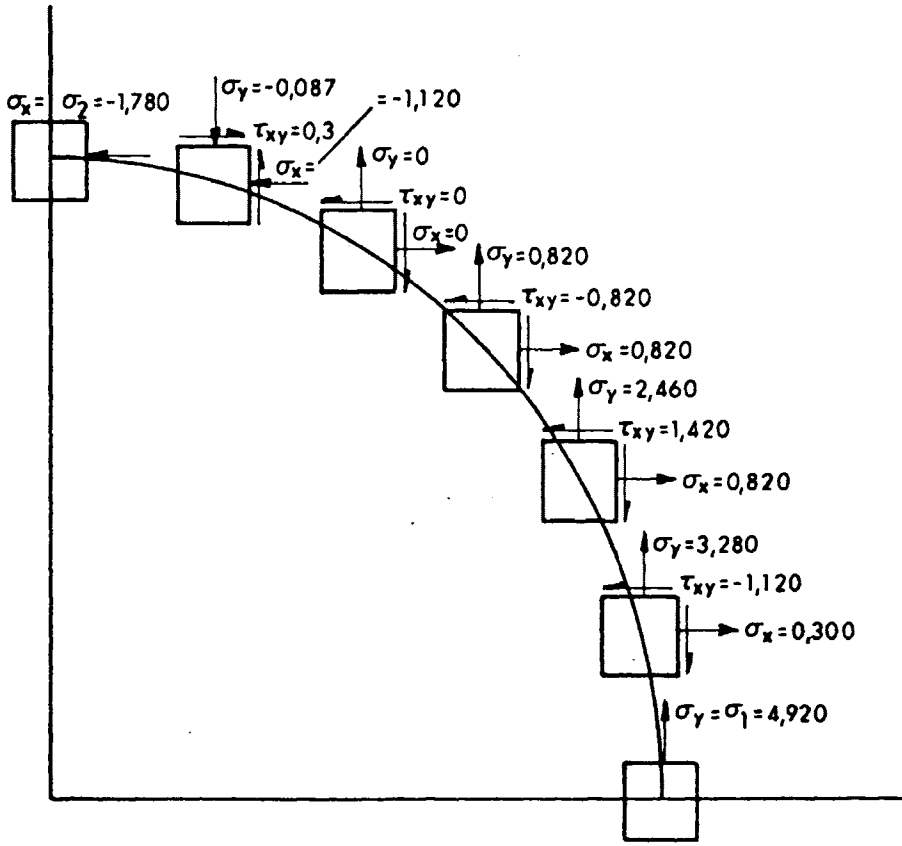


$\sigma_0 = 1,64$			
θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
0	0	4,920	0
15	0,300	3,280	-1,120
30	0,820	2,460	-1,420
45	0,820	0,820	-0,820
60	0	0	0
75	-1,120	-0,080	0,300
90	-1,640	0	0

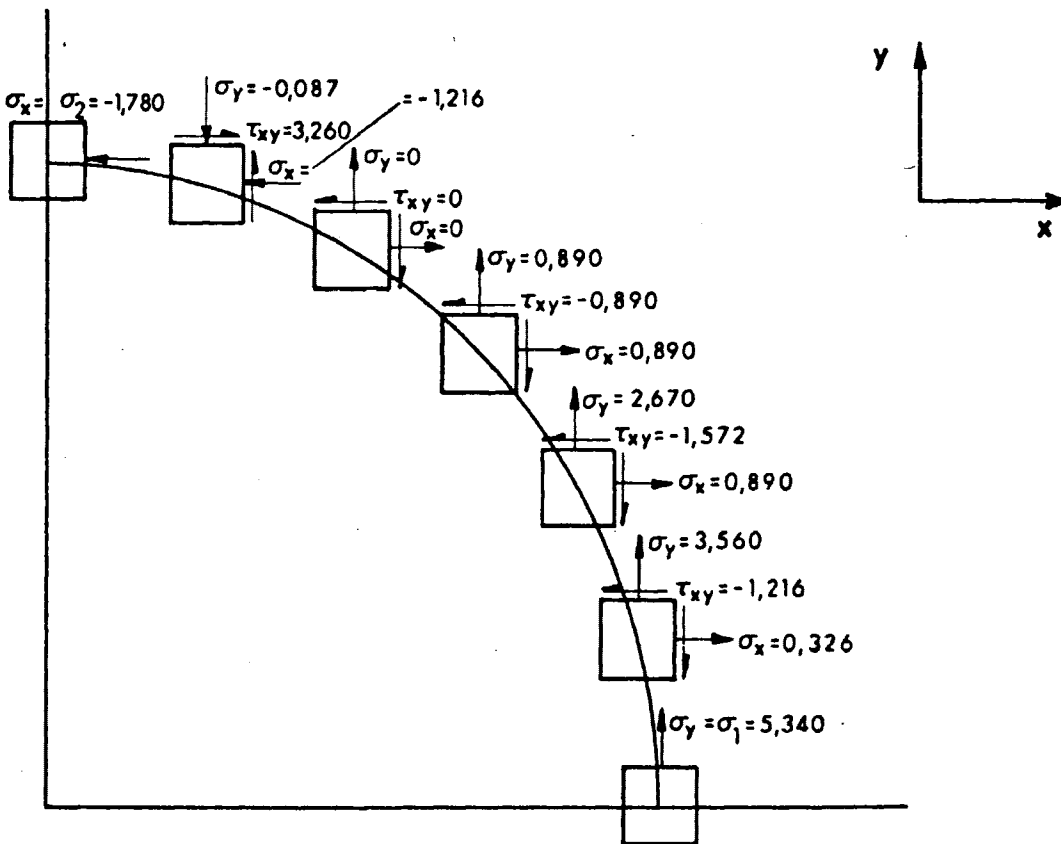
Tabla XXIII

$\sigma_0 = 1,78$			
θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
0	0	5,340	0
15	0,326	3,560	-1,216
30	0,890	2,670	-1,542
45	0,890	0,890	-0,890
60	0	0	0
75	-1,216	-0,087	0,326
90	-1,780	0	0

Tabla XXIV.



Figs. 38 y 39.- Cálculo de los estados de tensión en puntos que estan sobre el contorno del orificio circular.



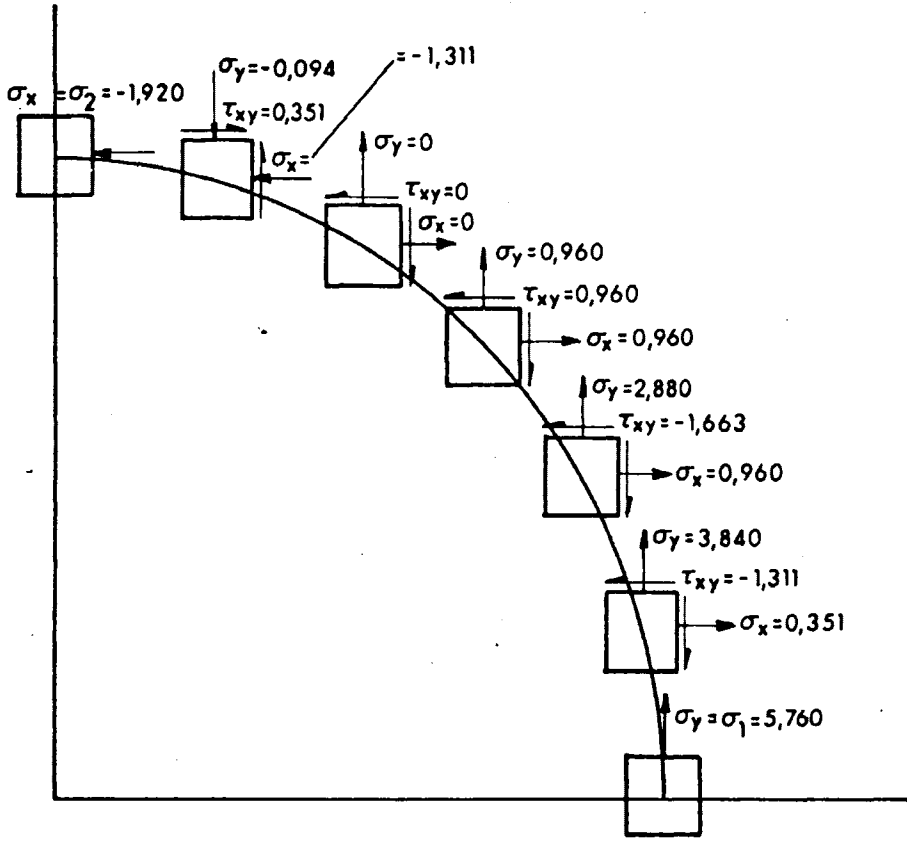


$\sigma_0 = 1,92$			
θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
0	0	5,760	0
15	0,351	3,840	-1,311
30	0,960	2,880	-1,663
45	0,960	0,960	-0,960
60	0	0	0
75	-1,311	-0,094	0,351
90	-1,920	0	0

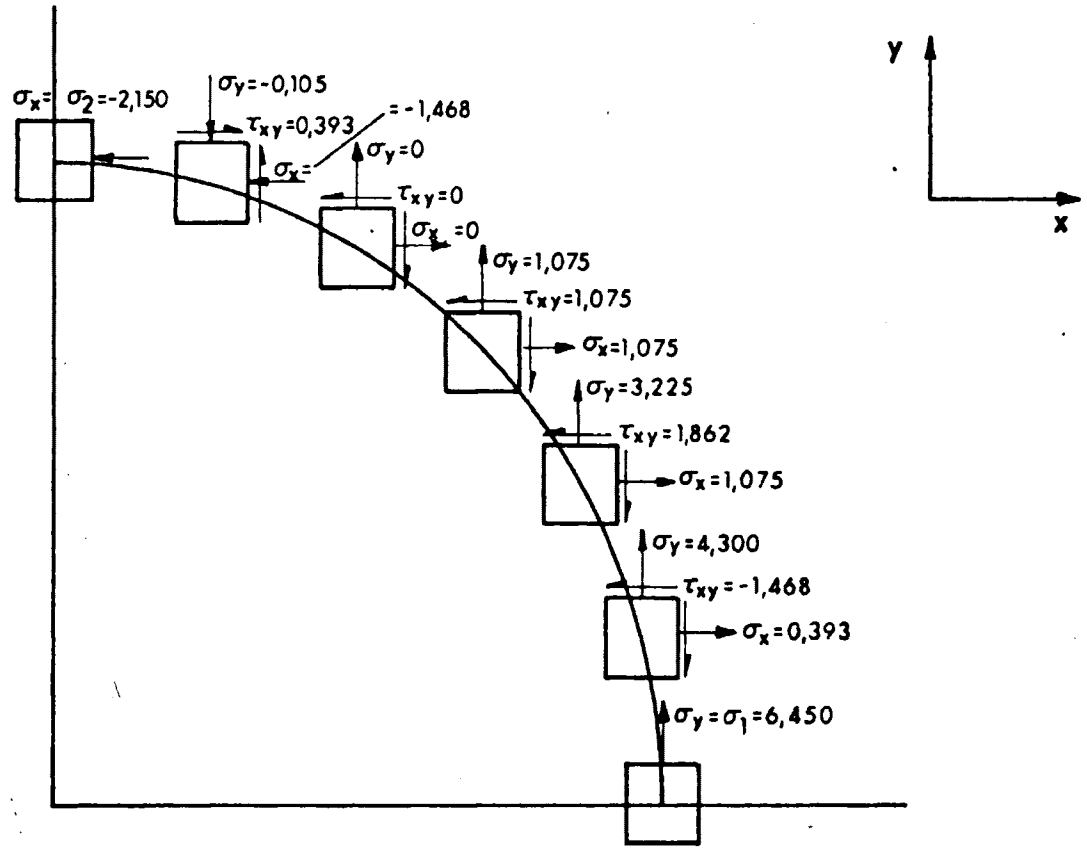
Tabla XXV

$\sigma_0 = 2,15$			
θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
0	0	6,450	0
15	0,393	4,300	-1,468
30	1,075	3,225	-1,862
45	1,075	1,075	-1,075
60	0	0	0
75	-1,468	-0,105	0,393
90	-2,150	0	0

Tabla XXV I



Figs. 40 y 41.- Cálculo de los estados de tensión en puntos que están sobre el contorno del orificio circular.





3.2.- PLACA CON UN ORIFICIO ELIPTICO SOMETIDA A UN ESTADO DE TRAC-
CION UNIAXIL.

Las ecuaciones (23) y (24), nos dan las funciones de ten-
sión para este caso concreto, y son:

$$\phi = \frac{1}{4} \sigma_0 a (\text{sen } h \xi - \lambda^2 \cdot e^{-\xi}) \quad (23)$$

$$\psi = \frac{1}{8} \sigma_0 a \left(\frac{e^{2\xi} - \lambda^4 e^{-2\xi} - (\lambda + \lambda^{-1})^2}{\text{sen } h \xi} \right) \quad (24)$$

donde:

ϕ y ψ , son las funciones de tensión.

ξ es una variable compleja de la forma $\alpha + i\beta$, siendo α y β dos coordenadas elípticas.

σ_0 es la tensión aplicada al contorno.

λ es función de la excentricidad del orificio elíptico y que ya ha sido dada en el apartado (3.1).

(a) es el semieje mayor de la elipse.

(b) es el semieje menor de la elipse.

Para reducir un poco las ecuaciones (23) y (24), vamos a
llamar a:



$$\lambda^2 = a_1$$

$$(\lambda + \lambda^{-1})^2 = a_2$$

por lo que en definitiva tendremos:

$$\phi = \frac{1}{4} \sigma_0 a (\operatorname{sen} h \xi - a_1 \cdot e^{-\xi}) \quad (42)$$

$$\psi = \frac{1}{8} \sigma_0 a \left(\frac{e^{2\xi} - a_1 \cdot e^{-2\xi} - a_2}{\operatorname{sen} h \xi} \right) \quad (43)$$

si tenemos en cuenta que:

$$Z = a \operatorname{cos} h \xi$$

se deduce inmediatamente que:

$$e^{\xi} = \frac{1}{a} (Z + (Z^2 - a^2)^{1/2})$$

$$e^{-\xi} = \frac{1}{a} (Z - (Z^2 - a^2)^{1/2})$$

$$\operatorname{sen} h \xi = \frac{1}{a} (Z^2 - a^2)^{1/2}$$

que sustituidas en las ecuaciones (16) y (17) conducen a dos nuevas expresiones en función de la variable compleja $Z = x + iy$, y que - va a permitirnos pasar de coordenadas elípticas a cartesianas, así:



$$\phi = \frac{1}{4} \sigma_0 a \left(\frac{1}{a} (z^2 - a^2)^{1/2} - \frac{a_1}{z} + \frac{a_1}{a} (z^2 - a^2)^{1/2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \sigma_0 ((1 + a_1)(z^2 - a^2)^{1/2} - a_1 z)$$

$$\psi = \frac{1}{8} \sigma_0 ((1 - a_1^2) \cdot 2z^2 + a^2(a_1^2 - 1 - a_2) + (1 + a_1^2)2) \cdot z \cdot$$

$$(z^2 - a^2)^{1/2} : \frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}}$$

si llamamos a :

$$1 + a_1 = a_3$$

$$2(1 - a_1^2) = a_4$$

$$a^2(a_1^2 - 1 - a_2) = a_5$$

$$2(1 + a_1^2) = a_6$$

por tanto las funciones de tensión quedarán de la forma:

$$\phi = \frac{1}{4} \sigma_0 (a_3 (z^2 - a^2)^{1/2} - a_1 z) \quad (44)$$

$$\psi = \frac{1}{8} \sigma_0 \left(\frac{a_4 z^2 + a_5}{(z^2 - a^2)^{1/2}} + a_6 z \right) \quad (45)$$



Calculando ahora el estado de tensión en un punto, a partir de las ecuaciones (31), (32) y (33), tendremos que encontrar primeramente las derivadas primera y segunda de ϕ y la derivada primera de ψ y que vienen dadas por:

$$\phi' = \frac{1}{4}\sigma_0 \left(\frac{a_3 z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - a_1 \right)$$

$$\phi'' = -\frac{1}{4}\sigma_0 \left(\frac{a_3 \cdot a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right)$$

$$\psi' = \frac{1}{8}\sigma_0 \left(\frac{a_4 z^3 - (2a_4 a^2 + a_5)z}{(z^2 - a^2)^{3/2}} + a_6 \right)$$

que llevadas a las ecuaciones (44) y (45), y teniendo en cuenta que:

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2(\bar{z}\phi'' + \psi')$$

queda finalmente que:

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = & 2(-r.e^{-i\theta}) \sigma_0 \frac{1}{4} \left(\frac{a_3 a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right) + \\ & + \frac{1}{8}\sigma_0 \left(\frac{a_4 z^3}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right) - \frac{1}{8}\sigma_0 \left(\frac{a_7 z}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right) + \frac{1}{8}\sigma_0 a_6 \end{aligned}$$



donde hemos llamado:

$$a_7 = 2.a_4 a^2 + a_5$$

Puesto que el sistema doble cartesiano polar, se ha usado ya en fotoelásticidad, se eligió aquí, para buscar solución a este problema, ya que no se encontró solución con otros sistemas.

Ahora bien, teniendo en cuenta un sistema doble cartesiano polar, tal y como se da en la fig. 42.

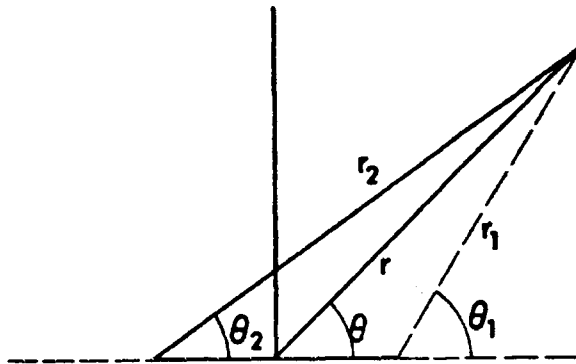


FIG. 42.— Sistema doble cartesiano polar.

Fig. 42.— Sistema doble cartesiano polar.

la ecuación anterior queda en definitiva:



$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[-a_3 a^2 \cdot e^{-i(\theta + \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2))} + \right. \right. \\ \left. \left. + (a_4 r^2 / 2) \cdot e^{i(3\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2))} - (a_7 / 2) \cdot e^{i(\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2))} \right] + \right. \\ \left. + (a_6 / 2) \right\} \quad (46) \end{aligned}$$

igualando y separando las partes reales é imaginarias de la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x = (\sigma_0 / 2) \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[-a_3 a^2 \cdot \cos(\theta + \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) \right. \right. \\ \left. \left. + (a_4 r^2 / 2) \cdot \cos(3\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) - (a_7 / 2) \cos(\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) \right] \right\} \\ \left. + (a_6 / 2) \right\} \quad (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[a_3 a^2 \cdot \sin(\theta + \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) + \right. \right. \\ \left. \left. + (a_4 r^2 / 2) \sin(3\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) - (a_7 / 2) \sin(\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) \right] \right\} \end{aligned}$$

operando en las ecuaciones anteriores, se llega a :



$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[- (a_3 a^2 + \frac{a_7}{2}) \cos \theta. \right. \right.$$

$$\cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_3 a^2 - \frac{a_7}{2}) \sin \theta. \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) +$$

$$+ (a_4 r^2/2) \cos 3\theta. \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_4 r^2/2) \sin \theta .$$

$$\left. \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right\} + (a_6/2) \} \quad (48)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_3 a^2 - \frac{a_7}{2}) \sin \theta. \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right. \right.$$

$$+ (a_3 a^2 + \frac{a_7}{2}) \cos \theta . \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_4 r^2/2) \sin 3\theta .$$

$$\left. \left. \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) - (a_4 r^2/2) \cos 3\theta. \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\} \quad (49)$$

si llamamos a:

$$- (a_3 a^2 + \frac{a_7}{2}) = a_8$$

$$(a_3 a^2 - (a_7/2)) = a_9$$

$$(a_4 r^2/2) = a_{10}$$



las ecuaciones (48) y (49), se reducen a estas otras:

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + (a_6/2) \right\} \quad (50)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) - (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\} \quad (51)$$

teniendo en cuenta que la cisi3n m3xima viene dada por:

$$\tau_m^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

si sustituimos las ecuaciones anteriores en esta ultima ecuaci3n, tendremos:

$$\tau_m^2 = \frac{\sigma_0^2}{16} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^3} \left[(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta)^2 + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2 \right] + \frac{r a_6}{(r_1 r_2)^{3/2}} (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right\} + (a_6^2/4) \quad (52)$$

a partir de esta ecuaci3n, vamos a encontrar la forma de poder representarla, ya que tal y como se da en la ecuaci3n (52), no es f3cilmente representable.



llamando a:

$$a_{11} = \frac{1}{r} \left(\left(\frac{4Z_{11}}{\sigma_0} \right)^2 - \frac{n^2}{4} \right)$$

la ecuación (52), queda de la forma:

$$a_{11} = \frac{r}{(r_1 r_2)^3} \left\{ (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta)^2 + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2 \right\} +$$

$$+ \frac{n}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left\{ (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \right.$$

$$\left. + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right\} \quad (53)$$

teniendo en cuenta que:

$$\cos 3\theta = \cos \theta \cdot (1 - 4x)$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta \cdot (3 - 4x)$$

donde, hemos llamado:

$$x = \sin^2 \theta$$

por tanto:

$$(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta)^2 + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2 = (8a_{10} a_8 -$$

$$- 8a_9 a_{10}) x^2 + (a_9^2 - a_8^2 - 10a_{10} a_8 + 6a_9 a_{10}) x + (a_8^2 + 2a_{10} a_8 +$$

$$a_{10}^2)$$

y llamando a:

$$8(a_8 - a_9) \cdot a_{10} = a_{12}$$

$$a_9^2 - a_8^2 - 10a_{10} a_8 + 6a_9 a_{10} = a_{13}$$



$$a_8^2 + 2a_{10}a_8 + a_{10}^2 = a_{14}$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (53), resulta:

$$a_{11} - \frac{r}{(r_1 r_2)^3} (a_{12}x^2 + a_{13}x + a_{14}) = \frac{n}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left\{ (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 - \theta_2) + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right\}$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y ordenando, tenemos:

$$\begin{aligned} & a_{11}^2 + \frac{1}{(r_1 r_2)^6} \left\{ r^2 a_{12}^2 x^4 + 2a_{12} a_{13} r^2 x^3 + (a_{13}^2 + 2a_{12} a_{14}) r^2 x^2 + \right. \\ & \left. + 2a_{13} a_{14} r^2 x + a_{14}^2 r^2 \right\} - \frac{2a_{11} r}{(r_1 r_2)^3} (a_{12}x^2 + a_{13}x + a_{14}) = \\ & = \frac{n^2}{(r_1 r_2)^3} \left\{ [(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta)^2 - (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2] \cdot \right. \\ & \left. \cdot \cos^2 \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta)(a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \cdot \right. \\ & \left. \sin 3(\theta_1 + \theta_2) + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2 \right\} \quad (54) \end{aligned}$$

llamando a:

$$r^2 a_{12}^2 = a_{15}$$

$$2a_{12} a_{13} r^2 = a_{16}$$

$$(a_{13}^2 + 2a_{12} a_{14}) r^2 = a_{17}$$

$$2a_{13} a_{14} r^2 = a_{18}$$



$$a_{14}^2 \cdot r^2 = a_{19}$$

si sustituimos estas expresiones en la ecuación (54), resulta:

$$a_{11}^2 + \frac{1}{(r_1 r_2)^6} (a_{15} x^4 + a_{16} x^3 + a_{17} x^2 + a_{18} x + a_{19}) - \frac{2a_{11} r}{(r_1 r_2)^3} ($$

$$(a_{12} x^2 + a_{13} x + a_{14}) = \frac{n^2}{(r_1 r_2)^3} \left\{ (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta)^2 - ($$

$$(a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2 \right\} \cos^2 \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta)$$

$$(a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \cdot \sin 3(\theta_1 + \theta_2) + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2 \}$$

con el fin de reducir la expresión anterior, operando en alguno de los términos, tenemos:

$$(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta)^2 - (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2 = a_{20} x^3 +$$

$$+ a_{21} x^2 + a_{22} x + a_{14}$$

$$(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) = \left(-\frac{a_{20}}{2} x^2 + a_{23} x\right.$$

$$\left. + a_{24}\right)$$

$$(a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta)^2 = -\frac{a_{20}}{2} x^3 + a_{25} x^2 + a_{26} x$$

donde:

$$-32a_{10}^2 = a_{20}$$

$$48a_{10}^2 + 8a_{10} a_8 + 8a_9 a_{10} = a_{21}$$



$$-(a_8^2 + 18a_{10}^2 + 10a_{10}a_8 + a_9^2 + 6a_9a_{10}) = a_{22}$$

$$-4a_{10}(a_9 + a_8 + 4a_{10}) = a_{23}$$

$$(a_8 + a_{10})(a_9 + 3a_{10}) = a_{24}$$

$$-8(a_9 + 3a_{10})a_{10} = a_{25}$$

$$(a_9 + 3a_{10})^2 = a_{26}$$

todo esto puesto en la ecuación anterior queda:

$$a_{11}^2 + \frac{1}{(r_1 r_2)^6} (a_{15}x^4 + a_{16}x^3 + a_{17}x^2 + a_{18}x + a_{19}) - \frac{2a_{11}r}{(r_1 r_2)^3} ($$

$$a_{12}x^2 + a_{13}x + a_{14}) = \frac{n^2}{2(r_1 r_2)^3} \left\{ (a_{20}x^3 + a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{14}) \cdot$$

$$\cos 3(\theta_1 + \theta_2) + 2\sin \theta \cos \theta \left(-\frac{a_{20}}{2}x^2 + a_{23}x + a_{24} \right) \sin 3(\theta_1 + \theta_2)$$

$$+ (2a_{25} + a_{21})x^2 + (2a_{26} + a_{22})x + a_{14} \left. \right\} \quad (55)$$

llamando a :

$$2a_{25} + a_{21} = a_{27}$$

$$2a_{26} + a_{22} = a_{28}$$

desarrollando los términos de la ecuación (55) que a continuación se dan, podremos reducir dicha ecuación:

$$\cos 3(\theta_1 + \theta_2) = \cos 3\theta_1 \cos 3\theta_2 - \sin 3\theta_1 \sin 3\theta_2 = \dots =$$

$$= \frac{1}{(r_1 r_2)^3} (a_{33}x^3 + a_{34}x^2 + a_{35}x + a_{29}^3)$$



$$(r^2 - a^2) = a_{29}$$

$$-4r^2(2r^2 + a^2) = a_{30}$$

$$16r^4 = a_{31}$$

$$-8r^2(4r^2 - a^2) = a_{32}$$

$$-2a_{31}r^2 = a_{33}$$

$$a_{29}a_{31} - a_{32}r^2 = a_{34}$$

$$a_{29}a_{30} - 10a_{29}^2r^2 = a_{35}$$

por otra parte:

$$\begin{aligned} \text{sen } 3(\theta_1 + \theta_2) &= \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 (3\cos^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_1) (\cos^2 \theta_2 - \\ &- 3\text{sen}^2 \theta_2) + \text{sen } \theta_2 \cos \theta_1 (3\cos^2 \theta_2 - \text{sen}^2 \theta_2) (\cos^2 \theta_1 - 3\text{sen}^2 \theta_1) = \\ &= \frac{r^2 \text{sen } \theta \cos \theta}{(r_1 r_2)^3} (2a_{31}x^2 + a_{36}x + 6a_{29}^2) \end{aligned}$$

donde:

$$24r^2a^2 - 32r^4 = 8r^2(3a^2 - 4r^2) = a_{36}$$

sustituyendo en la ecuación (55), resulta:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + \frac{1}{(r_1 r_2)^6} (a_{15}x^4 + a_{16}x^3 + a_{17}x^2 + a_{18}x + a_{19}) - \frac{2a_{11}r}{(r_1 r_2)^3} (\\ (a_{12}x^2 + a_{13}x + a_{14}) = \frac{n^2}{2(r_1 r_2)^6} \{ a_{37}x^6 + a_{38}x^5 + a_{39}x^4 + a_{40}x^3 + \\ + a_{41}x^2 + a_{42}x + a_{43} + 2r^2x(1-x)(a_{44}x^4 + a_{45}x^3 + a_{46}x^2 + \end{aligned}$$



$$\left. + a_{47}x + a_{48}\right) + (a_{27}x^2 + a_{28}x + a_{14})(r_1 r_2)^3 \} \quad (56)$$

operando en la ecuación (56), se tiene :

$$\begin{aligned} & a_{11}^2 (r_1 r_2)^6 - \left[2a_{11}r(a_{12}x^2 + a_{13}x + a_{14}) + \frac{n^2}{2}(a_{27}x^2 + a_{28}x + a_{14}) \right] (r_1 r_2)^3 \\ & = \frac{n^2}{2}(a_{37} - 2r^2 a_{44})x^6 + \frac{n^2}{2} \left[a_{38} + 2r^2(a_{44} - a_{45}) \right] x^5 + \\ & + \frac{n^2}{2} \left[(a_{39} + 2r^2(a_{45} - a_{46})) - a_{15} \right] x^4 + \frac{n^2}{2} \left[(a_{40} + 2r^2(a_{46} - a_{47})) - \right. \\ & \left. - a_{16} \right] x^3 + \frac{n^2}{2} \left[(a_{41} + 2r^2(a_{47} - a_{48})) - a_{17} \right] x^2 + \frac{n^2}{2} \left[(a_{42} + 2r^2 \cdot a_{48}) \right. \\ & \left. - a_{18} \right] x + \left(\frac{n^2}{2} a_{43} - a_{19} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

llamando a:

$$\frac{n^2}{2}(a_{37} - 2r^2 a_{44}) = a_{49}$$

$$\frac{n^2}{2}(a_{38} + 2r^2(a_{44} - a_{45})) = a_{50}$$

$$\frac{n^2}{2}(a_{39} + 2r^2(a_{45} - a_{46})) - a_{15} = a_{51}$$

$$\frac{n^2}{2}(a_{40} + 2r^2(a_{46} - a_{47})) - a_{16} = a_{52}$$

$$\frac{n^2}{2}(a_{41} + 2r^2(a_{47} - a_{48})) - a_{17} = a_{53}$$

$$\frac{n^2}{2}(a_{42} + 2r^2 a_{48}) - a_{18} = a_{54}$$

$$\frac{n^2}{2} a_{43} - a_{19} = a_{55}$$



$$2a_{11}r = a_{56}$$

$$\frac{n^2}{2} = a_{57}$$

si sustituimos en la ecuación (57), queda:

$$a_{11}^2 (r_1 r_2)^6 - \left\{ a_{56}(a_{12}x^2 + a_{13}x + a_{14}) + a_{57}(a_{27}x^2 + a_{28}x + a_{14}) \right\} (r_1 r_2)^3 = a_{49}x^6 + a_{50}x^5 + a_{51}x^4 + a_{52}x^3 + a_{53}x^2 + a_{54}x + a_{55}$$

teniendo en cuenta que :

$$(r_1 r_2)^2 = (r^2 - a^2)^2 + 4r^2 a^2 x$$

y llamando :

$$4r^2 a^2 = a_{58}$$

resultará entonces:

$$(r_1 r_2)^6 = (a_{29}^2 + a_{58}x)^3 = a_{58}^3 x^3 + 3a_{58}^2 a_{29}^2 x^2 + 3a_{58} a_{29}^4 x + a_{29}^6$$

Entonces la ecuación(57), queda:

$$a_{11}^2 a_{29}^6 + 3a_{11}^2 a_{29}^4 a_{58}x + 3a_{11}^2 a_{29}^2 a_{58}^2 x^2 + a_{58}^3 a_{11}^2 x^3 - \left\{ (a_{56} a_{12} + a_{57} a_{27})x^2 + (a_{56} a_{13} + a_{57} a_{28})x + (a_{56} a_{14} + a_{57} a_{14}) \right\} (r_1 r_2)^3 = a_{49}x^6 + a_{50}x^5 + a_{51}x^4 + a_{52}x^3 + a_{53}x^2 +$$



$$+ a_{54}x + a_{55} \quad (58)$$

y llamando a :

$$a_{56}a_{12} + a_{57}a_{27} = a_{59}$$

$$a_{56}a_{13} + a_{57}a_{28} = a_{60}$$

$$a_{56}a_{14} + a_{57}a_{14} = a_{61}$$

la ecuación (58) , queda de la forma :

$$\begin{aligned} -(a_{59}x^2 + a_{60}x + a_{61})(r_1 r_2)^3 &= a_{49}x^6 + a_{50}x^5 + a_{51}x^4 + a_{62}x^3 + \\ &+ a_{63}x^2 + a_{64}x + a_{65} \end{aligned} \quad (59)$$

elevando al cuadrado la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned} (a_{59}^2 x^4 + 2a_{59}a_{60}x^3 + (a_{60}^2 + 2a_{59}a_{61})x^2 + 2a_{60}a_{61}x + a_{61}^2)(\\ (a_{58}^3 x^3 + 3a_{29}^2 a_{58}^2 x^2 + 3a_{29}^4 a_{58} x + a_{29}^6) &= a_{49}^2 x^{12} + 2a_{49}a_{50}x^{11} + \\ + (a_{50}^2 + 2a_{49}a_{51})x^{10} + (2a_{49}a_{62} + 2a_{50}a_{51})x^9 + (a_{51}^2 + 2a_{49}a_{63} \\ + 2a_{50}a_{62})x^8 + (2a_{49}a_{64} + 2a_{50}a_{63} + 2a_{51}a_{62})x^7 + (a_{62}^2 + \\ + 2a_{50}a_{64} + 2a_{51}a_{63} + 2a_{49}a_{65})x^6 + (2a_{50}a_{65} + 2a_{51}a_{64} + 2a_{62}a_{63}) \\ \cdot x^5 + (a_{63}^2 + 2a_{51}a_{65} + 2a_{62}a_{64})x^4 + (2a_{62}a_{65} + 2a_{63}a_{64})x^3 + \\ (a_{64}^2 + 2a_{63}a_{65})x^2 + 2a_{64}a_{65}x + a_{65}^2 \end{aligned}$$



donde hemos llamado a:

$$a_{52} - a_{58}^3 a_{11}^2 = a_{62}$$

$$a_{53} - 3a_{11}^2 a_{29}^2 a_{58}^2 = a_{63}$$

$$a_{54} - 3a_{11}^2 a_{29}^4 a_{58}^4 = a_{64}$$

$$a_{55} - a_{11}^2 a_{29}^6 = a_{65}$$

y llamando a:

$$2a_{59} a_{60} = a_{66}$$

$$a_{60}^2 + 2a_{59} a_{61} = a_{67}$$

$$2a_{60} a_{61} = a_{68}$$

$$2a_{49} a_{50} = a_{69}$$

$$a_{50}^2 + 2a_{49} a_{51} = a_{70}$$

$$2a_{49} a_{62} + 2a_{50} a_{51} = a_{71}$$

$$a_{51}^2 + 2a_{49} a_{63} + 2a_{50} a_{62} = a_{72}$$

$$2a_{49} a_{64} + 2a_{50} a_{63} + 2a_{51} a_{62} = a_{73}$$

$$a_{62}^2 + 2a_{50} a_{64} + 2a_{51} a_{63} + 2a_{49} a_{65} = a_{74}$$

$$2a_{50} a_{65} + 2a_{51} a_{64} + 2a_{62} a_{63} = a_{75}$$

$$a_{63}^2 + 2a_{51} a_{65} + 2a_{62} a_{64} = a_{76}$$



$$2a_{62}a_{65} + 2a_{63}a_{64} = a_{77}$$

$$a_{64}^2 + 2a_{63}a_{65} = a_{78}$$

$$2a_{64}a_{65} = a_{79}$$

si sustituimos en la ecuación anterior y operamos, resulta:

$$\begin{aligned} & a_{49}^2 x^{12} + a_{69} x^{11} + a_{70} x^{10} + a_{71} x^9 + a_{72} x^8 + (a_{73} - a_{80}) x^7 \\ & + (a_{74} - a_{81}) x^6 + (a_{75} - a_{82}) x^5 + (a_{76} - a_{83}) x^4 + \\ & + (a_{77} - a_{84}) x^3 + (a_{78} - a_{85}) x^2 + (a_{79} - a_{86}) x + \\ & + (a_{65}^2 - a_{87}) = 0 \end{aligned} \quad (59-a)$$

este polinomio de grado doce, nos permitirá representar las líneas de cisión máxima.



3.2.1.- CALCULO DEL ESTADO DE TENSION EN UN PUNTO PARA UN MODELO CON ORIFICIO ELIPTICO:

Teniendo en cuenta la ecuación (50), obtenida anteriormente para la diferencia de tensiones y además, sabiendo que:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \phi'$$

obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que nos permiten obtener las ecuaciones para σ_x y σ_y .

Por tanto, calculando la parte real de ϕ' , se llega a:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ \frac{2ra_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \cos \theta \cos \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \frac{2ra_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \right. \\ \left. \sin \theta \cdot \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - 2a_1 \right\}$$

si resolvemos el sistema, se obtiene para el estado de tensión en un punto las siguientes expresiones, teniendo además en cuenta la ecuación (51).

$$\sigma_x = - \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot (\theta_1 + \theta_2) + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - \right.$$



$$- \frac{2ra_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos \theta \cdot \cos \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + 2 \sin \theta \cdot \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + (a_6/2) + 2a_1 \quad (60)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + \frac{2ra_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos \theta \cos \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + (a_6/2) - 2a_1 \right\} \quad (61)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) - (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\} \quad (62)$$

con lo que queda definido el estado de tensión en un punto para una placa con un orificio elíptico y sometida a tracción uniaxial.



3.2.2.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA PARA EL MODELO
CON ORIFICIO ELIPTICO.

tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a}((b + \sqrt{b^2 + a^2}))$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_0 = 0,40$		$\lambda = 1,96$		$a = 11$		$b = 8$	
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	22	---	61,55	---	66,38	---
2	0,311	17,73	---	33,83	15,48	---	---
3	0,466	15,32	---	8,21	---	---	---
4	0,621	13,64	---	---	---	---	---
5	0,776	12,38	---	---	---	---	---
6	0,932	11,38	---	---	---	---	---
7	1,087	10,57	---	---	---	---	---
8	1,242	9,89	---	---	---	---	---
9	1,398	9,31	---	---	---	---	---
10	1,553	8,81	---	---	---	---	---

tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a}(b + \sqrt{b^2 + a^2})$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_0 = 0,40$		$\lambda = 1,96$		$a = 11$		$b = 8$	
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	68,68	---	70,37	---	71,97	---

Tabla XXVII



tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a} (b + \sqrt{b^2 + a^2})$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_0 = 0,40$		$\lambda = 1,96$		$a = 11$		$b = 8$	
n	τ_m	r = 29 θ_1 θ_2		r = 32 θ_1 θ_2		r = 35 θ_1 θ_2	
1	0,155	73,70	—	75,69	—	78,12	—

tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a} (b + \sqrt{b^2 + a^2})$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_0 = 0,40$		$\lambda = 1,96$		$a = 11$		$b = 8$	
n	τ_m	r = 38 θ_1 θ_2		r = 41 θ_1 θ_2		r = 44 θ_1 θ_2	
1	0,155	82,21	—	86,92	—		

Tabla XXVII



$\sigma_0 = 0,58 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	28,77	---	71,88	---	75,43	---
2	0,311	26,54	---	48,56	---	55,37	---
3	0,466	17,54	---	22,94	---	29,92	18,37
4	0,621	15,82	---	10,50	---	---	---
5	0,776	14,51	---	4,31	---	---	---
6	0,932	13,44	---	---	---	---	---
7	1,087	12,57	---	---	---	---	---
8	1,242	11,84	---	---	---	---	---
9	1,398	11,20	---	---	---	---	---
10	1,553	10,64	---	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,58 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	78,22	---	81,66	---	---	---
2	0,311	57,42	7,62	58,07	10,49	58,11	12,56

Table XXVIII



$\sigma_0 = 0,58 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 29$ $\theta_1 \quad \theta_2$		$r = 32$ $\theta_1 \quad \theta_2$		$r = 35$ $\theta_1 \quad \theta_2$	
2	0,311	57,84	14,29	57,37	15,87	56,84	17,51

$\sigma_0 = 0,58 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 38$ $\theta_1 \quad \theta_2$		$r = 41$ $\theta_1 \quad \theta_2$		$r = 44$ $\theta_1 \quad \theta_2$	
2	0,311	56,02	18,87	55,15	20,38	54,16	21,95

$\sigma_0 = 0,58 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 47$ $\theta_1 \quad \theta_2$		$r = 50$ $\theta_1 \quad \theta_2$		$r = 53$ $\theta_1 \quad \theta_2$	
2	0,311	53,02	23,61	51,70	25,40	50,13	27,41

$\sigma_0 = 0,58 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 56$ $\theta_1 \quad \theta_2$		$r = 59$ $\theta_1 \quad \theta_2$			
2	0,311	48,32	29,66	45,56	32,77		

Tabla XXVIII



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,40 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,960$ (elipse)

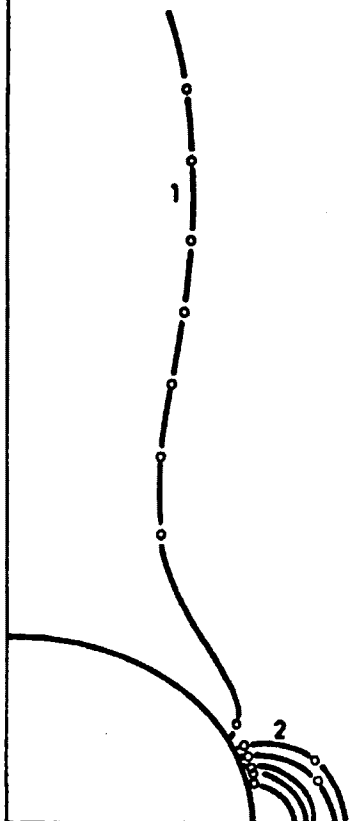


Fig. 43.- Red de isocromas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)

tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,58 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,960$ (elipse)

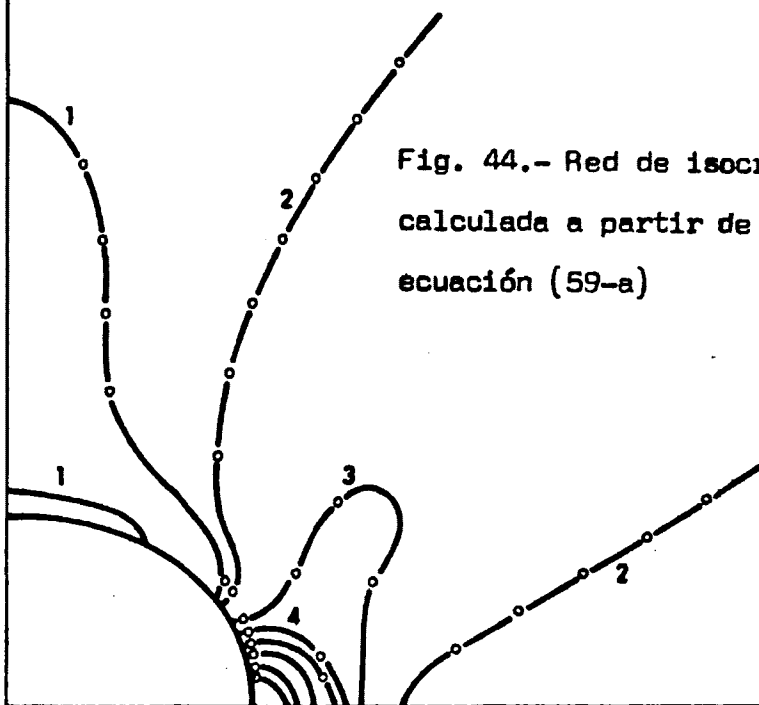


Fig. 44.- Red de isocromas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)



$\sigma_0 = 0,64 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	31,96	---	74,11	---	77,45	---
2	0,311	20,58	---	53,04	---	59,14	---
3	0,466	18,13	---	30,04	---	39,32	11,87
4	0,621	16,41	---	13,52	---	---	---
5	0,776	15,08	---	7,15	---	---	---
6	0,932	14,01	---	---	---	---	---
7	1,087	13,13	---	---	---	---	---
8	1,242	12,38	---	---	---	---	---
9	1,398	11,73	---	---	---	---	---
10	1,553	11,16	---	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,64 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	80,56	---	85,45	---	---	---
2	0,311	61,30	---	62,32	6,43	62,92	7,51
3	0,466	39,02	20,76	---	---	---	---

Tabla XXIX



$\sigma_0 = 0,64 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 29		r = 32		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	63,32	8,39	63,65	8,24	63,82	8,11

$\sigma_0 = 0,64 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 38		r = 41		r = 44	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	64,25	7,99	64,56	7,61	64,88	7,05

$\sigma_0 = 0,64 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 47		r = 50		r = 53	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	65,21	6,31	65,47	4,12	65,93	3,95

Tabla XXIX



$\sigma_0 = 0,76; \lambda = 1,96; a = 11$

n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	75,27	---	77,66	---	80,79	---
2	0,311	21,66	---	59,69	---	64,79	---
3	0,466	19,17	---	41,43	---	49,39	5,37
4	0,621	17,44	---	21,83	---	26,62	21,13
5	0,776	16,10	---	11,90	---	---	---
6	0,932	15,02	---	6,85	---	---	---
7	1,087	14,12	---	1	---	---	---
8	1,242	13,35	---	---	---	---	---
9	1,398	12,68	---	---	---	---	---
10	1,553	12,09	---	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,76; \lambda = 1,96; a = 11$

n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	85,14	---	---	---	---	---
2	0,311	67,06	---	68,59	---	69,94	---
3	0,466	51,11	12,13	50,88	16,28	49,68	20,13

Tabla XXX



$\sigma_0 = 0,76; \lambda = 1,96; a = 11$							
n	τ_m	r = 29		r = 32		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	71,33	---	72,84	---	74,65	---
3	0,466	47,33	24,25	43,51	29,52	---	---

$\sigma_0 = 0,76; \lambda = 1,96; a = 11$							
n	τ_m	r = 38		r = 41		r = 44	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	76,57	---	79,02	---	82,31	---

Tabla XXX



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,64 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,960$ (elipse)

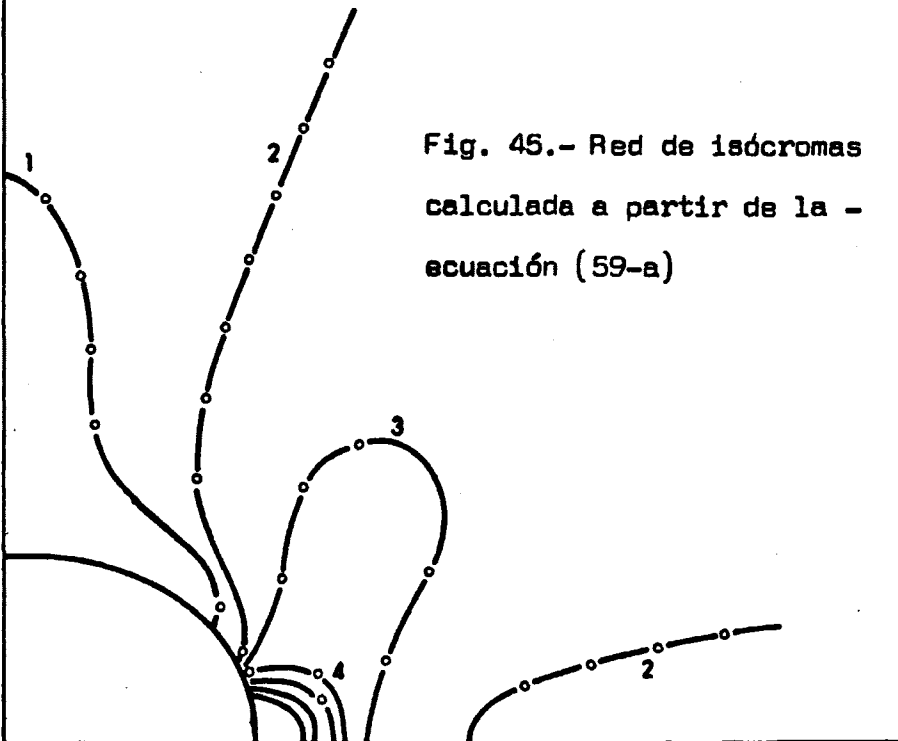


Fig. 45.- Red de isócronas calculada a partir de la ecuación (59-a)

tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,76 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,960$ (elipse)

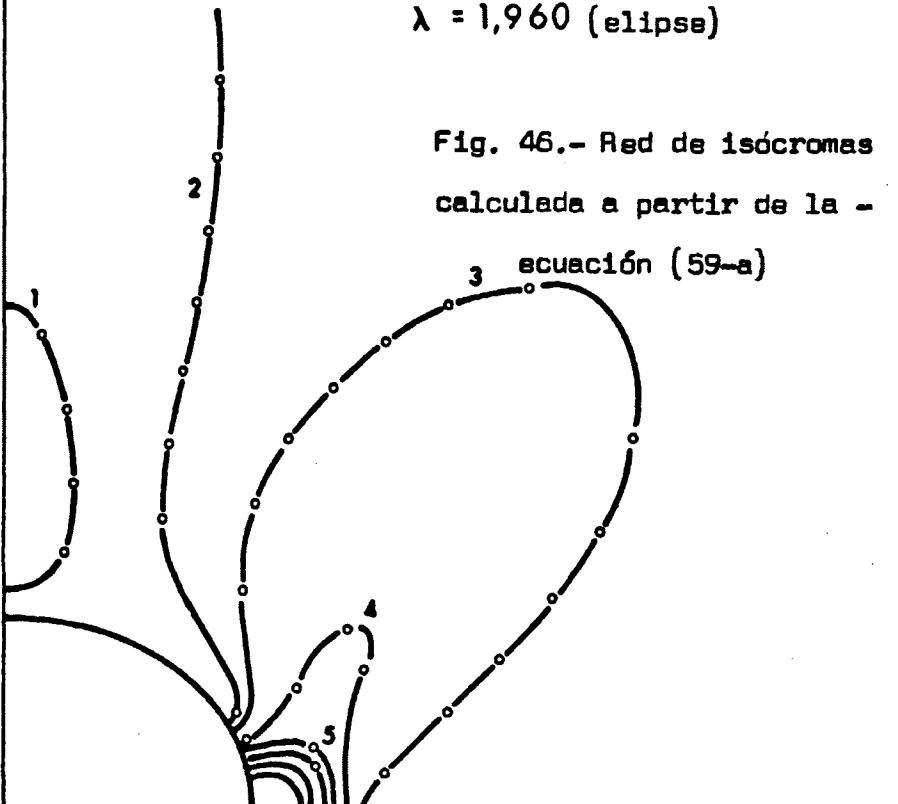


Fig. 46.- Red de isócronas calculada a partir de la ecuación (59-a)



$\sigma_0 = 0,84 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 11$		$r = 14$		$r = 17$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	30,20	---	79,54	---	82,06	---
2	0,311	26,40	---	62,10	---	67,66	---
3	0,466	23,92	---	44,12	---	54,04	---
4	0,621	22,04	---	25,25	---	11,76	37,65
5	0,776	20,53	---	16,74	---	---	---
6	0,932	19,27	---	12,36	---	---	---
7	1,087	18,21	---	13,36	---	---	---
8	1,242	17,29	---	6,25	---	---	---
9	1,398	16,48	---	2,61	---	---	---
10	1,553	15,77	---	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,84 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 20$		$r = 23$		$r = 26$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	86,28	---	---	---	---	---
2	0,311	70,04	---	71,57	---	73,35	---
3	0,466	8,12	56,49	11,70	57,11	14,18	56,99
4	0,621	38,17	22,20	---	---	---	---

Tabla XXXI



$\sigma_0 = 0,84 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	ξ_u	r = 29		r = 32		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	75,16	---	77,29	---	80,02	---
3	0,466	56,47	16,30	55,69	18,28	54,69	20,24

$\sigma_0 = 0,84 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	ξ_u	r = 38		r = 41		r = 44	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	53,48	22,25	52,03	24,38	50,26	26,76

Tabla XXXI



$\sigma_0 = 0,98 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	---	82,54	---	86,20	---
2	0,311	23,37	---	67,54	---	71,58	---
3	0,466	20,72	---	53,95	---	59,91	---
4	0,621	18,97	---	39,46	---	47,73	6,56
5	0,776	17,62	---	23,94	---	31,84	16,91
6	0,932	16,53	---	14,31	---	---	---
7	1,087	15,61	---	9,52	---	---	---
8	1,242	14,82	---	5,95	---	---	---
9	1,398	14,13	---	1,27	---	---	---
10	1,553	13,52	---	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,98 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	74,06	---	76,44	---	79,29	---
3	0,466	62,01	2,98	63,18	5,41	63,87	6,22
4	0,621	49,29	13,38	48,69	18,01	46,72	22,63

Tabla XXXII



$\sigma_0 = 0,98; \lambda = 1,96; a = 11$							
n	τ_m	r = 29		r = 32		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	83,48	---	---	---	---	---
3	0,466	64,41	6,40	64,90	6,13	65,85	4,30
4	0,621	42,94	28,36	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,98; \lambda = 1,96; a = 11$							
n	τ_m	r = 38		r = 41		r = 44	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	65,85	4,30	66,36	2,06	66,90	---

Tabla XXXII



Tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,84 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,960$ (elipse)

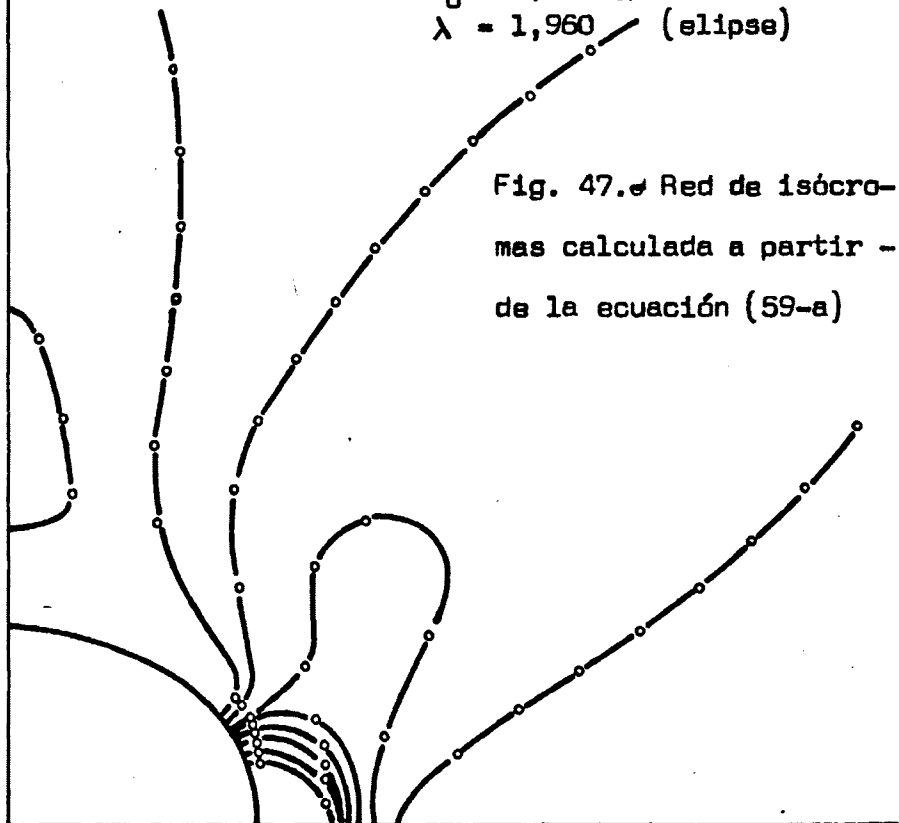


Fig. 47.- Red de isócro-
mas calculada a partir -
de la ecuación (59-a)

tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,98 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,960$ (elipse)

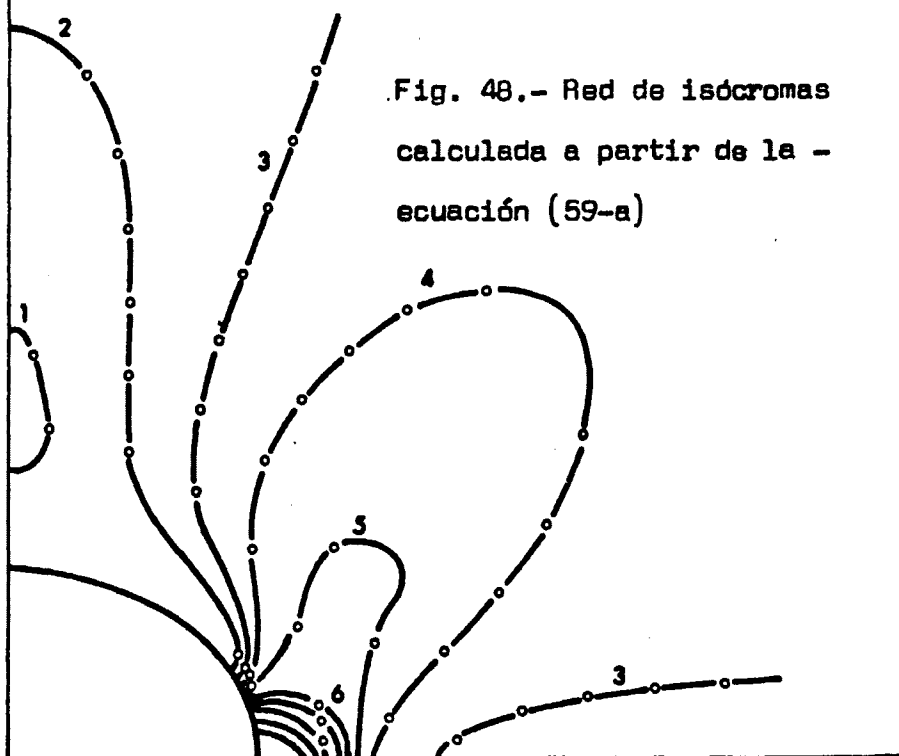


Fig. 48.- Red de isócro-
mas calculada a partir de la -
ecuación (59-a)



$\sigma_0 = 1,18 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 11$		$r = 14$		$r = 17$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	---	86,72	---	---	---
2	0,311	24,90	---	72,20	---	75,72	---
3	0,466	21,88	---	60,91	---	65,83	---
4	0,621	20,09	---	49,46	---	56,12	---
5	0,776	18,74	---	37,11	---	45,73	7,88
6	0,932	17,64	---	24,12	---	32,14	16,69
7	1,087	16,72	---	15,56	---	---	---
8	1,242	15,92	---	10,22	---	---	---
9	1,398	15,22	---	7,76	---	---	---
10	1,553	14,60	---	4,84	---	---	---

$\sigma_0 = 1,18 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 20$		$r = 23$		$r = 26$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	78,55	---	83,12	---	---	---
3	0,466	68,13	---	69,76	---	71,27	---
4	0,621	58,20	7	58,92	9,75	59,08	11,62
5	0,776	47,05	14,91	45,86	20,27	42,49	26,40

Tabla XXXII I



$\sigma_0 = 1,18 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 29		r = 32		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	72,88	---	74,69	---	79,47	---
4	0,621	59,95	13,14	58,67	14,47	58,42	15,89

$\sigma_0 = 1,18 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 38		r = 41		r = 44	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	79,47	---	83,22	---	---	---
4	0,621	57,69	16,97	57,20	18,05	56,55	19,23

$\sigma_0 = 1,18 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 47		r = 50		r = 53	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
4	0,621	55,82	20,43	55,01	21,67	54,11	22,98

Tabla XXXIII



$\sigma_0 = 1,28 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	---	---	---	---	---
2	0,311	67,40	---	74,03	---	77,38	---
3	0,466	22,42	---	63,55	---	68,10	---
4	0,621	20,59	---	53,11	---	59,20	---
5	0,776	19,24	---	42,09	---	49,94	4,93
6	0,932	18,13	---	30,04	---	39,32	11,87
7	1,087	17,20	---	19,50	---	---	---
8	1,242	16,41	---	13,58	---	---	---
9	1,358	15,70	---	9,94	---	---	---
10	1,553	15,08	---	7,13	---	---	---

$\sigma_0 = 1,28 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	80,48	---	85,30	---	---	---
3	0,466	70,45	---	72,33	---	74,24	---
4	0,621	61,36	3,97	62,38	6,36	62,98	7,42
5	0,776	51,70	11,73	51,58	15,73	50,46	19,37
6	0,932	39,02	20,76	---	---	---	---

Tabla XXXIV



$\sigma_0 = 1,28 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 29		r = 32		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	76,44	---	79,17	---	---	---
4	0,621	63,40	7,92	63,74	8,10	64,12	7,96
5	0,776	48,52	23,14	45,48	27,62	---	---

$\sigma_0 = 1,28 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 38		r = 41		r = 44	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
4	0,621	64,23	7,89	64,70	7,33	65,03	6,69

$\sigma_0 = 1,28 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 47		r = 50		r = 53	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
4	0,621	65,38	5,85	65,75	4,69	---	---

Tabla XXXIV.



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,18 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,960$ (elipse)

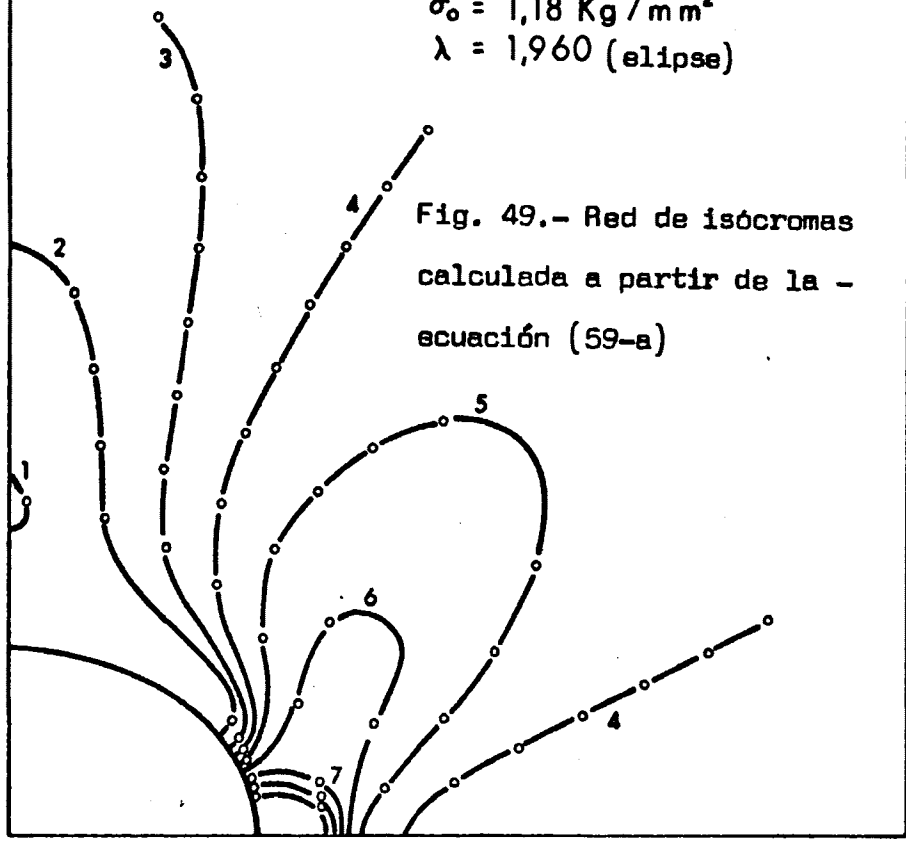


Fig. 49.- Red de isóchromas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)

tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,28 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,960$ (elipse)

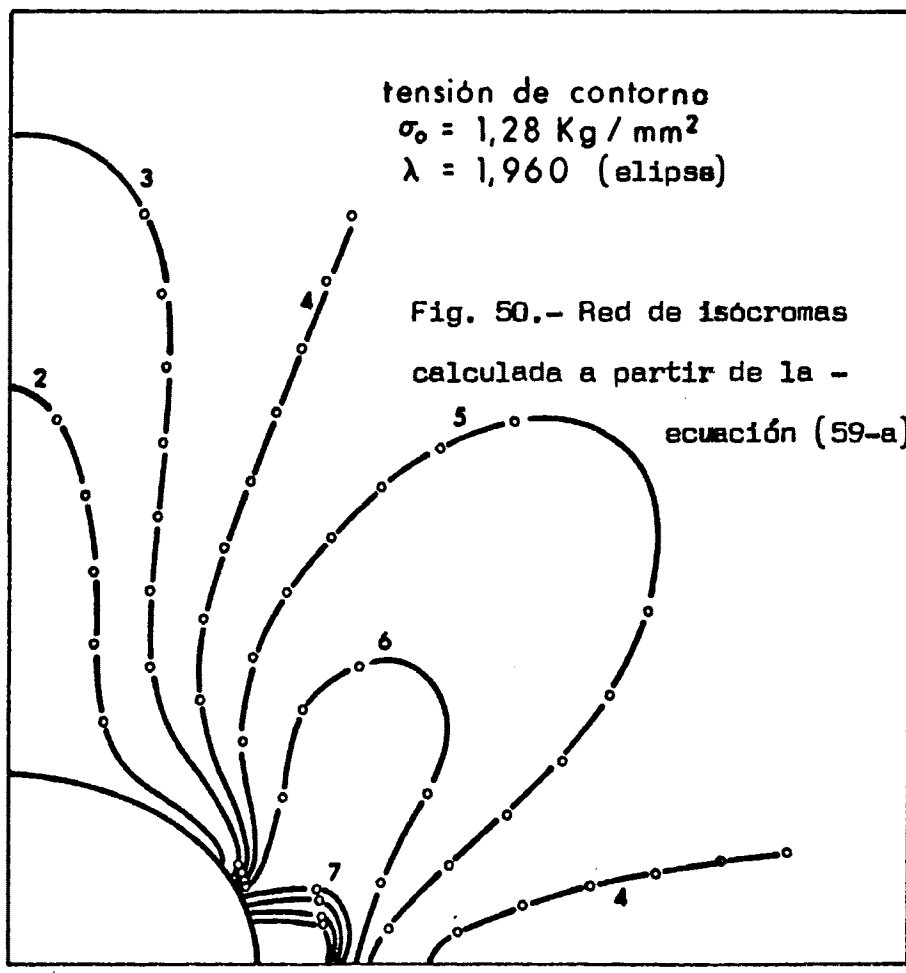


Fig. 50.- Red de isóchromas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)



$\sigma_0 = 1,34 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	---	---	---	---	---
2	0,311	69,55	---	75,02	---	78,29	---
3	0,466	22,72	---	64,94	---	69,31	---
4	0,621	20,88	---	55,01	---	60,80	---
5	0,776	19,51	---	44,64	---	52,08	2,88
6	0,932	18,41	---	33,33	---	42,41	10,13
7	1,087	17,48	---	23,99	---	28,30	19,69
8	1,242	16,68	---	15,31	---	---	---
9	1,358	15,97	---	11,25	---	---	---
10	1,553	15,35	---	7,28	---	---	---

$\sigma_0 = 1,34 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	81,59	---	88,42	---	---	---
3	0,466	71,69	---	73,72	---	75,89	---
4	0,621	62,99	0,77	64,17	3,99	64,98	4,42
5	0,776	53,98	10,15	54,21	13,66	53,64	16,60
6	0,932	43,12	17,68	40,07	25,12	---	---

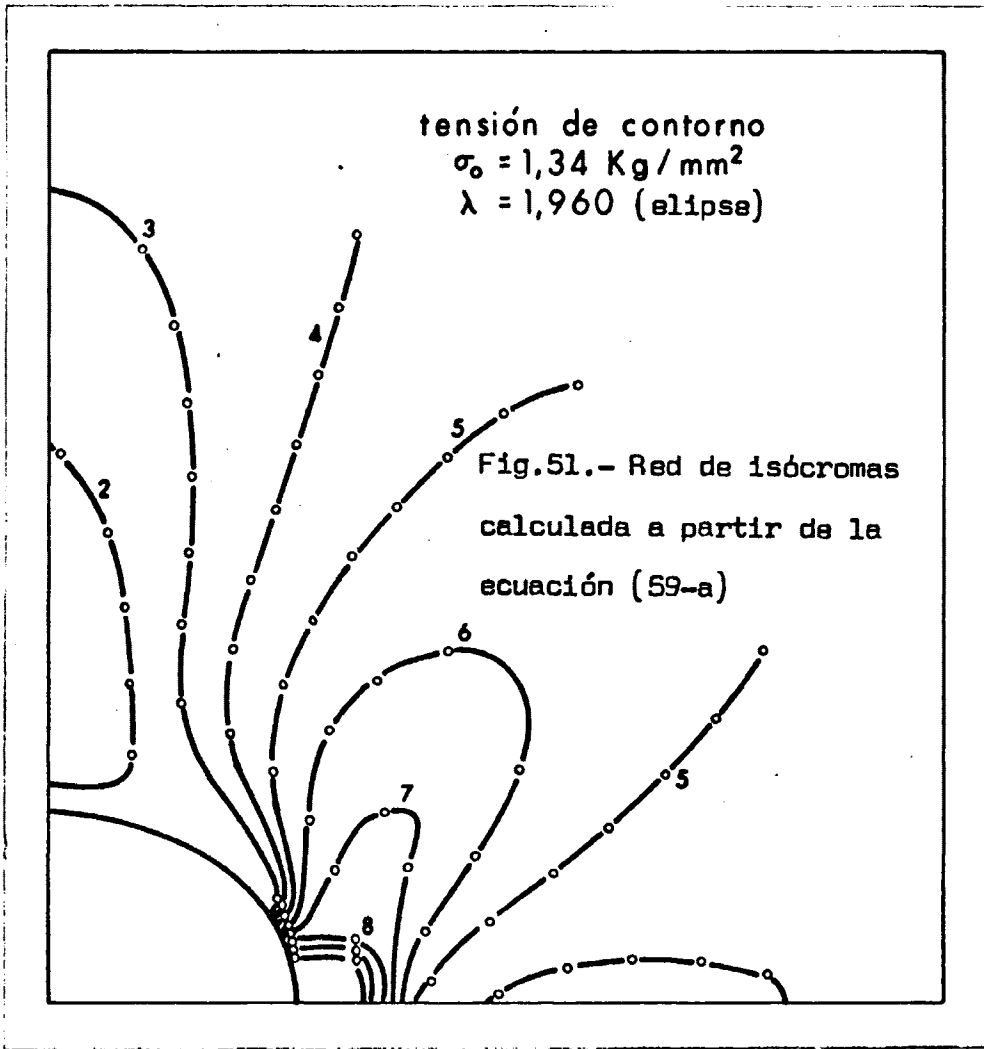
Tabla XXXV



$\sigma_0 = 1,34 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 29		r = 32		r = 35	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	78,53	---	82,17	---	---	---
4	0,621	65,56	3,90	66,32	2,17	66,69	---
5	0,776	52,54	19,40	51,15	22,27	---	---

$\sigma_0 = 1,34 ; \lambda = 1,96 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 38		r = 41		r = 44	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
4	0,621	67,38	---	68,44	---	69,25	---

Tabla XXXV



2º MODELO ELIPTICO DE MAYOR EXCENTRICIDAD.

tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a}(b + \sqrt{b^2 + a^2})$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_0 = 0,41$		$\lambda = 1,38$		$a = 11$		$b = 3,5$	
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,150	57,66	---	64,67	---	67,66	---
2	0,311	18,94	---	34,82	7,44	32,83	15,96
3	0,466	7,32	---	---	---	---	---
4	0,621	5,74	---	---	---	---	---
5	0,776	4,91	---	---	---	---	---
6	0,932	4,35	---	---	---	---	---
7	1,087	3,94	---	---	---	---	---
8	1,242	---	---	---	---	---	---
9	1,398	---	---	---	---	---	---
10	1,553	---	---	---	---	---	---

tensión de contorno		$\lambda = (b + \sqrt{b^2 + a^2})$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_0 = 0,41$		$\lambda = 1,38$		$a = 11$		$b = 3,5$	
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	70,52	---	73,23	---	75,94	---

Tabla XXXVI



tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a} (b + \sqrt{b^2 + \frac{2}{a}})$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_o = 0,41$		$\lambda = 1,38$		$a = 11$		$b = 3,5$	
n	τ_m	r = 29 θ_1 θ_2		r = 32 θ_1 θ_2		θ_1	θ_2
1	0,155	79,84	---	86,12	---		

Tabla XXXVI

$\sigma_0 = 0,52 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	65,30	---	71,17	---	74,87	---
2	0,311	34,34	---	47,29	5,03	49,95	9,15
3	0,466	10,06	---	21,39	13,30	---	---
4	0,621	7,64	---	---	---	---	---
5	0,776	6,52	---	---	---	---	---
6	0,932	5,87	---	---	---	---	---
7	1,087	5,27	---	---	---	---	---
8	1,242	4,86	---	---	---	---	---
9	1,398	4,52	---	---	---	---	---
10	1,553	4,25	---	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,52 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	78,74	---	84,78	---	---	---
2	0,311	50,10	13,54	48,95	17,71	46,73	22,17

$\sigma_0 = 0,52 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	r = 29					
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2		
2	0,311	42,81	27,84				

Tabla XXXVII

tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,41 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,427$ (elipse)

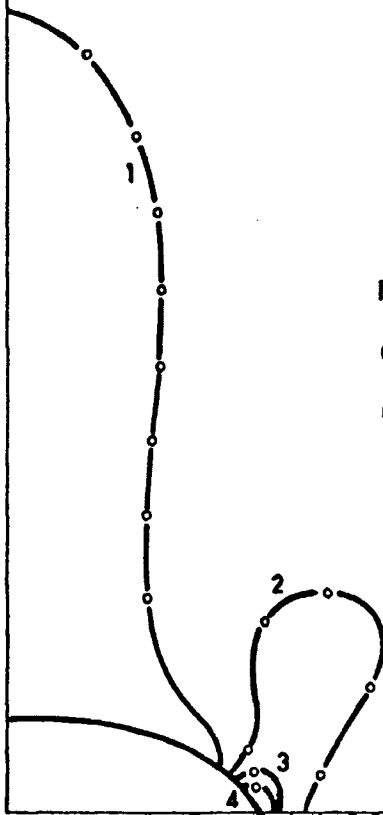


Fig. 52.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)

tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,52 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1,427$ (elipse)

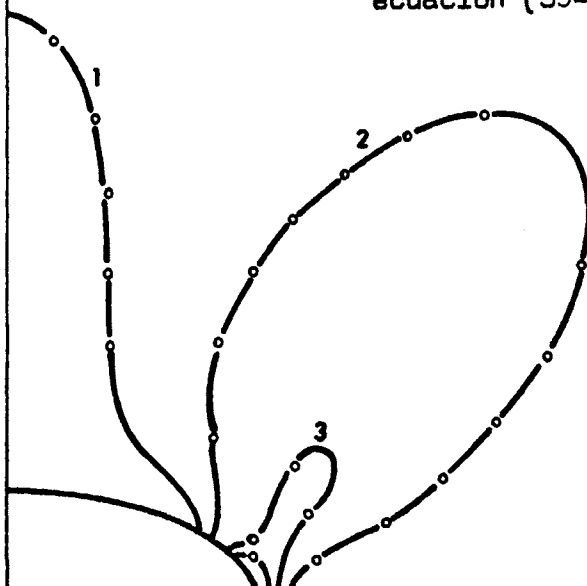


Fig. 53.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)



$\sigma_0 = 0,76 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 11$		$r = 14$		$r = 17$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	75,27	---	80,04	---	---	---
2	0,311	34,23	---	62,05	---	65,34	---
3	0,466	32,60	---	46,12	3,43	48,68	9,80
4	0,621	11,65	---	29,72	8,97	---	---
5	0,776	8,72	---	---	---	---	---
6	0,932	7,49	---	---	---	---	---
7	1,087	6,71	---	---	---	---	---
8	1,242	5,83	---	---	---	---	---
9	1,398	5,27	---	---	---	---	---
10	1,553	4,85	---	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,76 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 20$		$r = 23$		$r = 26$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	67,53	---	69,45	---	71,42	---
3	0,466	48,52	14,62	46,87	19,41	43,61	25,01

$\sigma_0 = 0,76 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 29$		$r = 32$		$r = 35$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	73,26	---	76,10	---	79,25	---

Tabla XXXVIII



$\sigma_0 = 0,89 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 11$		$r = 14$		$r = 17$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	85,81	---	---	---	---	---
2	0,311	68,84	---	74,20	---	78,28	---
3	0,466	55,57	---	63,19	---	66,52	---
4	0,621	42,16	---	52,86	---	55,89	6,08
5	0,776	27,16	---	42,66	4,55	44,72	11,83
6	0,932	25,23	---	32,07	8,06	25,86	24,94
7	1,087	10,23	---	---	---	---	---
8	1,242	8,56	---	---	---	---	---
9	1,398	7,69	---	---	---	---	---
10	1,553	7,11	---	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,89 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 20$		$r = 23$		$r = 26$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	83,89	---	---	---	---	---
3	0,466	68,84	---	70,98	---	73,26	---
4	0,621	57,00	8,69	57,34	10,68	57,27	12,37
5	0,776	43,37	18,28	38,50	26,61	---	---

Tabla XXXIX



$\sigma_0 = 0,89 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 29$		$r = 32$		$r = 35$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	75,31	---	77,59	---	84,21	---
4	0,621	56,27	13,91	56,49	15,39	55,87	16,86

$\sigma_0 = 0,89 ; \lambda = 1,38 ; a = 11$							
n	τ_m	$r = 38$		$r = 41$			
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2		
4	0,621	55,13	17,31	54,25	19,89		

Tabla XXXIX

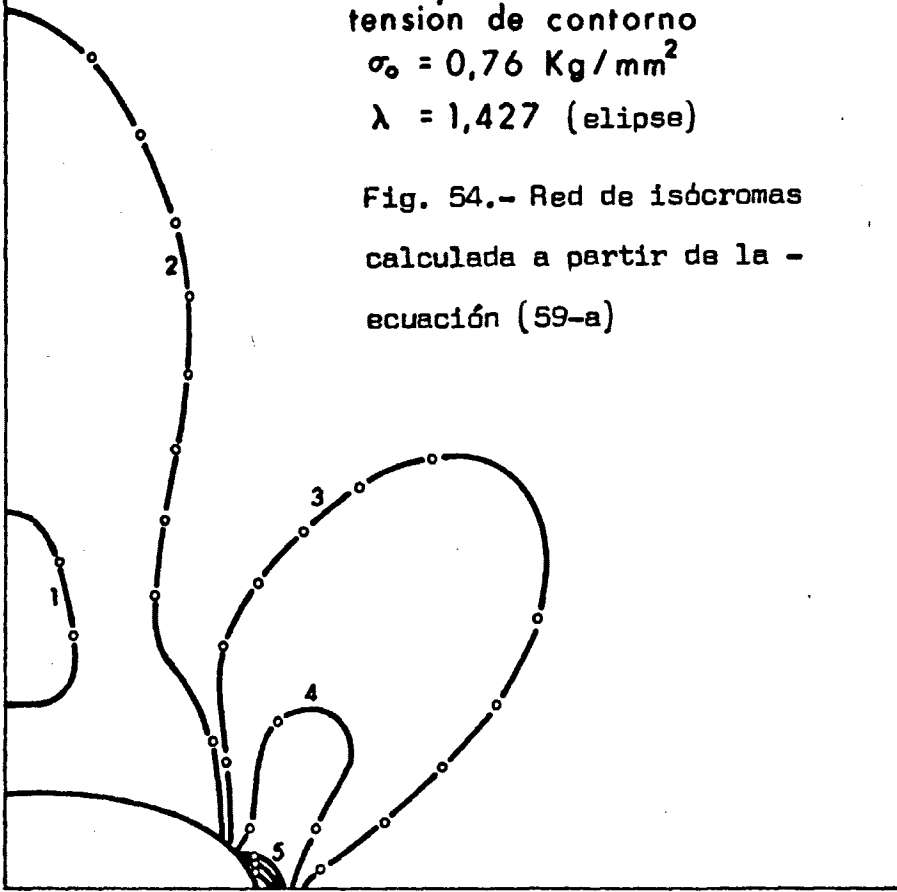


tensión de contorno

$$\sigma_0 = 0,76 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\lambda = 1,427 \text{ (elipse)}$$

Fig. 54.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)

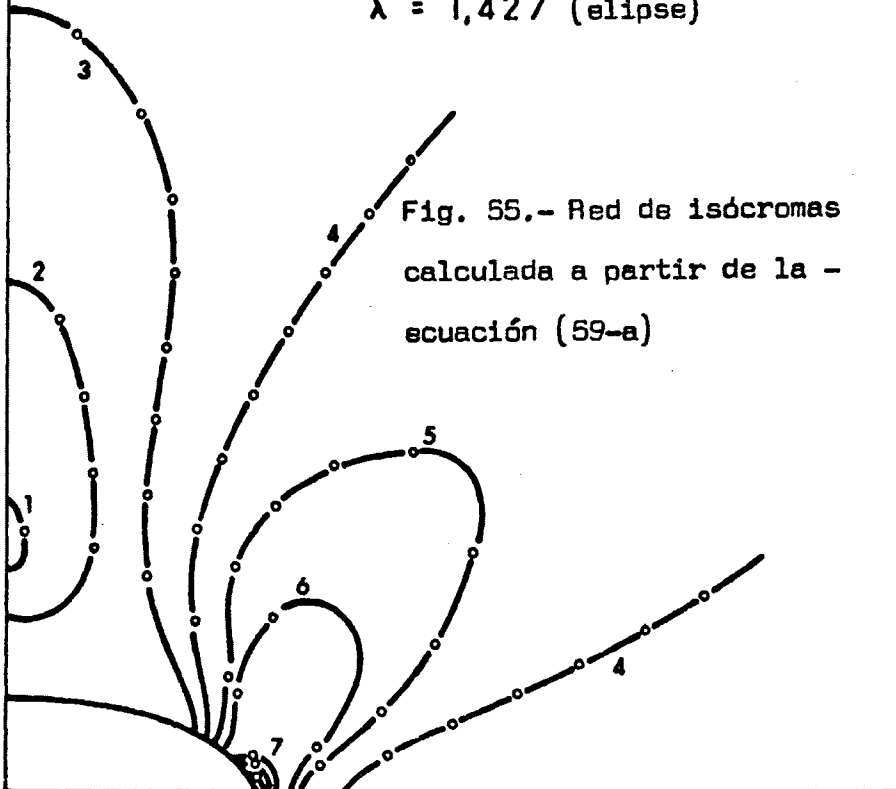


tensión de contorno

$$\sigma_0 = 0,89 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\lambda = 1,427 \text{ (elipse)}$$

Fig. 55.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)





3º MODELO ELIPTICO, CON SU EJE MAYOR ORIENTADO EN LA DIRECCION DE CAR-
GA.

tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a} (b + \sqrt{b^2 + a^2})$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_0 = 0,42$		$\lambda = 3,075$		$b = 11$		$a = 8$	
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	46,00	---	54,92	---	68,90
2	0,311	---	37,93	---	---	---	---
3	0,466	---	33,03	---	---	---	---
4	0,261	---	29,30	---	---	---	---
5	0,776	---	26,25	---	---	---	---
6	0,932	---	23,65	---	---	---	---
7	1,087	---	21,39	---	---	---	---
8	1,242	---	19,37	---	---	---	---
9	1,398	---	17,51	---	---	---	---
10	1,553	---	15,80	---	---	---	---

tension de contorno		$\lambda = (b + \sqrt{b^2 + a^2})$		semieje mayor		semieje menor	
$\sigma_0 = 0,42$		$\lambda = 3,075$		$b = 11$		$a = 8$	
n	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	71,55	---	72,86	---	74,01

Tabla XL



tensión de contorno		$\lambda = (b + \sqrt{b^2 + a^2})$		semieje mayor		semieje mayor	
$\sigma_0 = 0,42$		$\lambda = 3,075$		$b = 11$		$a = 8$	
n	Z_m	r = 29		r = 32		r = 34	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	—	75,31	—	76,90	—	81,63

Tabla XL



$\sigma_0 = 0,85 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 3,075$							
n.	τ_m	r=11		r=14		r=17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	---	---	---	---	---
2	0,311	---	---	---	---	---	82,17
3	0,466	---	46,11	---	55,36	---	69,12
4	0,621	---	41,37	---	42,73	---	55,40
5	0,776	---	38,09	---	31,12	---	32,95
6	0,932	---	35,44	---	22,87	---	---
7	1,087	---	33,18	---	17,56	---	---
8	1,242	---	31,21	---	12,26	---	---
9	1,398	---	29,45	---	---	---	---
10	1,553	---	27,86	---	---	---	---

$\sigma_0 = 0,85 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 3,075$							
n.	τ_m	r=20		r=23		r=26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	---	71,75	---	73,08	---	74,25
4	0,621	3,83	59,38	11,95	60,19	14,79	60,05
5	0,776	30,29	37,58	---	---	---	---

Tabla XLI.



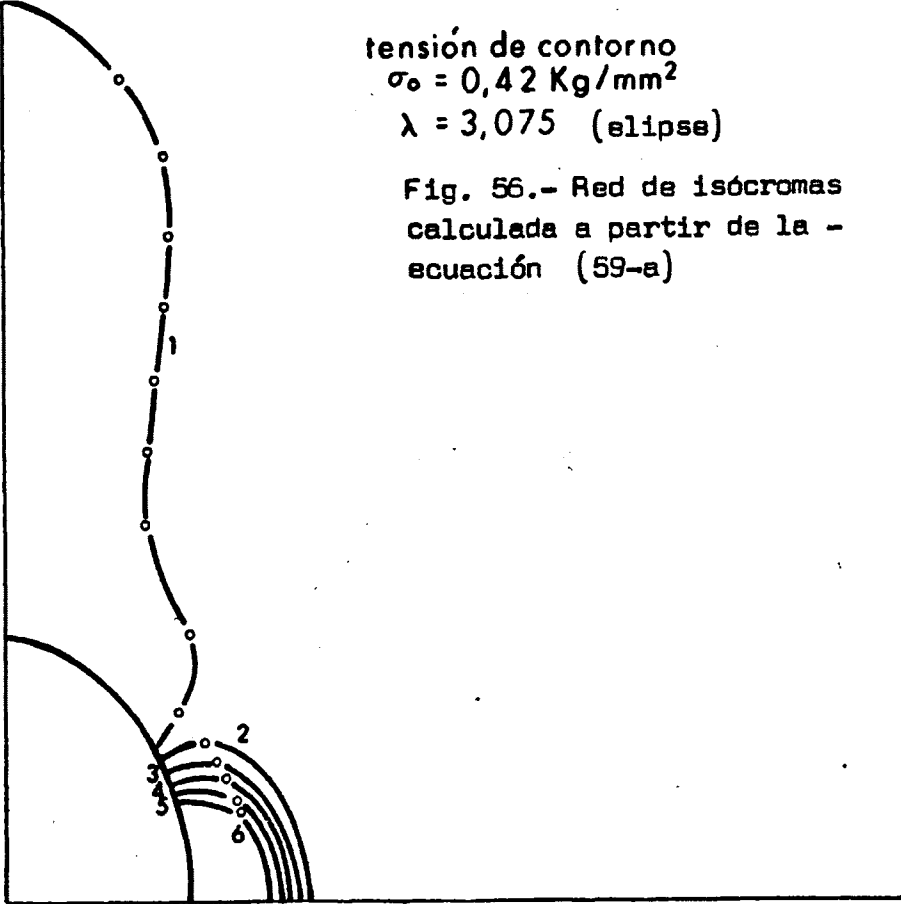
$\sigma_0 = 0,85 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 3,075$							
n	τ_m	$\theta_1, \theta_2, r=29$		$\theta_1, \theta_2, r=32$		$\theta_1, \theta_2, r=35$	
3	0,466	---	75,59	---	77,24	---	79,35
4	0,621	16,79	59,52	18,49	58,78	20,08	57,91

$\sigma_0 = 0,85 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 3,075$							
n	τ_m	$\theta_1, \theta_2, r=38$		$\theta_1, \theta_2, r=41$		$\theta_1, \theta_2, r=44$	
3	0,466	---	82,27	---	88,42	---	---
4	0,621	21,65	56,91	23,26	55,80	24,94	54,54

Tabla XLI

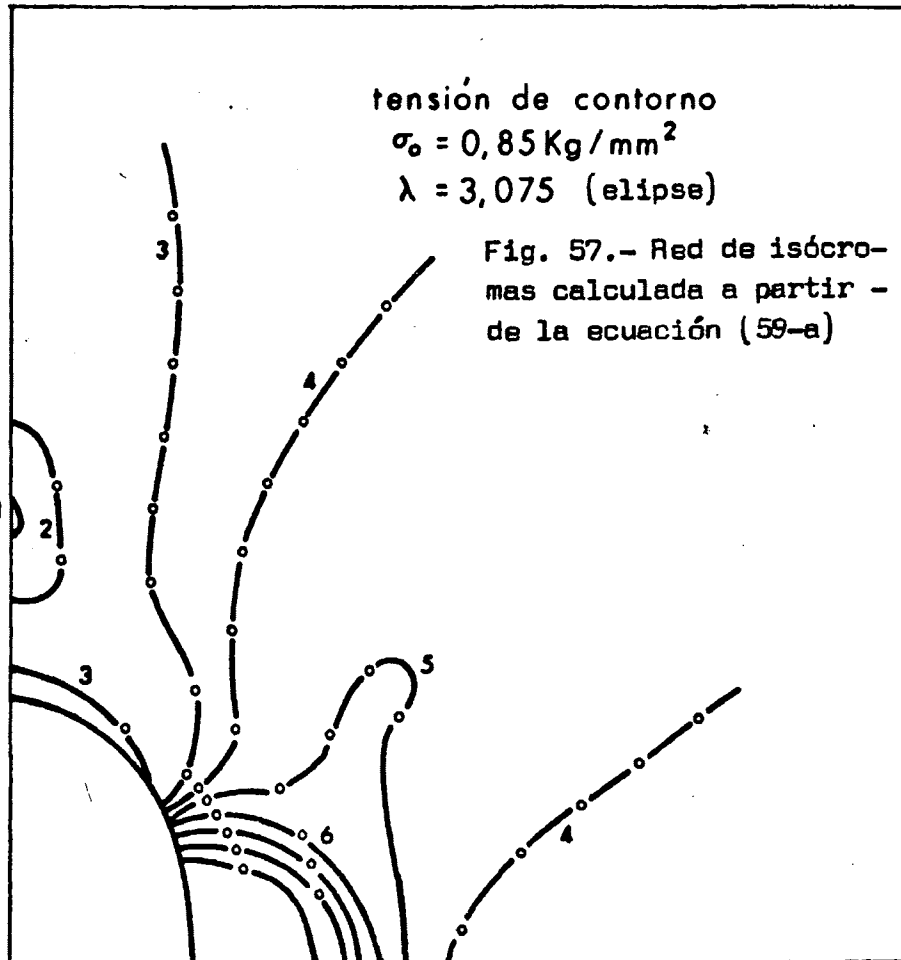
tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,42 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 3,075$ (elipse)

Fig. 56.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (59-a)



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,85 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 3,075$ (elipse)

Fig. 57.- Red de isócro-
mas calculada a partir -
de la ecuación (59-a)





$\sigma_0 = 1,68 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 3,075$							
n	τ_m	r=11		r=14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	---	---	---	---	---
2	0,311	---	---	---	---	---	---
3	0,466	---	87,10	---	81,95	---	83,96
4	0,621	---	52,43	---	68,30	---	75,23
5	0,776	---	45,98	---	54,84	---	68,86
6	0,932	---	43,31	---	44,22	---	62,23
7	1,087	---	41,23	---	37,33	---	54,84
8	1,242	---	39,49	---	32,50	---	45,89

$\sigma_0 = 1,69 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 3,075$							
n	τ_m	r= 20		r=23		r= 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	---	83,96	---	---	---	---
4	0,621	---	77,38	---	81,51	---	85,55
5	0,776	---	71,51	---	72,83	---	73,97
6	0,932	---	65,51	---	66,57	2,29	67,06
7	1,087	5,26	58,89	12,61	59,67	15,48	59,47
8	1,242	16,72	50,88	22,06	51,01	26,34	49,22

Tabla XLII



$\sigma_0 = 1,69 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 3,075$							
n	τ_m	$r=29$		$r=32$		$r=35$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
4	0,621	---	85,55	---	---	---	---
5	0,776	---	75,26	---	76,83	---	78,83
6	0,932	4,13	67,42	4,20	67,72	---	68,89
7	1,087	17,56	58,85	19,39	58,01	---	---
8	1,242	31,52	45,56	---	---	---	---

$\sigma_0 = 1,69 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 3,075$							
n	τ_m	$r=38$		θ_1			
		θ_1	θ_2				
5	0,776	---	81,52				
6	0,932	---	68,59				

Tabla XLII



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,68 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 3,075$ (elipse)

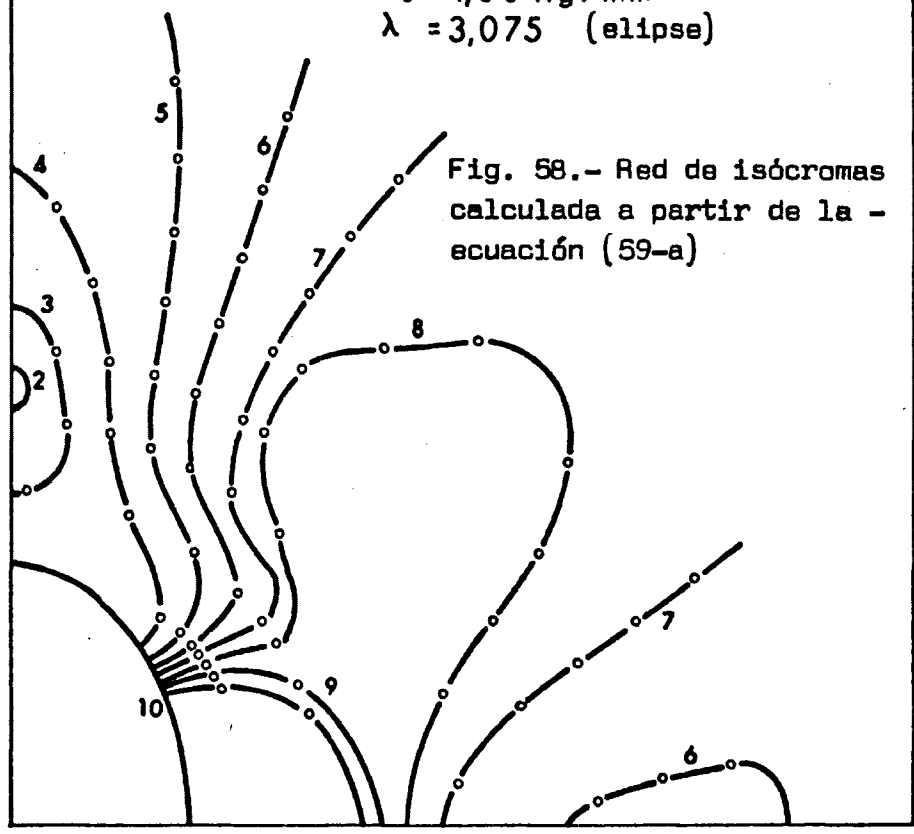


Fig. 58.- Red de isóchromas calculada a partir de la ecuación (59-a)

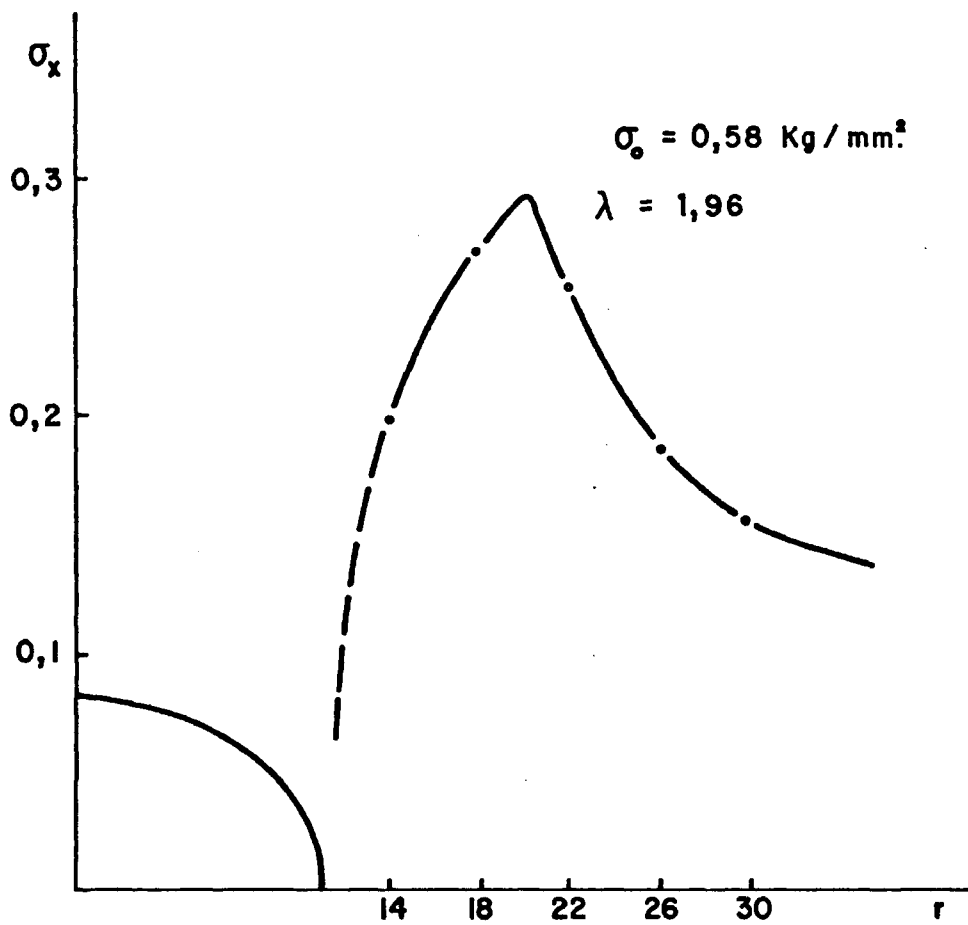
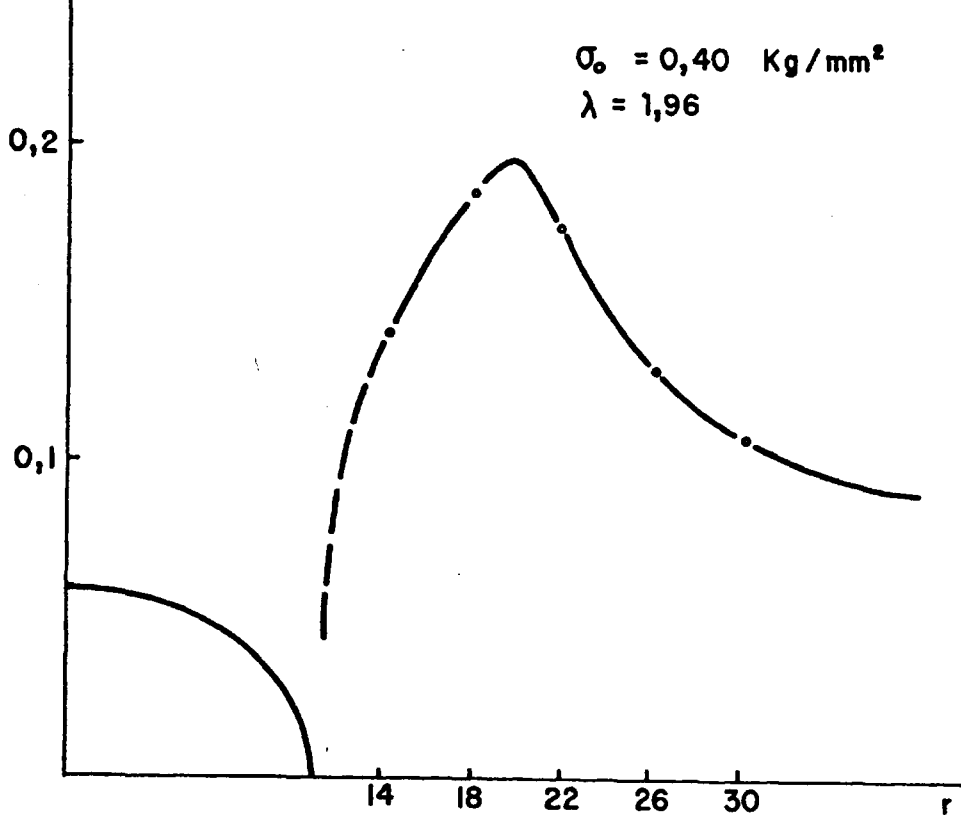
3.2.3.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL CONTORNO DEL ORIFICIO ELIPTICO.

$\sigma_0 = 0,40$					
r	r ₁	r ₂	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	a ₁₀
11	0	22	∞	∞	-1663,15
14	3	25	0,137	1,457	-2694,02
18	7	29	0,186	0,725	-4453,38
22	11	33	0,175	0,612	-6652,58
26	15	37	0,129	0,473	-9291,62
30	19	41	0,111	0,435	-12370,5
34	23	45	0,069	0,423	-15889,2

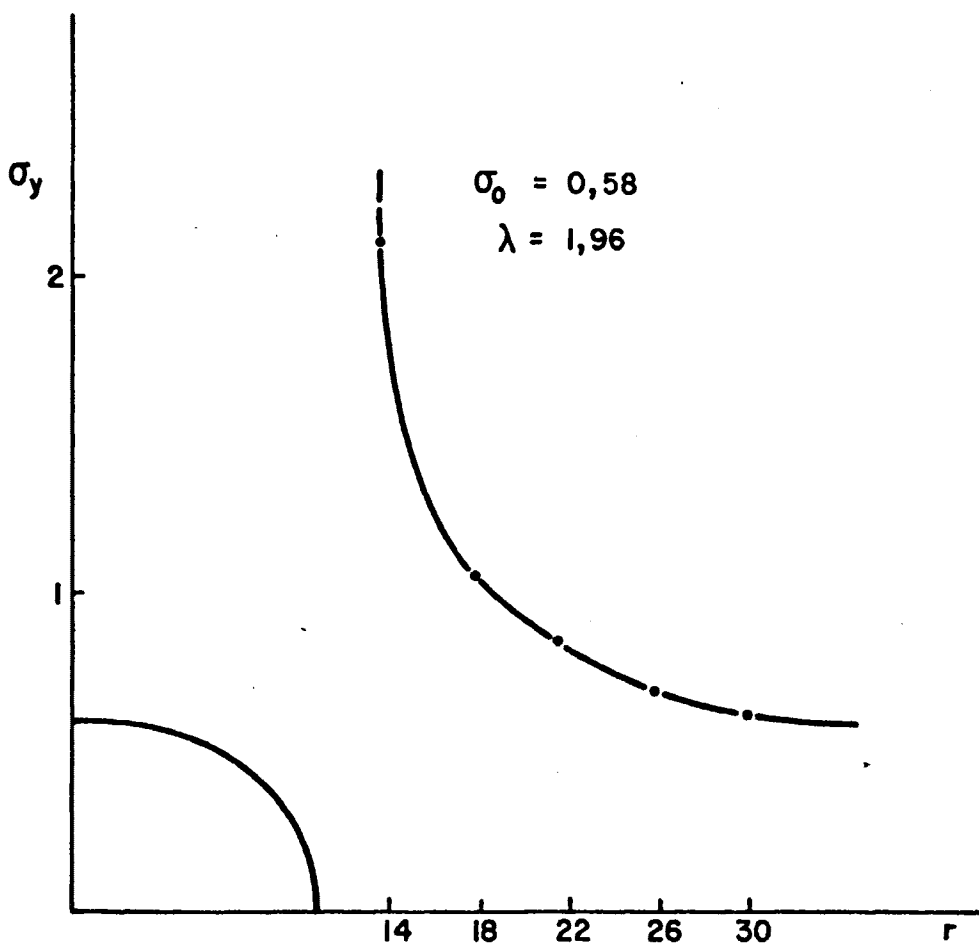
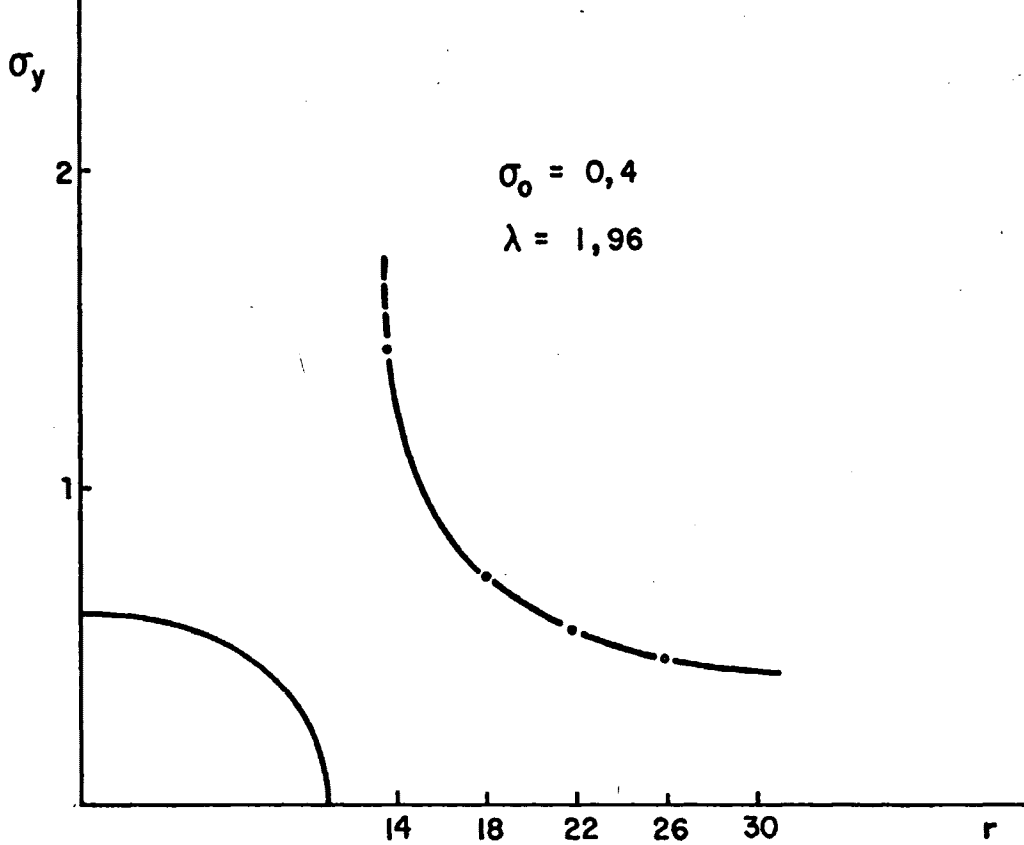
Tabla XLIII

$\sigma_0 = 0,58$					
r	r ₁	r ₂	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	a ₁₀
11	0	22	∞	∞	-1663,15
14	3	25	0,199	2,112	-2694,02
18	7	29	0,269	1,051	-4453,38
22	11	33	0,254	0,888	-6652,58
26	15	37	0,186	0,685	-9291,62
30	19	41	0,161	0,630	-12370,5
34	23	45	0,100	0,601	-15889,2

Tabla XLIV



Figs. 59 y 60.- Variación de la tensión principal 1, a medida que nos separamos del contorno elíptico.



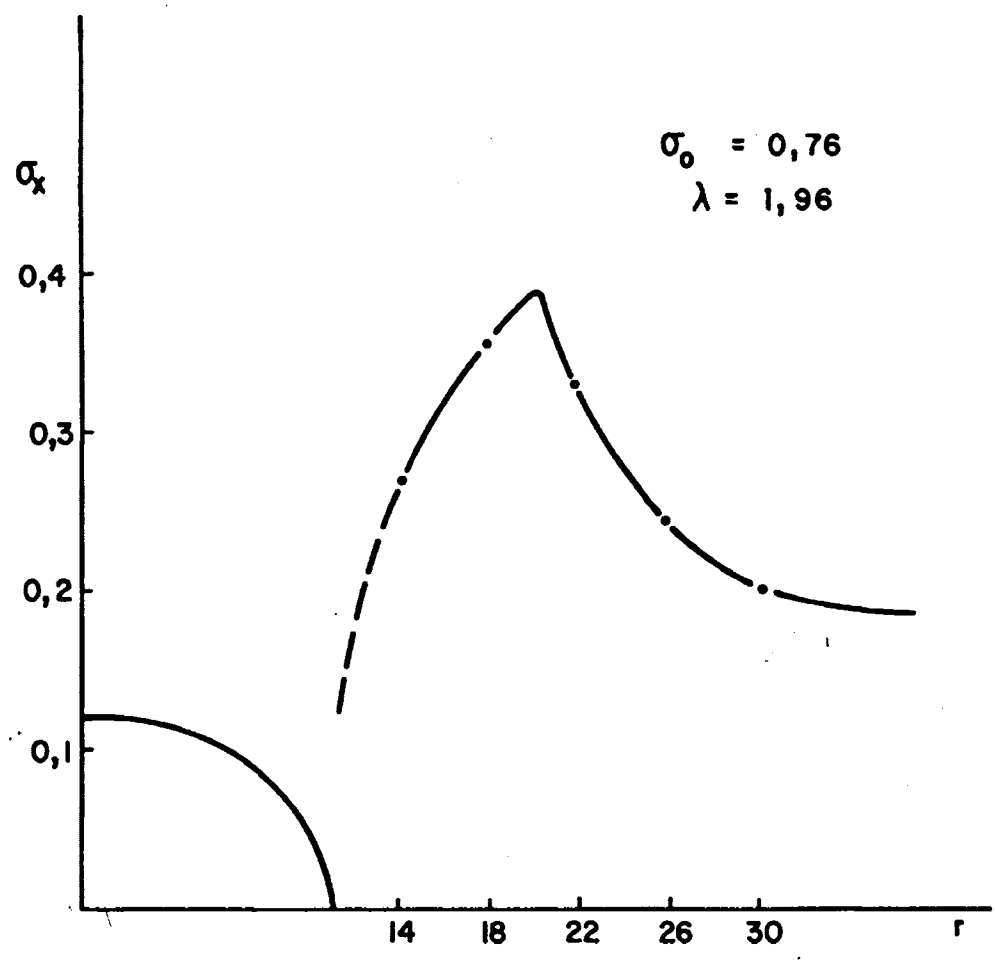
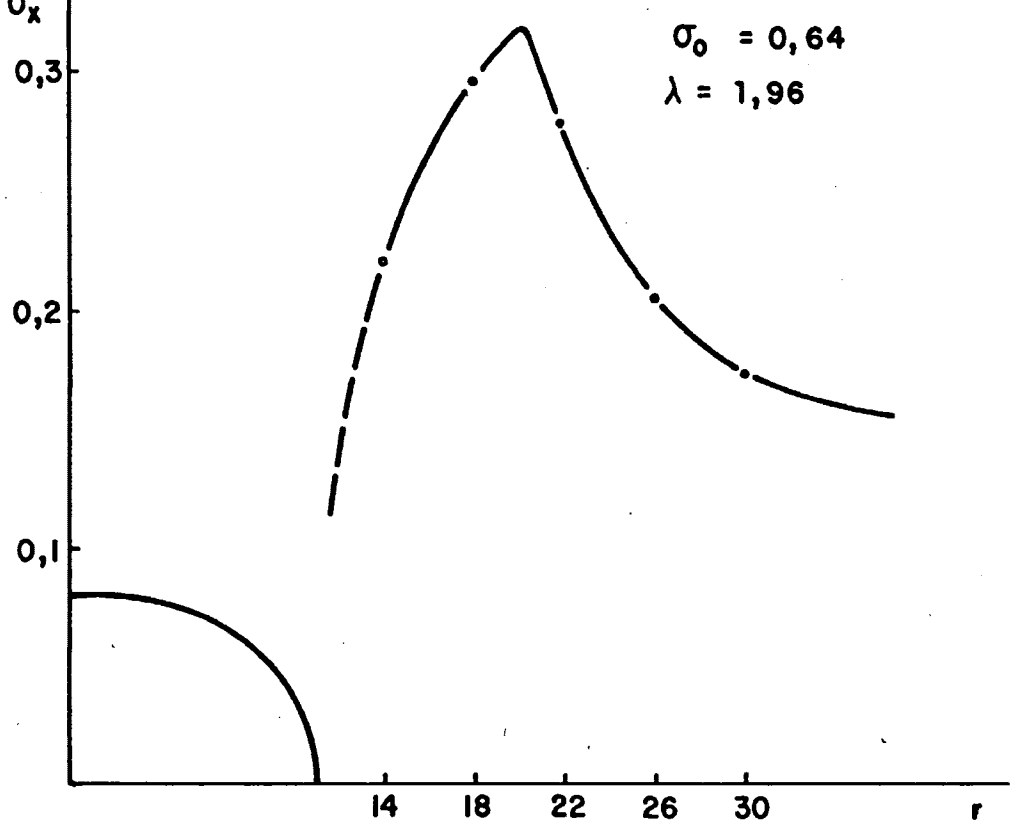
Figs. 61 y 62.- Variación de la tensión principal 2, a medida que nos separamos del contorno elíptico.

$\sigma_0 = 0,64$					
r	r ₁	r ₂	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	a ₁₀
11	0	22	∞	∞	-1663,15
14	3	25	0,220	2,331	-2694,02
18	7	29	0,297	1,160	-4453,38
22	11	33	0,280	0,980	-6652,58
26	15	37	0,206	0,756	-9291,62
30	19	41	0,177	0,695	-12370,5
34	23	45	0,110	0,663	-15889,2

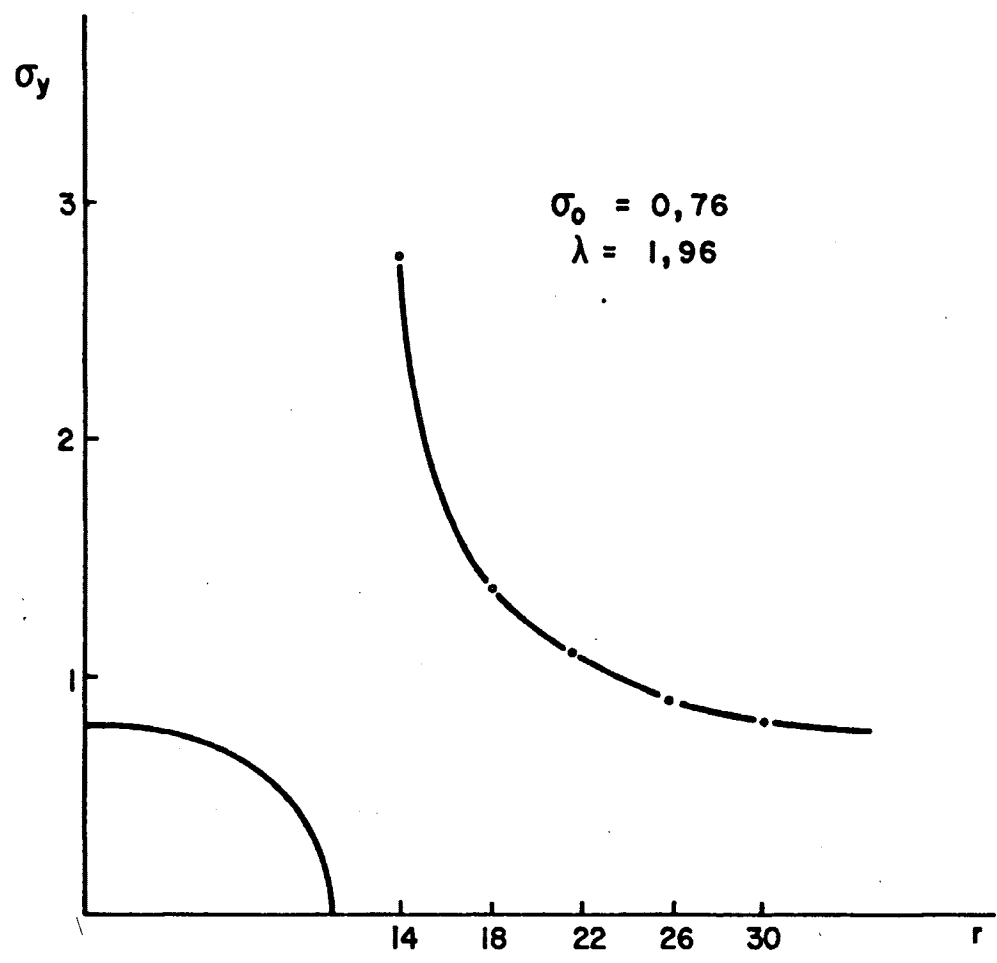
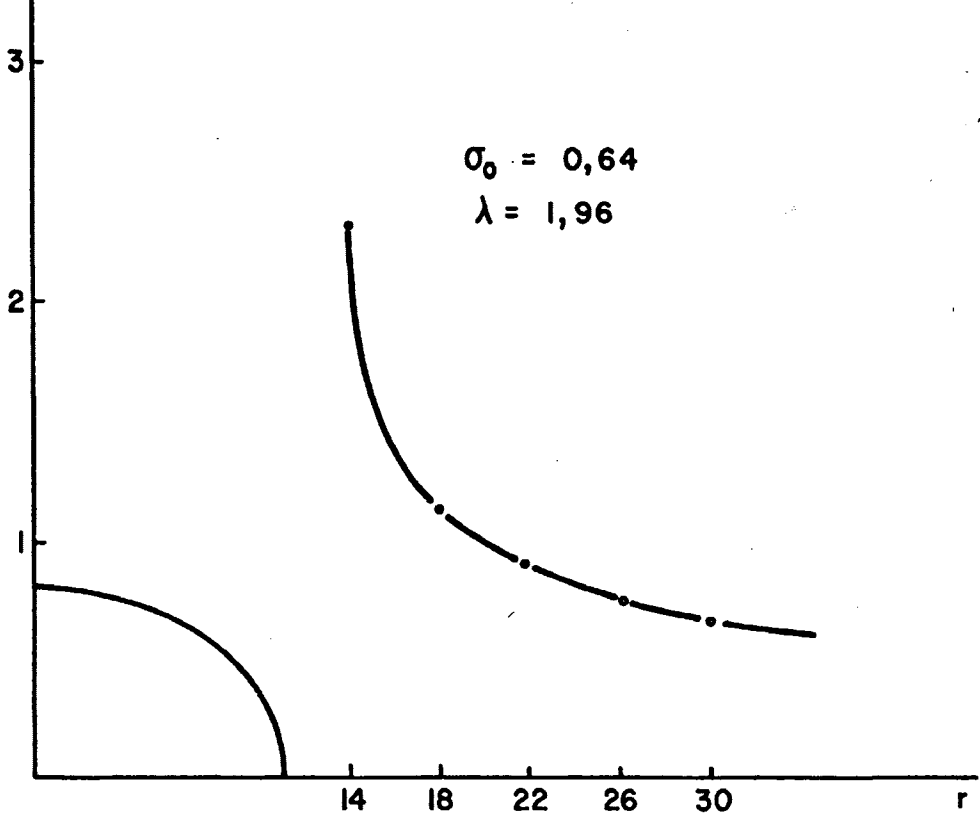
Table XLV

$\sigma_0 = 0,76$					
r	r ₁	r ₂	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	a ₁₀
11	0	22	∞	∞	-1663,15
14	3	25	0,261	2,768	-2694,02
18	7	29	0,353	1,377	-4453,38
22	11	33	0,333	1,164	-6652,58
26	15	37	0,244	0,898	-9291,62
30	19	41	0,211	0,826	-12370,50
34	23	45	0,131	0,787	-15889,22

Table XLVI



Figs. 63 y 64.- Variación de la tensión principal 1, a medida que nos separamos del contorno elíptico.



Figs. 65 y 66.- Variación de la tensión principal 2, a medida que nos separamos del contorno elíptico.

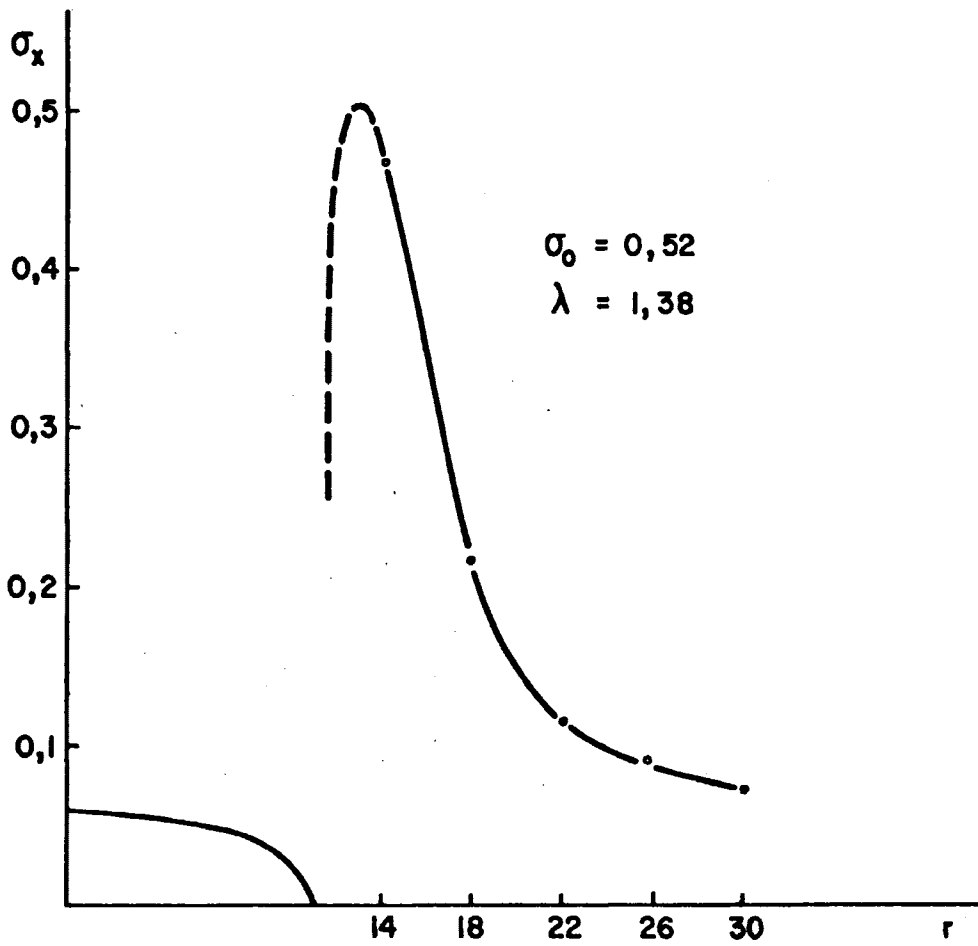
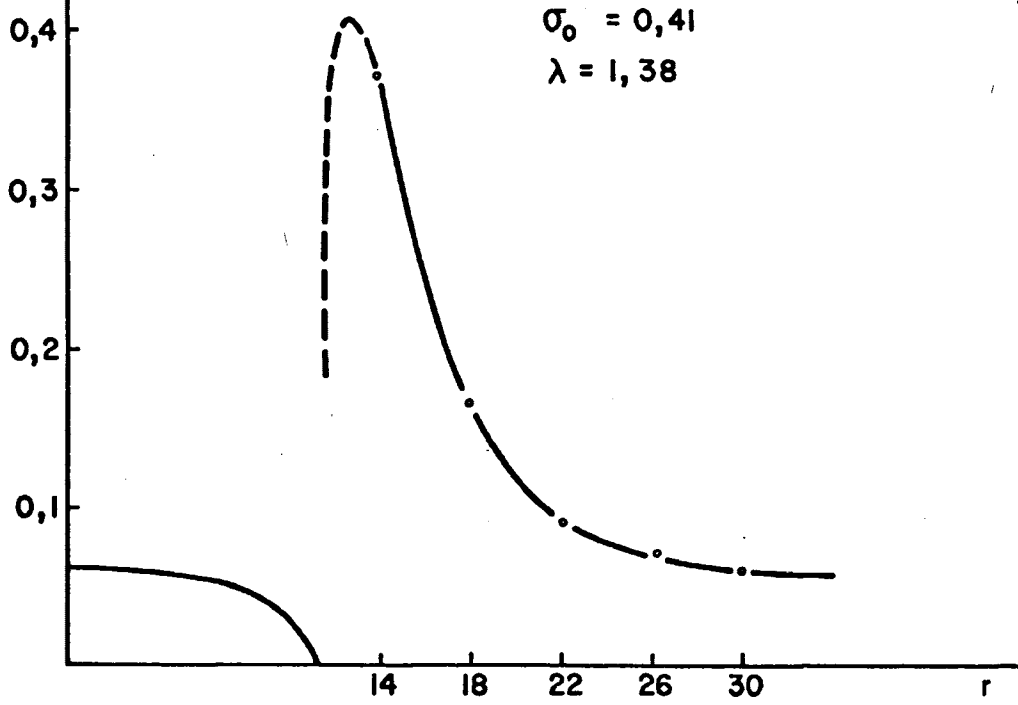


$\sigma_0 = 0,41$					
r	r ₁	r ₂	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_2$	a ₁₀
11	0	22	∞	∞	-317,63
14	3	25	0,372	0,772	-514,50
18	7	29	0,169	0,555	-850,50
22	11	33	0,093	0,501	-1270,5
26	15	37	0,076	0,458	-1774,5
30	19	41	0,058	0,441	-2362,5
34	23	45	0,041	0,437	-3034,5

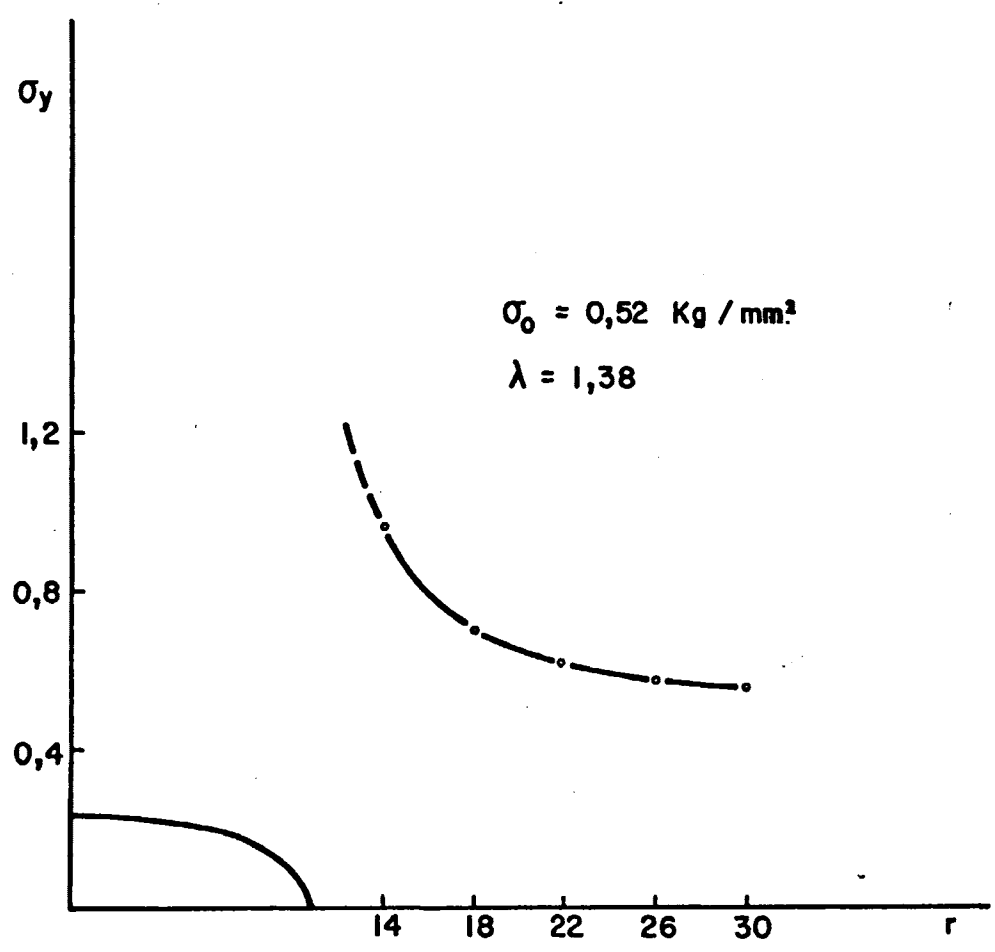
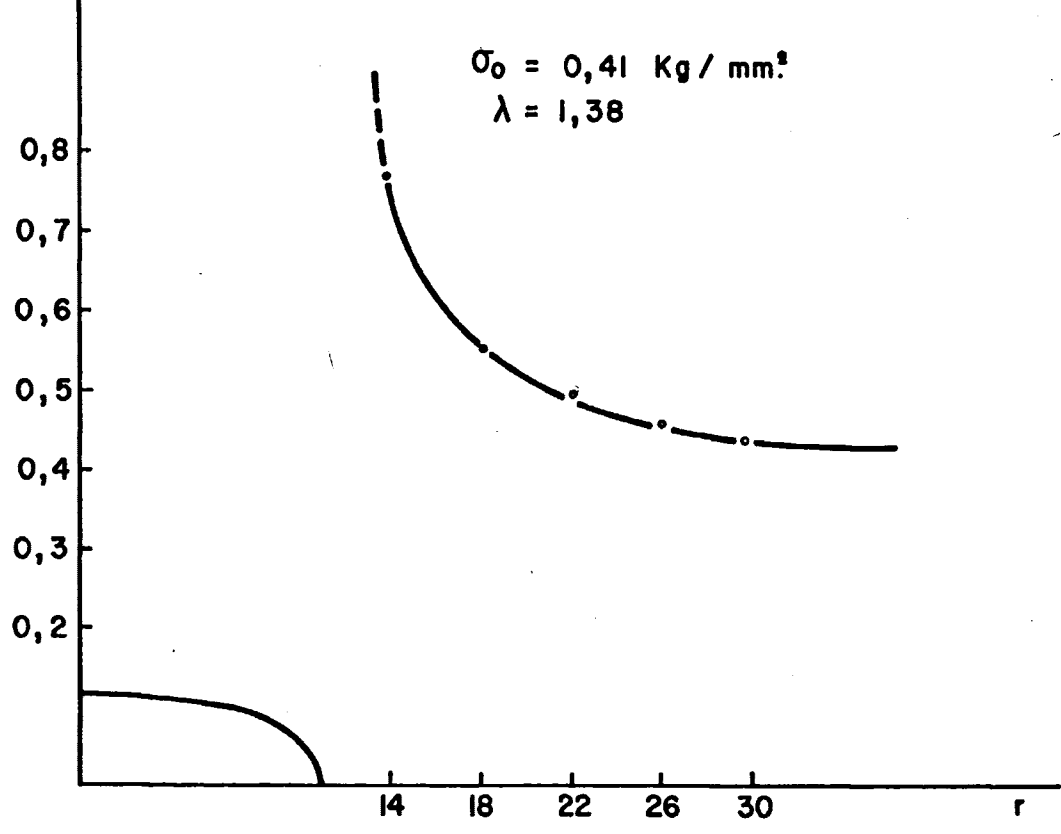
Tabla XLVII

$\sigma_0 = 0,52$					
r	r ₁	r ₂	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	a ₁₀
11	0	22	∞	∞	-317,63
14	3	25	0,472	0,979	-514,50
18	7	29	0,215	0,703	-850,50
22	11	33	0,118	0,636	-1270,5
26	15	37	0,096	0,580	-1774,5
30	19	41	0,074	0,559	-2362,5
34	23	45	0,052	0,554	-3034,5

Tabla XLVIII



Figs. 67 y 68.- Variación de la tensión principal 1, a medida que nos separamos del contorno elíptico.



Figs. 69 y 70.- Variación de la tensión principal 2, a medida que nos separamos del contorno elíptico.

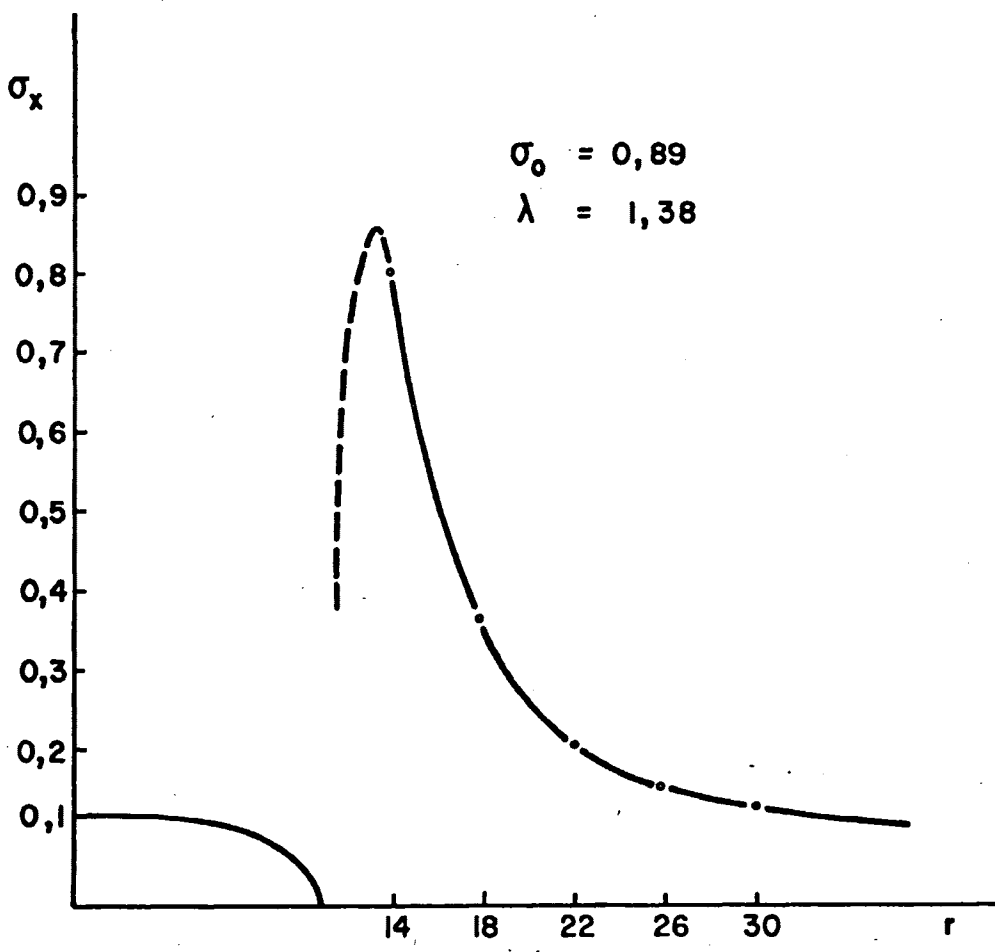
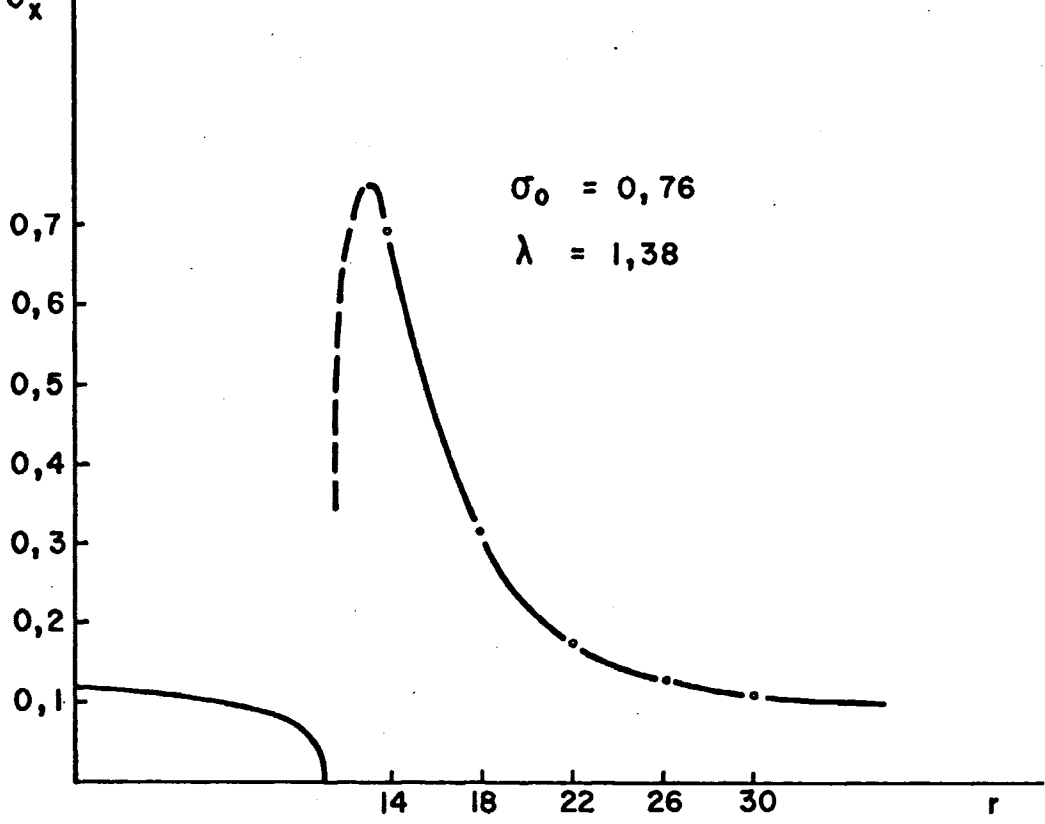


$\sigma_0 = 0,76$					
r	r_1	r_2	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	a_{10}
11	0	22	∞	∞	-317,63
14	3	25	0,690	1,431	-514,50
18	7	29	0,314	1,028	-850,50
22	11	33	0,172	0,929	-1270,50
26	15	37	0,141	0,848	-1774,50
30	19	41	0,108	0,818	-2362,50
34	23	45	0,076	0,810	-3034,50

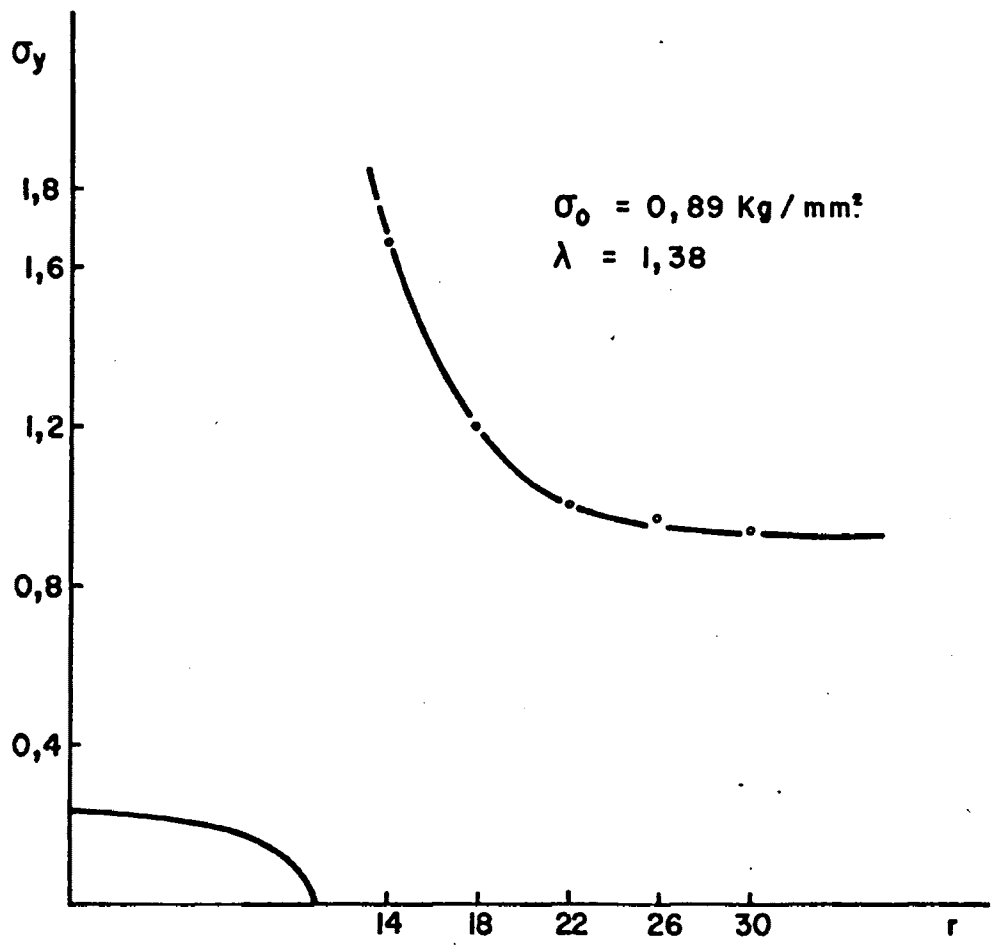
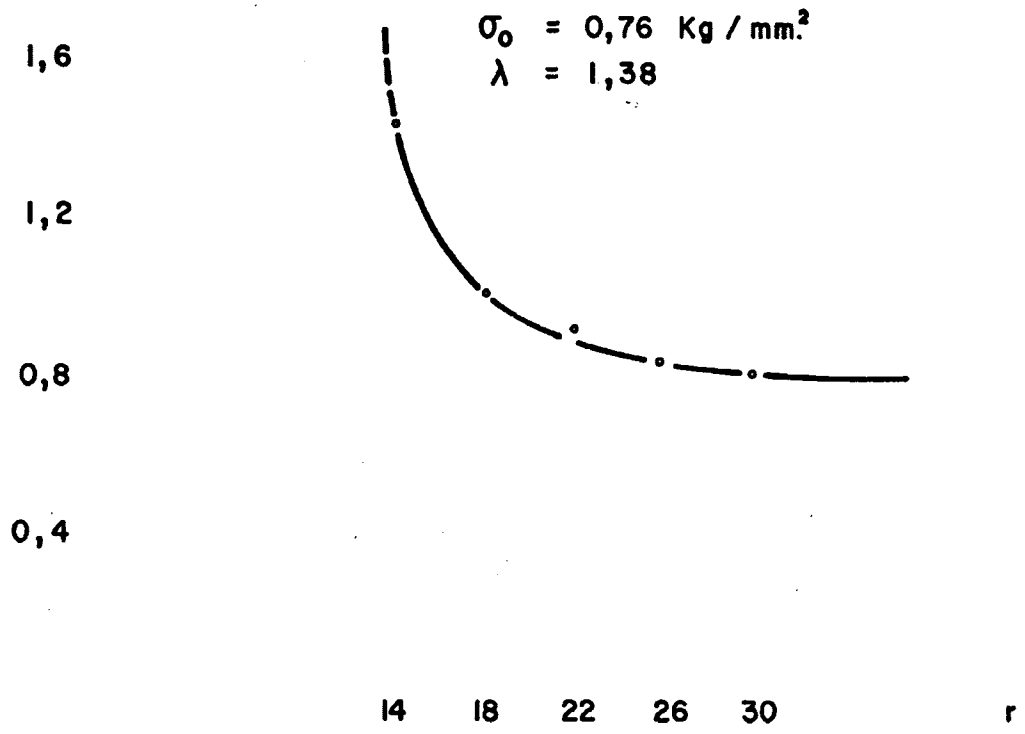
Table XLIX

$\sigma_0 = 0,89$					
r	r_1	r_2	$\sigma_x = \sigma_2$	$\sigma_y = \sigma_1$	a_{10}
11	0	22	∞	∞	-317,63
14	3	25	0,808	1,676	-514,50
18	7	29	0,367	1,204	-850,50
22	11	33	0,202	1,088	-1270,50
26	15	37	0,165	0,993	-1774,50
30	19	41	0,126	0,957	-2362,50
34	23	45	0,089	0,948	-3034,50

Table L



Figs. 71 y 72.- Variación de la tensión principal 1, a medida que nos separamos del contorno elíptico.



Figs. 73 y 74.- Variación de la tensión principal 2, a medida que nos separamos del contorno elíptico.



3.2.4.- ESTADOS DE TENSION EN PUNTOS QUE ESTAN SOBRE EL CONTORNO DEL
ORIFICIO ELIPTICO.

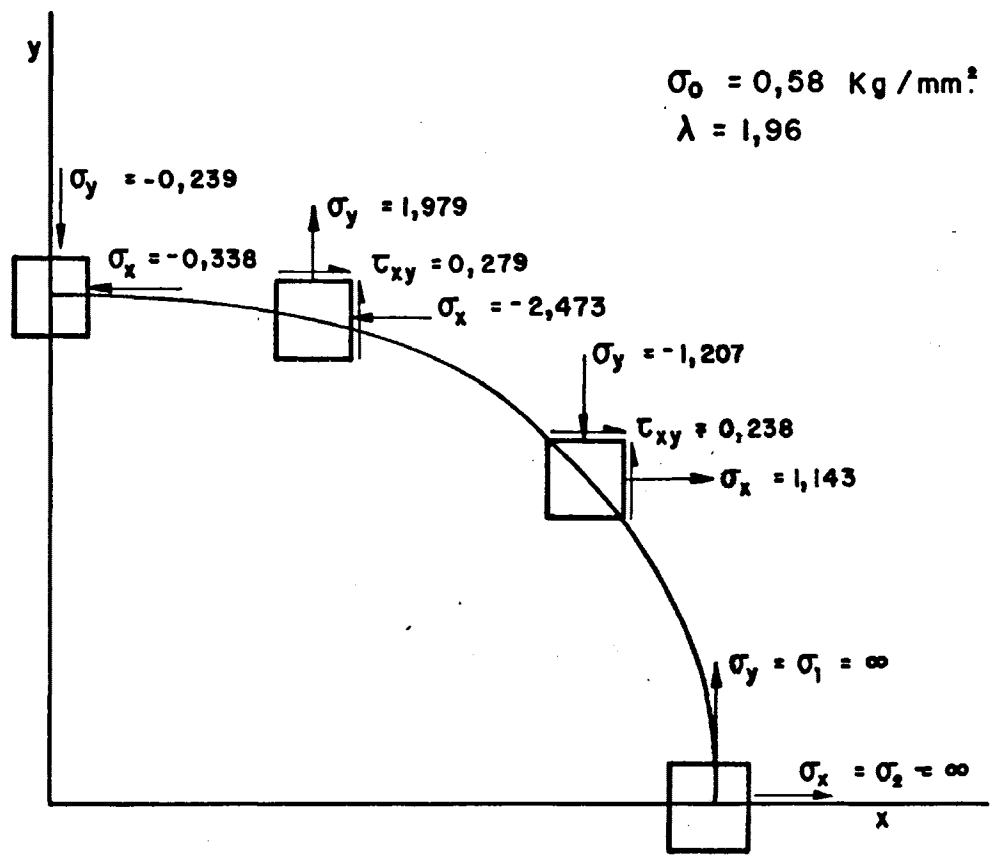
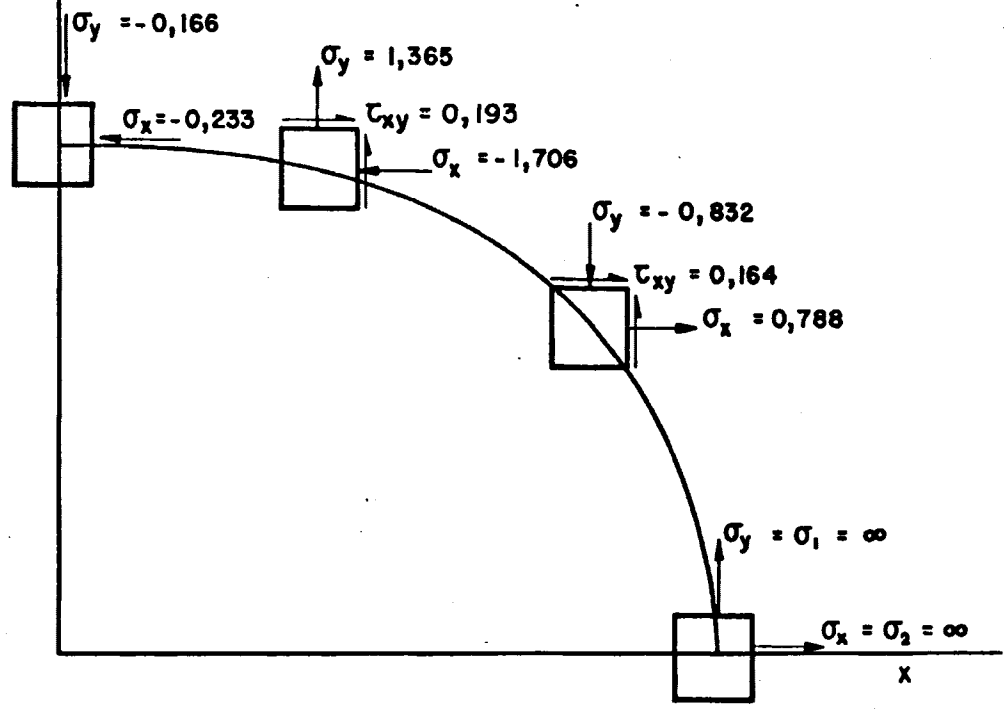
$\sigma_0 = 0,40$									
r	r ₁	r ₂	θ	θ_1	θ_2	σ_x	σ_y	τ_{xy}	a_{10}
9,96	5,54	20,24	30	115,5	14,3	0,788	- 0,832	0,164	-13635
11	0	22	0	0	0	∞	∞	0	-16632
8,51	9,99	16,95	60	132,4	25,8	-1,706	1,365	0,193	-995,4
8	13,6	13,6	90	143,9	36,1	-0,233	-0,165	0	-879,7

Tabla LI

$\sigma_0 = 0,58$									
r	r ₁	r ₂	θ	θ_1	θ_2	σ_x	σ_y	τ_{xy}	a_{10}
11	0	22	0	0	0	∞	∞	0	-16632
9,96	5,54	20,2	30	115,5	14,29	1,143	- 1,207	0,238	-13635
8,51	9,99	16,95	60	132,4	25,78	-2,473	1,979	0,279	-995,4
8	13,6	13,6	90	143,9	36,03	-0,338	- 0,239	0	-879,7

Tabla LII

$\lambda = 1,96$



Figs. 75 y 76.- Cálculo de los estados de tensión en puntos que están sobre el contorno del orificio elíptico.

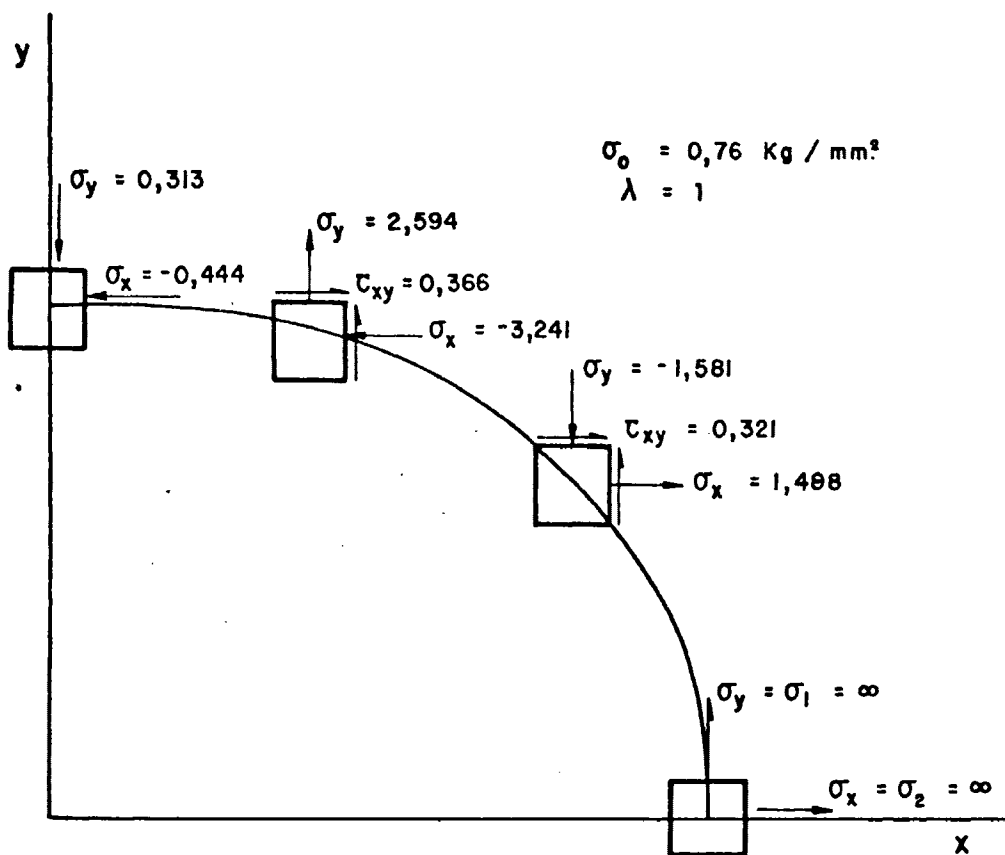
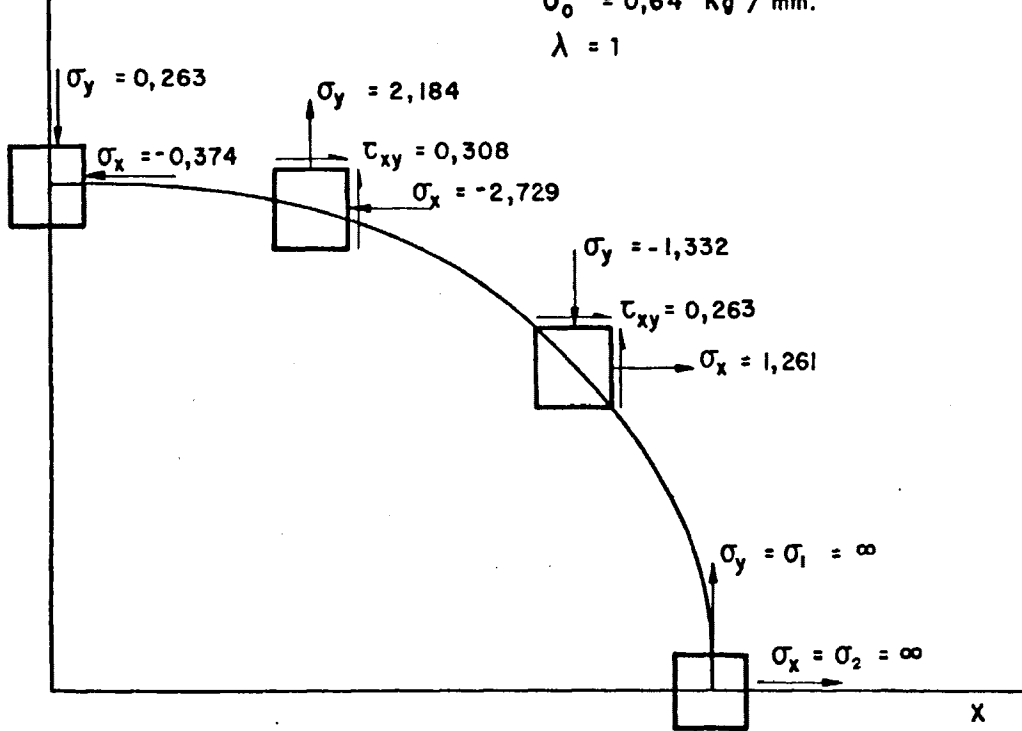


$\sigma_0 = 0,64$									
r	r ₁	r ₂	θ	θ_1	θ_2	σ_x	σ_y	τ_{xy}	a ₁₀
11	0	22	0	0	0	∞	∞	0	-1663,2
9,96	5,54	20,2	30	115,5	14,29	1,261	-1,332	0,263	-1363,5
8,51	9,99	16,95	60	132,4	25,78	-2,729	2,184	0,308	-995,4
8	13,6	13,6	90	143,9	36,03	-0,374	-0,264	0	-879,7

Tabla LIII

$\sigma_0 = 0,76$									
r	r ₁	r ₂	θ	θ_1	θ_2	σ_x	σ_y	τ_{xy}	a ₁₀
11	0	22	0	0	0	∞	∞	0	-1663,2
9,96	5,54	20,24	30	115,5	14,29	1,498	-1,581	0,312	-1363,5
8,51	9,99	16,95	60	132,4	25,78	-3,241	2,594	0,366	-995,4
8	13,6	13,6	90	143,9	36,03	-0,444	-0,313	0	-879,7

Tabla LIV



Figs. 77 y 78.- Cálculo de los estados de tensión en puntos que están sobre el contorno del orificio elíptico.

3.3.- PLACA CON UNA GRIETA ORIENTADA TRANSVERSALMENTE A LA DIRECCION DE APLICACION DE LA CARGA.

De los tres modelos que se estudian para estado de tensión uniaxiales con diferentes tipos de defectos, este último tiene la máxima importancia a la hora del estudio de la rotura frágil en un material ya que, la concentración de tensiones en los vértices de la grieta es muy alta.

Las funciones de tensión para este caso particular, han sido calculadas anteriormente a partir de las funciones de tensión del modelo con orificio elíptico, considerando el semieje mayor (b) como nulo, según se dan en las ecuaciones (25) y (26), y que son:

$$\phi = \sigma_0 a(e^{\xi} - 3e^{-\xi})/8 \quad (63)$$

$$\psi = \sigma_0 a(\operatorname{sen} h 2\xi - 2)/4\operatorname{sen} h \xi \quad (64)$$

donde:

ϕ y ψ , son las funciones de tensión .

ξ es una variable compleja de la forma $\alpha + i\beta$, siendo α y β dos coordenadas elípticas.

σ_0 es la tensión aplicada al contorno.



a , es la semilongitud de grieta.

Las ecuaciones (63) y (64), se pueden dar en coordenadas polares sin mas que tener en cuenta que:

$$Z = x + iy = re^{i\theta} = a \cdot \cos h \xi$$

con lo que se llega a las ecuaciones siguientes:

$$\phi = \sigma_0 (2(z^2 - a^2)^{1/2} - z)/4 \quad (65)$$

$$\psi = \sigma_0 (z - \frac{a^2}{(z^2 - a^2)^{1/2}}) / 2 \quad (66)$$

teniendo en cuenta que:

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2(\bar{z}\phi'' + \psi') \quad (67)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re } \phi' \quad (68)$$

donde:

$$\phi' = \sigma_0 \left(\frac{2z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right) / 4$$

$$\phi'' = -\sigma_0 \left(\frac{a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right) / 2$$

$$\psi' = \sigma_0 \left(1 + \frac{a^2 z}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right) / 2$$

si llevamos estas expresiones a las ecuaciones (67) y (68), se encuentran inmediatamente:

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = \sigma_0 \left[\frac{a^2 r}{(r_1 r_2)^{3/2}} (e^{i(\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2))} - \right. \\ \left. - e^{-i(\theta + \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2))}) + 1 \right] \end{aligned}$$

en esta última ecuación, separando las partes real e imaginaria, tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x = \sigma_0 \left\{ \frac{a^2 r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[\cos(\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos(\theta + \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) \right] + 1 \right\} \\ \tau_{xy} = \frac{a^2 r}{2(r_1 r_2)^{3/2}} \left[\sin(\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) + \sin(\theta + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)) \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_o \left[\frac{2r}{(r_1 r_2)^{1/2}} \cos(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)) - 1 \right]$$

con la primera y la tercera de las ecuaciones anteriores, y también con la segunda de ellas, se deduce inmediatamente, denominando a toda, K_I :

$$\sigma_x = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - \sigma_o \quad (69)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (70)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\frac{a^2}{r_1 r_2} \operatorname{sen} \theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (71)$$

donde:

$$K_I = \sigma_o \sqrt{a}$$

Si en las ecuaciones (69), (70) y (71), hacemos:

$$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = \alpha$$

$$\frac{r}{(ar_1 r_2)^{1/2}} = A$$

$$\frac{a^2}{(r_1 r_2)} = B$$

quedará:

$$\sigma_x = AK_I [\cos (\theta - \alpha) - B.\text{sen } \theta.\text{sen } 3\alpha] \quad (72)$$

$$\sigma_y = AK_I [\cos (\theta - \alpha) + B.\text{sen } \theta.\text{sen } 3\alpha] \quad (73)$$

$$\tau_{xy} = AK_I (B.\text{sen } \theta.\cos 3\alpha) \quad (74)$$

y haciendo:

$$C = A.B$$

queda en definitiva:

$$\sigma_x = K_I [A.\cos (\theta - \alpha) - C.\text{sen } \theta.\text{sen } 3\alpha] \quad (75)$$

$$\sigma_y = K_I [A.\cos (\theta - \alpha) + C.\text{sen } \theta.\text{sen } 3\alpha] \quad (76)$$

$$\tau_{xy} = K_I .C.\text{sen } \theta.\cos 3\alpha \quad (77)$$



Las ecuaciones (75), (76) y (77) nos permiten calcular la expresión para la cisión máxima, la cual nos permitirá confirmar los resultados experimentales, y que viene dada por:

$$\tau_m = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad 1/2$$

si en esta última ecuación sustituimos las ecuaciones (75), (76) y (77) obtendremos para la cisión máxima, la ecuación siguiente:

$$\tau_m = \frac{\sigma_0}{2} \left[4 \cdot \frac{a^4 r^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin^2 \theta + \frac{4a^2 r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \sin \theta \cdot \sin \frac{3}{2} \cdot (\theta_1 + \theta_2) + 1 \right]^{1/2}$$

para que esta última ecuación sea fácilmente representable, tendremos, que llegar a una expresión en forma polinómica:

Si llamamos a:

$$\frac{1}{4a^2 r} \left(\left(\frac{2\tau_m}{\sigma_0} \right)^2 - 1 \right) = a_1$$

$$a^2 r = a_2$$

y

$$x = \text{sen}^2 \theta$$

la ecuación anterior quedará de la forma:

$$a_1 - \frac{a_2 x}{(r_1 r_2)^3} = \frac{1}{(r_1 r_2)^{3/2}} \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{sen} \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \quad (78)$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (78), tenemos:

$$2a_1^2 + \frac{2a_2^2 x^2}{(r_1 r_2)^6} - \frac{(2(2a_1 a_2 + 1) - 1)x}{(r_1 r_2)^3} = - \frac{x}{(r_1 r_2)^3} \cdot \cos 3(\theta_1 + \theta_2)$$

llamando a:

$$2(2a_1 a_2 + 1) - 1 = a_3$$

la ecuación anterior quedará.

$$2a_1^2 + \frac{2a_2^2 x^2}{(r_1 r_2)^6} - \frac{a_3 x}{(r_1 r_2)^3} = - \frac{x}{(r_1 r_2)^3} \cdot \cos 3(\theta_1 + \theta_2)$$

desarrollando el $\cos 3(\theta_1 + \theta_2)$, resulta:



$$\cos 3(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{(r_1 r_2)^3} \left\{ (r^2 \cos^2 \theta - a^2) [(r \cos \theta - a)^2 - 3r^2 x] [(r \cos \theta + a)^2 - 3r^2 x] - r^2 x [3(r \cos \theta - a)^2 - r^2 x] [3(r \cos \theta + a)^2 - r^2 x] \right\}$$

que puesto en la ecuación anterior, quedará:

$$2a_1^2 + \frac{2a_2^2 x^2}{(r_1 r_2)^6} - \frac{a_3 x}{(r_1 r_2)^3} = - \frac{x}{(r_1 r_2)^6} \left\{ (r^2 - a^2) [(r^2 - a^2)^2 + 16r^4 x^2 - (8r^4 + 4r^2 a^2)x] - r^2 x [10(r^2 - a^2) + 32r^4 x^2 - (32r^4 - 8r^2 a^2)x] \right\} \quad (79)$$

llamando a:

$$\begin{aligned} r^2 - a^2 &= a_4 \\ 16r^4 &= a_5 \\ -(8r^4 + 4r^2 a^2) &= a_6 \\ -(32r^4 - 8r^2 a^2) &= a_7 \end{aligned}$$

que puestos en la ecuación (79), queda:

$$2a_1^2 + \frac{2a_2^2 x^2}{(r_1 r_2)^6} - \frac{a_3 x}{(r_1 r_2)^3} = - \frac{x}{(r_1 r_2)^6} \left\{ a_4 (a_4^2 + a_5 x^2 + a_6 x) - r^2 x (10a_4^2 + 2a_5 x^2 + a_7 x) \right\} \quad (80)$$

operando en la ecuación (80), se llega a:

$$2a_1^2 (r_1 r_2)^6 - a_3 (r_1 r_2)^3 x = 2a_5 r^2 x^4 - (a_4 a_5 - a_7 r^2) x^3 - (a_4 a_6 -$$



$$- 10a_4^2 r^2 + 2a_2^2)x^2 - a_4^3 x \quad (81)$$

si llamamos a:

$$2a_5 r^2 = a_8$$

$$-(a_4 a_5 - a_7 r^2) = a_9$$

$$-(a_4 a_6 - 10a_4^2 r^2 + 2a_2^2) = a_{10}$$

que llevados a la ecuación (81), se obtiene:

$$2a_1^2 (r_1 r_2)^6 - a_3 (r_1 r_2)^3 x = a_8 x^4 + a_9 x^3 + a_{10} x^2 - a_4^3 x \quad (82)$$

si desarrollamos ahora el término $(r_1 r_2)^6$, se llega a:

$$(r_1 r_2)^6 = (a_4^2 + 4r^2 a^2 x)^3 = a_4^6 + 12a_4^4 r^2 a^2 x + 48a_4^2 r^4 a^4 x^2 + 64r^6 a^6 x^3$$

que sustituida en la ecuación (82), resulta:

$$a_{11} x^3 + a_{12} x^2 + a_{13} x + a_{14} - a_3 (r_1 r_2)^3 x = a_8 x^4 + a_9 x^3 + a_{10} x^2 - a_4^3 x \quad (83)$$

donde hemos llamado:

$$2a_1^2 a_4^6 = a_{14}$$

$$24a_1^2 a_4^4 r^2 a^2 = a_{13}$$

$$96a_1^2 a_4^2 r^4 a^4 = a_{12}$$



$$128a_1^2 r_1^6 r_2^6 = a_{11}$$

reduciendo términos en la ecuación (83), resulta:

$$-a_3(r_1 r_2)^3 x = a_8 x^4 + (a_9 - a_{11})x^3 + (a_{10} - a_{12})x^2 - (a_4^3 + a_{13})x - a_{14} \quad (84)$$

y si llamamos a:

$$a_9 - a_{11} = a_{15}$$

$$a_{10} - a_{12} = a_{16}$$

$$-(a_4^3 + a_{13}) = a_{17}$$

la ecuación (84), queda:

$$-a_3(r_1 r_2)^3 x = a_8 x^4 + a_{15} x^3 + a_{16} x^2 + a_{17} x - a_{14} \quad (85)$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (85), se obtiene:

$$a_3^2 (r_1 r_2)^6 x^2 = a_8^2 x^8 + 2a_8 a_{15} x^7 + (2a_8 a_{16} + a_{15}^2) x^6 + (2a_{17} a_8 + 2a_{15} a_{16}) x^5 + (2a_{17} a_{15} - 2a_8 a_{14} + a_{16}^2) x^4 + (2a_{16} a_{17} - 2a_{14} a_{15}) x^3 + (a_{17}^2 - 2a_{14} a_{16}) x^2 - 2a_{17} a_{14} x + a_{14}^2 \quad (86)$$

si llamamos a:

$$2a_8 a_{15} = a_{18}$$

$$(2a_8 a_{16} + a_{15}^2) = a_{19}$$



$$(2a_{17}a_8 + 2a_{15}a_{16}) = a_{20}$$

$$(2a_{17}a_{15} - 2a_8a_{14} + a_{16}^2) = a_{21}$$

$$(2a_{16}a_{17} - 2a_{14}a_{15}) = a_{22}$$

$$(a_{17}^2 - 2a_{14}a_{16}) = a_{23}$$

$$-2a_{17}a_{14} = a_{24}$$

que llevados a la ecuación (86), se obtiene:

$$\begin{aligned} a_3^2(r_1 r_2)^6 x^2 &= a_8^2 x^8 + a_{18} x^7 + a_{19} x^6 + a_{20} x^5 + a_{21} x^4 + a_{22} x^3 + \\ &+ a_{23} x^2 + a_{24} x + a_{14}^2 \end{aligned} \quad (87)$$

si en esta ecuación (87), sustituimos el valor ya obtenido para $---$
 $(r_1 r_2)^6$, y operamos, se deduce:

$$\begin{aligned} a_8^2 x^8 + a_{18} x^7 + a_{19} x^6 + a_{25} x^5 + a_{26} x^4 + a_{27} x^3 + a_{28} x^2 + a_{24} x + \\ + a_{14}^2 = 0 \end{aligned} \quad (88)$$

dónde hemos llamado a:

$$a_{20} - 64a_3^2 r^6 a^6 = a_{25}$$

$$a_{21} - 48a_3^2 a_4^2 r^4 a^4 = a_{26}$$

$$a_{22} - 12a_3^2 a_4^2 r^2 a^2 = a_{27}$$

$$a_{23} - a_3^2 a_4^6 = a_{28}$$



la ecuación (88), que es un polinomio de grado ocho, nos va a permitir representar las líneas de cisión máxima, teniendo en cuenta que, $x = \text{sen}^2 \theta$.



3.3.1.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA PARA UN MODELO QUE CONTIENE UNA GRIETA.

Tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a}(b + \sqrt{b^2 + a^2})$				Semilongitud de grieta	
$\sigma_0 = 0,41 \text{ Kg/mm}^2$		$\lambda = 1$				$a = 11$	
n	τ_m	r = 11		r = 14		r = 17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	0	57,31	---	63,89	---	67,86
2	0,311	0	21,02	6,12	27,98	---	---

Tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a}(b + \sqrt{b^2 + a^2})$				Semilongitud de grieta	
$\sigma_0 = 0,41 \text{ Kg/mm}^2$		$\lambda = 1$				$a = 11$	
ñ	τ_m	r = 20		r = 23		r = 26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	71,40	---	75,26	---	80,27

Tensión de contorno		$\lambda = \frac{1}{a}(b + \sqrt{b^2 + a^2})$				Semilongitud de grieta	
$\sigma_0 = 0,41 \text{ Kg/mm}^2$		$\lambda = 1$				$a = 11$	
n	τ_m	r = 29					
		θ_1	θ_2				
1	0,155	---	---				

Tabla LV



$\sigma_0 = 0,52 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$

n	τ_m	r=11		r=14		r=17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	0	64,42	---	71,96	---	77,57
2	0,311	0	31,52	3,82	42,88	8,66	45,92
3	0,466	0	17,03	8,05	25,12	---	---

$\sigma_0 = 0,52 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$

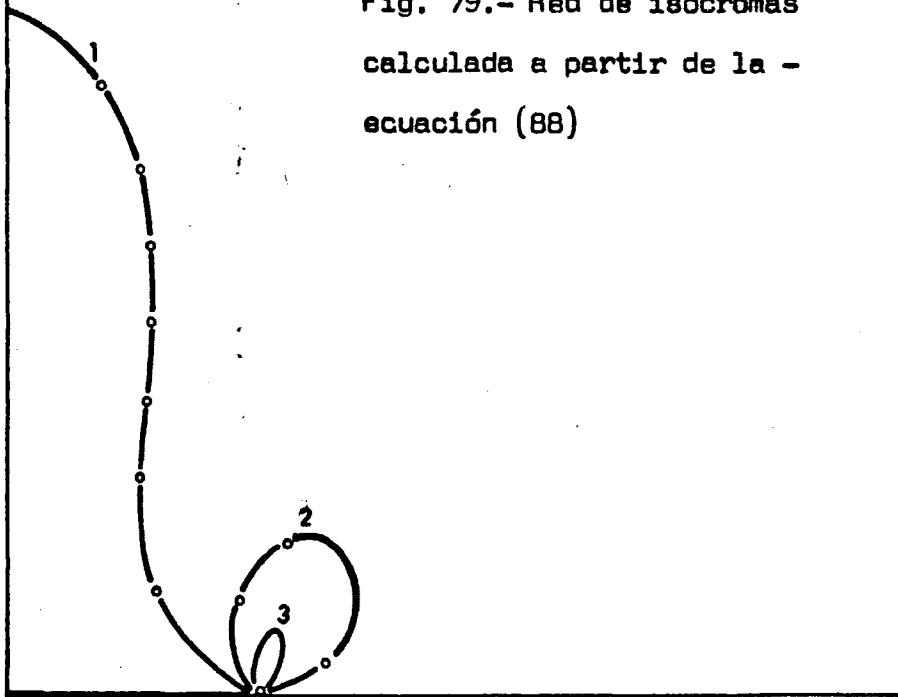
n	τ_m	r=20		r=23		r=26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	87,60	---	---	---	---
2	0,311	13,83	45,01	19,78	42,28	29,91	34,72

Tabla LVI

tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,41 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1$ (Grieta)

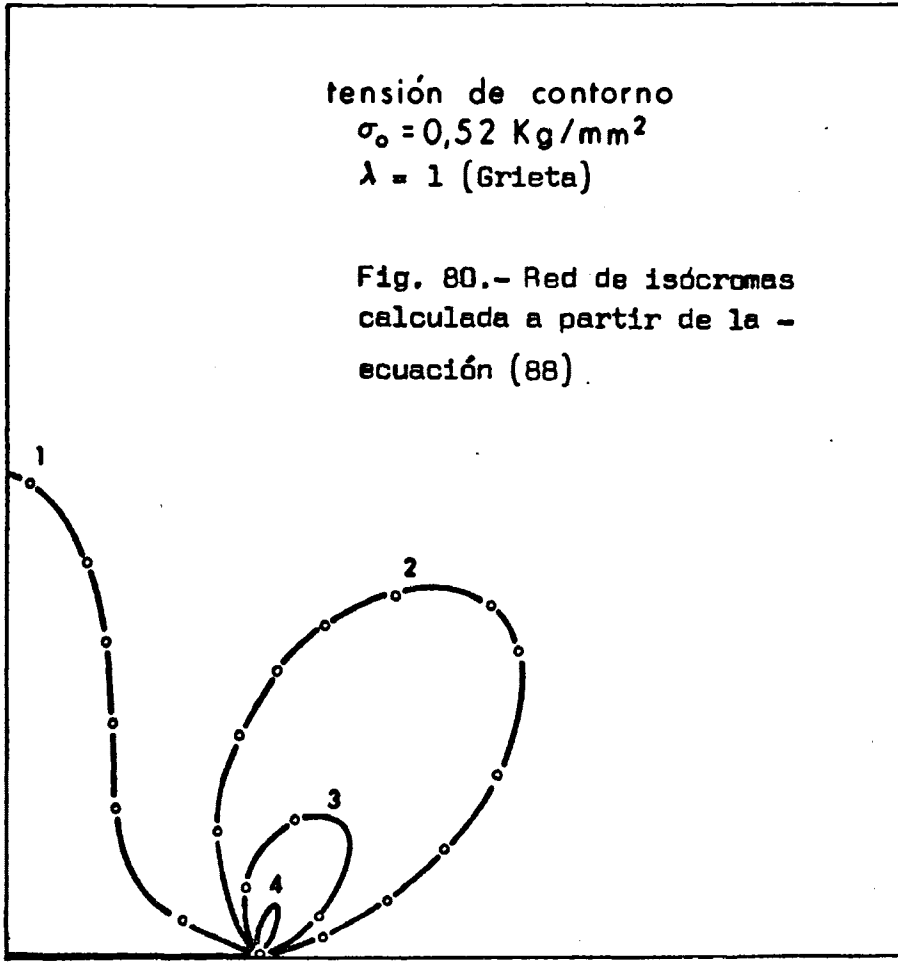


Fig. 79.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (88)



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,52 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1$ (Grieta)

Fig. 80.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (88)





$\sigma_0 = 0,76 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	ϵ_m	r=11		r=14		r=17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	---	80,37	---	86,68	---	---
2	0,311	0	52,83	---	60,98	---	64,60
3	0,466	0	35,17	4,17	43,37	9,56	44,36
4	0,621	0	13,14	9,85	26,27	---	---

$\sigma_0 = 0,76 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	τ_m	r=20		r=23		r=26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	---	67,49	---	70,29	---	73,32
3	0,466	15,52	42,84	23,31	38,51	---	---

$\sigma_0 = 0,76 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	τ_m	r=29		r=32			
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2		
2	0,311	---	76,92	---	81,92		

Tabla LVII



$\sigma_0 = 0,89 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	τ_m	$\theta_1, \theta_2, r=11$		$\theta_1, \theta_2, r=14$		$\theta_1, \theta_2, r=17$	
1	0,155	---	83,21	---	---	---	---
2	0,311	0	59,47	---	66,66	---	71,02
3	0,466	0	37,82	1,73	46,83	3,78	50,66
4	0,621	0	27,44	6,17	36,43	15,69	34,33
5	0,776	0	16,98	13,33	20,07	---	---

$\sigma_0 = 0,89 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	τ_m	$\theta_1, \theta_2, r=20$		$\theta_1, \theta_2, r=23$		$\theta_1, \theta_2, r=26$	
2	0,311	---	75,41	---	81,19	---	---
3	0,466	5,79	54,03	7,73	54,01	9,63	54,45

Tabla LVIII

$\sigma_0 = 0,89 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	τ_m	$\theta_1, \theta_2, r=29$		$\theta_1, \theta_2, r=32$		$\theta_1, \theta_2, r=35$	
3	0,466	11,53	54,04	---	---	---	---

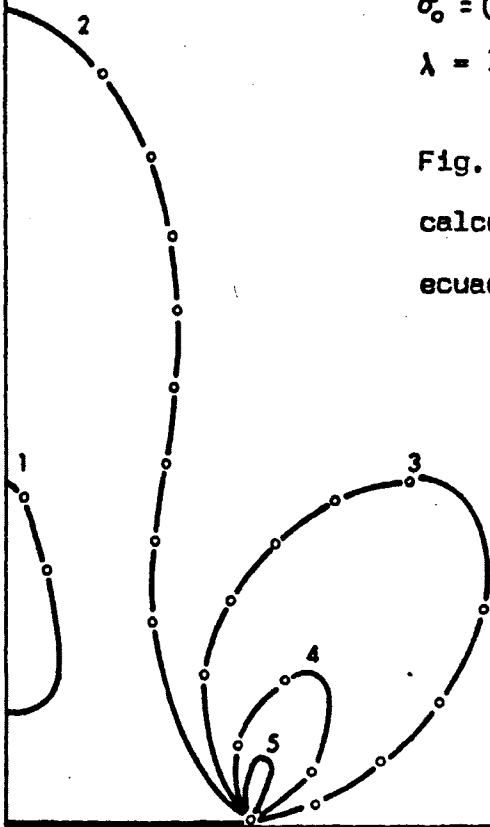
Tabla LVIII

tensión de contorno

$$\sigma_0 = 0,76 \text{ Kg/mm}^2$$

$\lambda = 1$ (Grieta)

Fig. 81.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (88)

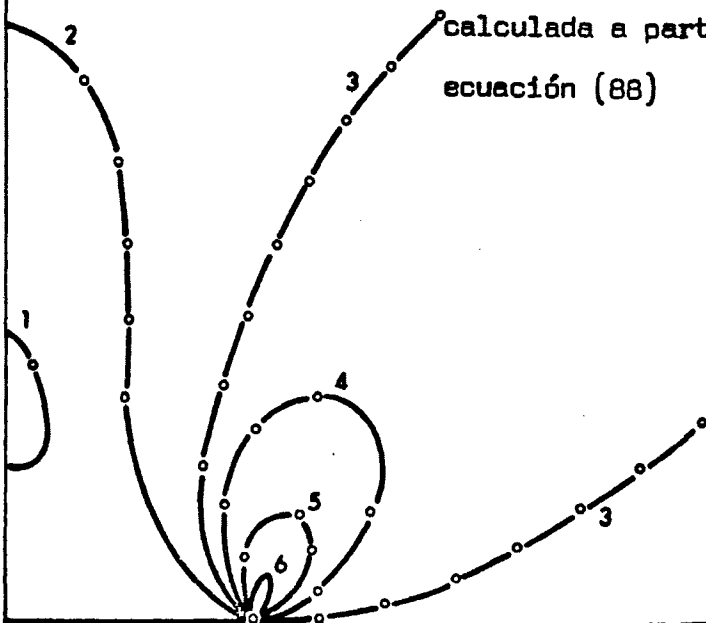


tensión de contorno

$$\sigma_0 = 0,89 \text{ Kg/mm}^2$$

$\lambda = 1$ (Grieta)

Fig. 82.- Red de isócronas
calculada a partir de la
ecuación (88)





$\sigma_0 = 1,18 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	τ_m	r=11		r=14		r=17	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
2	0,311	0	69,86	---	75,97	---	84,03
3	0,466	0	55,02	---	62,31	---	66,08
4	0,621	0	43,98	1,83	50,66	4,01	53,06
5	0,776	0	32,66	5,21	39,78	12,42	39,48
6	0,932	0	18,86	8,80	28,73	---	---

$\sigma_0 = 1,18 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	τ_m	r=20		r=23		r=26	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
3	0,466	---	69,25	---	72,47	---	76,18
4	0,621	6,13	53,99	8,20	54,27	10,24	54,38
5	0,776	25,55	34,24	---	---	---	---

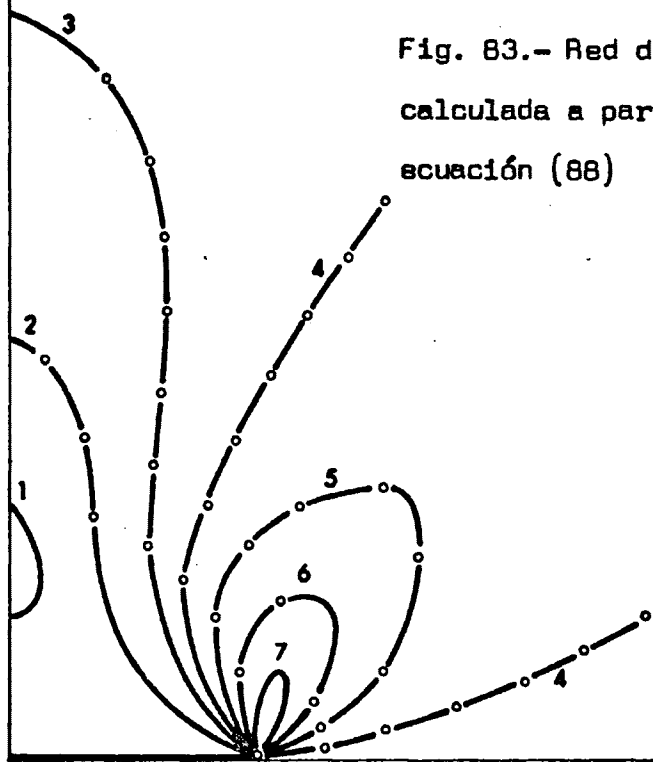
$\sigma_0 = 1,18 \text{ Kg/mm}^2; \lambda = 1$							
n	τ_m	r=29					
		θ_1	θ_2				
3	0,466	---	81,22				
4	0,621	12,28	54,56				

Tabla LIX



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,18 \text{ Kg/mm}^2$
 $\lambda = 1(\text{Grieta})$

Fig. 83.- Red de isócronas
calculada a partir de la -
ecuación (88)



3.3.2.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS SEPARAMOS DEL VERTICE DE LA GRIETA-

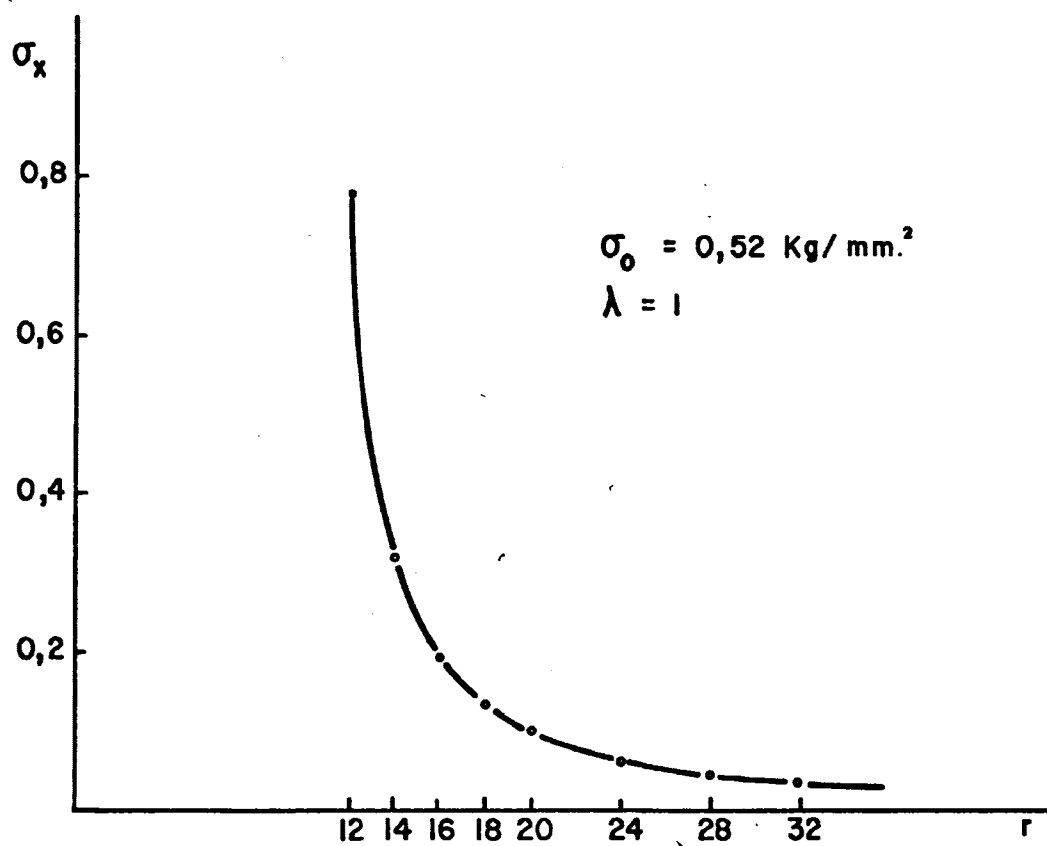
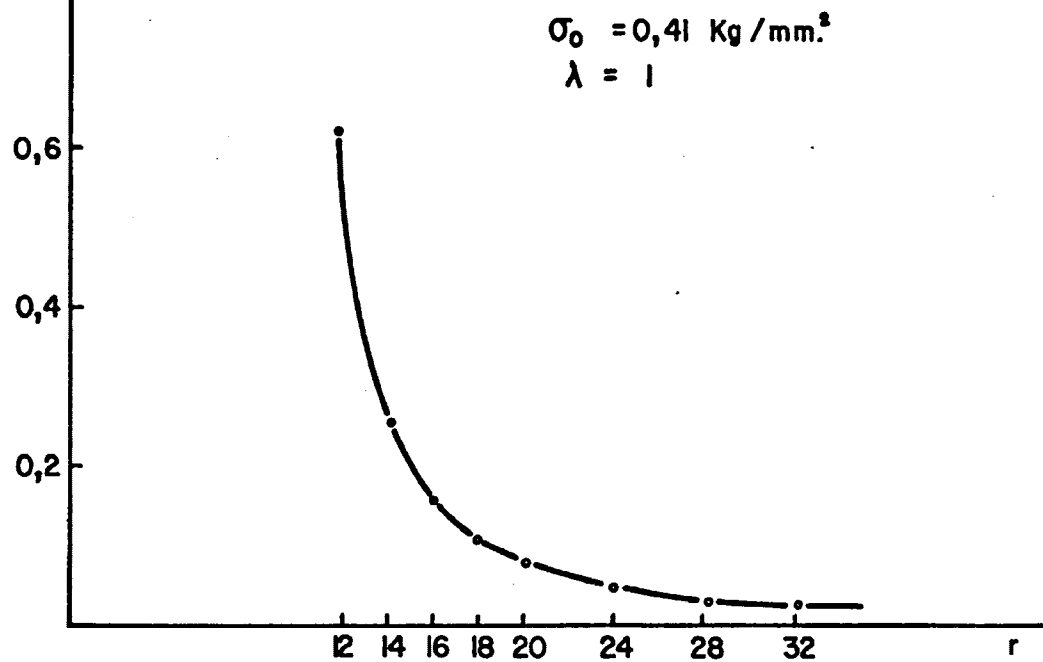


$\sigma_0 = 0,41$					
r	r_1	r_2	σ_x	σ_y	τ_{xy}
11	0	22	∞	∞	0
12	1	23	0,616	1,025	0
14	3	25	0,252	0,663	0
16	5	27	0,155	0,565	0
18	7	29	0,108	0,518	0
20	9	31	0,081	0,491	0
24	13	35	0,051	0,461	0
28	17	39	0,036	0,446	0
32	21	43	0,026	0,437	0

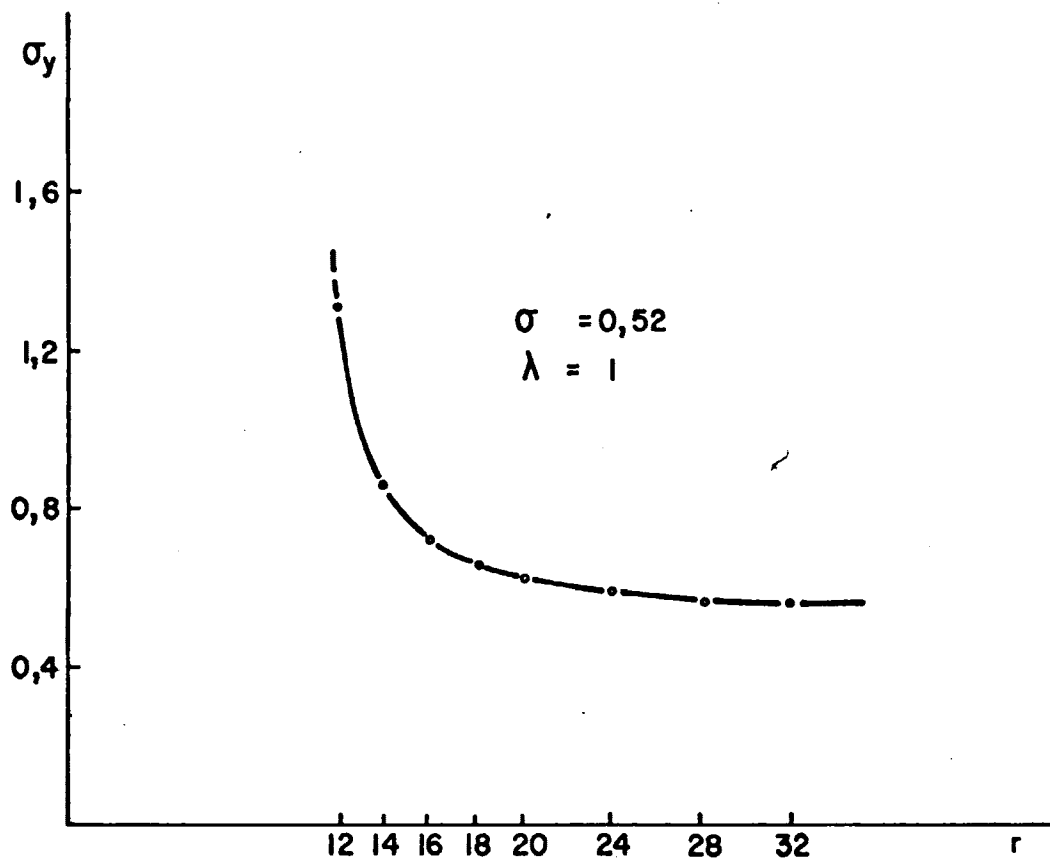
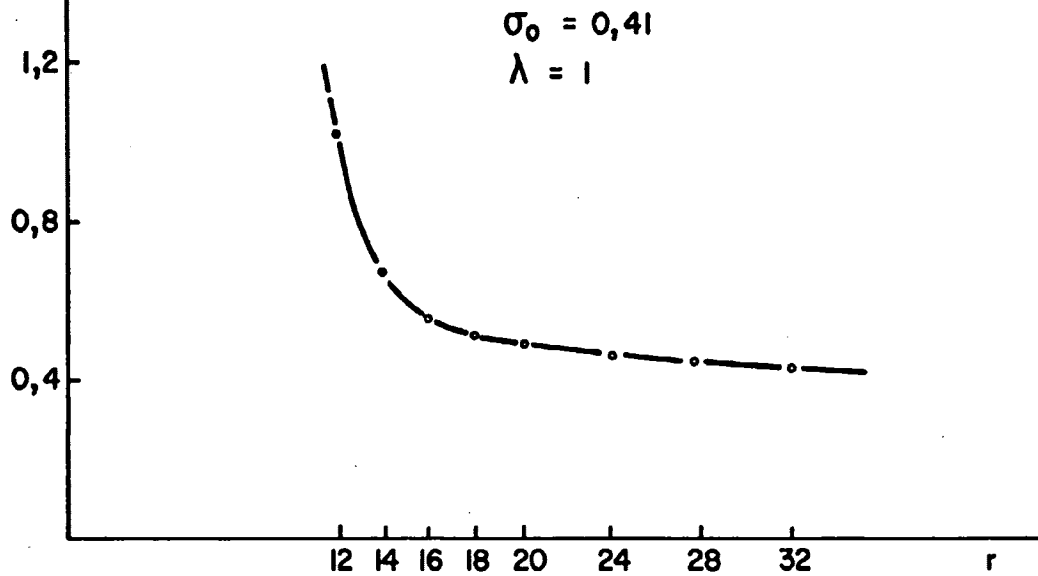
Tabla LX

$\sigma_0 = 0,52$					
r	r_1	r_2	σ_x	σ_y	τ_{xy}
11	0	22	∞	∞	0
12	1	23	0,781	1,301	0
14	3	25	0,321	0,841	0
16	5	27	0,196	0,716	0
18	7	29	0,137	0,657	0
20	9	31	0,103	0,623	0
24	13	35	0,065	0,585	0
28	17	39	0,045	0,565	0
32	21	43	0,034	0,554	0

Tabla LXI



Figs. 84 y 85.- Variación de la tensión principal 1, a medida que nos separamos del vertice de la grieta.



Figs. 86 y 87.- Variación de la tensión principal 2, a medida que nos separamos del vertice de la grieta.

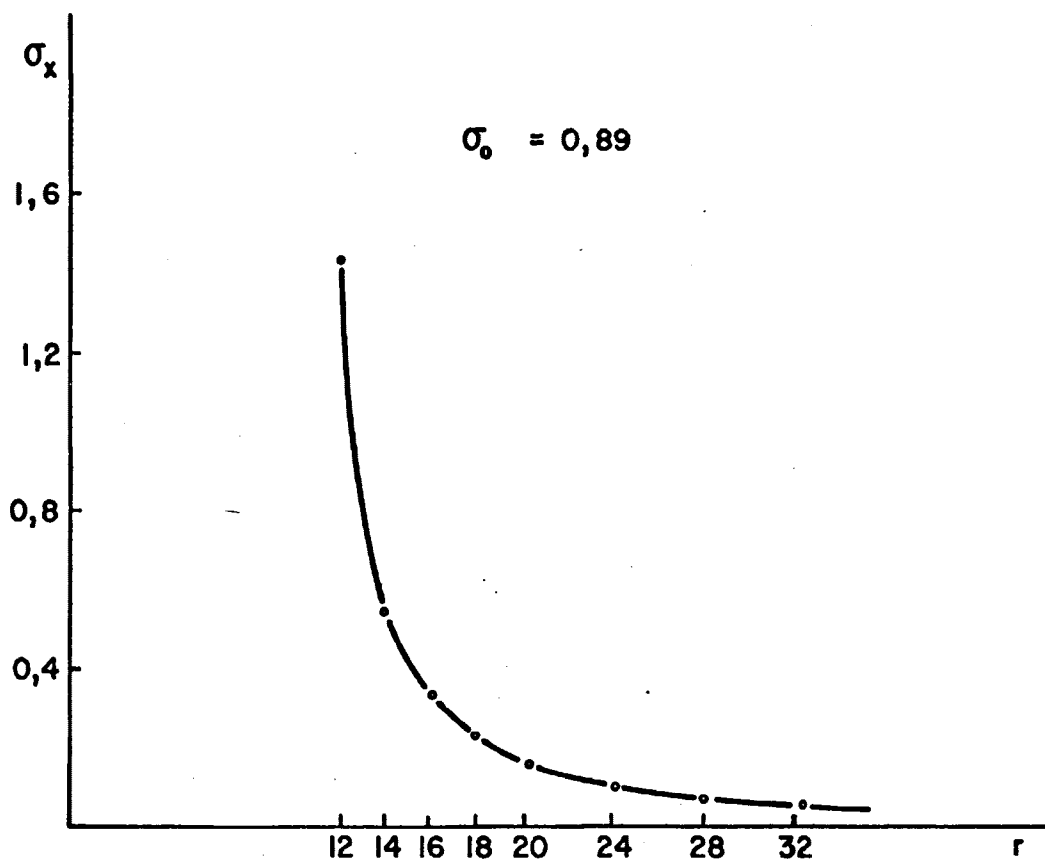
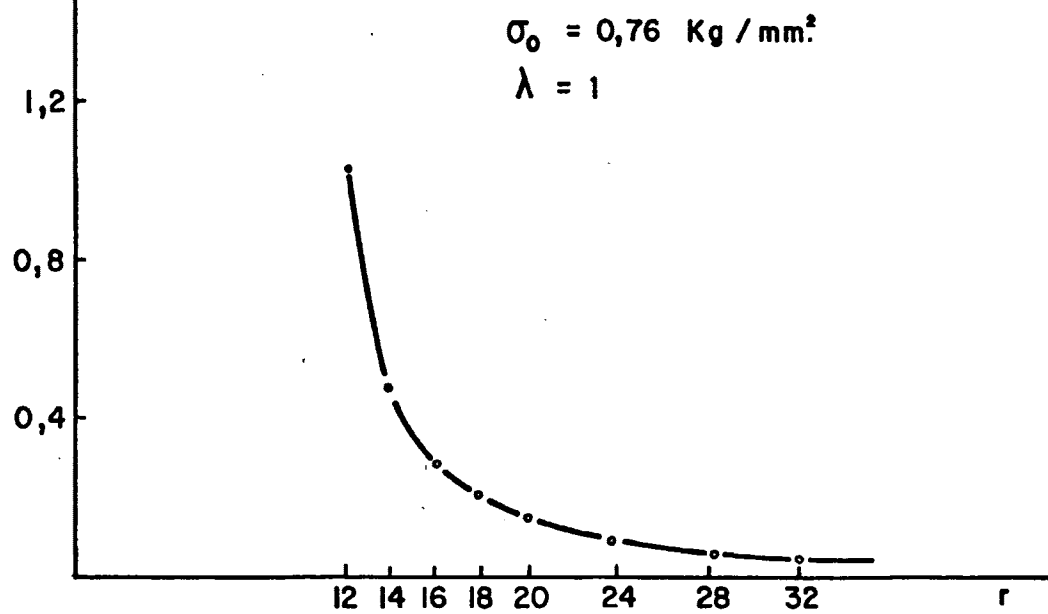


$\sigma_0 = 0,76$					
r	r ₁	r ₂	σ_x	σ_y	τ_{xy}
11	0	22	∞	∞	0
12	1	23	1,142	1,902	0
14	3	25	0,469	1,229	0
16	5	27	0,286	1,046	0
18	7	29	0,200	0,960	0
20	9	31	0,150	0,910	0
24	13	35	0,095	0,855	0
28	17	39	0,066	0,826	0
32	21	43	0,049	0,809	0

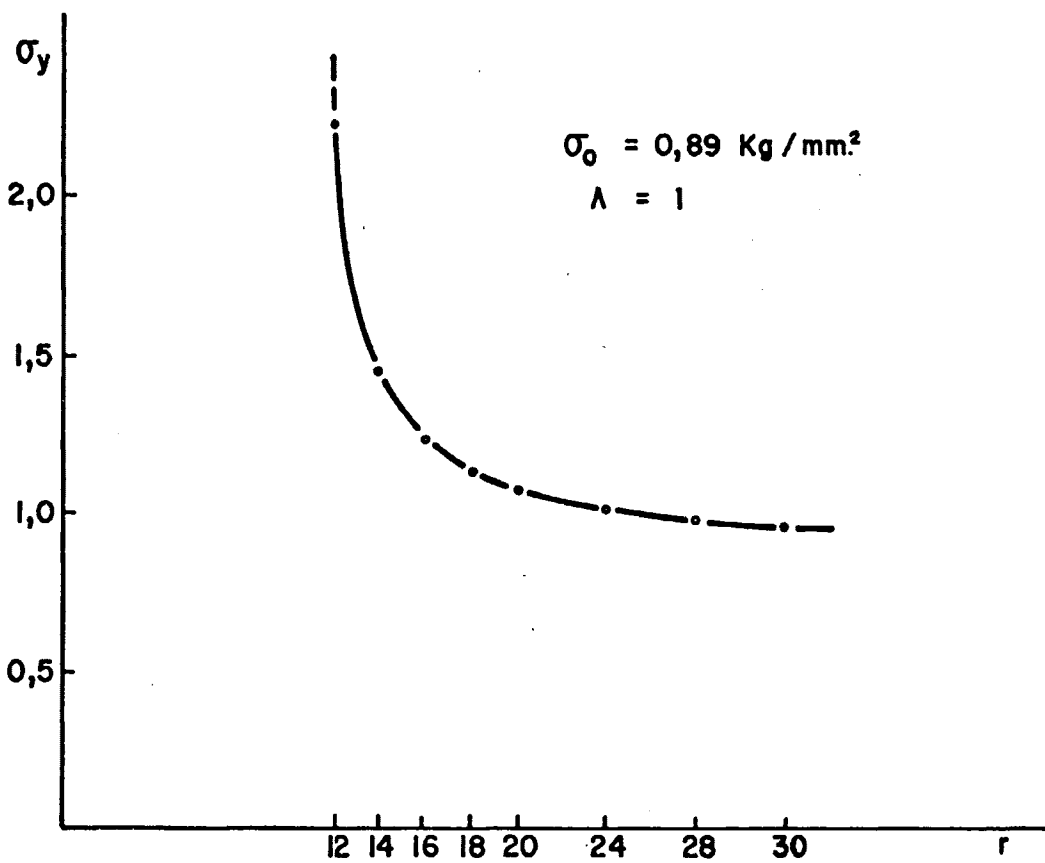
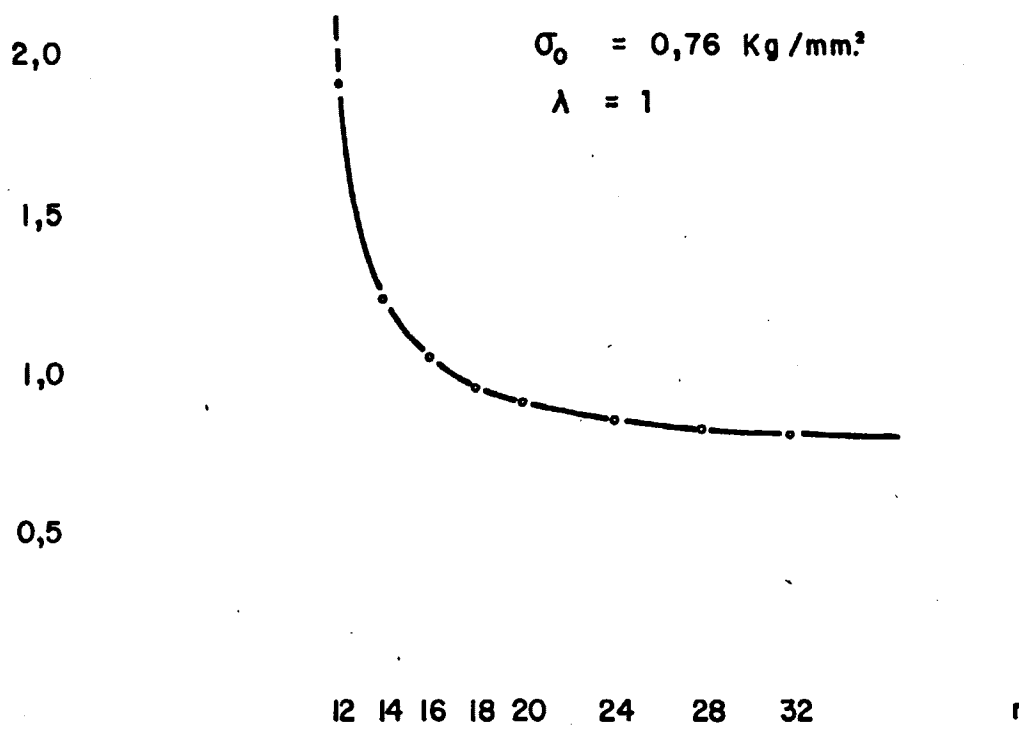
Tabla LXII

$\sigma_0 = 0,89$					
r	r ₁	r ₂	σ_x	σ_y	τ_{xy}
11	0	22	∞	∞	0
12	1	23	1,337	2,227	0
14	3	25	0,549	1,439	0
16	5	27	0,335	1,225	0
18	7	29	0,234	1,124	0
20	9	31	0,176	1,066	0
24	13	35	0,111	1,001	0
28	17	39	0,078	0,968	0
32	21	43	0,058	0,948	0

Tabla LXIII



Figs. 88 y 89.- Variación de la tensión principal 1, a medida que nos separamos del vertice de la grieta.



Figs. 90 y 91.- Variación de la tensión principal 2, a medida que nos separamos del vertice de la grieta.



3.4. PLACA CON UN ORIFICIO CIRCULAR, SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIL.

Conocidas las expresiones que dan el estado de tensión en un punto, para una placa con un orificio circular y sometida a un estado de tracción uniaxial, y que venían dadas por las ecuaciones que a continuación se especifican, y que son:

$$\sigma_x = \sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (89)$$

$$\sigma_y = \sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (90)$$

$$\tau_{xy} = -\sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (91)$$

Pero para una placa con un orificio circular y sometida a tracción biaxial, podemos aplicar el principio de superposición, considerando que actúan dos tensiones uniaxiales independientes y calcular el estado de tensión en un punto para cada una de ellas.

Para una de las tensiones consideradas, el estado de tensión en un punto P (fig.), viene dado por las ecuaciones (89), (90) y (91), pero si consideramos la otra tensión, el estado de tensión en el punto P, vendrá dado por:

$$\sigma'_x = \sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{1}{2} \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \cos 4\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (92)$$

$$\sigma'_y = \sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{3}{2} \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos 4\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] + \sigma_0 \quad (93)$$

$$\tau'_{xy} = -\sigma_0 a^2 r^{-2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 4\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (94)$$

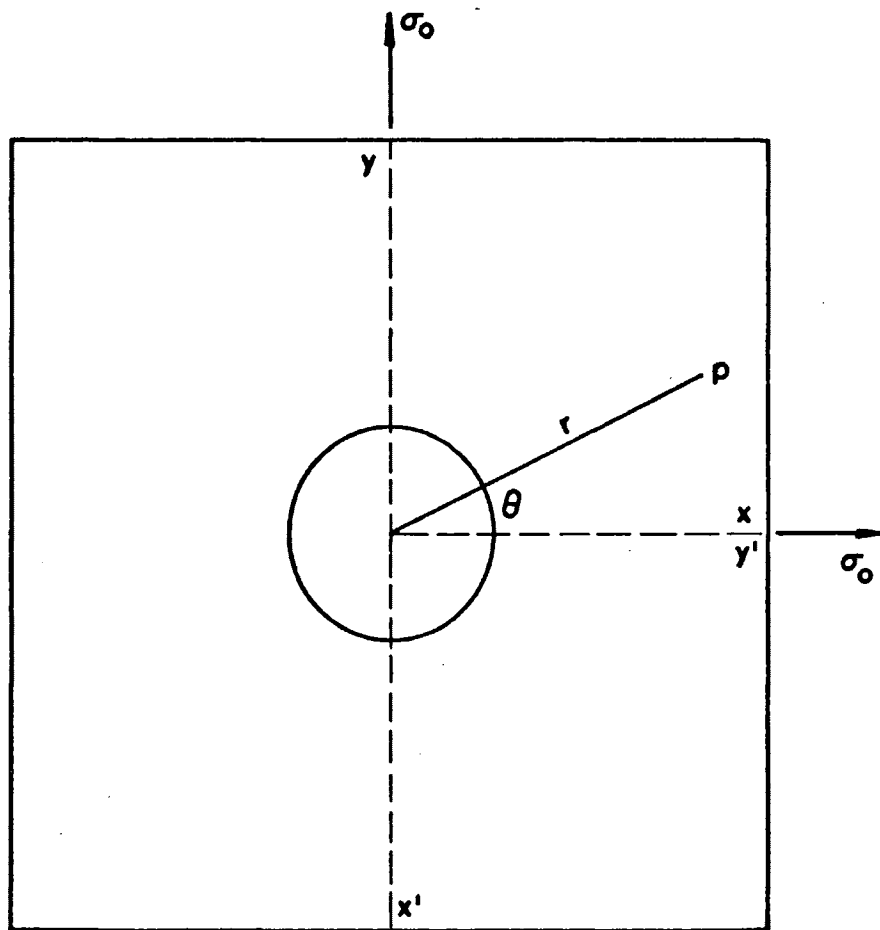


Fig. 92.- Placa con un orificio circular
sometida a un estado de tensión biaxial
en su contorno



Las ecuaciones (92), (93) y (94), se pueden reducir a estas otras:

$$\sigma'_x = \sigma_0 a^2 r^{-2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (95)$$

$$\sigma'_y = \sigma_0 a^2 r^{-2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] + \sigma_0 \quad (96)$$

$$\tau'_{xy} = -\sigma_0 a^2 r^{-2} \left[-\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \left(\frac{3}{2} a^2 r^{-2} - 1 \right) \right] \quad (97)$$

sumando ambos efectos, según el principio de superposición, tendremos -
lo siguiente:

$$\sigma_{x_r} = \sigma_x + \sigma'_y$$

$$\sigma_{y_r} = \sigma'_x + \sigma_y$$

$$\tau_{xy_r} = \tau_{xy} - \tau'_{xy}$$

encontrándose para el estado de tensión en un punto, para el caso de --
una placa plana con un orificio circular y sometida a tracción uniaxial
las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{x_r} = \sigma_0 - \sigma_0 a^2 r^{-2} \cos 2\theta \quad (98)$$

$$\sigma_{y_r} = \sigma_0 + \sigma_0 a^2 r^{-2} \cos 2\theta \quad (99)$$

$$\tau_{xy_r} = -\sigma_0 a^2 r^{-2} \sin 2\theta \quad (100)$$

a partir de estas ecuaciones ya estamos en condiciones de calcular la -
cisión máxima y que como sabemos viene dada por la ecuación:



$$\epsilon_m = \left[\left(\frac{\sigma_{y_T} - \sigma_{x_T}}{2} \right)^2 + \tau_{xy_T}^2 \right]^{1/2} \quad (101)$$

y por tanto calculando:

$$\left(\frac{\sigma_{y_T} - \sigma_{x_T}}{2} \right)^2 = \sigma_0^2 a^4 r^{-4} \cos^2 2\theta \quad (102)$$

$$\tau_{xy_T}^2 = \sigma_0^2 a^4 r^{-4} \sin^2 2\theta \quad (103)$$

por lo que finalmente queda:

$$\epsilon_m = \sigma_0 a^2 r^{-2} \quad (104)$$

que no es más que la ecuación de una circunferencia en coordenadas polares, y que por lo tanto las líneas de cisión máxima (isocromas), no son más que circunferencias concéntricas con el orificio circular, lo que experimentalmente se verá más adelante.



3.4.1. REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA.

$$\sigma_0 = 0,45 \left\{ \begin{array}{l} \tau_{m1} = 0,155 \text{ --- } r = 13,63 \\ \tau_{m2} = 0,311 \text{ --- } r = 9,62 \end{array} \right. \quad \text{Tabla LXIV}$$

$$\sigma_0 = 0,63 \left\{ \begin{array}{l} \tau_{m1} = 0,155 \text{ --- } r = 16,13 \\ \tau_{m2} = 0,311 \text{ --- } r = 11,39 \\ \tau_{m3} = 0,466 \text{ --- } r = 9,30 \\ \tau_{m4} = 0,621 \text{ --- } r = 8,06 \end{array} \right. \quad \text{Tabla LXV}$$

$$\sigma_0 = 0,84 \left\{ \begin{array}{l} \tau_{m1} = 0,155 \text{ --- } r = 18,62 \\ \tau_{m2} = 0,311 \text{ --- } r = 13,15 \\ \tau_{m3} = 0,466 \text{ --- } r = 10,74 \\ \tau_{m4} = 0,621 \text{ --- } r = 9,30 \\ \tau_{m5} = 0,775 \text{ --- } r = 8,33 \end{array} \right. \quad \text{Tabla LXVI}$$

$$\sigma_0 = 1,12 \left\{ \begin{array}{l} \tau_{m1} = 0,155 \text{ --- } r = 21,50 \\ \tau_{m2} = 0,311 \text{ --- } r = 15,18 \\ \tau_{m3} = 0,466 \text{ --- } r = 12,40 \\ \tau_{m4} = 0,621 \text{ --- } r = 10,74 \\ \tau_{m5} = 0,775 \text{ --- } r = 9,62 \\ \tau_{m6} = 0,932 \text{ --- } r = 8,13 \end{array} \right. \quad \text{Tabla LXVII}$$

$$\sigma_0 = 1,28 \left\{ \begin{array}{l} \tau_{m1} = 0,155 \text{ --- } r = 22,99 \\ \tau_{m2} = 0,311 \text{ --- } r = 16,23 \\ \tau_{m3} = 0,466 \text{ --- } r = 13,26 \\ \tau_{m4} = 0,621 \text{ --- } r = 11,49 \\ \tau_{m5} = 0,775 \text{ --- } r = 10,28 \\ \tau_{m6} = 0,932 \text{ --- } r = 9,38 \\ \tau_{m7} = 1,085 \text{ --- } r = 8,69 \\ \tau_{m8} = 1,240 \text{ --- } r = 8,13 \end{array} \right. \quad \text{Tabla LXVIII}$$



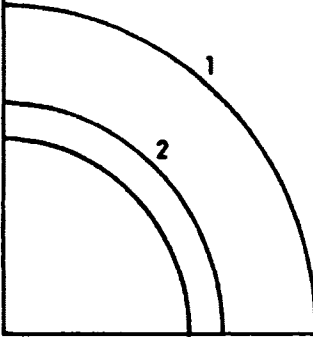
$\sigma_0 = 1,42$	$\xi_{11} = 0,155$	$r = 24,21$
	$\xi_{12} = 0,311$	$r = 17,09$
	$\xi_{13} = 0,466$	$r = 13,97$
	$\xi_{14} = 0,621$	$r = 12,10$
	$\xi_{15} = 0,775$	$r = 10,83$
	$\xi_{16} = 0,932$	$r = 9,87$
	$\xi_{17} = 1,085$	$r = 9,15$
	$\xi_{18} = 1,240$	$r = 8,56$
	$\xi_{19} = 1,395$	$r = 8,07$

Tabla LXIX



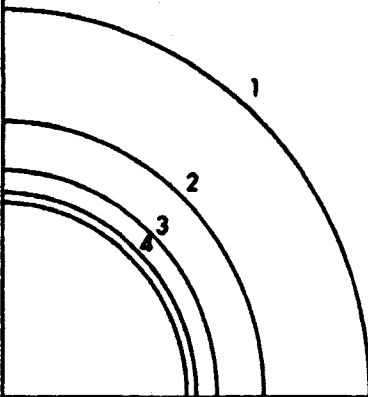
tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,45 \text{ Kg/mm}^2$

Fig.92.- Red de isócronas
calculada a partir de la
ecuación (104).



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,63 \text{ Kg/mm}^2$

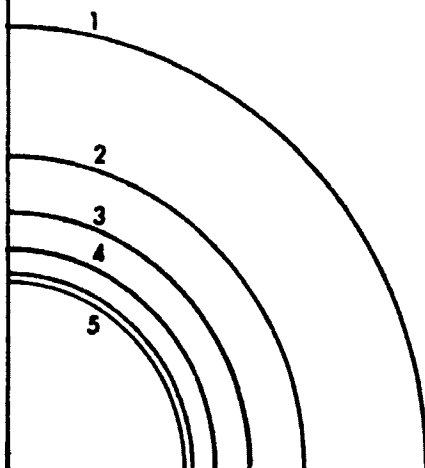
Fig.93.- Red de isócronas
calculada a partir de la
ecuación (104)





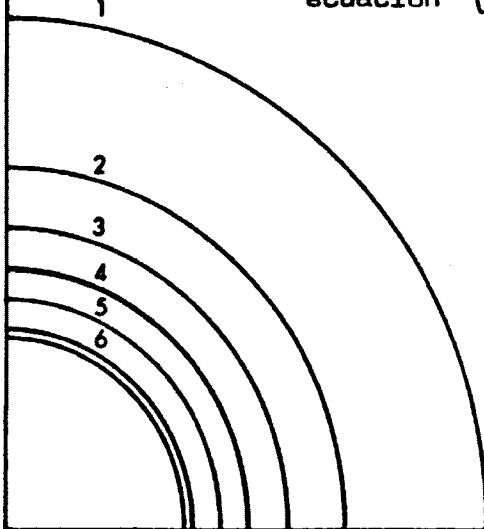
tensión de contorno
 $\sigma_0 = 0,84 \text{ Kg/mm}^2$

Fig.94.- Red de isócronas
calculada a partir de la
ecuación (104)



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,12 \text{ Kg/mm}^2$

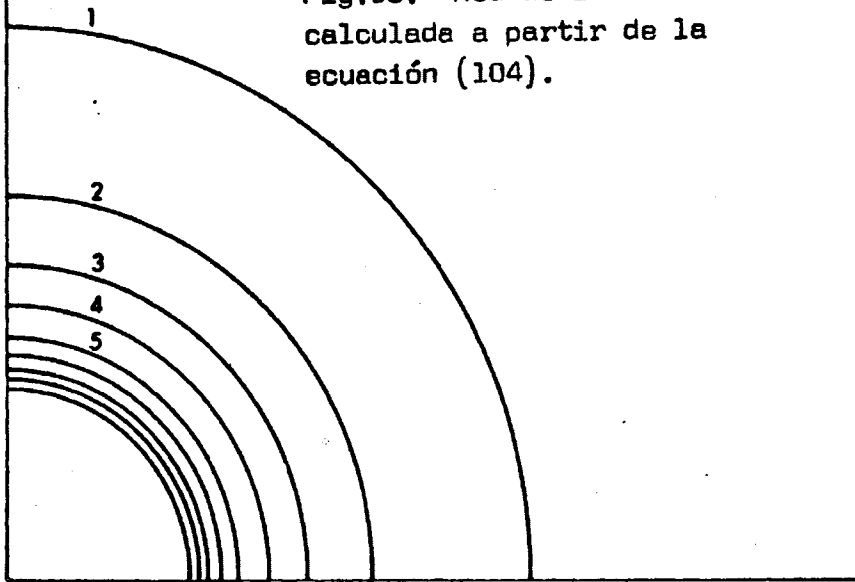
Fig.95.- Red de isócronas
calculada a partir de la
ecuación (104).





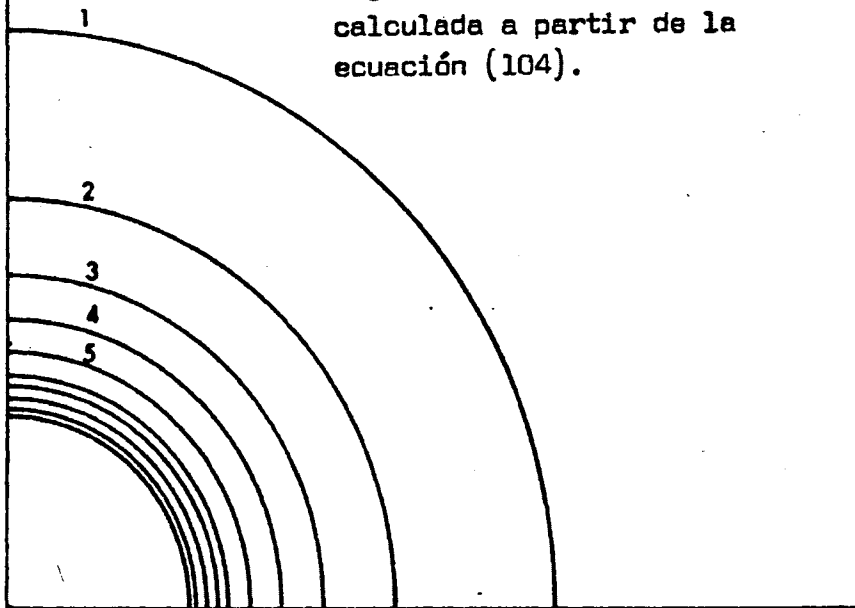
tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,28 \text{ Kg/mm}^2$

Fig.96.- Red de isócronas
calculada a partir de la
ecuación (104).



tensión de contorno
 $\sigma_0 = 1,42 \text{ Kg/mm}^2$

Fig.97.- Red de isócronas
calculada a partir de la
ecuación (104).



3.4.2.- VARIACION DE LAS TENSIONES PRINCIPALES A MEDIDA QUE NOS

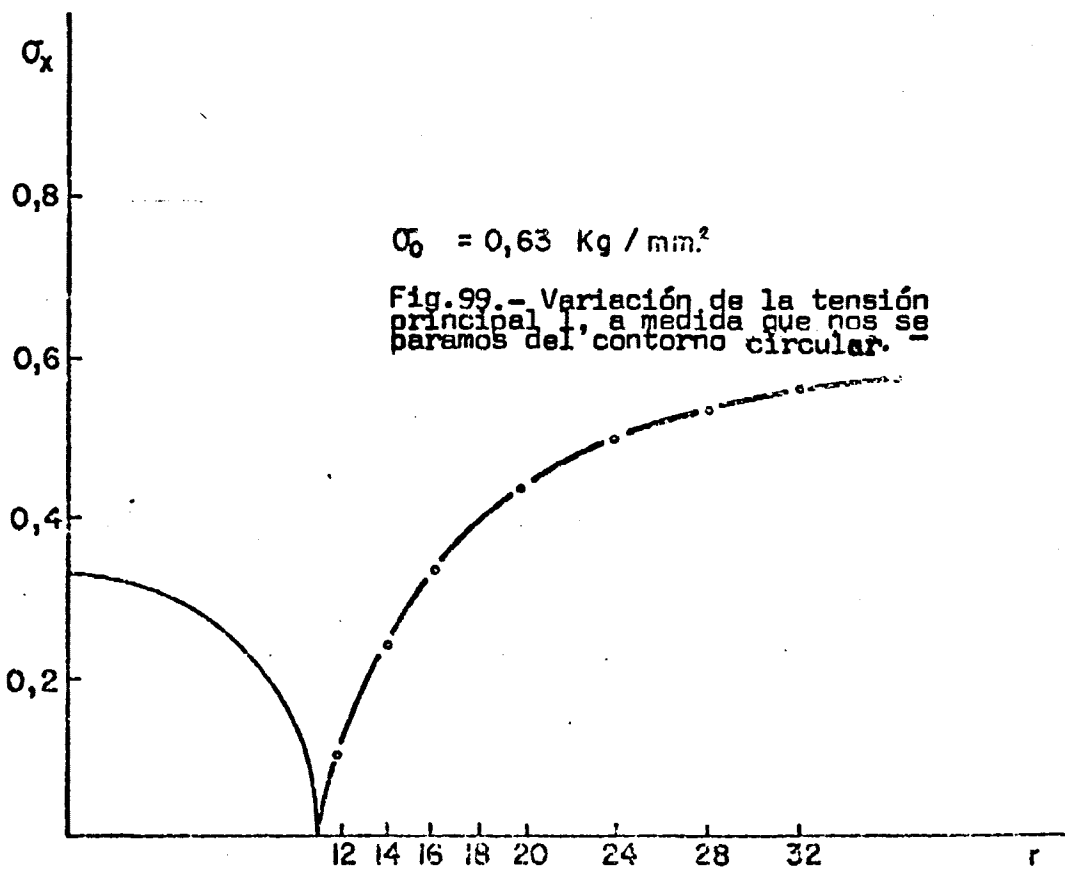
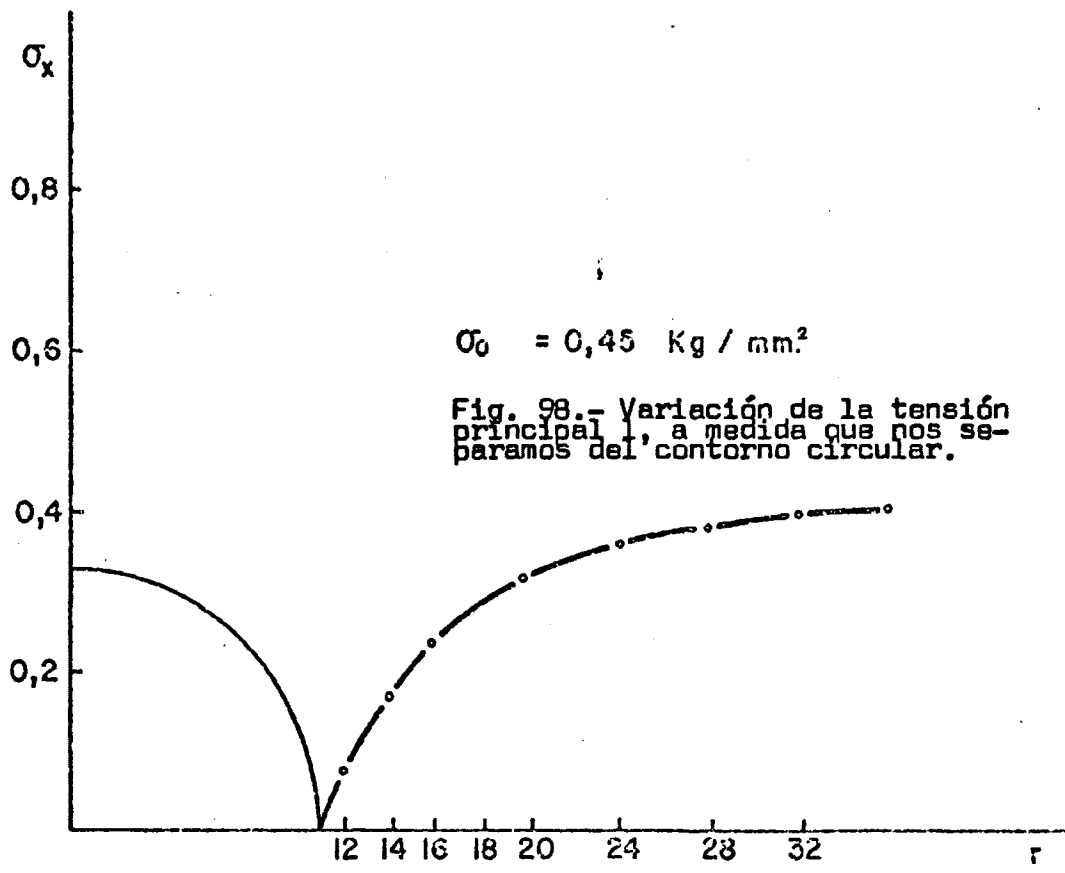
ALEJAMOS DEL CONTORNO DEL ORIFICIO CIRCULAR-

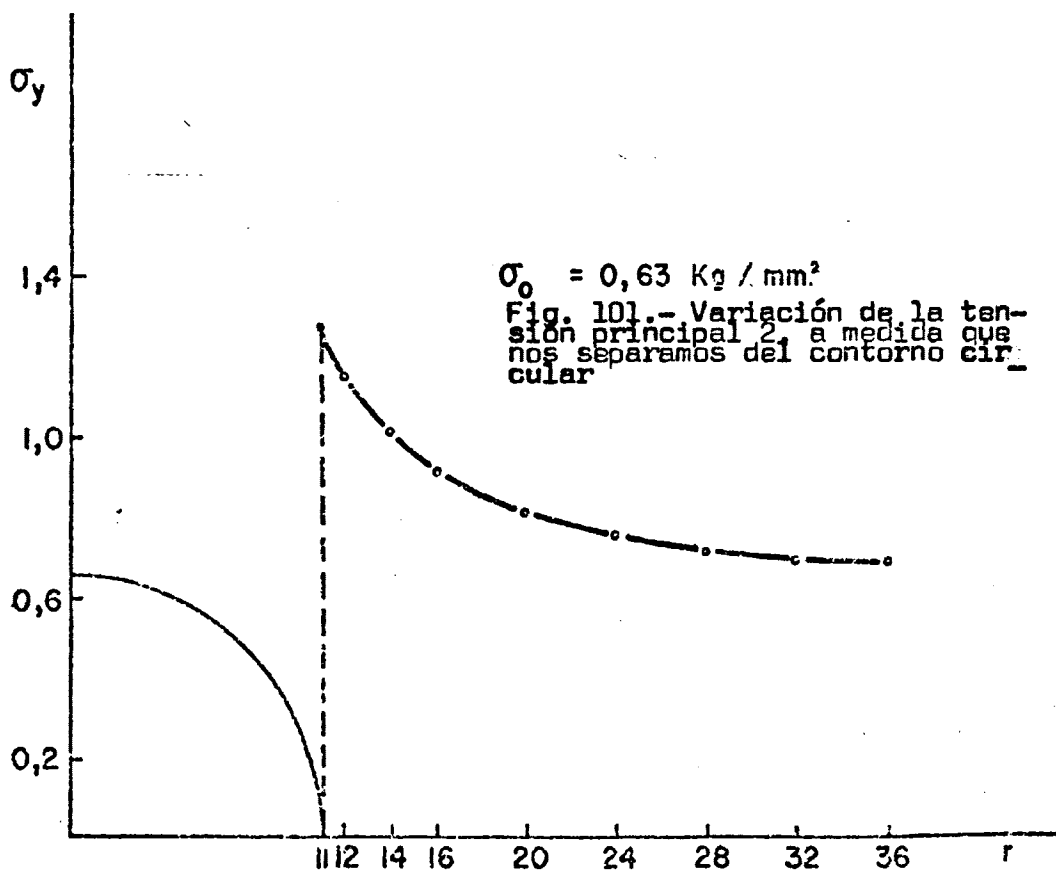
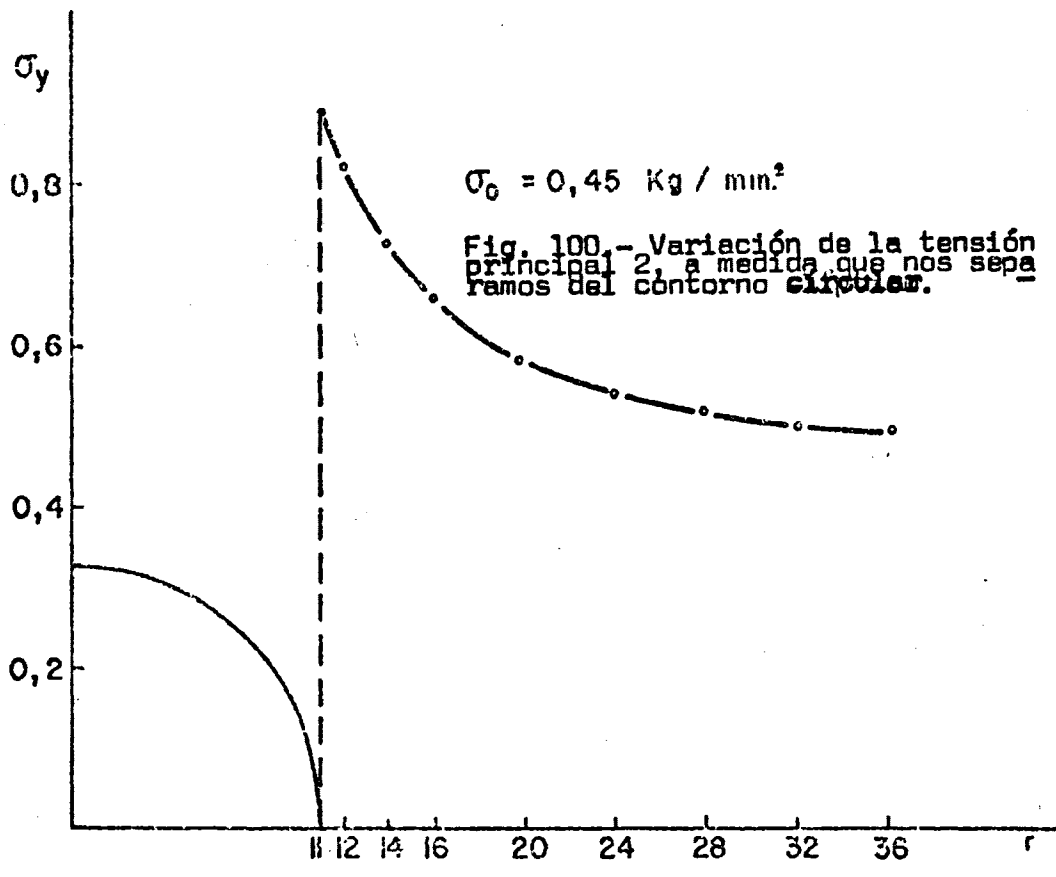
$\sigma_o = 0,45$			
r	σ_x	σ_y	τ_{xy}
11	0	0,900	0
12	0,072	0,828	0
14	0,172	0,728	0
16	0,237	0,663	0
20	0,314	0,586	0
24	0,355	0,545	0
28	0,381	0,519	0
32	0,397	0,503	0
36	0,408	0,492	0

Tabla LXX

$\sigma_o = 0,63$			
r	σ_x	σ_y	τ_{xy}
11	0	1,260	0
12	0,101	1,159	0
14	0,241	1,019	0
16	0,332	0,928	0
20	0,439	0,821	0
24	0,498	0,762	0
28	0,532	0,727	0
32	0,556	0,704	0
36	0,571	0,689	0

Tabla LXXI





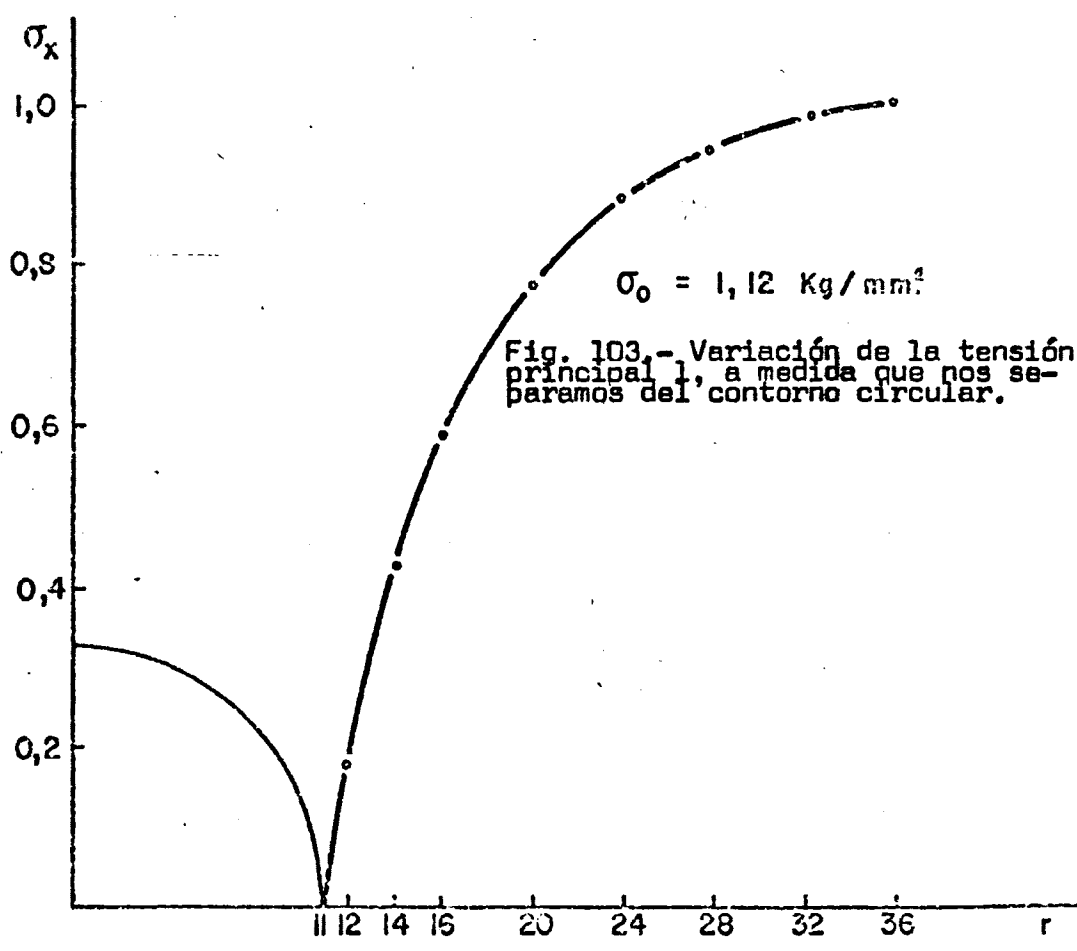
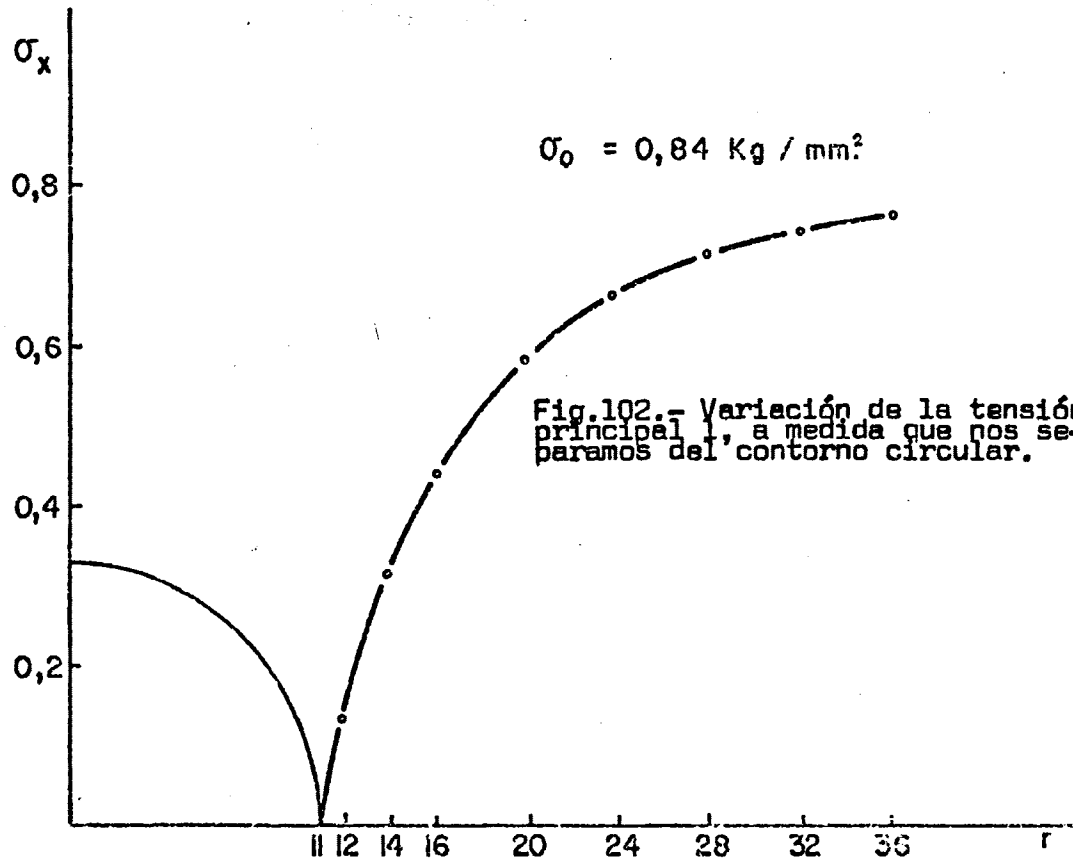


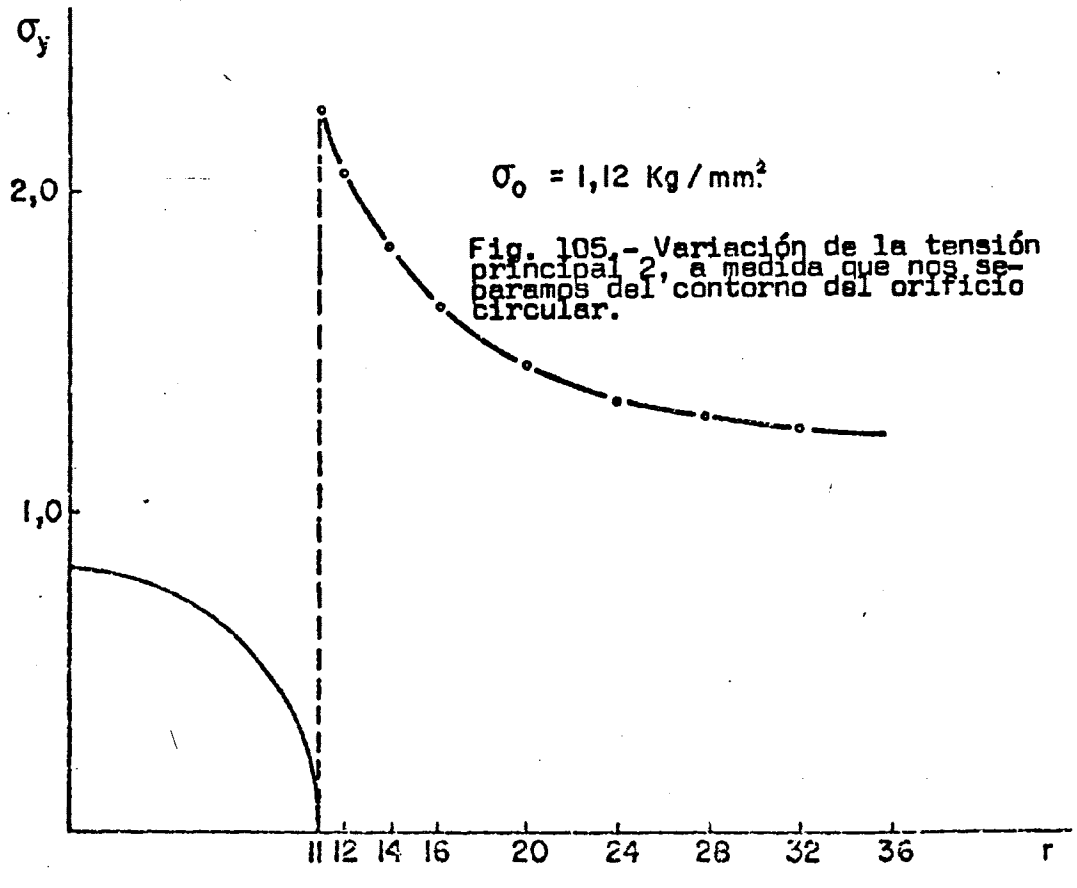
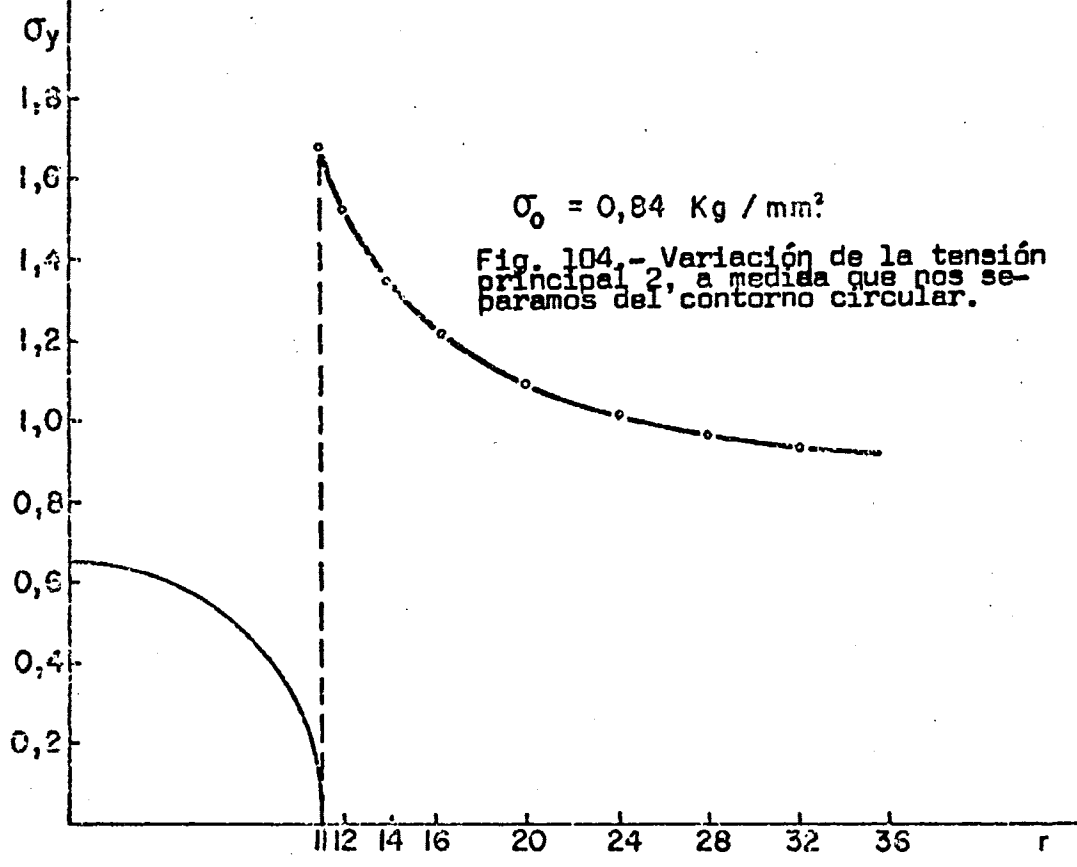
$\sigma_0 = 0,84$			
r	σ_x	σ_y	τ_{xy}
11	0	1,680	0
12	0,134	1,546	0
14	0,321	1,359	0
16	0,443	1,237	0
20	0,586	1,094	0
24	0,664	1,016	0
28	0,710	0,970	0
32	0,741	0,939	0
36	0,762	0,918	0

Tabla LXXII

$\sigma_0 = 1,12$			
r	σ_x	σ_y	τ_{xy}
11	0	2,240	0
12	0,179	2,061	0
14	0,429	1,811	0
16	0,591	1,649	0
20	0,781	1,459	0
24	0,885	1,355	0
28	0,947	1,293	0
32	0,988	1,252	0
36	1,015	1,225	0

Tabla LXXIII







3.5.- PLACA CON UN ORIFICIO ELIPTICO, SOMETIDA A TRACCION BIAIXIAL.

Las ecuaciones (60), (61) y (62), dan el estado de tensión en un punto para el caso de una placa con un orificio elíptico, sometida a tracción uniaxial. Estas ecuaciones venian dadas por las expresiones siguientes:

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - \frac{2ra_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \cdot \left[\right. \right. \\ \left. \left. \cos \theta \cdot \cos \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta \cdot \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + (a_6/2) + \right. \\ \left. + 2a_1 \right\}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + \frac{2ra_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \cdot \left[\right. \right. \\ \left. \left. \cos \theta \cdot \cos \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta \cdot \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + (a_6/2) - \right. \\ \left. - 2a_1 \right\}$$



$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right. \right. \\ \left. \left. - (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \right\}$$

Las ecuaciones anteriores, nos darían el estado de tensión en un punto, cuando actuara una de las tensiones sobre el modelo, pero si consideramos la tensión que actúa según la otra dirección el estado de tensión en el mismo punto sería entonces, si consideramos un nuevo sistema de ejes:

$$\sigma'_x = -\frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(-a'_8 \sin \theta + a'_{10} \sin 3\theta) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \cos \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) + (a'_9 \cos \theta - a'_{10} \cos 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right] - \right. \\ \left. - \frac{2ra'_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \left[-\sin \theta \cdot \cos \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) + \cos \theta \sin \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right] \right. \\ \left. + (a'_6/2) + 2a'_1 \right\} \quad (105)$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(-a'_8 \sin \theta + a'_{10} \sin 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
& + (a'_9 \cos \theta - a'_{10} \cos 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \Big] + \frac{2ra'_3}{(r'_1 r'_2)^{1/2}} \cdot \{ \\
& \cdot \left[-\sin \theta \cdot \cos \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) + \cos \theta \cdot \sin \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right] + \\
& + (a'_6/2) - 2a'_1 \Big\} \tag{106}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{4} \left\{ \frac{r}{(r'_1 r'_2)^{3/2}} \left[(a'_9 \cos \theta - a'_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right. \right. \\
\left. \left. - (a'_8 \sin \theta + a'_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right] \right\} \tag{107}
\end{aligned}$$

Aplicando el principio de superposición a estos dos estados de tensión, que anteriormente hemos considerado independientemente, y que es:

$$\sigma_{xT} = \sigma_x + \sigma'_y$$

$$\sigma_{yT} = \sigma'_x + \sigma_y$$

$$\tau_{xyT} = \tau_{xy} - \tau'_{xy}$$

las tensiones σ_{xT} , σ_{yT} , τ_{xyT} , nos daría el estado de tensión en un punto, para el caso de estados de tensión biaxial que estamos considerando, y cuyas expresiones matemáticas serían:



$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_r = \frac{G_0}{4} & \left\{ - \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(-a'_9 \sin \theta + \right. \right. \\
 & \left. \left. + a'_{10} \sin 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) + (a'_9 \cos \theta - a'_{10} \cos 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta'_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \theta'_2) \right] + \frac{2ra_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos \theta \cos \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \\
 & \left. + \frac{2ra'_3}{(r'_1 r'_2)^{1/2}} \left[- \sin \theta \cos \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) + \cos \theta \sin \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right] + \right. \\
 & \left. + b_1 \right\} \quad (108)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_r = \frac{G_0}{4} & \left\{ - \frac{r}{(r'_1 r'_2)^{3/2}} \left[(-a'_8 \sin \theta + a'_{10} \sin 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (a'_9 \cos \theta - a'_{10} \cos 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right] + \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_8 \cos \theta + \right. \right. \\
 & \left. \left. + a_{10} \cos 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + \right. \\
 & \left. \frac{2ra'_3}{(r'_1 r'_2)^{1/2}} \left[- \sin \theta \cos \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) + \cos \theta \sin \frac{1}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \right] + \right. \\
 & \left. \frac{2ra_3}{(r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos \theta \cos \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta \sin \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] + \right. \\
 & \left. + b_2 \right\} \quad (109)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_{r_1} = \frac{G_0}{4} & \left\{ - \frac{r}{(r_1 r_2)^{3/2}} \left[(a_9 \sin \theta + a_{10} \sin 3\theta) \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (a_8 \cos \theta + a_{10} \cos 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - \frac{r}{(r'_1 r'_2)^{3/2}} \left[(a'_9 \cos \theta - \right. \right.
 \end{aligned}$$



$$- a'_{10} \cos 3\theta \cos \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) - (a'_8 \sin \theta + a'_{10} \sin 3\theta) \sin \frac{3}{2}(\theta'_1 + \theta'_2) \}} \quad (110)$$

donde:

$$b_1 = \frac{a'_6 + a_6}{2} - 2(a_1 + a'_1)$$

$$b_2 = \frac{a_6 - a'_6}{2} - 2(a_1 + a'_1)$$

Conocidas estas expresiones, estamos en condiciones de calcular la ecuación que dá la cisi3n máxima, pero téngase en cuenta - que como se ha visto anteriormente, la aparatosidad de dichas expresiones es muy grande, y no tendría sentido el desarrollo de grandes ecuaciones, ya que de todas formas el problema queda resuelto, al conocer el estado de tensión en cualquier punto.

Como puede verse en las ecuaciones anteriores $\sigma_r, \sigma_t, \tau_{rt}$ dependen de la tensión de contorno, de los semiejes mayor y menor de la elipse en un sistema doble cartesiano polar.



3.6. PLACA CON UNA GRIETA Y SOMETIDA A UN ESTADO DE TRACCION BIAxIAL.

En el caso del modelo estudiado anteriormente, que correspondía a una placa plana con una grieta sometida a tracción uniaxial, se encontraron las siguientes ecuaciones para el estado de tensión en un punto:

$$\sigma_x = \frac{K_I r}{(ar_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos \left(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cdot \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] - \sigma_0$$

$$\sigma_y = \frac{K_I r}{(ar_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos \left(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cdot \sin \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I r}{(ar_1 r_2)^{1/2}} \left[-\frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]$$

donde K_I es el factor de intensidad de tensión y que toma el valor $\sigma_0 a^{1/2}$.

las ecuaciones anteriores dan el estado de tensión en un punto cuando consideramos la tensión que actúa normalmente a la dirección que define la grieta, sin embargo si se considera la tensión que actúa en la misma dirección que define la grieta, el modelo se comportaría como si no existiese grieta y por tanto las ecuaciones que dan el estado de tensión en un punto serán:

$$\sigma'_x = 0 \tag{111}$$



$$\sigma'_y = \sigma_o \quad (112)$$

$$\tau'_{xy} = 0 \quad (113)$$

por tanto, si aplicamos el principio de superposición, llegamos a:

$$\sigma_{xI} = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos\left(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (114)$$

$$\sigma_{yI} = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos\left(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (115)$$

$$\tau_{xyI} = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\frac{a^2}{r_1 r_2} \text{sen } \theta \cdot \cos \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (116)$$

a partir de las ecuaciones (114), (115), y (116), calculamos la ex presión que da la cisión máxima:

$$\left(\frac{\sigma_{yI} - \sigma_{xI}}{2} \right) = \frac{K_I^2 r^2 a^4}{a(r_1 r_2)^3} \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot \text{sen}^2 \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$



$$\tau_{xyI}^2 = \frac{K_I^2 r^2 a^4}{a(r_1 r_2)^3} \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot \cos^2 \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

sumando estas dos expresiones y calculando la raiz cuadrada, obtenemos la expresi3n de la cisi3n m3xima:

$$\tau_m^2 = \frac{K_I^2 r^2 a^4}{a(r_1 r_2)^3} \cdot \text{sen}^2 \theta \tag{117}$$

que tambi3n la podemos escribir, teniendo en cuenta el valor de K_I :

$$\tau_m^2 = \frac{\sigma_o^2 r^2 a^4}{(r_1 r_2)^3} \cdot \text{sen}^2 \theta \tag{118}$$

que es la expresi3n final de la cisi3n m3xima (is3cromas).

Sin embargo, vamos a poner la ecuaci3n (118), de forma que sea representable.

Si llamamos a:

$$x = \text{sen}^2 \theta$$

y teniendo en cuenta que:

$$(r_1 r_2)^2 = (r^2 - a^2)^2 + 4r^2 a^2 \text{sen}^2 \theta = (r^2 - a^2)^2 + 4r^2 a^2 \cdot x$$

y si llamamos a:

$$(r^2 - a^2)^2 = a_1$$



$$4r^2 a^2 = a_2$$

$$r^2 a^4 = a_3$$

si llevamos estas expresiones a la ecuación (118), resulta:

$$\tau_m^2 = \frac{\sigma_o^2 \cdot a_3 \cdot x}{(a_1 + a_2 \cdot x)^{3/2}} \quad (119)$$

operando en la ecuación (119), se obtiene:

$$\frac{1}{a_3} \left(\frac{\tau_m}{\sigma_o} \right)^4 = \frac{x^2}{(a_1 + a_2 x)^3} \quad (120)$$

llamando a :

$$\frac{1}{a_3} \left(\frac{\tau_m}{\sigma_o} \right)^4 = a_4$$

por tanto la ecuación (120), queda de la forma:

$$a_4 (a_1^3 + 3a_1^2 a_2 x + 3a_1 a_2^2 x^2 + a_2^3 x^3) = x^2$$

reduciendo términos en esta última ecuación, tenemos:

$$a_4 a_2^3 x^3 + (3a_4 a_1 a_2^2 - 1) x^2 + 3a_4 a_1^2 a_2 x + a_4 a_1^3 = 0$$

y si llamamos a:



$$a_4 a_2^3 = a_5$$

$$3a_4 a_1 a_2^2 - 1 = a_6$$

$$3a_4 a_1^2 a_2 = a_7$$

$$a_4 a_1^3 = a_8$$

en definitiva tendremos:

$$a_5 x^3 + a_6 x^2 + a_7 x + a_8 = 0 \quad (121)$$

la ecuación (121), nos va a permitir la representación de las líneas de cisión máxima.

3.6.1.- REPRESENTACION DE LAS LINEAS DE CISION MAXIMA.

Grieta a tracción biaxial.							
$\sigma_0 = 0,40 \text{ Kg/mm}^2$; $\lambda = 1$; $a = 11$							
n	τ_m	$r = 11$		$r = 12$		$r = 14$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	0	28,32	5,89	26,04	—	—
2	0,311	0	11,42	—	—	—	—

Tabla LXXIV

Grieta a tracción biaxial.							
$\sigma_0 = 0,66 \text{ Kg/mm}^2$; $\lambda = 1$; $a = 11$							
n	τ_m	$r = 6$		$r = 8$		$r = 11$	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	—	47,49	—	18,09	0	65,22
2	0,311	—	—	—	—	0	16,02

Grieta a tracción biaxial.							
$\sigma_0 = 0,66 \text{ Kg/mm}^2$; $\lambda = 1$; $a = 11$.							
n	τ_m	$r = 12$		$r = 14$			
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2		
1	0,155	9,03	54,86	20,25	45,38		

Tabla LXXV



Grieta a tracción biaxial.							
$\sigma_0 = 0,85 \text{ Kg/mm}^2 ; \quad \lambda = 1 ; \quad a = 11.$							
n	τ_m	r = 11		r = 12		r = 14	
		θ_1	θ_2	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
1	0,155	0	—	4,08	—	10,85	63,52
2	0,311	0	24,86	9,67	23,99	—	—

Grieta a tracción biaxial.							
$\sigma_0 = 0,85 \text{ Kg/mm}^2 ; \quad \lambda = 1 ; \quad a = 11 .$							
n	τ_m	r = 16					
		θ_1	θ_2				
1	0,155	19,11	49,97				

Table LXXVI



$$\sigma_0 = 0,40 \text{ kg/mm}^2$$

$$\lambda = 1$$

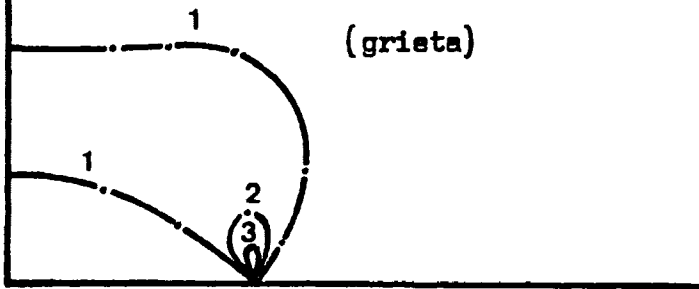
Fig. 106.- Representación de la red de isócronas para una placa a tensión biaxial.



$$\sigma_0 = 0,66 \text{ kg/mm}^2$$

$$\lambda = 1$$

Fig.- 107.- Representación de la red de isócronas para una placa a tensión biaxial (grieta)

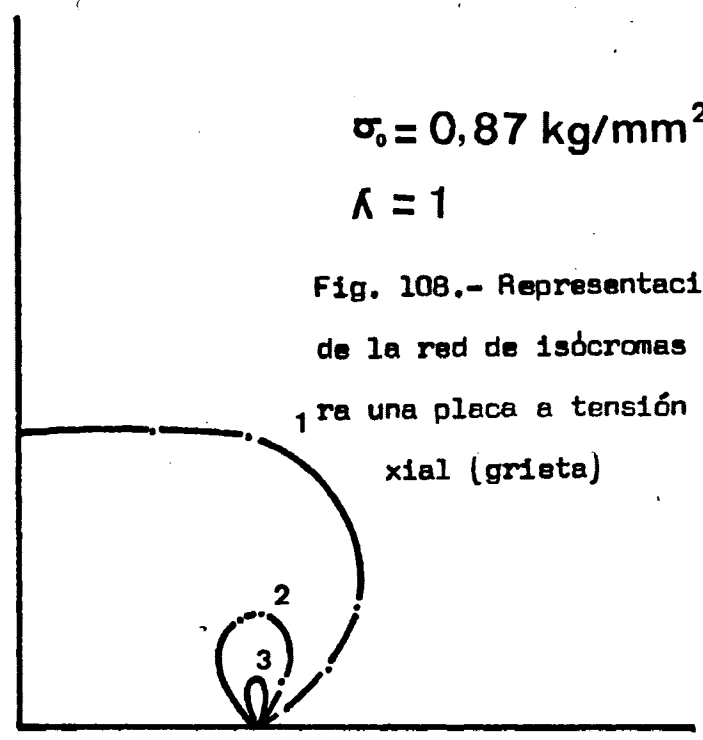




$$\sigma_0 = 0,87 \text{ kg/mm}^2$$

$$\lambda = 1$$

Fig. 108.- Representación de la red de isócronas para una placa a tensión biaxial (grista)





3.6.2.- SOLUCION DE WESTERGAARD PARA EL MODELO DE PLACA CON UNA GRIETA, SOMETIDA A TENSION BIAxIAL.

Westergaard en 1939, encontró funciones de tensión reales y expresiones para el estado de tensión en un punto para un modelo de placa con una grieta y sometida a tensión biaxial, estas ecuaciones son:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

donde:

$$K_I \text{ (factor de intensidad de tensión)} = \sigma_0 \sqrt{a}$$

a = semilongitud de grieta.

Las tensiones principales pueden ser obtenidas en función del estado de tensión σ_x , σ_y , τ_{xy} , en un punto, mediante la expresión general siguiente:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

de donde se deduce que:



$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \theta; \quad \zeta_m = \frac{K_I}{2(2\pi r)^{1/2}} \sin \theta$$

Despejando en la ecuación anterior el valor de r, se obtiene:

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{K_I}{\sigma_1 - \sigma_2} \right)^2 \sin^2 \theta$$

Puesto que para cada isócrona $(\sigma_1 - \sigma_2) = \text{cte.}$, designando por P el valor $(K_I / \sigma_1 - \sigma_2)$, la ecuación anterior toma la forma reducida siguiente:

$$r = \frac{1}{2} P^2 \sin^2 \theta \quad (\text{ecuación de una isócrona})$$

donde:

r = distancia desde el vertice de la grieta al punto considerado.

θ = es el ángulo que forma el eje ox con el vector de posición del punto considerado, siendo P una constante y teniendo validez esta ecuación en el entorno del vértice de la grieta.

En la tabla que a continuación se adjunta, serán los valores de r y θ, en función de valores constantes de P, con el fin de hacer una representación analítica del modelo isocromático que resultaría de la ecuación anterior.



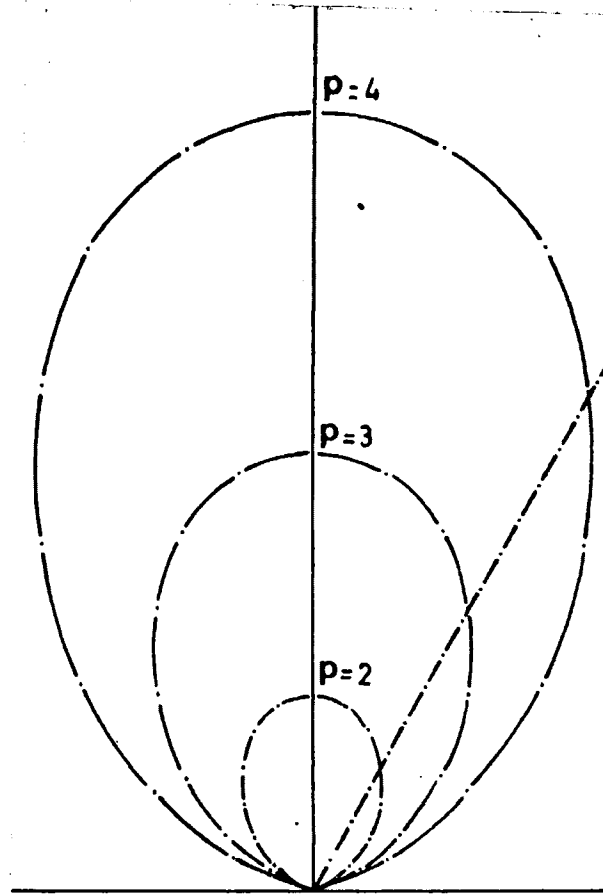
θ	$\text{sen } \theta$	$\text{sen}^2 \theta$	$r(P=1)$	$r(P=2)$	$r(P=3)$	$r(P=4)$
0	0	0	0	0	0	0
10	0,1736	0,0302	0,0048	0,0192	0,0432	0,0768
20	0,3420	0,1170	0,0186	0,0745	0,1675	0,2979
30	0,5000	0,2500	0,0398	0,1592	0,3581	0,6366
40	0,6427	0,4132	0,0657	0,2630	0,5918	1,0522
50	0,7660	0,5868	0,0934	0,3736	0,8406	1,4943
60	0,8660	0,7500	0,1194	0,4775	1,0743	1,9099
70	0,9396	0,8830	0,1405	0,5523	1,2648	2,2486
80	0,9848	0,9698	0,1544	0,6174	1,3898	2,4697
90	1,0000	1,0000	0,1592	0,6366	1,4324	2,5465
100	0,9848	0,9698	0,1544	0,6174	1,3892	2,4697
110	0,9396	0,8830	0,1405	0,5621	1,2648	2,2486
120	0,8660	0,7500	0,1194	0,4775	1,0743	1,9097
130	0,7660	0,5868	0,0934	0,3736	0,8406	1,4943
140	0,6427	0,4132	0,0658	0,2630	0,5918	1,0522
150	0,5000	0,2500	0,0398	0,1592	0,3581	0,6366
160	0,3420	0,1170	0,0186	0,0745	0,1676	0,2979
170	0,1736	0,0302	0,0098	0,0192	0,0432	0,0768
180	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Con los valores obtenidos en la presente tabla, se hace la representación gráfica del modelo isocromático correspondiente, y que se dá en la figura que se adjunta a continuación, y que como puede verse es simétrica respecto al eje oy.

Esta representación analítica no corresponde exactamente a los modelos isocromáticos que se obtienen experimentalmente. Las líneas isócronas obtenidas experimentalmente tienen un eje de si-



metría que forma un ángulo de 117° con el eje ox.



representación analítica de la expresión de las isocromas

Fig. 109.- Representación analítica de la
expresión de las isócronas se-
gún las ecs. de Westergard.



3.6.3.- TRANSFORMACION ISOMETRICA DE LA ECUACION DE LA ISOCROMA
ENCONTRADA EN EL APARTADO ANTERIOR.

Efectuando una transformaci3n isom6trica que lleve a coincidir el eje oy con el eje $\theta = 117^\circ$, obtendremos una transformaci3n que se ajustar3 mucho mas a las l3neas is3cromas experimentales.

Sea por tanto, $\{u_1, u_2\}$, una base ortonormal en el plano. Se trata de calcular las ecuaciones de una simetr3a u que lleve a coincidir el eje oy con el eje $\theta = 117^\circ$. Esto es, calcular las ecuaciones de una simetr3a vectorial u respecto de la recta $\theta = 103,5^\circ$.

Si se elige una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ tal que:

$$v_1 = u_1 \cdot \cos 103,5^\circ + u_2 \cdot \sen 103,5^\circ$$

$$v_2 = -u_1 \cdot \sen 103,5^\circ + u_2 \cdot \cos 103,5^\circ$$

La simetr3a buscada u dejar3 invariante v_1 y cambiar3 en su opuesto a v_2 , esto es:

$$u(v_1) = v_1$$

$$u(v_2) = -v_2$$

De donde, efectuando operaciones.

$$u(v_1) = u(u_1 \cdot \cos 103,5^\circ + u_2 \cdot \sen 103,5^\circ) =$$

$$= u_1 \cdot \cos 103,5^\circ + u_2 \cdot \sin 103,5^\circ$$

$$u(v_2) = u(-u_1 \cdot \sin 103,5^\circ + u_2 \cdot \cos 103,5^\circ) =$$

$$= u_1 \cdot \sin 103,5^\circ - u_2 \cdot \cos 103,5^\circ$$

Lo cual se puede escribir de la forma:

$$\cos 103,5^\circ \cdot u(u_1) + \sin 103,5^\circ \cdot u(u_2) = u_1 \cdot \cos 103,5^\circ +$$

$$+ u_2 \cdot \sin 103,5^\circ$$

$$- \sin 103,5^\circ \cdot u(u_1) + \cos 103,5^\circ \cdot u(u_2) = u_1 \cdot \sin 103,5^\circ -$$

$$- u_2 \cdot \cos 103,5^\circ$$

Resolviendo por Cramer, se obtiene:

$$u(u_1) = \frac{\begin{vmatrix} u_1 \cdot \cos 103,5^\circ + u_2 \cdot \sin 103,5^\circ & \sin 103,5^\circ \\ u_1 \cdot \sin 103,5^\circ - u_2 \cdot \cos 103,5^\circ & \cos 103,5^\circ \end{vmatrix}}{1}$$

$$u(u_1) = u_1 \cdot \cos^2 103,5^\circ + u_2 \cdot \sin 103,5^\circ \cdot \cos 103,5^\circ -$$

$$- u_1 \cdot \cos^2 103,5^\circ + u_2 \cdot \sin 103,5^\circ \cdot \cos 103,5^\circ =$$

$$= u_1 (\cos^2 103,5^\circ - \sin^2 103,5^\circ) + u_2 (2 \cdot \sin 103,5^\circ \cdot \cos 103,5^\circ) =$$



$$= u_1 \cdot \cos 207^\circ - u_2 \cdot \sin 207^\circ$$

De la misma forma:

$$u(u_2) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 103,5^\circ & u_1 \cdot \cos 103,5^\circ + u_2 \cdot \sin 103,5^\circ \\ -\sin 103,5^\circ & u_1 \cdot \sin 103,5^\circ - u_2 \cdot \cos 103,5^\circ \end{vmatrix}}{1}$$

$$\begin{aligned} u(u_2) &= u_1 \cdot \cos 103,5^\circ \cdot \sin 103,5^\circ - u_2 \cdot \cos^2 103,5^\circ + \\ &+ u_1 \cdot \sin 103,5^\circ \cdot \cos 103,5^\circ + u_2 \cdot \sin^2 103,5^\circ = \\ &= u_1 \cdot \sin 207^\circ - u_2 \cdot \cos 207^\circ \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$u(u_1) = u_1 \cdot \cos 207^\circ - u_2 \cdot \sin 207^\circ$$

$$u(u_2) = u_1 \cdot \sin 207^\circ - u_2 \cdot \cos 207^\circ$$

Conocida la imagen en \underline{u} de los vectores de la base u_1 , u_2 , la imagen de un vector cualquiera \underline{x} , se obtendrá en la forma:

$$\underline{x} = x_1 u_1 + x_2 u_2$$

Se deduce:



$$u(x) = x_1 \cdot u(u_1) + x_2 \cdot u(u_2) = x' = x'_1 \cdot u_1 + x'_2 \cdot u_2$$

deduciéndose:

$$\begin{aligned} x_1 (u_1 \cdot \cos 207 + u_2 \cdot \sen 207) + x_2 (u_1 \cdot \sen 207 - \\ - u_2 \cdot \cos 207) = (x_1 \cdot \cos 207 + x_2 \cdot \sen 207) u_1 + \\ + (x_1 \cdot \sen 207 - x_2 \cdot \cos 207) u_2 = x'_1 \cdot u_1 + x'_2 \cdot u_2 \end{aligned}$$

Encontrándose finalmente que:

$$x'_1 = x_1 \cdot \cos 207 + x_2 \cdot \sen 207$$

$$x'_2 = x_1 \cdot \sen 207 - x_2 \cdot \cos 207$$

o bien en forma matricial:

$$(x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \cos 207 & \sen 207 \\ \sen 207 & -\cos 207 \end{pmatrix}$$

Si lo que interesa es conocer las coordenadas (x_1, x_2) de un vector cuya imagen en \underline{u} es el vector $\underline{x'}$ de coordenadas (x'_1, x'_2) , basta con resolver el sistema de ecuaciones anterior ó su equivalente en forma matricial, con lo que se obtiene:

$$x = x' \cdot \cos 207 + y' \cdot \sen 207$$

$$y = x' \cdot \sen 207 - y' \cdot \cos 207$$



La imagen en \underline{u} de las líneas isócronas deducidas a partir de las ecuaciones de Westergaard, se hará entonces de forma inmediata, sin más que poner dicha ecuación en coordenadas cartesianas, y que es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} p^2 \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

Sustituyendo (x,y) , por su imagen (x', y') y volviendo a pasar a coordenadas polares, se obtiene:

$$r' = \frac{1}{2\pi} p^2 \left(\frac{x'^2 \sin^2 207 + y'^2 \cos^2 207 - x'y' \sin 2.207}{r'^2} \right)$$

teniendo en cuenta que:

$$x' = r' \cdot \cos \theta'$$

$$y' = r' \cdot \sin \theta'$$

sustituyendo en la ecuación anterior, queda:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{2\pi} p^2 (\cos^2 \theta' \sin^2 207 + \sin^2 \theta' \cos^2 207 - \\ &- \cos \theta' \sin \theta' \cdot \sin 2.207) \\ &= \frac{1}{2\pi} p^2 (\cos \theta' \sin 207 - \sin \theta' \cos 207)^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} p^2 \sin^2(\theta' - 207) = \frac{1}{2\pi} p^2 [1 - \cos^2(\theta' - 207)] \end{aligned}$$



Sustituyendo el valor del \cos^2 , en función del coseno del ángulo doble, se tiene:

$$\cos^2(\theta' - 207) = \frac{1 + \cos 2(\theta' - 207)}{2}$$

que sustituido a la ecuación anterior, resultará

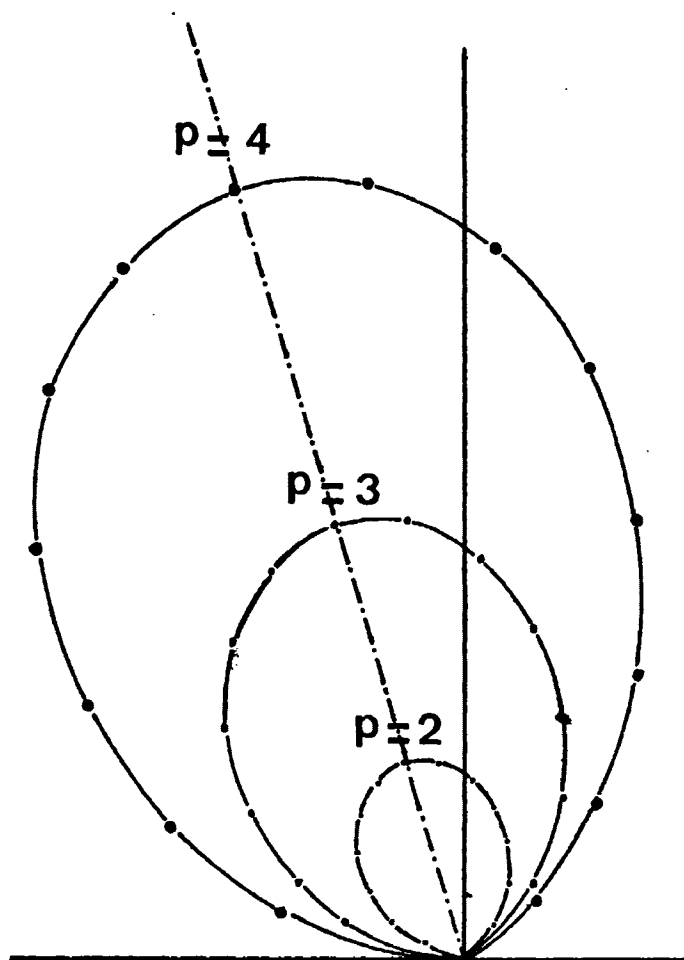
$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{4\pi} P^2 [2 - 1 - \cos(2\theta - 2 \cdot 207)] = \\ &= \frac{1}{4\pi} P^2 [1 - \cos(2\theta' - 54\theta)] \end{aligned}$$

A continuación se presenta la tabla con valores para r y θ , en función de valores asignados a P .



θ'	$2\theta'-54$	$1-\cos(2\theta'-54)$	$r'(P=1)$	$r'(P=2)$	$r'(P=3)$	$r'(P=4)$
27	0	0	0	0	0	0
37	20	0,0603	0,0048	0,0192	0,0432	0,0768
47	40	0,2340	0,0186	0,0745	0,1676	0,2979
57	60	0,5000	0,0398	0,1592	0,3581	0,6366
67	80	0,8264	0,0658	0,2630	0,5918	1,0521
77	100	1,1736	0,0934	0,3736	0,8406	1,4943
87	120	1,5000	0,1194	0,4775	1,0743	1,9099
97	140	1,7660	0,1405	0,5621	1,2648	2,2486
107	160	1,9397	0,1544	0,6174	1,3892	2,4697
117	180	2,0000	0,1592	0,6366	1,4342	2,5465
127	200	1,9397	0,1544	0,6174	1,3892	2,4697
137	220	1,7660	0,1405	0,5621	1,2648	2,2486
147	240	1,5000	0,1194	0,4775	1,0743	1,9099
157	260	1,1736	0,0934	0,3736	0,8406	1,4943
167	280	0,8264	0,0658	0,2630	0,5918	1,0521
177	300	0,5000	0,0398	0,1592	0,3581	0,6366
187	320	0,2340	0,0186	0,0745	0,1676	0,2979
197	340	0,0603	0,0048	0,0192	0,0432	0,0768
207	360	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

En la fig. que a continuación se presenta , se dan las líneas isócronas representadas analíticamente a partir de la ecuación transformada que hemos obtenido, y teniendo en cuenta la tabla que se adjunta.



representación de la ecuación transformada

Fig. 110. ~ Representación de la ecuación transformada.



3.7. PLACA CON DOS GRIETAS ALINEADAS Y SOMETIDA A UN ESTADO DE TRACCION UNIAXIL.

Precedentemente se ha estudiado el caso correspondiente a una placa con una grieta sometida a tracción uniaxial, encontrándose ecuaciones para σ_x , σ_y , τ_{xy} , que dan el estado de tensión en un punto, lo que nos va a permitir encontrar ecuaciones para el estado de tensión en un punto en el caso que estamos estudiando en este apartado. En la fig. se puede ver fácilmente, que el estado de tensión entre las líneas d y d' será la suma de los estados de tensión que producirían cada grieta independientemente.

Por tanto, teniendo en cuenta que el estado de tensión en P producido por una de las grietas, viene dado por:

$$\sigma_x = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos \left(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right) - \frac{a^2}{(r_1 r_2)} \sin \theta \sin \frac{3}{2} \right. \\ \left. \cdot (\theta_1 + \theta_2) \right] - \sigma_0$$

$$\sigma_y = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos \left(\theta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right) + \frac{a^2}{(r_1 r_2)} \sin \theta \sin \frac{3}{2} \right. \\ \left. \cdot (\theta_1 + \theta_2) \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I r}{(a r_1 r_2)^{1/2}} \left[\frac{a^2}{(r_1 r_2)} \sin \theta \sin \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right]$$

y el estado de tensión en el mismo punto P producido por la otra grieta, sería entonces:



$$\sigma_x = \frac{K_I r'}{(ar_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos(\theta' - \frac{1}{2}(\theta_1' + \theta_2')) - \frac{a^2}{(r_1' r_2')} \sin \theta' \sin \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \right] - \sigma_0$$

$$\sigma_y = \frac{K_I r'}{(ar_1 r_2)^{1/2}} \left[\cos(\theta' - \frac{1}{2}(\theta_1' + \theta_2')) + \frac{a^2}{(r_1' r_2')} \sin \theta' \sin \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I r'}{(ar_1 r_2)^{1/2}} \left[-\frac{a^2}{(r_1' r_2')} \sin \theta' \cos \frac{3}{2}(\theta_1' + \theta_2') \right]$$

Superponiendo ambos estados de tensión, encontraríamos las ecuaciones buscadas .

Para este caso particular el principio de superposición, sería:

$$\sigma_{x_T} = \sigma_x + \sigma'_x$$

$$\sigma_{y_T} = \sigma_y + \sigma'_y$$

$$\tau_{xy_T} = \tau_{xy} + \tau'_{xy}$$

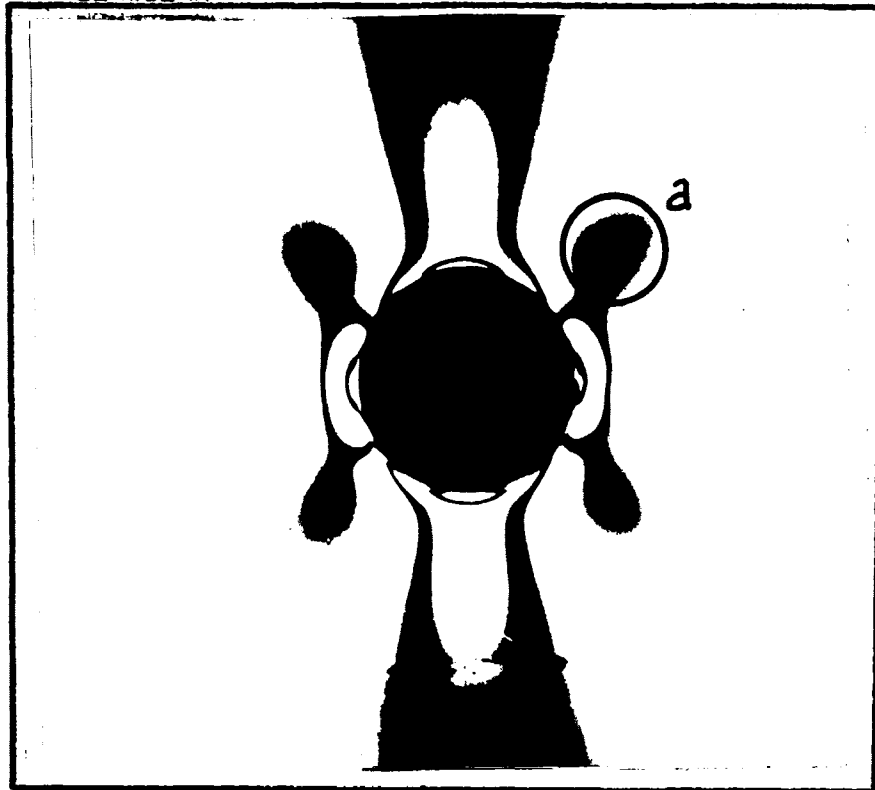
Es innecesario en este caso, sumar las expresiones precedentes ya que, no es posible reducir las ecuaciones resultantes. Los cálculos efectuados demuestran la validez analítica del procedimiento para explicar correctamente las redes de isócronas de dos grietas — iguales alineadas.



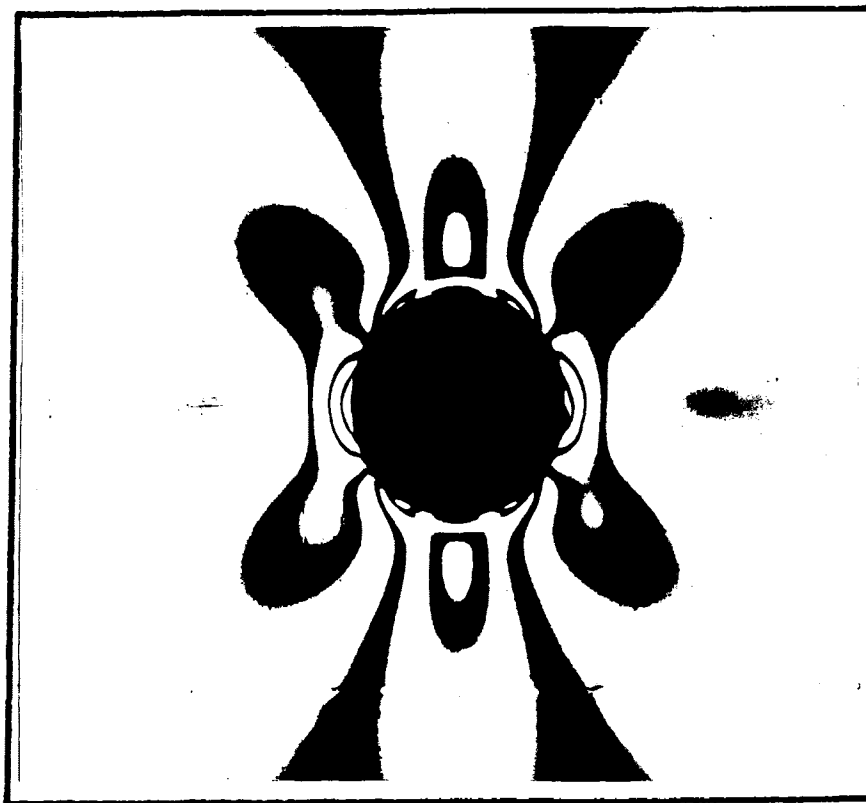
IV.- RESULTADOS EXPERIMENTALES.

- 4.1.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA PLACA CON ORIFICIO CIRCULAR.
- 4.2.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON ORIFICIO ELIPTICO
- 4.3.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UNA GRIETA TRANSVERSAL A LA DIRECCION DE APLICACION DE LA CARGA.
- 4.4.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UN ORIFICIO CIRCULAR Y SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIAL.
- 4.5.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UN ORIFICIO ELIPTICO, SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIAL.
- 4.6.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UNA GRIETA, SOMETIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAXIAL.
- 4.7.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON DOS GRIETAS ALINEADAS Y SOMETIDAS A TENSION UNIAXIAL.

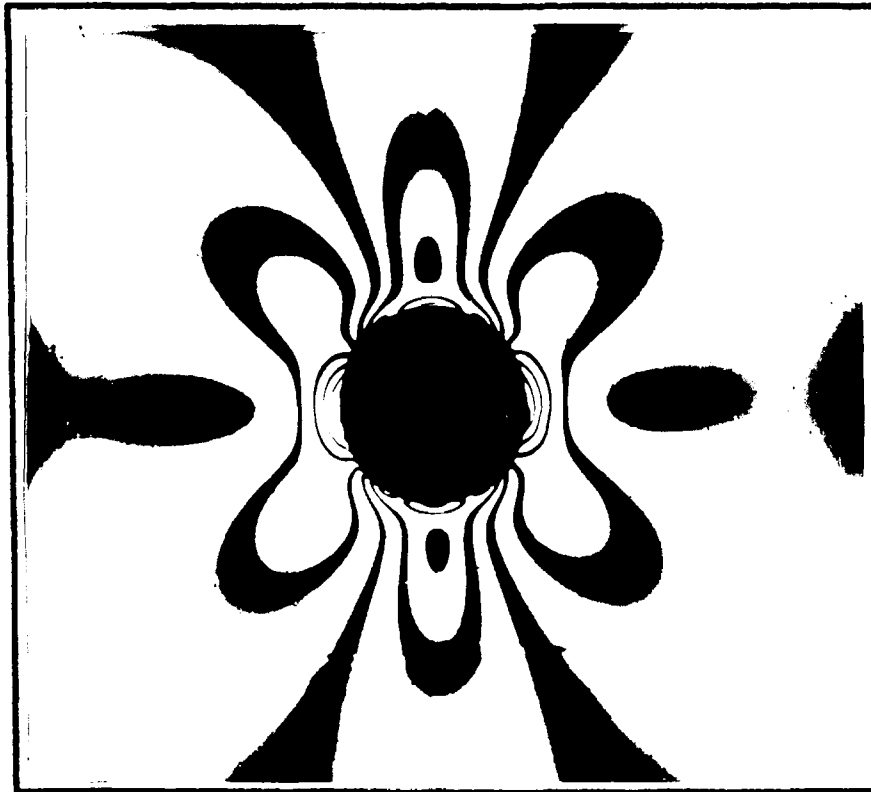
4.1.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA PLACA CON ORIFICIO CIRCULAR



mod. isocromàtico 1 carga = 0,44 kg/mm²
fig. 111 radio = 11

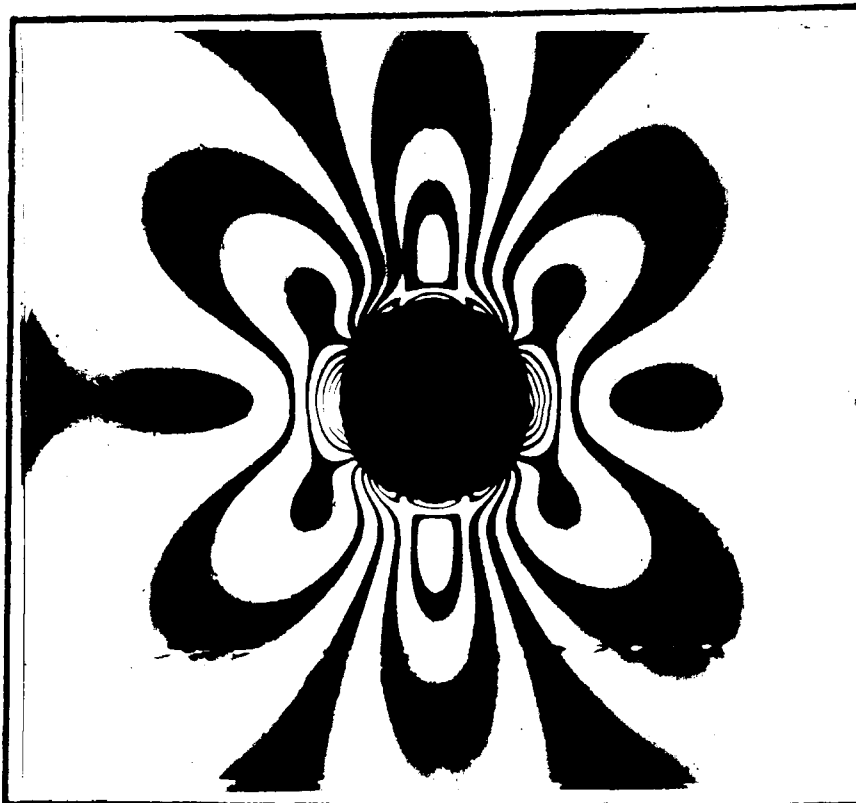


mod. isocromàtico 2 carga = 0,72 kg/mm²
fig. 112 radio = 11



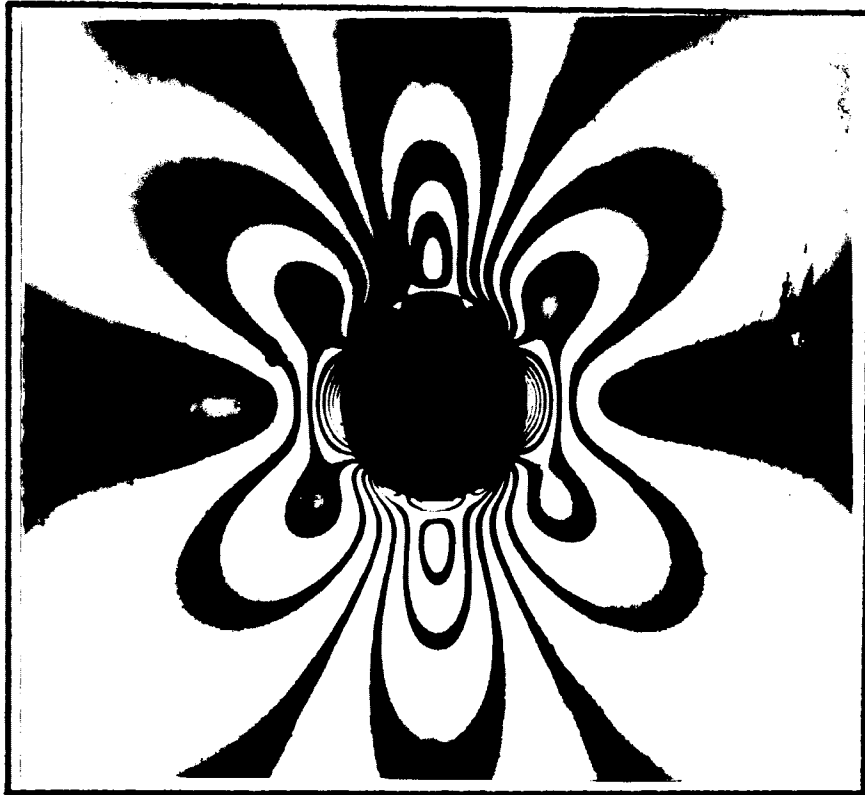
mod. isocromàtico 3
fig. 113

carga = 1,09 kg/mm²
radio = 11



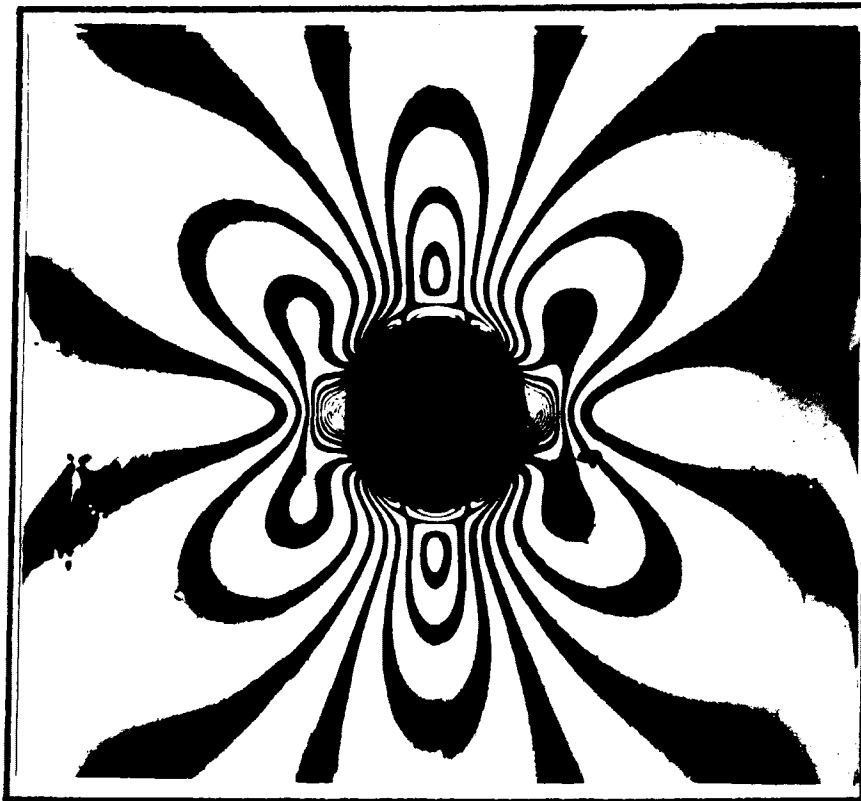
mod. isocromàtico.4
fig. 114

carga = 1,39 kg/mm²
radio = 11



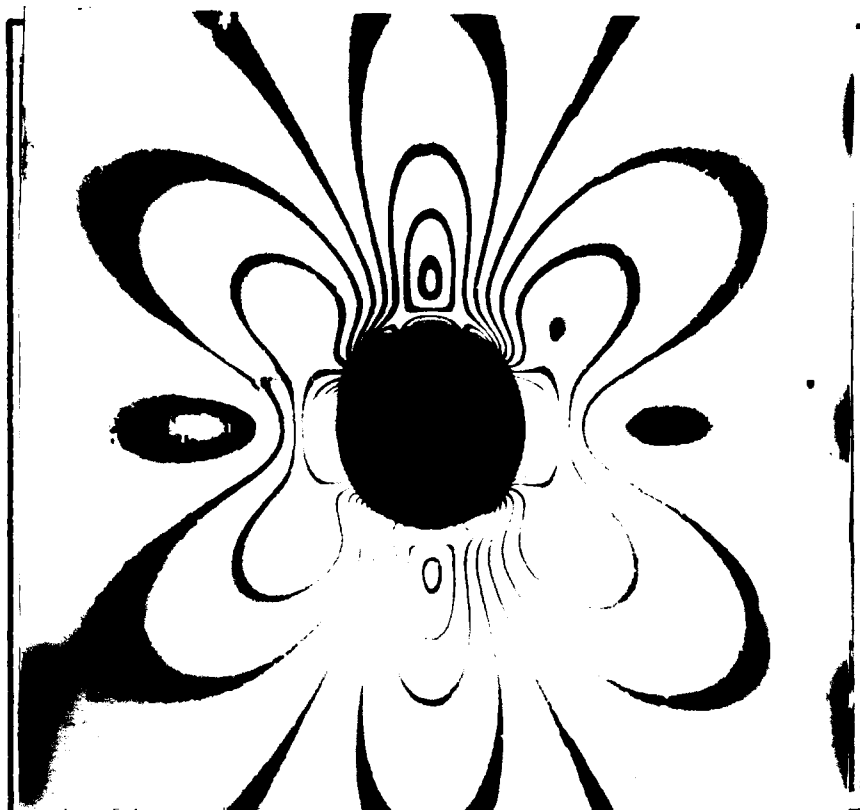
mod. isocromático 5
fig. 115

carga = 1,64 kg/mm²
radio = 11



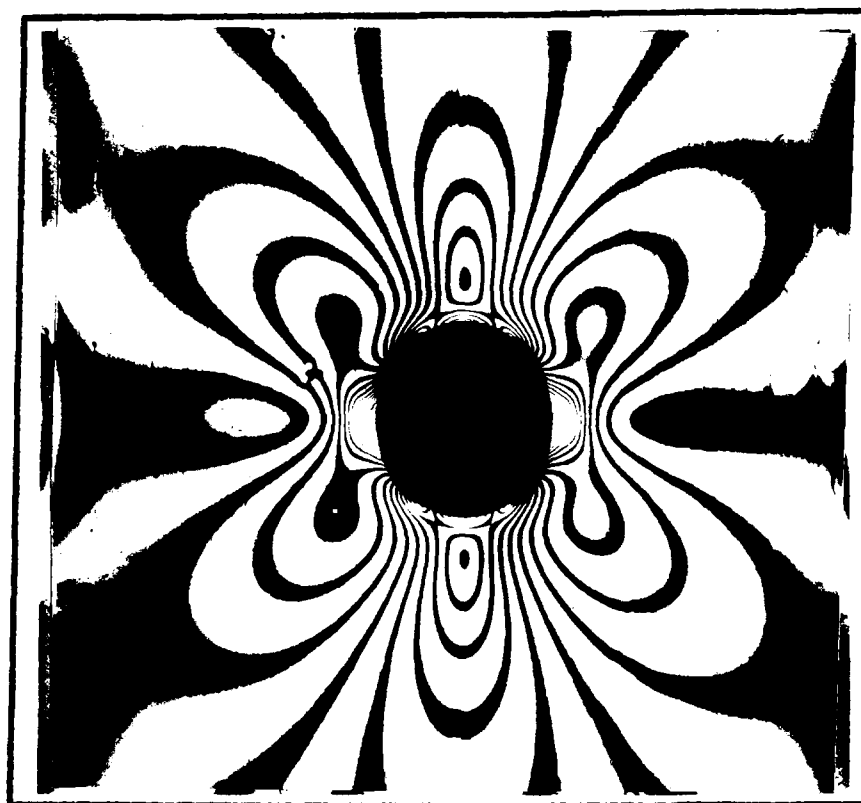
mod. isocromático 6
fig. 116

carga = 1,78 kg/mm²
radio = 11



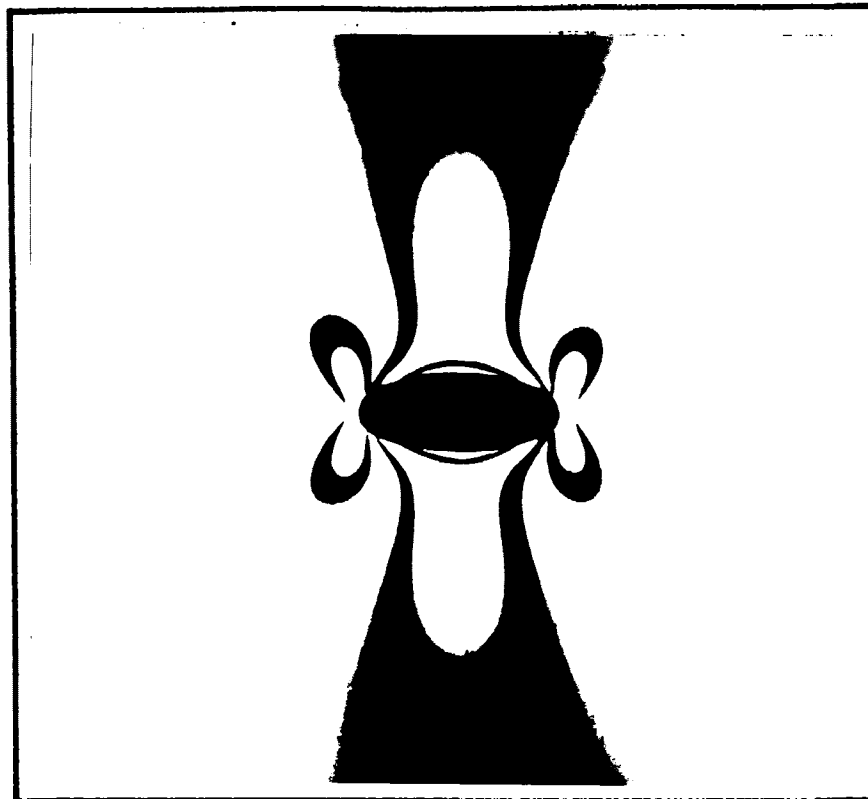
mod. isocromàtico 7
fig.117

carga=1,92 kg/mm²
radio=11



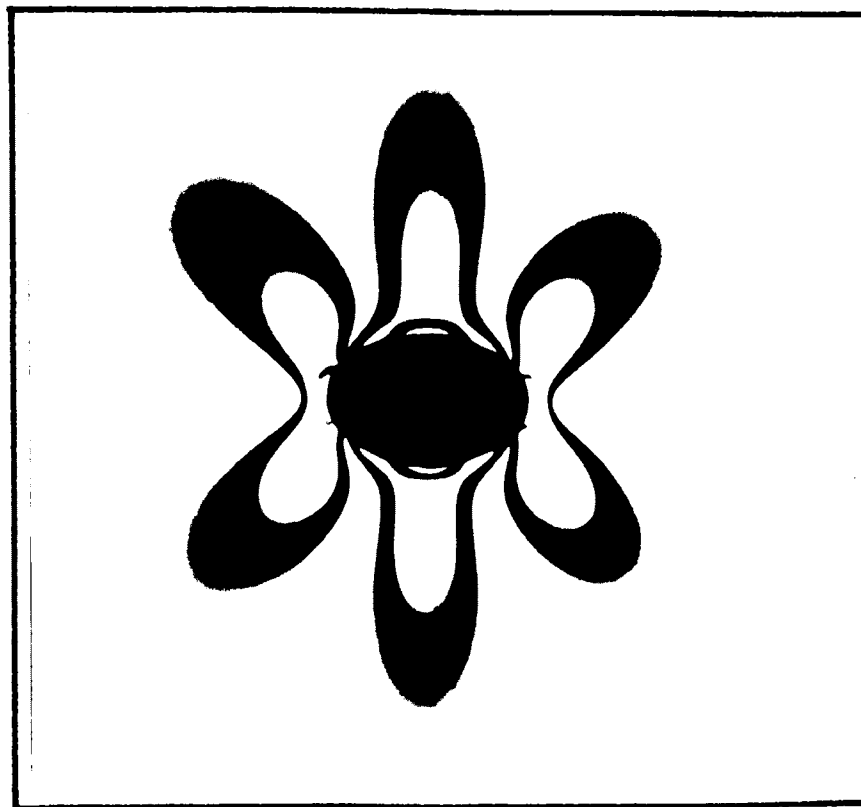
mod. isocromàtico 8
fig. 118

carga=2,15 kg/mm²
radio=11



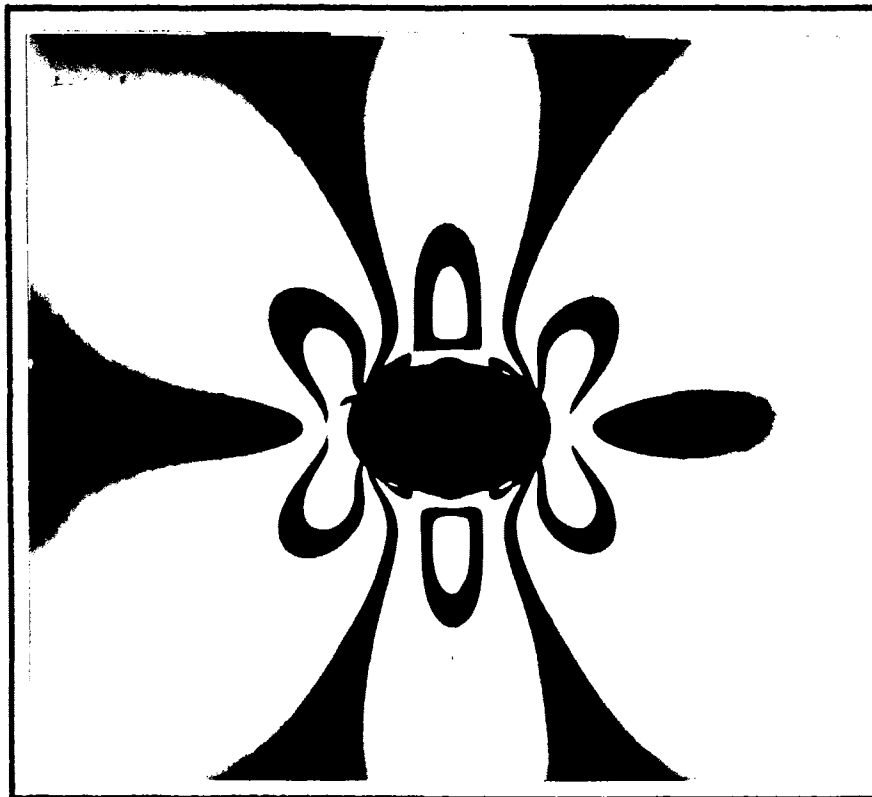
mod. isocromático 9
fig.119

carga=0,42 kg/mm²
 $\lambda = 1,96$



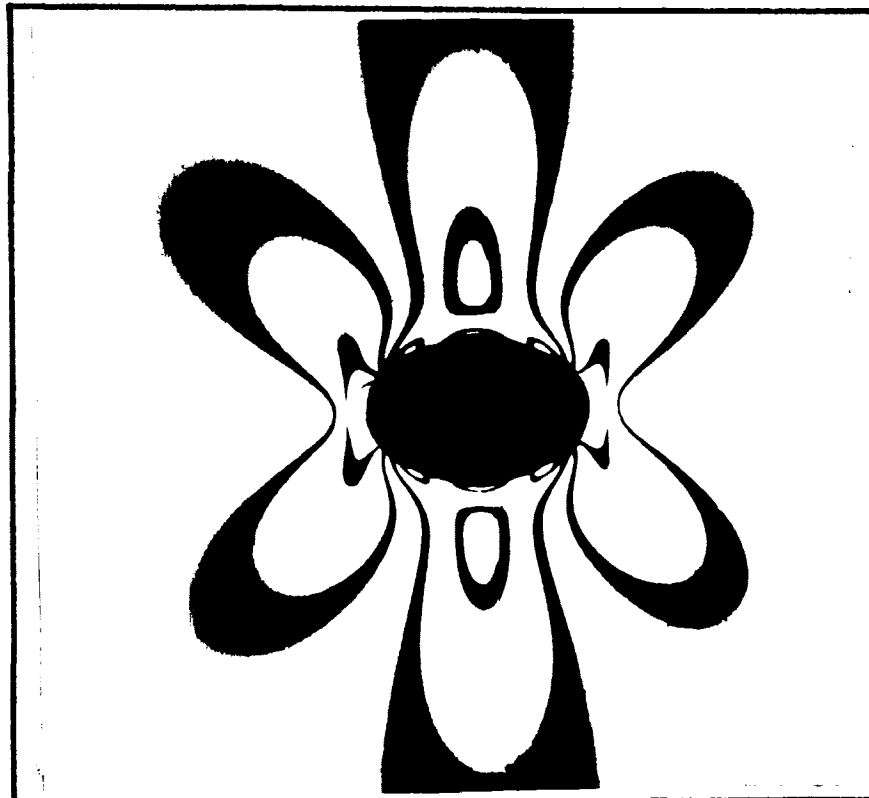
mod. isocromático 10
fig.120

carga=0,56 kg/mm²
 $\lambda = 1,96$



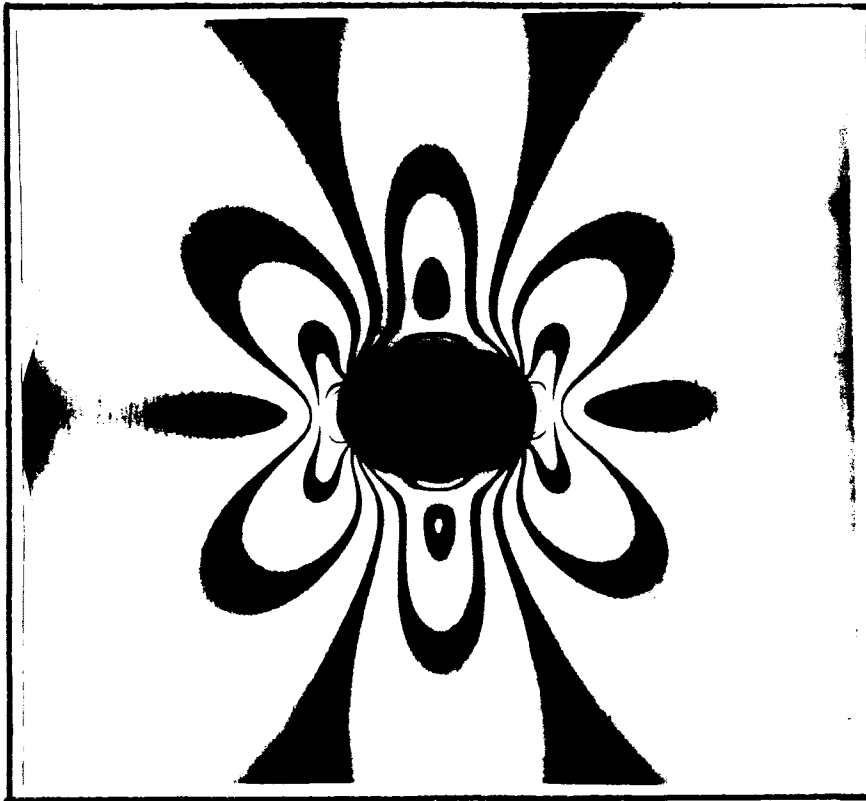
mod. isocromático 11
fig. 121

carga=0,75 kg/mm²
 $\lambda=1,96$



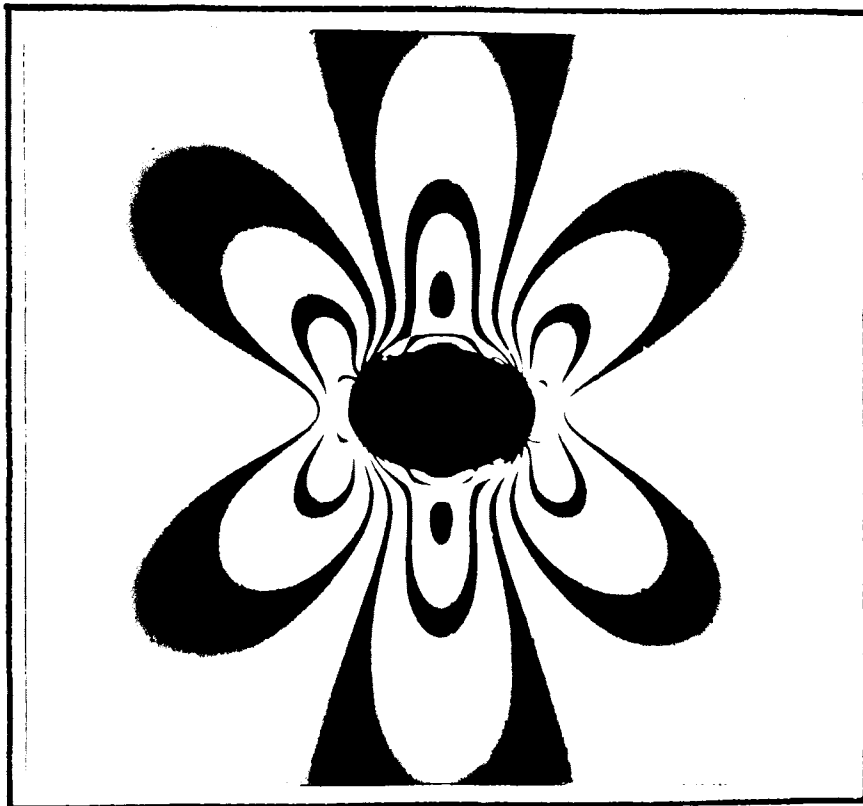
mod. isocromático 12
fig. 122

carga=0,80 kg/mm²
 $\lambda=1,96$



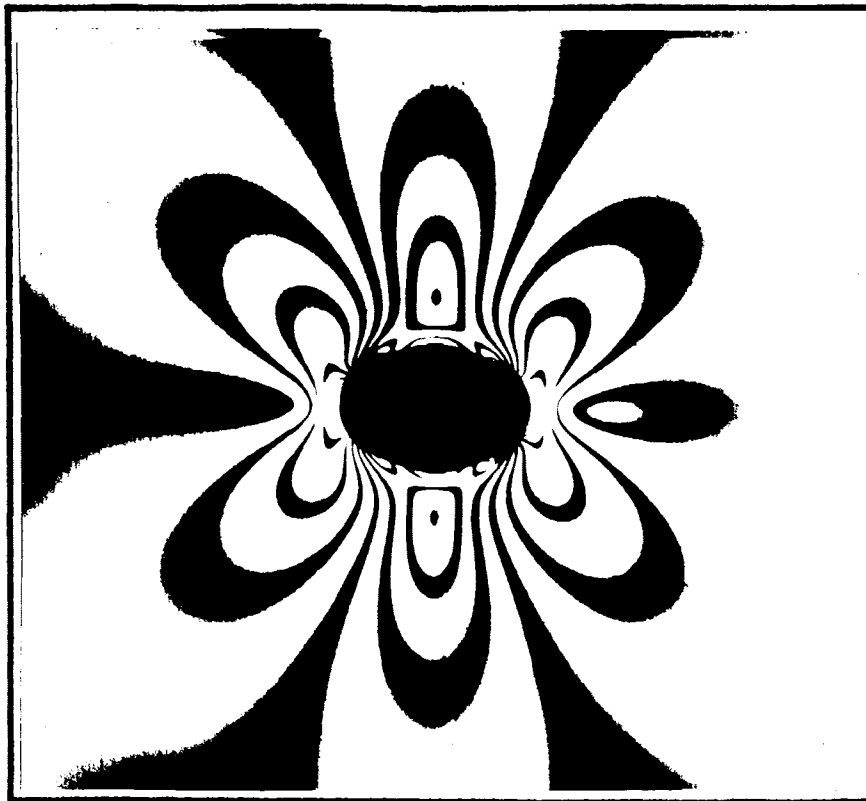
mod. isocromático 13
fig.123

carga=0,97 kg/mm
 $\lambda = 1,96$



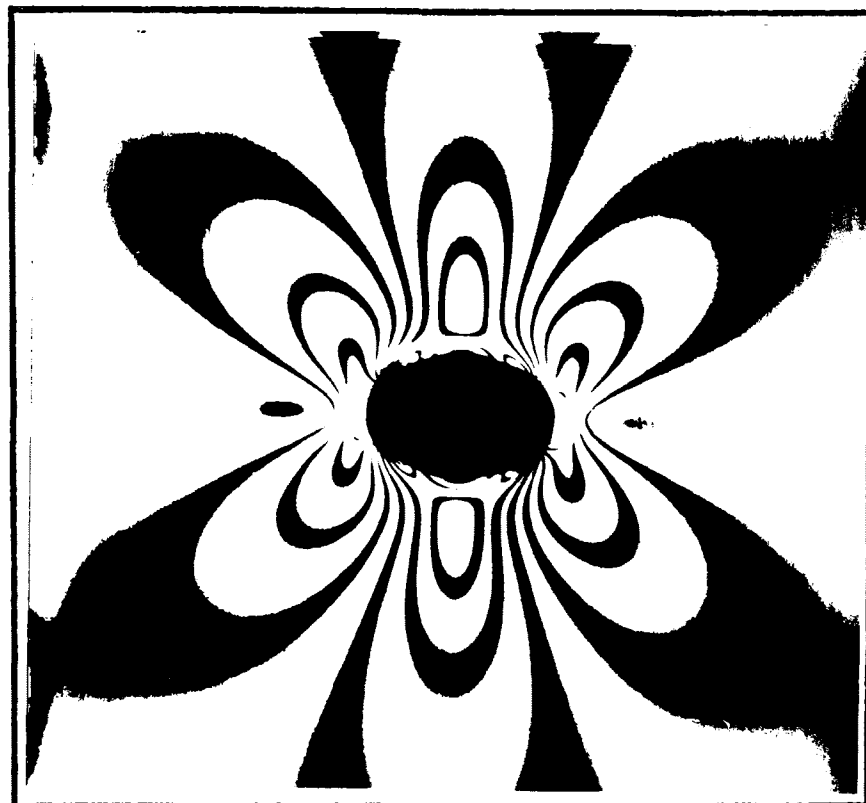
mod. isocromático 14
fig.124

carga=0,99 kg/mm
 $\lambda = 1,96$



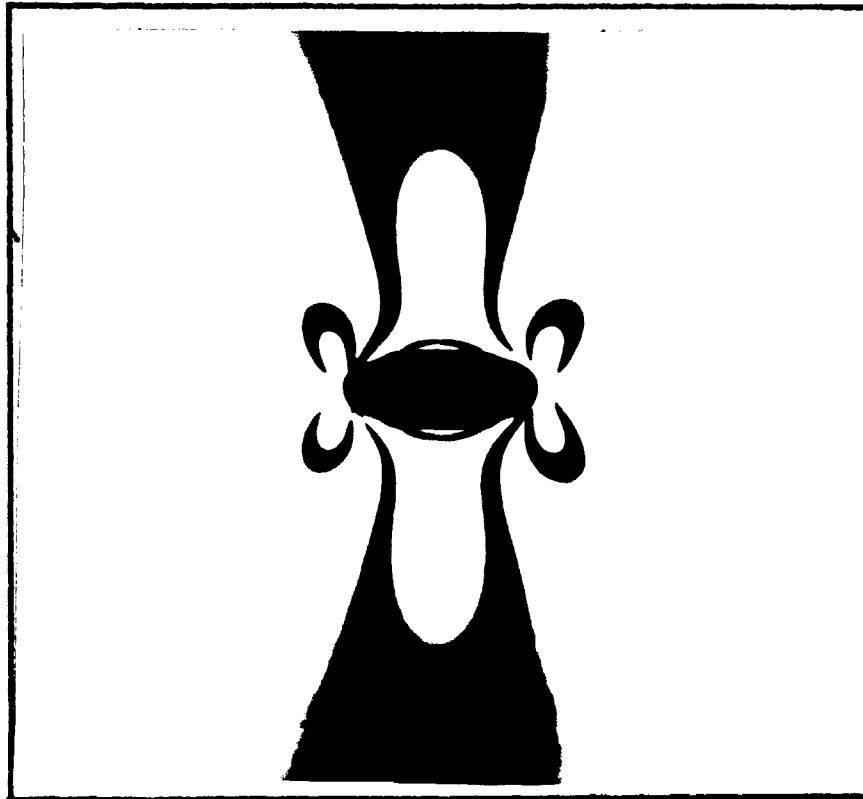
mod. isocromatico 15
fig. 125

carga = 1,30 kg/mm²
 $\lambda = 1,96$



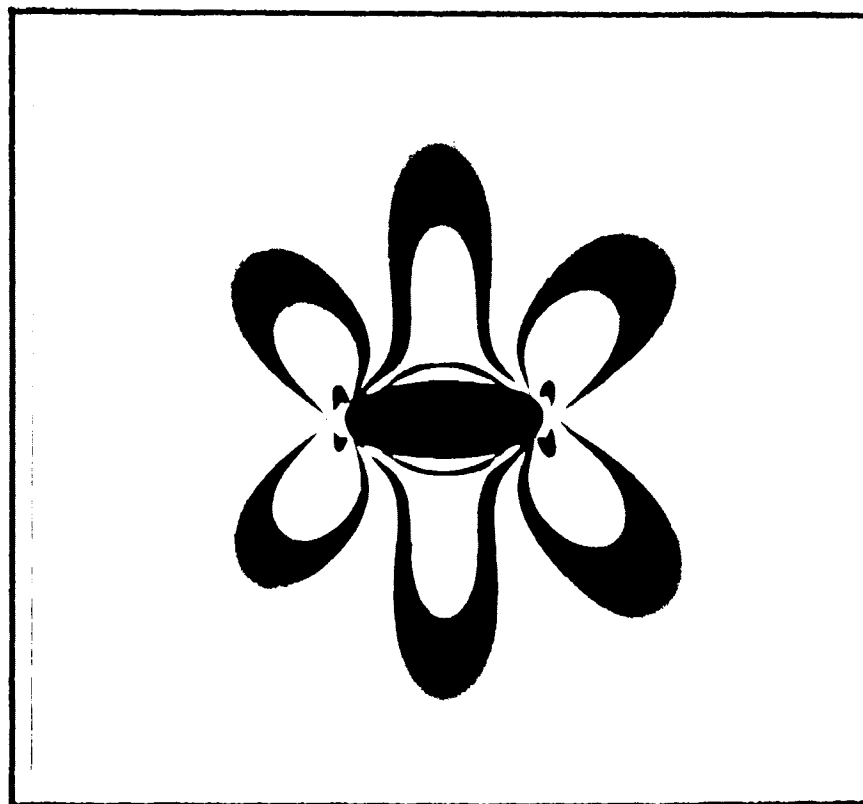
mod. isocromatico 16
fig. 126

carga = 1,32 kg/mm²
 $\lambda = 1,96$



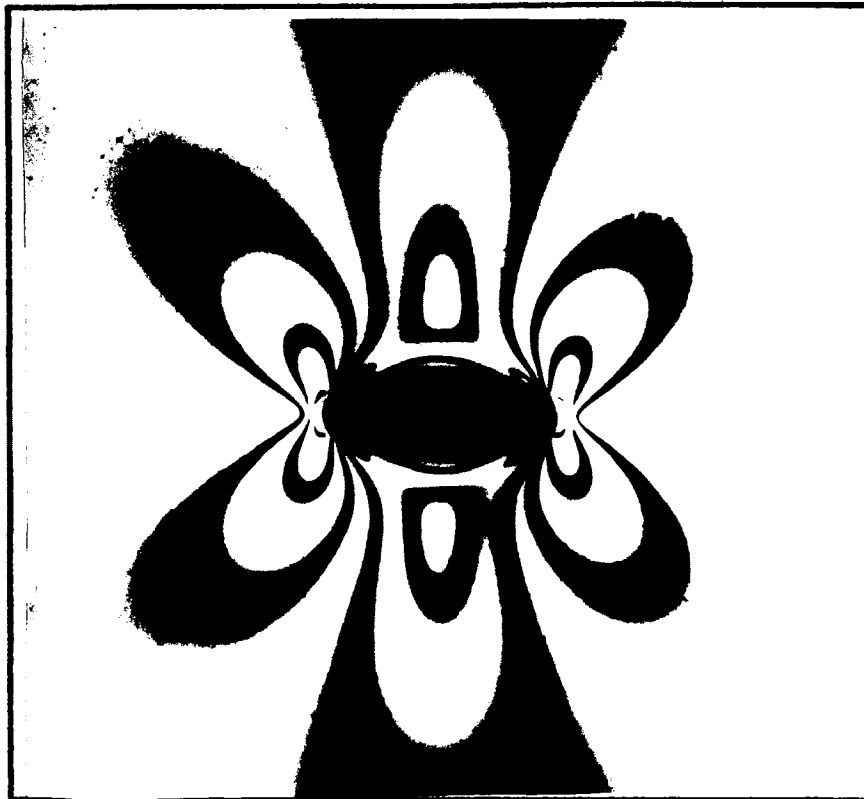
mod. isocromático 17
fig.127

carga=0,42 kg/mm²
 $\lambda = 1,43$



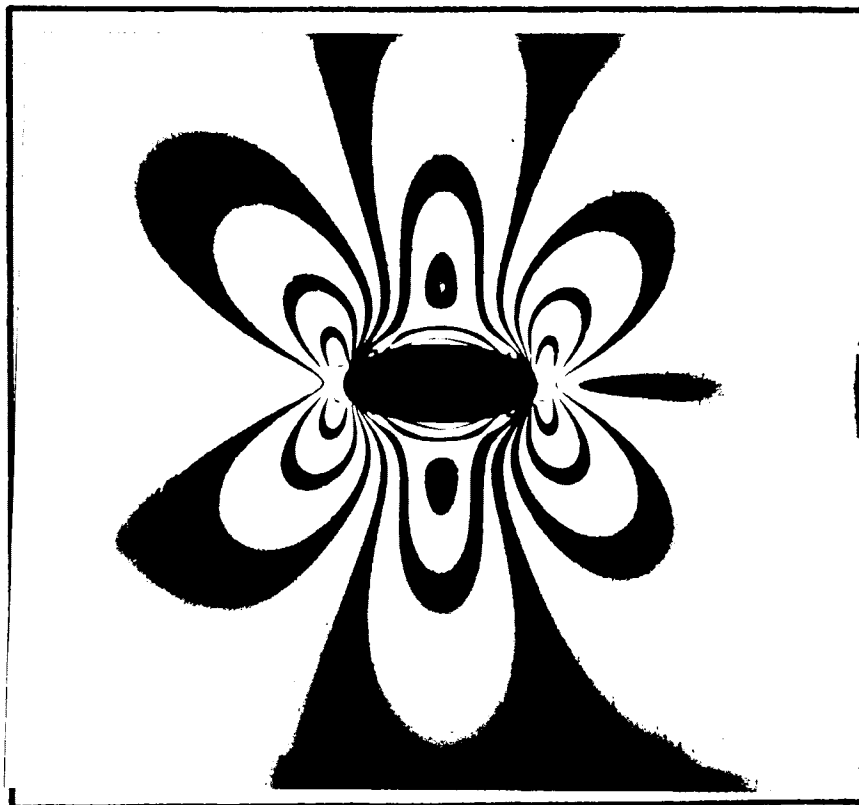
mod. isocromático 18
fig.128

carga=0,51 kg/mm²
 $\lambda = 1,43$



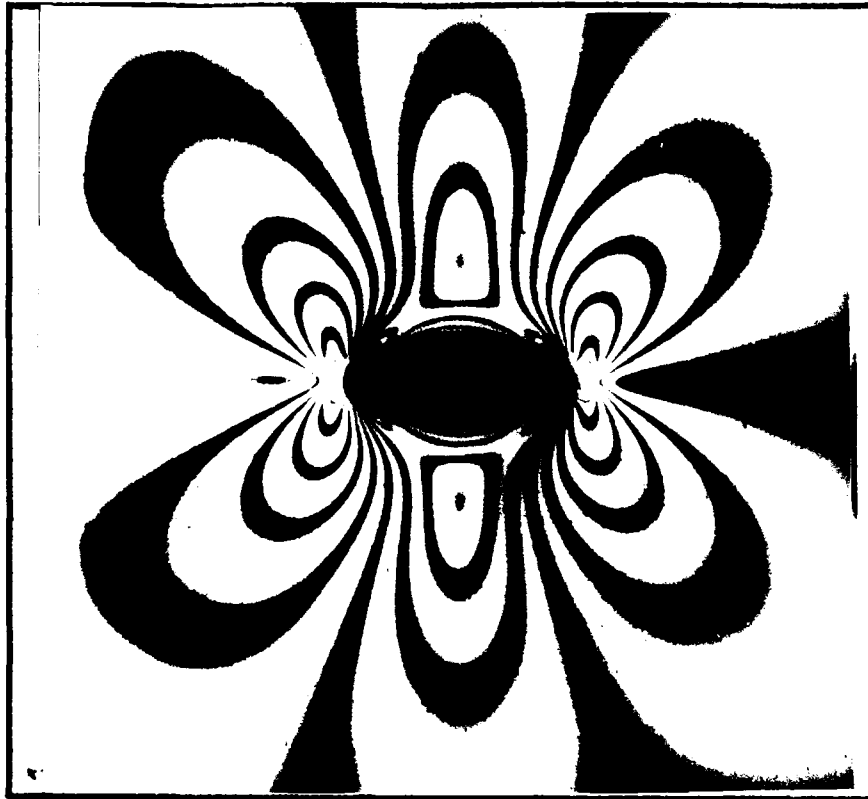
mod. isocromático 19
fig.129

carga = 0,76 kg/mm²
 $\lambda = 1,43$



mod. isocromático 20
fig.130

carga = 0,89 kg/mm²
 $\lambda = 1,43$

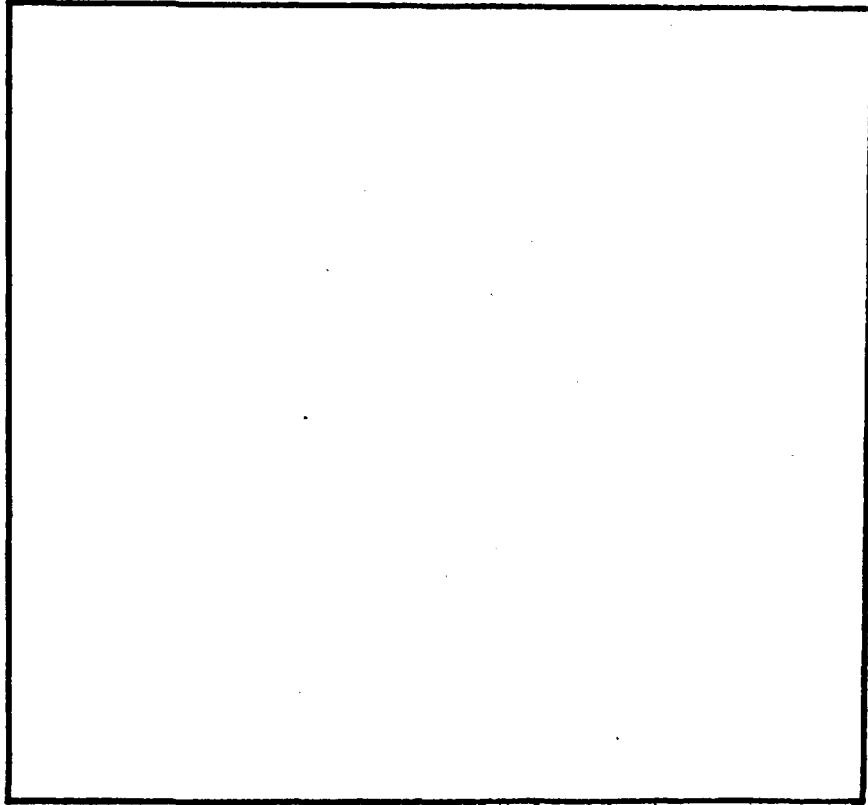


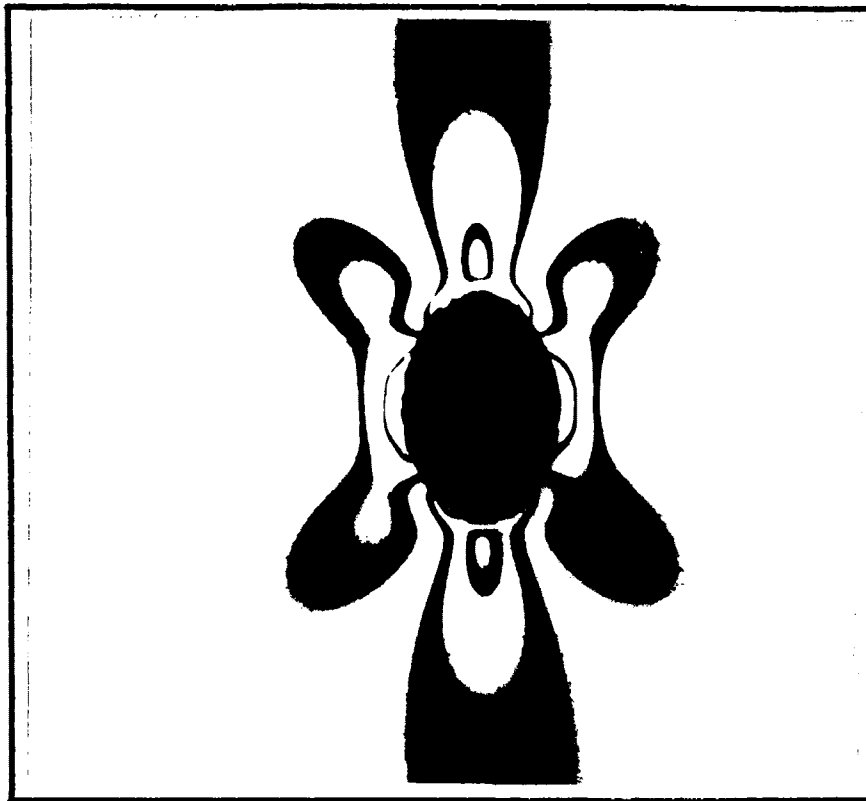
mod. isocromático 21

carga = 0,98

fig. 131

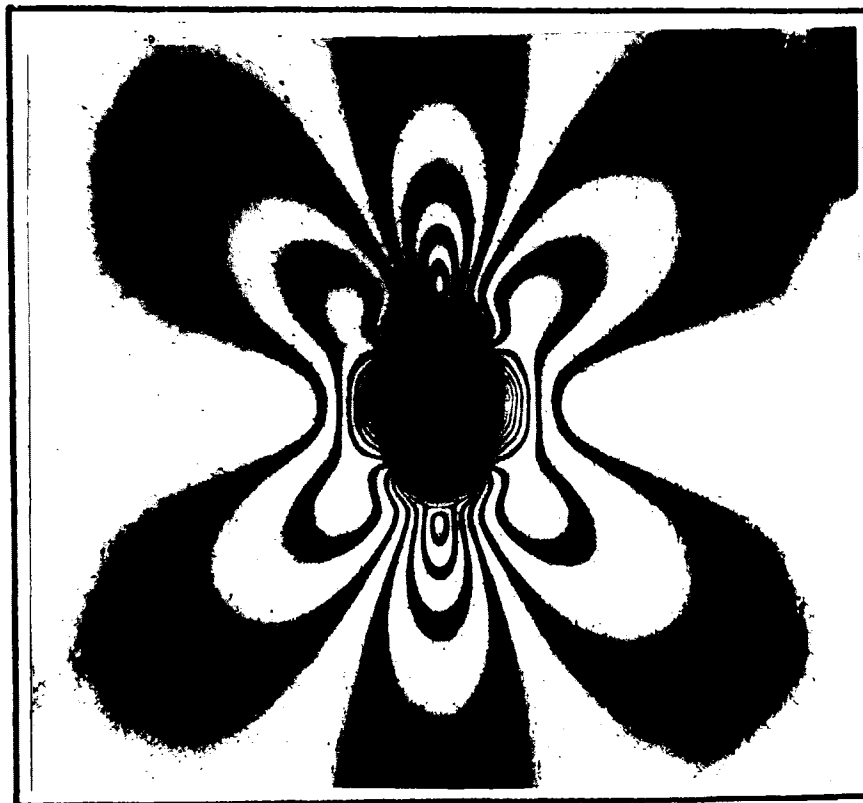
$\lambda = 1,43$





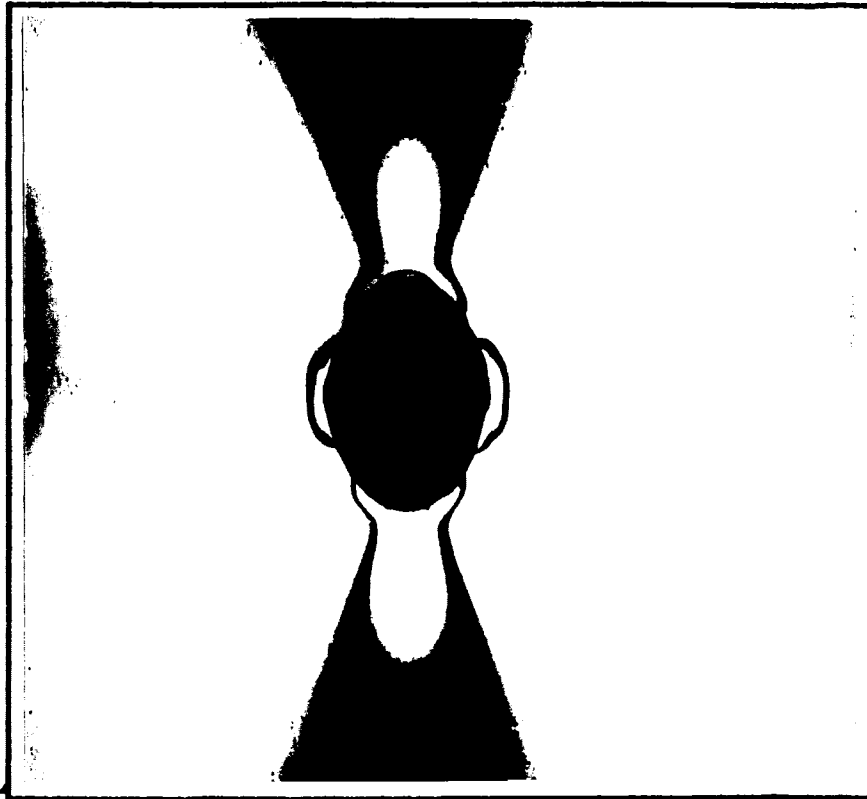
mod. isocromatico 24
fig. 132

carga = 0,56 kg/mm²
 $\lambda = 3,07$



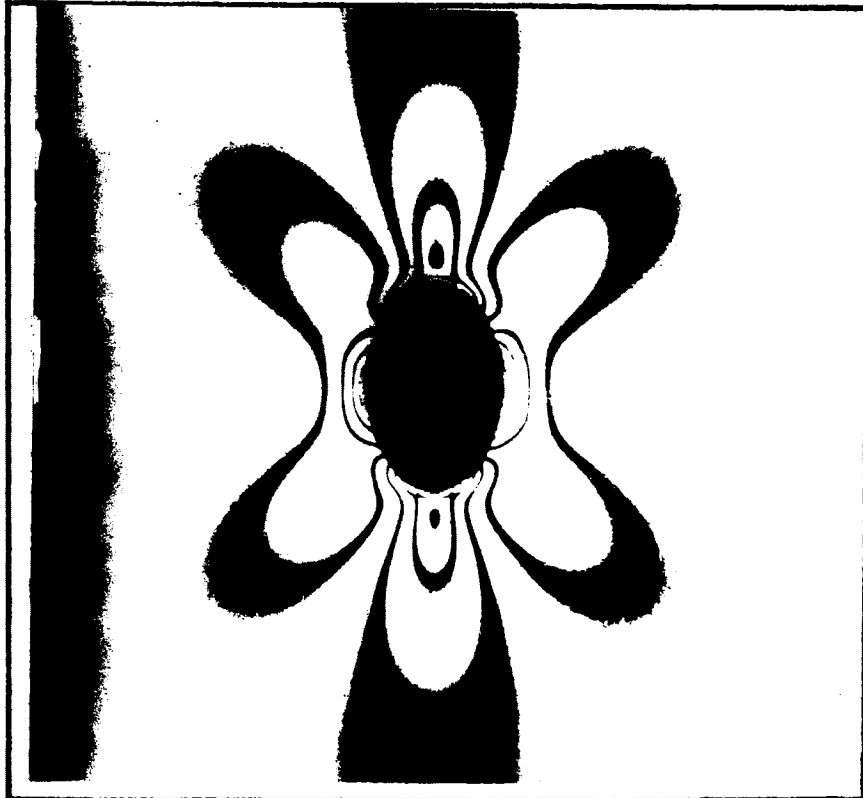
mod. isocromatico 25
fig. 133

carga = 1,69 kg/mm²
 $\lambda = 3,07$



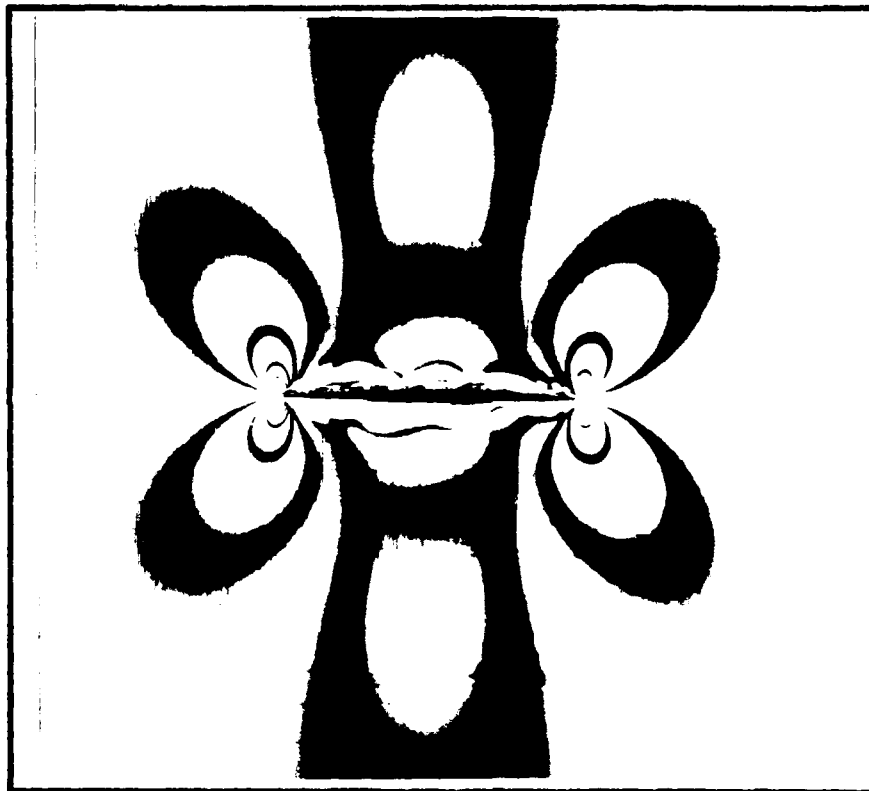
mod. isocromático 22
fig.134

carga=0,44 kg/mm²
 $\lambda = 3,07$



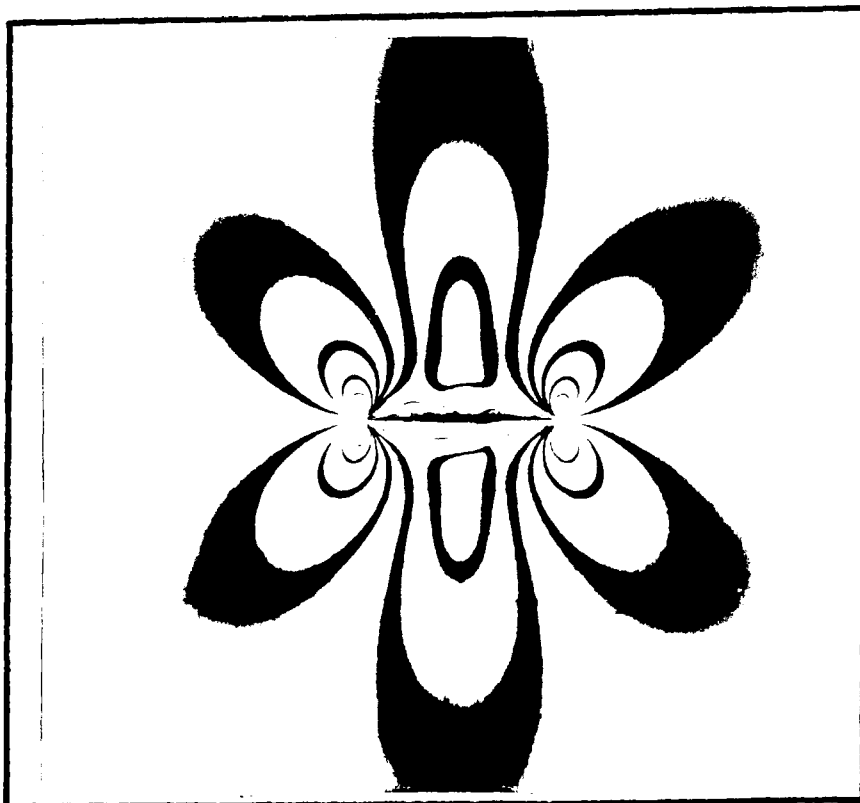
mod. isocromático 23
fig.135

carga=0,87 kg/mm²
 $\lambda = 3,07$



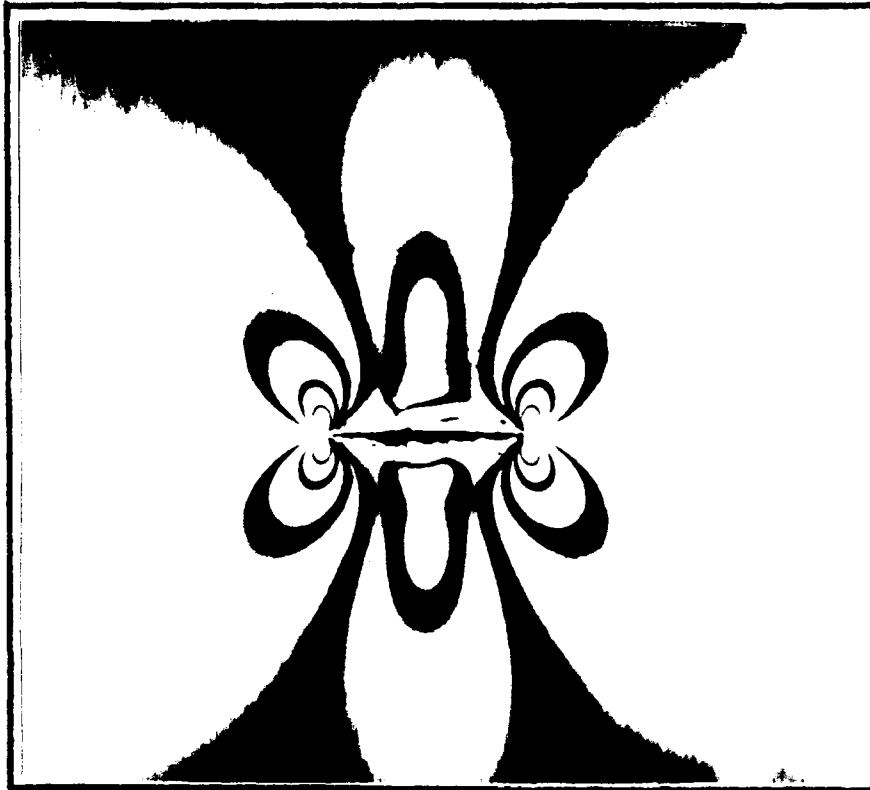
mod. isocromatico 26
fig.136

carga = 0,42 kg/mm²
 $\lambda = 1$



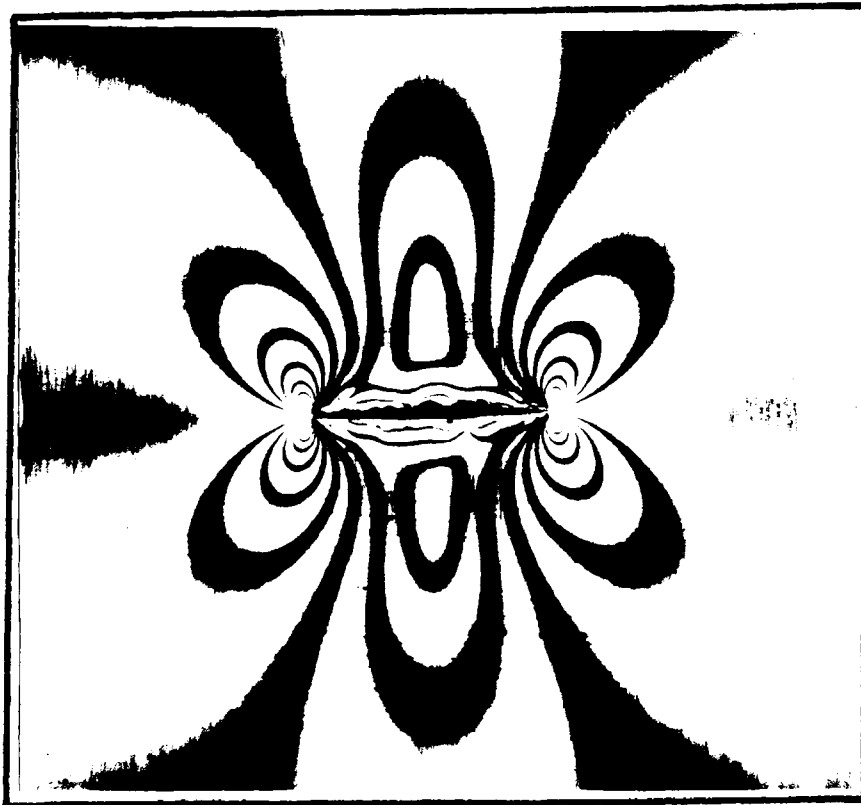
mod. isocromatico 27
fig.137

carga = 0,77 kg/mm²
 $\lambda = 1$



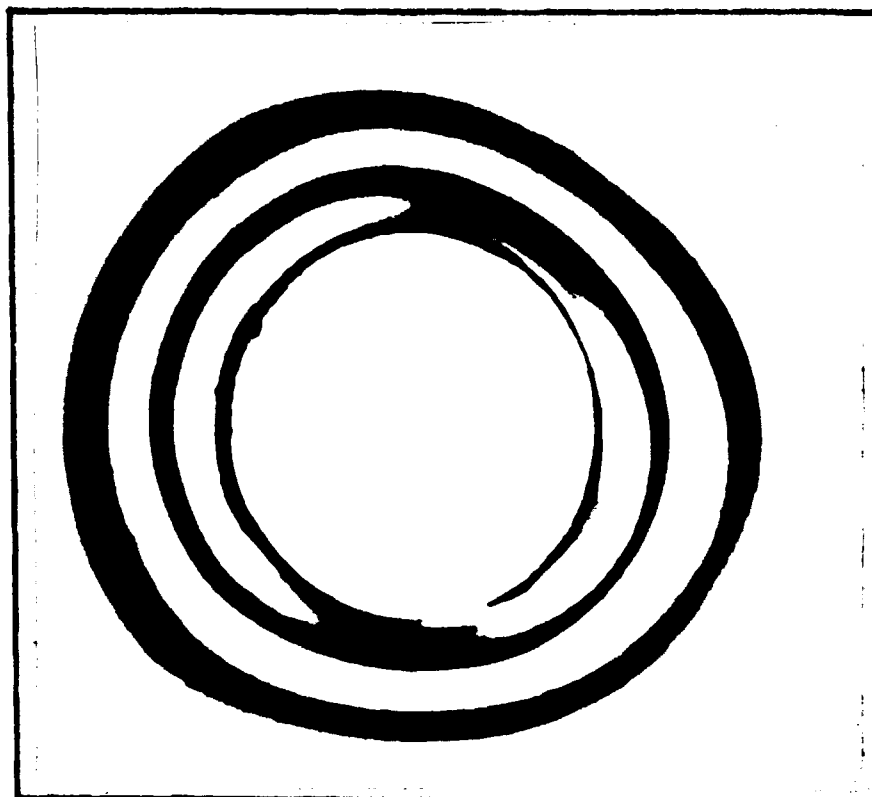
mod. isocromàtico 28
fig. 138

carga=0,75 kg/mm²
 $\lambda = 1$



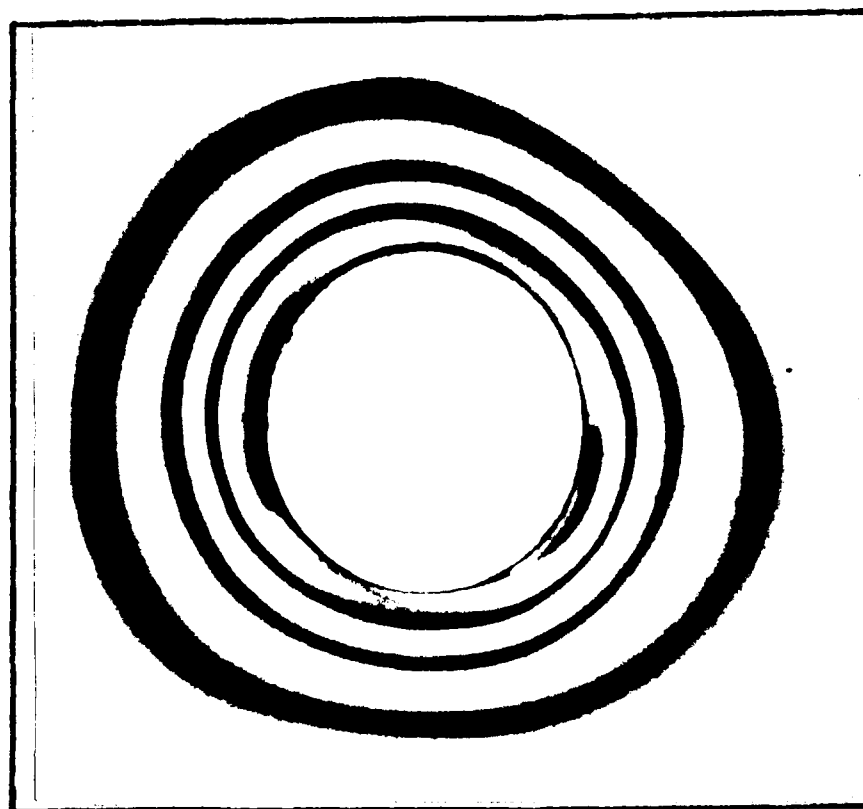
mod. isocromàtico 29
fig. 139

carga=0,95 kg/mm²
 $\lambda = 1$



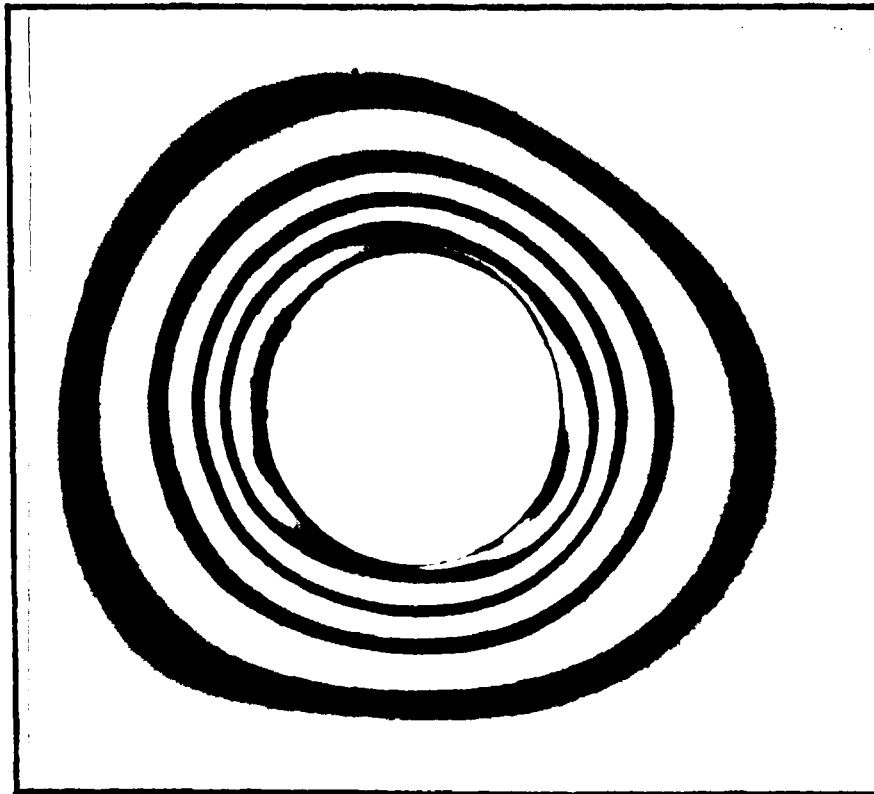
mod. isocromático 30
fig.140

carga=0,48 kg/mm²
r = 8



mod. isocromático 31
fig.141

carga=0,61 kg/mm²
r = 8

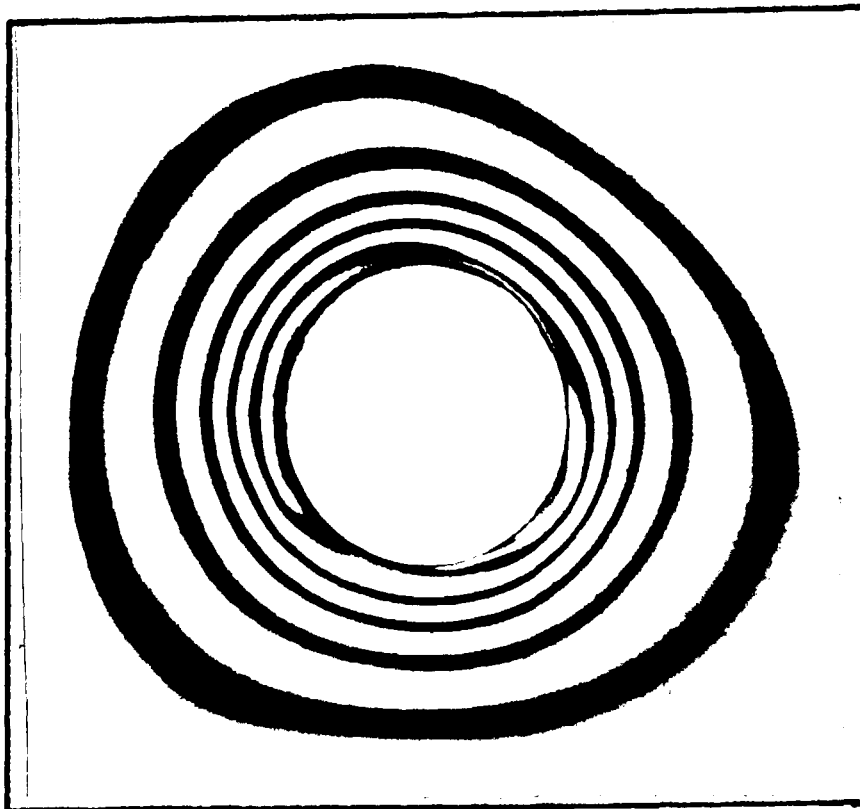


mod. isocromático 32

carga=0,82 kg/mm²

fig.142

r = 8

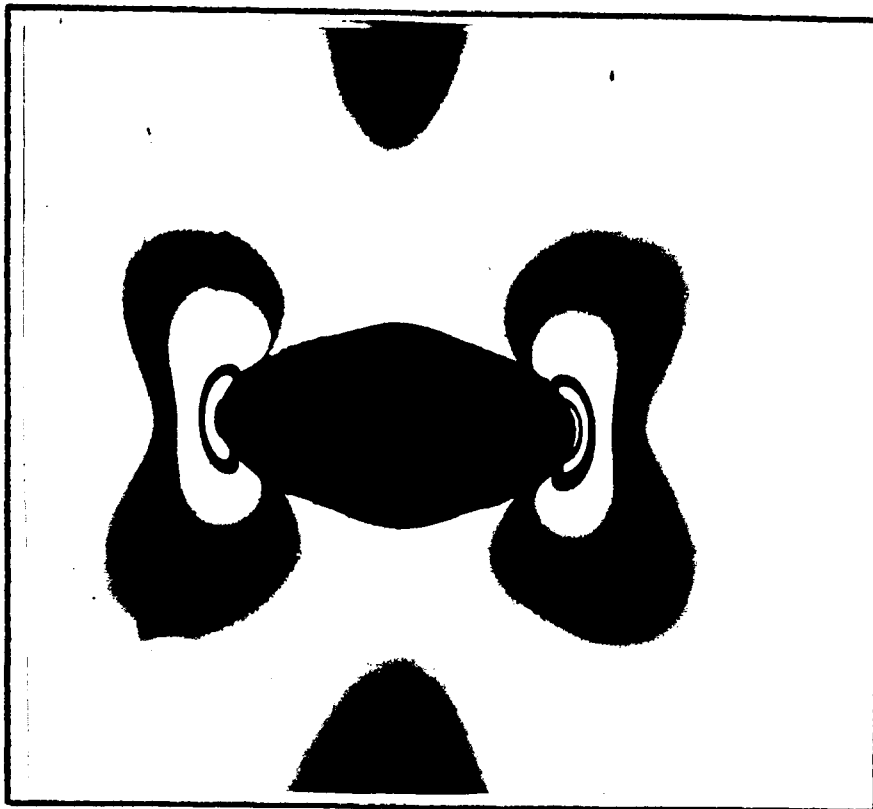


mod. isocromático 33

carga=1,08 kg/mm²

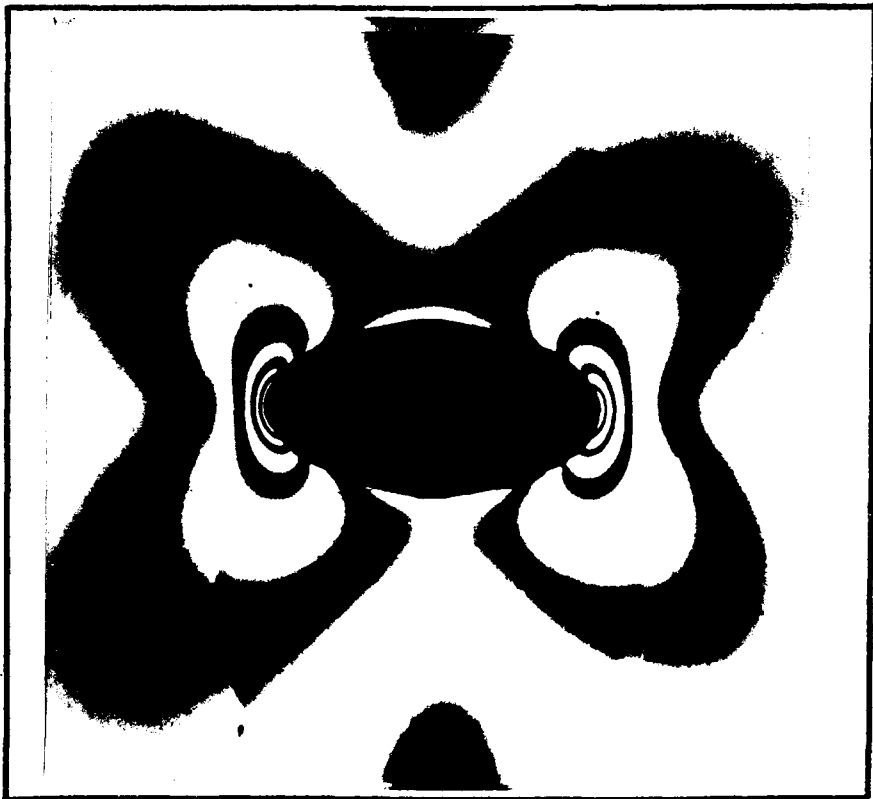
fig.143

r = 8



mod. isocromático 34
fig. 144

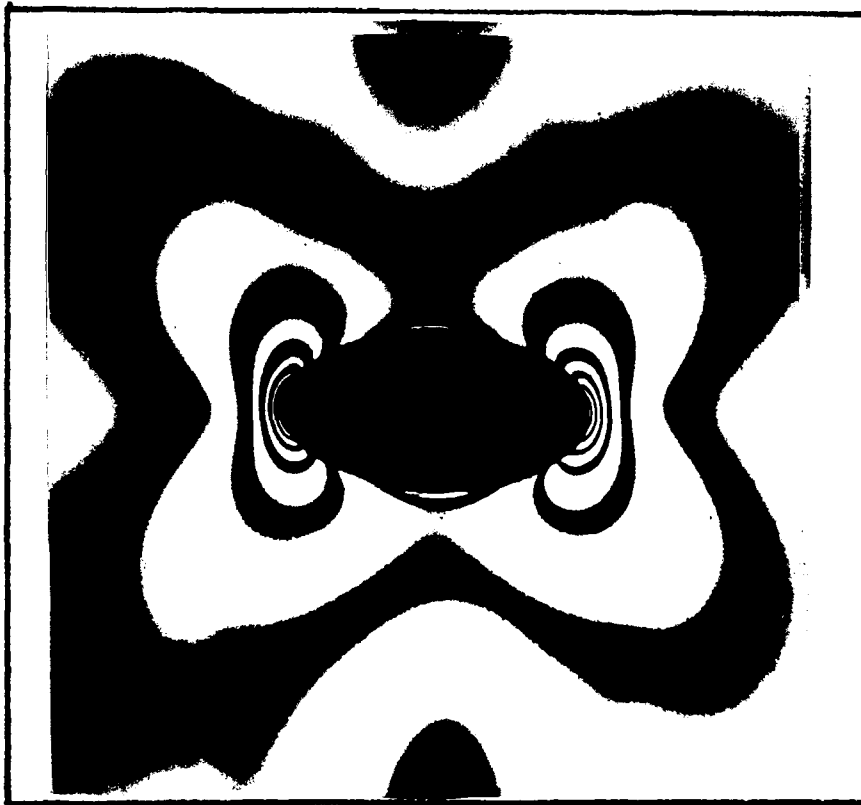
carga = 0,28 kg/mm²
 $\lambda = 1,69$



mod. isocromático 35
fig. 145

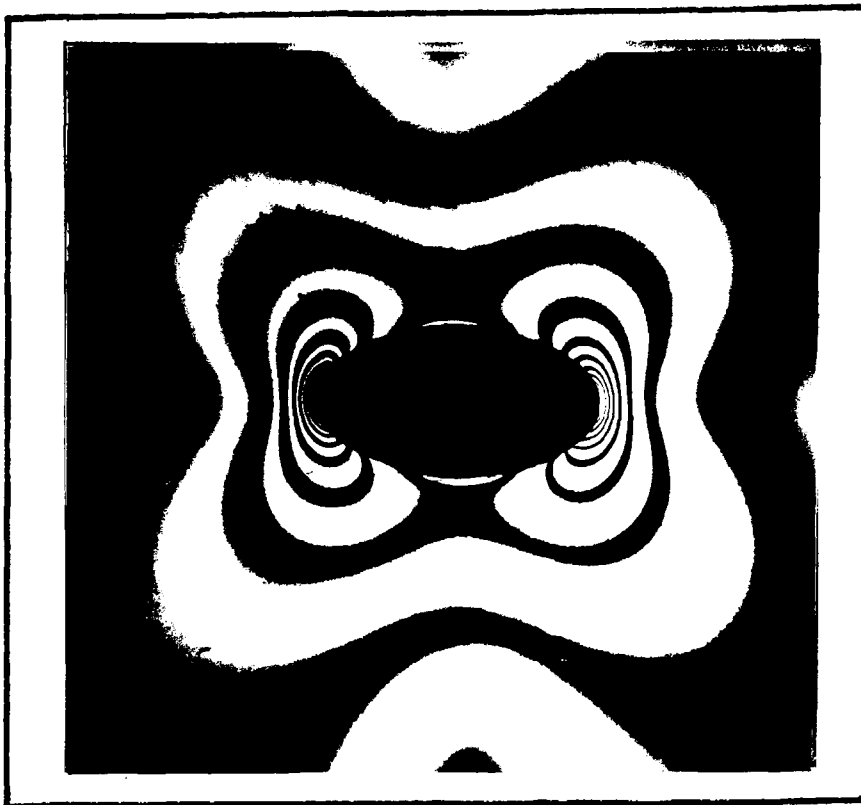
carga = 0,36 kg/mm²
 $\lambda = 1,69$





mod. isocromático 36
fig. 146

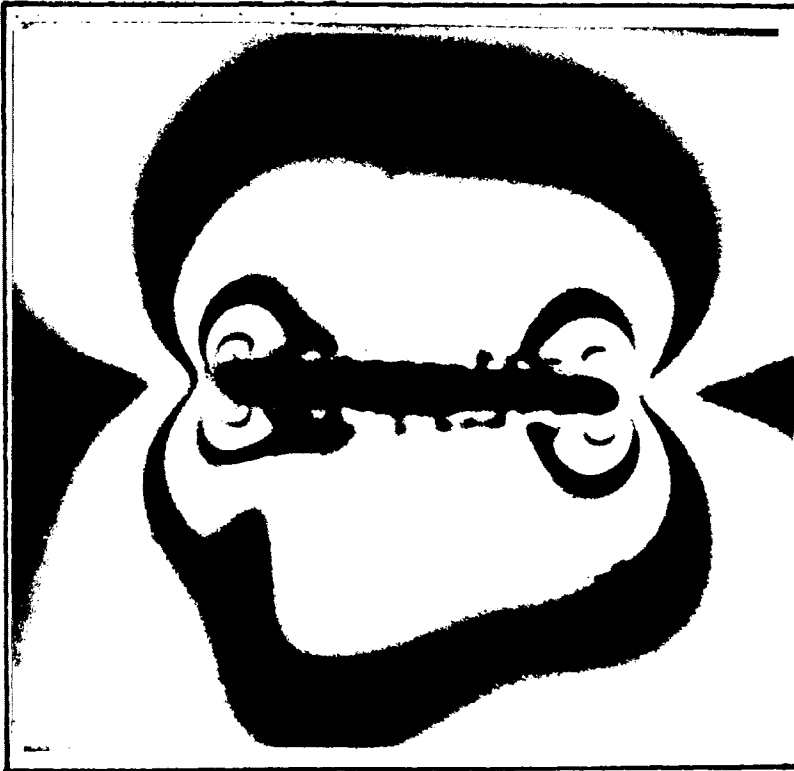
carga = 0,50 kg/mm²
 $\lambda = 1,69$



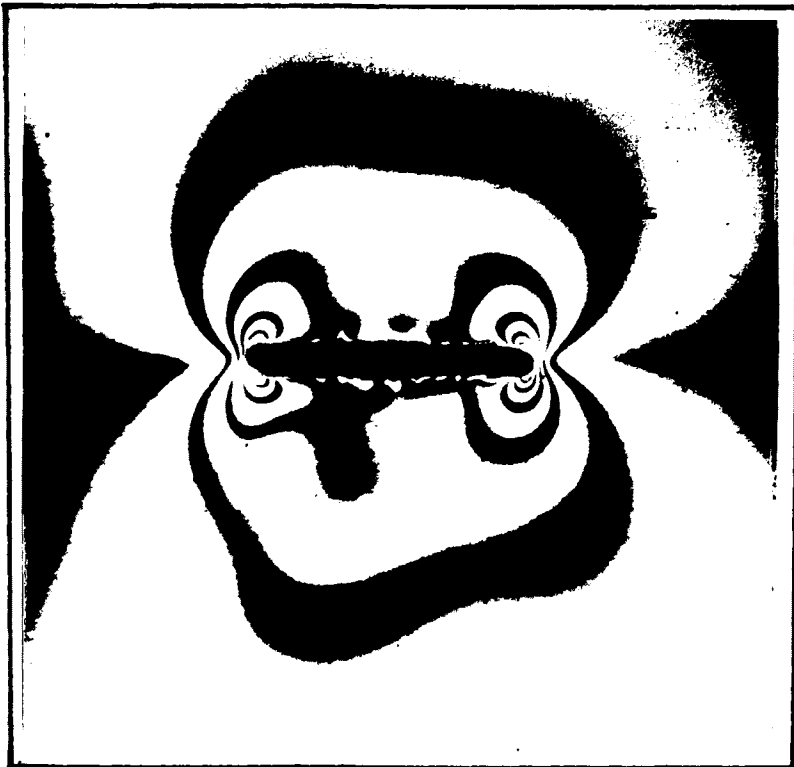
mod. isocromático 37
fig. 147

carga = 0,72 kg/mm²
 $\lambda = 1,69$

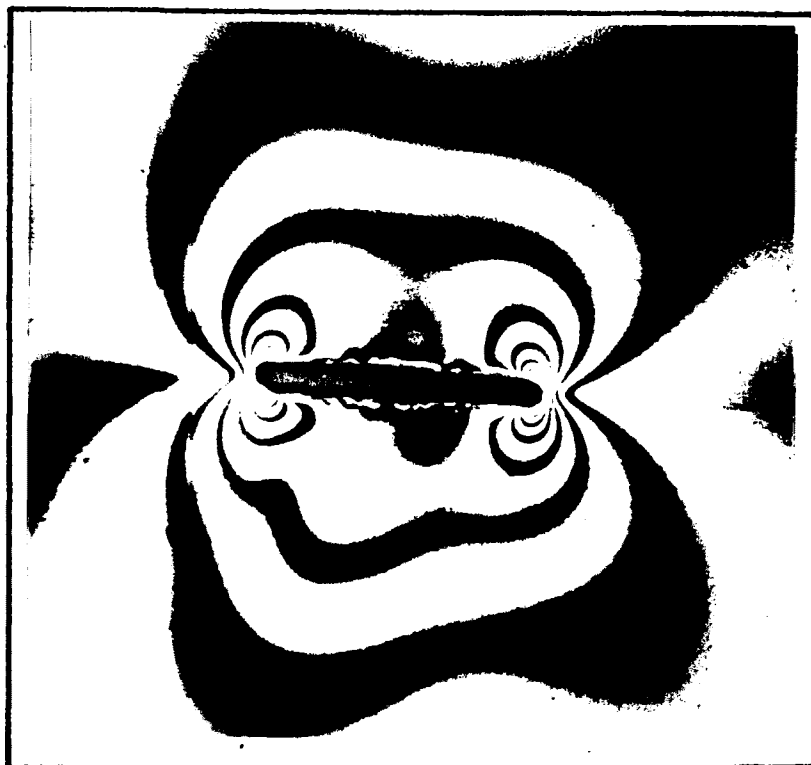
4.6.- EXAMEN FOTOELASTICO DE UNA LAMINA CON UNA GRIETA SOME
MÉTIDA A UN ESTADO DE TENSION BIAxIAL.



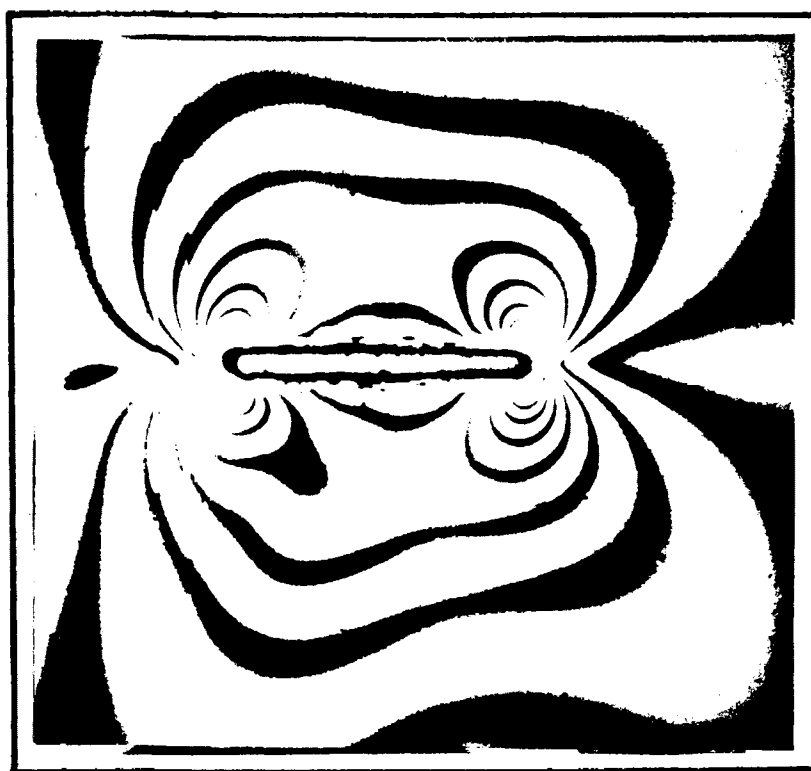
mod. isocromático 38 carga = 0,87 kg/mm²
fig. 148 $\lambda = 1$



mod. isocromático 39 carga = 1,05 kg/mm²
fig. 149 $\lambda = 1$



mod. isocromático 40 carga = 1,37 kg/mm²
fig. 150 $\lambda = 1$



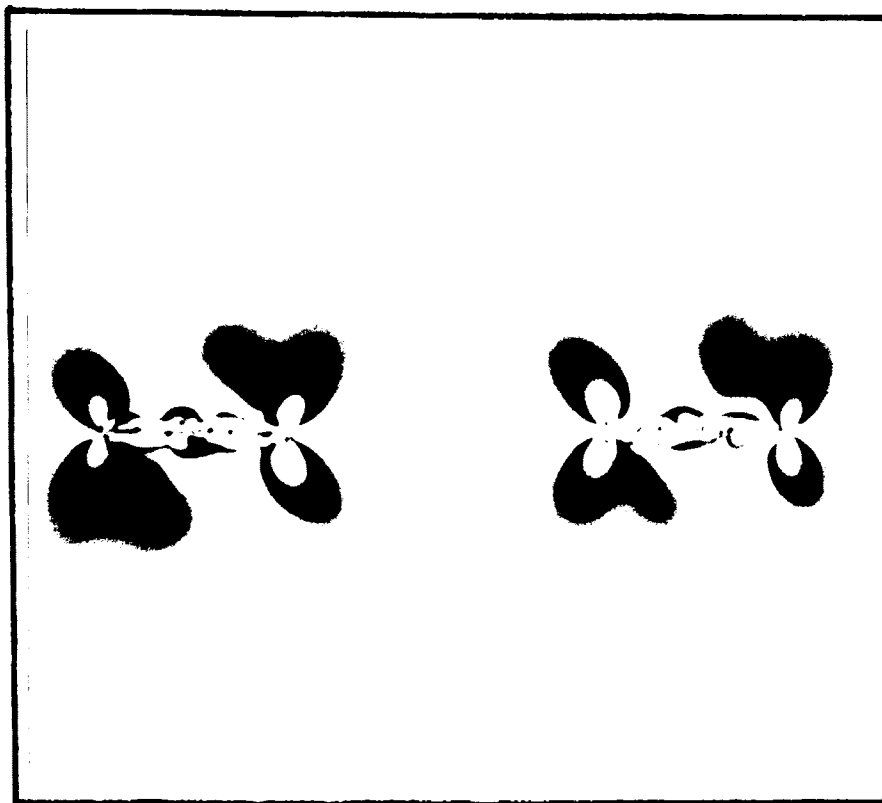
mod. isocromático 41 carga = 1,59 kg/mm²
fig. 151 $\lambda = 1$



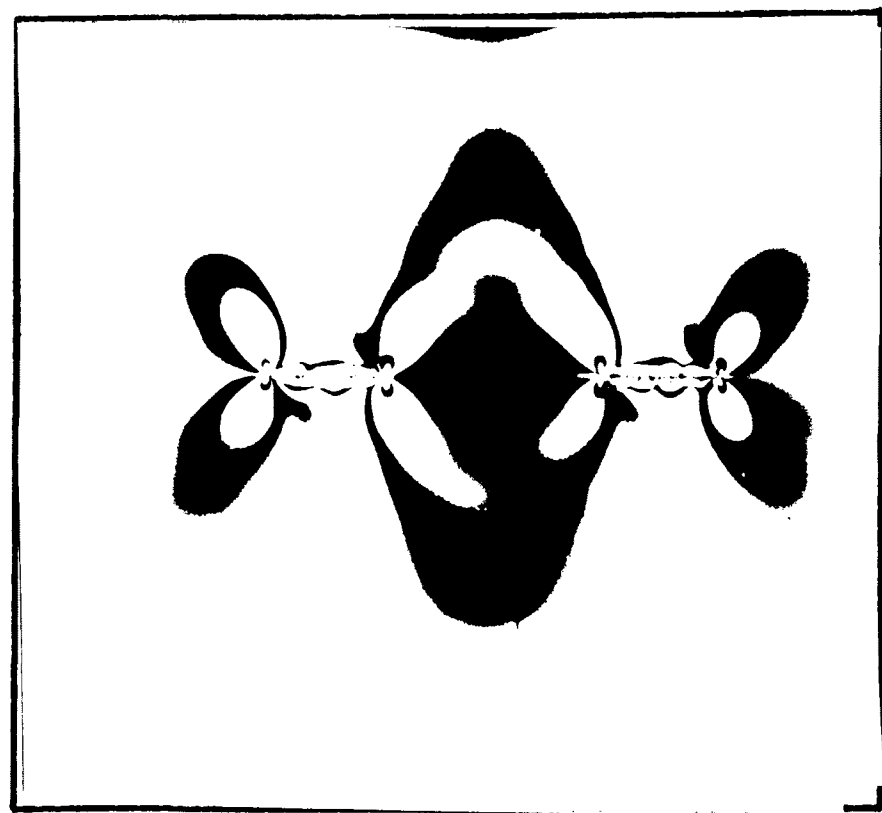
mod. isocromático 42 carga = 1,95 kg/mm²
fig. 152 $\lambda = 1$



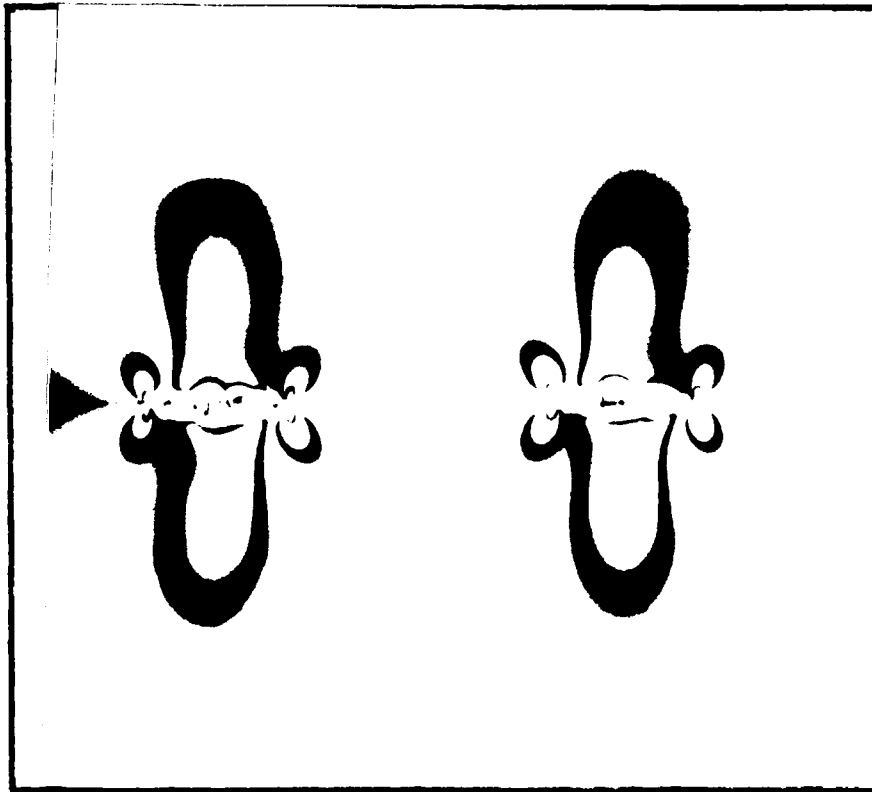
mod. isocromático 43 carga = 2,13 kg/mm²
fig. 153 $\lambda = 1$



mod. isocromático 44 carga = 0,28 kg/mm²
fig. 154 $\lambda = 1$

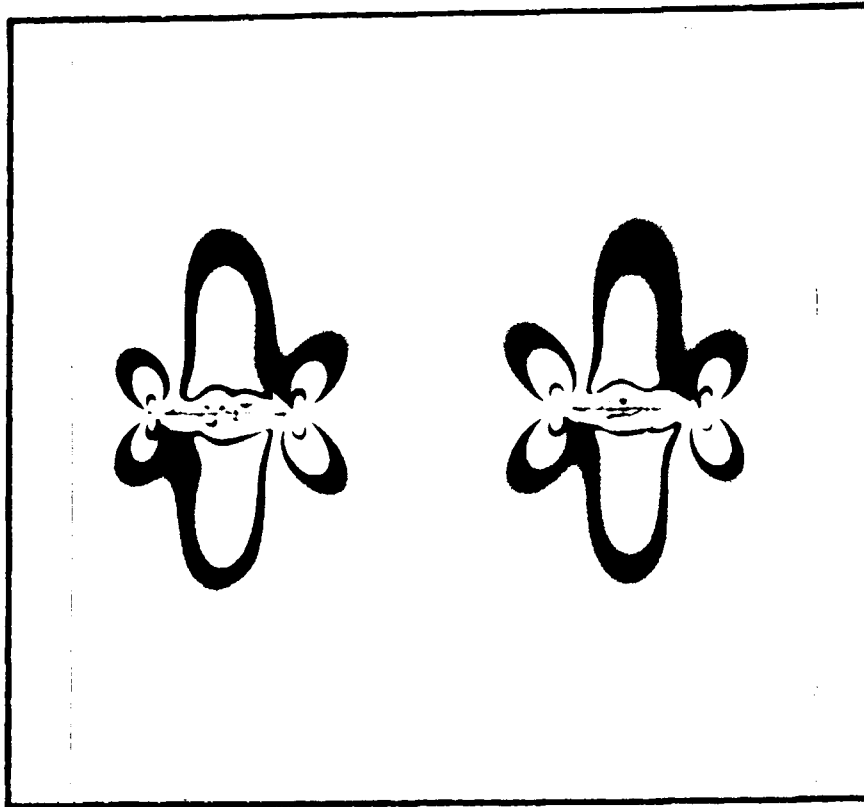


mod. isocromático 45 carga = 0,36 kg/mm²
fig. 155 $\lambda = 1$



mod. isocromatico 46
fig. 156

carga = 0,41 kg/mm²
 $\lambda = 1$



mod. isocromatico 47
fig. 157

carga = 0,45 kg/mm²
 $\lambda = 1$



V.- DISCUSSION



V.- DISCUSION

Todos los metales y especialmente los metales y aleaciones que se usan con propósitos de diseño, se han obtenido previamente en es tado líquido. Puede argumentarse que algunos metales se obtienen por vía húmeda, (Lixiviación, depuración y electrolisis), pero aún así finalmente se funden en lingotes adecuados para las posteriores ope raciones de hechurado, caso del Trefilado del cobre.

Si todo metal o aleación ha pasado brevemente por el estado lí quido quiere decirse que inevitablemente estará sometido a la conduc ta que le impone el fenómeno de la solidificación.

Como es bien sabido, en esta fase previa de la solidificación el metal o aleación estará sometido a fenómenos de nucleación y creci— miento dando lugar a un agregado policristalino en el que al menos — hay que distinguir un grano y un límite de grano, que tiene propieda des mecánicas muy diferentes y esto prescindiendo de otros fenómenos como presencia de compuestos, inclusiones, segregaciones, etc., que contribuyen todavía a presentar a un sólido recién preparado como — un conjunto de heterogeneidades que son inherentes, en el mejor de — los casos, al inevitable paso de líquido a sólido. Ciertamente que las pos teriores operaciones de hechurado pueden mejorar las propiedades me— cánicas de este sólido, pero en cualquier caso, la heterogeneidad de propiedades persiste, sino aumenta; tal es el caso del alargamiento del grano, y la aparición de propiedades direccionales.

Una aleación pues, no es un sólido homogéneo al que se le pueden



aplicar unas ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad o de la Resistencia de Materiales, por cuanto posee numerosos defectos internos inevitables, que desvirtúan los campos de tensiones previstos en un diseño y fácilmente conducen a exaltaciones de tensión con roturas fragiles, en un caso (especialmente en los aceros de gran resistencia), o a deformaciones indeseables que pueden (con materiales más plásticos), llegar a comprometer el diseño.

Todavía en la historia previa de una aleación, se pueden acrecentar estos defectos, si la aleación, ha experimentado tensiones previas, impactos o cargas cíclicas o incluso si en el mecanizado, - su acabado superficial ha dejado algún defecto o ha experimentado algún proceso de corrosión localizado. En unos casos se habrá producido una generación con intersección de dislocaciones con aparición de defectos no puntuales que pueden considerarse como submicrogrietas, que posteriormente crecen y sumándose a otros microdefectos, como pueden ser los de un mal acabado superficial, por donde un sistema de tensiones cíclico puede generar microgrietas, y en otros la falta de homogeneidad puede ser debida a la presencia de un campo residual de tensiones por tratamientos térmicos defectuosos, ó una operación de hechurado con deformaciones plásticas en frío e inhomogéneas, etc..

Esta cruda imagen real de una aleación nos obliga a examinar, hasta que punto estos defectos son un riesgo serio, para el buen funcionamiento de la misma cuando sometida a diversos estados de tensión forme parte de un equipo o estructura en servicio.




En la primera parte de esta Tesis se han reconsiderado toda una serie de mecanismos exaltadores de las tensiones, que terminan con las sencillas teorías de Griffith y Orowan, para la exaltación por grietas que son las más peligrosas.

Puede argumentarse que la construcción de cualquier equipo de gran responsabilidad, va seguida de un examen radiográfico ó gamma-gráfico, que asegure que estas grietas, sólo pueden estar presentes por debajo de un tamaño máximo tolerado.

Con esto lo que se garantiza es que al poner el equipo en servicio no va a ocurrir una catástrofe, pero lo que no se puede garantizar es lo que le ocurrirá a este equipo a lo largo de varios años de funcionamiento. Durante estos años, las microgrietas o heterogeneidades siempre presentes, crecen continuamente por defecto de la carga a que está sometido el equipo y solo revisiones periódicas, que aconsejen la puesta fuera de servicio del equipo podrian garantizar en principio la seguridad del mismo.

Aun así, sería necesario preveer tiempos de revisión suficientemente cortos, dado que es muy difícil estimar la velocidad imprevisible de crecimiento de estos defectos.

Un tratamiento racional, consiste sin perjuicio de que puedan llevarse a cabo las precauciones y revisiones mencionadas, en hacer una estimación real de las exaltaciones de tensión de defectos como grietas e incluso de otros defectos o cavidades, como son un orifi-



tio, que se introducen como necesidades del diseño , y de la exaltación no solo en las proximidades del defecto sino en todo el campo de tensiones ya que el ser una aleación un agregado policristalino con una distribución de defectos, el principio de superposición, adelanta que todo el campo de tensiones se va a ver alterado.

El estudio que se plantea trata de hallar un procedimiento general para conocer los estados de tensión en las proximidades del defecto y zonas alejadas de el, y tratar de justificar un mecanismo a base del estado de tensión que exista en la proximidad de un defecto para explicar el fenomeno de la rotura frágil.

Para ello se parte de la consideración de orificios en placas. Estos orificios pasan de tener una acuidad nula a una acuidad teóricamente infinita, es decir: grieta a tracción simple en su dirección, elipse de eje mayor en la dirección de la tracción, orificio circular, elipse con eje menor en la dirección de tracción y grieta normal a esta dirección. El examen de este conjunto de defectos comprende todos los casos posibles de acuidad nula a infinitos y justifica por lo tanto la elección de los mismos . Conviene notar ahora, que en realidad dos casos extremos: "grietas" y el "orificio circular", serán casos particulares de elipses.

Cierto que estos casos extremos han sido objeto ya de estudio y "consideración aislada" ; especialmente la exaltación de tensiones producidas por un orificio circular y a ellos nos remitiremos para - comprobar que tanto nuestros cálculos como nuestro procedimiento ex-




perimental son correctos después de lo cual se generalizarán a todo tipo de defectos mediante un tratamiento de validez general para todos ellos, a diferencia de las diferentes soluciones aisladas que se han propuesto para el orificio circular y la solución de Westergaard como única solución límite de validez para las tensiones en el vertice de una grieta, solamente.

Para la confirmación experimental de los tratamientos analíticos, se usa el método fotoelástico, por ello se ha hecho una revisión de todos los aspectos y pasos del procedimiento fotoelástico que no aparecen completos en la bibliografía y el autor, -- con dos polaroides de gran campo diseñado y posteriormente se construyó en el Taller de la Facultad el equipo fotoelástico que anteriormente se ha descrito.

A este equipo fotoelástico sólo puede ponérsele una objeción: la dificultad de conseguir una carga concreta pensada de antemano ya que el banco de carga funciona mediante una bomba de inyección de aceite manual capaz hasta 12 ton. Hubiese sido necesario una motobomba en funcionamiento permanente con circuito de retorno, análogo al de las máquinas para ensayos de tracción, para conseguir un ajuste y regulación fina de la carga aplicada, no obstante en la mayoría de los casos no es necesario esta complicación de montaje y únicamente se pone de manifiesto esta limitación en aquellos casos como son estados biaxiales rigurosamente equilibrados como es el caso de los modelos a tracción biaxial.

Finalmente el equipo de medida de la presión del aceite que



permite el cálculo directo de la carga aplicada al modelo, ha sido verificado y garantizado para errores inferiores al 0,5% .

Una dificultad que se hubo de superar a base de numerosos ensayos, se deriva de la inexistencia en España de láminas para modelos fotoelásticos. De la bibliografía se sabe que siempre y recientemente, se hace uso de resinas epoxy pero las, denominaciones comerciales no se citan o no son iguales a las de las resinas de venta en nuestro país. Después de numerosos ensayos se eligieron la resina Araldit-D y el endurecedor HY-956 con los que se obtenía el máximo poder birrefringente, análogo este, a la birrefringencia de las láminas usadas en el extranjero. y de elevadísimo coste.

La preparación de láminas a partir de la resina y endurecedor líquidos, exige el empleo de moldes adecuados.

El principal objetivo para la fabricación de una lámina , una vez garantizado un buen poder birrefringente, consiste en fabricar la lámina "sin tensiones internas", lo cual supuso grandes dificultades prácticas. Estas tensiones internas suponen un reparto irregular de redes de isóclinas que desvirtúan por completo cualquier observación programada.

La aparición de tensiones residuales en la lámina fotoelástica es consecuencia de dos factores .

1º. Una defectuosa mezcla de la resina y del endurecedor , que



se reciben como líquidos pastosos separados y

2º. La liberación del calor que se produce en el curado del plástico. Esta reacción de polimerización es fuertemente exotérmica y si no se elimina por igual el calor, en toda la masa, aparecerán las temibles tensiones internas.

La mezcla de resina y endurecedor no presenta dificultades, aunque hay que realizarla con gran paciencia con un agitador adecuado y cuyo giro ha de ser lo más rápido posible pero siempre a unas revoluciones por minuto inferiores a la aparición de burbujas en la mezcla, que luego forman cavidades esféricas en la lámina solidificada inutilizándola por completo.

Para la eliminación del calor, el molde de las láminas se construyó de un metal buen conductor como el aluminio y durante la solidificación el molde está sumergido en un baño termostatzado que mantiene la temperatura constante del agua de refrigeración. El gradiente de temperatura ha de ser de unos 5º y la solidificación suele hacerse de un día para otro, a la temperatura constante de 20º C. Entre el molde de aluminio y la resina que se adhiere a él, se interpone una lámina de plástico, que se separa perfectamente del modelo y resulta conveniente que previamente se le de una película de aceite de parafina, o producto similar.

También hemos podido "salvar" algunas láminas con pequeños defectos mediante recocidos de las tensiones internas, en agua caliente a 50 - 60º C. y durante varios días, pero si las tensiones resi-



duales son escasamente apreciables será necesario desecharlas o aprovechar los recortes sanos de las láminas.

En este trabajo se ha hecho una revisión de los diferentes procedimientos empleados , por diversos autores para el calibrado , medida de la constante fotoelástica.

El valor alcanzado por nuestros modelos de 45 Brewsters, está entre el valor de 30 y 50 esperado para ellos y es muy aceptable. También en el calibrado se ha procedido al cálculo previo de las cisiones máximas correspondientes a los diez primeros ordenes de franja . Este trabajo no entraña dificultades conceptuales, si bien requiere una gran paciencia y habilidad práctica.

El tamaño de los modelos se ha elegido muy grande, ya que el equipo dispone de polaroides de gran tamaño, lo que nos permite un examen del campo de tensiones en zonas alejadas del defecto.

Un aspecto no comentado , del banco de carga del fotoelástico, estriba en la gran precisión con que han de estar rectificadas las mordazas de sujeción de los modelos. El contacto entre modelo y mordaza se ha hecho naturalmente a través de una cola de milano de pocos grados de inclinación. A pesar de que los modelos están rectificados y también en sus colas de amarre, a veces fué necesario, pulirlas en determinadas zonas para que la mordaza no introduzca "ninguna " isóclina espúrea . Este re-paso se efectúa hasta que el modelo en carga no presente ninguna "isócloma de mordaza", lo cual exige una habilidad especial



dado que las cargas pueden llegar a 12 Ton. y para este nivel de carga es muy difícil que no aparezca alguna isócrona próxima a la mordaza . De todas formas el defecto a estudiar está suficientemente alejado y el principio de Saint-Venant , se cumple satisfactoriamente , permitiendo observaciones fotoelásticas perfectas.

Puesto que la mordaza puede tener unos 200mm, los modelos, se eligieron de un espesor de 4 mm, de tal manera que la sección recta del modelo es de 800 mm^2 y para tensiones de hasta 6 Kg/mm^2 , la carga total será de unos 4,8 Ton., trabajando así en la zona media de los manómetros que es la de máxima sensibilidad. Finalmente los modelos han de estar rectificadas en toda su superficie y pulidos, han de ser perfectamente planoparalelos para que las isócronas se aprecien nítidas y con gran contraste.

En el capítulo III, se describe el procedimiento general seguido para hallar las funciones de tensión generales que resuelvan todos los casos planteados.

El planteamiento general que, se sigue hace uso del principio de superposición, pero la gran dificultad estriba en llevarlo a la práctica y en encontrar las funciones de tensión adecuadas que conduzcan a una solución. Con frecuencia el tipo de funciones de tensión que resultan y el sistema de coordenadas al que están referidas las variables conducen a una dificultad extrema y hasta a la imposibilidad de hallar una solución . En estos casos, han de buscarse o nuevas funciones de Tensión que, puedan resolver el problema o hacer un cambio de variable, de siste



ma de referencia para llegar a una solución , que siempre ha de procurarse que sea lo más sencilla posible.

Al abordar la solución analítica del orificio elíptico, como caso general, del que se van a derivar todos los demás, se adoptó un sistema de coordenadas elíptico.

De esta manera se llega a dos funciones de tensión de variable compleja relativamente sencillas, que se aplican a continuación al caso general más sencillo de un orificio elíptico a tracción uniaxial en el contorno , y que quedan precisados al fijar la geometría de la elipse y las condiciones de contorno.

Antes de proseguir , se procede ahora a aplicar las funciones de tensión generales al caso particular del orificio circular y deducir la expresión para las tensiones máximas y el lugar geométrico de las que toman el mismo valor, en diferentes puntos del modelo, con objeto de comprobarlas experimentalmente -- con las redes de isócronas obtenidas fotoelásticamente para diferentes condiciones de contorno .

Ya comentamos que se han dado varias soluciones "aisladas" para el orificio circular. En este trabajo se llega, a soluciones analíticas nuevas que han de concluir a las mismas predicciones y confirmación experimental , pero con la diferencia, de que esta confirmación supone aquí mucho más . Supone la confirmación de las funciones generales para todo tipo de defectos a través de -



'este caso particular y supone que nuestro desarrollo analítico y nuestro "modus operandi experimental" son correctos y esto explica la atención que se le presta a este modelo, ya que será la base segura de que todo lo que posteriormente se haga será correcto analítica y experimentalmente.

Dada la simetría del orificio circular será más cómodo dar las tensiones en un sistema de coordenadas polares, especialmente la expresión de las tensiones para su comprobación con la red de isocromas.

En las ecuaciones (36, 37 y 38), se dan las tensiones en torno a un orificio circular, para una condición de contorno a tracción uniaxial. Resultan unas ecuaciones diferentes a las conocidas, y de una complejidad similar ó más sencillas, y que conducen exactamente igual a los resultados ya previstos como se verá. La ecuación (39-a), da la expresión analítica para las redes de isocromas, y las ecuaciones (40) y (41), las tensiones principales en cualquier punto del modelo, como forma más sencilla.

En las tablas III, IV, V, VI, VII, VIII, IX y X, se dan los valores de las tensiones para cada par de valores (r, θ) polares, correspondientes al lugar geométrico en el que deben aparecer las isocromas para cada valor del contorno $(\sigma_0)_i$ a tracción uniaxial. Estas soluciones analíticas como todas las de este trabajo, se han obtenido mediante programas FORTRAN V en el ordenador UNIVAC 1108 del Centro de Procesos de datos de Madrid.



Las figuras 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16, son las redes de isocromas construidas con las soluciones analíticas del modelo.- La confirmación experimental de estas curvas isócronas se presenta en las figuras 111 a 118. Puede apreciarse que la fidelidad de reproducción no deja lugar a la menor duda.

A partir de ahora se da como válido el planteamiento analítico general hecho, así como la calidad excelente, por la finura y simetría de las isócronas presentadas en las figuras 113 a 118 excepto en las figuras 111 y 112, donde se ha remarcado con un círculo (a) la parte de la isocroma que no tiene aun orden entero de franja.

En las figuras 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29 y 30, se da la variación de las tensiones σ_x , a $\theta = 0^\circ$ y $r = r_1$ ($r_1 = 11$); o sea - en un eje normal a la tracción uniaxial del contorno. En este caso, de la simetría del orificio y del campo de tensiones se sigue que σ_x y σ_y son tensiones principales ($\sigma_x = \sigma_2$, $\sigma_y = \sigma_1$).

Puede apreciarse que la tensión $\sigma_2 = \sigma_x$, toma un máximo para $r = 16 \text{ mm}$ y el valor del máximo siempre es un 40% en una primera aproximación, de la tensión de contorno $(\sigma_0)_1$, resultado predicho analíticamente y confirmado fotoelásticamente.

Resulta sorprendente que esta particularidad no haya sido resaltada, ya que tratándose de agregados policristalinos, el principio de superposición obliga a considerar que cualquier defecto



en esta zona relativamente alejada del extremo del defecto, puede exaltar notablemente la tensión de otro defecto situado precisamente en esta zona de máximo y en la dirección \vec{x} ó \vec{z} .

Los valores de las tensiones $\sigma_y = \sigma_1$ en la dirección \vec{y} ó \vec{I} y en puntos $(\theta = 0, r = r_i)$, $(r_i \geq 11 \text{ mm})$, se dan en las figuras 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, y 32. En todas ellas se aprecia una tensión máxima a distancia nula del defecto o sea $(\theta = 0^\circ, r = 11 \text{ mm})$ y vale justo 3 veces la tensión del contorno $(\sigma_0)_i$. Este resultado es bien conocido y proporciona una confirmación más, de que las ecuaciones analíticas usadas y las redes de isocromas obtenidas fotoelásticamente son correctas.

La fig.33, pone claramente de manifiesto que los valores de $\sigma_y = \sigma_1$ (y también los de $\sigma_x = \sigma_2$), para el mismo punto alejado del orificio (r_i, θ_i) , son siempre un mismo factor α_1 (y α_2), - dado por la solución analítica, multiplicado por la tensión uniaxial del contorno o sea $(\sigma_y, \sigma_x) = (\sigma_0)_i f(r_i, \theta_i)$ para las direcciones \vec{x} e \vec{y} , siendo $f(r_i, \theta_i) = \alpha_{1,2}$.

Otras particularidades de interés no puestas de manifiesto en la bibliografía, consisten en la predicción analítica, confirmada fotoelásticamente, de que a : $(r = 11 \text{ mm}, \theta = 90^\circ)$, (parte superior del orificio), será un estado de compresión, cuyo primer invariante es el doble de la tensión de contorno.- Es evidente que en esta zona, el estado de compresión biaxial, tendería a oponerse a la generación o propagación de cualquier



microdefecto, por lo tanto en una pieza estática es una zona de seguridad a efectos de diseño a rotura aunque no cabría aquí disminuir excesivamente la sección del material.

Para ($r = 11 \text{ mm}$, $\theta = 60^\circ$), aparece un punto singular. El primer invariante del estado de tensión y todas las tensiones son nulas. En estas zonas sí que cabe rebajar la sección a efectos de diseño en una pieza estática, sin el menor peligro ni temor por la presencia de microdefectos y finalmente para ($r = 11 \text{ mm}$, $\theta = 0^\circ$), el primer invariante del estado de tensión del estado de tensión toma el valor de 6 veces la tensión uniaxial del contorno. Se conoce que este punto (estado de tracción biaxial cavitario) es el más peligroso, pues se da la máxima exaltación, y en esta región es donde está más favorecida la nucleación y el crecimiento de microgrietas.

A continuación se considera el caso general de un orificio elíptico sometido a una tracción uniaxial (que comprende como casos particulares al orificio circular y a la grieta rectilínea) que se resuelve con las funciones de tensión deducidas, ecs. (23) y (24). Estas ecuaciones están deducidas para las coordenadas elípticas α y β en forma compleja y no ha sido posible hallar una solución directa, por ello ha sido necesario pasar a coordenadas cartesianas en forma compleja, llegando a las funciones de tensión, ecs. (44) y (45) que son relativamente sencillas. De nuevo solo se ha encontrado solución al problema usando un sistema doble cartesiano polar indicado en la Fig.42, y se pasa directamente a hallar la ecuación de la tensión máxima que —



permitirá representar la red de, isócronas para su confirmación fotoelástica, resultando ser un polinomio de grado doce. Para σ_x y σ_y y τ_{xy} , resultan análogamente expresiones sencillas — pero bastante largas, que desde luego resuelven analíticamente el problema.

En las tablas XXVII, XXVIII, XXIX , XXX, XXXI, XXXII, XXXIII, XXXIV y XXXV, y sus representaciones en las figs. 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, y 51 y las redes de isócronas fotografiadas , Figs. 119 a 126, se presenta la evidencia analítica y experimental mas que suficiente para dejar bien probado que el tratamiento matemático del modelo es fielmente reproducido por las redes de isócronas experimentales .

Análogamente, en las tablas XXXVI, XXXVII, XXXVIII, XXXIX, XL, XLI, XLII y en sus representaciones , las figuras 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, se presentan las isócronas analíticas de — diferentes ordenes de franja a tracción uniaxial $(\sigma_0)_i$, también pero con una elipse de semieje menor en la dirección de carga es menor y posee a $r= 11 \text{ mm}$ y $\theta = 0^\circ$ mayor acuidad. En las figs. 127 a 131, se presentan las fotografías de las isócronas experimentales que no dejan lugar a duda. Tambien se examina la elipse en su posición de minima acuidad, con su eje mayor en la dirección de la tracción uniaxial del contorno y en las figs. 132 a 135 se presentan las redes de isócronas experimentales.

• El análisis de la alteración del campo de tensiones por un



orificio elíptico conduce a las siguientes observaciones:

1º La tensión σ_x toma un máximo para $r \cong 21$ mm y que vale un 50% de la tensión de contorno aplicada siempre en la dirección \vec{x} ó sea a $\theta = 0^\circ$.

Recuérdese que para el orificio circular, este máximo para σ_x era del $0,4 (\sigma_o)_i$, y a $r = 16$ mm para $\theta = 0^\circ$.

No se ha podido hallar una explicación lógica al hecho de que σ_{x_i} (maxima) a ($r = 16$ mm, para el orificio) es precisamente -

$$\sigma_{x_i} = \frac{1}{\lambda} (\sigma_o)_i \text{ y } (\sigma_x)_i \text{ máxima para la elipse es } (\sigma_x)_i = \frac{1}{\lambda} (\sigma_o)_i,$$

siendo λ el parametro de excentricidad que toma en estos casos el valor de 2,414 y 1,96 para orificio y elipse y cuyos valores de $(1/\lambda)$ son 0,414 y 0,51 sensiblemente iguales a los de 0,4 y 0,5 hallados. Para la segunda elipse de mayor acuidad hay una rápida variación de este máximo y $(\sigma_x)_i = \sigma_o$ lo cual exigiria que $(1/\lambda)$ fuera igual a $1 = \lambda$, y esto solo lo cumple la grieta normal a la tracción. Si el factor de concentración para σ_x fuera $(1/\lambda)$, habría que admitir, que solo es válido para orificios circulares o elipses de poca excentricidad. Para elipses de mucha excentricidad, se comportaría como grietas a efectos de la exaltación de esta tensión, lo cual no puede ser sorprendente si se comparan las redes de isócronas de la elipse de gran acuidad - Figs 129 y 131 con la red de isocromas de una grieta vease - -



figs. 133 y 135 á 0,76 y 0,77 Kg/mm² para σ_0 en las figs. 129 y - 133, y 0,98 y 0,95 Kg/mm² para σ_0 en las figs. 131 y 135, que presentan redes prácticamente iguales.

Las funciones generales para las elípses examinadas ($\lambda < 2,414$, orificio circular) dan valores infinitos para $r = 11$ mm y $\theta = 0^\circ$, lo que indica que en este punto la función no está definida. Se sabe que, en este punto que pertenece a la cara interior del orificio elíptico en una dirección x normal a este contorno interior libre de carga tiene que valer necesariamente $\sigma_x = 0$. Por ello en las - figs. 59, 60, etc., después del máximo, se hacen tender a cero con línea de trazos. Por el contrario, en las figs. para $\sigma_y = f(r, \theta)$ la solución analítica conduce a infinito cuando $r = 11$ y $\theta = 0^\circ$ C, lo cual tampoco es correcto, pero indudablemente en este punto la - exaltación es enorme, aunque no infinita.

De nuevo, en las ecuaciones 60 y 61, toda la expresión matemática calcula el factor de concentración de tensión y son del tipo $(\sigma_x, \sigma_y) = \sigma_0 f(r, \theta)$ ó $(\sigma_x, \sigma_y) = \sigma_0 \cdot \alpha_{1,2}$.

En la parte superior del orificio elíptico a tracción uniaxial, en $r = b$ y $\theta = 90^\circ$, el primer invariante del estado de tensión en este punto es igual a la tensión de contorno cambiada de signo, a diferencia del orificio circular que valia el doble de la tensión de contorno y también a compresión. Es una zona de seguridad a efectos de desarrollo y propagación de microgrietas. Existe un punto del contorno elíptico para el cual se anula el primer invarian-



te del estado de tensión que está a unos 27° , pero σ_x y σ_y , no se anulan sino que una es de tracción y otra de compresión y tampoco se anula la cisión que pas por un máximo entre $\theta = 90$ y $\theta = 0^\circ$, ya que en estos puntos se anula. Finalmente para $r = 11$ mm, y $\theta = 0^\circ$, el primer invariante calculado resulta infinito, si bien ya hemos comentado que en este punto la función analítica no da cuenta de las verdaderas tensiones σ_x y σ_y . Quizas para obviar este inconveniente y para trabajos sucesivos debiera tomarse previamente el límite de las funciones de tensión cuando $r \rightarrow 0$, y bajo estas condiciones con las nuevas funciones de tensión límites, tratar de desarrollar las expresiones para las tensiones en este punto, único para el cual la función analítica no tiene validez.

En esta región de $r = 11$ mm, $\theta = 0^\circ$, es donde se da un estado de σ_y , muy grande, y $\tau_{xy} = \sigma_x = 0$, en la dirección \vec{x} , pero a 45° de \vec{x} en este punto existirá una cisión máxima de $\sigma_y/2$. Esta y σ_y combinadas permitirán explicar el mecanismo de aparición de microgrietas en esta región del modelo inmediata al contorno elíptico.

Las funciones de tensión para el estudio del campo de tensiones producido por una grieta normal a la tracción uniaxial del contorno se deducen de las funciones generales para la elipse, sin más que considerar que ahora $b = 0$ y el parámetro de excentricidad vale $\lambda = 1$.



Las variables elípticas se transforman en polares, resultando las funciones sencillas ecs. (65) y (66) . En función del factor de intensidad de tensión K_I , resultan para las tensiones tres ecuaciones nuevas (ecs. 69,70, 71) que son relativamente sencillas, que pueden adoptar la forma de las ecs. 75, 76 y 77, pudiendo decir que posee una forma mas sencilla que el mecanismo de, aparición de microgrietas en esta región del modelo inmediata al contorno eliptico.

Las funciones de tensión para el estudio del campo de tensiones producido por una grieta normal a la tracción uniaxial del contorno se deducen de las funciones generales para la elipse, sin mas que considerar, que ahora $b = 0$ y el párametro de excentricidad vale $\lambda = 1$.

Las variables elipticas se transfórman en polares, resultando las funciones sencillas ecs. (65) y (66) . En función del factor de intensidad de tensión K_S , resultan para las tensiones tres ecuaciones nuevas (ecs. 69, 70, 71) que son relativamente sencillas, que pueden adoptar la forma de las ecs. 75, 76 y 77, pudiendo decir que poseen una forma más sencilla que el único trio similar propuesto por Westergaard. De nuevo se práctica el cambio de variable $x = \text{sen}^2 \theta$, para hallar la expresión analítica de las isócronas y resulta ser un polinomio de grado 8, ecs. 88. Como siempre las soluciones de todas estas tensiones para diferentes valores de r y θ , se han programado en FORTRAN V y los resultados se presentan en las tablas LV, LVI, LVII, LVIII,



LIX, que se representan como redes de isó cromas analíticas en las Figs. 79, 80, 81, 82 y 83. Las comprobaciones fotoelásticas se presentan en las Figs. 132 á 135.

El modelo analítico da para σ_x en $r = 11$ mm, $\theta = 0^\circ$ un valor infinito. En este punto no responde a la realidad ya que σ_x ha de ser aquí necesariamente nula. Los valores de σ_y alcanzan valores muy grandes y para $r = 11$, $r_1 = 0$, $r_2 = 22$, aparece un valor infinito tanto para σ_x como para σ_y . Estos valores son desde luego muy grandes pero no infinitos.

Las tensiones en cualquier punto de la grieta rectilínea excepto en sus vertices, son $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ó $I_1 = 0$ y el punto singular del orificio a $r = 11$ y $\theta = 30^\circ$ se desplaza a 27° a la elipse, perdiendo su singularidad ya que si bien $I_1 = 0$, ocurre que $0 \neq \sigma_x \neq \sigma_y \neq 0$ y en la grieta se desplaza al mismo vertice, que es la única zona de máximo peligro, en la que es muy facil la propagación de la grieta.

En el estudio de los estados biaxiales equilibrados se hace uso de las ecuaciones deducidos para estados uniaxiales y se aplica el principio de superposición teniendo en cuenta que la nueva tensión actua a $(\pi/2)$ respecto a la primera. Las ecuaciones (98, 99 y 100) que así se deducen para el orificio circular a tracción biaxial plana y equilibrada no pueden ser mas sencillas. A partir de estas ecuaciones se deduce la expresión para la tensión máxima, que resulta ser la de una circunferencia en coordenadas polares y por lo tanto resulta obvia la representación de las redes de isó cromas obtenidas analíticamente.



En las tablas LXIV á LXIX , se dan los radios de las isócr_omas para varios estados biaxiales (σ_o , σ_o) y en las Figs. 92 á 97, se representan para compararlos con las Figs. 136 á 139 , experimentales. En estas figuras no aparecen isócr_omas rigurosamente circunferenciales, pero ya se advirtió la dificultad de — conseguir con nuestro equipo dos cargas aplica al modelo a $(\pi/2)$ y que sean rigurosamente iguales. A pesar de la imperfección de las circunferencias no se puede poner en duda la validez de las expresiones análiticas y por supuesto coincide el número de — isócr_omas con el previsto analíticamente según el estado biaxial aplicado $(\sigma_{o1} , \sigma_{o1})$, en los contornos rectos y perpendiculares de la placa.

Las expresiones analíticas no presentan aquí ninguna invalidez puntual. Para $r = 8 \text{ mm}$ (radio del orificio) y $\theta = 0^\circ$, σ_x es nula por ser principal y normal al contorno circular interior. Esta tensión crece continuamente hasta que en zonas muy alejadas y de acuerdo con el principio de Saint Venaut, σ_x forma el valor del contorno $(\sigma_o)_1$. Para σ_y , a $r = 8 \text{ mm}$ y $\theta = 0^\circ$, se dá la — máxima tensión exaltada que siempre es el doble de la tensión del contorno $(\sigma_y)_{\text{máx}} = 2(\sigma_o)_1$. Este es un hecho sorprendente, ya que aquí el factor de concentración de tensión es 2, mientras que en un orificio circular a tracción uniaxial era 3. La aplicación de un estado biaxial equilibrado reduce la exaltación de 3 a 2, lo que indica, que un orificio en una placa y que está diseñado para tracción uniaxial es más peligroso que un orificio (cerrado), practicado en un depósito que contiene un gas a presión, por ejemplo.



• La variación de σ_y al alejarnos del contorno, está de acuerdo con el principio de Saint-Venant y se reduce a la tensión de contorno $(\sigma_0)_i$.

Por lo tanto, las ecuaciones 98 y 99, no son otra cosa que una expresión del factor de concentración multiplicadas por una de las tensiones de contorno. Para σ_x el factor de concentración de tensión sube continuamente de 0 a $(\sigma_0)_i$, y para σ_y baja igualmente de 2 a $(\sigma_0)_i$.

El primer invariante del estado de tensión a lo largo de la dirección \vec{x} , permanece constante $I_1 = 2(\sigma_0)_i$, para cualquier punto, y la suma de los factores de concentración de tensión también permanece constante para cualquier punto de la dirección \vec{x} é - igual a dos, según lo comentado anteriormente para el significado de las ecuaciones 98 y 99.

Las isócronas de las Figs. 136 é 139, no revelan la presencia de ningún punto singular y de la invariancia de los estados de tensión en cualquier punto de la placa tomados en direcciones radiales, se deduce que la zona de seguridad, en la parte superior del orificio a tracción uniaxial en la que se daba un estado de compresión y el punto singular a $\theta = 60^\circ$, con tensiones nulas, desaparecen a tracción biaxial, pero a cambio el estado biaxial reduce de 3 é 2 la exaltación en el punto mas peligroso, con lo que definitiva un estado biaxial equilibrado es menos peligroso que uno uniaxial, a efectos de nuclear o propagar grietas. Este hecho,



conduce a aplicaciones prácticas, cuya explicación puede darse ahora, tal es el caso de una luna de escaparate de vidrio a la que se le practica un orificio circular para reducir la exaltación de tensiones y detener el peligro del crecimiento de la grieta ó la fabricación de ladrillos (productos cerámicos muy frágiles), en los que en su sección rectangular de más área se le practican orificios circulares distantes para equilibrar al máximo las exaltaciones. Nótese, que estos ladrillos trabajan a compresión en estas caras y producen dos deformaciones elásticas en las dos direcciones perpendiculares normales a la compresión, lo que equivale a una tracción biaxial en estas dos direcciones perpendiculares, tal como la practicada en nuestro modelo.

De la invariancia del estado de tensión a tracción biaxial, se deduce para el modelo con orificio circular que la red de isopacas es un conjunto de radios perpendiculares a las isócronas y que se extienden a todo el modelo.

Todos los puntos interiores del círculo son igualmente peligrosos en relación con la generación y propagación de grietas, pero en un grado de exaltación $2/3$ menor que en un orificio circular a tracción uniaxial,; a tenor de todo lo comentado, y por lo tanto que una forma nueva de reducir este peligro consiste, en que en todo orificio, actúe siempre una tensión biaxial.

Las expresiones obtenidas aplicando el principio de superposición a elipses sometidas a estados de tensión biaxiales, no son re-



ducibles y resultan excesivamente largas aunque no por esto dejan de resolver el problema correctamente.

De las Figs. 140 a 143 , experimentales, y especialmente en la fig. 143, se ve que las isócrómas tienden a rodear a la elipse a medida que la carga aumenta en los contornos. Puede adelantarse por lo tanto una disminución de la exaltación en la zona de mayor acuidad y un repartido más uniforme del valor del primer invariante si bien no será constante en cualquier punto de la placa. Análogamente se pierde seguridad en la zona alta del semieje menor y se gana en el vertice de máxima acuidad del semieje mayor. En el σ_x será nula y σ_y alcanzará un valor alto pero menor que a tracción uniaxial y de nuevo se mantiene que la biaxialidad reparte mejor los estados de tensión y reduce el peligro de nucleación y crecimiento de microgrietas.

La aplicación del principio de superposición a una grieta sometida a un estado biaxial equilibrado resulta muy simple, dado que el sólido cuando tiene una grieta rectilínea que coincide con la dirección de la tracción uniaxial, se comporta como si dicha grieta no existiera.

A partir de las ecuaciones 114 y 115, se deduce la expresión de Z_m para representar analíticamente las isócrómas que cabe esperar para este modelo con grieta rectilínea normal y paralela a una y otra de las dos tensiones perpendiculares del estado biaxial. Resulta una ecuación de tercer grado en x siendo -



$x = \text{sen}^2 \theta$. En las Tablas LXXIV á LXXVI, se calculan los valores correspondientes a cada isócrona y en las figs. 106 á 108 , se re presentan , las isócronas analíticas que tienen que aparecer expe rimentalmente en el modelo , como puede comprobarse en las figs. 144, a 149 .

De nuevo la dificultad de fijar mediante la bomba manual dos tensiones de tracción iguales hace que la fig. 144 no sea riguro- samente simétrica por que la grieta no es tampoco de una gran acui- dad ya que las preparadas, con el filo de hojas de afeitar en el plástico rompen a estos estados biaxiales con gran facilidad como es de esperar, pero la mitad superior de la fig. 144, proporciona una imagen de calidad más que suficiente, al ser comparada con la fig. 108, ambas obtenidas experimental, y analíticamente para las mismas cargas biaxiales, las demás sombras cerca del centro de la grieta en la fig. 144, se deben a pequeños biselamientos produci- dos al quitar la lámina que se inserta en el plástico para simular la grieta y carecen por lo tanto de sentido.

Aunque las isócronas 1 y 2 de la fig 106, y las 2 y 3 de las fig. 107 y 108, parecen tener un eje vertical, puede apreciarse - con mayor detenimiento que el supuesto eje de simetria se incli- na en el sentido antihorario, la cual se aprecia también en las isócronas experimentales. Recuerdese que analíticamente y para la representación de las curvas de las figs. 106,107, y 108, la ecuación cúbica para $x = \text{sen}^2 \theta$, da en coordenadas polares la - intersección de círculos con las isócronas y analíticamente se -



dispone de pocos puntos para hacer una representación isócrona-
tica detalladísima, lo cual por otra parte no sería necesario.

Westergaard, fué el primero, en 1939, que dió una solución
"aislada" para un modelo con una grieta a tracción biaxial. Es-
tas ecs. se presentan en la pag. 245 y a partir de ellas se pue-
de deducir la expresión de la cisión máxima y por lo tanto hallar
sus soluciones y hacer una representación de la red de isócronas
que cabe esperar fotoelásticamente. Esta red de isócronas analí-
tica, basada en las ecs. de Westergaard, se presenta en la fig.
109, y puede verse que ha sido representada con gran número de -
valores para poner bien de manifiesto que las isócronas que han
de esperarse en los modelos experimentales debieran tener en el -
vértice de la grieta un eje de simetría vertical lo cual no es --
cierto ya que el eje, en el supuesto de que sea una recta, forma-
ría con el eje x del modelo unos 117° , según se puede medir en
las fotografías de las redes de isócronas experimentales.

En este momento y puesto que las ecs. de Westergaard no -
responden exactamente al campo de tensiones real en el modelo, -
se ha hecho una transformación isométrica de sus ecuaciones. de
las isócronas, en contrándose ahora la ecuación analítica de las
isócronas que se ajustan más correctamente al modelo. Aunque pa-
rezca extraño no se ha dado en la bibliografía ninguna confirma-
ción fotoelástica de las ecuaciones de Westergaard, y la que se
propone en este trabajo, conduce a que dichas ecuaciones son una
aproximación límite al problema del campo de tensiones que origi



na una grieta , proponiéndose por nuestra parte, una aproximación
mación mucho más correcta a dicho problema .

Finalmente, la consideración de series de grietas alineadas, -
como de orificios ó de elipses, se hace en base al principio de su
perposición y conceptualmente no añade nada nuevo a todo lo expues-
to. Puede comprobarse que las ecuaciones deducidas y la cisión má-
xima explican correctamente las redes de isóchromas experimentales,
si bien no admiten reducción y resulta demasiado engorroso su mane-
jo.

Finalmente hacer notar que la exaltación de tensión prevista
por las ecuaciones de Westergaard, para $r = a/2$ mm, $\theta = 0^\circ$, con-
ducen a $\sigma_x = \sigma_y = \text{infinito}$, es decir, todas estas ecuaciones en
este punto predicen una exaltación infinita y es el único punto -
del modelo para el que las ecuaciones no predicen las condiciones
reales. Esto no tiene mayor interés si consideramos que una tensión
exalta muy grande en un sólido real, no va a seguir la tendencia
impuesta por estas funciones ya que un sólido real frágil se rompe-
ría mucho antes y un sólido plástico se deformaría y despues de
un endurecimiento por deformación plástica, terminaría también -
rompiéndose, pero en este último caso, habría que considerar que
la aparición de una deformación plástica produciría un relajamien-
to de la tensión que la haría caer aun en la zona de exaltación -
por debajo de la carga de rotura técnica del material, no producién-
dose la rotura.



En el plano de la grieta que contiene a la dirección \vec{x} existe una $\sigma_y = r_1 = \infty$, tanto para estados uniaxiales como biaxiales y en ambos casos $\sigma_2 = \sigma_x = 0$. Pero a 45° de $\sigma_y = \sigma_1$, existen dos cisiones máximas que valen $\sigma_1/2$. Según este estado de tensión de tracción y cisiones a 45° combinadas, los materiales metálicos que aun considerados frágiles no están exentos de un mínimo grado de plasticidad, daran lugar a la iniciación de grietas en zigzag, por efecto de las mencionadas cisiones y la tensión $\sigma_y = \sigma_1$ desconhesiva según la fig. 154.

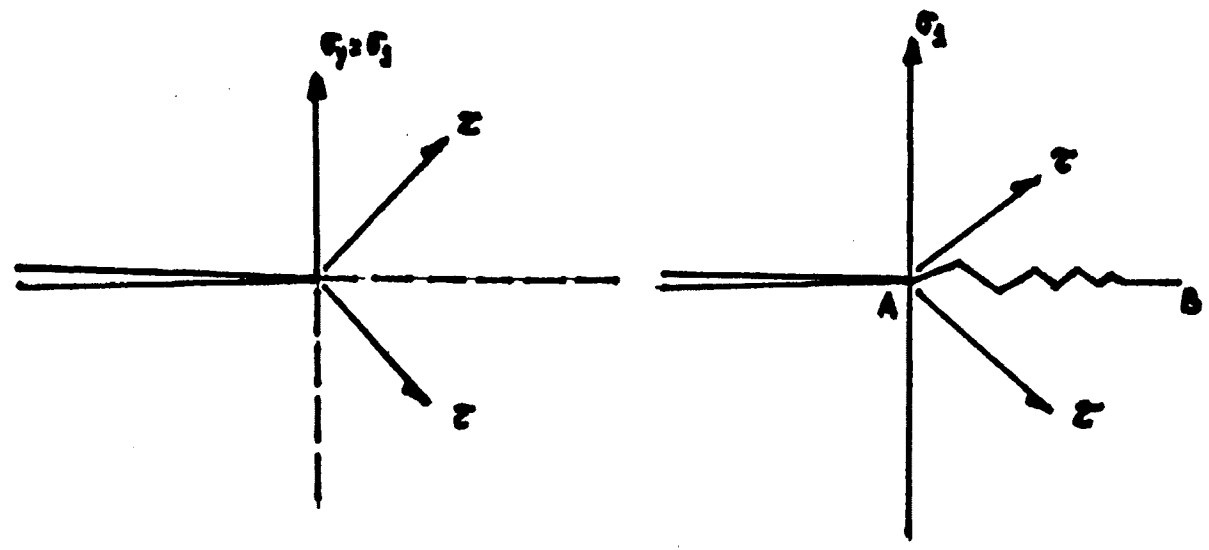


Fig. 154

Tal es el mecanismo y forma de aparición de una rotura iniciada por exaltación de una grieta ó defecto de acuidad y poder concentrador suficiente para el tipo de aleación que se trate. Este camino tortuoso AB Fig. 154, se ve con frecuencia desvirtuado por las propiedades mecánicas del agregado policristalino de que se trate en la zona localizada, pero a pesar de ello este tipo de aparición de grieta AB se puede observar en el fondo de entallas de pro



betas de resiliencia que no han roto y son una evidencia del tipo de estado de tensión generado por el defecto. En los sólidos plásticos, la teoría del campo de líneas de deslizamiento prevee igualmente deslizamientos que cruzan el eje x a 45° .

Queda finalmente un aspecto importante que explica el proque un agregado policristalino lleno de micro grietas no se rompe con tanta facilidad como pudiera parecer.

Una grieta posee una capacidad de exaltación de tensiones muy grande en sus vértices, pero alejándonos de ellos esta capacidad - exaltadora cae brúscamente, mientras que un orificio circular o elíptico de diametro o eje mayor iguales a la longitud de grieta, mantiene en zonas alejadas del defecto una exaltación mayor. Dicho de otra manera, que los efectos de pequeñas grietas próximas según el principio de superposición no darán lugar a tensiones exaltadas en zonas ya algo alejadas de las grietas mientras que orificios circulares, elípticos, etc. , dan lugar a una alteración mayor del campo de tensiones .

En la Fig. 153 se observa que cada grieta se comporta como si existiera ella sola. No ocurriría lo mismo si el defecto fuera un orificio . Todo esto explica el porque al tener que admitir que las aleaciones, técnicas estan llenas de defectos y microgrietas - el decaimiento agudo de la tensión ya en las proximidades, junto - con la relajación de tensión si hay deformación plástica, nos permite explicar porqué estas aleaciones son tenaces y resistentes y solo una grieta llega a ser peligrosa, cuando alcanza un tamaño su-



•ficientemente grande lo que inevitablemente ocurre a suficientes valores de contorno y, en zonas de exaltación donde ó se genera, ó un defecto preexistente se propaga ininterrumpidamente a expensas de la energía elástica acumulada y siempre que la grieta en su crecimiento no encuentre zonas plásticas que relajen esta - energía y tensión exaltadora.



VI.- CONCLUSIONES



VI.- CONCLUSIONES

- 1.- Se puede conseguir un excelente material fotoelástico con las resinas epoxy ARALDIT-D , y el endurecedor HY-956 , - con una constante fotoelástica de 45 Brewsters. La aparición de tensiones residuales difícilmente puede ser elimnada por recocidos en líquidos calientes.
- 2.- Se deducen dos frnciones de tensión generales capaces de resolver analíticamente el problema de conocer el campo de tensiones producido por defectos intrínsecos ó de diseño de todo tipo de acuidades .
- 3.- Mediante estas funciones de tensión generales se deduce ecuaciones para conocer el estado de tensión en cualquier punto del modelo y con cualquier tipo de defecto.
- 4.- La validez de este procedimiento general queda confirmada por el método fotoelástico usado y por la comparación con soluciones analíticas ya conocidas para orificios circulares dadas por otros autores que constituyen un caso - particular del tratamiento general seguido.
- 5.- En el caso de orificios circulares, se pone de manifiesto, la exaltación de la tensión σ_x que pasa por un máximo del 40% aproximadamente de la tensión de contorno - a tracción uniaxial en la dirección normal a dicha tensión y bastante alejada del extremo del defecto.




- 6.- Se señalan en la discusión las zonas de cada defecto en las que está impedido todo fenómeno de nucleación y crecimiento de microgrietas y las regiones en las que hay que esperar dichos mecanismos con caracter peligroso.

- 7.- La solución general del orificio elíptico se encuentra con la adopción de un sistema de coordenadas doble cartesiano polar.

- 8.- Tanto en elipses como en grietas, las expresiones que dan el estado de tensión en el extremo del defecto no son válidas. El único tratamiento conocido para una grieta igualmente predice tensiones infinitas para el punto correspondiente al vértice de la grieta.

- 9.- La aplicación de una nueva tensión de tracción a los modelos , perpendicular a la primera o sea la aplicación de un estado de tensión biaxial equilibrado, reduce la exaltación de tensiones en las zonas mas críticas. En el círculo se reduce por ejemplo el factor de concentración en $2/3$.

- 10.- Se propone una transformación isométrica para corregir las expresiones de Westergaard para el cálculo de tensiones, en proximidades de grietas sometidas a estados biaxiales , que se ajustan mejor, a los estados de tensión que revela fotoelásticamente el modelo en las mismas condiciones de carga.



◦ 11.- Del estado de tensión en medios de comportamiento elástico se propone un mecanismo de tensión para justificar la forma en que se nuclea una grieta que conduce a una rotura frágil .

12.- Se encuentra que el poder exaltador de las microgrietas, cae bruscamente al considerar puntos incluso poco alejados de ellas, y que en defectos de diseño como introducción de orificios mantienen un nivel de tensiones más alto al alejarse del mismo, siempre para la misma dimensión característica del defecto.



VII.- BIBLIOGRAFIA.



6.- BIBLIOGRAFIA.

- 1.- The SIAM series in applied Mathematics.
crack problems in the classical theory of elasticity
I.N. SNEDDON y M. LOWENGRUB.

- 2.- Elasticidad para técnicos
DUGDALE y RUIZ

- 3.- Experimental stress analysis
I.W. DALLY and WILLIAMS F. RILEY

- 4.- Elasticidad
E. TORROJA

- 5.- Nuevos parámetros para caracterizar los estados de fragilidad
del acero
C. NUÑEZ.

- 6.- Theory of notch stresses
H. Neuber

- 7.- Methodes pratiques d'étude de la resistance a la propagation
brutale des fissures des aciers a très haute resistance.
G. SANZ
Circulaire d'informations techniques (1969).



- 8.- Essais de fragilité par traction par choc
Revue de Metalurgie (1972)
M. GRUMBACH y G. SANZ
- 9.- Essais utilises pour la mesure de la tenacité des materiaux
Circulaire d'informations techniques (1975).
G. SANZ
- 10.- Essais de fragilité; Essais de résilience, essais de traction
par choc, essais schnadt
Circulaire d'informations techniques (1972)
M. GRUMBACH y G. SANZ
- 11.- Essais de fragilité; Essais de rupture fragile sur grosses
éprovettes: Robertson, Pellini, Battelle
Circulaire d'information techniques (1968)
A. CHEVIET y M. PRUDHOMME
- 12.- Essais de fragilité : Recherches récentes sur le mécanisme de
la rupture brutale.
Circulaire d'information techniques (1968)
G. SANZ y P. RABBE
- 13.- Lecciones de Metalurgia Mecánica
C. NUÑEZ
- 14.- Mathematical Theory of Elasticity
SOKOLNIKOFF



- 15.- Stress analysis of cracks
Fracture toughness testing
P.C. PARIS and G.C. SIH

- 16.- Introduction a la mecanique des ruptures
Revue de Metallurgie (Abril 1970)
J. MALKIN y G. SANZ

- 17.- Etude, a l'aide de la mecanique de la rupture, de la vitesse
de fissuration en fatigue d'une gamme étendue d'aciers.
Circulaire d'informations techniques
H.P.Lienrade y P. Rabbe (1973)

- 18.- La mecanique de la rupture et son application a l'étude de la
tenacite' des aciers
Circulaire d'informations techniques (1974)
G. SANZ

- 19.- The Iron and Steel Institute (London)
Fracture Toughness
ISI-P121

- 20.- American Society for testing and materials, and national aeronau
tico and space administration
Fracture toughness testing and its aplications
STP - 381



- 21.- American Society For Testing and materials, and National
aeronautics and space administration
Plane strain crack toughness testing of high strength me
tallie Materials.
STP - 410
- 22.- American society for testing and materials
Mechanics of crack growth.
STP - 590
- 23.- Les essais de rupture fragile et leurs applications aux
aciers
Bulletin de cercle d'études des Metaux
M. GRUMBACH
- 24.- Critical appraisal of fracture mechanics
Fracture toughness testing
V. WEISS and S. YUKAWA
- 25.- Contribution a l'etude et au controle industriel des criteres
de fragilite sur les aciers a très haute resistance.
Circulaire d'informations techniques (1975)
R. Ravez
- 26.- Crack Extension Force a Part-through Crack in a plate
Journal of applied Mechanics (1962)
G.R. IRWIN



- 27.- Méthode pratique d'examen et de mesure de la birrefringence
des verres d'optique
Revue d'optique (1928)
M.H.L. TARDY
- 28.- La photo-elasticimétrie: Théorie, méthodes et applications
Revue d'optique
M.G. DELANGHE
- 29.- Mesure expérimentale des efforts intérieurs dans les solides et
résultats
Revue D'optique (1930) n° 6
M. A. MESNAGER
- 30.- Photoelastic stress analysis
A. KUSKE and G. ROBERTSON
- 31.- The Selected Scientific papers
M.M. Frocht.
- 32.- Photoelasticité principes et méthodes
H. T. JESSOP y F. C. HARRIS
- 33.- Photoelasticity for Designers
R. B. Heywood



34.- Experimental Stress analysis, principles and methods
Cambridge University Series (1967)

G. S. HOLISTER

Francisco Holleda