MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS CON RETRANSMISIÓN RETARDADA

TRABAJO FIN DE GRADO

Curso académico 2020/2021

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Grado en Matemáticas

Estudiante: Adrián Morente Prados
Tutor: Ana María Carpio Rodríguez

Madrid, 23 de Julio de 2021

Agradecimientos

A mi tutora, Ana Carpio, por aceptar desde el primer momento la temática que tenía pensado para el TFG. También por haberme guiado con total dedicación durante la realización de este trabajo.

A mi profesora de Matemáticas del instituto, Ana. Te estaré eternamente agradecido por haberme transmitido el amor que tengo hacia las Matemáticas. Gracias a eso tomé una de las decisiones más importantes y bonitas de mi vida: estudiar la carrera de Matemáticas. Te agradezco un montón que aceptaras realizar conmigo las prácticas de enseñanza, siempre quedarán en mi recuerdo.

Al mejor amigo que me ha podido dar la carrera, Marcos, siempre has sido una fuente de inspiración para mí. Nunca olvidaré esas tardes de estudio en la biblioteca ni todas las horas de clase que hemos pasado juntos. Muchas gracias por ayudarme en todo lo que he necesitado durante la carrera, estoy seguro de que sin ti nada hubiera sido lo mismo.

Familia, ya sabéis que lo mejor se deja para el final. Desde mi primer aliento, siempre habéis estado a mi lado y me habéis apoyado, aunque no estuvierais de acuerdo, en todas las decisiones que he tomado. Gracias por enseñarme y predicar con el ejemplo de que la cultura del esfuerzo es la mejor manera de prosperar. Eso ha hecho que siempre tenga en mente los valores de humildad, sacrificio y esfuerzo para lograr mis objetivos. Durante la carrera he vivido momentos inolvidables. Sin embargo, también he vivido momentos en los que necesitaba un empujón, y siempre habéis estado ahí para dármelo. Aunque viviera 100 vidas, nunca podría pagaros lo que habéis hecho por mí. Gracias a todos los que estáis y estuvisteis (sé que estaríais orgullosos de mí).

Resumen

La epidemiología es un campo científico interdisciplinar que se encarga del estudio de los procesos de transmisión de una enfermedad en una población. El interés en este campo científico interdisciplinar surgió por la cantidad de personas que fallecían por enfermedades infecciosas y sigue cobrando mucho interés debido a factores como la globalización, la aparición de nuevas enfermedades infecciosas, etc. Las Matemáticas, y en concreto la modelización y simulación, juegan un papel fundamental en esta disciplina ya que, entre otras cosas, ayuda a tomar medidas preventivas objetivas para la disminución de los efectos de una posible epidemia.

En este trabajo vamos a analizar una generalización del modelo clásico de Kermack-McKendrick con retransmisión retardada que puede dar lugar a ondas periódicas cuando la transmisión es suficientemente alta. La retransmisión retardada se debe a la incorporación en el modelo de la movilidad de los individuos durante el periodo latente de la enfermedad.

Palabras clave: ondas viajeras, modelo de Kermack-Mckendrick, transmisión retardada, interacción no local, número de reproducción básico, principio del máximo, teorema del punto fijo.

Abstract

Epidemiology is an interdisciplinary scientific field that studies the processes related to illness transmition in a population. The interest in this interdisciplinary scientific field arosed from the remarkable quantity of deaths due to infectious diseases. Nowadays, it continuous being important due to globalisation, appearance of new diseases, etc. Mathematics, specifically modelling and simulation, plays a vital role in this discipline because, among other things, it helps to take objective preventive measures to reduce the effects that a possible epidemic might cause.

In this end-of-degree project, we analise the classic model of Kermack-McKendrick with retarded transmition that can lead to periodic waves when transmition is high enough. The retarded transmission is due to its incorporation in the individuals mobility model during the latent period of the disease.

Key words: travelling waves, Kermack-McKendrick model, retarded transmition, nonlocal interaction, basic reproduction number, maximum principle, fixed point theorem.

Objetivos y plan de trabajo

La modelización y la simulación son herramientas matemáticas fundamentales que ayudan a la toma de decisiones para controlar la propagación de una enfermedad en una población. Sin embargo no todos los modelos sirven para todas las enfermedades, por lo que hay que adaptar los modelos matemáticos a cada enfermedad.

En este trabajo, basándonos en [11], nos centramos en el **estudio de la existencia de ondas viajeras periódicas** con velocidad $c > 0$, de un modelo epidemiológico con retransmisión retardada. Con este propósito, construiremos unas super- y sub-soluciones adecuadas y aplicaremos el Teorema del punto fijo de Schauder a un problema cuyo dominio es acotado. Después, utilizando unas estimaciones apropiadas y haciendo el paso al límite del problema con la ayuda de las funciones test, demostraremos la existencia de una onda viajera periódica del modelo cuando $R_0 > 1$ y $c > c^*$, siendo R_0 el número de reproducción básico del correspondiente sistema cinético ordinario y c^* la velocidad de onda crítica. Finalmente, demostraremos la inexistencia de una solución de onda viajera periódica cuando $R_0 < 1$.

Respecto a la organización del trabajo, en el **capítulo 1** se centra en la importancia que ha tenido la epidemilogía a lo largo de la historia y se introducen los conceptos más importantes para familiarizarnos con esta disciplina. El **capítulo 2** hace énfasis en la importancia de las Matemáticas a lo largo de la historia en esta disciplina y se mencionan los modelos epidemiológicos más famosos. A continuación, en el **capítulo 3** se introduce el modelo sobre el que se va a trabajar y se analiza la existencia de ondas viajeras periódicas del modelo. Después, en el **capítulo 4** se realiza una breve conclusión del trabajo e ideas generales. Al final del trabajo están incluidos **tres apéndices** con detalles técnicos que pueden consultarse de forma opcional. Así como las **referencias** a los artículos y libros consultados durante la realización de este trabajo.

Índice de Contenidos

1 Introducción a la epidemiología

La epidemiología es un **campo científico interdisciplinar** que se encarga del estudio de los procesos de transmisión de una enfermedad en una población. Es una disciplina muy importante ya que permite describir la evolución y distribución de una enfermedad e implementar medidas para frenar su propagación.

La referencia más antigua acerca de una enfermedad infecciosa se encuentra en el **Papiro de Ebers**, que menciona unas fiebres pestilentes que asolaron a la población de los márgenes del Nilo alrededor del año 2000 a.C. Estas enfermedades han preocupado mucho a lo largo de la historia debido a que acababan con la vida de poblaciones enteras. Tanto es así, que la **aparición de plagas** a lo largo de la historia **ha sido registrada en numerosos libros religiosos** (Biblia, Talmud,...) junto con recomendaciones sanitarias para evitar su propagación (lavado de manos, aislamiento,etc.).

En el siglo XX, gracias a los avances médicos se **disminuyó en gran medida la mortalidad de las enfermedades infecciosas** y cobraron más importancia las enfermedades crónicas como el cáncer o enfermedades cardiovasculares, que suponían la principal causa de mortalidad. Esto causó que los investigadores dieran por hecho que las enfermedades infecciosas pronto serían erradicadas y se centraron más en las enfermedades crónicas.

Evidentemente las enfermedades infecciosas no han sido erradicadas. Es más, son más **difíciles de controlar debido en gran parte a la globalización**. También es importante destacar que surgen brotes de epidemias que ya se tenían controladas y están apareciendo nuevas enfermedades debido a factores como el **calentamiento global, la degradación del medio ambiente, etc.**

Como consecuencia de esto **la epidemiología sigue cobrando un gran interés** en la población y los organismos científicos, que investigan tanto las causas que originan los brotes epidémicos como el control de la propagación de la enfermedad en un hipotético brote.

A continuación vamos a ver una serie de conceptos básicos referentes a la epidemiología que serán necesarios en las siguientes secciones:

- **Epidemia:** Propagación activa de una enfermedad infecciosa en un lugar y momento determinado.

- **Prevalencia:** Es el número de casos de individuos infectados en una población en un periodo de tiempo dado.

- **Incidencia:** Es el número de casos de individuos infectados en una población por unidad de tiempo.

- **Inmunidad:** Estado de resistencia natural o adquirida que poseen algunos organismos frente a una enfermedad infecciosa.

- **Período de latencia o de exposición:** Es el tiempo que requiere un individuo infectado para pasar a ser un individuo infeccioso.

  Es importante **no confundir el período de latencia con el período de incubación**, que es el tiempo que transcurre desde que el individuo fue infectado hasta el momento en el que le aparecen los primeros síntomas.

- **Período infeccioso:** Es el tiempo en el que el individuo infectado es capaz de transmitir la enfermedad. Este período comienza una vez que termina el período de latencia.

- **Transmisión no local:** Transmisión de la enfermedad originada por el desplazamiento aleatorio de individuos durante el período de latencia. Esto origina que la tasa de infección de un determinado lugar dependa de las infecciones en todas las posiciones posibles en momentos anteriores.

2 Matemáticas en la epidemiología

Las **Matemáticas han sido y son muy importantes para el desarrollo de la epidemiología**. En concreto, la **modelización y la simulación** se han vuelto unas herramientas fundamentales para estudiar la propagación y el control de enfermedades infecciosas. **D'Alambert** fue el primero en describir la propagación de enfermedades infecciosas mediante un modelo matemático en el **siglo XVIII**. Sin embargo, el primer artículo conocido que incluye un modelo explícito para una enfermedad infecciosa (viruela) apareció en 1760. El documento lo publicó **Daniel Bernoulli**, de nacionalidad suiza, quien tenía conocimientos médicos y matemáticos. En este documento Bernoulli demostró, entre otras cosas, la efectividad de las vacunas en gente sana.

Sin embargo, no fue hasta el **siglo XX** cuando empezó a desarrollarse realmente la modelización determinística en epidemiología. **En 1906, Hamer** formuló un modelo discreto analizando la epidemia de sarampión y fue el primero en observar que la incidencia de una enfermedad está relacionada con las densidades de población susceptible y población infecciosa. **En 1911, Ross** desarrolló un modelo de ecuaciones diferenciales para describir el ciclo completo de la malaria humana. También destacan **Kermack y McKendrick**, quienes en 1926 publicaron modelos epidémicos obteniendo como resultado que la densidad de personas susceptibles debe exceder un valor crítico para que la epidemia ocurra. Este trabajo atrajo escasa atención y sólo se tomó en cuenta 20 años más tarde cuando se dispuso de métodos efectivos de procesos estocásticos.

Después de la Segunda Guerra Mundial resultó necesario mejorar el entendimiento de los **procesos probabilísticos** y muchos nuevos avances se efectuaron a partir de **procesos estocásticos**. El último de ellos se produjo a finales de la década de 1990, cuando se observó que era fundamental una perspectiva reticular para entender la dinámica de las enfermedades como el VIH/SIDA.

2.1 Importancia de los modelos matemáticos

La forma en que se transmiten las enfermedades de una población a otra es un **fenómeno complejo** ya que depende de muchos factores: sociales, económicos, ambientales,... y por tanto **resulta difícil comprender la dinámica de la propagación de una enfermedad sin la estructura de un modelo matemático**. Un modelo matemático es una herramienta fundamental para la toma de decisiones para frenar la propagación de una enfermedad ya que en él se ven de forma clara los factores que intervienen en la propagación de ésta. Sin embargo, la toma de decisiones se debe valorar en su justa medida ya que un modelo matemático es **una simplificación extrema de la realidad**, no la realidad. En definitiva, la función central de crear y analizar modelos matemáticos es mejorar la comprensión de un sistema para **prevenir futuras situaciones de enfermedades, determinar la prevalencia e incidencia y coadyuvar a tomar decisiones objetivas para controlar o erradicar las enfermedades**.

2.2 Clasificación de modelos epidemiológicos

Distinguimos tres tipos de modelos matemáticos:

1. **Modelos determinísticos.** Son modelos matemáticos donde las mismas entradas producirán invariablemente las mismas salidas, no contemplándose la existencia del azar ni el principio de incertidumbre. Por tanto, estos modelos no reflejan la incertidumbre de la propagación de la enfermedad y proporcionan resultados exactos en la predicción. A continuación vamos a hablar de los **modelos compartimentales**, que suelen ser modelos determinísticos en los que se considera a los individuos pertenecientes a un compartimento del modelo como un conjunto, en lugar de ser considerados de manera individual. Cada compartimento viene dado por el estado en el que se encuentran los individuos. Los más habituales son:

   - **Susceptibles (S):** Individuos sanos y susceptibles de ser infectados.
   - **Infectados (E):** Individuos infectados en su fase latente, es decir, individuos infectados que no pueden contagiar a los demás.
   - **Infecciosos (I):** Individuos infectados y que, además, pueden contagiar a otros.
   - **Recuperados (R):** Individuos que han sobrevivido a la enfermedad y adquieren inmunidad permanente.

   Los modelos compartimentales pueden ser estudiados en poblaciones grandes y facilita el estudio analítico de la epidemia. El nombre de estos modelos se basa en los patrones de flujo entre los distintos estados por los que pasan los individuos. Algunos de los modelos compartimentales más sencillos son:

   - **SIR:** Los individuos se recuperan con inmunidad permanente. Son más apropiados para enfermedades víricas como el sarampión o la viruela.

- **SIS:** La recuperación no proporciona inmunidad, es decir, los individuos infecciosos pasan de nuevo a ser susceptibles. Son más apropiados para enfermedades bacterianas como la meningitis.
- **SIRS:** Los individuos se recuperan con inmunidad temporal de manera que vuelven a ser susceptibles.
- **SI:** Los individuos no se recuperan.

Destacar que, a pesar de lo simples que son, proporcionan la fundamentación matemática básica para considerar modelos más refinados.

2. **Modelos estocásticos.** En estos modelos al menos una variable del mismo es tomado como un dato al azar y las relaciones entre variables se toman por medio de funciones probabilísticas. Esto hace que los resultados que proporciona el modelo no sean únicos, por lo que son más difíciles de analizar que los de los modelos determinísticos. Destacar también que la simulación de estos modelos es muy costosa computacionalmente.

3 **Modelos híbridos.** Son aquellos que combinan una parte determinística con otra parte estocástica.

3 Modelo con retransmisión retardada no local

3.1 Obtención del modelo

Los modelos clásicos epidemiológicos han sido una herramienta fundamental para la predicción cuantitativa de la dinámica poblacional de las epidemias. La gran mayoría de estos modelos no tienen en cuenta que la distribución de las poblaciones depende del entorno (asumen que se distribuye de forma homogénea).

Para comprender mejor el fenómeno de propagación de la enfermedad parece razonable tener en cuenta los efectos espaciales en términos de la dinámica del modelo epidemiológico.

Bajo esta idea y basándose en el modelo Kermack-McKendrik [14], Kendall [3] consideró el siguiente sistema integro-diferencial dependiente del espacio:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t}(t,x) = -\beta \cdot S(t,x) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} I(t,y) \cdot K(x-y)\, dy, \\ \dfrac{\partial I}{\partial t}(t,x) = \beta \cdot S(t,x) \cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} I(t,y) \cdot K(x-y)\, dy - \gamma \cdot I(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\partial R}{\partial t}(t,x) = \gamma \cdot I(t,x), \end{cases}$$

donde $S(t,x), I(t,x), R(t,x)$ representan el número de individuos susceptibles, infecciosos y recuperados en el momento t y posición x, respectivamente. Aquí β y γ son constantes positivas que denotan la tasa de infección y de recuperados, respectivamente. Destacar que la tercera ecuación del sistema está desacoplada de las otras dos ecuaciones.
Al elegir que el núcleo K sea la función delta de Dirac, tenemos por definición que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t,y) \cdot K(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} I(t,y) \cdot \delta(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} I(t,y) \cdot \delta(y-x)\, dy = I(t,x).$$

Luego, si incorporamos el movimiento aleatorio de los individuos en el sistema a través del operador laplaciano, tenemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t}(t,x) = d_1 \cdot \triangle S(t,x) - \beta S(t,x) \cdot I(t,x), \\ \dfrac{\partial I}{\partial t}(t,x) = d_2 \cdot \triangle I(t,x) + \beta S(t,x) I(t,x) - \gamma I(t,x), \end{cases}$$

siendo d_1, $d_2 > 0$ los coeficientes de difusión de los individuos susceptibles e infectados, respectivamente.

Por otra parte, sabemos que la mayoría de las enfermedades infecciosas tiene un período de latencia necesario para que un individuo infectado se vuelva infeccioso. Debido al movimiento aleatorio de los individuos durante el período de latencia, la tasa de infección en una ubicación depende en gran medida de las infecciones en todas las posiciones posibles en momentos anteriores. Por lo tanto, esta movilidad de los individuos durante el periodo de latencia suele dar lugar a los términos de infección no local.

Teniendo en cuenta esto, si el periodo de latencia de una enfermedad es exactamente una constante $\tau > 0$, sabemos por [11] que el modelo anterior se puede reescribir como:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(t,x)}{\partial t} = d_1 \triangle S(t,x) - \beta(t) S(t,x) I(t,x), \\ \dfrac{\partial I(t,x)}{\partial t} = d_2 \triangle I(t,x) - \gamma(t) I(t,x) + \\ + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; x-y) \beta(t-\tau) S(t-\tau, y) I(t-\tau, y)\, dy, \end{cases} \tag{3.1}$$

siendo

$$\Gamma(t, t-\tau; x-y) = e^{-\int_{t-\tau}^{\tau} \gamma_L(s)\, ds} \frac{1}{\sqrt{4\pi d_L \tau}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4 d_L \tau}},$$

donde $\gamma_L(t)$ representa la tasa de eliminación de los individuos en fase latente.
Sobre este modelo se va a desarrollar el trabajo.

3.2 Existencia de una onda viajera periódica

Definición 3.1. Decimos que una solución con la forma especial

$$(S(t,x), I(t,x)) = (\phi(t, x+ct), \psi(t, x+ct))$$

es una solución periódica de onda viajera que conecta $(\phi_-(t), \psi_-(t))$ y $(\phi_+(t), \psi_+(t))$ si satisface:

$$\begin{cases} \phi_t(t,z) = d_1 \phi_{zz}(t,z) - c\phi_z(t,z) - \beta(t)\phi(t,z)\psi(t,z), \\ \psi_t(t,z) = d_2 \psi_{zz}(t,z) - c\psi_z(t,z) - \gamma(t)\psi(t,z) + \\ + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; x-y) \beta(t-\tau) \phi(t-\tau, y) \psi(t-\tau, y)\, dy, \end{cases} \tag{3.2}$$

con el comportamiento del límite

$$(\phi(t,\infty), \psi(t,\infty)) = (\phi_+(t), \psi_+(t)) \text{ y } (\phi(t,-\infty), \psi(t,-\infty)) = (\phi_-(t), \psi_-(t)), \;\; \forall\, t > 0,$$

y

$$(\phi(t+T, z), \psi(t+T, z)) = (\phi(t,z), \psi(t,z)), \;\; \forall z \in \mathbb{R},\, t > 0,$$

siendo $c > 0$ la velocidad de la onda viajera, $z(= x+ct)$ la coordenada móvil y los pares $(\phi_-(t), \psi_-(t))$ y $(\phi_+(t), \psi_+(t))$ dos soluciones $T-$periódicas del sistema cinético:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\beta(t)S(t)I(t), \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = -\gamma(t)I(t) + e^{-\int_{t-\tau}^{t} \gamma_L(s)\,ds}\beta(t-\tau)S(t-\tau)I(t-\tau), \end{cases} \tag{3.3}$$

Vamos a considerar las soluciones periódicas no triviales de onda viajera del sistema (3.1) que satisfacen las condiciones de contorno asintóticas:

$$\phi(t, -\infty) = S_0 > 0, \quad \phi(t, \infty) = S^\infty > 0, \quad \psi(t, \pm\infty) = 0, \tag{3.4}$$

uniformemente en $t \in \mathbb{R}$, donde las constantes S_0 y S^∞ representan el número de personas susceptibles antes y después de la epidemia respectivamente. Es decir, $(S_0, 0)$ es el estado estacionario inicial libre de enfermedad del sistema (3.1), mientras que $(S^\infty, 0)$ representa otro estado libre de enfermedad después de la epidemia.

3.2.1 Construcción de sub-soluciones y super-soluciones

Veamos primero el número básico de reproducción para el sistema (3.3). Linealizando la segunda ecuación del sistema (3.3) en el equilibrio libre de enfermedad $(S_0, 0)$ se obtiene:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\gamma(t) \cdot I(t) + e^{-\int_{t-\tau}^{t} \gamma_L(s)\,ds}\beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot I(t-\tau). \tag{3.5}$$

Sean $Y = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ e $Y^+ = C([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$ y sea $C_T \subset C(\mathbb{R})$ el conjunto formado por todas las funciones $T-$periódicas. Entonces C_T es un espacio de Banach (normado y completo) ordenado. Siguiendo los pasos que se realizan en [13], tomamos:

$$F(t)\varphi = e^{-\int_{t-\tau}^{t} \gamma_L(r)\,dr}\beta(t-\tau) \cdot \varphi(-\tau), \quad \varphi \in Y, \ V(t) = \gamma(t).$$

Considerando $\Phi(t, s) = e^{-\int_s^t \gamma(r)\,dr}$, $\forall t \geq s, \ s \in \mathbb{R}$, definimos el operador lineal en C_T:

$$[Lv](t) = \int_0^\infty \Phi(t, t-s) \cdot F(t-s) \cdot v(t-s+\cdot)\,ds = \int_0^\infty \Phi(t, t-s) \cdot e^{-\int_{t-s-\tau}^{t-s} \gamma_L(r)\,dr}\beta(t-s-\tau) \cdot v(t-s-\tau)\,ds.$$

Haciendo el cambio de variable $s' = s + \tau$ tenemos que:

$$[Lv](t) = \int_\tau^\infty \Phi(t, t-s+\tau) \cdot e^{-\int_{t-s}^{t-s+\tau} \gamma_L(r)\,dr}\beta(t-s) \cdot v(t-s)\,ds.$$

Teniendo en cuenta la teoría del número básico de reproducción de [13], definimos $R_0 = r(L)$ como el número básico de reproducción del modelo (3.3), donde $r(L)$ es el radio espectral del operador lineal L en C_T.

Haciendo el cambio de variable $s = x - y$, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, t-\tau; x-y) \cdot I(t-\tau, y)\, dy = -\int_{\infty}^{-\infty} \Gamma(t, t-\tau; s) \cdot I(t-\tau, x-s)\, ds.$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, t-\tau; x-y) \cdot I(t-\tau, y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot I(t-\tau, x-y)\, dy.$$

Usando esto, si linealizamos la segunda ecuación del sistema (3.1) en el estado estacionario libre de enfermedad $(S_0, 0)$, obtenemos:

$$\frac{\partial I(t,x)}{\partial t} = d_2 \cdot \triangle I(t,x) - \gamma(t) I(t,x) + \beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot I(t-\tau, x-y)\, dy. \tag{3.6}$$

Para cualquier $\mu > 0$, sustituyendo $I(t,x) = e^{\mu x}\eta(t)$ en la ecuación anterior, tenemos que:

$$e^{\mu x}\eta'(t) = d_2\mu^2 \cdot e^{\mu x} \cdot \eta(t) - e^{\mu x}\gamma(t) \cdot \eta(t) + \beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot e^{\mu(x-y)}\eta(t-\tau)\, dy.$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot e^{-\mu y}\, dy = e^{-\int_{t-\tau}^{t} \gamma_L(s)\, ds} \cdot e^{d_L \tau \mu^2},$$

y dividiendo por $e^{\mu x}$, tenemos que:

$$\eta'(t) = \left[d_2\mu^2 - \gamma(t)\right]\eta(t) + e^{-\int_{t-\tau}^{t} \gamma_L(s)\, ds} \cdot e^{d_L\tau\mu^2}\beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot \eta(t-\tau). \tag{3.7}$$

Definimos el semiflujo de solución $I_t^{\mu}(\gamma)(s) = I(t+s; \gamma; \mu)$, $\forall s \in [-\tau, 0]$, $t > 0$ para (3.7), donde $I(t; \Phi; \mu)$ es la solución de (3.7) con los datos iniciales $\gamma \in Y^+$. Definimos además el mapa de Poincaré:

$$\begin{array}{rccc} P_\mu : & Y^+ & \longrightarrow & Y^+ \\ & \gamma & \longrightarrow & I_T^{\mu}(\gamma) \end{array}$$

Conviene observar que la ecuación (3.5) es un caso límite ($\mu = 0$) de la ecuación (3.7). Denotemos por $\rho(\mu)$ al radio espectral de P_μ y sea $\rho_0 = \rho(0)$ el radio del mapa de Poincaré de la ecuación (3.5). Deducimos de [13, Teorema 2.1] que $R_0 - 1$ tiene el mismo signo que $\rho_0 - 1$. Como en esta sección vamos a suponer que $R_0 > 1$, se tiene que $\rho(\mu) \geq \rho_0 > 1$.

Sea $\lambda(\mu) = \dfrac{\log(\rho(\mu))}{T}$. Se deduce de [4, Proposición 2.1] que existe una función $T-$periódica positiva $K_\mu(t)$ tal que $\eta_\mu(t) = e^{\lambda(\mu)t}K_\mu(t)$, $\forall \mu > 0$ es una solución de la ecuación (3.7).

Definimos ahora la función $\Phi(\mu) = \dfrac{\lambda(\mu)}{\mu}$ con $\mu \in (0, \infty)$. Por [12, Lema 3.8]:

$$\exists\, \mu^*, c^* \in (0, \infty) \text{ tales que } c^* = \Phi(\mu^*) = \inf_{\mu>0} \Phi(\mu).$$

Tomando $c > c^*$, al ser Φ decreciente en valores cercanos a 0 [12, Lema 3.8], existe $0 < \mu_1(c) < \mu_2(c) < \infty$ tal que $\Phi(\mu_1) = c$ y $\Phi(\mu) < c$ para $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$. Luego:

$$\Phi(\mu_1) = c \Longrightarrow \frac{\log(\rho(\mu_1))}{T\mu_1} = c \Longrightarrow \lambda(\mu_1) = c \cdot \mu_1.$$

Sabemos que, en particular, la función $\eta_{\mu_1}(t) = e^{\lambda(\mu_1)t} K_{\mu_1}(t)$ cumple la ecuación (3.7). Si $z = x + ct$, como $I(t,x) = e^{\mu x}\eta(t)$ es solución de (3.6), la función definida por:

$$J(t,z) = e^{\mu_1 z} K_{\mu_1}(t) = e^{\mu_1 x} e^{\mu_1 ct} K_{\mu_1}(t) = e^{\mu_1 x} e^{\lambda(\mu_1)t} K_{\mu_1}(t) = e^{\mu_1 x} \eta_{\mu_1}(t) = I_{\eta_1}(t,x),$$

satisface la ecuación lineal:

$$\frac{\partial I_{\eta_1}(t,x)}{\partial t} = d_2 \cdot \frac{\partial^2 I_{\eta_1}(t,x)}{\partial x^2} - \gamma(t) I_{\eta_1}(t,x) + \beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot I_{\eta_1}(t-\tau, x-y)\, dy.$$

Como $z = x + ct$, utilizando la regla de la cadena, la ecuación anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} J_t(t,z) &= d_2 \cdot J_{zz}(t,z) - c \cdot J_z(t,z) - \gamma(t) \cdot J(t,z) + \\ &+ S_0 \beta(t-\tau) \cdot \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot J(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Definimos como en [11]:

$$\begin{aligned} \phi^+(t,z) &= S_0, & \phi^-(t,z) &= \max\{0,\, S_0(1 - M_1 e^{\epsilon_1 z})\}, \\ \psi^+(t,z) &= e^{\mu_1 z} K_{\mu_1}(t), & \psi^-(t,z) &= \max\{0,\, e^{\mu_1 z} K_{\mu_1}(t) - M_2 e^{\mu_{\epsilon_2} z} K_{\mu_{\epsilon_2}}(t)\}, \end{aligned}$$

siendo ϵ_i y $M_i > 0$, $i = 1, 2$, constantes que se determinarán más tarde, $\mu_{\epsilon_2} = \mu_1 + \epsilon_2$ con $\epsilon_2 \in (0, \mu_2 - \mu_1)$. Entonces tenemos que $\mu_{\epsilon_2} \in (\mu_1, \mu_2)$ y $c^* < c_{\epsilon_2} = \Phi(\mu_{\epsilon_2}) < c$ y, argumentando como antes, existe una función positiva $T-$periódica $K_{\mu_{\epsilon_2}}(t)$ tal que $\eta_{\mu_{\epsilon_2}}(t) = e^{\lambda(\mu_{\epsilon_2})t} K_{\mu_{\epsilon_2}}(t)$ es una solución de la ecuación (3.7). Además, la función $J^{\epsilon_2}(t,z) = e^{\mu_{\epsilon_2} z} K_{\mu_{\epsilon_2}}(t)$ satisface:

$$\begin{aligned} J^{\epsilon_2}_t(t,z) &= d_2 \cdot J^{\epsilon_2}_{zz}(t,z) - c_{\epsilon_2} \cdot J^{\epsilon_2}_z(t,z) - \gamma(t) \cdot J^{\epsilon_2}(t,z) + \\ &+ \beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot J^{\epsilon_2}(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observación 3.2. *Teniendo en cuenta que $M_1 > 0$, tenemos que $\phi^+(t,z) \geq \phi^-(t,z) \geq 0$.*

Observación 3.3. *Teniendo en cuenta que $M_2 > 0$, tenemos que $\psi^+(t,z) \geq \psi^-(t,z) \geq 0$.*

Los siguientes lemas técnicos demuestran que $(\phi^-(t,z), \psi^-(t,z))$ y $(\phi^+(t,z), \psi^+(t,z))$ son, respectivamente, sub- y super-soluciones del sistema **(3.2)**:

Lema 3.4. *Las funciones $\phi_t^+(t,z)$ y $\psi^-(t,z)$ satisfacen:*

$$\phi_t^+(t,z) - d_1 \cdot \phi_{zz}^+(t,z) + c\phi_z^+(t,z) + \beta(t) \cdot \phi^+(t,z) \cdot \psi^-(t,z) \geq 0.$$

Demostración: Como $\phi^+(t,z) = S_0 > 0$, $\psi^-(t,z) \geq 0$ y la función β es positiva:

$$\phi_t^+(t,z) - d_1 \cdot \phi_{zz}^+(t,z) + c\phi_z^+(t,z) + \beta(t) \cdot \phi^+(t,z) \cdot \psi^-(t,z) =$$

$$= \beta(t) \cdot S_0 \cdot \psi^-(t,z) \geq \beta(t) \cdot S_0 \cdot 0 = 0. \quad \square$$

Lema 3.5. *Supongamos que $\epsilon_1 \in (0, \mu_1)$ es suficientemente pequeño y $M_1 > 1$ es suficientemente grande. Entonces las funciones $\phi^-(t,z)$ y $\psi^+(t,z)$ satisfacen:*

$$\phi_t^-(t,z) - d_1 \cdot \phi_{zz}^-(t,z) + c \cdot \phi_z^-(t,z) + \beta(t) \cdot \phi^-(t,z) \cdot \psi^+(t,z) \leq 0,$$

para cualquier $z \neq z_1 = -\frac{1}{\epsilon_1}\log(M_1)$.

Demostración: • Supongamos que $z > \frac{-1}{\epsilon_1}\log(M_1)$. Entonces:

$$1 - M_1 e^{\epsilon_1 z} < 1 - M_1 \cdot e^{\epsilon_1(-\epsilon_1)^{-1}\log(M_1)} = 1 - M_1 \cdot \frac{1}{M_1} = 0.$$

En consecuencia, $\phi^-(t,z) = \max\{0,\, S_0(1 - M_1 e^{\epsilon_1 z})\} = 0$, puesto que la desigualdad del Lema es evidente.

• Supongamos que $z < \frac{-1}{\epsilon_1}\log(M_1)$. Entonces $\phi^-(t,z) = \max\{0,\, S_0(1 - M_1 e^{\epsilon_1 z})\} = S_0(1 - M_1 e^{\epsilon_1 z})$. Luego:

$$\phi_z^- = -\epsilon_1 \cdot S_0 \cdot M_1 \cdot e^{\epsilon_1 z} \text{ y } \phi_{zz}^- = -\epsilon_1^2 \cdot S_0 \cdot M_1 \cdot e^{\epsilon_1 z}.$$

Así pues, la desigualdad del Lema es equivalente a probar:

$$d_1 S_0 M_1 \epsilon_1^2 \cdot e^{\epsilon_1 z} - cS_0 M_1 \epsilon_1 \cdot e^{\epsilon_1 z} + \beta(t) \cdot e^{\mu_1 z} K_{\mu_1}(t) \cdot S_0(1 - M_1 e^{\epsilon_1 z}) \leq 0 \iff$$

$$\iff d_1 S_0 M_1 \epsilon_1^2 \cdot e^{\epsilon_1 z} - cS_0 M_1 \epsilon_1 \cdot e^{\epsilon_1 z} \leq -\beta(t) \cdot e^{\mu_1 z} K_{\mu_1}(t) \cdot S_0(1 - M_1 e^{\epsilon_1 z}) \iff$$

$$\iff S_0 M_1 \epsilon_1 (c - d_1 \epsilon_1) \geq \frac{\beta(t) S_0 (1 - M_1 e^{\epsilon_1 z}) K_{\mu_1}(t) e^{\mu_1 z}}{e^{\epsilon_1 z}}.$$

Como $z < z_1 = -\epsilon_1^{-1}\log(M_1)$, se tiene que:

$$\frac{\beta(t) S_0 (1 - M_1 e^{\epsilon_1 z}) K_{\mu_1}(t) e^{\mu_1 z}}{e^{\epsilon_1 z}} \leq \beta(t) S_0 (1 - M_1 e^{\epsilon_1 z}) K_{\mu_1}(t) e^{z_1(\mu_1 - \epsilon_1)} \leq \beta(t) S_0 K_{\mu_1}(t) e^{z_1(\mu_1 - \epsilon_1)}.$$

Luego es suficiente demostrar que:

$$S_0 M_1 \epsilon_1 (c - d_1 \epsilon_1) \geq S_0 \beta(t) \cdot K_{\mu_1}(t) e^{z_1(\mu_1 - \epsilon_1)} \iff$$

$$\iff M_1 \epsilon_1 (c - d_1 \epsilon_1) \geq \beta(t) \cdot K_{\mu_1}(t) \cdot e^{-\epsilon_1^{-1} \log(M_1)(\mu_1 - \epsilon_1)} \iff$$

$$\iff M_1 \epsilon_1 (c - d_1 \epsilon_1) \geq \beta(t) \cdot K_{\mu_1}(t) \cdot M_1^{-\epsilon_1^{-1}(\mu_1 - \epsilon_1)}.$$

Puesto que $\beta(t)$ y $K_{\mu_1}(t)$ son funciones positivas $T-$periódicas, la igualdad es cierta tomando $M_1 = \dfrac{1}{\epsilon_1}$ con $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeño. □

Observación 3.6. *Se tiene que* $z_1 = \dfrac{-1}{\epsilon_1} \log(M_1) \leq 0$ *ya que* $M_1 > 1$.

Lema 3.7. *Las funciones* $\phi^+(t,z)$ *y* $\psi^+(t,z)$ *satisfacen:*

$$\psi_t^+(t,z) - d_2 \cdot \psi_{zz}^+(t,z) + c \cdot \psi_z^+(t,z) + \gamma(t)\psi^+(t,z) -$$

$$- \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \cdot \phi^+(t-\tau, z - c\tau - y) \cdot \psi^+(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy \geq 0.$$

Demostración: Como $\psi^+(t,z) = e^{\mu_1 x} \eta_{\mu_1}(t) = J(t,z)$, por (3.8), se tiene que:

$$\psi_t^+(t,z) = d_2 \cdot \psi_{zz}^+(t,z) - c \cdot \psi_z^+(t,z) - \gamma(t)\psi^+(t,z) + S_0 \cdot \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \psi^+(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy.$$

Así pues, tenemos que:

$$\psi_t^+(t,z) - d_2 \cdot \psi_{zz}^+(t,z) + c \cdot \psi_z^+(t,z) + \gamma(t)\psi^+(t,z) -$$

$$- \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^+(t-\tau, z - c\tau - y) \psi^+(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy =$$

$$= S_0 \cdot \beta(t-\tau) \cdot \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \left(\psi^+(t-\tau, z - c\tau - y) - \psi^+(t-\tau, z - c\tau - y) \right) dy = 0. \quad \square$$

Lema 3.8. *Sea* $\epsilon_2 > 0$ *suficientemente pequeño tal que* $\epsilon_2 < \min\{\epsilon_1, \mu_2 - \mu_1\}$. *Entonces existe una constante* $M_2 > 0$ *suficientemente grande con* $\max_{t \in [0,T]} \left[\dfrac{1}{\epsilon_2} \log \left(\dfrac{K_{\mu_1}(t)}{M_2 K_{\mu_{\epsilon_2}}(t)} \right) \right] < -\dfrac{1}{\epsilon_1} \log(M_1)$ *tal que las funciones* $\phi^-(t,z)$ *y* $\psi^-(t,z)$ *satisfacen:*

$$\psi_t^-(t,z) - d_2 \cdot \psi_{zz}^-(t,z) + c\psi_z^-(t,z) + \gamma(t) \cdot \psi^-(t,z) -$$

$$- \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot \beta(t-\tau) \cdot \phi^-(t-\tau, z - c\tau - y) \cdot \psi^-(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy \leq 0,$$

para cualquier $z \neq z_2(t) = \frac{1}{\epsilon_2} \log \left(\frac{K_{\mu_1}(t)}{M_2 K_{\mu_{\epsilon_2}}(t)} \right)$.

Demostración: • Si $z > z_2(t)$, entonces $\psi^-(t,z) \equiv 0$. Luego es evidente la desigualdad.

• Si $z < z_2(t) < z_1$ tenemos que:

$$\phi^-(t,z) = S_0(1 - M_1 e^{\epsilon_1 z}) \quad \text{y} \quad \psi^-(t,z) = e^{\mu_1 z} K_{\mu_1}(t) - M_2 e^{\mu_{\epsilon_2} z} K_{\mu_{\epsilon_2}}(t).$$

Si pasamos la integral al miembro derecho de la desigualdad y restamos a ambos miembros el término:

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \cdot \beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot \psi^-(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy,$$

la desigualdad del lema es equivalente a:

$$\begin{aligned} &\psi_t^-(t,z) - d_2 \cdot \psi_{zz}^-(t,z) + c\psi_z^-(t,z) + \gamma(t) \cdot \psi^-(t,z) - \\ &- \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y) \cdot \beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot \psi^-(t-\tau, z-c\tau-y)\, dy \leq \\ &\leq \beta(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y) \left[\phi^-(t-\tau, z-c\tau-y) - S_0\right] \psi^-(t-\tau, z-c\tau-y)\, dy. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Desarrollando el miembro izquierdo de la desigualdad (3.10):

$$\begin{aligned} &\psi_t^-(t,z) - d_2 \cdot \psi_{zz}^-(t,z) + c\psi_z^-(t,z) + \gamma(t) \cdot \psi^-(t,z) - \\ &- \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y) \cdot \beta(t-\tau) \cdot S_0 \cdot \psi^-(t-\tau, z-c\tau-y)\, dy = \\ &= e^{\mu_1 z} \Big[K'_{\mu_1}(t) - d_2\mu_1^2 \cdot K_{\mu_1}(t) + c\mu_1 \cdot K_{\mu_1}(t) + \gamma(t) \cdot K_{\mu_1}(t) - \\ &-\beta(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y) \cdot S_0 \cdot e^{-\mu_1(c\tau+y)} \cdot K_{\mu_1}(t-\tau)\, dy\Big] - \\ &-M_2 \cdot e^{\mu_{\epsilon_2} z} \Big[K'_{\mu_{\epsilon_2}}(t) - d_2\mu_{\epsilon_2}^2 \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) + c\mu_{\epsilon_2} \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) + \gamma(t) \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) - \\ &-\beta(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y) \cdot S_0 \cdot e^{-\mu_{\epsilon_2}(c\tau+y)} \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t-\tau)\, dy\Big] = \star. \end{aligned}$$

Utilizando (3.8) y (3.9), tenemos que:

$$\begin{aligned} \star = 0 - M_2 \cdot e^{\mu_{\epsilon_2} z} \Big[&d_2\mu_{\epsilon_2}^2 \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) - c_{\epsilon_2}\mu_{\epsilon_2} \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) - \gamma(t) \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) + \\ &+\beta(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y) \cdot S_0 \cdot e^{-\mu_{\epsilon_2}(c_{\epsilon_2}\tau+y)} \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t-\tau)\, dy - \\ &-d_2\mu_{\epsilon_2}^2 \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) + c\mu_{\epsilon_2} \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) + \gamma(t) \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) - \\ &-\beta(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y) \cdot S_0 \cdot e^{-\mu_{\epsilon_2}(c\tau+y)} \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t-\tau)\, dy\Big] = -M_2 \cdot e^{\mu_{\epsilon_2} z} \cdot \tilde{H}(t), \end{aligned}$$

siendo $\tilde{H}(t) = (c - c_{\epsilon_2})\mu_{\epsilon_2} \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t) - S_0\beta(t-\tau) \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y) \cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t-\tau) \cdot e^{-\mu_{\epsilon_2} y}\, dy \cdot \left(e^{-\mu_{\epsilon_2} c\tau} - e^{-\mu_{\epsilon_2} c_{\epsilon_2}\tau}\right).$

Para el miembro derecho de la desigualdad (3.10), tenemos que:

$$\beta(t-\tau)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\left[\phi^-(t-\tau,z-c\tau-y)-S_0\right]\psi^-(t-\tau,z-c\tau-y)\,dy=$$
$$=-M_1S_0\beta(t-\tau)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\cdot e^{\epsilon_1(z-c\tau-y)}\cdot K_{\mu_1}(t-\tau)\cdot e^{\mu_1(z-c\tau-y)}\,dy+$$
$$+M_2M_1S_0\cdot\beta(t-\tau)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\cdot e^{\epsilon_1(z-c\tau-y)}\cdot K_{\mu_{\epsilon_2}}(t-\tau)\cdot e^{\mu_{\epsilon_2}(z-c\tau-y)}\,dy.$$

Luego para probar la desigualdad (3.10) y, en consecuencia el Lema, es suficiente demostrar que:

$$-M_2\cdot e^{\mu_{\epsilon_2}z}\cdot\tilde{H}(t)\leq -M_1S_0\beta(t-\tau)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\cdot e^{\epsilon_1(z-c\tau-y)}\cdot K_{\mu_1}(t-\tau)\cdot e^{\mu_1(z-c\tau-y)}\,dy,$$

que es equivalente a:

$$M_2\cdot e^{\mu_{\epsilon_2}z}\cdot\tilde{H}(t)\geq M_1S_0\beta(t-\tau)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\cdot e^{\epsilon_1(z-c\tau-y)}\cdot K_{\mu_1}(t-\tau)\cdot e^{\mu_1(z-c\tau-y)}\,dy,\quad \forall t\in[0,T].$$

La desigualdad es cierta utilizando la periodicidad de las funciones $\beta(t)$, $K_{\mu_1}(t)$, $\Gamma(t,t-\tau,\cdot)$ y tomando $\epsilon_2<\epsilon_1$ suficientemente pequeño y M_2 suficientemente grande. □

Observación 3.9. *Puesto que* $\max\limits_{t\in[0,T]} z_2(t)=\max\limits_{t\in[0,T]}\left[\frac{1}{\epsilon_2}\log\left(\frac{K_{\mu_1}(t)}{M_2K_{\mu_{\epsilon_2}}(t)}\right)\right]<\frac{-1}{\epsilon_1}\log M_1\leq 0\Longrightarrow$ $\Longrightarrow z_2(t)\leq 0\quad\forall t\in\mathbb{R}$.

3.2.2 Reducción a un problema de punto fijo

En esta sección vamos a utilizar la siguiente definición:

Definición 3.10. Sean α, β, $l>0$. Definimos:

$$C^{\alpha,\beta}\left(\mathbb{R}\times[-l,l]\right)=\left\{f\in C(\mathbb{R}\times[-l,l]):\ f(\cdot,x)\in C^{\alpha}(\mathbb{R}\times[-l,l]),\ f(t,\cdot)\in C^{\beta}(\mathbb{R}\times[-l,l])\right\}.$$

Siguiendo [11, Section 2.2], definimos $z^*=\max\limits_{t\in[0,T]}-z_2(t)$, donde $z_2(t)$ se define en el **Lema 3.8**. Para cualquier $l>0$, fijamos $C_l=C(\mathbb{R}\times[-l,l],\mathbb{R}^2)$. Tomando $l>z^*$ definimos:

$$\Gamma_l=\left\{(\tilde{\phi},\tilde{\psi})\in C_l:\ \begin{array}{l}(\tilde{\phi}(t+T,z),\tilde{\psi}(t+T,z))=(\tilde{\phi}(t,z),\tilde{\psi}(t,z)),\\[2mm] (\phi^-(t,z),\psi^-(t,z))\leq(\tilde{\phi}(t,z),\tilde{\psi}(t,z))\leq\\ \leq(\phi^+(t,z),\psi^+(t,z)),\qquad\forall(t,x)\in\mathbb{R}\times[-l,l];\\[2mm] (\tilde{\phi}(t,\pm l),\tilde{\psi}(t,\pm l))=(\phi^-(t,\pm l),\psi^-(t,\pm l)),\quad\forall t\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$$

Para cualquier $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in \Gamma_l$, definimos:

$$\chi_l[\tilde{\phi}](t,z) = \begin{cases} \tilde{\phi}(t,z), & t \in \mathbb{R},\ |z| \le l; \\ \phi^-(t,z), & t \in \mathbb{R}, |z| > l; \end{cases}$$

$$\chi_l[\tilde{\psi}](t,z) = \begin{cases} \tilde{\psi}(t,z), & t \in \mathbb{R},\ |z| \le l; \\ \psi^-(t,z), & t \in \mathbb{R}, |z| > l; \end{cases}$$

Observación 3.11. *Las funciones $\chi_l[\tilde{\phi}], \chi_l[\tilde{\psi}]$ están bien definidas, son $T-$periódicas en tiempo t y cumplen que:*

$$\chi_l[\tilde{\phi}](t,z) \le \phi^+(t,z) \ \ y \ \ \chi_l[\tilde{\psi}](t,z) \le \psi^+(t,z) \quad \forall\, (t,z) \in \mathbb{R} \times [-l,l].$$

Definimos además los operadores:

$$f_1[\tilde{\phi}, \tilde{\psi}](t,z) = \alpha_1 \tilde{\phi}(t,z) - \beta(t)\tilde{\phi}(t,z)\tilde{\psi}(t,z),$$

$$f_2[\tilde{\phi}, \tilde{\psi}](t,z) = \alpha_2 \tilde{\psi}(t,z) - \gamma(t)\tilde{\psi}(t,z) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y)\beta(t-\tau)\chi_l[\tilde{\phi}](t-\tau, z-c\tau-y)\chi_l[\tilde{\psi}](t-\tau, z-c\tau-y)\, dy,$$

donde α_1, α_2 son constantes suficientemente grandes tales que $\alpha_1 > \max\limits_{t\in[0,T]} \beta(t) K_{\mu_1}(t) e^{\mu_1 l}$ y $\alpha_2 > \max\limits_{t\in[0,T]} \gamma(t)$.

Definimos $\mathcal{A}_i\varphi = d_i\varphi_{zz} - c\varphi_z - \alpha_i\varphi$, $i = 1,2$. Para cualquier $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in \Gamma_l$, consideramos el siguiente sistema lineal parabólico con condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \phi_t(t,z) - \mathcal{A}_1\phi(t,z) = f_1[\tilde{\phi}, \tilde{\psi}](t,z), \\ \psi_t(t,z) - \mathcal{A}_2\psi(t,z) = f_2[\tilde{\phi}, \tilde{\psi}](t,z), \quad (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l], \\ \phi(0,z) = \phi_0(z),\ \psi(0,z) = \psi_0(z), \quad z \in [-l,l], \\ \phi(t, \pm l) = G_1(t, \pm l),\ \psi(t, \pm l) = G_2(t, \pm l), \quad t \ge 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

donde $\phi_0, \psi_0 \in C[-l,l]$, $G_1(t,z) = \frac{1}{2}\phi^-(t,-l) - \frac{z}{2l}\phi^-(t,-l)$ y $G_2(t,z) = \frac{1}{2}\psi^-(t,-l) - \frac{z}{2l}\psi^-(t,-l)$ para todo $(t,z) \in [0,T] \times [-l,l]$.

Veamos que, en efecto, se cumplen las condiciones de frontera. Claramente, se tiene que

$$G_1(t,-l) = \phi^-(t,-l) \ \text{ y } \ G_2(t,-l) = \psi^-(t,-l).$$

Veamos ahora que $G_1(t,l) = \phi^-(t,l)$ y $G_2(t,l) = \psi^-(t,l)$.

Sabemos que $l > z^* = \max\limits_{t\in[0,T]} -z_2(t) > -z_1 \ge 0$ gracias a la **Observación 3.6**. Como $l > 0$ y $z_1 \le 0$

se tiene que $l > z_1 = -\frac{1}{\epsilon_1}\log(M_1)$ y, gracias a la primera parte de la demostración del **Lema 3.5**, se tiene que $\phi^-(t,l) = 0$. Así pues:

- $G_1(t,l) = \dfrac{1}{2}\phi^-(t,-l) - \dfrac{l}{2l}\phi^-(t,l) = 0 = \phi^-(t,l).$

Por otro lado sabemos que $l > z^* = \max\limits_{t\in[0,T]} -z_2(t) \geq 0$ gracias a la **Observación 3.9**. Como $l > 0$ y $z_2(t) \leq 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$ se tiene que $l > z_2(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$ y, gracias a la primera parte de la demostración del **Lema 3.8**, se tiene que $\psi^-(t,l) = 0$. Así pues:

- $G_2(t,l) = \dfrac{1}{2}\psi^-(t,-l) - \dfrac{l}{2l}\psi^-(t,l) = 0 = \psi^-(t,l).$

Además $G_i \in C^{1,2}(\mathbb{R}\times[-l,l])$, $i = 1,2$ son funciones $T-$periódicas en tiempo t.

Sean $V_1(t,z) = \phi(t,z)-G_1(t,z)$, $V_2(t,z) = \psi(t,z)-G_2(t,z)$ y $\tilde{G}_i = \mathcal{A}_iG_i(t,z)-\partial_tG_i(t,z)$, $i = 1,2$. Entonces el problema (3.11) se transforma en el siguiente problema lineal parabólico:

$$\begin{cases} \partial_t V_i(t,z) - \mathcal{A}_iV_i(t,z) = f_i[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](t,z) + \tilde{G}_i(t,z), \quad (t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l],\ i = 1,2, \\ V_1(0,z) = \phi_0(z) - G_1(0,z),\ V_2(0,z) = \psi_0(z) - G_2(0,z), \quad z \in [-l,l], \\ V_i(t,\pm l) = 0, \quad t \geq 0,\ i = 1,2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Vamos a considerar (3.12) como un problema de evolución en el espacio $C([-l,l])$ definiendo $A_i^0\varphi = \mathcal{A}_i\varphi$ donde:

$$D(A_i^0) = \left\{ \varphi \in \bigcap_{p\geq 1} W^{2,p}_{\text{loc}}(-l,l) :\ \varphi, \mathcal{A}_i\varphi \in C([-l,l]),\ \varphi(\pm l) = 0 \right\}, \quad i = 1,2.$$

Entonces, por [11], sabemos que $A_i^0 : D(A_i^0) \subset C([-l,l]) \longrightarrow C([-l,l])$ genera un semigrupo analítico fuertemente continuo $T_i(t)_{t\geq 0}$ (se puede consultar en el apéndice A) tal que

$$T_i(t)\varphi(x) = e^{-\alpha_i t}\int_{-l}^{l} \Gamma_i(t;x,y)\varphi(y)\,dy, \quad \varphi \in C([-l,l]),\ (t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l],$$

donde Γ_i es la función de Green correspondiente al operador $d_i\partial_{xx} - c\partial_x$ con condiciones de contorno dirichlet, $i = 1,2$.

En consecuencia, sabemos por [11] que, el sistema (3.12) puede ser reescrito como el siguiente sistema integral:

$$\begin{cases} V_1(t,z) = T_1(t)\left(\phi_0 - G_1(0)\right)(z) + \displaystyle\int_0^t T_1(t-s)\left(f_1[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](s) + \tilde{G}_1(s)\right)(z)\,ds, \\ V_2(t,z) = T_2(t)(\psi_0 - G_2(0))(z) + \displaystyle\int_0^t T_2(t-s)\left(f_2[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](s) + \tilde{G}_2(s)\right)(z)\,ds, \end{cases}$$

donde $(t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l]$. Deshaciendo el cambio de variable, tenemos que:

$$\begin{cases} \phi(t,z) = T_1(t)(\phi_0 - G_1(0))(z) + \displaystyle\int_0^t T_1(t-s)\left(f_1[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](s) + \tilde{G}_1(s)\right)(z)\,ds + G_1(t,z), \\ \psi(t,z) = T_2(t)(\psi_0 - G_2(0))(z) + \displaystyle\int_0^t T_2(t-s)\left(f_2[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](s) + \tilde{G}_2(s)\right)(z)\,ds + G_2(t,z), \end{cases} \tag{3.13}$$

para todo $(t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l]$.

Claramente, la solución del sistema (3.13) es una solución suave (se puede consultar en el apéndice A) del sistema (3.11).
Como $f_i[\tilde{\phi},\tilde{\psi}] \in C(\mathbb{R} \times [-l,l])$, $i = 1,2$, por [1, Teoremas 5.1.18 y 5.1.19], sabemos que:

$$\phi,\ \psi \in C([0,2T] \times [-l,l]) \cap C^{\theta,2\theta}\left([\epsilon,2T] \times [-l,l]\right) \text{ si } \epsilon \in (0,2T) \text{ y } \theta \in (0,1).$$

Definimos

$$\Gamma_l' = \left\{ (\tilde{\phi},\tilde{\psi}) \in C\left([-l,l],\mathbb{R}^2\right) : \begin{array}{l} (\phi^-(0,z),\psi^-(0,z)) \le (\phi_0(z),\psi_0(z)) \le \\ \le (\phi^+(0,z),\psi^+(0,z)), \quad z \in [-l,l]; \\ \\ (\phi_0(t,\pm l),\psi_0(t,\pm l)) = (\phi^-(0,\pm l),\psi^-(0,\pm l)) \end{array} \right\}$$

que es un conjunto cerrado y convexo cuando está dotado de la norma suprema habitual.

Lema 3.12. *Para cualquier par* $(\phi_0,\psi_0) \in \Gamma_l'$ *sea* $((\phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0),\psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0))$ *una solución del sistema (3.13) con valor inicial* (ϕ_0,ψ_0)*. Entonces tenemos que:*

$$\phi^-(t,z) \le \phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \le \phi^+(t,z),$$

y

$$\psi^-(t,z) \le \psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \le \psi^+(t,z),$$

para todo $t > 0$ *y* $z \in [-l,l]$.

Demostración: Vamos a dividir la prueba en 4 pasos:
Paso 1: Vamos a probar que $\phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \le \phi^+(t,z) \quad \forall (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l]$. Definimos:

$$\bar{\phi}(t,z) = T_1(t)(\phi_0 - G_1(0))(z) + \int_0^t T_1(t-s)\left(f_1[\phi^+,\psi^-](s) + \tilde{G}_1(s)\right)(z)\,ds + G_1(t,z), \quad t \ge 0.$$

Como $(\tilde{\phi},\tilde{\psi}) \in \Gamma_l \Longrightarrow \tilde{\phi}(t,z) \le \phi^+(t,z)$ y $\tilde{\psi}(t,z) \ge \psi^-(t,z) \quad \forall (t,z) \in \mathbb{R} \times [-l,l]$. Luego:

$$f_1[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](t,z) = \alpha_1\tilde{\phi}(t,z) - \beta(t)\tilde{\phi}(t,z)\tilde{\psi}(t,z) = \tilde{\phi}(t,z)\left(\alpha_1 - \beta(t)\tilde{\psi}(t,z)\right) \le \tilde{\phi}(t,z)\left(\alpha_1 - \beta(t)\psi^-(t,z)\right).$$

Como además $\alpha_1 > \max_{t\in[0,T]} \beta(t)K_{\mu_1}(t)e^{\mu_1 l} \Longrightarrow \alpha_1 > \beta(t)\psi^+(t,z) \geq \beta(t)\psi^-(t,z)$. En consecuencia:

$$f_1[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](t,z) \leq \phi^+(t,z)\left(\alpha_1 - \beta(t)\psi^-(t,z)\right) = f_1[\phi^+,\psi^-](t,z), \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l].$$

Esto implica que $\phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \leq \bar{\phi}(t,z;\phi_0,\psi_0) \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l]$.

Como $f_1[\phi^+,\psi^-] \in C^{\theta/2,\theta}([0,T]\times[-l,l]$ para algún $\theta \in (0,1)$, sabemos por [1, Teoremas 5.1.18 y 5.1.19] que $\bar{\phi}$ es diferenciable con respecto a t en $(0,\infty)\times[-l,l]$. Además $\bar{\phi}(t,\cdot) \in W^{2,p}_{\text{loc}}((-l,l))$ para algún $p \geq 1$ y $\partial_t\bar{\phi}$, $\mathcal{A}_1\bar{\phi} \in C^{\theta/2,\theta}([\delta,\infty)\times[-l,l])$ si $\delta > 0$.

Así, tenemos que $\bar{\phi} \in C([0,\infty)\times[-l,l]) \cap C^{1,2}((0,\infty)\times[-l,l])$ y satisface:

$$\begin{cases} \bar{\phi}_t(t,z) - \mathcal{A}_1\bar{\phi}(t,z) = f_1[\phi^+,\psi^-](t,z), \quad \forall(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l], \\ \bar{\phi}(0,z) = \phi_0(z), \quad z \in [-l,l], \\ \bar{\phi}(t,\pm l) = G_1(t,\pm l) = \phi^-(t,\pm l), \quad t \in (0,\infty), \end{cases}$$

Utilizando el **Lema 3.4**, sabemos que ϕ^+ satisface:

$$\begin{cases} \phi^+_t(t,z) - \mathcal{A}_1\phi^+(t,z) = f_1[\phi^+,\psi^-](t,z), \quad \forall(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l], \\ \phi^+(0,z) = S_0 \geq \phi_0(z), \quad z \in [-l,l], \\ \phi^+(t,\pm l) = S_0 \geq \phi^-(t,\pm l), \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Luego, por el principio de comparación parabólica se tiene que:

$$\bar{\phi}(t,z) \leq \phi^+(t,z), \qquad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l].$$

Luego: $\phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \leq \bar{\phi}(t,z) \leq \phi^+(t,z) \Longrightarrow \phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \leq \phi^+(t,z), \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l]$.

Paso 2: Veamos ahora que $\phi^-(t,z) \leq \phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty\times[-l,l]$. Definimos:

$$\underline{\phi}(t,z) = T_1(t)(\phi_0 - G_1(0))(z) + \int_0^t T_1(t-s)\left(f_1[\phi^-,\psi^+](s) + \tilde{G}_1(s)\right)(z)\,ds + G_1(t,z), \quad t \geq 0.$$

Como $(\tilde{\phi},\tilde{\psi}) \in \Gamma_l \Longrightarrow \phi^-(t,z) \leq \tilde{\phi}(t,z)$ y $\psi^+(t,z) \geq \tilde{\psi}(t,z) \quad \forall(t,z) \in \mathbb{R}\times[-l,l]$. Luego:

$$f_1[\phi^-,\psi^+](t,z) = \alpha_1\phi^-(t,z) - \beta(t)\phi^-(t,z)\psi^+(t,z) = \phi^-(t,z)\left(\alpha_1 - \beta(t)\psi^+(t,z)\right) \leq$$

$$\leq \phi^-(t,z)\left(\alpha_1 - \beta(t)\tilde{\psi}(t,z)\right).$$

Como además $\alpha_1 > \max_{t\in[0,T]} \beta(t)K_{\mu_1}(t)e^{\mu_1 l} \Longrightarrow \alpha_1 > \beta(t)\psi^+(t,z) \geq \beta(t)\tilde{\psi}(t,z)$. En consecuencia:

$$f_1[\phi^-,\psi^+](t,z) \leq \tilde{\phi}(t,z)\left(\alpha_1 - \beta(t)\tilde{\psi}(t,z)\right) = f_1[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](t,z), \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l].$$

Esto implica que $\underline{\phi}(t,z;\phi_0,\psi_0) \leq \phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l]$.

De forma análoga a como hicimos en el paso 1 con la función $\bar{\phi}$, tenemos que $\underline{\phi}$ satisface:

$$\begin{cases} \underline{\phi}_t(t,z) - \mathcal{A}_1\underline{\phi}(t,z) = f_1[\phi^-,\psi^+](t,z), & \forall\,(t,z)\in(0,\infty)\times[-l,l]; \\ \underline{\phi}(0,z) = \phi_0(z), \quad z\in[-l,l]; \\ \underline{\phi}(t,\pm l) = G_1(t,\pm l) = \phi^-(t,\pm l), \quad t\geq 0. \end{cases}$$

Por el principio de comparación de ecuaciones parabólicas, es fácil ver que $\underline{\phi}(t,z) \geq 0 \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l]$. Por el **Lema 3.5**, tenemos que ϕ^- satisface:

$$\begin{cases} \phi_t^-(t,z) - \mathcal{A}_1\phi^-(t,z) = f_1[\phi^-,\psi^+](t,z), & \forall\,(t,z)\in(0,\infty)\times[-l,z_1]; \\ \phi^-(0,z) \leq \phi_0(z) = \underline{\phi}(0,z), \quad z\in[-l,z_1]; \\ \phi^-(t,-l) = G_1(t,-l) = \underline{\phi}(t,-l), \;\; \phi^-(t,z_1) = 0 \leq \underline{\phi}(t,z_1), \quad t\geq 0, \end{cases}$$

siendo z_1 el número definido en el **Lema 3.5**. El problema está bien definido ya que:

$$l > z^* = \max_{t\in[0,T]} -z_2(t) > -z_1 \Longrightarrow -l < \min_{t\in[0,T]} z_2(t) < z_1.$$

Así pues, por el principio de comparación parabólica:

$$\phi^-(t,z) \leq \underline{\phi}(t,z), \qquad \forall\,(t,z)\in(0,\infty)\times[-l,z_1].$$

En la demostración del **Lema 3.5** vimos que: $\phi^-(t,z) = 0 \quad \forall\,(t,z)\in(0,\infty)\times(z_1,\infty)$,
y acabamos de ver que $\underline{\phi}(t,z)\geq 0 \quad \forall\,(t,z)\in(0,\infty)\times[-l,l]$. Luego se tiene que:

$$\phi^-(t,z) \leq \underline{\phi}(t,z), \qquad \forall\,(t,z)\in(0,\infty)\times(z_1,l].$$

En consecuencia, tenemos que: $\phi^-(t,z)\leq\underline{\phi}(t,z), \quad \forall\,(t,z)\in(0,\infty)\times[-l,l]$.
Luego: $\phi^-(t,z)\leq\underline{\phi}(t,z)\leq\phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \Longrightarrow \phi^-(t,z)\leq\phi_l(t,z;\phi_0,\psi_0), \quad \forall\,(t,z)\in(0,\infty)\times[-l,l]$.

Paso 3: Vamos a probar que $\psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0)\leq\psi^+(t,z) \quad \forall(t,z)\in(0,\infty)\times[-l,l]$. Definimos:

$$\bar{\psi}(t,z) = T_2(t)(\psi_0 - G_2(0))(z) + \int_0^t T_2(t-s)\left(\hat{f}_2[\phi^+,\psi^+](s) + \tilde{G}_2(s)\right)(z)\,ds + G_2(t,z), \quad t\geq 0,$$

donde

$$\hat{f}_2[\phi^+,\psi^+](t,z) = \alpha_2\psi^+(t,z) - \gamma(t)\psi^+(t,z) +$$
$$+\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^+(t-\tau,z-c\tau-y)\psi^+(t-\tau,z-c\tau-y)\,dy.$$

Como $(\tilde{\phi},\tilde{\psi}) \in \Gamma_l \Longrightarrow \chi_l[\tilde{\phi}](t,z) \leq \phi^+(t,z)$ y $\chi_l[\tilde{\psi}](t,z) \leq \psi^+(t,z) \quad \forall (t,z) \in \mathbb{R}\times[-l,l]$. Luego:

$$f_2[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](t,z) = \tilde{\psi}(t,z)(\alpha_2 - \gamma(t)) +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\chi_l[\tilde{\phi}](t-\tau, z-c\tau-y)\chi_l[\tilde{\psi}](t-\tau,z-c\tau-y)\,dy \leq$$
$$\leq \tilde{\psi}(t,z)(\alpha_2-\gamma(t)) + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^+(t-\tau,z-c\tau-y)\psi^+(t-\tau,z-c\tau-y)\,dy.$$

Como además $\alpha_2 > \max\limits_{t\in[0,T]} \gamma(t) \Longrightarrow \alpha_2 > \gamma(t) \quad \forall t \in [0,T]$. En consecuencia:

$$f_2[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](t,z) \leq \psi^+(t,z)(\alpha_2-\gamma(t)) +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^+(t-\tau,z-c\tau-y)\psi^+(t-\tau,z-c\tau-y)\,dy \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f_2[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](t,z) \leq \hat{f}_2[\phi^+,\psi^+](t,z) \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l].$$

Esto implica que $\psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \leq \bar{\psi}(t,z;\phi_0,\psi_0) \qquad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l]$.

De forma análoga a como hicimos en el paso 1 con la función $\bar{\phi}$, tenemos que $\bar{\psi}$ satisface:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_t(t,z) - \mathcal{A}_2\bar{\psi}(t,z) = \hat{f}_2[\phi^+,\psi^+](t,z), & \forall (t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l], \\ \bar{\psi}(0,z) = \psi_0(z), & z \in [-l,l], \\ \bar{\psi}(t,\pm l) = G_2(t,\pm l) = \psi^-(t,\pm l), & t \geq 0. \end{cases}$$

Utilizando el **Lema 3.7**, sabemos que ϕ^+ satisface:

$$\begin{cases} \psi_t^+(t,z) - \mathcal{A}_2\psi^+(t,z) = \hat{f}_2[\phi^+,\psi^+](t,z), & \forall (t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l], \\ \psi^+(0,z) = e^{\mu_1 z}K_{\mu_1}(0) \geq \psi_0(z), & z \in [-l,l], \\ \psi^+(t,\pm l) = e^{\pm\mu_1 l}K_{\mu_1}(t) \geq \psi^-(t,\pm l), & t \geq 0. \end{cases}$$

Luego, por el principio de comparación parabólica se tiene que:

$$\bar{\psi}(t,z) \leq \psi^+(t,z), \qquad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l].$$

Luego: $\psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \leq \bar{\psi}(t,z) \leq \psi^+(t,z) \Longrightarrow \psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \leq \psi^+(t,z), \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty)\times[-l,l]$.

Paso 4: Veamos por último que $\psi^-(t,z) \leq \psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \quad \forall\,(t,z) \in (0,\infty\times[-l,l]$. Definimos:

$$\underline{\psi}(t,z) = T_2(t)(\psi_0 - G_2(0))(z) + \int_0^t T_2(t-s)\left(\check{f}_2[\phi^-,\psi^-](s) + \tilde{G}_2(s)\right)(z)\,ds + G_2(t,z), \quad t \geq 0.$$

donde

$$\check{f}_2[\phi^-,\psi^-](t,z) = \alpha_2\psi^-(t,z) - \gamma(t)\psi^-(t,z) +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^-(t-\tau,z-c\tau-y)\psi^-(t-\tau,z-c\tau-y)\,dy.$$

Como $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in \Gamma_l \Longrightarrow \phi^-(t,z) \leq \chi_l[\tilde{\phi}](t,z)$ y $\psi^-(t,z) \leq \chi_l[\tilde{\psi}](t,z) \quad \forall (t,z) \in \mathbb{R} \times [-l,l]$. Luego:

$$\check{f}_2[\phi^-, \psi^-](t,z) = \psi^-(t,z)(\alpha_2 - \gamma(t)) +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y)\beta(t-\tau)\phi^-(t-\tau, z-c\tau-y)\psi^-(t-\tau, z-c\tau-y)\, dy \leq$$
$$\leq \psi^-(t,z)(\alpha_2 - \gamma(t)) + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y)\beta(t-\tau)\chi_l[\tilde{\phi}](t-\tau, z-c\tau-y)\chi_l[\tilde{\psi}](t-\tau, z-c\tau-y)\, dy.$$

Como además $\alpha_2 > \max\limits_{t\in[0,T]} \gamma(t) \Longrightarrow \alpha_2 > \gamma(t) \quad \forall t \in [0,T]$. En consecuencia:

$$\check{f}_2[\phi^-, \psi^-](t,z) \leq \tilde{\psi}(t,z)(\alpha_2 - \gamma(t)) +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y)\beta(t-\tau)\chi_l[\tilde{\phi}](t-\tau, z-c\tau-y)\chi_l[\tilde{\psi}](t-\tau, z-c\tau-y)\, dy \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \check{f}_2[\phi^-, \psi^-](t,z) \leq f_2[\tilde{\phi}, \tilde{\psi}](t,z) \quad \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l].$$

Esto implica que $\underline{\psi}(t,z;\phi_0,\psi_0) \leq \psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \qquad \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l]$.

De forma análoga a como hicimos en el paso 1 con la función $\bar{\phi}$, tenemos que $\underline{\psi}$ satisface:

$$\begin{cases} \underline{\psi}_t(t,z) - \mathcal{A}_2\underline{\psi}(t,z) = \check{f}_2[\phi^-, \psi^-](t,z), & \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l]; \\ \underline{\psi}(0,z) = \psi_0(z), \quad z \in [-l,l]; \\ \underline{\psi}(t, \pm l) = G_2(t, \pm l) = \psi^-(t, \pm l), \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Por el principio de comparación de ecuaciones parabólicas, es fácil ver que $\underline{\psi}(t,z) \geq 0 \quad \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l]$. Para cualquier $t' > 0$, tomamos $z_2' = z_2(t')$ con z_2 definido en el **Lema 3.8**. Luego:

$$l > z^* = \max_{t\in[0,T]} -z_2(t) \geq z_2' \Longrightarrow -l < \min_{t\in[0,T]} z_2(t) \leq z_2'.$$

Así pues, tenemos que:

$$\begin{cases} \underline{\psi}_t(t,z) - \mathcal{A}_2\underline{\psi}(t,z) = \check{f}_2[\phi^-, \psi^-](t,z), & \forall\, (t,z) \in (0,t') \times [-l,z_2']; \\ \underline{\psi}(0,z) = \psi_0(z), \quad z \in [-l,z_2']; \\ \underline{\psi}(t,-l) = G_2(t,-l) = \psi^-(t,-l),\ \underline{\psi}(t,z_2') \geq 0, \quad t \in (0,t'). \end{cases}$$

Por el **Lema 3.8**, tenemos que ψ^- satisface:

$$\begin{cases} \psi_t^-(t,z) - \mathcal{A}_2\psi^-(t,z) \leq \check{f}_2[\phi^-, \psi^-](t,z), & \forall\, (t,z) \in (0,t') \times [-l,z_2']; \\ \psi^-(0,z) \leq \psi_0(z) = \underline{\psi}(0,z), \quad z \in [-l,z_2']; \\ \psi^-(t,-l) = G_2(t,-l) = \underline{\psi}(t,-l),\ \ \psi^-(t,z_2') = 0 \leq \underline{\psi}(t,z_2'), \quad t \in (0,t'). \end{cases}$$

Así pues, por el principio de comparación parabólica, tenemos que:

$$\psi^-(t,z) \leq \underline{\psi}(t,z), \qquad \forall\, (t,z) \in (0,t') \times [-l,z_2'].$$

En la demostración del **Lema 3.8** vimos que: $\psi^-(t,z) = 0 \quad \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times (z_2', \infty)$,
y acabamos de ver que $\underline{\psi}(t,z) \geq 0 \quad \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l]$. Luego se tiene que:

$$\psi^-(t,z) \leq \underline{\psi}(t,z), \qquad \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times (z_2', l].$$

En consecuencia, tenemos que: $\psi^-(t,z) \leq \underline{\psi}(t,z), \qquad \forall\, (t,z) \in (0,t') \times [-l,l]$.
Al ser $t' > 0$ un número arbitrario, se tiene que:

$$\psi^-(t,z) \leq \underline{\psi}(t,z), \qquad \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l].$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\psi^-(t,z) \leq \underline{\psi}(t,z) \leq \psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0) \Longrightarrow \psi^-(t,z) \leq \psi_l(t,z;\phi_0,\psi_0), \quad \forall\, (t,z) \in (0,\infty) \times [-l,l]. \quad \square$$

Ahora estamos en condiciones de definir, para cada $(\tilde{\phi},\tilde{\psi}) \in \Gamma_l$, la función:

$$\begin{array}{rccc} F_{(\tilde{\phi},\tilde{\psi})}: & \Gamma_l' & \longrightarrow & C([-l,l],\mathbb{R}) \\ & (\phi_0,\psi_0) & \longrightarrow & (\phi_l(T,\cdot;\phi_0,\psi_0), \psi_l(T,\cdot;\phi_0,\psi_0)) \end{array}$$

siendo $(\phi_l(T,\cdot;\phi_0,\psi_0), \psi_l(T,\cdot;\phi_0,\psi_0))$ la solución del sistema **(3.11)** con valor inicial $(\phi_0,\psi_0) \in \Gamma_l'$.
Gracias al **Lema 3.12**, sabemos que $F_{(\tilde{\phi},\tilde{\psi})}(\Gamma_l') \subset \Gamma_l'$. Además, Γ_l' es un espacio métrico completo con la distancia inducida por la norma suprema. A partir de la ecuación (3.13):

$$\left\|\phi_l(T,\cdot;\phi_0^1,\psi_0^1) - \phi_l(T,\cdot;\phi_0^2,\psi_0^2)\right\|_{C[-l,l]} = \sup_{z\in[-l,l]} \left|T_1(T)(\phi_0^1(z) - \phi_0^2(z))\right| \leq e^{-\alpha_1 T} \left\|\phi_0^1 - \phi_0^2\right\|_{C[-l,l]},$$

y

$$\left\|\psi_l(T,\cdot;\phi_0^1,\psi_0^1) - \psi_l(T,\cdot;\phi_0^2,\psi_0^2)\right\|_{C[-l,l]} = \sup_{z\in[-l,l]} \left|T_2(T)(\psi_0^1(z) - \psi_0^2(z))\right| \leq e^{-\alpha_2 T} \left\|\psi_0^1 - \psi_0^2\right\|_{C[-l,l]}.$$

para cualquier $(\phi_0^i,\psi_0^i) \in \Gamma_l'$, $i = 1,2$. Dado que $\alpha_i > 0 \Longrightarrow e^{-\alpha_i T} < 1$, $\;i = 1,2$, por lo que podemos afirmar que la función $F_{(\tilde{\phi},\tilde{\psi})} : \Gamma_l' \longrightarrow \Gamma_l'$ es contractiva. Por el Teorema del punto fijo de Bannach (se puede consultar en el apéndice B), sabemos que $F_{(\tilde{\phi},\tilde{\psi})}$ posee un único punto fijo $(\phi_0^*,\psi_0^*) \in \Gamma_l'$.
Sea

$$(\phi_l^*(t,z), \psi_l^*(t,z)) = (\phi_l^*(t,z;\phi_0^*,\psi_0^*), \psi_l^*(t,z;\phi_0^*,\psi_0^*)), \quad (t,z) \in [0,\infty) \times [-l,l],$$

la solución del sistema **(3.11)** con valor inicial (ϕ_0^*,ψ_0^*).
Como por Bannach tenemos que $(\phi_l^*(T,z), \psi_l^*(T,z)) = (\phi_0^*(z), \psi_0^*(z))\ \forall z \in [-l,l]$, se puede ver en [11] que:

$$(\phi_l^*(t+T,z), \psi_l^*(t+T,z)) = (\phi_l^*(t,z), \psi_l^*(t,z)) \qquad \forall\, (t,z) \in \mathbb{R} \times [-l,l].$$

Luego, gracias al **Lema 3.12**, $(\phi_l^*(t,z), \psi_l^*(t,z)) \in \Gamma_l$. Así pues, de la ecuación **(3.13)** podemos deducir que (ϕ_l^*, ψ_l^*) satisface:

$$\begin{cases} \phi_l^*(t,z) = T_1(t-s)\left(\phi_l^*(s) - G_1(s)\right)(z) + \displaystyle\int_s^t \left(f_1[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](\theta) + \tilde{G}_1(\theta)\right)(z)\, d\theta + G_1(t,z), \\ \psi_l^*(t,z) = T_2(t-s)\left(\psi_l^*(s) - G_2(s)\right)(z) + \displaystyle\int_s^t \left(f_2[\tilde{\phi},\tilde{\psi}](\theta) + \tilde{G}_2(\theta)\right)(z)\, d\theta + G_2(t,z), \end{cases} \tag{3.14}$$

para todo $(t,z) \in [s,\infty) \times [-l,l]$.

En resumen, hemos llegado a la conclusión de que para cualquier $(\tilde{\phi},\tilde{\psi}) \in \Gamma_l$, existe un único $(\phi_l^*, \psi_l^*) \in \Gamma_l$ para el que se cumple el sistema **(3.14)**. Así pues, tiene sentido definir el operador $\mathcal{F} : \Gamma_l \longrightarrow \Gamma_l$ con $\mathcal{F}(\tilde{\phi},\tilde{\psi}) = (\phi_l^*, \psi_l^*)$.

El siguiente Lema, que viene demostrado en [11], demuestra que el operador $\mathcal{F}$ satisface las hipótesis necesarias para aplicarle el Teorema del punto fijo de Schauder (apéndice B).

Lema 3.13. $\mathcal{F} : \Gamma_l \longrightarrow \Gamma_l$ *es un operador completamente continuo.*

Así pues, podemos aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder (se puede consultar en el apéndice B) y concluir que $\mathcal{F}$ tiene un punto fijo $(\phi_l^*, \psi_l^*) \in \Gamma_l$. Además, $\phi_l^*, \psi_l^* \in C^{\theta/2,2}(\mathbb{R} \times [-l,l])$ para algún $\theta \in (0,1)$ y $(\phi_l^*(t,z), \psi_l^*(t,z))$ es $T-$periódica con respecto a t para $z \in [-l,l]$. De acuerdo con [1, Teoremas 5.1.18 y 5.1.19], (ϕ_l^*, ψ_l^*) satisface:

$$\begin{cases} \partial_t \phi_l^*(t,z) = d_1 \partial_{zz} \phi_l^*(t,z) - c\partial_z \phi_l^*(t,z) - \beta(t)\phi_l^*(t,z)\psi_l^*(t,z), \quad (t,z) \in \mathbb{R} \times [-l,l], \\ \partial_t \psi_l^*(t,z) = d_2 \partial_{zz} \psi_l^*(t,z) - c\partial_z \psi_l^*(t,z) - \gamma(t)\psi_l^*(t,z) + \\ + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y)\beta(t-\tau)\chi_l[\phi_l^*](t-\tau, z-c\tau-y)\chi_l[\psi_l^*](t, z-c\tau-y)\, dy, \\ \phi_l^*(t,\pm l) = \phi^-(t,\pm l), \quad \psi_l^*(t,\pm l) = \psi^-(t,\pm l), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.15}$$

A continuación vamos a enunciar dos resultados (vienen demostrados en [11]) que nos dan estimaciones que son necesarias para demostrar la existencia de la onda viajera:

Lema 3.14. *Sea* $p \geq 2$. *Para cualquier* $Z > 0$, *existe una constante positiva* $C(p,Z)$ *tal que:*

$$\|\phi_l^*\|_{W_p^{1,2}([0,T]\times[-Z,Z])} \leq C(p,Z) \ \ y \ \ \|\psi_l^*\|_{W_p^{1,2}([0,T]\times[-Z,Z])} \leq C(p,Z),$$

siempre que $l > \max\{Z, z^*\}$. *Además, para cualquier* $z_0 \in \mathbb{R}$ *existe una constante positiva* $C'(Z)$ *tal que:*

$$\|\phi_l^*\|_{C^{\frac{1+\theta}{2},1+\theta}([0,T]\times[-Z,Z])} \leq C'(Z) \ \ y \ \ \|\psi_l^*\|_{C^{\frac{1+\theta}{2},1+\theta}([0,T]\times[-Z,Z])} \leq C'(Z),$$

para algún $\theta \in (0,1)$ *y* $l > \max\{Z + |z_0|, z^*\}$.

Lema 3.15. *Sea* (ϕ_l^*, ψ_l^*) *una solución del sistema* ***(3.15)****. Entonces existe una constante positiva* C_0 *tal que*

$$\frac{1}{T}\int_{-l}^{l}\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\chi_l[\phi_l^*](t,z-c\tau-y)\chi_l[\psi_l^*](t,z-c\tau-y)\,dydtdz \le C_0,$$

y

$$\frac{1}{T}\int_{-l}^{l}\int_{0}^{T}\psi_l^*(t,z)\,dtdz \le C_0,$$

para cualquier $l > z^*$.

El siguiente Lema, obtenido de [7], nos va a permitir justificar manipulaciones que se van a hacer en la demostración de la existencia de la onda viajera:

Lema 3.16. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio y* $f \in C^m(\Omega)$ *para algún natural* $m \ge 1$*. Entonces, para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *con* $|\alpha| \le m$ *y cada* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*, se cumple que:*

$$\int_\Omega D^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Así pues, estamos en condiciones de probar la existencia de la onda viajera:

Teorema 3.17. *Si* $R_0 > 1$*, para cualquier* $c > c^*$ *el sistema* ***(3.2)*** *posee una solución de onda viajera* $T-$*periódica* (ϕ^*, ψ^*) *que satisface las condiciones de contorno* ***(3.4)****.*

Demostración: Parte 1: Existencia de la solución de onda viajera T-periódica
Consideramos una sucesión creciente $\{l_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ con $l_m > z^*$ y $l_m \longrightarrow \infty$ cuando $m \longrightarrow \infty$.
Gracias al **Lema 3.14** y a la periodicidad de $(\phi_{l_m}^*(t,\cdot), \psi_{l_m}^*(t,\cdot))$, podemos extraer una subsucesión de $(\phi_{l_m}^*, \psi_{l_m}^*)$, denotada por simplicidad como $(\phi_{l_m}^*, \psi_{l_m}^*)$ que converge débilmente cuando $m \to \infty$:

$$(\phi_{l_m}^*, \psi_{l_m}^*) \longrightarrow (\phi^*, \psi^*) \in C^2(\mathbb{R}) \text{ en } H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2),\ C_{\text{loc}}^{\frac{1+\beta}{2},1+\beta}(\mathbb{R}^2) \text{ y en } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}, H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})) \tag{3.16}$$

donde $\beta \in (0,\theta)$ y $\theta \in (0,1)$. La $T-$periodicidad de las funciones $\phi_l^*(t,\cdot)$, $\psi_l^*(t,\cdot)$ implica que las funciones $\phi^*(t,\cdot)$, $\psi^*(t,\cdot)$ sean $T-$periódicas. Gracias a las estimaciones dadas por el **Lema 3.14**, si $l > 0$ es suficientemente grande, podemos encontrar una constante $C'' > 0$ tal que:

$$\|\phi^*\|_{C^{\frac{1+\beta}{2},1+\beta}_{[0,T]\times[-l,l]}}(\mathbb{R}^2) + \|\psi^*\|_{C^{\frac{1+\beta}{2},1+\beta}_{[0,T]\times[-l,l]}}(\mathbb{R}^2) \le C''. \tag{3.17}$$

Para cualquier $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, existe un $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $supp(u)$, $supp(v) \subset$

$\mathbb{R}\times(-l_m,l_m)$. Entonces, gracias a **(3.15)**, se tiene que $(\phi^*_{l_m},\psi^*_{l_m})$ satisface:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot\partial_t\phi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz = d_1\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot\partial_{zz}\phi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz- \\ \displaystyle -c\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot\partial_z\phi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz-\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot\beta(t)\phi^*_{l_m}(t,z)\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz, \quad (t,z)\in\mathbb{R}\times[-l,l], \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot\partial_t\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz = d_2\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot\partial_{zz}\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz- \\ \displaystyle -c\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot\partial_z\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz-\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot\gamma(t)\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz+ \\ \displaystyle +\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\chi_{l_m}[\phi^*_{l_m}](t-\tau,z-c\tau-y)\chi_{l_m}[\psi^*_{l_m}](t,z-c\tau-y)\,dydtdz. \end{cases}$$

No podemos hacer el paso al límite porque la derivada segunda con respecto a z y la derivada con respecto de t de las funciones $\phi^*_{l_m}$, $\psi^*_{l_m}$ no sabemos siquiera si convergen. Por lo tanto si utilizamos el **Lema 3.16** solucionamos este problema ya que "pasamos" las derivadas a las funciones test. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{cases} \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t u(t,z)\cdot\phi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz = -d_1\int_{\mathbb{R}^2} \partial_z u(t,z)\cdot\partial_z\phi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz- \\ \displaystyle -c\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot\partial_z\phi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz-\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot\beta(t)\phi^*_{l_m}(t,z)\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz, \quad (t,z)\in\mathbb{R}\times[-l,l], \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t v(t,z)\cdot\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz = -d_2\int_{\mathbb{R}^2} \partial_z v(t,z)\cdot\partial_z\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz- \\ \displaystyle -c\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot\partial_z\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz-\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot\gamma(t)\psi^*_{l_m}(t,z)\,dtdz+ \\ \displaystyle +\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\chi_{l_m}[\phi^*_{l_m}](t-\tau,z-c\tau-y)\chi_{l_m}[\psi^*_{l_m}](t,z-c\tau-y)\,dydtdz. \end{cases}$$

Por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\chi_{l_m}[\phi^*_{l_m}](t-\tau,z-c\tau-y)\chi_{l_m}[\psi^*_{l_m}](t,z-c\tau-y)\,dydtdz \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^*(t-\tau,z-c\tau-y)\psi^*(t,z-c\tau-y)\,dydtdz,$$

cuando m tiende a ∞ para cualquier $(t,z)\in\mathbb{R}$. Por **(3.16)**, para cualquier $(u,v)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tenemos que (ϕ^*,ψ^*) satisface:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t u(t,z)\cdot \phi^*(t,z)\,dtdz = d_1\int_{\mathbb{R}^2} \partial_z u(t,z)\cdot \partial_z\phi^*(t,z)\,dtdz+ \\ \displaystyle +c\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot \partial_z\phi^*(t,z)\,dtdz + \int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot \beta(t)\phi^*(t,z)\psi^*(t,z)\,dtdz, \quad (t,z)\in\mathbb{R}\times[-l,l], \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \partial_t v(t,z)\cdot \psi^*(t,z)\,dtdz = d_2\int_{\mathbb{R}^2} \partial_z v(t,z)\cdot \partial_z\psi^*(t,z)\,dtdz+ \\ \displaystyle +c\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot \partial_z\psi^*(t,z)\,dtdz + \int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot \gamma(t)\psi^*(t,z)\,dtdz- \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^*(t-\tau,z-c\tau-y)\psi^*(t,z-c\tau-y)\,dydtdz. \end{cases}$$

Pasando las derivadas otra vez a las funciones ϕ^*,ψ^* tenemos que:

$$\begin{cases} \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot \partial_t\phi^*(t,z)\,dtdz = -d_1\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot \partial_{zz}\phi^*(t,z)\,dtdz+ \\ \displaystyle +c\int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot \partial_z\phi^*(t,z)\,dtdz + \int_{\mathbb{R}^2} u(t,z)\cdot \beta(t)\phi^*(t,z)\psi^*(t,z)\,dtdz, \quad (t,z)\in\mathbb{R}\times[-l,l], \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot \partial_t\psi^*(t,z)\,dtdz = -d_2\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot \partial_{zz}\psi^*(t,z)\,dtdz+ \\ \displaystyle +c\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot \partial_z\psi^*(t,z)\,dtdz + \int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\cdot \gamma(t)\psi^*(t,z)\,dtdz- \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^2} v(t,z)\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^*(t-\tau,z-c\tau-y)\psi^*(t,z-c\tau-y)\,dydtdz. \end{cases}$$

Por lo tanto, (ϕ^*,ψ^*) satisface:

$$\begin{cases} \partial_t\phi^*(t,z) = d_1\partial_{zz}\phi^*(t,z) - c\,\partial_z\phi^*(t,z) - \beta(t)\phi^*(t,z)\psi^*(t,z), \\ \partial_t\psi^*(t,z) = d_2\partial_{zz}\psi^*(t,z) - c\,\partial_z\psi^*(t,z) - \gamma(t)\psi^*(t,z)+ \\ \displaystyle +\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^*(t-\tau,z-c\tau-y)\psi^*(t-\tau,z-c\tau-y)\,dy, \end{cases} \tag{3.18}$$

para casi todo $(t,z)\in\mathbb{R}^2$. Si consideramos el sistema parabólico con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \partial_t\nu_1(t,z) = d_1\partial_{zz}\nu_1(t,z) - c\,\partial_z\nu_1(t,z) - \beta(t)\nu_1(t,z)\nu_2(t,z), \\ \partial_t\nu_2(t,z) = d_2\partial_{zz}\nu_2(t,z) - c\,\partial_z\nu_2(t,z) - \gamma(t)\nu_2(t,z)+ \\ \displaystyle +\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\nu_1(t-\tau,z-c\tau-y)\nu_2(t-\tau,z-c\tau-y)\,dy,\ t>0,\ z\in\mathbb{R}, \\ \nu_1(0,z)=\phi^*(0,z),\ \nu_2(0,z)=\psi^*(0,z),\ \ z\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

sabemos por [1, Teoremas 5.1.3 y 5.1.4] que (ϕ^*,ψ^*) es la única solución fuerte del sistema. Así pues, ϕ^*,ψ^* satisfacen **(3.2)** para todo $(t,z)\in\mathbb{R}^2$ y $\phi^*,\psi^*\in C^{\frac{1+\theta}{2},1+\theta}(\mathbb{R})$ para algún $\theta\in(0,1)$.

Por la **Proposición 3.15**, existe una constante $C_0 > 0$ tal que:

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^*(t,z-c\tau-y)\psi^*(t,z,c\tau-y)\,dydtdz \leq C_0, \tag{3.19}$$

y

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T \psi^*(t,z)\,dtdz \leq C_0. \tag{3.20}$$

En lo que sigue vamos a demostrar que $\phi^*(t,z), \psi^*(t,z)$ satisface las condiciones de contorno **(3.4)**.

Parte 2: Comportamiento de $\phi^*(\cdot,\mathbf{z}), \psi^*(\cdot,\mathbf{z})$ cuando $\mathbf{z} \to -\infty$:

Por la construcción de (ϕ^*, ψ^*) se tiene que:

$$\max\{0, S_0(1 - M_1 e^{\epsilon_1 z})\} = \phi^-(t,z) \leq \phi^*(t,z) \leq \phi^+(t,z) = S_0,$$

y

$$\max\{0,\ e^{\mu_1 z}K_{\mu_1}(t) - M_2 e^{\mu_{\epsilon_2} z}K_{\mu_{\epsilon_2}}(t)\} = \psi^-(t,z) \leq \psi^*(t,z) \leq \psi^+(t,z) = e^{\mu_1 z}K_{\mu_1}(t).$$

Luego $\phi^*(\cdot,z) \longrightarrow S_0$ y $\psi^*(\cdot,z) \longrightarrow 0$ cuando $z \longrightarrow -\infty$.

Parte 3: Comportamiento de $\psi^*(\cdot,\mathbf{z})$ cuando $\mathbf{z} \to \infty$:

Definimos la función $\Psi(z) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \psi^*(t,z)\,dt$. Tomando $\check{\gamma} = \min\limits_{t\in[0,T]}\gamma(t)$, gracias a la segunda ecuación de **(3.18)** y a la $T-$periodicidad de ψ^*, sabemos que Ψ satisface:

$$\begin{aligned}
&-d_2\Psi_z z(t,z) + c\,\Psi_z(t,z) + \check{\gamma}\Psi(t,z) = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^*(t,z-c\tau-y)\psi^*(t,z-c\tau-y)\,dydt- \\
&-\frac{1}{T}\int_0^T(\gamma(t)-\check{\gamma})\psi^*(t,z)\,dt.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

La ecuación característica $-d_2\lambda^2 + c\lambda + \check{\gamma} = 0$ tiene dos raíces $\check{\lambda}^{\pm} = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2+4d_2\check{\gamma}}}{2d_2}$. Claramente $\check{\lambda}^- < 0 < \check{\lambda}^+$. Tomando $\check{\rho} := d_2\left(\check{\lambda}^+ - \check{\lambda}^-\right) = \sqrt{c^2+4d_2\check{\gamma}}$, la solución de la ecuación **(3.21)** es:

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= \frac{1}{\check{\rho}T}\int_{-\infty}^{z} e^{\check{\lambda}^-(z-\eta)}\Bigg[-\int_0^T(\gamma(t)-\check{\gamma})\psi^*(t,\eta)\,dt+ \\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^*(t,\eta-c\tau-y)\psi^*(t,\eta-c\tau-y)\,dydt\Bigg]d\eta+ \\
&+\frac{1}{\check{\rho}T}\int_z^{\infty} e^{\check{\lambda}^+(z-\eta)}\Bigg[-\int_0^T(\gamma(t)-\check{\gamma})\psi^*(t,\eta)\,dt+ \\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,t-\tau;y)\beta(t-\tau)\phi^*(t,\eta-c\tau-y)\psi^*(t,\eta-c\tau-y)\,dydt\Bigg]d\eta.
\end{aligned}$$

Derivando la función con respecto de z tenemos que:

$$\partial_z \Psi(z) = \frac{\check{\lambda}^-}{\check{\rho}T} \int_{-\infty}^{z} e^{\check{\lambda}^-(z-\eta)} \left[- \int_0^T (\gamma(t) - \check{\gamma}) \psi^*(t,\eta)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^*(t, \eta - c\tau - y) \psi^*(t, \eta - c\tau - y)\, dydt \right] d\eta +$$

$$+ \frac{\check{\lambda}^+}{\check{\rho}T} \int_{z}^{\infty} e^{\check{\lambda}^+(z-\eta)} \left[- \int_0^T (\gamma(t) - \check{\gamma}) \psi^*(t,\eta)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^*(t, \eta - c\tau - y) \psi^*(t, \eta - c\tau - y)\, dydt \right] d\eta.$$

Puesto que $\check{\gamma} = \min_{t \in [0,T]} \implies \gamma(t) - \check{\gamma} \geq 0 \;\; \forall\, t \in [0,T]$. Luego:

$$\partial_z \Psi(z) \leq \frac{\check{\lambda}^-}{\check{\rho}T} \int_{-\infty}^{z} e^{\check{\lambda}^-(z-\eta)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^*(t, \eta - c\tau - y) \psi^*(t, \eta - c\tau - y)\, dydtd\eta +$$

$$+ \frac{\check{\lambda}^+}{\check{\rho}T} \int_{z}^{\infty} e^{\check{\lambda}^+(z-\eta)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^*(t, \eta - c\tau - y) \psi^*(t, \eta - c\tau - y)\, dydtd\eta.$$

Haciendo el cambio de variable $\delta = z - \eta$ tenemos que:

$$\partial_z \Psi(z) \leq \frac{\check{\lambda}^-}{\check{\rho}T} \int_{0}^{\infty} e^{\check{\lambda}^-\delta} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^*(t, z - \delta - c\tau - y) \psi^*(t, z - \delta - c\tau - y)\, dydtd\delta +$$

$$+ \frac{\check{\lambda}^+}{\check{\rho}T} \int_{-\infty}^{0} e^{\check{\lambda}^+\delta} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^*(t, z - \delta - c\tau - y) \psi^*(t, z - \delta - c\tau - y)\, dydtd\delta.$$

Debido a que $\check{\lambda}^- < 0 < \check{\lambda}^+$, se tiene que:

$$\left| \frac{\check{\lambda}^+}{\check{\rho}T} \right| = \left| \frac{\check{\lambda}^+}{d_2(\check{\lambda}^+ - \check{\lambda}^-)T} \right| = \frac{\check{\lambda}^+}{\check{\lambda}^+ - \check{\lambda}^-} \cdot \frac{1}{d_2 T} \leq \frac{1}{d_2 T},$$

y

$$\left| \frac{\check{\lambda}^-}{\check{\rho}T} \right| = \left| \frac{\check{\lambda}^-}{d_2(\check{\lambda}^+ - \check{\lambda}^-)T} \right| = \frac{|\check{\lambda}^-|}{\check{\lambda}^+ - \check{\lambda}^-} \cdot \frac{1}{d_2 T} = \frac{-\check{\lambda}^-}{-\check{\lambda}^- + \check{\lambda}^+} \cdot \frac{1}{d_2 T} \leq \frac{1}{d_2 T}.$$

En consecuencia, tenemos que:

$$|\partial_z \Psi(z)| \leq \frac{1}{d_2 T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^*(t, z - \delta - c\tau - y) \psi^*(t, z - \delta - c\tau - y)\, dydtd\delta.$$

Deshaciendo el cambio de variable que hemos hecho antes tenemos que:

$$|\partial_z \Psi(z)| \leq \frac{1}{d_2 T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y) \beta(t-\tau) \phi^*(t, \eta - c\tau - y) \psi^*(t, \eta - c\tau - y)\, dydtd\eta.$$

La desigualdad **(3.19)** implica que $|\partial_z \Psi(z)| \leq \dfrac{C_0}{d_2}$, es decir, $\partial_z \Psi$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$. Así pues, gracias a la desigualdad **(3.20)** y al Lema de Barbălat [2], se tiene que $\Psi(z) \to 0$

cuando $z \to \infty$. Por otra parte, gracias a la desigualdad de Harnack [15, Lema 2.9], obtenemos que $\psi^*(t,z) \to 0$ cuando $z \to \infty$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

Parte 4: Comportamiento de $\phi^*(\cdot, \mathbf{z})$ cuando $\mathbf{z} \longrightarrow \infty$.

Gracias a las desigualdad **(3.17)** y a las desigualdades del tipo Landau [9] (consultar apéndice C), tenemos que:

$$|\phi_z^*|_{L^\infty([0,T]\times(-\infty,M])} \leq 2\,|\phi^* - S_0|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty([0,T]\times(-\infty,M])}\,|\phi_{zz}^*|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty([0,T]\times(-\infty,M])}.$$

Como $\lim\limits_{z\to-\infty} \phi^*(t,z) = S_0$, se tiene que:

$$\lim_{z\to-\infty} \phi_z^*(t,z) = 0 \ \text{ uniformemente en } t \in \mathbb{R}.$$

Definimos $\Phi(z) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \phi^*(t,z)dt$. Claramente $\Phi_z(z) \longrightarrow 0$ cuando $z \longrightarrow -\infty$. Veamos que $\Phi_z(z) \longrightarrow 0$ cuando $z \longrightarrow \infty$. Integrando desde 0 a T con respecto al tiempo la primera ecuación del sistema **(3.18)** y utilizando que $\phi^*(t,z)$ es $T-$periódica, tenemos que:

$$c\,\Phi_z(t,z) = d_1\Phi_{zz}(t,z) - \frac{1}{T}\int_0^T \beta(t)\phi^*(t,z)\psi^*(t,z)\,dt. \tag{3.22}$$

Es fácil ver gracias a esta última ecuación que:

$$\Big(e^{-cz/d_1}\Phi_z\Big)_z = e^{-cz/d_1}(\Phi_{zz} - c\,\Phi_z/d_1) = \frac{e^{-cz/d_1}}{d_1T}\int_0^T \beta(t)\phi^*(t,z)\psi^*(t,z)\,dt.$$

Como $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \beta(t)\phi^*(t,z)\psi^*(t,z)\,dt$ es integrable en $\mathbb{R}$ con respecto a z, integrando desde z hasta ∞ la ecuación anterior se tiene que

$$e^{-cz/d_1}\Phi_z(z) = -\frac{1}{d_1T}\int_z^\infty e^{-cy/d_1}\int_0^T \beta(t)\phi^*(t,z)\psi^*(t,z)\,dtdy,$$

que implica que $\Phi_z(z) < 0\ \forall\, z \in \mathbb{R}$. Así pues, $\Phi(\infty)$ existe y $\Phi(\infty) < \Phi(-\infty) = S_0$. Gracias al Lema de Barbălat [3,12] se tiene que $\Phi_z(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$. Integrando con respecto a z ambos lados de la ecuación **(3.22)** desde $-\infty$ a ∞ tenemos que:

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^\infty\int_0^T \beta(t)\phi^*(t,z)\psi^*(t,z)\,dtdz = c[\Phi(-\infty) - \Phi(\infty)] = c[S_0 - S^\infty],$$

siendo $S^\infty := \Phi(\infty) < S_0$.

Utilizando los argumentos de [4, Theorem 2.10], se puede probar que $\phi^*(t,z) \to S^\infty$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$ cuando $z \to \infty$.

3.3 Inexistencia de la onda viajera periódica

En esta sección vamos a demostrar que no existe ninguna onda viajera periódica cuando $R_0 < 1$.

Teorema 3.18. *Sea $R_0 < 1$. Entonces, para cualquier $c > 0$, el sistema* ***(3.1)*** *no admite ninguna solución de onda viajera no negativa, no trivial y periódica que satisfaga la condición de contorno asintótica* ***(3.4)*** *uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que existe una onda viajera periódica, no negativa y no trivial $(\phi(t,z), \psi(t,z))$ del sistema **(3.2)** con condición de contorno **(3.4)** uniformemente en $t \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que $\phi(t,z) \leq S_0 \;\; \forall z \in \mathbb{R},\, t > 0$. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existen $t_0 > 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$ tales que $\phi(t_0, z_0) > S_0$. Entonces:

$$0 = \frac{\partial \phi_t(t,z)}{\partial t}|_{(t_0,z_0)} = d_1 \phi_{zz}(t_0,z_0) - c\phi_z(t_0,z_0) - \beta(t_0)\phi(t_0,z_0)\psi(t_0,z_0) < 0,$$

que es una contradicción. Por tanto tenemos que $\phi(t,z) \leq S_0 \;\; \forall t > 0,\, z \in \mathbb{R}$.
En consecuencia tenemos que:

$$\begin{gathered} \psi_t(t,z) = d_2 \psi_{zz}(t,z) - \gamma(t)\psi(t,z) + \\ + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y)\beta(t-\tau)\phi(t-\tau, z - c\tau - y)\psi(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy \leq \\ \leq d_2\psi_{zz}(t,z) - c\psi_z(t,z) - \gamma(t)\psi(t,z) + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, t-\tau; y)\beta(t-\tau) S_0 \psi(t-\tau, z - c\tau - y)\, dy, \end{gathered}$$

para todo $t > 0$ y $z \in \mathbb{R}$. Sea $\xi = \sup_{z\in\mathbb{R}} \psi(0,z) < \infty$. Entonces $\psi(0,z) \leq \xi \;\; \forall\, z \in \mathbb{R}$. Por el principio de comparación tenemos que:

$$\psi(t,z) \leq w(t;\xi), \quad t > 0,\, z \in \mathbb{R},$$

siendo $w(t;\eta)$ una solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \dfrac{d\, w(t)}{dt} = -\gamma(t)w(t) + e^{-\int_{t-\tau}^{t} \gamma_L(s)\, ds} \beta(t-\tau) S_0 w(t-\tau), \;\; t > 0, \\ w(t) = \xi, \;\; t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{3.23}$$

Gracias a [13, Theorem 2.1], sabemos que el radio ρ_0 de la función de Poincaré de la ecuación **(3.23)** es menor que 1, lo que implica que $w(t,\xi) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Como consecuencia, tenemos que $\lim_{t\to\infty} \psi(t,z) = 0 \;\; \forall\, z \in \mathbb{R}$, que contradice la periodicidad de $\psi(t,\cdot)$. □

4 Conclusiones

En este trabajo hemos analizado una generalización del modelo clásico de Kermack-McKendrick con retransmisión retardada producida por la movilidad de los individuos durante el período latente de la enfermedad. En concreto, hemos investigado bajo que condiciones se da la existencia de ondas viajeras periódicas del modelo **(3.1)**.

Para ello hemos empezado construyendo sub- y super- soluciones del sistema **(3.2)**. En esta construcción hemos obtenido una velocidad de onda crítica $c^* > 0$ cuyo valor no se ha obtenido explícitamente, sino como un límite inferior de la velocidad de las ondas viajeras periódicas. Después, hemos establecido la existencia de una solución de onda viajera periódica, que conecta dos estados estacionarios libres de la enfermedad (anterior y posterior a la epidemia) para el sistema **(3.1)**, en el caso de que $c > c^*$ y $R_0 > 1$ donde R_0 es el número de reproducción básico del sistema cinético **(3.3)**. Esta demostración se ha basado en encontrar una solución de un problema cuyo dominio es acotado. Después, con la ayuda de las funciones test, se ha demostrado que el límite de esa solución satisface **(3.2)** y, en consecuencia, es una solución de onda viajera periódica.

Finalmente, hemos demostrado por reducción al absurdo la inexistencia de ondas viajeras periódicas del modelo **(3.1)** cuando $R_0 < 1$. Para llegar a la contradicción ha sido fundamental utilizar el principio del máximo.

Como conclusión final, podemos afirmar con este trabajo que existen ondas viajeras periódicas del modelo **(3.1)** cuando la retransmisión es suficientemente alta. Sin embargo, cuando la retransmisión no es lo suficientemente alta, no existen ondas viajeras periódicas del modelo **(3.1)**.

A Semigrupos. Solución suave.

Siguiendo [6], consideramos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t, u(t)), \ \ \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

siendo A un operador lineal cerrado en el espacio de Bannach $C([-l,l])$ y $f : \mathbb{R} \times C([-l,l]) \longrightarrow C([-l,l])$ una función.

La idea de semigrupo surge de forma natural si queremos estudiar bajo qué condiciones sobre el operador lineal $A : D(A) \longrightarrow C([-l,l])$ el anterior problema tiene solución única. Para ello suponemos que

$$u : [0, \infty) \longrightarrow C([-l,l]),$$

es la solución única del problema. Es lógico pensar que u tiene una dependencia lineal explícita del dato inicial u_0. Por ello notaremos:

$$u(t) = T(t)u_0 \quad \forall\, t \geq 0. \tag{A.1}$$

Luego, para cada tiempo $t \geq 0$, $T(t) : C([-l,l]) \longrightarrow C([-l,l])$ representa un operador lineal.

Veamos qué propiedades debería satisfacer la familia de operadores $(T(t))_{t\geq 0}$.

Obviamente, para que la ecuación **(A.1)** tenga sentido se tiene que cumplir:

$$T(0)v = v \ \ \forall v \in C([-l,l]) \Longleftrightarrow T(0) = Id. \tag{A.2}$$

Por otra parte, asumir la unicidad de la solución conlleva a asumir que:

$$T(t+s)v = T(t)T(s)v = T(s)T(t)v \quad \forall\, t, s \geq 0, \forall\, v \in C([-l,l]). \tag{A.3}$$

Además, parece razonable pedir que:

$$t \longmapsto T(t)v \text{ sea continua de } [0, \infty) \text{ en } C([-l,l]). \tag{A.4}$$

En base a este argumento, tiene sentido la siguiente definición.

Definición A.1. Una familia $\{(T(t))_{t\geq 0}\}$ de operadores acotados de $C([-l,l])$ sobre $C([-l,l])$ constituyen un semigrupo si se cumplen las relaciones **(A.2), (A.3) y (A.4)**.

Una vez que sabemos la definición de semigrupo, si llamamos $BC(\mathbb{R}, C([-l, l]))$ al espacio de Bannach de todas las funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ en $C([-l, l])$ con la norma uniforme

$$\|u\|_\infty = \sup\{\|u(t)\| : t \in \mathbb{R}\},$$

gracias a [10, Definition 2.1], la definición de solución suave del problema **(A)** es:

Definición A.2. Decimos que $u \in BC(\mathbb{R}, C([-l, l]))$ es una solución suave del problema **(A)** si satisface:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))\, ds, \quad \forall\, t > 0.$$

B Teoremas del punto fijo.

Cuando hablamos del Teorema del punto fijo no nos referimos a un teorema en concreto, sino a toda una teoría conocida como la Teoría del punto fijo. Esta teoría se centra en especificar las condiciones bajo las cuales se puede afirmar que una función f sobre un dominio dado tiene un punto fijo. En este trabajo hemos utilizado dos Teoremas del punto fijo.
En primer lugar vamos a ver el Teorema del punto fijo de Banach, que es un resultado relativo a la existencia de puntos fijos para aplicaciones contractivas que vamos a definir ahora:

Definición B.1. Se dice que una aplicación $f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es contractiva si existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que $d\,(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \ \ \forall\, x, y \in S$.

Así pues, el Teorema del punto fijo de Banach, obtenido de [5], afirma lo siguiente:

Teorema B.2. *Sea S un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : S \longrightarrow S$ una aplicación contractiva. Entonces existe un único punto $x^* \in S$ tal que $f(x^*) = x^*$.*

En segundo lugar vamos a ver el Teorema del punto fijo de Schauder, obtenido de [8], que es un teorema que explica las condiciones necesarias para que una función definida en ciertos subconjuntos de un espacio normado tenga puntos fijos. Veamos primero la siguiente definición:

Definición B.3. Sea X un espacio normado y sea A un subconjunto de X. Se dice que la función $f : A \longrightarrow X$ es compacta si f es continua y cumple que $\overline{f(B)}$ es compacta, siendo B un subconjunto acotado de A. cualquiera.

Ahora sí, el Teorema del punto fijo de Schauder afirma:

Teorema B.4. *Sea E un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio X. Si $f : E \longrightarrow X$ es una aplicación compacta tal que $f(E) \subseteq E$, entonces existe un $x \in E$ tal que $f(x) = x$.*

C Desigualdades.

La desigualdad de tipo Landau se ha obtenido de [9]. Se puede resumir en el siguiente Lema.

Lema C.1. *Si* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función dos veces diferenciable y* $f, f'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, *entonces* $f' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. *Además, se tiene que:*

$$\|f'\|_{\mathbb{R}^+,\infty} \leq 2\, \|f\|_{\mathbb{R}^+,\infty}^{1/2}\, \|f''\|_{\mathbb{R}^+,\infty}^{1/2}\,,$$

siendo

$$\|h\|_{\mathbb{R}^+,\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |h(t)|.$$

Bibliografía

[1] A.Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Springer, Berlin, 2012.

[2] B. Farkas, S.A. Wegner, Variations on Barbalat's lemma, Amer. Math. Monthly 123 (2016) 825-830.

[3] D.G. Kendall, Discussion of 'Measles periodicity and community size' by MS bartlett, J. Roy. Stat. Soc. A 120 (1957) 64-76.

[4] D.-S. Xu, X.-Q. Zhao, Dynamics in a periodic competitive model with stage structure, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005) 417-438.

[5] Fernando Cobos Díaz, Apuntes de Cálculo diferencial (2018), Universidad Complutense de Madrid.

[6] José Carrillo Menéndez, Apuntes de Ampliación de ecuaciones en derivadas parciales (2021), Universidad Complutense de Madrid.

[7] Julián López-Gómez, Apuntes de Teoría clásica de ecuaciones en derivadas parciales (2020), Universidad Complutense de Madrid.

[8] María Guadalupe García, Teoremas del punto fijo (2013). Disponible en: https://n9.cl/r5zz.

[9] N.S. Barnett, S.S. Dragomir, Some Landau type inequalities for functions whose derivatives are of locally bounded variation, Tamkang J. Math., 37(2006) 301-308.

[10] Qing Liu, Existence of anti-periodic mild solutions for semilinear evolution equations, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011) 110-120.

[11] S.-M. Wang, Z. Feng, Z.-C. Wang, L. Zhang, Periodic traveling wave of a time periodic and diffusive epidemic model with nonlocal delayed transmission, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 55 (2020) 1-27.

[12] X. Liang, X.-Q. Zhao, Asymptotic speeds of spread and traveling waves for monotone semiflows with applications, Comm. Pure Appl. Math. 60 (2007) 1-40.

[13] X.-Q. Zhao, Basic reproduction ratios for periodic compartmental models with time delay, J.Dynam. Differential Equations 29 (2017) 67-82.

[14] W.O. Kermack, A.G. McKendrik, A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 115 (1927) 700-721.

[15] Z.-C. Wang, L. Zhang, X.-Q. Zhao, Time periodic traveling waves for a periodic and diffusive SIR epidemic model, J. Dynam. Differential Equations 30 (2018) 379-403.