

T2000

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Sección Departamental de Astronomía y Geodesia



* 5 3 0 9 8 7 4 0 3 5 *

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

X 53-393725-5

ESTUDIOS SOBRE GEOIDES TERRESTRES Y MARINOS

Memoria para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas de

Gema Rodríguez Velasco

DIRECTOR: Miguel J. Sevilla de Lerma

Madrid, 1999

23666



Agradecimientos

Deseo expresar mi sincera gratitud al catedrático de Astronomía y Geodesia Dr. Miguel J. Sevilla de Lerma por su ayuda y valiosos consejos a lo largo del desarrollo de este trabajo, así como por haber asumido la responsabilidad de la dirección del mismo. Sus orientaciones han sido imprescindibles para la finalización de esta memoria.

Quiero dar las gracias al Prof. Dr. Ilias N.Tziavos de la Universidad de Salónica, por su apoyo e interés, tan importantes para mí especialmente en los trabajos relacionados con la última parte de esta memoria. Mi más profundo agradecimiento por su siempre pronta disponibilidad.

Agradezco a los organismos que han facilitado datos y paquetes de software imprescindibles para la ejecución de este trabajo. En especial, quisiera dar las gracias al CLS *Space Oceanography Division* de Toulouse (Francia) por facilitar la disponibilidad de los productos altimétricos del satélite ERS, generados como parte del proyecto "*Joint analysis of ERS-1, ERS-2 and TOPEX/Poseidon data for oceanic circulation studies*", al Instituto Geográfico Nacional (IGN), por permitirme el uso y análisis de su modelo digital de terreno MDT200, y a los Doctores Christian C. Tscherning, René Fosberg y Per Knudsen, ya que el *software* por ellos desarrollado para tratamiento de datos gravimétricos dentro del paquete GRAVSOFTE, ha sido de insustituible utilidad para el desarrollo de los estudios presentados.

Asimismo, quiero manifestar mi gratitud a la Dra. Carmen de Toro por la colaboración y valiosos consejos que siempre ha estado dispuesta a ofrecerme. Su apoyo y estímulo han supuesto una ayuda inestimable para esta investigación.

Quisiera también agradecer a mis compañeros de la Sección Departamental de Astronomía y Geodesia y del Instituto de Astronomía y Geodesia por sus continuas muestras de interés en el desarrollo de esta memoria, y lo que han significado como aliento para mí.

Por último, pero no menos importante, deseo dar las gracias a todas aquellas personas, en especial al Dr. Javier Caballero y a mis padres, que con su apoyo continuado e incondicional me han animado en la elaboración de este trabajo.

A mis padres

ÍNDICE

	<u>Pag.</u>
INTRODUCCIÓN 1
CAPÍTULO 1	
<u>MODELO DIGITAL DE TERRENO DE ESPAÑA</u>	
1.1. OBTENCIÓN DE UN MODELO DIGITAL DE ESPAÑA 9
1.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO MDT200 ORIGINAL 11
1.3. PRECISIÓN DEL MODELO TOPOGRÁFICO 12
1.4. COMPARACIÓN LOCAL CON EL ETOPO5U 12
1.5. CONCLUSIONES 19
CAPÍTULO 2	
<u>TRATAMIENTO INICIAL DE DATOS GRAVIMÉTRICOS</u>	
2.1. CONSIDERACIONES GENERALES. MÉTODO DE COLOCACIÓN 21
2.2. DATOS GRAVIMÉTRICOS 25
2.3. MODELO DE GEOPOTENCIAL 26
2.3.1. Combinación de datos de distinta naturaleza.	
Efectos del grado del modelo de geopotencial. 27
2.4. REDUCCIÓN DE LOS EFECTOS TOPOGRÁFICOS 31
2.5. FUNCIÓN COVARIANZA 35
2.5.1. Función covarianza empírica 36
2.5.2. Ajuste de la función covarianza 37
2.5.3. Estudio comparativo entre funciones covarianza de datos terrestres y marinos 40
2.6. MÉTODO DE VALIDACIÓN. PREDICCIÓN DE Δg 43
2.6.1. Aplicación de la colocación mínimo cuadrática 43
2.6.2. Experiencias previas del método 44
2.6.3. Validación 45
Validación de datos marinos por separado 46
Validación de datos terrestres por separado 48
Validación de datos de los dos tipos a la vez 50
2.6.4. Comportamiento de la predicción por colocación de Δg 52
Datos marinos 52
Datos terrestres 53
Datos mezclados 53
2.7. CONCLUSIONES Y RESULTADOS 58

CAPÍTULO 3**PREDICCIÓN DE UN GEOIDE GRAVIMÉTRICO POR COLOCACIÓN**

3.1.	MÉTODO DE COLOCACIÓN APLICADO A LA DETERMINACIÓN DE UN GEOIDE GRAVIMÉTRICO	59
3.2.	PREDICCIÓN DE ONDULACIONES DEL GEOIDE SOBRE LA ZONA DE PRUEBA	60
3.3.	SENSIBILIDAD DE UN GEOIDE GRAVIMÉTRICO POR COLOCACIÓN A LA MUESTRA EXTRAÍDA Y A LA FUNCIÓN COVARIANZA	63
3.4.	SENSIBILIDAD DE UN GEOIDE GRAVIMÉTRICO POR COLOCACIÓN AL ESPACIAMIENTO DE LA MUESTRA	65
3.5.	SENSIBILIDAD DE UN GEOIDE GRAVIMÉTRICO POR COLOCACIÓN A LA NATURALEZA DE LOS DATOS	66
	3.5.1. Comparación entre geoides calculados con datos mezclados y sin mezclar	67
	3.5.2. Comparación entre geoides calculados con datos de tierra y de mar	70
3.6.	CONTRIBUCIÓN DE LAS MASAS TOPOGRÁFICAS A LAS ONDULACIONES DEL GEOIDE	75
3.7.	TRANSFORMACIÓN DE GEOIDES ELABORADOS CON DATOS DE DISTINTA NATURALEZA	78
	3.7.1. Caso terrestre	78
	3.7.2. Caso marino	81
3.8.	CONCLUSIONES	85

CAPÍTULO 4**DETERMINACIÓN DEL GEOIDE POR TÉCNICAS ESPECTRALES**

4.1.	TRANSFORMADAS DE FOURIER. CONVOLUCIÓN INTEGRAL	87
	4.1.1. Transformadas par e impar	88
	4.1.2. Potencia del espectro	89
	4.1.3. Convolución	90
4.2.	USO DE TÉCNICAS ESPECTRALES PARA LA DETERMINACIÓN DE GEOIDES GRAVIMÉTRICOS	90
4.3.	EVALUACIÓN PRÁCTICA DE TRANSFORMADAS	92
4.4.	APLICACIÓN DE MÉTODOS ESPECTRALES AL CASO DE LA FÓRMULA DE STOKES. APROXIMACIÓN PLANA	100
4.5.	APROXIMACIÓN ESFÉRICA DE LA FÓRMULA DE STOKES	104
4.6.	IMPLEMENTACIÓN PRÁCTICA DE MÉTODOS ESPECTRALES EN ORDENADORES	105
4.7.	TRANSFORMADA DE HARTLEY	107
4.8.	GEOIDE EN LA PENÍNSULA IBÉRICA	108
4.9.	COMPARACIÓN ENTRE GEOIDE LOCAL POR COLOCACIÓN Y GEOIDE REGIONAL POR MÉTODOS ESPECTRALES	108

	<u>Pag.</u>	
4.10	CONCLUSIONES Y RESULTADOS 112
CAPÍTULO 5		
<u>ALTIMETRÍA POR SATÉLITES</u>		
5.1.	PRINCIPIOS DE ALTIMETRÍA 113
5.2.	ERROR ORBITAL 118
5.3.	AJUSTE COLINEAL DE DATOS ALTIMÉTRICOS 119
5.4.	AJUSTE <i>CROSSOVER</i> DE DATOS DE ALTIMETRÍA 121
5.4.1.	Ajuste local 121
5.4.1.1.	Deficiencia de rango 127
5.4.1.1.1.	Modelo de un solo parámetro ($p=1$) 127
5.4.1.1.2.	Modelo de dos parámetros ($p=2$) 131
5.4.2.	Ajuste global de arcos independientes 138
5.4.3.	Ajuste global continuo 139
5.5.	CARACTERÍSTICAS DE SATÉLITES ALTIMÉTRICOS 144
5.5.1.	Satélite altimétrico ERS-1 144
5.5.2.	Satélite altimétrico TOPEX/Poseidon 151
5.6.	COLOCACIÓN MÍNIMOS CUADRADOS APLICADA A LOS DATOS DE ALTIMETRÍA POR SATÉLITES 152
5.7.	OTROS USOS DE ALTIMETRÍA EN GEODESIA	
5.7.1.	Uso de la altimetría por satélites para la mejora de geoides determinados por otras técnicas 154
5.7.2.	Determinación de anomalías de gravedad 155
5.7.3.	Determinación de batimetría utilizando datos de altimetría 155
5.8.	CONCLUSIONES Y RESULTADOS 157
CAPÍTULO 6		
<u>DETERMINACIÓN DE LA SUPERFICIE MEDIA DEL MAR</u>		
6.1.	DATOS A NO UTILIZAR EN ALTIMETRÍA 159
6.2.	GEOIDE ALTIMÉTRICO 160
6.3.	RESULTADO CON DATOS ERS-1 DE FASE MULTIDISCIPLINAR 161
6.3.1.	Datos empleados y validación 161
6.3.2.	Ajuste <i>crossover</i> 163
6.3.3.	Superficie media del mar 165
6.3.4.	Superficie media obtenida por ajuste colineal 165
6.4.	RESULTADO CON DATOS ERS-1 DE FASE GEODÉSICA 166
6.4.1.	Datos empleados 166
6.4.2.	Validación 168
6.4.3.	Ajuste <i>crossover</i> 169
6.4.4.	Superficie media del mar 170
6.5.	RESULTADO CON DATOS ERS-1 DE FASE MULTIDISCIPLINAR REFERIDOS A TOPEX 171
6.5.1.	Datos empleados 171
6.5.2.	Validación de los datos 173

	<u>Pag.</u>
6.5.3. Variaciones estacionales de la topografía dinámica del mar	176
6.5.4. Ajuste colineal	180
6.5.5. Ajuste <i>crossover</i>	182
6.5.6. Superficie media del mar	183
6.6. COMPARACIÓN ENTRE RESULTADOS DE FASE C Y GEODÉSICA	186
6.7. COMPARACIÓN ENTRE RESULTADOS DE FASE G Y E	187
6.7.1 Superficie obtenida por ajuste colineal	187
6.7.2. Superficie obtenida por ajuste <i>crossover</i>	190
6.8. APÉNDICE I: ARCOS DE LA FASE MULTIDISCIPLINAR C	193
6.9. APÉNDICE II: ARCOS DE LA FASE G	202
6.10. APÉNDICE III: VALIDACIÓN GRÁFICA DE LOS TRAZOS DE LA FASE G RESPECTO DE GEOIDE GRAVIMÉTRICO Y MODELO	218
6.11. CONCLUSIONES	224

CAPÍTULO 7

SUPERFICIE MEDIA DEL OCEANO EN ZONAS MÁS EXTENSAS

7.1. NUEVA ZONA DE ESTUDIO. DATOS EMPLEADOS	225
7.2. VARIACIONES ESTACIONALES	227
7.3. VALIDACIÓN DE LOS DATOS	228
7.3.1. Rugosidad de la superficie del mar	229
7.3.2. Criterio alternativo	230
7.3.3. Adaptabilidad a la superficie media modelo	232
7.3.3.1. Modelos de marea	234
7.3.4. Estudio de los trazos que atraviesan las islas	237
7.3.5. Resultados de la validación	237
7.4. AJUSTE COLINEAL	237
7.5. AJUSTE <i>CROSSOVER</i>	238
7.6. SUPERFICIE MEDIA LIBRE DE ERRORES	240
7.7. APÉNDICE I: REPETITIVIDAD DE TRAZOS SUBSATÉLITE QUE ATRAVIESEN CANARIAS	242
7.8. APÉNDICE II: CONTRASTACIÓN CON GEOIDE GRAVIMÉTRICO Y MODELO EGM96	246
7.9. CONCLUSIONES	250

CAPÍTULO 8

ANÁLISIS CONJUNTO DE LA SUPERFICIE MEDIA DEL MAR Y DEL GEOIDE. SUPERFICIE TOPOGRÁFICA DEL MAR

8.1. SUPERFICIE TOPOGRÁFICA DEL MAR	251
8.2. PRIMERA DETERMINACIÓN DE LA STM EN LA ZONA	253
8.2.1. Superficie sin ajuste <i>crossover</i>	253
8.2.1. Superficie con ajuste <i>crossover</i>	256

	<u>Pag.</u>
8.3. MODELOS DE STM DEPENDIENTES DE LA POSICIÓN GEOGRÁFICA	258
8.3.1. Modelos de tres parámetros	
8.3.1.1. $A+B\phi+C\lambda$	260
8.3.1.2. $A+B\cos(\phi)+C\cos(\lambda)$	262
8.3.2. Modelo de seis parámetros	
$A+B\phi+C\lambda+D\phi^2+E\phi\lambda+F\lambda^2$	264
8.3.3. Modelo de diez parámetros	
$A+B\phi+C\lambda+D\phi^2+E\phi\lambda+F\lambda^2+G\phi^3+H\phi^2\lambda+I\phi\lambda^2+J\lambda^3$	266
8.3.4. Modelo de once parámetros	
$A+B\cos(\phi)+C\sin(\phi)+D\cos(\lambda)+E\sin(\lambda)+F\cos(\phi)\sin(\phi)$ $+G\cos(\lambda)\sin(\lambda)+H\cos^2(\phi)+I\sin(\phi)\cos(\lambda)+J\sin(\lambda)\cos(\phi)+K\cos(\lambda)^2$	268
8.3.5. Modelo de veintiún parámetros	
$A+B\phi+C\lambda+D\phi^2+E\phi\lambda+F\lambda^2+G\phi^3+H\phi^2\lambda+I\phi\lambda^2+J\lambda^3+K\phi^4+L\phi^3\lambda+M\phi^2\lambda^2+$ $N\phi\lambda^3+O\lambda^4+P\phi^5+Q\phi^4\lambda+R\phi^3\lambda^2+S\phi^2\lambda^3+T\phi\lambda^4+U\lambda^5$	270
8.4. MODELOS DEPENDIENTES DE LA POSICIÓN GEOGRÁFICA Y DE LA BATIMETRÍA	273
8.4.1. Ajustes con el modelo batimétrico ETOPO5U	273
8.4.1.1. Modelo de tres parámetros	
$A+Bh\cos(\phi)+Ch\cos(\lambda)$	274
8.4.1.2. Modelo de cuatro parámetros	
$A+Bh\cos(\phi)+Ch\cos(\lambda)+Dh$	276
8.4.1.3. Modelo de cinco parámetros	
$A+B\cos(\phi)+C\cos(\lambda)+Dh+Eh^2$	278
8.4.1.4. Modelo de cinco parámetros	
$A+Bh\cos(\phi)+Ch\cos(\lambda)+Dh^2\cos(\phi)+Eh^2\cos(\lambda)$	280
8.4.2. Ajustes con el modelo batimétrico de Morelli	282
8.4.2.1. Modelo de tres parámetros	
$A+Bh\cos(\phi)+Ch\cos(\lambda)$	282
8.4.2.2. Modelo de cuatro parámetros	
$A+Bh\cos(\phi)+Ch\cos(\lambda)+Dh$	284
8.4.2.3. Modelo de cinco parámetros	
$A+B\cos(\phi)+C\cos(\lambda)+Dh+Eh^2$	286
8.4.2.4. Modelo de cinco parámetros	
$A+Bh\cos(\phi)+Ch\cos(\lambda)+Dh^2\cos(\phi)+Eh^2\cos(\lambda)$	288
8.5. MODELOS DEPENDIENTES DE LA BATIMETRÍA	290
8.5.1. Ajuste lineal	291
8.5.2. Ajuste polinómico de grado dos	292
8.5.3. Ajuste polinómico de grado tres	294
8.5.4. Ajuste polinómico de grado seis	295
8.6. DESARROLLOS EN ARMÓNICOS ESFÉRICOS PONDERADOS LOCALMENTE	297
8.7. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	299
CONCLUSIONES Y RESULTADOS	301
REFERENCIAS	311

INTRODUCCIÓN

El geode es la superficie equipotencial del campo de la gravedad terrestre que aproxima al nivel medio del mar extendido a través de los continentes.

Esta superficie fue propuesta por C.F. Gauss (1777-1855) como figura matemática de la Tierra. Listing, en 1872, fue el primero en llamarla geode. Su determinación precisa es uno de los principales problemas geodésicos del pasado reciente y de la actualidad.

Su importancia se justifica por la utilidad que tiene en distintos problemas tanto de la Geodesia como de la Geofísica, como por ejemplo, para efectuar la conversión precisa de altitudes elipsoidicas, determinadas por observaciones GPS en altitudes ortométricas, reducción de observaciones efectuadas sobre el terreno a un elipsoide de referencia para su posterior tratamiento, análisis de datos obtenidos mediante técnicas espaciales, ... Se puede afirmar que el geode se convierte en la principal herramienta para la definición de un sistema consistente de altitudes topográficas tanto en tierra como en mar. Estos hechos justifican el interés del estudio presentado en este trabajo sobre la determinación del geode por distintas técnicas en diferentes medios, compatibilidad de métodos y formas óptimas de aplicación.

Su determinación gravimétrica está basada en la aplicación de la fórmula de Bruns (1848-1919), introductor de la Geodesia tridimensional, que representa la relación entre el potencial perturbador y la ondulación del geode.

$$N = \frac{T}{\gamma}$$

Es decir, se determina N, ondulación del geode, a partir de T, potencial perturbador ($T=W-U$) y de γ , gravedad normal. Ésta última se obtiene mediante modelos teóricos, mientras que la determinación de T se lleva a cabo a partir de datos gravimétricos.

T se puede obtener como solución del problema de contorno de la Geodesia Física. Ha de ser una función armónica fuera de las masas, esto es, verifica la ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

satisfaciendo a la vez la condición de contorno definida por la ecuación fundamental de la Geodesia Física:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T - \frac{\partial T}{\partial n} = \Delta g$$

Si se conociese la superficie de contorno, corresponden a un problema de contorno de tipo Hilbert-Robin, puesto que se trata de encontrar una función T conociendo los valores de una combinación lineal entre ella y sus derivadas radiales sobre una superficie.

Con la hipótesis de que dicha superficie es una esfera, la solución de este problema de contorno viene dada por la teoría clásica de J.G. Stokes (1819-1903) que dentro de los desarrollos relacionados con la teoría del potencial, publicó en 1849 su método para la determinación del geode a partir de anomalías de la gravedad y propone la expresión de T como función integral de las anomalías Δg :

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma$$

con $S(\psi)$, función de Stokes. Así queda resuelta la determinación gravimétrica del geode al combinar la fórmula de Stokes con la de Bruns:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma$$

Helmert (1843-1917) en su obra "*Diemathematischen und physikalischen Theorien der hoheren Geodasie*" introduce el método de nivelación astrogeodésica para la determinación del geode a partir de las desviaciones de la vertical. En 1901 da su fórmula de la gravedad normal. En 1936 aparecen los cálculos de un geode gravimétrico de Jeffreys e Hirvonen (Sevilla, 1999).

Una hipótesis fundamental es que T, potencial anómalo o perturbador, es armónico fuera del geode. Por ello, debe eliminarse el efecto de las masas que se encuentren por encima de éste por las reducciones de la gravedad apropiadas. De este modo se pueden hacer directamente comparables g reducida al geode (y no la resultante de observación sobre la superficie física de la Tierra) y γ o gravedad normal referida a la superficie del elipsoide.

En general, la reducción de la gravedad consta de dos etapas fundamentales. Por un lado la eliminación de las masas exteriores al geode o bien su transporte debajo del nivel del mar. Como segunda parte se tiene el desplazamiento de la estación de observación a la superficie del geode.

Para llevar a cabo la primera parte de esta reducción, se hace necesario el conocimiento de las densidades de las masas topográficas. Del establecimiento de hipótesis erróneas al respecto, provienen las mayores dificultades operativas del método.

Molodenski propone en 1945 un nuevo método en el que no es necesaria la reducción de las observaciones al geode con lo que se consigue evitar los errores debidos a la suposición de hipótesis erróneas en lo que a las densidades de las masas se refiere. Mediante su aplicación se obtiene el teluroide o superficie formada por puntos Q en los que el potencial normal U tiene igual valor que el potencial real W en el correspondiente punto P de la superficie física de la Tierra sobre la misma normal elipsoidal. El teluroide no es una superficie de nivel en sí misma. La distancia vertical del elipsoide al teluroide es la altitud normal mientras que la altitud geométrica es la distancia vertical del elipsoide al terreno. La diferencia entre ambas altitudes es la anomalía de la altitud, ζ . Así, en lugar de calcular N, ondulación del geode, o diferencia entre altitudes geométrica y ortométrica, se obtiene ζ

anomalía de la altitud, o separación entre P y Q. Contando ζ a partir del elipsoide se tiene el cuasigeoide. Sigue sin ser una superficie de nivel del campo, pero coincide con el geoide en las zonas marinas y en el resto ambas superficies están muy próximas y relacionadas analíticamente. En este trabajo usaremos la palabra geoide para referirnos, por extensión, a ambas cantidades.

El primer mapa del geoide mundial fue publicado en 1948 por Tanni. Se determinó por aplicación de la fórmula de Stokes. Bomford y Graaff-Hunter calculan un geoide mediante desviaciones de la vertical. En los años cincuenta a parecen los geoides astrogeodésico de Bomford y el gravimétrico de Heiskanen (Sevilla, 1999).

Para el cálculo de geoides locales se usan anomalías residuales o resultado de eliminar de los datos gravimétricos tanto la contribución del campo de la gravedad global (dándoles el carácter local) como el efecto de la topografía local con lo que se suaviza la señal permitiendo su interpolación más precisa. La reducción de este último efecto se hace a partir de la información contenida en los modelos digitales de terreno. En el primer capítulo de este trabajo, se presenta un análisis de los modelos digitales de terreno disponibles en España y de posterior uso en las reducciones de datos.

Por otro lado, la contribución del campo de gravedad global se representa por desarrollos en serie de armónicos esféricos hasta un cierto orden y grado, o modelo de geopotencial. Este desarrollo corresponde a la parte de baja frecuencia del campo. Los coeficientes de los primeros armónicos son muy precisos, pero según aumenta el orden, la precisión va disminuyendo o bien no es adecuada para la zona local que se pretenda estudiar dependiendo de la cantidad de datos de la misma que han intervenido en el cálculo de los coeficientes. Por ello, antes de hacer una aplicación local, consideramos que es oportuno, como en este caso se ha llevado a cabo, hacer un estudio de la combinación óptima de datos, es decir, hasta qué orden conviene usar el modelo de geopotencial y a partir de dónde debe completarse con datos locales determinados por observación.

Existen diversas metodologías para la resolución del problema que nos ocupa e incluso en un enfoque más general, de la representación del campo gravífico a partir de un conjunto de observaciones.

La determinación de T para cálculo del geoide o de otras cantidades, también puede hacerse por métodos estadísticos (colocación mínimo cuadrática) usando funciones covarianza de los datos. Esto es posible dada la relación funcional que existe entre la cantidad observada (estamos tomando como tal Δg) y la que se quiere determinar (T). Este método se ha desarrollado a partir de los trabajos de Krarup (1969), Moritz (1980) que formularon la hipótesis estocástica del campo gravífico modificando la teoría general de mínimos cuadrados. Tiene la ventaja de que es un método útil para realizar la estimación usando no sólo anomalías gravimétricas sino cualquier otra cantidad relacionada con el campo de la gravedad. Además la distribución de los datos no tiene que responder a esquemas preestablecidos como se hace necesario para la mayor parte de los métodos de evaluación de integrales numéricas. Como desventaja, es un método que consume mucho tiempo y memoria de cálculo y cuya aplicación es adecuada sólo a nivel más o menos local. Se tienen determinaciones de geoide por este método en Arabelos y Tziavos, 1994, Arabelos et al, 1998, Barzaghi et al, 1993, Benziolini et al, 1989, Gil et al, 1993, Sevilla et al, 1991b, 1991c, Sevilla y Rodríguez Velasco, 1992, entre otros.

Para obtener un resultado de precisión se ha de disponer de datos igualmente precisos. Para asegurar la calidad de los mismos se efectúan procesos de validación. El método de colocación en sí mismo ofrece la posibilidad de filtrado de observaciones, por lo que puede usarse con fines validatorios. Esta aplicación del método ha sido usada anteriormente de

modo satisfactorio (Sevilla et al, 1991a, Sevilla et al, 1992a, Rodríguez-Velasco y Sevilla, 1992, Sevilla, 1995).

El método de colocación, tiene en sí mismo otros problemas intrínsecos que en esta memoria se han estudiado. Utiliza funciones covarianza creadas a partir de los datos que deben ser útiles para representar el campo de la gravedad en la zona en que se trabaje. Como es lógico, la función de covarianza determinada representará peor a los bordes de la zona de la que provienen los datos (menos representados en la misma). Surge pues el problema del manejo más adecuado de Δg en las zonas costeras. Será necesario ver las propiedades generales de las anomalías tanto en tierra como en mar, y sobre todo, estudiar las similitudes o diferencias de sus funciones covarianza así como del comportamiento de las mismas para estimaciones en el marco del método de la colocación. Este estudio habrá de separarse en distintas secciones según la cantidad que se estime: N, dominada por las bajas frecuencias, o Δg , más influida por frecuencias más altas. Los resultados de este análisis llevarán a pautas de actuación distintas para uno y otro caso como se verá en el desarrollo del trabajo.

Para todos estos estudios se ha elegido una zona que engloba parte del este de la Península Ibérica, oeste del Mar Mediterráneo e islas pertenecientes al Archipiélago Balear sobre la que se dispone de datos de anomalías gravimétricas de distintas fuentes.

En el capítulo 2 de esta memoria, se presenta un estudio del comportamiento de las predicciones de anomalías por colocación mínimo cuadrática en zonas costeras. A partir de este estudio se ha concluido la validación de los datos que se usarán posteriormente en el cálculo del geode gravimétrico así como la forma más adecuada según los resultados obtenidos, para llevarla cabo en cuanto a usar covarianzas de datos de uno u otro tipo se refiere. Como se desarrollará posteriormente, para este tipo de cantidades resulta ser bastante representativa la naturaleza de la zona de la que provienen los datos (marina o terrestre).

Conclusiones distintas se obtienen al estudiar el comportamiento de la predicción de ondulaciones del geode en este tipo de áreas. Esta labor se desarrolla en el capítulo 3 de este trabajo. La predicción del geode resulta ser bastante más independiente del tipo de datos que se use para construir la función covarianza. El efecto de este factor se cuantifica numéricamente para la zona. También se estudia la influencia de otros parámetros tales como el espaciamiento de los datos y la muestra utilizada.

Una alternativa a la colocación será la resolución numérica de la integral de Stokes dado que en aproximación plana adopta la forma de una convolución integral de dos funciones. Las facilidades de cálculo de esta última en el dominio espectral a partir del teorema de convolución, hacen posible su evaluación por métodos espectrales. De estos métodos, el más extensamente utilizado en el cálculo del geode es la transformada de Fourier, en sus versiones uni o bidimensional. Si lo que se utiliza no es aproximación plana sino esférica, aparece un coseno en la expresión integral que hace que difiera de una convolución. Resulta entonces conveniente la transformación de la integral de modo que sea posible su evaluación en el dominio de las frecuencias. Son muy numerosos los trabajos concernientes a cálculo del geode por aplicación de la transformada de Fourier aplicada linealmente o en aproximaciones esféricas (Sideris y Tziavos, 1988, Zhao, 1989, Schwartz et al, 1990, Fosberg y Sideris, 1993, Haagmans et al, 1993, Sevilla, 1995). También se ha utilizado en su lugar la transformada de Hartley. Mediante ella se han obtenido determinaciones de geode sobre la Península Ibérica (Sevilla y Rodríguez-Velasco, 1995). La ventaja que presenta frente a la anterior, es que se trata de una transformada en el campo real en lugar del complejo. De este modo, su evaluación debería consumir la mitad de tiempo. En la realidad esta reducción es notable aunque no llega a alcanzar esos valores (Tziavos, 1993).

Anteriormente se han enumerado las ventajas e inconvenientes teóricos de la aplicación del método de colocación para el cálculo de geoides. Para asegurar la precisión del método sobre el área de estudio seleccionada, se compararon los resultados anteriores con un geode gravimétrico en el que la contribución de la gravedad local al geode se calculó por evaluación de la integral de Stokes en forma de convolución. Los resultados de este análisis se exponen en el capítulo 4.

Los datos de anomalías de la gravedad en tierra suelen ser numerosos y precisos. De este modo se obtienen resultados de N buenos. En mar, sin embargo, las medidas de gravedad llevadas a cabo desde barcos son precisas en zonas de profundidades pequeñas. Además se trata de una forma de obtención de datos muy cara y que consume mucho tiempo. Por este motivo se han ampliado las formas de recogida de datos que aporten información sobre el campo de la gravedad en mar de forma indirecta. Entre estas alternativas se encuentra la altimetría por satélites.

La Geodesia por satélites como tal, aparece en 1958 con las cámaras Baker-Nunn. En 1964 se lanzan los primeros satélites Doppler Transit por los Estados Unidos, que quedan operativos para uso civil en 1967. De 1966 a 1976 se lleva a cabo la primera gran operación europea de Geodesia por Satélites, WEST (*Western European Satellite Triangulation*), con la inclusión de 17 países y un total de 40 estaciones. En los años sesenta se utilizan las cámaras balísticas en geodesia por satélite, se perfeccionan los equipos Doppler y se lanzan más satélites geodésicos. Por este apogeo de uso, se desarrollan las investigaciones de Kaula sobre satélites geodésicos (Sevilla, 1999).

Dentro de los años setenta se comienzan a mandar satélites altimétricos que se ha venido usando bajo distintas metodologías para estudios del campo de la gravedad desde el Geos-3 (1975). Más recientemente tenemos los trabajos de Shum et al, 1987, Arabelos et al, 1993, Visser et al, 1993, Barzhaghi et al, 1993, Tapley et al, 1994, Arabelos y Tziavos, 1996, Andersen y Knudsen, 1999 entre otros.

Básicamente, estas metodologías se agrupan en dos bloques. El primero englobaría a las técnicas de estudio del campo gravífico de la Tierra mediante la información sobre las perturbaciones de las órbitas de los satélites. Afecta a la parte de baja frecuencia del mismo. Una vez determinado (o mejorado) el potencial con esta información, será posible el cálculo del geode. El segundo tipo de estudios utiliza el hecho de que las medidas del altímetro son, una vez corregidas adecuadamente, aproximaciones al geode mismo. En este trabajo se presenta un estudio de tipos de zonas donde estas correcciones pueden hacerse de forma adecuada y por lo tanto es posible la determinación de un geode que podemos llamar altimétrico, frente a otras donde los datos altimétricos no serán útiles para la determinación del geode sino de otras cantidades.

Las medidas que proporciona esta técnica son en realidad las altitudes instantáneas de la superficie libre del océano sobre un elipsoide de referencia una vez conocidas de forma precisa las posiciones tanto del satélite como del punto al que envía la señal el altímetro.

Estas altitudes han de corregirse de la respuesta del océano y la Tierra a las fuerzas de marea, de efectos geofísicos y demás alteraciones que la afectan. Pero sobre todo, su precisión viene determinada por un factor no estimable a priori, el error orbital radial. Existen modelos para eliminarlo, pero en ellos se hace una estimación de los parámetros que lo definen usando una matriz deficiente de rango, por lo que hay una parte de dicho error que no estará definida por los parámetros obtenidos del ajuste.

Éste es uno de los puntos más importantes a tratar para el uso de la altimetría en aplicaciones locales. Se hace necesario un estudio detallado de tal deficiencia que conduce a ver hasta qué punto son adecuados los modelos convencionales en las aplicaciones locales en

áreas restringidas o de forma muy irregular. El estudio teórico de este problema se desarrollará en el capítulo 5.

También se pretende cuantificar el error cometido al obviar este análisis por medio de casos prácticos sobre la zona de estudio cuyos resultados se exponen en el capítulo 6. Esto nos va a permitir valorar numéricamente el efecto de estas aplicaciones no óptimas. Por medio de estos estudios prácticos se van a experimentar criterios de validación unificados de datos altimétricos. De especial interés serán los relacionados con la posible existencia de correlación entre la superficie del mar y la batimetría del fondo. En este trabajo se ha demostrado la existencia de tal correlación y se proporcionan criterios alternativos de validación que eliminen desniveles accidentales en la superficie reproducida por las medidas que no sean reales y no los que se correspondan con accidentes de la batimetría correspondiente.

Para constatar la validez y generalidad de los nuevos criterios de validación, se hizo necesario su estudio en otro tipo de zona más abierta, con una respuesta hidrológica distinta y de mayor profundidad de modo que los modelos globales tanto de marea como de topografía, reproduzcan las generalidades del área de forma más adecuada. Para ello se han llevado a cabo estudios paralelos a los de la zona seleccionada en el Mediterráneo, en el Atlántico Norte, en una región de 30° en latitud por 40° en longitud que se presentan en el capítulo 7.

Pese a la eliminación de los efectos de marea, geofísicos, corrección de error orbital y la validación de datos, se obtiene una superficie que fluctúa con el tiempo a causa de los cambios temporales de las corrientes que dependen de factores tales como los vientos y la densidad del agua. Así, promediando a lo largo de un período de tiempo adecuado se puede eliminar la variación estacional de la superficie instantánea del mar y se obtiene la superficie media del mar durante el periodo de tiempo empleado en el cálculo. Esta superficie se usa como superficie de referencia y es prácticamente nuestra estimación del geode marino: una equipotencial del campo de la gravedad que corresponde con el nivel medio del mar. La obtención de esta superficie media para la zona de estudio, bajo diversas metodologías de ajustes locales se presenta en el capítulo 6 de este trabajo y para la zona elegida de contraste en el Atlántico, en el capítulo 7.

Pero aún así queda una parte que difiere del geode: la superficie topográfica del mar o topografía de la superficie media. La diferencia entre ambas superficies existe y se debe, sobre todo, a los equilibrios dinámicos que aparecen al estar el agua del mar sometida a fuerzas externas.

En el hemisferio Norte y latitudes medias como la que nos ocupa, los vientos medios circulan en sentido horario sobre las cuencas marinas. La fuerza de estos vientos se combina con la fuerza de Coriolis y ambas dan lugar a un flujo de agua que se desplaza hacia el centro del giro, pero ocupando sólo la parte más superficial (unos 100 metros de profundidad límite) que es la que estará afectada por el viento. Esta profundidad es aproximadamente igual al límite hasta el que penetra el movimiento de las olas, luego las fuerzas que actúan sobre ella son en realidad una mezcla de las propiciadas por los tres factores. Este flujo se dirige hacia el centro de giro, por lo que en este punto se produce una acumulación de agua que da lugar a un gradiente de presión que por debajo de la capa superficial no se puede equilibrar por resistencia de los vientos.

A partir de este punto ocurren dos cosas: por un lado, hay un lento flujo de retorno hacia los bordes alejándose del centro de giro. Este flujo da lugar a un levantamiento de agua profunda en las zonas externas. Pero la mayor parte de la circulación de los océanos se da en corrientes que fluyen tangencialmente alrededor de las cuencas, ya que de este modo, el gradiente de presión se equilibra con la fuerza de Coriolis.

La densidad del agua aumenta proporcionalmente con la profundidad. En las zonas donde se ha producido el amontonamiento de agua (centro de giro y área de levantamiento en los bordes) se tiene que las superficies de igual densidad se inclinan de forma ascendente, con lo que se reduce el gradiente de presión. A una profundidad de 1,5 a 2 kilómetros estos efectos se equilibran y hay una superficie isobara. La falta de gradiente de presión hace que no existan en ella mecanismos para conducir la corriente.

Dada la profundidad media de esta superficie y de la capa superficial, los modelos globales de topografía del mar no son adecuados para zonas marinas no muy profundas como es el caso que nos ocupa. En tales zonas, el proceso es local y presenta diferencias con respecto de los esquemas generales del orden de decímetros (Hipkin, 1999a y b). Así, la altimetría por satélite proporciona en realidad la superficie media del mar y no es tan útil para determinar el geoide salvo que se disponga de modelos adecuados para separar la superficie topográfica del mar. Cuando no es éste el caso, se convierte en herramienta para la estimación de modelos locales adecuados de tal cantidad.

No toda la superficie topográfica del mar es el resultado del equilibrio dinámico entre la fuerza del viento, gradiente de presión y fuerza de Coriolis. En el caso de cuencas entre las que existe relación el modelo es más complejo. Las distintas cuencas tienen masas de agua de distinta densidad por lo que si estuviesen aisladas entre sí alcanzarían altitudes sobre el elipsoide distintas siguiendo un esquema básico de compensación isostática de Pratt-Hayford. Además, si hay conexión entre cuencas debe conseguirse el equilibrio entre la evaporación y precipitación y flujos entrantes-salientes.

La zona de estudio elegida en esta memoria ilustra un ejemplo de esta conexión, al estar situada en el Mar Mediterráneo, cuenca conectada con el Océano Atlántico, con la que existe un transvase de agua que además se produce en una región próxima al área tratada. Además tiene una serie de respuestas hidrológicas peculiares (Lehucher et al, 1997, Hipkin, 1999a).

En este caso concreto del Mar Mediterráneo se tiene un exceso de evaporación frente al régimen de precipitaciones y vertido de ríos que haría descender su nivel medio en unos 75 centímetros por año si no hubiera un flujo entrante procedente del Atlántico. Para conseguir el equilibrio, es decir, que se mantenga el flujo entrante, se necesita que el nivel medio del Mediterráneo sea más bajo que el del Atlántico. En principio esto es fácil que ocurra. El exceso de evaporación en el Mediterráneo hace que el agua sea más salina y por lo tanto más densa. Además a igual profundidad la temperatura media del Mar Mediterráneo es más elevada que la de la zona este del Atlántico. Luego si no hubiese una conexión entre ambas cuencas por el Estrecho de Gibraltar (de una profundidad de unos 360 metros) por equilibrio isostático el Atlántico estaría unos 40 centímetros más alto. Este hecho hace pensar que al sí estar conectados, el flujo entrante del Atlántico ha de ser mucho mayor que el de salida. Sin embargo sólo lo excede en un 4%, es decir, que prácticamente ambos son del mismo orden. El nivel medio del Atlántico en esa zona se ha estimado por observaciones en mareógrafos como unos 20 centímetros más alto que en el Mediterráneo, aunque muy fluctuante según las variaciones estacionales de la cuenca.

La presencia de la superficie topográfica del mar separando el resultado que se puede obtener de las observaciones de la altimetría por satélites y el propio geoide, y su distinto carácter en aguas profundas o no, nos lleva a pensar que el fin geodésico de tales observaciones sea distinto en unas y otras áreas.

En aguas profundas, la obtención de Δg es costosa y no muy precisa. Será más adecuado el cálculo de geoide con la intervención de datos de altimetría. Estos datos serán además más precisos en tales regiones, al serlo también las correcciones aplicadas sobre ellos,

por ejemplo la corrección de marea que es más exacta que en aguas someras (Andersen y Knudsen, 1999).

Los modelos globales de la superficie topográfica del mar reproducen bien tal cantidad en mares abiertos, por lo que es posible la separación precisa de geoide y superficie media del mar. Sin embargo, en aguas poco profundas las anomalías gravimétricas son más fáciles de obtener y resultan de mayor precisión. Así, será más adecuado la determinación de geoide puramente gravimétrico, mientras que los datos de altimetría nos serán útiles, junto con el geoide, para conseguir la obtención de modelos locales realistas de la topografía del mar.

Este constituye el último punto de este trabajo en el que se analiza la separación entre ambas superficies usando filtros que seleccionen la parte de larga longitud de onda frente a la de corta. Se pretende hacer esta separación ya que la parte de corta longitud de onda puede incluir a los errores en la determinación del campo gravífico y su influencia tanto sobre el geoide empleado en tal segregación como en el cálculo de las efemérides del satélite necesarias para la obtención de la altitud del mar. Se está usando el hecho ya mencionado anteriormente de que los coeficientes de los términos de órdenes bajos del modelo de geopotencial (y por lo tanto la parte de baja frecuencia del campo de la gravedad), sí están determinados de forma precisa.

Se estudia la conveniencia de describir las funciones que actúan como tales filtros usando distintos tipos de variables independientes. Los parámetros de los filtros o funciones usadas para describir la superficie topográfica se ajustaron por mínimos cuadrados tomando como observaciones las diferencias obtenidas en la zona de estudio entre geoide gravimétrico y superficie altimétrica. Todas ellas se tomaron de igual peso. El análisis de los modelos adoptados se llevó a cabo mediante la comparación de las varianzas a posteriori obtenidas y el estudio de los residuales para cada uno de los ajustes.

En primer lugar se usaron como variables independientes las coordenadas que describen la posición geográfica, como en los modelos globales, pero de forma ajustada a la zona. Las varianzas en todos los casos eran pequeñas. Sin embargo, el análisis de residuales mostraba un tipo de ajustes más adecuado al introducir un gran número de parámetros en la función.

Se presentan también otro tipo de estudios en los que las variables elegidas para describir la superficie incluyen las profundidades. Este tipo de modelos resulta más adecuado, puesto que se obtienen menores residuales incluso con modelos con un número no muy grande de parámetros, en cuya resolución aparecerán por tanto, matrices más sencillas. Para los cálculos se usaron distintos modelos batimétricos siendo muy similares los resultados obtenidos.

Como la mejora de los ajustes es tan significativa, se probaron también modelos que describiesen la superficie topográfica como función únicamente de la profundidad. Es de gran interés el resultado obtenido al incluir entre las variables la batimetría, ya que viene a confirmar la correlación enunciada entre la superficie del mar y los accidentes del fondo marino, al menos para aguas poco profundas. Así, se hace posible obtener modelos locales de superficie topográfica del mar para aguas someras, mediante el uso de funciones crecientes de las altitudes batimétricas, por la relación existente entre cotas batimétricas extremas y valores también extremos de separación entre geoide determinado gravimétricamente y la superficie media del mar obtenida por ajuste de datos altimétricos.

MODELO DIGITAL DE TERRENO DE ESPAÑA

Si se quiere reproducir el campo de gravedad de la Tierra (en particular las ondulaciones del geode) con la mayor precisión posible, es necesario contar con el máximo número de observaciones e información geodésica sobre la zona. Con datos de la topografía en forma de modelo digital de terreno, se puede obtener un campo de gravedad "residual" eliminando los efectos de las masas topográficas. Este campo será localmente más suave, por lo que puede representarse por un número menor de datos, lo que resulta especialmente importante con fines operativos. Este proceso de reducción es esencial para obtener predicciones de precisión, sobre todo en zonas con topografía rugosa. Dada esta necesidad de contar con información sobre la topografía local, en este capítulo se presenta el proceso de elaboración de unos modelos adecuados para proceder a la reducción de efectos topográficos sobre los datos según la metodología de modelo residual de terreno. Estos modelos se han construido a partir del MDT200 del IGN y el ETOPO5U del International Geoid Service (IGeS).

Completa este capítulo un estudio sobre la compatibilidad sobre una zona de prueba entre los dos modelos.

1.1. OBTENCION DE UN MODELO DIGITAL DE ESPAÑA

Para poder tener en cuenta la topografía en los estudios sobre el campo de gravedad y el geode, es necesario disponer de un modelo digital del terreno. De este modo podríamos hacer la reducción de terreno de los datos suavizándolos y posteriormente restituir el efecto topográfico sobre la cantidad calculada.

En este trabajo se utiliza el modelo MDT200, creado por el Instituto Geografico Nacional a partir del Mapa Provincial 1:200.000 (García Asensio et al, 1992). Está formado por 169 matrices de cotas altimétricas referidas a puntos en coordenadas UTM cubriendo cada

una de ellas una extensión aproximada de algo más de 30'x45' con un espaciado entre puntos de 200 metros en las direcciones X e Y. Algunas de las matrices no estaban completas ya que al generarse por digitalización de mapas terrestres nacionales, existían huecos tanto en los puntos localizados en el mar como en los que transpasaban las fronteras del país. En principio, los primeros estaban rellenos con ceros y los segundos con -999., marcas de cota desconocida. Debido al proceso de formación de las matrices, hay un solapamiento no constante entre las zonas representadas por ellas.

Para corregir los datos por efectos topográficos, se necesita que el modelo de terreno cubra la zona a la que corresponden con un cierto margen para evitar efectos debidos a la falta de información en los límites. Dado que las zonas que configuran el MDT200 son muy pequeñas, el proceso se haría muy largo. Fue más adecuado generar una nueva versión del modelo que cubriese zonas de mayor extensión por unión de las zonas del original que lo haga más manejable a la hora de trabajar con zonas mayores, como la que nos ocupa.

Partiendo de este esquema, se originaron nueve zonas cubriendo la parte continental del país y tres más, una para cada una de las mayores islas del archipiélago Balear. Cada una de ellas tiene un borde de 15 kilómetros (Tabla 1.1.). Su objetivo será proporcionar información sobre el relieve en zonas cercanas en la reducción de efectos topográficos.

Para evitar huecos en el modelo y disponer de información sobre la batimetría, se usó otro modelo disponible sobre la zona, esta vez global: el ETOPO5U. Así, el modelo generado se forma por unión de las cotas dadas en el DTM200 del IGN sustituyendo las cotas que éste no tiene por aquellos valores interpolados del ETOPO5U para sus posiciones.

ZONAS CON INTERVALO DE 200 M								
ZONA	Y _{MIN}	Y _{MAX}	X _{MIN}	X _{MAX}	DY	DX	LR	NR
z1.cotas	4656000	4919000	-70000	316000	200	200	9655	1316
z2.cotas	4650000	4869000	316000	690000	200	200	9350	1096
z3.cotas	4505800	4821000	690200	1085400	200	200	9885	1577
z4.cotas	4487000	4655800	-38000	374000	200	200	10305	845
z5.cotas	4484000	4649800	374200	690000	200	200	7900	830
z6.cotas	4206000	4486800	41000	434800	200	200	9850	1405
z7.cotas	4206000	4483800	435000	856000	200	200	10530	1390
z8.cotas	3936000	4205800	34000	367000	200	200	8330	1350
z9.cotas	4039000	4205800	367000	764000	200	200	9930	835
Mallorca	4310000	4445000	415000	565000	200	200	3755	676
Menorca	4385000	4460000	545000	635000	200	200	2255	376
Ibiza	4255000	4355000	320000	405000	200	200	2130	501

TABLA 1.1: Zonas con intervalo de 200 metros

ZONAS CON INTERVALO DE 1000 M								
ZONA	Y _{MIN}	Y _{MAX}	X _{MIN}	X _{MAX}	DY	DX	LR	NR
z11000	4656000	4918000	-69000	316000	1000	1000	386	263
z21000	4650000	4868000	317000	690000	1000	1000	374	219
z31000	4506000	4829000	691000	1086000	1000	1000	396	315
z41000	4487000	4656000	-38000	374000	1000	1000	413	169
z51000	4484000	4649000	375000	690000	1000	1000	316	166
z61000	4206000	4486000	41000	434000	1000	1000	394	281
z71000	4206000	4483000	435000	856000	1000	1000	422	278
z81000	3936000	4205000	34000	367000	1000	1000	334	270
z91000	4039000	4205000	367000	764000	1000	1000	398	167
Mall100	4310000	4445000	415000	565000	1000	1000	151	135
Me1000	4385000	4460000	545000	635000	1000	1000	91	76
Ibi1000	4255000	4355000	320000	405000	1000	1000	86	101

TABLA 1.2: Zonas con intervalo de 1000 metros

Además, para la reducción de la gravimetría por efectos topográficos, se crearon otras versiones del modelo que fueran útiles a la hora de considerar las zonas más alejadas. Las matrices de cotas que las constituyen se refieren a una región extendida 100 kilómetros más en cada margen, y están formadas por valores medios de las cotas del 200, en un caso, sobre cada kilómetro (Tabla 1.2.), y en otro, para actuar como modelo de referencia (más suave) sobre cada 42 kilómetros en la dirección del eje X, y 56 en la del eje Y, que es aproximadamente lo que corresponde a medio grado en la región en la que se trabaja. Esta elección viene determinada porque los modelos de geopotencial que se usarán posteriormente ya contienen algún efecto topográfico que se debe evitar considerar de nuevo (Fosberg y Tscherning, 1981).

1.2. DESCRIPCION DEL MDT200 ORIGINAL

El modelo MDT200 del Instituto Geográfico Nacional se generó a partir del mapa 1:200.000 por digitalización de curvas de nivel. Como primer paso en su proceso de elaboración, el Instituto examinó cada una de sus páginas (correspondientes a una dimensión de 1°x1.5°) procediendo en primer lugar a una validación geométrica y altimétrica, para luego recomponer las curvas de nivel. Tras esto, los datos de cada hoja se separaron en cuatro grupos de los que se generaron los respectivos ficheros con el programa SCOP (Stuttgart Contour Program). Las dimensiones de las subáreas a las que representan no son fijas ni éstas

son disjuntas entre sí puesto que se eligen de forma que cubran el mínimo rectángulo UTM hasta el kilómetro exacto que contenga a la zona de 30'x45'. Las matrices de cotas se forman por un proceso independiente de ajuste mínimos cuadrados. Para cada ajuste se toman puntos de referencia contenidos en las subzonas adyacentes de modo que se asegure la continuidad de la solución.

El modelo está formado por 196 ficheros de cotas correspondientes a las 196 matrices, en coordenadas UTM, equidistantes 200 metros entre sí en las direcciones X e Y. También, como los ficheros contienen sólo a la matriz, se incluyen ficheros con la información sobre las coordenadas extremas que cubren cada una de las matrices, su longitud y la zona elegida para la transformación a UTM (que han sido las 29, 30 y 31).

Las zonas en que el modelo no está completo al no disponer de información (bien batimétrica o sobre las cotas en Portugal y Francia) aparecen señaladas con -999.

1.3. PRECISIÓN DEL MODELO TOPOGRÁFICO

La precisión del modelo con el que se han hecho las reducciones de terreno, depende de la del modelo del IGN del que proviene, unos 40-50 metros. Para determinarla, durante su producción se hizo un primer estudio al examinar las diferencias obtenidas en las alturas asignadas a puntos que apareciesen en más de una zona. Estas diferencias se mantuvieron en un orden de 1.4 a 21.2 metros, con un valor medio de 4.8 metros, resultado bastante satisfactorio teniendo en cuenta que las curvas de nivel que se digitalizaron estaban a distancias de 100 metros. Se llevó a cabo otro estudio tras finalizar el modelo, examinando las proyecciones del relieve reproducido en el modelo. Como este proceso de validación es básicamente visual, sólo es capaz de detectar errores grandes. Es necesario entonces, proceder a una validación más fina. Para ello, el IGN estima la precisión exterior del modelo MDT200 usando una comparación directa con otro más detallado, el MDT25 que se encuentra en proceso de producción. Está siendo confeccionado usando el mapa topográfico nacional 1:25.000. La comparación entre ambos no ha sido terminada puesto que el segundo modelo no está completo. Hasta ahora, sobre una muestra de zonas, el error mínimo cuadrático alcanza valores por debajo de la tercera parte de la equidistancia existente entre las curvas de nivel empleadas.

1.4. COMPARACION LOCAL CON EL ETOPO5U

Por otro lado, se han hecho algunos estudios comparativos con otro modelo disponible de la zona, el ETOPO5U, con el objetivo, más que de determinar la precisión externa del modelo, de ver la compatibilidad existente entre ellos, es decir, si reproducen la misma topografía y en la misma localización geográfica. Esto resulta más importante para nuestros trabajos al haber usado cotas interpoladas del ETOPO5U para eliminar huecos existentes en el modelo 200.

El modelo ETOPO5U está formado por altitudes medias sobre cada punto de una cuadrícula en coordenadas geográficas de 5'x5'. Ambos no son comparables directamente, ya que el modelo español es más denso y constituido por cotas puntuales y no por medias, que suavizan la topografía. Así, primero se crearon dos modelos sobre la zona de estudio, a partir de ellos que tuvieran características más similares. La zona que cubren es de 523000<X<1087000 y 4105000<Y<4766000, ambas referidas al huso 30.

ZONA PRUEBA DEL MODELO DIGITAL				
LIMITES UTM DE LA ZONA	X MIN	X MAX	Y MIN	Y MAX
	523000	1084000	4105000	4766000
NUMERO TOTAL DE PUNTOS	5920		PORCENTAJE DE PUNT. COMPARADOS	
PUNT. COMPARADOS	3029		100%	
DIF.MAYORES 400 M	186		6.14%	
DIF.ENTRE 300-400	153		5.05%	
DIF.ENTRE 200-300	345		11.39%	
DIF.ENTRE 100-200	725		23.94%	
DIF.BAJO 100 M	1620		53.48%	

TABLA 1.3: Comparación de modelos topográficos sobre la zona de estudio

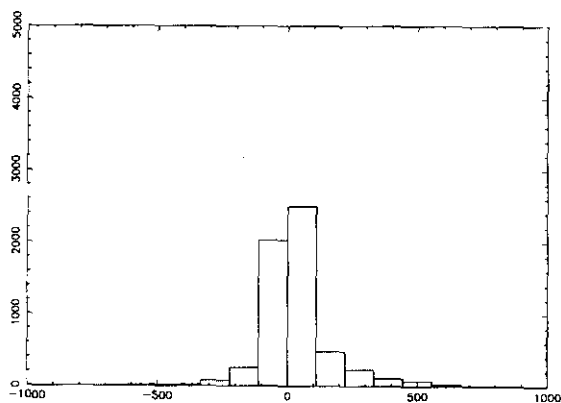


FIGURA 1.1: Histograma de diferencias obtenidas en la comparación

El primero de los modelos, generado a partir del modelo MDT200, se tomó como medias de las cotas en una zona de aproximadamente 5'x5' para la latitud media.

El segundo, se formó a partir del ETOPO5U por interpolación en los mismos puntos de la cuadrícula producida anteriormente (por lo tanto, en esta interpolación no se produjo una densificación del modelo).

Entre ambos se hizo una comparación directa de los puntos sobre la Península. Los resultados de tal comparación se muestran en la tabla 1.3, el histograma de las diferencias en la figura 1.1, y la distribución de los puntos incluidos en cada intervalo de rango de diferencias, aparece en la figura 1.2.

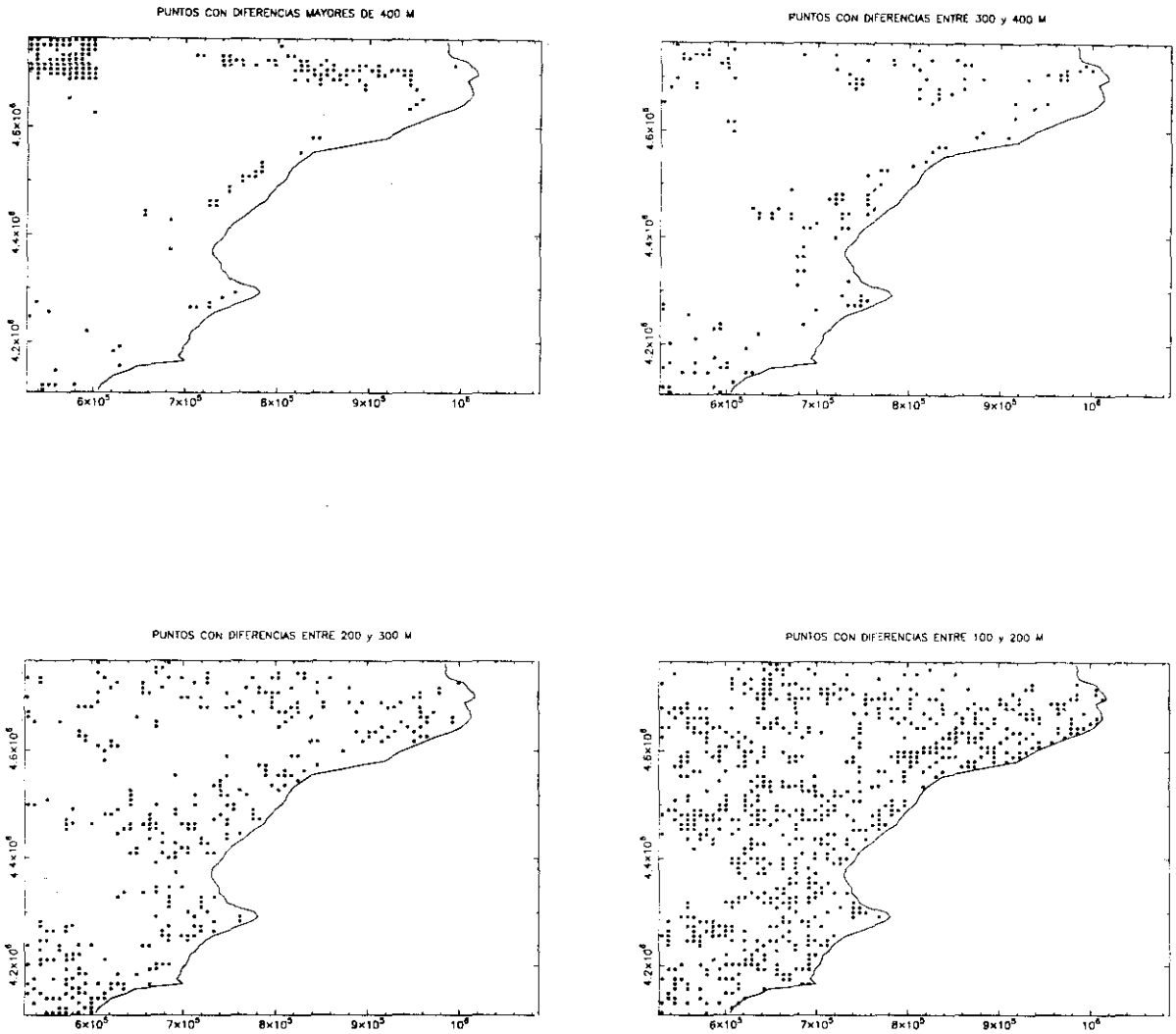


FIGURA 1.2: Distribución de los puntos con diferencias en las cotas

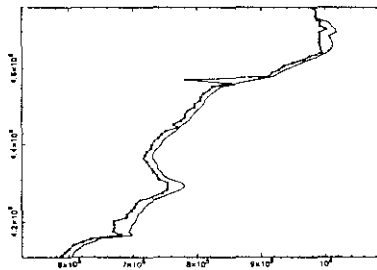


FIGURA 1.3: Perfil de la costa en los dos modelos comparados

A la vista de tales resultados, lo primero que se aprecia es que hay una aparente distribución de puntos con grandes diferencias en el nordeste y noroeste de la zona, y el resto no parece ajustarse a ninguna distribución geográfica aparente. En cuanto al histograma, podemos ver una mayor concentración de diferencias en el intervalo de 0 a 100 metros. Estas diferencias son altura en el modelo 200 menos altura en el ETOPO5U, por lo que se puede deducir una pequeña tendencia a ser mayores las cotas en el modelo español que en el global, aunque no excesivamente marcada.

Las diferencias grandes obtenidas en esta primera comparación y la experiencia de validaciones del ETOPO5U en otros países (Arabelos, 1993; Furst et al, 1993), hizo pensar que pudieran ser debidas no sólo a errores de los datos comparados, sino también a la existencia de algún tipo de sesgo entre ambos. En estos ejemplos parece existir un desplazamiento del ETOPO5U de unos 5 minutos sólo en longitud. Particularmente, en el caso de Italia (Furst et al, 1993), el sesgo afecta a la parte terrestre, la que aparece en el estudio. Por todo ello se decidió hacer un análisis más exhaustivo del ETOPO5U sobre la zona, principalmente de la posible existencia de tal variación en longitud y como afectaría a la comparación.

Para ello, bajo la sospecha de ese posible sesgo de 5' en longitud del modelo ETOPO5U, se reprodujo la costa en ambos, para ver si su situación coincidía y en caso de que no lo hiciera, existiera un desplazamiento más o menos constante entre ambas. En la figura 1.3 se muestra el resultado. La línea continua corresponde a la costa reproducida en el modelo MDT200 y la línea con puntos a la cota cero del ETOPO5U. A la vista de los resultados, se puede apreciar que, al menos para la zona de estudio, existe una aparente desviación de la costa en longitud, mientras que en latitud reproduce el mismo perfil.

Con todo esto, se hizo una segunda comparación, esta vez, entre el modelo generado a partir del MDT200 y el ETOPO5U desplazado en 5' a fin de ver si las diferencias disminuían como parece ser la tendencia en las zonas tratadas en los trabajos citados anteriormente. Los nuevos resultados aparecen en la tabla 1.4 y figuras 1.4 y 1.5.

ZONA PRUEBA DEL MODELO DIGITAL				
LIMITES UTM DE LA ZONA	X MIN	X MAX	Y MIN	Y MAX
	523000	1084000	4105000	4766000
NUMERO TOTAL DE PUNTOS	5920		PORCENTAJE DE PTOS COMPARADOS	
PUNTOS COMPARADOS	3029		100%	
DIF.MAYORES 400 M	108		3,57%	
DIF.ENTRE 300-400 M	74		2,44%	
DIF.ENTRE 200-300 M	173		5,71%	
DIF.ENTRE 100-200 M	583		19,25%	
DIF. BAJO 100 M	2091		69,03%	

TABLA 1.4: Comparación de modelos tras incluir sesgo en el ETOPO5U

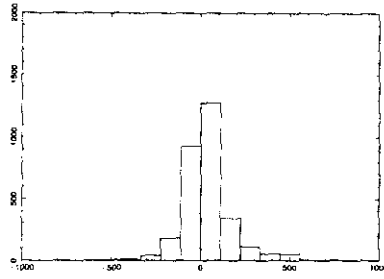
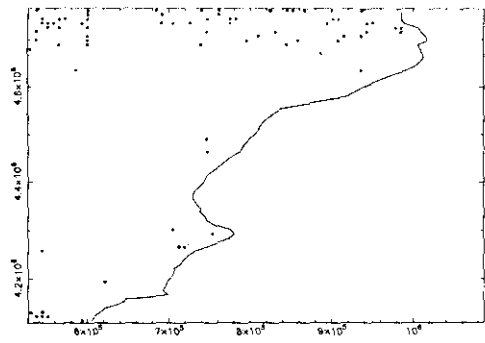
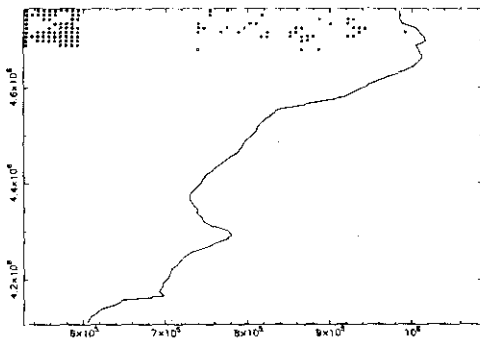


FIGURA 1.4: Histograma de diferencias tras mover el ETOPO 5'

Diferencias mayores de 400 m

Diferencias entre 300 y 400 m



Diferencias entre 200 y 300 m

Diferencias entre 100 y 200 m

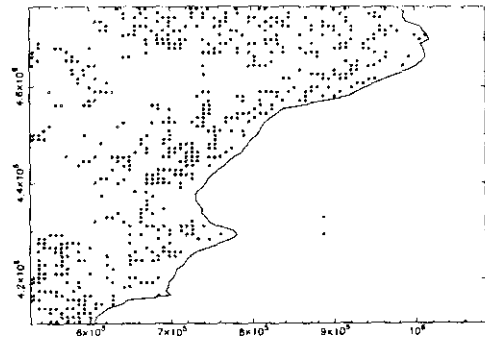
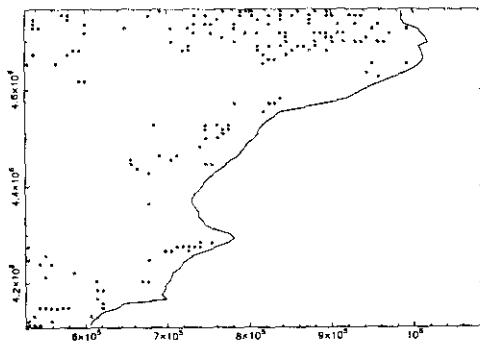


FIGURA 1.5: Distribución de puntos con diferencias en cotas tras mover el ETOPO

Según los resultados obtenidos se puede apreciar una disminución de las diferencias lo que equivaldría a que ambos modelos reproducen básicamente la misma topografía pero ligeramente desplazada.

Pese a esto, para poder afirmar que existe un corrimiento en coordenadas de uno a otro modelo, se deberían comparar globalmente o al menos en más zonas para ver si se presenta la misma tendencia, puesto que lo que a nivel local parece una traslación puede, o no aparecer en otras zonas, o ser una transformación más complicada.

El histograma de esta última comparación sigue mostrando una ligera tendencia de las cotas del modelo español a ser mayores de las del ETOPOSU.

La permanencia de diferencias grandes distribuidas como antes, especialmente en el nordeste y noroeste de la zona hace preguntarse si se deben a una mala reproducción de un accidente geográfico en particular o bien a errores groseros. Una inspección más detallada de los 108 puntos con diferencias mayores de 400 metros, muestra que varias de ellas se deben a errores groseros. En la figura 1.6 se muestra la distribución de los 16 puntos con diferencias realmente grandes incluso después de desplazar el modelo ETOPO (del orden de 1000 metros). Se trata claramente de equivocaciones, pero existen. Para más detalles ver Sevilla y Rodríguez, 1994. La topografía reproducida por el modelo resultante en la posterior zona de estudio puede verse en la figura 1.7.

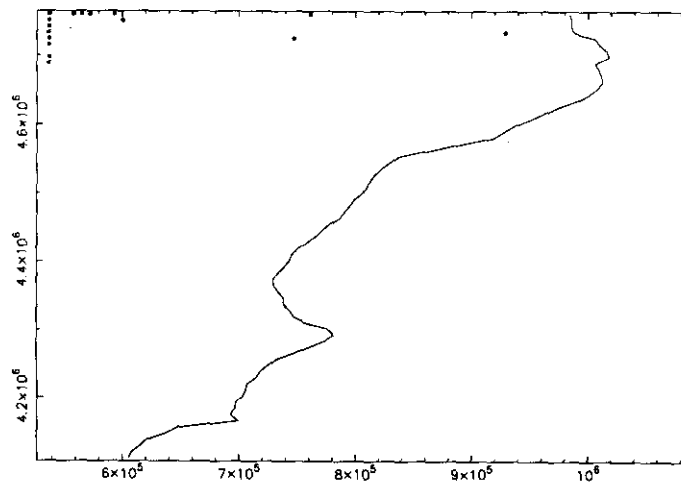


FIGURA 1.6: Distribución de puntos con diferencias grandes

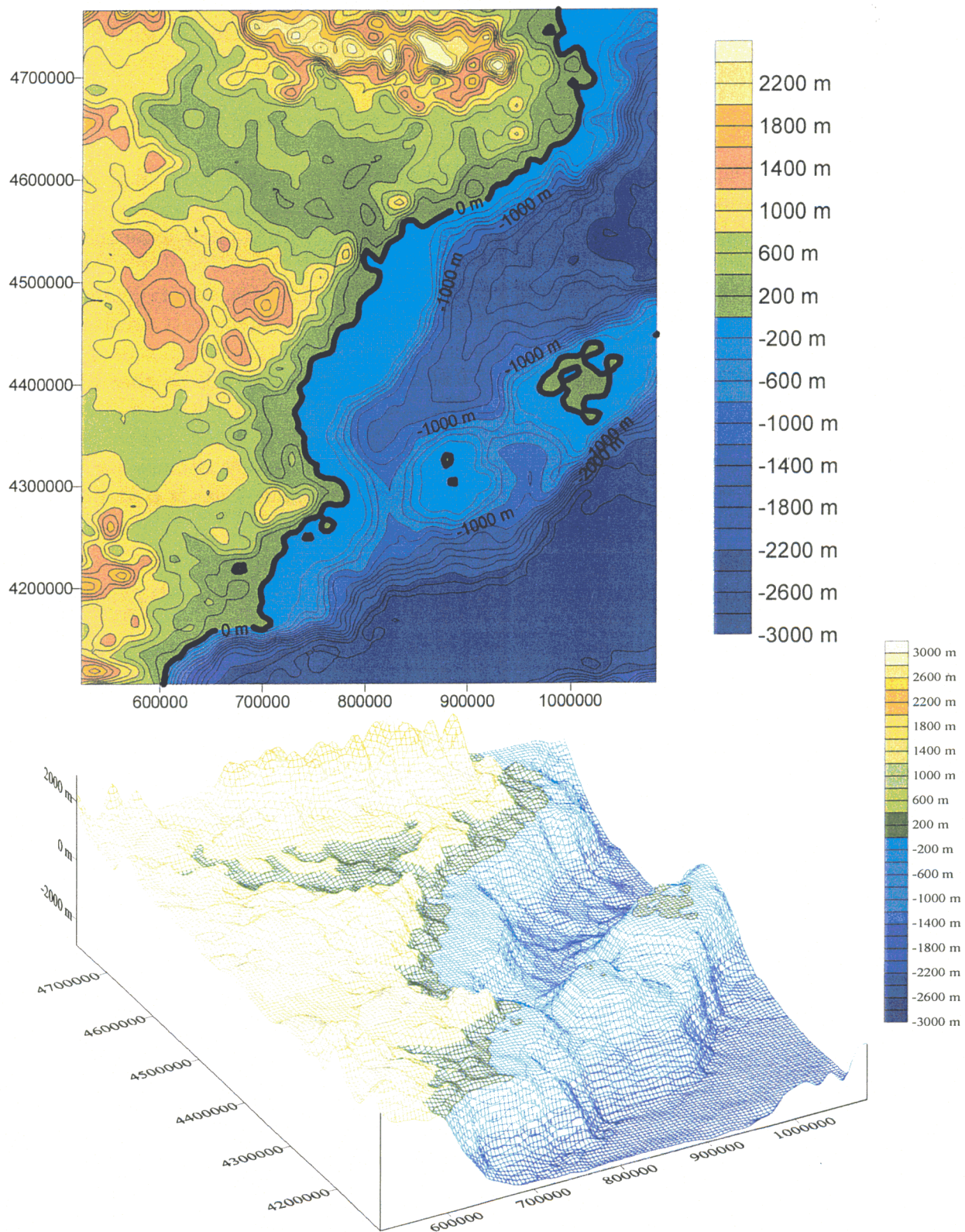


FIGURA 1.7: Resultado del modelo en la zona estudiada.

1.5. CONCLUSIONES Y RESULTADOS

En este capítulo se han presentado:

1. Versiones del modelo digital de terreno de España generadas a partir del MDT200 del Instituto Geográfico Nacional con el fin de calcular las correcciones de terreno necesarias para los estudios de geoide a efectuar en esta memoria con una mayor facilidad operativa.

2. Dado que las zonas presentadas se han completado en aquellos puntos donde no se conocía la cota con el modelo ETOPO5U, se ha hecho una comparación sobre la zona de estudio entre los dos modelos para ver hasta qué punto ambos son compatibles o si el resultado obtenido estaría afectado de una gran falta de homogeneidad.

3. A la vista de los resultados obtenidos sobre la zona de estudio, podemos concluir que en ella el ETOPO5U está afectado de un sesgo de 5 minutos en longitud. Introduciendo una traslación de tal valor, ambos modelos se hacen más compatibles obteniendo un menor número de diferencias. Para esta zona podemos afirmar que es mejor completar con ETOPO5U una vez que éste ha sido trasladado 5 minutos.

TRATAMIENTO INICIAL DE DATOS GRAVIMETRICOS

Un primer paso que se tiene que dar antes de calcular un geoide que se quiere preciso, es asegurar que los datos disponibles no estén afectados de errores que perjudiquen a las futuras predicciones. Por ello se ha de efectuar una validación de los datos originales. De los diversos métodos con los que es posible llevar a cabo esta validación, se ha elegido el de usar predicciones de los valores dato por colocación mínimo cuadrática y buscar diferencias grandes entre dato y predicción según un proceso iterativo.

Este método ya ha sido usado previamente con fines validatorios (Sevilla et al, 1991a y 1991b, Sevilla et al, 1992a). Además, nos ha permitido realizar un estudio, también presentado en este capítulo, sobre cómo actúa la colocación como método de predicción de anomalías de gravedad. Dicho estudio se completará en el siguiente capítulo con un trabajo paralelo, en este caso sobre la predicción de anomalías de la altitud.

2.1. CONSIDERACIONES GENERALES. METODO DE COLOCACION

Encabezando la serie de geoides calculados sobre la zona de estudio para el objetivo final de compatibilizarlos, se procedió a obtener un primer geoide gravimétrico calculado usando la técnica de "eliminación-restitución" y la colocación mínimo cuadrática. Este método ha sido aplicado con éxito por varios autores (Tscherning, 1982, Arabelos, 1989, Sevilla et al, 1992b, Sevilla y Rodríguez-Velasco, 1993). Para aplicarlo trabajamos en aproximación esférica sin cometer un error excesivo siempre que se usen cantidades residuales.

El potencial gravífico de la Tierra se puede separar en potencial normal U , primera aproximación al mismo, y potencial perturbador, T :

$$W=U+T \quad (2.1)$$

Será posible la determinación del potencial y de las cantidades relacionadas con él si se conoce T , función armónica fuera de las masas. El problema es que la figura en la que

tales masas están contenidas no es conocida, ni regular, como tampoco lo es la distribución de tales masas en su interior. T, entonces, no es determinable de forma exacta. Kaula fue el primero en intentar determinarlo como cantidad de un campo aleatorio.

Así, se busca T por aproximaciones en un espacio de Hilbert H: el de las funciones armónicas fuera de una esfera llamada esfera de Bjerhammar, totalmente contenida en el interior de la Tierra, y regulares en el infinito. Las funciones que constituyen este espacio, por los requisitos para estar en él, son analíticas por lo que se pueden representar por series de potencias convergentes aunque en principio no puntualmente, de armónicos esféricos fuertemente normalizados, que son entonces un sistema ortonormal completo de H:

$$f \in H, f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left(\sum_{m=0}^n a_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda) + \sum_{m=1}^n b_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) \right) \quad (2.2)$$

donde R es el radio de la aproximación esférica dada y r el radio vector respecto al centro.

El producto interno con el que el espacio es de Hilbert es el valor medio de los productos de los valores de las funciones f y g sobre la superficie de la esfera σ :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f \cdot g \, d\sigma \quad (2.3)$$

y la norma correspondiente será:

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} f^2 \, d\sigma \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

Nos fijamos ahora en los funcionales lineales de elementos de este espacio. De entre ellos, nos vamos a centrar en los acotados, es decir, los que verifican:

$$|L(f)| \leq M \|f\|, \quad M \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in H \quad (2.5)$$

Todos ellos constituyen el espacio H^* , dual de H, también con estructura de espacio de Hilbert respecto de un producto interno definido en función del de H. Cada elemento de H^* tiene asociado un elemento de H que lo representa, esto es, que verifica:

$$L_p(f) = l(P), \quad \forall f \in H \quad (2.6)$$

al que llamamos l, representante de Riesz. El producto de dos funcionales L_1 y L_2 se define como el producto de sus representantes l_1 y l_2 .

$$\langle L_1, L_2 \rangle_* = \langle l_1, l_2 \rangle \quad \|L\|_* = \langle L, L \rangle_* \quad (2.7)$$

Si en H^* están los funcionales "identidad" o que verifican:

$$L_p(f) = f(P), \quad \forall P \quad (2.8)$$

su representante en H, hace de núcleo reproductor del espacio, es decir, es una función K_p que puede generar a todo el espacio puesto que:

$$K_p(Q) = K(P, Q) \quad (2.9)$$

y para toda f del espacio H:

$$f(P) = \langle K(P, Q), f(Q) \rangle \quad (2.9')$$

En los espacios de Hilbert con núcleo reproductor los desarrollos respecto de funciones que forman un sistema ortonormal convergen puntualmente y no sólo en norma. El núcleo reproductor vale también para representar a los funcionales lineales:

$$L(f) = L\langle f, k \rangle = \langle f, Lk \rangle \quad L_1 L_2 K(P, Q) = K(L_1, L_2) \quad (2.10)$$

Veamos qué núcleo reproductor elegir para obtener la mejor estimación. Si se quiere predecir el valor de una cantidad l en un punto P (llamamos l_p) como combinación lineal de unas observaciones en n puntos, l_i , $i=1 \dots n$, tenemos expresiones del tipo:

$$\hat{l}_p = \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} l_i \quad (2.11)$$

El problema será encontrar los coeficientes α_{pi} de tal combinación más adecuados según el tipo de predicción que se quiera. El error de predicción es:

$$\epsilon_p = l_p - \hat{l}_p = l_p - \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} l_i \quad (2.12)$$

y su cuadrado:

$$\epsilon_p^2 = l_p^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} l_p l_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{pi} \alpha_{pk} l_i l_k \quad (2.13)$$

Tomamos la media M esférica sobre el área considerada que da la función covarianza:

$$M \{l_i l_k\} = C_{ik} \quad M \{l_p l_i\} = C_{pi} \quad M \{l_p^2\} = C_0 \quad (2.14)$$

y con todo esto, definimos el error medio cuadrático del valor predicho (desviación típica de la predicción) como:

$$m_p^2 = M \{\epsilon_p^2\} \quad m_p^2 = C_0 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_{pi} C_{pi} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{pi} \alpha_{pk} C_{ik} \quad (2.15)$$

Queremos que la estimación sea de mínimo error medio cuadrático, luego la condición que han de verificar los coeficientes es que hagan mínima (2.15). Para ello:

$$\frac{\partial m_p^2}{\partial \alpha_{pi}} = -2C_{pi} + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{pk} C_{ik} = 0, (i=1 \dots n) \quad (2.16)$$

y la solución es:

$$\alpha_{pk} = \sum_{i=1}^n C_{ik}^{-1} C_{pi} \quad (2.17)$$

(C_{ik}^{-1} son los elementos de la matriz inversa, no los inversos de C_{ik}). Llevando estos coeficientes a la expresión (2.11) tenemos que la predicción es (Heiskanen y Moritz, 1967):

$$\hat{l}_p = \sum_{k=1}^n \alpha_{pk} l_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n C_{ik}^{-1} C_{pi} l_k \quad (2.18)$$

Así, para conseguir la estimación con mínimo error medio cuadrático, el núcleo reproductor debe ser la función covarianza, y ser definida positiva. Si no es así, puede haber problemas en el último sumando de (2.15) y no haber mínimo. Esta función verifica todas las propiedades mencionadas. Buscamos que sea isótropa, luego tendrá la forma:

$$K(P, Q) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \left(\frac{R^2}{r_p r_Q} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi) \quad (2.19)$$

con: r_p y r_Q , radios vectores de los puntos P y Q respecto al centro de la Tierra.
 P_i , polinomios de Legendre.

ψ , distancia esférica entre ambos puntos.

R , radio de la aproximación esférica empleada.

σ_i , varianzas grado de los armónicos de Laplace de grado i .

Como $R > 0$ y σ_i constantes positivas se verifica la condición necesaria y suficiente para que la covarianza sea definida positiva y por lo tanto tenga sentido el problema de mínimos cuadrados.

En principio, si se quiere aproximar una función respecto de un sistema $\{f_i\}$ en el espacio de Hilbert, lo usual es hacerlo como una combinación de sus elementos con coeficientes los productos internos $\langle f, f_i \rangle$ y una serie de requerimientos según las características que se quiere que verifique la estimación. Con este planteamiento, se necesita que f , función a aproximar, sea elemento del mismo espacio de Hilbert del que son miembros los f_i y así poder obtener tales productos internos. La función T a aproximar, no pertenece al espacio al tener un dominio de armonicidad distinto (hasta las masas, y no hasta la esfera de Bjerhammar). Un requisito más importante para la colocación y que soluciona este problema es que la estimación reproduzca a las observaciones, esto es, que si se aplican los funcionales correspondientes, resulten de nuevo los valores de partida. Así, se determina una estimación T_c como combinación lineal de las funciones armónicas $L_i, K(P, Q)$ de coeficientes las soluciones de las ecuaciones normales definidas por la condición (2.16). Este tipo de predicción va a reproducir las observaciones verificando:

$$L_i(T) = L_i(T_c), i = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

y al haberse generado usando la función covarianza como núcleo reproductor, es óptima en el sentido de los mínimos cuadrados, tal y como se esperaba (Tscherning, 1978). Se puede aplicar al problema la metodología de la colocación, siempre que la observación sí sea del espacio. Aunque T no sea elemento, por el teorema de Runge puede aproximarse arbitrariamente bien por funciones de H (Krarup, 1969).

Al trabajar con las cantidades que nos ocupan, se plantea el problema de si la función covarianza del potencial creado por la masa de un cuerpo no esférico puede ser función isótropa como se supuso: se hace necesario suavizar el campo para manejar los conceptos que aparecen aquí. Así, también queda lo más representado posible con menos datos y se facilita la interpolación. Para conseguir tal suavizado, tomamos los datos como formados por tres partes correspondientes a las largas longitudes de onda, a las medias y a las cortas, y lo mismo con los resultados. En el proceso general que se desarrollará posteriormente de "eliminación-restitución", previamente a cualquier cálculo, las partes de largas y cortas longitudes de onda deben sustraerse del dato. Entonces, sólo interviene en la colocación la parte residual de las observaciones. A los resultados obtenidos habrá que restituirles la parte correspondiente a las componentes eliminadas para tener la solución final.

El método de colocación es una extensión de la técnica de predicción mínimos cuadrados. La idea de la fórmula de predicción de anomalías de Moritz, basada en la interpolación, Krarup la formaliza de modo que es útil para determinar T utilizando su función covarianza K , no determinable a partir de observaciones directas, sino indirectas usando después leyes de propagación de varianzas y covarianzas. Por tales leyes el método de colocación resulta ser muy potente puesto que es capaz de combinar distintos tipos de datos, siempre que todos ellos, cantidades observadas y a determinar, se puedan expresar como funcionales lineales del potencial anómalo, $L_i(T)$. En nuestro caso, las observaciones son anomalías de la gravedad y se pretende estimar ondulación de geoide. Será posible por las relaciones existentes con el potencial:

$$N=T/\gamma \quad \Delta g = -\partial T/\partial r - 2T/r \quad (2.21)$$

donde N denota la ondulación de geoide y γ , la gravedad normal.

El método para uso de ordenadores se estableció en el programa GEOCOL, parte del paquete informático GRAVSOFTE creado por CC. Tscherning, P.K. Knudsen y R.Forsberg, usado numerosas veces en este trabajo (Tscherning et al, 1994c).

2.2. DATOS GRAVIMETRICOS

El banco de datos gravimétricos del que se extrajo la muestra de trabajo presentada, es el general de gravimetría de la Península Ibérica (Sevilla, 1994a y 1994b). Está formado por 110.948 puntos dato, referidos al sistema IGSN71 por lo que se refiere a gravedades medidas y al GRS80 en cuanto a coordenadas y gravedades teóricas, que provienen de distintas fuentes: el *Instituto de Astronomía y Geodesia* (IAG), el *Instituto Geográfico Nacional* (IGN), el *Bureau Gravimetrique Internationale* (BGI), el *Instituto Portugués de Cartografía e Cadastro* (IPCC) y la *Defensing Mapping Agency* (DMA, actualmente NIMA). Son el resultado de la homogeneización, comparación y validación de todas ellas. La distribución es bastante regular aunque existen zonas de mayor concentración.

De este banco general de datos, se eligió una zona que fuera lo suficientemente representativa para el estudio hecho. Se tomó una con una extensión de cuatro grados en latitud, (desde 38° a 42°), y otros cuatro grados en longitud (desde -1.5° hasta 2.5°). De dimensiones casi cuadradas, esta zona ofrece la ventajosa situación para nuestro estudio de tener parte de su territorio en la Península y el resto en un mar cerrado, el Mediterráneo, además con un archipiélago. Ambas partes de la zona global parecen lo suficientemente extensas como para poder proceder a una confrontación de los métodos que se van a emplear (Fig. 2.1 y 2.2). El mapa de las anomalías aire libre sobre la zona se muestra en la figura 2.3.

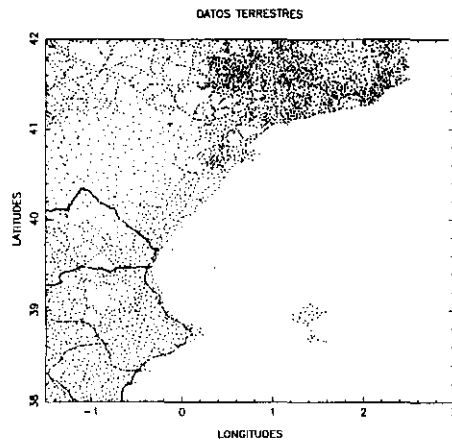


FIGURA 2.1: Distribución de datos terrestres

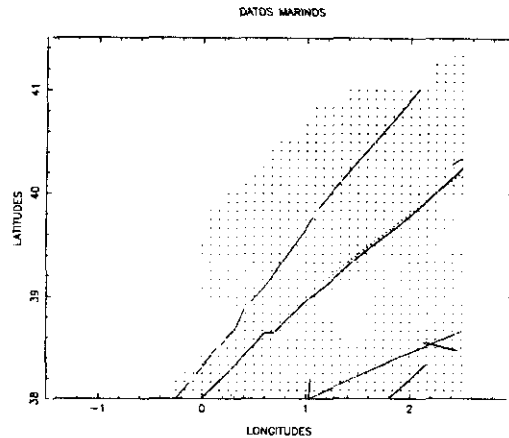


FIGURA 2.2: Distribución de datos marinos

Para aplicar colocación, los datos no necesitan estar dispuestos equidistantes como ocurre en los métodos de integración numérica. Sí será necesario que la distribución sea más o menos uniforme para asegurar que la covarianza elegida represente plenamente al campo de la gravedad de la zona y no esté afectada por ningún tipo de sesgo, consecuencia de una distribución irregular de datos (Rodríguez-Velasco y Sevilla, 1992). Por esto es necesario estudiar previamente la disposición de los datos disponibles y proceder a un muestreo de los mismos si se considera necesario. Este estudio puede hacerse simplemente de forma gráfica (Fig. 2.1 y 2.2). A la vista de los resultados se aprecia que la distribución de datos terrestres es bastante uniforme y muy densa, mientras que la de los marinos, con menor cantidad de puntos, está cruzada por trayectorias de barcos con una mayor concentración. Será entonces conveniente efectuar un discretizado de los datos antes de calcular funciones covarianza a fin de que se distribuyan de un modo similar en toda la zona.

2.3. MODELO DE GEOPOTENCIAL

Para quitar la parte de alta y media longitud de onda de los datos, usamos una aproximación de ellos proporcionada por un modelo de geopotencial. Esto es, dado el desarrollo en armónicos esféricos del potencial anómalo, (Heiskanen y Moritz, 1967),

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.22)$$

donde:

- GM es la constante geocéntrica de gravitación,
- a es el semieje mayor del elipsoide de referencia,
- r, θ , λ , son las coordenadas del punto de cálculo,
- P_{nm} , funciones de Legendre,
- ΔC_{nm} , ΔS_{nm} , coeficientes de armónicos fuertemente normalizados.

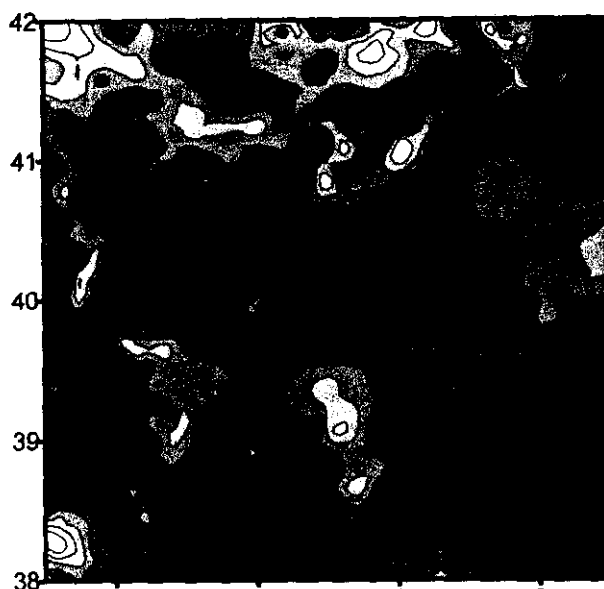


FIGURA 2.3: Mapa de anomalías de gravedad a 10 miligales

Usamos como valor del mismo, el resultado de sustituir un conjunto de coeficientes (ΔC_{nm} , ΔS_{nm}) previamente determinados hasta un cierto grado. Tales coeficientes se estiman por un ajuste mínimos cuadrados de un grupo de observaciones de distintos tipos. Sus precisiones vienen dadas por las varianzas grado, y van decreciendo a medida que aumentan orden y grado.

Los datos que pueden servir para la determinación de estos coeficientes provienen de tres fuentes de observación distintas:

a) ópticas, radar, Doppler GPS, laser ... a satélites artificiales. Este tipo de observaciones resulta ser sensible a los armónicos de orden alto del campo, luego permiten la determinación de las bajas frecuencias.

b) anomalías aire libre de la gravedad representadas por valores medios de medidas terrestres. La información que contienen es sobre las altas frecuencias o características locales del campo. Como problema nos encontramos con huecos en la disponibilidad de datos.

c) altimetría por satélite. Son adecuadas para la estimación de términos de alta y media frecuencia. Sirven para completar a las del tipo b), puesto que sólo las tenemos para zonas marinas, las menos cubiertas por medidas del tipo anterior.

En general, los modelos determinados a partir sólo de información de satélites tienen orden menor y por lo tanto menos coeficientes pero si incluyen además datos de gravimetría constan de más coeficientes por lo que en general los modelos mixtos son más precisos al tener información sobre longitudes de onda más cortas del campo de la gravedad (Rapp, 1981, Rapp et al, 1991).

2.3.1. Combinación de datos de distinta naturaleza.

Efectos del grado del modelo de geopotencial

Al combinar distintos tipos de datos, lo normal es obtener una buena resolución en todas las longitudes de onda representadas. La contribución mayor para la ondulación del

DATOS TERRESTRES

N.DATOS: 7172	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO	RANGO
AIRE LIBRE	8.36	23.03	-64.97	133.50	198.47
A.L - OSU91 A 200	-3.77	21.21	-91.51	101.45	191.68
A.L - OSU91 A 280	-1.90	19.43	-84.19	104.63	188.82
A.L - OSU91 A 330	-1.80	19.32	-75.48	109.82	185.30
A.L - OSU91 A 360	-2.39	18.51	-83.01	109.54	192.55

TABLA 2.1: Δg aire libre terrestres menos modelo considerado hasta distintos grados

N.DATOS: 7172	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO	RANGO
EFFECTO DE MRT	-3.80	18.45	-60.67	114.07	174.74
REDUCIDA (200)	0.03	15.20	-57.28	41.32	98.60
REDUCIDA (280)	1.90	12.58	-41.96	44.23	86.19
REDUCIDA (330)	2.01	11.51	-38.38	43.72	82.10
REDUCIDA (360)	1.42	11.69	-35.04	42.66	77.70

TABLA 2.2: Δg terrestres reducidas considerando más o menos coeficientes

DATOS MARINOS

N.DATOS: 1841	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO	RANGO
AIRE LIBRE	10.29	19.26	-32.10	68.38	100.48
A.L - OSU91 A 200	-3.89	16.17	-40.34	46.82	87.16
A.L - OSU91 A 280	-1.86	16.60	-43.31	47.73	91.04
A.L - OSU91 A 330	-1.76	16.31	-47.86	42.18	90.04
A.L - OSU91 A 360	-1.22	15.20	-41.34	44.97	86.31

N.DATOS: 1841	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO	RANGO
REDUCIDA (200)	-3.17	10.68	-27.59	28.29	55.88
REDUCIDA (280)	-1.15	11.82	-31.23	33.05	64.28
REDUCIDA (330)	-1.05	13.38	-35.78	34.15	69.93
REDUCIDA (360)	-0.51	12.88	-38.81	37.96	76.77

TABLAS 2.3 y 2.4: Δg reducidas considerando más o menos coeficientes del modelo

geoide proviene del modelo de geopotencial y de la gravedad local mientras que el efecto de la topografía es más pequeño, aunque errores sistemáticos en la reducción de terreno pueden causar errores de larga longitud de onda en las predicciones (Tziavos, 1993, Zhao, 1989). Los dos tipos de datos de mayor influencia poseen una banda de longitudes de onda comunes. Para una combinación óptima se consideran posibles errores y no se supone ninguno de los dos tipos de datos libre de ellos. Fuentes de error son el truncamiento de los desarrollos en armónicos en un orden finito y que el área de aplicación sea también finita (Zhao, 1989), aunque mayores serán los efectos de los errores en los datos. Representaremos la banda común por aquéllos con menor error. En el caso de los modelos de geopotencial los errores se encuentran en los órdenes altos.

Por eso, es lógico plantearse hasta qué punto será adecuada la utilización de todo el modelo completo con lo que se incluirán coeficientes de precisión dudosa. Los modelos empleados para la reducción han sido el IFE88E2 y OSU91A (Basic et al., 1990, Rapp et al., 1991), ambos de orden y grado 360. En general, la precisión será mayor con un número grande de coeficientes, pero localmente, la información contenida en ellos sobre las cortas longitudes del campo puede ser imprecisa o al menos peor que la contenida en el propio dato.

Algunos autores, (Sideris and Schwarz, 1986) proponen que este uso de los modelos de geopotencial hasta el mayor grado de que disponen no es la mejor opción para combinar con datos de Δg locales y dan como alternativa el uso hasta un grado más bajo completando con gravimetría local.

A fin de estudiar hasta qué grado era conveniente usar modelo de geopotencial se han hecho algunas pruebas sobre la zona tomando para ello el modelo OSU91A con todos sus coeficientes hasta orden y grado 360 o bien truncamientos anteriores. Se completa este estudio viendo en paralelo el efecto de las reducciones a distintos grados sobre datos marinos y terrestres por separado y juntos. De esta forma se puede ver la representatividad del modelo empleado para los distintos tipos de zonas.

A la vista de las tablas (2.1 a 2.6), lo primero que se concluye es que el modelo estudiado, OSU91A, reproduce de forma distinta los datos según éstos sean terrestres o marinos. En el primer caso, vemos que con órdenes grandes se reproducen bien los datos: las estadísticas de las anomalías reducidas (tabla 2.1) muestran que se obtienen media y rango menores considerando el modelo hasta un orden de alrededor de 330, aunque la desviación típica es menor si se toma hasta 360. Dado que el fin último de esta reducción es obtener anomalías competamente reducidas (esto es, eliminando además la contribución de la topografía), estudiamos cuál de las reducciones produce anomalías de menor variación. Así se puede ver no sólo qué tipo de anomalías observadas menos anomalías modelo resulta ser el más suave, sino lo que es más importante para nuestro fin, cuál es el que combinado con la adecuada información de la topografía da un campo residual mejor. Estos resultados pueden verse en la tabla 2.2. En este caso se consiguen menores media y rango tomando el modelo hasta 360, y la desviación aumenta un poco. Por lo tanto, sobre la zona, los datos terrestres parecen ser mejor reproducidos por el modelo completo.

Distintas conclusiones se obtienen para datos marinos, con una buena estadística de los resultados tomando el modelo hasta un orden medio, alrededor de 200. Al aumentar bastante el orden la media va disminuyendo, pero la desviación típica aumenta salvo en el caso de 360. Combinado con la corrección topográfica la media más baja se alcanza al tomar hasta orden 360, mientras que el comportamiento en general es mejor con un orden pequeño. Para datos marinos parece más adecuado considerar menos coeficientes del modelo a favor de una mayor concentración de datos. Pero para estas zonas no se dispone de la cantidad de datos que lo haga posible, salvo usando concentraciones grandes de puntos en itinerarios de

barcos, lo que produciría sesgos en la representatividad de la zona. También es un problema no disponer de un modelo batimétrico lo suficientemente denso y preciso.

En el caso de considerar datos terrestres y marinos a la vez, los resultados (tablas 2.5 y 2.6) muestran que es mejor considerar reducciones de todo el modelo, hasta grado 360.

Así en este estudio se ve que para datos terrestres y mixtos sobre la zona, se producen las mejores reducciones al tomar el modelo hasta un orden grande, y para marinos será mejor truncarlo. Para tomar una decisión operativa, nos enfrentamos con el problema de cómo completar la información al tomar menor grado en los marinos, y por otro lado, para proceder a los estudios planteados sobre el comportamiento del método de colocación con uno y otro tipo de datos, lo mejor sería aplicarlo bajo las mismas condiciones. Por esto y porque sabemos que los datos terrestres son más precisos que los marinos, se decidió tomar el modelo completo, aunque puntualizando en la conclusión sobre datos marinos para futuros estudios sólo de este tipo de zonas.

Las conclusiones obtenidas están de acuerdo con las de otros autores (Rapp, 1994), que aconsejan usar los modelos de grado alto completos, aun sabiendo que los coeficientes pueden no ser buenos. Justifica esto el hecho de haber observado fenómenos de ondulaciones de los resultados formando falsos rizos. Estos efectos pueden ser debidos a fenómenos de tipo Gibbs del proceso de truncamiento que se explicarán más adelante en el capítulo 4.

También, los truncamientos de un modelo deben elegirse en función de la densidad del conjunto de datos donde se van a calcular las cantidades gravimétricas. Por ejemplo, para hacer un geoide global a partir de un modelo de grado 360 sobre una cuadrícula $3^{\circ} \times 3^{\circ}$, lo más conveniente es tomar un truncamiento en el grado 60 (de este modo se verifica la relación

TODOS LOS DATOS JUNTOS

N.DATOS: 9013	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO	RANGO
AIRE LIBRE	8.76	22.32	-64.97	133.50	198.47
A.L - OSU91 A 200	-3.79	20.28	-91.51	101.45	192.96
A.L - OSU91 A 280	-1.89	18.88	-84.19	104.63	188.82
A.L - OSU91 A 330	-1.79	18.74	-75.48	109.82	185.30
A.L - OSU91 A 360	-2.15	17.89	-83.01	109.54	192.55

TABLA 2.5: Δg aire libre menos modelo considerado hasta distintos grados

N.DATOS: 9013	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO	RANGO
REDUCIDA (200)	-0.62	14.45	-57.28	41.32	98.60
REDUCIDA (280)	1.28	12.49	-41.96	44.23	86.19
REDUCIDA (330)	1.38	11.98	-38.38	43.72	82.10
REDUCIDA (360)	1.02	11.97	-38.81	42.66	81.47

TABLA 2.6: Δg totalmente reducidas considerando más o menos coeficientes del geopotencial

resolución=180/N). En nuestro caso, el conjunto es denso, luego no se debe contar con un grado bajo si se quiere reproducir tal resolución.

Otro problema en cuanto a los modelos de geopotencial es cuál de los disponibles utilizar en nuestro trabajo. Esta cuestión se desarrollará en las secciones siguientes.

2.4. REDUCCION DE LOS EFECTOS TOPOGRAFICOS

La aplicación de la técnica de eliminación-restitución incluyendo los efectos topográficos ya ha sido aplicada anteriormente (Tscherning, 1985, Fosberg y Tscherning, 1981, Gil et al, 1993). La topografía afecta a los datos principalmente de dos formas: por un lado, hace que las observaciones básicas, Δg , no vengan dadas sobre una superficie de nivel, requerimiento en el caso de usar la integral de Stokes. Si, como es nuestro caso, lo que se va a usar es colocación, el objetivo es tener en cuenta la topografía de modo que sea consistente con el método. Uno de los factores que va a determinar el tamaño de los sistemas de ecuaciones a resolver es la variación local del campo de gravedad. Nuestro interés está en reducir este número para hacer la aplicación más sencilla. Una de las razones de estas variaciones será la topografía local ya que una parte de la señal, la que domina las cortas longitudes de onda, se debe a la atracción de las masas topográficas. Si eliminamos sus efectos sobre los datos, tendremos anomalías más suaves, con lo que también se consigue una interpolación más precisa. El efecto más inmediato conseguido que corrobora este suavizamiento del campo es la disminución de la desviación típica, tanto o más importante que la de la media, que puede llegar del 25 al 50 % (Tscherning, 1978). Esto permitirá usar menos datos para obtener la misma precisión (ver tablas 2.7-2.9).

En cualquier caso, es conveniente usar la reducción de terreno para eliminar la correlación de las anomalías con las altitudes. El modo operativo de hacerlo consiste en obtener el potencial T_m generado por un modelo de masas del terreno. El T_{res} residual que tenemos al eliminar T_m será armónico siempre que éste último lo sea. Sobre este punto no tenemos problemas, puesto que, al corresponder al potencial de un volumen fijo de masas, debe ser armónico. En principio, el modelo de terreno elegido puede ser cualquiera, pero se conseguirá un campo residual más suave si se ha usado un modelo que se corresponda bien con la topografía existente en la realidad (Fosberg y Tscherning, 1981), lo que hace que la estimación obtenida por colocación sea mejor.

El método para hacer la reducción de terreno ha de elegirse de modo que dé lugar a un efecto indirecto pequeño (Heiskanen y Moritz, 1967, Tziavos, 1993). Aparece otro problema más si, como es nuestro caso, previamente se ha eliminado la influencia de un modelo de geopotencial que ya incluye información sobre la topografía global. La eliminación de las masas topográficas y posterior compensación isostática puede introducir errores de larga longitud de onda. Una forma de evitar estos problemas es usar modelos que den información sólo sobre los efectos de la topografía sobre longitudes de onda más cortas que las ya eliminada. Aquí usamos el método de corrección de efectos de la topografía residual (Fosberg, 1984). Consiste en corregir, no de la topografía real, sino de las desviaciones de esta topografía respecto de una superficie media (Fig. 2.4).

Este método es especialmente bueno para trabajar de forma local. Si se reducen las anomalías por otros métodos, el resultado está muy correlado con la altitud. Por otro lado, si se hace una reducción incluyendo compensación isostática, se trabaja globalmente. Además, mediante este método se pueden evitar los problemas operativos que se producen al considerar la esfericidad de la Tierra en las reducciones clásicas del terreno.

Es necesaria entonces la intervención de varios modelos. Por un lado, un modelo digital del terreno que, para tener en cuenta las longitudes de onda más cortas que las ya eliminadas con el modelo de geopotencial, debe ser más denso que éste. Así se consigue que las anomalías reducidas sean en teoría similares a las anomalías isostáticas y su compensación no es necesaria. Como el objetivo es eliminar la parte de corta longitud de onda del campo gravífico, necesitamos que el modelo sea muy denso, sobre todo en las zonas más cercanas al punto donde se está efectuando la reducción ya que ahí los efectos son más importantes.

En general los efectos del terreno se calculan a partir del potencial de prismas rectangulares de densidad constante, con fórmulas bastante complicadas (Forsberg, 1984).

$$T_m = G\rho \int \int \int xy \log(z+r) + xz \log(y+r) + yz \log(x+r) - \frac{x^2}{2} \arctg \frac{yz}{xr} - \frac{y^2}{2} \arctg \frac{xz}{yr} - \frac{z^2}{2} \arctg \frac{xy}{zr} \Big|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2}$$

donde x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 y z_2 son las coordenadas límite del prisma sobre el que se ha extendido la integración y ρ es la densidad constante en él.

En las zonas más lejanas, como su influencia es menor, se puede, a fin de no ralentizar demasiado los cálculos, considerar un modelo más discretizado y dejar de usar las fórmulas de los prismas para pasar a utilizar aproximaciones a éstas basadas en desarrollos, mucho más simples (Mc Millan, 1958).

$$T_m = G\rho \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{24r^5} \{ (2\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2)x^2 + (-\Delta x^2 + 2\Delta y^2 - \Delta z^2)y^2 + (\Delta x^2 - \Delta y^2 + 2\Delta z^2)z^2 \} + \frac{1}{288r^9} [\alpha x^4 + \beta y^4 + \dots] + \dots \right] \quad (2.23)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1$$

Por último, para incrementar aún más la velocidad de los cálculos, la topografía lejana está representada por una superficie media y se hacen aproximaciones al suponer la masa concentrada en puntos (sin volumen). Esta superficie de referencia se crea por medias de las cotas del modelo digital de mayor resolución. Debe ser suave como para que la topografía

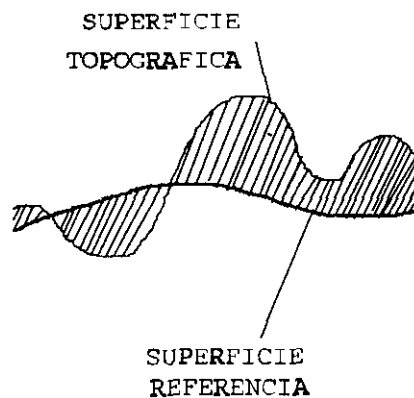


FIGURA 2.4: Esquema general de la reducción de terreno por modelo residual

real sea verdaderamente residual y para hacer posible la aplicación de la corrección armónica que veremos a continuación. Además, si se elige con una longitud de onda suficientemente larga, la reducción sí se puede aproximar por la diferencia entre dos reducciones Bouguer. Primero se elimina la topografía visible y después se añade de nuevo la topografía suavizada

$$\Delta g \sim 2\pi G\rho(h-h_{ref})-c \quad (2.24)$$

donde c es la corrección clásica de terreno.

Como las oscilaciones de la topografía real respecto del modelo elegido como referencia se irán alternando de signo, su efecto llega a anularse al considerar una cierta distancia de la zona de cálculo, generalmente 2 ó 3 veces la resolución de la superficie de altitud media. En la práctica sólo se incluirá entonces la topografía residual hasta una cierta distancia. En nuestro caso, se han usado los modelos presentados en el capítulo 1. El más denso de ellos (200 metros) se ha usado hasta 15 kilómetros del punto de cálculo (zona cercana), donde se usan las fórmulas rigurosas de los prismas. El límite que usamos para seguir considerando la topografía residual es de 100 kilómetros, valor que mencionan varios autores (Barzaghi y Benciolini, 1986, Tscherning, 1982).

En cuanto a desventajas de este método nos encontramos con la reducción del área de armonicidad que produce. Al referir a una superficie media, los puntos por debajo de esta media, se van a tomar como en el interior de las masas, donde T no es una función armónica (ver fig. 2.5). Ante este problema, se puede modificar la definición, por ejemplo, representar la topografía de referencia por un desarrollo en varias capas sobre el geoide, o bien, reformular el método en el dominio de las frecuencias (Vermeer y Forsberg, 1992). Más sencillo es introducir la ya mencionada *corrección armónica* (Fosberg y Tscherning, 1981) que consiste en tomar en lugar de T a T^* , función armónica dentro y fuera de las masas que en el exterior de éstas coincide con T . Así se puede hacer prolongación del potencial exterior hasta puntos que ahora se encuentran bajo la superficie de referencia y cambiar $L(T)$ por $L(T^*)$. La existencia de tal función se demuestra en el teorema de Runge-Krarup (Moritz, 1980) y en el caso de que los datos estén reducidos de modelo de geopotencial y de topografía, los resultados obtenidos usando las cantidades determinadas a partir de esta función T^* o los datos reales de observación difieren en muy poco. Ha sido un problema ampliamente estudiado al ser necesario su uso al calcular ondulaciones del geoide a partir de anomalías de gravedad por la fórmula de Stokes ya que en este caso, las anomalías están reducidas al nivel cero. Si el objeto de estudio son las propias anomalías se pueden reducir a una superficie de nivel cualquiera. Esta corrección es aplicable siempre que la superficie sea suave y se conozca la densidad de las masas. Si las masas por encima del punto ahora dentro de ellas se condensan en una capa bajo él, las desviaciones de la vertical y ondulaciones del geoide prácticamente no varían al haber tomado la superficie de referencia suave. Para Δg , sin embargo, se produce un cambio correspondiente al valor de una doble reducción de capa de Bouguer con espesor $h_{ref}-h_p$.

$$\Delta g_p^* - \Delta g_p = 4\pi G\rho(h_{ref}-h_p) \quad (2.25)$$

Puesto que los efectos de la topografía dependen fuertemente de la altitud del punto de cálculo a través del término $2\pi G\rho$, se tiene que tener un cuidado especial cuando se dé el caso de que la altitud del punto no coincida con el resultado al interpolar en el modelo digital. Esto sucede muy frecuentemente ya que los modelos digitales no alcanzan una

resolución tal que puedan reproducir a todos los accidentes de una topografía rugosa y se producen discrepancias. Ante tal problema se puede o bien forzar al punto a que esté sobre la topografía interpolada, o bien se puede modificar ésta localmente para que coincida con el valor asignado al punto. Dependiendo de la cantidad tratada conviene hacer una u otra cosa.

En nuestro caso de reducir anomalías dato, en tierra, admitimos que las altitudes asignadas a los puntos de observación son correctas y lo que se modifica es el modelo, ya que como se ha visto, varían mucho los valores de las anomalías si éstas quedan dentro de las masas. Al elegir la opción de que el modelo sea el que se adapte a las altitudes dato, este caso no lo vamos a encontrar (fig. 2.6). De este modo tendremos anomalías reducidas a la altitud del punto que entra como dato. Sin embargo, en mar, dejamos todo a altitud cero (no en la profundidad asignada). Para todos estos cálculos se ha usado el programa TC (Fosberg, 1984, dentro del paquete GRAVSOF, Tscherning et al., 1994c).

En este caso los datos terrestres se suavizan disminuyendo tanto la media como la desviación típica y el rango de variación al reducir los datos de los dos efectos, sobre todo al eliminar la topografía. Sin embargo, en los datos marinos, donde el efecto de las masas es menor, el mayor suavizamiento se produce al eliminar el modelo de geopotencial.

En ambos casos, resulta que el modelo OSU91A da mejores resultados estadísticos, ya que produce un mayor descenso de los tres factores evaluados, y lo que resulta más representativo, del rango y de la desviación típica, puesto que sin el estudio de estos factores la media puede ser engañosa si disminuye por compensación, no de valores suaves sino de similares de distintos signos (ver tablas 2.7 a 2.9).

Esta información se refiere al banco de datos completos aún sin validar, constituido por

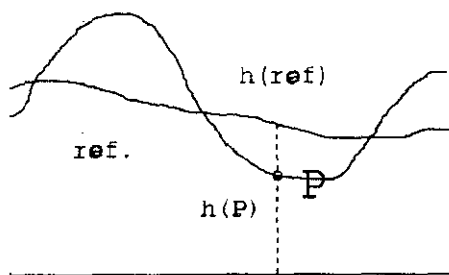


FIGURA 2.5: Corrección armónica

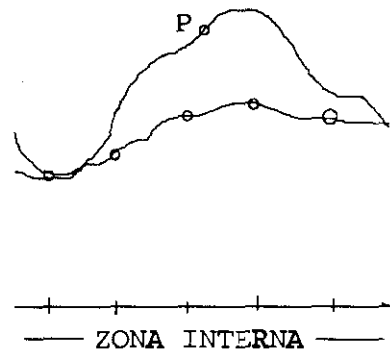


FIGURA 2.6: Modificación de altitudes del modelo digital en zonas cercanas.

DATOS DE TIERRA	MEDIA	D.TÍPICA	RANGO
ANOMALIAS AIRE LIBRE	8.36	23.03	198.47
A.A.L.-IFE88E2	-1.92	18.52	194.06
A.A.L.-OSU91A	-2.39	18.51	192.55
A.A.L.-IFE88E2-RTM	1.89	12.43	96.76
A.A.L.-OSU91A-RTM	1.42	11.69	77.70

TABLA 2.7: Estadística de los datos iniciales terrestres

DATOS DE MAR	MEDIA	D.TÍPICA	RANGO
ANOMALIAS AIRE LIBRE	10.29	19.26	100.48
A.A.L.-IFE88E2	-3.82	14.14	78.93
A.A.L.-OSU91A	-1.22	15.20	86.31
A.A.L.-IFE88E2-RTM	-2.83	14.44	82.15
A.A.L.-OSU91A-RTM	-0.51	12.88	76.77

TABLA 2.8: Estadística de los datos iniciales marinos

DATOS TOTALES	MEDIA	D.TÍPICA	RANGO
ANOMALIAS AIRE LIBRE	8.76	22.32	198.47
A.A.L.-IFE88E2	-2.29	17.75	194.06
A.A.L.-OSU91A	-2.15	17.89	192.55
A.A.L.-IFE88E2-RTM	0.94	12.99	96.92
A.A.L.-OSU91A-RTM	1.02	11.97	81.47

TABLA 2.9: Estadística del total de datos iniciales

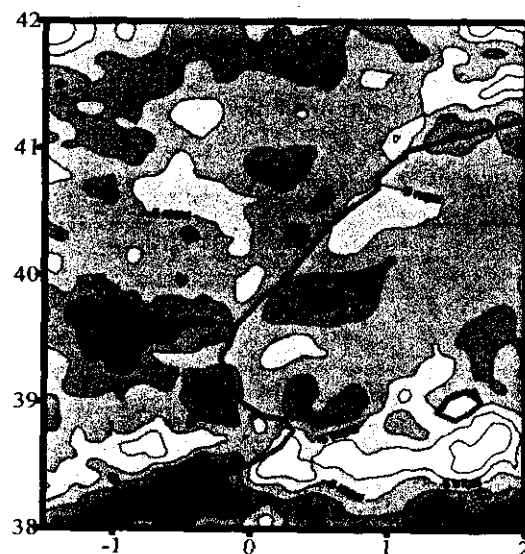


FIGURA 2.7: Curvas isoanómalas de datos reducidos a intervalo de 10 mgales.

7172 datos terrestres y 1841 datos marinos, aunque es fiable pues ocurre lo mismo cuando se considera toda la gravimetría de la Península Ibérica (Sevilla, 1994a y b).

2.5. FUNCION COVARIANZA

En el método de colocación consideramos la solución T_c buscada como un elemento

del espacio de Hilbert de funciones armónicas en el exterior de la esfera de Bjerhammar, regulares en el infinito, que nos vale para aproximar arbitrariamente bien T.

La norma de tal espacio se determina por un núcleo reproductor a ser posible isótropo, que permite expresiones finitas. Para los fines que pretendemos, en especial para obtener solución norma mínima, la elección más ventajosa de tal núcleo es la de la función covarianza del potencial anómalo. Además, si tenemos la covarianza de T, podremos obtener las de otras cantidades relacionadas con él por funcionales lineales usando la ley de propagación de las covarianzas.

Para conocer la función de covarianza deberíamos conocer T que es precisamente lo que queremos determinar y no se tienen observaciones directas de T. Por esto se usan otras cantidades relacionadas con el potencial para pasar de covarianza de las observaciones - en nuestro caso Δg - a covarianzas del potencial relacionado con ellas y recíprocamente. Para determinar la función covarianza de la observación a partir de valores de los datos se calcula la covarianza empírica por medio de integración numérica o de sumas.

2.5.1. Covarianza empírica

En general calculamos la covarianza entre dos magnitudes cualquiera y e y' como el valor medio del producto de sus valores en pares de puntos a igual distancia esférica ψ :

$$C(\psi) = \frac{1}{A} \int_{\lambda_1, \varphi_1}^{\lambda_2, \varphi_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} yy' d\alpha \cos\varphi d\varphi d\lambda \quad (2.26)$$

con A, tamaño del área sobre la esfera unidad y α , acimut y es una representación isótropa y homogénea. La integración analítica no es posible en la práctica al disponer sólo de observaciones en puntos discretos. Así, se reemplazan las integrales por sumas. Cada observación y_i es toda la información de que disponemos para una pequeña área A_i . Calculamos la covarianza como una media ponderada de productos de la forma:

$$C_k = \frac{\sum A_i A_j y_i y_j'}{\sum A_i A_j} \quad (2.27)$$

En el caso de que todas las zonas A_i sean de igual área, (2.27) se puede escribir como:

$$C_k = \frac{\sum y_i y_j'}{N_k} \quad (2.28)$$

con N_k el número de productos $y_i y_j'$ en el intervalo. Esta elección de zonas de igual área hace que todos los productos tengan igual peso.

En la práctica, los resultados obtenidos no tendrían ningún tipo de isotropía si se hubiesen considerado datos brutos. Sin embargo, esa anisotropía de la que están afectados disminuirá al eliminar de ellos los efectos de las masas topográficas y de un campo de referencia de orden alto, siendo el resultante, como se ha visto, un campo mucho más suave. Calculamos los valores empíricos usando (2.28), para la muestra seleccionada más homogénea, en cuanto a su distribución geográfica se refiere, que la inicial.

El proceso entonces consiste en, a partir de cero, calcular los productos entre observaciones existentes al ir considerando las distintas distancias incrementandolas según pasos de longitud fija. Se elige como óptimo aquel que proporcione un valor de covarianza

al considerar datos menos distantes entre sí que el paso elegido, menor que la varianza poblacional estimada pero próxima a su valor, y que para su cálculo entren un número de productos no excesivamente diferente pero no demasiado próximo al número de datos. En nuestra zona de aplicación y con la distribución existente de datos, elegimos como distancia esférica 5 minutos. Los valores obtenidos con los productos se asignan a la mitad de cada intervalo y a la altitud media del área que limitan.

Es importante que en el caso de que no exista ningún punto a la distancia considerada no se rellene el hueco con estimaciones a partir de los cercanos, ya que esto afectaría a la calidad de los resultados (Knudsen, 1987a).

2.5.2. Ajuste de la función covarianza

Con estos datos se intenta ajustar un modelo de función covarianza previamente determinado. En principio se trata de representar una función de covarianza local. Como tal entendemos a las que se calculan usando datos a los que se les ha quitado la contribución de un modelo de geopotencial. En este caso, K, función covarianza del potencial anómalo, admite un desarrollo en armónicos esféricos del tipo (Moritz, 1980):

$$K(\psi) = \sum_{n=1}^N \epsilon_n \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sigma_n \left(\frac{R_B^2}{rr'}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) \quad (2.29)$$

donde:

ϵ_n : error de las varianzas grado asociadas a los coeficientes del modelo que sirve como referencia tomado hasta orden y grado N.

σ_n : varianzas grado del potencial. Son constantes positivas. Representan las varianzas de los armónicos de Laplace de grado n.

R_B : radio de la esfera de Bjerhammar, que indica el dominio de armonicidad de la función.

rr' : distancias al origen de los puntos P y Q respectivamente.

ψ : distancia esférica entre P y Q.

P_n : polinomios de Legendre normalizados.

Para suponer válido este modelo, el campo al que representa la función se ha de comportar en media fuera del área de aplicación de forma similar al interior (Goad et al, 1984). Esto constituye otra justificación al hecho de quitar el efecto de la topografía alrededor de los puntos.

Al no disponer de valores de T, y sí de Δg , C, su covarianza en función de los polinomios de Legendre se obtiene por propagación a partir de la expresión (2.29). Así, el modelo empleado es:

$$C(P,Q) = \sum_{n=2}^N c_n \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n+2} P_n(\cos\psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sigma_n' \left(\frac{R_B^2}{rr'}\right)^{n+2} P_n(\cos\psi) \quad (2.30)$$

con R: radio medio de la Tierra.

$$c_n = ((n-1)/R)^2 \epsilon_n,$$

$$\sigma_n' = ((n-1)/R_B)^2 \sigma_n$$

Hay distintos métodos para determinar el valor de las varianzas grado. Los primeros intentos se deben a Kaula, que determinó los valores de las 30 primeras varianzas grado por ajuste mínimos cuadrados a partir de covarianzas empíricas, aunque no fueron del todo

satisfactorios, al resultar algunos valores negativos. Antes de continuar, puntualicemos que en principio su número es infinito, mientras que el número de datos de observación con los que contamos para su estimación siempre será finito, por lo que existirá una cierta incertidumbre en su estimación. Si se elige convenientemente el modelo de varianzas grado y se multiplican por expresiones potenciales de razón menor que uno, las covarianzas admiten una expresión finita que facilita su evaluación numérica. En nuestro caso (Tscherning y Rapp, 1974):

$$\sigma_n(T,T) = \frac{A}{(n-1)(n-2)(n+24)} \quad (2.31)$$

Con esta elección, el factor (n-1) desaparece al aplicar el funcional que proporciona anomalía de gravedad. El valor 24 de la expresión anterior se elige como consecuencia del tipo de cantidades que se maneja y si se trata de datos originales o calculados a partir de un modelo. Esta elección permite modelar de forma apropiada las varianzas grado de orden bajo, aunque ralentiza algo la convergencia cuando se estiman por procesos iterativos. Un defecto de este modelo es que si bien analíticamente funciona, no tiene una interpretación física clara, lo que puede dar al método carácter de mero algoritmo, perdiendo su sentido estocástico (Lauritzen, 1973).

A partir de los datos empíricos pasamos a estimar el valor de los parámetros del modelo de función covarianza de las anomalías de la gravedad:

$$c(P,Q) = a \sum_{n=2}^N c_n \left(\frac{R^2}{rr'} \right)^{n+2} P_n(\cos\psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A'(n-1)}{(n-2)(n+24)} \left(\frac{R_B^2}{rr'} \right)^{n+2} P_n(\cos\psi) \quad (2.32)$$

donde $A' = A \times 10^4 / R_B^2$.

El ajuste consiste sobre todo en estimar los valores de la profundidad de la esfera de Bjerhammar, orden de la función y factor de escala de las varianzas grado error del modelo de geopotencial mediante un procedimiento de estimación mínimos cuadrados iterativo, el primero de ellos de forma no lineal y los otros sí lineal. De esta forma, la función covarianza modelo ajustada que resulte estará en concordancia con las observaciones (Benziolini et al., 1984). En ocasiones, A se deja como valor fijo (Lauritzen, 1973).

Según la muestra de datos disponible puede ser más o menos complicado ajustar todos los parámetros de una forma bastante precisa. Por eso nos basamos en trabajos anteriores (Rodríguez-Velasco y Sevilla, 1993, Sevilla y Rodríguez-Velasco, 1992a y b) en los que se pretendió establecer la relación que existe entre el valor elegido de alguno de los parámetros y el resultado de las predicciones en las que interviene. En particular, se trató R_B (o $R-R_B$), ya que en este caso, no sólo es necesario para ver hasta qué punto un ajuste más fino del valor de tal parámetro dará lugar a una mejor calidad de la predicción, sino también para ver el efecto de la variación de la región de convergencia y por lo tanto, la posibilidad de mezclar predicciones para distintas zonas, cada una calculada para un valor de R_B distinto, o bien, como es el procedimiento usual cuando se trabaja con esquemas de división en zonas, utilizar para los cálculos la media de los radios obtenidos independientemente para así asegurar la convergencia del resultado en el mismo sitio.

Para hacer este estudio, se hicieron predicciones en las partes centrales de tres zonas de $2^\circ \times 3^\circ$ cada una en Portugal considerando el valor de todos los parámetros locales (es decir, los resultantes de ajustar una covarianza local), y los mismos salvo el radio de Bjerhammar, que se sustituye por el correspondiente de ajustar la función covarianza de una zona más grande que la incluya (todo Portugal). A este último lo llamamos radio regional.

De las diferencias obtenidas se puede concluir que siempre que el campo no sea excesivamente rugoso, la elección de la región de convergencia de los desarrollos es más un problema teórico que práctico a efectos de resultados. Las diferencias entre ellos son pequeñas, rara vez superan los 5 centímetros en el caso de ondulaciones del geode, y su distribución es simétrica respecto del cero. No se observan grandes diferencias si se selecciona R_B como un promedio de valores garantizados. Las mayores diferencias no se distribuyen según ningún criterio geográfico.

Hacemos mención especial al último parámetro de los que se ajusta, que es un factor que da una idea de la calidad del modelo respecto del comportamiento real del campo de gravedad en la zona local considerando el sistema de referencia también local. En este trabajo se presentan los primeros ajustes en los que hemos usado este factor, que denotamos a, como uno de los parámetros que intervienen, puesto que en los trabajos citados en Portugal, así como otros realizados en el Mediterráneo y en el centro de España (Sevilla et al, 1991b y c) no se incluyeron, suponiendo así que los coeficientes del modelo de geopotencial carecían de error.

El valor final resultante del ajuste de su valor es prácticamente cero en las muestras consideradas (ver tabla 2.12). Esto no quiere decir que no se tengan en cuenta las varianzas grado del modelo en la función covarianza, puesto que se ha trabajado con ellas en las primeras iteraciones de la aplicación de mínimos cuadrados hasta llegar al resultado del ajuste. Además, así lo ilustra el hecho de que los valores de los parámetros de ajuste difieren, para un mismo conjunto de datos, de tomar varianzas grado (suponer que a priori existen errores en los coeficientes del geopotencial), a suponer desde el principio del proceso de ajuste que no están afectados de error, o comenzar siempre los sumatorios en $N+1$ (ver tabla 2.10).

ZONA	TIPO DE AJUSTE	PARAMETROS DEL AJUSTE				
		R_B-R_E	ORDEN	A	C(0)	RUIDO
MAR	SIN a	-3.5931	217	611270	151.4912	0.676
	CON a	-2.8825	215	517272	150.9064	1.020
TIERRA A	SIN a	-2.7789	122	299173	120.9880	0.462
	CON a	-2.8000	122	299742	120.7331	0.684
TIERRA B	SIN a	-2.9186	126	289553	112.3486	0.089
	CON a	-2.9000	123	284511	112.0452	0.558
TODO A	SIN a	-2.8719	159	369315	128.5923	0.050
	CON a	-2.3903	150	319473	127.0534	1.240
TODO B	SIN a	-2.5486	158	338866	126.8229	0.026
	CON a	-2.4002	155	320470	125.1676	1.290

TABLA 2.10: Parámetros de ajuste de funciones covarianza sin y considerando errores en los coeficientes de geopotencial.

De todas formas, en general el factor de escala no se determina bien a partir sólo de valores de covarianzas de anomalías, puesto que está más correlado con R_B (Knudsen, 1987a). En cuanto al ajuste de este último parámetro, dado que el modelo no depende de forma lineal de él, es necesario hacer una linealización previa al ajuste y la mencionada aplicación del método de forma reiterada (en nuestro caso usamos siete iteraciones). A efectos prácticos, es mejor no usar el propio R_B que no es cómodo para el ajuste y sustituirlo por el parámetro profundidad del radio de Bjerhammar ($R-R_B$). Para este proceso hemos usado como base el programa COVFIT (Knudsen, 1987a, dentro del paquete GRAVSOFT, Tscherning et al., 1994c).

A la vista de la tabla 2.10., lo primero que se puede concluir es que en la zona dada y para los órdenes de ajuste que se tienen, las diferencias en los parámetros de ajuste de funciones covarianza no son demasiado grandes al considerar a los coeficientes del geopotencial afectados o no de errores salvo en el caso de datos mezclados en el que el ajuste de los parámetros sin tener en cuenta al parámetro a es problemático y de baja calidad. Un estudio detenido de tales diferencias nos hace ver que el orden del ajuste no varía de uno a otro ajuste o en todo caso disminuye al tomar varianzas grado. En general $C(0)$ disminuye al considerar a como un parámetro más al menos sobre la zona de estudio, pero las diferencias observadas son demasiado pequeñas como para concluir algo. Por otro lado, la profundidad del radio de Bjerhammar y el valor de A disminuyen en el mar y en los datos mixtos aunque de forma menos notable.

Finalmente, nos quedamos con los valores obtenidos al considerar a en el ajuste ya que se han tomado todos los coeficientes del geopotencial para reducir las anomalías dato, sabiendo que éstos están afectados de error y ésta es una manera de incluir de algún modo dichos errores.

2.5.3. Estudio comparativo entre funciones covarianza de datos terrestres y marinos

Dada la diferencia de densidades de masas existente y que la reducción hecha no es perfecta, el campo de gravedad debe ser distinto en zonas marinas que en zonas terrestres. Por lo tanto, si se pretende representar al campo por la función covarianza de datos de gravedad, se supone que las funciones que representen a los dos tipos de campos serán también de características distintas, así como la de una mezcla de datos de ambos tipos. Este hecho será importante para la aplicación del método de colocación, donde se usa la función covarianza como núcleo generador de las predicciones de cantidades relacionadas con el campo de la gravedad, ya que la función puede no ser lo suficientemente representativa.

A fin de estudiar las diferencias entre las características de las funciones covarianza de los distintos tipos de datos sobre la zona, se construyeron las funciones covarianza empírica de datos, sólo de tierra, sólo de mar y mezcla de los dos, y se procedió a su ajuste según el modelo presentado en el apartado anterior. Por la mayor cantidad de datos disponibles, la prueba de tierra se ha hecho con dos muestras de datos distintos con distribución similar, que llamamos zona A y zona B (ver apartado 2.6.). En cuanto a datos terrestres y marinos juntos, las zonas A y B corresponden a las zonas A y B de tierra a las que se añade la muestra de datos marinos, que para ambas es la misma.

Según la figura 2.8, donde se muestran las distintas covarianzas empíricas construidas a partir de las muestras de los datos, parece que en el caso terrestre se presentan más oscilaciones alrededor del valor cero. La covarianza en el cero es menor que en el caso de covarianza de datos marinos. En este último caso, desciende más rápidamente lo que muestra

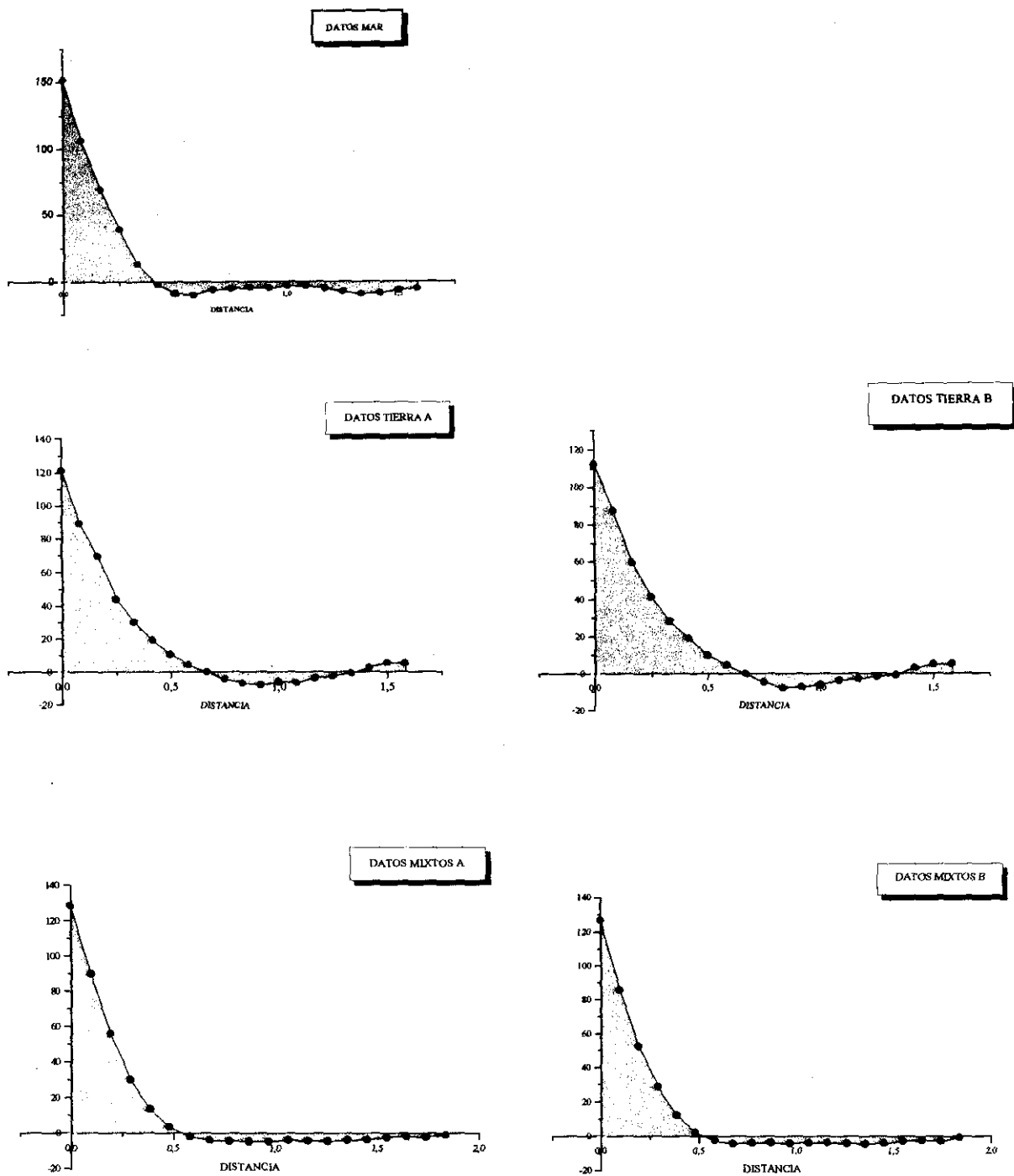


FIGURA 2.8: Covarianzas empíricas según la naturaleza de los datos.

que las cantidades están más descorreladas en cuanto aumenta la distancia. Por este descenso más suave de la correlación en el caso terrestre, el primer cero se encuentra más avanzado. También puede observarse esto en la tabla 2.11 donde aparecen los parámetros fundamentales de las covarianzas (Moritz, 1980): varianza, $C(0)$, o valor de la función para argumento cero,

que hace las veces de un cierto factor de escala para errores de interpolación, longitud de correlación o longitud ζ , para la que $C(\zeta)=C(0)/2$, y que describe como es la función covarianza para distancias medianas, y además, la longitud del primer cero que alcanza la función. Con esto, queda determinado el comportamiento de la función covarianza respecto de la interpolación (Schwarz y Lachapelle, 1980). Se ve que la longitud de correlación es más pequeña en el caso marino. Otra diferencia fácil de advertir es la menor presencia de valores negativos en el caso terrestre. Lo que sí es importante destacar es la similitud existente entre las covarianzas A y B del mismo tipo de datos. Esto indica que representan al campo en la misma zona como ya ha sido comentado. La función covarianza no dependerá de la muestra.

ZONA	TOTAL DATOS	Nº PUNTOS	MEDIA	C(0)	VAR.	1ºCERO	LONG. CORREL
MAR	1841	950	1.25	153.5	153.5	23'789	9'190
TIERRA A	3586	1021	2.29	122.9	122.9	40'273	11'769
TIERRA B	3586	1020	1.88	112.4	116.4	40'050	10'913
TODO A	5427	1558	1.99	128.6	131.7	33'093	10'199
TODO B	5427	1554	1.79	128.3	128.3	32'112	9'760

TABLA 2.11: Covarianzas empíricas de los distintos conjuntos de datos

	ORDEN	R_B-R_E	RUIDO	C(0)	A	a
MAR	215	-2.88	1.02	150.91	517272	10^{-6}
TIERRA A	122	-2.80	0.68	120.73	299742	0
TIERRA B	123	-2.90	0.56	112.05	284511	0
TODO A	155	-2.39	1.24	127.05	319417	10^{-6}
TODO B	150	-2.40	1.29	125.17	320470	10^{-6}

TABLA 2.12: Parámetros del ajuste de la funciones covarianza de los distintos tipos de datos

También encontramos diferencias en los parámetros del ajuste presentado en 2.5.2. como puede verse en la Tabla 2.12. En primer lugar, dada la proporción inversa existente entre longitud del primer cero y orden, la función covarianza modelo de datos marinos tiene orden mayor (prácticamente el doble). El valor de A es también significativamente mayor cuando se considera sólo mar. El factor de escala de las varianzas grado error del modelo se mantiene en todas cercano a cero en la séptima iteración del ajuste (no así en las primeras). Resulta en cierto modo lógico al observar los pequeños órdenes en los que se ajustan los modelos de covarianza, ya que los coeficientes de orden bajo grado son de mayor precisión y afectados de menor error.

Como conclusión, podemos advertir que dadas las diferencias entre el comportamiento del campo de gravedad en tierra y en mar reflejadas en las funciones covarianza que los

representan, las combinaciones entre ambos pueden dar lugar a resultados erróneos (una función covarianza puede no representar a la zona que pese a ser cercana, muestra características bastante distintas). Por otro lado, el procedimiento de separar siempre en mar y tierra, tampoco es totalmente recomendable para obtener resultados fiables, puesto que en los bordes, la covarianza representa con menor precisión dada la falta de datos en el entorno. Una mayor división en zonas terrestres y marinas multiplica los efectos de bordes de áreas. Por esto en posteriores estudios seguiremos evaluando las diferencias entre procedimientos elaborados sólo con datos terrestres, sólo con marinos y con los dos y así evaluar el efecto en los distintos procesos para la elaboración de un geoide gravimérico y la sensibilidad de cada uno de ellos a la naturaleza de los datos.

2.6. METODO DE VALIDACION. PREDICCIÓN DE ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS

Como se ha dicho ya, conviene como paso previo a cualquier tipo de cálculo, plantear algún procedimiento que depure los datos de posibles observaciones afectadas de error que estropearían los resultados. El proceso validatorio en este caso, se hizo por aplicación reiterada de la colocación mínimo cuadrática: usamos las estimaciones primeras de las funciones covarianza para predecir por este método en los mismos puntos de observación, que siempre que sea posible, no entran en los cálculos.

Las cantidades predichas se comparan con los valores de las anomalías reducidas (datos). De tal comparación resultan los puntos sospechosos de estar afectados de algún tipo de error. Para determinarlos es necesario fijar un nivel de tolerancia para las diferencias obtenidas, así como el número de reiteraciones convenientes para asegurar que el dato sea considerado como observación grosera. En tales reiteraciones, los puntos en donde se han obtenido diferencias grandes son retirados de la muestra seleccionada para generar la función covarianza. De no ser así la covarianza resultante reproduciría el error que afecta a las observaciones y sería más difícil detectarlo. De este modo se usa la posibilidad que tiene la colocación de filtrar datos. Para que el método sea más fiable, conviene que los datos a predecir no entren en los cálculos de las funciones covarianza con las que se hace la predicción.

2.6.1. Aplicación de la colocación mínimo cuadrática

Al trabajar con observaciones debe ser tenida en cuenta la existencia de errores en las mismas. La manera de hacerlo es añadir las varianzas de los datos a los elementos diagonales de $L_i L_j K(.,.)$. Con ello, se minimiza el error de observación.

La norma que se hace mínima es una norma híbrida constituida por la norma del espacio y el error medio cuadrático de los errores de observación (Krarup, 1969).

El valor predicho en nuestro caso, por (2.18) viene dado por:

$$\hat{s} = C_{sl} (C_{ss} + C_{rr})^{-1} \Delta g \quad (2.33)$$

donde C_{ss} es la covarianza de la señal, C_{rr} la del ruido, y C_{sl} la de la señal y la observación.

El método de colocación da directamente el error de predicción de la cantidad estimada, que informa de la precisión intrínseca del método.

La estimación del error medio cuadrático de una señal S, viene determinada por:

$$E_{ss} = C_{ss} - C_{ss}(C_{ss} + C_{rr})^{-1}C_{ss} \quad (2.34)$$

En el proceso de elaboración del geoides vamos a emplear el método de colocación dos veces: una primera para determinar anomalías de la gravedad con fines validatorios de los datos, y otra para la predicción de las propias ondulaciones del geoides.

2.6.2. Experiencias previas del método

La colocación se ha utilizado con anterioridad como método validatorio tal y como se ha comentado. Como ejemplo ilustrativo, hagamos mención a los trabajos con la gravimetría portuguesa.

El banco de datos que se analizó constaba de 3859 anomalías de la gravedad terrestres con distribución irregular. El método de colocación en este caso era especialmente apropiado por el carácter de distribución no homogénea de datos. En el caso de la gravimetría portuguesa, contrariamente a lo que se presenta en este trabajo, se producía una mejor reducción a nivel regional usando el modelo de geopotencial IFE88E2, aunque analizando localmente, esta tendencia no era constante. Otra diferencia en cuanto a la aplicación del método con el ejemplo que nos ocupa es que no se redujeron las anomalías de los efectos de la topografía por no disponer de un modelo digital de terreno lo suficientemente fiable que cubriera todo el territorio. Como resultado, el campo de la gravedad a modelizar no era tan suave como sería deseable, ni tampoco muy homogéneo. Esto puede apreciarse en el estudio estadístico de las anomalías así como en los parámetros de ajuste de las covarianzas que lo representan (Rodríguez-Velasco y Sevilla, 1992, Sevilla et al, 1992a y 1993).

La zona de estudio es marcadamente rectangular. Esto y el hecho de no tener un campo muy suave llevó a la conclusión de trabajar, no con todos los datos juntos, sino en zonas menos extensas en las que el campo presentase variaciones menos fuertes y pueda estar representado por la misma función covarianza. Se eligió usar tres zonas de $3^{\circ} \times 2^{\circ}$ cada una en las que el campo de gravedad no era excesivamente rugoso y a la vez se tenía una cantidad de datos suficiente para proceder a los cálculos. Se dividió cada una de ellas en dos subconjuntos A y B con distribución y cantidad de datos lo más parecida posible.

Las covarianzas empíricas se calcularon a una distancia esférica base de 5' tras probar otras posibles con las que se obtenían variaciones grandes en el número de productos mientras que la desviación típica variaba muy poco y de forma muy uniforme (del orden de 0,1 para una variación de 0'2 tanto al aumentar la distancia como al disminuirla). En cuanto a las funciones covarianza ajustadas, en el caso de Portugal se obtienen varianzas de la señal mayores y primer cero anterior que en el ejemplo presente. Los órdenes son por ello significativamente mayores (Tablas 2.13 y 2.14). En este caso el parámetro a no se incluyó en el ajuste de las funciones covarianza. De este modo se supuso que los coeficientes del modelo eran carentes de error. Otra razón para no elegir el modelo IFE88E2 en la prueba sobre la zona española fue la carencia de información sobre las varianzas grado de los coeficientes.

El criterio elegido en este caso para hacer la validación es de considerar posible observación grosera aquella que presente diferencias entre valor predicho y observado mayor que 26 miligales. Este valor es mayor que los elegidos en el caso presente, lo cual es lógico puesto que no se trataba de gravimetría totalmente reducida. Como se ha comentado, no se incluyó el efecto de la topografía. El proceso se reiteró tres veces para cada zona.

ZONA	N.PUNTOS	MEDIA	VARIANZA	1°CERO	CORREL.
1A	252	-0.74	347.3	4.57	13.26
1B	253	0.67	324.1	4.27	18.00
2A	285	2.79	184.2	5.36	15.34
2B	282	3.39	211.4	4.68	14.40
3A	192	4.12	169.8	3.58	11.72
3B	189	5.79	174.3	7.04	12.83

TABLA 2.13: Covarianzas de la gravimetría portuguesa

ZONA	V.SEÑAL	V.RUIDO	ORDEN	A	R-R _B
1.A	293.73	0.01	401	109243	-1.68
1.B	289.45	0.04	279	510085	-0.63
2.A	159.49	0.07	328	409632	-1.21
2.B	184.71	0.19	350	375109	-0.71
3.A	159.43	0.10	468	787338	-2.22
3.B	164.21	0.08	450	1001088	-12.00

TABLA 2.14: Portugal. Covarianzas ajustadas

RESULTADOS DE LA VALIDACION:

Nº puntos validados: 3859
Datos groseros: 120 (3,1%)
Datos válidos: 3739 (96,9%)

En cuanto a la distribución geográfica de las observaciones groseras, cabe destacar que si bien no se puede hablar de alguna tendencia clara, se presentan sobre todo en el norte y en el sur y no en el centro.

2.6.3. Validación

Como base de un estudio que se desarrollará más detenidamente en el siguiente punto, el proceso validatorio se hizo de varias formas para ver el distinto comportamiento de las predicciones obtenidas según se hagan usando datos marinos o terrestres así como mezcla de ambos. Se espera tal comportamiento distinto a la vista de lo diferentes que resultaban sus funciones covarianzas como ya se vió en el apartado anterior, es decir, el campo de anomalías es bastante distinto de uno a otro caso y, por lo tanto, la función no puede reproducir bien a las anomalías en toda la zona.

El número de iteraciones del método y el nivel de tolerancia para las diferencias obtenidas se determinaron de forma distinta según el tipo de validación ensayada a la vista de los resultados obtenidos.

Validación de datos marinos por separado

Ya se ha comentado que la forma más eficiente de llevar a cabo la validación es prediciendo sobre puntos que no intervienen en la génesis de la función covarianza ni se toman como datos. Esto no es posible en el caso de datos marinos dada la densidad insuficiente con la que contamos y se predice sobre los mismos puntos de la muestra elegida para evaluar la función covarianza. El número total de datos es 1841 y de ellos se han seleccionado 950 para construir la función covarianza (a 5').

Los resultados obtenidos al comparar anomalías dato con anomalías predichas más modelo y efectos de la topografía se muestran en la tabla 2.16 y la distribución de los puntos donde aparecen diferencias grandes en la figura 2.9.

Los puntos que aparecen en esta primera aplicación del método no formaban parte de la muestra seleccionada para elaborar la función covarianza, luego no pueden afectarla de sus posibles errores. Por ello, si se repite el proceso, de nuevo se encontrarían los mismos puntos como posibles observaciones groseras.

En la figura 2.9, se ve que los puntos que destacan como posibles observaciones groseras están en las trayectorias de los barcos (mayor concentración de datos). Puede ser que, por la escasa cantidad de datos, las predicciones dependan mucho de la muestra seleccionada y se tengan diferencias en los puntos que no han entrado en ella. Esto explicaría el que los supuestos errores no estén en la muestra. O bien, puede que se dé algún problema de datum distinto entre el banco de datos del Mediterráneo y la gravimetría de los barcos. Las diferencias obtenidas son bastante pequeñas. En ningún caso alcanzan los 30 miligales.

La experiencia fija el porcentaje de datos considerables como groseros de un banco de datos de las características de los usados en esta aplicación entre el 1 y 3% (Arabelos; 1989, Tscherning, 1982, Sevilla et al, 1991 a,b y c). Esto, unido a que la precisión de datos marinos se estima en unos 6 miligales y que la reducción de efectos topográficos no se ha hecho con un modelo batimétrico de gran fiabilidad, nos lleva a pensar que en este caso, fijar

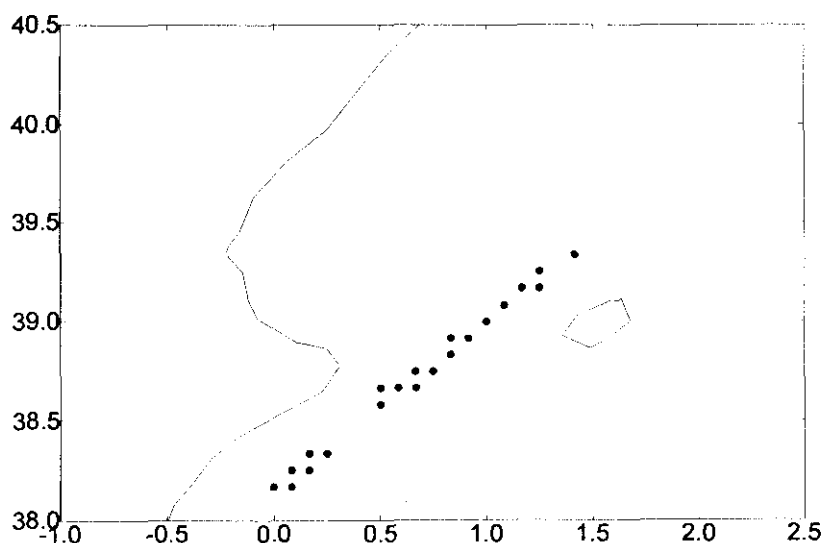


FIGURA 2.9: Distribución de las posibles observaciones groseras marinas

como nivel de tolerancia para las diferencias 10 miligales puede ser excesivo. Por esto consideraremos como observaciones posiblemente afectadas de errores groseros a las que resulten con diferencias grandes al comparar con las anomalías originales fijando el límite de las diferencias en 15 miligales. Aparecen por lo tanto, 30 supuestos errores, lo que supone el 1,63% del total. Respecto a la calidad de las reducciones de la topografía efectuadas, al revisar los valores de éstas se ve que alcanzan valores bastante grandes para tratarse de efectos residuales sobre una zona marina. Por ello, se hizo una prueba de validación considerando como datos de entrada, no las anomalías totalmente reducidas, sino las que les ha sido eliminado sólo el efecto del modelo de geopotencial (aunque a efectos estadístico, el reducir la topografía sí que produce un suavizamiento del campo de las anomalías). Con ello se podrá ver si las observaciones consideradas como posiblemente afectadas de error son tales, o si las diferencias se pueden deber a un valor malo de la reducción de la topografía.

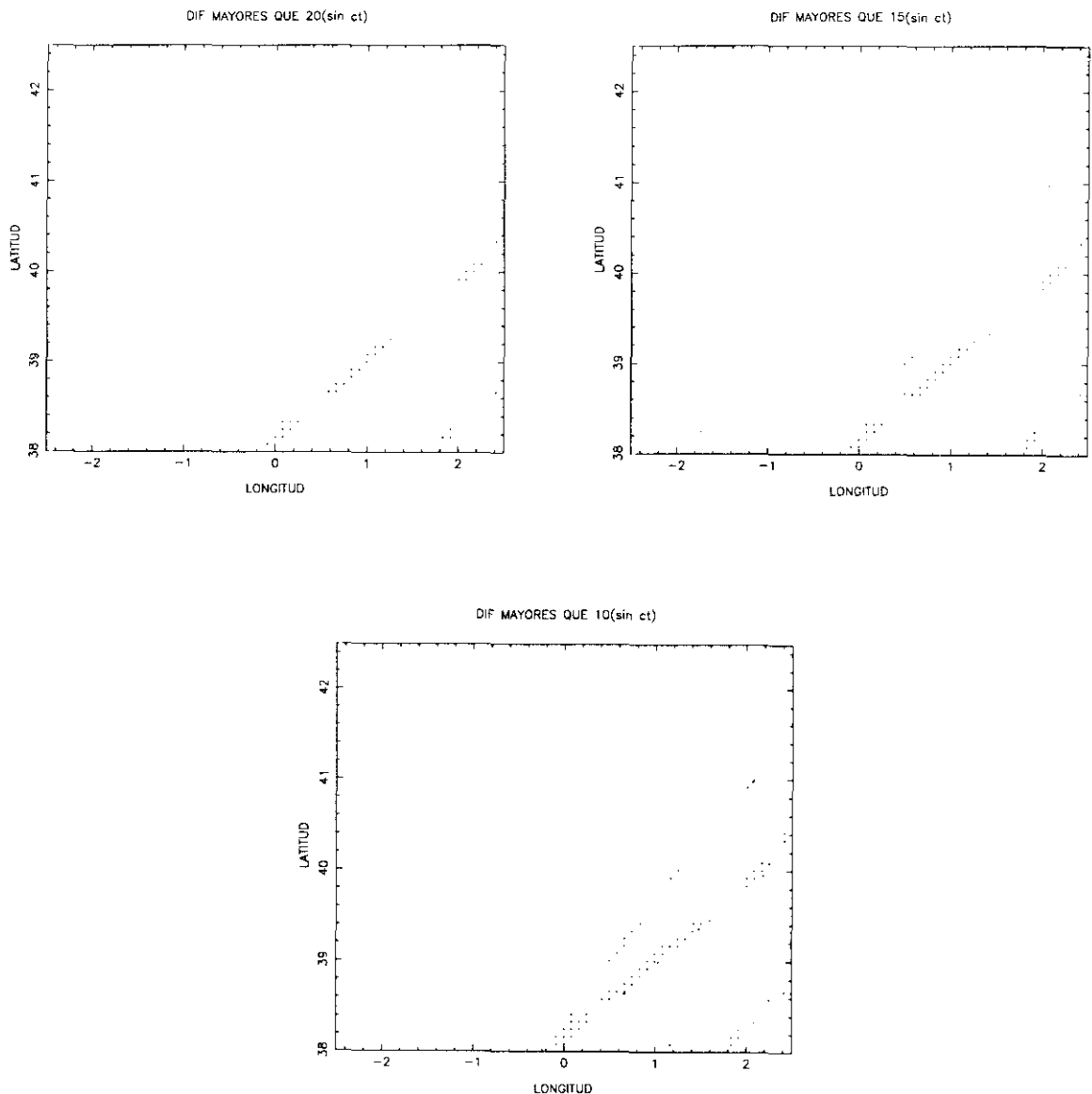


FIGURA 2.10: Distribución de las posibles observaciones groseras marinas detectadas en la validación sin efectos topográficos.

R-R _B	C(0)	RUIDO	A	a	N	1°CERO
-4.600025	206.5357	0.42	1206927	0	266	19'92

TABLA 2.15: Parámetros de ajuste de la función covarianza de anomalías marinas menos contribución del modelo de geopotencial

La covarianza obtenida con estas cantidades es una función con un dominio de armonicidad menor (mayor profundidad del radio de Bjerhammar), el primer cero se alcanza antes y por lo tanto, tiene un orden algo más grande. Los valores de C(0) y de A son bastante mayores que si se consideran anomalías totalmente reducidas.

Los resultados de esta validación se muestran en la tabla 2.16 así como los comunes con la validación anterior. La distribución de los puntos con diferencias se muestra en la figura 2.10. En ella se puede apreciar más la tendencia de las observaciones supuestamente erróneas a agruparse alrededor de las trayectorias de los barcos.

DATOS MARINOS (1841)	SIN TOPOGRAFIA	CON TOPOGRAFIA	COMUNES
DIF.MAYORES QUE 20 MGALES	33 (1,79%)	10 (0,54%)	8
DIF.MAYORES QUE 15 MGALES	44 (2,39%)	30 (1,63%)	13
DIF.MAYORES QUE 10 MGALES	77 (4,18%)	64 (3,48%)	54

TABLA 2.16: Resultados de la validación de datos sólo marinos.

Validación de datos terrestres por separado

Previamente a continuar el proceso, y aprovechando la ocasión del método de la validación de datos, se estudió hasta qué punto es justificable el trabajar con la mezcla de fuentes con que se había venido haciendo. Para ello lo que se hizo fue validar, usando como puntos dato los de la fuente número 2, gravimetría española, los de las otras fuentes (BGI, DMA, nuevos españoles y red). El hecho de elegir la número 2 como dato no se debió a que se suponga a priori la más precisa, sino a que es de la que se tiene más información sobre la forma de compensación de itinerarios y todos aquellos factores que nos den idea de su grado de precisión. De este modo se vió hasta qué punto se podían mezclar las fuentes y si el comportamiento de ellas puede ser reproducido de forma similar por funciones covarianza generadas por otras distintas o si por el contrario habría algún tipo de problemas relacionados con datums, transformaciones o gran discrepancia de precisiones que no aconsejara su mezcla.

En el total de datos terrestres aparecieron 3519 de la gravimetría española y 3653 de otras fuentes. De los primeros se extrajo una muestra de puntos a una distancia aproximada de 5' con 1092 puntos. Lo primero que se advirtió es la proximidad de los valores de los parámetros de ajuste de su función covarianza con los de las funciones calculadas con todos

los datos terrestres sin diferenciar fuentes. Los resultados obtenidos en la validación fueron:

<u>Total de datos : 3653 puntos</u>	<u>BGI</u>	<u>DMA</u>	<u>IGN</u>
<i>Difs.mayores que 20 miligales</i> 14 (0,38%)	11	3	0
<i>Difs.mayores que 15 miligales</i> 34 (0,93%)	22	10	2
<i>Difs.mayores que 10 miligales</i> 93 (2,55%)	52	39	2

A la vista de los resultados se puede concluir que dado el pequeño número de observaciones detectadas como groseras en la validación, las fuentes son combinables a efectos de precisión y de comportamiento de la función covarianza.

Una vez comprobada la posibilidad de mezclar las fuentes de datos dadas, se pasó a validar el total de datos terrestres. La zona que se quiere validar cuenta con un banco de datos bastante grande. Por ello, es posible hacer la validación de forma óptima en cuanto a aplicación de colocación con este fin: los datos que entran en la predicción no incluyen aquéllos que se validan. Para hacer esto se separan los datos en dos bloques que llamamos A y B, con un número aproximadamente igual de puntos y con distribución geográfica similar. Ya que ambos conjuntos de datos se seleccionan sobre la misma zona y que la función covarianza empírica debe ser independiente de la muestra elegida para su cálculo, las funciones covarianza de los dos bloques han de tener un comportamiento similar (representan al campo en la misma zona). Así predecimos valores de las anomalías en B con la función covarianza calculada a partir de los valores de A y datos de A y viceversa.

Las zonas A y B tienen cada una 3586 puntos y las muestras extraídas son de 1021 y 1020 puntos respectivamente.

En la primera iteración del método no se encontraron muchas posibles observaciones groseras. La mayor parte de ellas se encontró cerca de la costa, lo cual puede deberse no a que la observación sea errónea sino a que no se ha contado con datos suficientes a su alrededor para hacer la función covarianza. Las diferencias obtenidas son en media muy pequeñas, salvo dos casos puntuales donde se alcanzan valores de 51 y 46 mgales, ambos casos cerca del borde de la zona.

Comparando los resultados de esta validación con la efectuada anteriormente para ver la compatibilidad de las fuentes entre sí, se encontraron 105 puntos de las fuentes distintas de la gravimetría española donde se dieron diferencias mayores que 10 miligales. De ellos, 61 aparecieron en la validación anterior, lo cual supone un 58,1% del total.

Como no resultaron muchas observaciones supuestamente groseras y la precisión asignada a priori a las observaciones es mayor que en datos marinos, para hacer la segunda iteración del método se eliminaron los puntos con diferencias mayores que 10 miligales entre valor observado y predicho. Las diferencias obtenidas en esta segunda aplicación son bastante menores que en el caso anterior. Se muestran los resultados en la tabla 2.17.

En ambos casos, la distribución geográfica de los puntos detectados es aleatoria y no parece indicar que alguna de las fuentes sea mala o problemas locales con los datos.

Entre los resultados de una y otra validación tomando diferencias mayores que 10 miligales, existen 141 puntos comunes, lo que significa un 1,97% del total de puntos validados y el 75,47% de los puntos resultantes en la primera iteración. Dado que no supone un gran número de datos y que el principal objetivo de la validación es eliminar observaciones afectadas de error pero sobre todo asegurando que los restantes son de buena calidad, no se consideró necesario repetir el proceso una tercera vez. Si el número de datos a eliminar fuese mayor, no se habría optado por esta elección y se repetiría otra vez más.

DATOS TERRESTRES (7172)	1ª ITERACION	2ª ITERACION
DIFERENCIAS MAYORES QUE 20	46 puntos (0,64%)	34 puntos (0,47%)
DIFERENCIAS MAYORES QUE 15	88 puntos (1,23%)	66 puntos (0,92%)
DIFERENCIAS MAYORES QUE 10	212 puntos (2,96%)	160 puntos (2,23%)

TABLA 2.17: Resultados obtenidos en la validación de datos terrestres.

Validación de datos de los dos tipos a la vez

En esta ocasión el número de datos disponibles es suficientemente grande para hacer división en zonas A y B aunque ambas cuentan con los mismos puntos marinos. Cada una de ellas tiene 5427 puntos y las muestras seleccionadas son de 1558 y 1554 respectivamente. Por la distinta naturaleza de los datos que las componen (terrestres y marinos) y sus distintos comportamientos en cuanto a función covarianza se refiere, la covarianza de datos mixtos presenta una tendencia intermedia entre las de uno y otro tipo. Posiblemente sea éste el motivo por el que, al no ajustarse del todo a la forma de funciones covarianza de datos ni terrestres ni marinos, aparecen muchos más puntos en la validación como afectados de errores.

Entre ellos hay una clara mayoría de puntos marinos mientras que la validación de éstos por separado no condujo a pensar que éstos sean especialmente de mala calidad. Dado que hay más puntos de tierra, puede ser que aparezcan no porque sean en realidad erróneos sino porque la covarianza esté más influida por los datos terrestres. Por otro lado, en cuanto a éstos se refiere, al comparar los resultados obtenidos validando sólo tierra con tierra y los que aparecen en esta validación, se encuentran grandes discrepancias: con diferencias mayores que 10 miligales aparecen 105 puntos comunes entre las dos validaciones. Esto significa un 1,46% de los datos terrestres, sólo el 49,53% de los detectados en la primera vuelta de validación en tierra (sólo se reiteran la mitad de los datos).

Como resultado podemos concluir que la validación por colocación tal y como la hemos ensayado en los ejemplos anteriores, no es una buena alternativa en el caso de mezcla de datos terrestres y marinos. En tal caso, el modelo de función covarianza no debe elegirse como hasta ahora sino que funcionaría mejor algún otro, así como la norma que pretende minimizarse que debería de ser una norma construída de otra manera. A los datos no se les supone igual precisión a priori, luego no se les puede asignar peso unidad, aunque representen áreas iguales. Por el tipo de reducción de efectos topográficos efectuada (modelo residual de terreno), los dos conjuntos de datos pueden no ser muy combinables entre sí para predecir anomalías de gravedad por colocación, pese a que la teoría de correcciones de terreno residuales así lo expresa. Pudiera ser distinto si se hubiera practicado corrección topográfica y reducción de efectos isostáticos.

Los resultados de la validación ensayada se muestran en las tablas 2.18 y 2.19 y una estadística de los datos validados en la tabla 2.20. Se refieren a datos totales. No aparecen diferencias importantes entre las llamadas zona A y zona B. Finalmente, podemos concluir tras todas estas pruebas, que la validación de anomalías gravimétricas con el método de colocación se debe hacer separando datos marinos por un lado y terrestres por otro. Dentro

TOTAL DE DATOS (9013 PUNTOS)	
DIFERENCIAS MAYORES QUE 20 MGALES	46 PUNTOS (0,51%)
DIFERENCIAS MAYORES QUE 15 MGALES	103 PUNTOS (1,14%)
DIFERENCIAS MAYORES QUE 10 MGALES	319 PUNTOS (3,54%)

TABLA 2.18: Diferencias obtenidas en la validación de todos los datos juntos.

TIPO DE DATOS	TOTALES	VALIDADOS	ELIMINADOS
MAR	1841	1811	30 (1,63%)
TIERRA	7172	7031	141 (1,97%)
TODO JUNTO	9013	8842	171 (1,90%)

TABLA 2.19: Resultados finales de la validación.

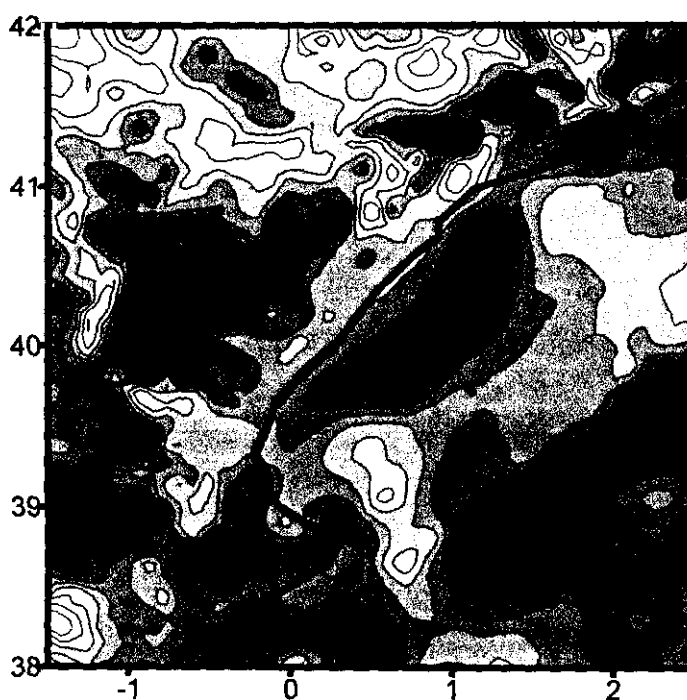


FIGURA 2.11: Curvas de anomalías validadas.

de esto, se debe mantener (dependiendo de las precisiones de los datos) un nivel de tolerancia mayor para datos marinos que para terrestres (en nuestro caso de 10 a 15 miligales).

A la vista de la tabla 2.20 se puede apreciar que los valores de la estadística en el caso marino no difieren mucho de antes a después de la validación. Sin embargo, en el caso de datos terrestres y de los dos tipos juntos, se pierden con la validación algunos puntos donde se alcanzaban valores mínimos por lo que se suaviza la media y disminuyen la desviación típica y el rango de variación, aunque de forma muy ligera.

DATOS MARINOS (1811 PUNTOS)	MEDIA	D.T.	MIN	MAX	RANGO
Δg AIRE LIBRE	10.17	19.26	-32.10	68.38	100.48
Δg MODELO	11.52	12.22	-16.91	56.39	73.30
Δg MENOS MODELO	-1.35	15.16	-41.34	44.97	86.31
Δg -MOD-TOPOG	-0.60	12.92	-38.81	37.96	76.77

TERRESTRES (7031 PUNTOS)	MEDIA	D.T.	MIN	MAX	RANGO
Δg AIRE LIBRE	8.27	22.89	-48.61	133.50	182.11
Δg MODELO	10.69	13.87	-22.42	51.87	74.29
Δg MENOS MODELO	-2.42	18.26	-51.37	109.54	160.91
Δg -MOD-TOPOG	1.37	11.54	-34.43	40.65	75.08

JUNTOS (8842 PUNTOS)	MEDIA	D.T.	MIN	MAX	RANGO
Δg AIRE LIBRE	8.66	22.21	-48.61	133.50	182.11
Δg MODELO	10.86	13.55	-22.42	56.39	78.81
Δg MENOS MODELO	-2.20	17.68	-51.37	109.54	160.91
Δg -MOD-TOPOG	0.97	11.86	-38.81	40.65	79.46

TABLA 2.20: Análisis estadístico de los puntos validados.

2.6.4. Comportamiento de la predicción por colocación de Δg

A partir de los resultados presentados en la sección anterior, se ha desarrollado un estudio de la colocación mínimos cuadrados como método de predicción de anomalías de gravedad a partir de la misma cantidad como dato. Tal y como se hizo a efectos validatorios, se comparó el comportamiento de las zonas según se trate de marinas, terrestres o mixtas.

Datos marinos

Al hacer la predicción de anomalías de la gravedad marinas a partir de datos sólo marinos, se observa, en primer lugar, que la predicción está bastante afectada por los datos que entran en la muestra para generar a la función covarianza. Esto puede deberse no al método en sí mismo sino a la menor disponibilidad de datos en el mar. En general se aprecia una tendencia a que las anomalías predichas sean ligeramente más pequeñas que las anomalías dato aún sin llegar a diferir en grandes cantidades.

Datos terrestres

En este caso, quizá por la cantidad superior de observaciones disponibles y la mayor precisión de las mismas, resulta que reproducen el campo de anomalías con una mayor fiabilidad, lográndose diferencias con las dato muy pequeñas salvo en casos puntuales. Por el contrario al caso marino, en tales diferencias no se aprecia una tendencia de signo.

Datos mezclados

Tal y como se vió en el estudio de la validación, la aplicación de la colocación como método de predicción de anomalías contando como dato con observaciones de Δg tanto en tierra como en mar no es un método fiable. Las observaciones de ambos tipos, reducidas como se ha hecho no dan lugar a buenas predicciones. No se reproducen las observaciones dadas con igual exactitud a los dos casos anteriores. El motivo de esto, posiblemente es el distinto comportamiento de las funciones de covarianza de uno y otro tipo de datos así como la no homogeneidad de ambos, tanto en lo que a precisión se refiere, como al haber efectuado la reducción de los efectos topográficos considerando los efectos residuales respecto de una superficie de referencia media. Pone en evidencia el hecho de que Δg está dominada por las cortas longitudes de onda del campo de gravedad y por lo tanto está muy relacionada con datos gravimétricos medidos y con la información sobre la topografía.

De todo lo dicho anteriormente se deduce que no se deben mezclar tipos de datos para hacer predicciones de gravedad y será mejor usar datos terrestres para predicciones en tierra y marinos para hacerlo en mar.

A continuación se presenta un estudio para cuantificar las diferencia que se pueden obtener al no hacerlo así. Estimamos la precisión del método en 15-20 miligales, límites que se establecieron al hacer la validación puesto que se reiteraban la obsevaciones por encima de estos niveles.

Las pruebas consistieron en determinar tres cuadrículas de anomalías de gravedad sobre los mismos puntos, de 5' de espaciamiento, medio grado interior a la zona de estudio. El total de anomalías calculadas es de 1369. Tras esto, se evaluaron las diferencias entre ellas, así como la distribución de la mismas y posibles relaciones entre signo, cuantía y localización o carácter de datos. Se presentan a continuación los resultados obtenidos.

A. Diferencias obtenidas entre anomalías calculadas con datos terrestres y marinos

Las diferencias en este caso, como es lógico, son las mayores de las tres pruebas efectuadas, probando así que las anomalías no son extrapolables de un tipo de zona a otra. Pueden alcanzar (en un caso) los 40 miligales. Una primera observación es que las mayores diferencias se encuentran agrupadas. Se alcanzaron diferencias mayores que 30 miligales en 21 puntos, la mayoría de ellos en el mar. De estos puntos, en 12 la anomalía calculada con datos de tierra es menor que la calculada con datos de mar. Todos ellos se encuentran en tierra (Figura 2.12.) en una zona que en las pruebas siguientes se ve que da problemas. En el resto, la anomalía calculada con datos terrestres es de menor cuantía, que la que usó datos marinos y se encuentran en el mar. Se obtuvieron diferencias mayores que 20 miligales en 99 puntos y se sigue manteniendo la tendencia de los puntos con mayor anomalía usando datos de mar de estar en tierra y al contrario en mar (Figura 2.13).

Concluimos que se obtienen diferencias bastante grandes si se calcula de una u otra forma de las estudiadas (por encima de la precisión probada del método sobre la zona de

aplicación). Parece también que si se calculan anomalías de gravedad con datos fuera de la zona, los resultados son más grandes que su valor.

B. Diferencias obtenidas entre anomalías calculadas con datos terrestres y con el total de datos

En total se obtienen menos puntos con grandes diferencias que en la comparación anterior aunque la cuantía de éstas no es menor llegando de nuevo a alcanzar 40 miligales en el mismo caso que en A.

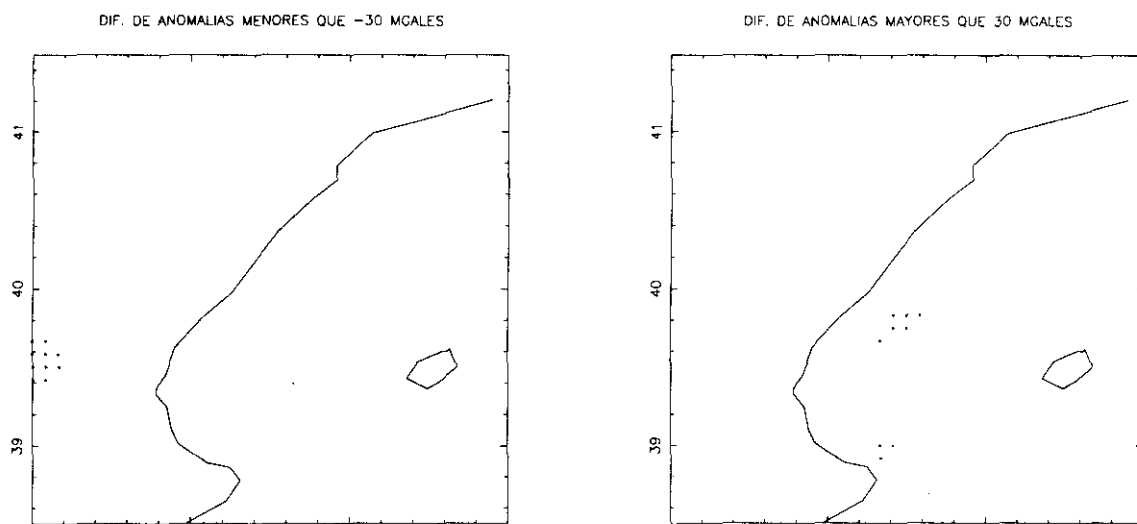


FIGURA 2.12: Diferencias por encima de 30 miligales entre Δg calculadas con datos terrestres y con datos marinos.

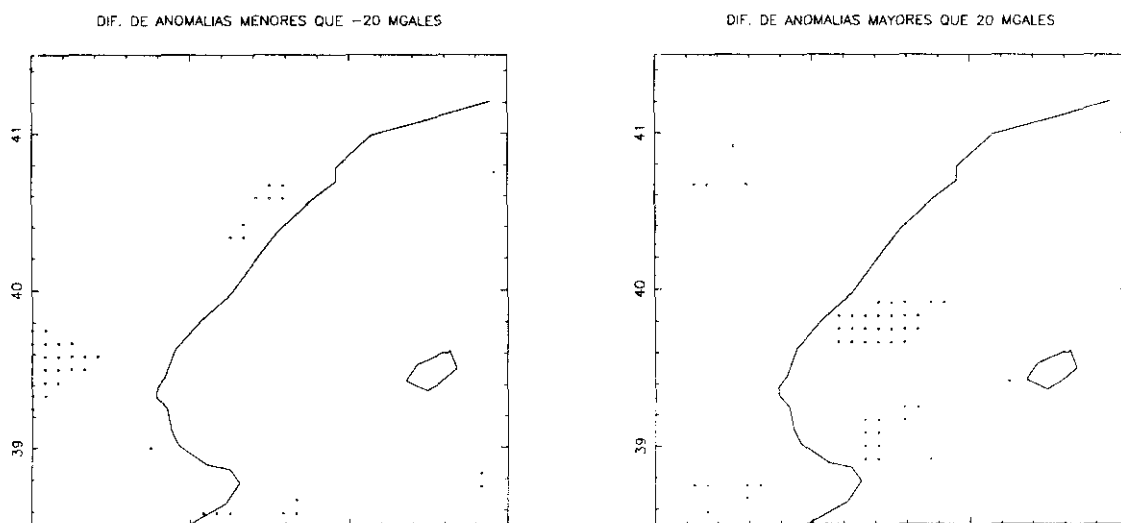


FIGURA 2.13: Diferencias por encima de 20 miligales. Distribución atendiendo a su signo.

Se tienen 10 puntos con diferencias entre predicciones mayores que 30 miligales y en todos ellos la predicción con datos de ambos tipos es mayor que la hecha sólo con datos terrestres. Todos ellos se encuentran en tierra y no próximos a la costa (Figura 2.14).

A la vista de tal resultado se podía pensar en la existencia de algún tipo de sesgo entre predicciones. Al hacer menor el valor de diferencias estudiadas -20 miligales-, aparecen 46 puntos. Obsérvese que son muchos menos que en el caso anterior. Siguen apareciendo 31 puntos en los que la predicción con datos mixtos es mayor a la obtenida con datos de tierra y todos ellos de nuevo se encuentran en el mar. Los 15 restantes en los que la predicción hecha con datos terrestres es mayor, aparecen tanto en tierra como en mar (Figura 2.15).

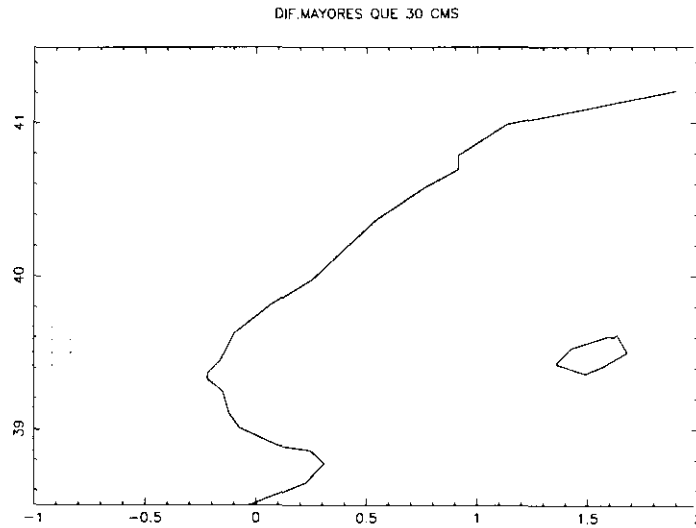


FIGURA 2.14: Diferencias superiores a 30 miligales.

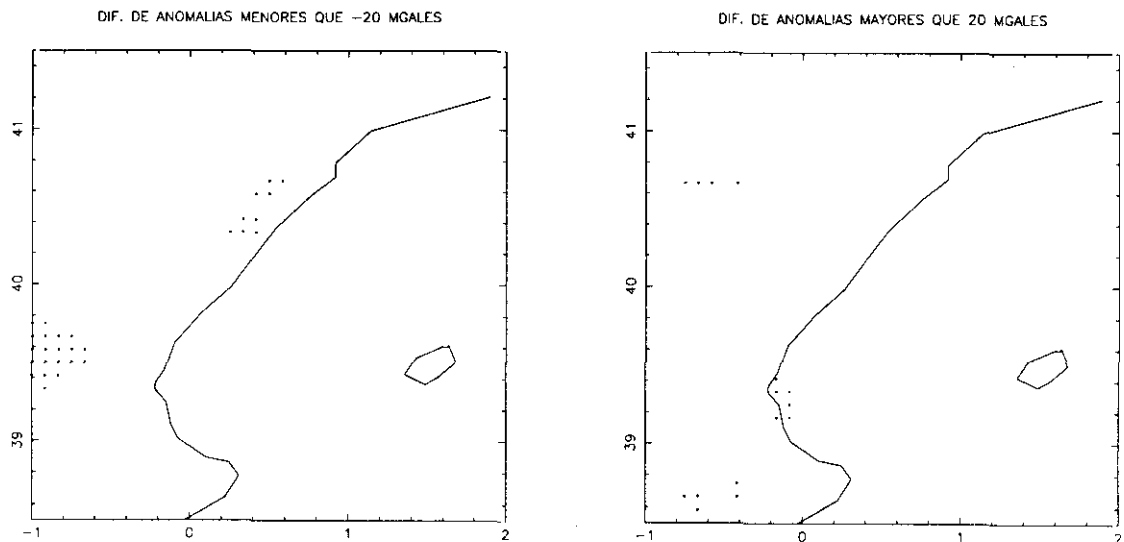


FIGURA 2.15: Diferencias mayores en valor absoluto que 20 miligales y distribución según su signo.

Podemos concluir que hay menos puntos con grandes diferencias al comparar Δg obtenidas con datos terrestres y con datos mixtos que en el caso anterior, pero éstas pueden seguir alcanzando valores de hasta 30-40 miligales en algunas ocasiones. Parece que se sigue advirtiendo la tendencia a predecir anomalías grandes cuando se usan datos fuera de la zona.

C. Diferencias obtenidas entre anomalías calculadas con datos marinos y mixtos

En este caso nos va a interesar la parte marina puesto que ya vimos que los datos de mar no producen buenas predicciones en tierra.

En la comparación no se obtienen muchas diferencias y la cuantía de éstas no llega a los valores máximos de los ejemplos anteriores. Sí que aparecen valores de 30 miligales. De los 1369 puntos comparados este caso se da en 8 puntos. De ellos 6 están en el mar y en todos ellos la anomalía predicha con datos marinos es menor que con datos mixtos.

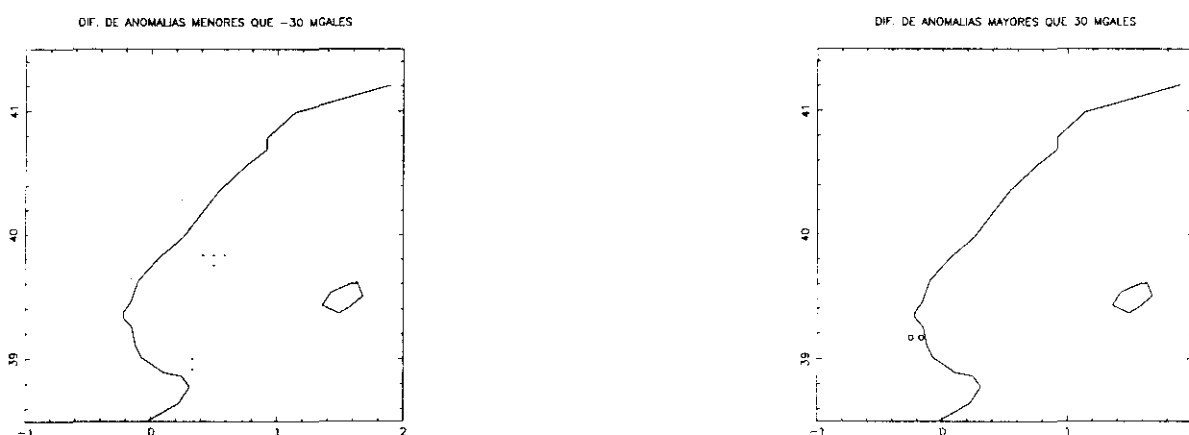


FIGURA 2.16: Distribución de las diferencias superiores a 30 miligales atendiendo a su signo.

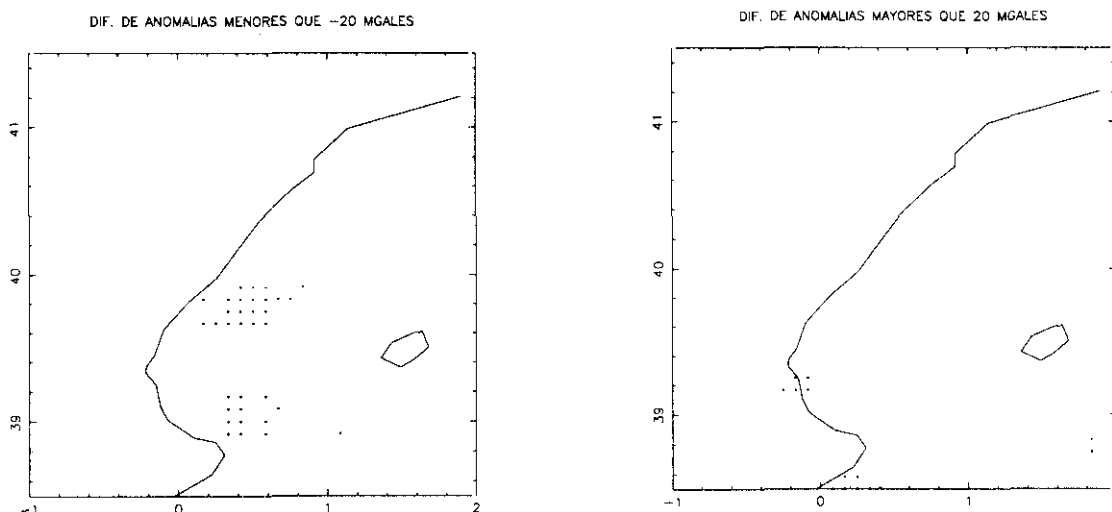


FIGURA 2.17: Distribución de las diferencias superiores a 20 según su signo.

Se obtienen diferencias mayores que 20 miligales en 50 puntos, la mayoría de ellos se encuentran en el mar y en la mayor parte de ellos vuelve a aparecer la tendencia de obtener anomalías mayores usando muestras de datos que no sean del tipo de las predichas - en este caso anomalías marinas- puesto que así encontramos a 34 de los 50 puntos estudiados.

2.7. CONCLUSIONES Y RESULTADOS

En este capítulo se han presentado:

1. Análisis estadístico de los datos sobre la zona seleccionada tanto originales como una vez realizadas las reducciones de la gravedad de un modelo de referencia y de los efectos topográficos. De este estudio se puede concluir que se produce en efecto, un suavizamiento del campo de la gravedad tras reducir las observaciones de los efectos mencionados.

2. Estudio sobre la zona y con la densidad de datos dada, del orden óptimo de truncamiento del modelo de geopotencial a la hora de eliminar sus efectos sobre la gravimetría. En este punto encontramos diferencias entre datos marinos, donde parece ser conveniente hacer un truncamiento en un orden y grado anterior a 360 y suplir si es necesario con gravimetría local, y datos terrestres, donde un orden superior da lugar a una estadística que refleja el comportamiento más suave del campo.

3. Justificación del hecho de mezclar distintas fuentes de datos para ampliar el banco gravimétrico original.

4. Resultados de una validación efectuada usando la colocación mínimo cuadrática siendo eliminados como posibles errores el 1,90% de los datos validados.

5. Estudio paralelo sobre los puntos 1, 2 y 4 según se trate de datos marinos, terrestres o unión de los dos que han intervenido en los procesos presentados. Como principal conclusión respecto a este punto, tenemos que el comportamiento, tanto estadístico como a efectos de predicción, es muy distinto de uno a otro caso y que la predicción por colocación de anomalías de gravedad a partir de la misma cantidad como dato de entrada, debe hacerse por separado con marinos y terrestres cuando se lleve a cabo en zonas que como ésta, tenga una parte el mar y otra en tierra. Esta conclusión se completa con una estimación de los errores que se pueden obtener de no hacerse así, que llegan a alcanzar unos 30 miligales.

PREDICCIÓN DE UN GEOIDE GRAVIMÉTRICO CON COLOCACION

En este capítulo se va a presentar un primer resultado de geoide gravimétrico sobre la zona elegida de pruebas, obtenido por el método de colocación mínimo cuadrática. Prosiguiendo el estudio comenzado en el capítulo anterior sobre el distinto comportamiento de las predicciones dependiendo de la naturaleza y origen de los datos, se presentan algunos resultados comparativos que nos sirven para evaluar tales diferencias y concluir metodologías de combinación de datos, sobre todo a efectos de trabajo en zonas costeras. A su vez nos servirán para estimar la precisión interna de los geoides presentados.

Dado que estos resultados nos valieron para efectuar posteriores comparaciones con geoides determinados por distintos métodos, se presenta por último un análisis de la independencia del resultado de los datos elegidos así como de la función covarianza.

3.1. METODO DE COLOCACION APLICADO A LA DETERMINACIÓN DE UN GEOIDE GRAVIMÉTRICO

En general, la colocación es un buen método para determinaciones de geoides locales. Esto se debe al carácter local de la covarianza que aparece en los cálculos, y que además, no es posible incluso en los casos más homogéneos, obtener una única función covarianza que pueda servir para representar con precisión una zona global extensa.

La aplicación del método básicamente no presenta diferencias respecto de la del capítulo anterior para obtener estimaciones de anomalías gravimétricas. Al cambiar de señal a predecir, varía el modelo de función covarianza a usar. Tal variación viene determinada al aplicar la ley de propagación de las varianzas y covarianzas en la relación entre cantidades observables y estimables, en nuestro caso:

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad -\Delta g = \frac{\delta T}{\delta r} + \frac{2}{r}T \quad (3.1)$$

Como ocurría en el caso de predicciones de anomalías, las funciones resultantes del ajuste a un modelo elegido previamente, pueden no ser adecuadas para la hacer las

estimaciones. Esto ocurre, por ejemplo, si faltan datos o si están mal distribuidos y no se logra representar al campo de forma realista. En general, el modelo de función covarianza usado en estos dos capítulos, es válido para ajustar funciones covarianza de datos gravimétricos siempre que el campo fuera del área local se comporte en media como dentro.

Usualmente se predice geoides sobre cuadrículas que faciliten su futura interpolación. Así se estiman valores de ondulación de geoides (o cuasigeoides) en puntos equidistantes por:

$$N_{PRE} = C_{N\Delta g^s} (C_{\Delta g^s \Delta g^s} + C_{rr})^{-1} (\Delta g^s) \quad (3.2)$$

con: Δg^s : observación.
 $C_{N\Delta g^s}$: covarianza entre señal de la observación y señal a determinar. Se calcula por las leyes de propagación de varianzas y covarianzas.
 $C_{\Delta g^s \Delta g^s}$: covarianza de la señal observación.
 C_{rr} : covarianza del ruido. Por la reducción de las observaciones y al no estar éstas correladas entre sí, tiene la forma de $\sigma_0^2 I$ con σ_0^2 varianza de peso unidad de las observaciones e I matriz unidad.

La estimación no debe depender de los puntos dato, tal y como se probará en apartados sucesivos al obtener diferencias entre resultados por debajo de la precisión del método. Además, puesto que la predicción pierde calidad sobre los límites de la zona de datos, se suele predecir en una subzona interior.

Es importante la elección del tamaño de las zonas de aplicación que debe verificar unos ciertos requisitos: su tamaño mínimo ha de estar de acuerdo con la resolución de los modelos empleados para hacer las reducciones y su tamaño máximo es función del discretizado de los datos y de la necesidad de obtener valor de media cero (condiciones teóricas de aplicación).

Si la zona es demasiado grande, como ya se mencionó, no es conveniente usar una única función covarianza local. Se subdivide en zonas más pequeñas, pero seleccionando un único valor de profundidad de radio de Bjerhammar y así se fija un único dominio de armonicidad para toda la solución obtenida (Sevilla y Rodríguez Velasco, 1992 a y b).

Con este proceso de aplicación de la colocación se obtiene una estimación de la parte de media-alta longitud de onda de las ondulaciones del geoides. Siguiendo el esquema general del método de eliminación-restitución, se añaden luego las partes correspondientes al modelo de geopotencial y a los efectos de un modelo de terreno, es decir, aquellas cuya influencia ha sido sustraída de los datos anteriormente.

$$N = N_c + N_g + N_t \quad (3.3)$$

Donde N_c es la parte calculada por colocación, N_g la contribución del modelo de geopotencial y N_t la de la topografía.

3.2. PREDICCIÓN DE ONDULACIONES DEL GEOIDE SOBRE LA ZONA DE PRUEBA

Del mismo modo que se hizo en el capítulo anterior con las anomalías de la gravedad, se presenta aquí un estudio del comportamiento de las predicciones de ondulaciones del geoides según si lo que intervienen son datos terrestres o marinos.

Completan este estudio una serie de pruebas sobre la independencia de la predicción de la muestra seleccionada, incluso tratándose de datos de la misma naturaleza.

La información disponible sobre los bordes es menor por no estar representado todo su alrededor, y la predicción será de menor calidad al usar una función covarianza que no representa al campo completamente. Por esto hicimos predicción de geoides no sobre toda la zona de estudio, sino sólo sobre una interior a ella medio grado en todas las direcciones.

Se hicieron seis predicciones diferentes del geode en la zona, de límites de 38°5 a 41°5 en latitud y de -1° a 2° en longitud en puntos dispuestos en cuadrícula de espaciamiento 5' en ambas direcciones. Tales versiones son: un geode predicho a partir de datos sólo marinos, tres predichos a partir de muestras distintas de datos sólo terrestres, uno de ellos con espaciamiento distinto, y dos a partir de dos muestras de datos mezclados.

No es nuevo que la colocación mínimos cuadrados no es un buen método de extrapolación (Rodríguez-Velasco y Sevilla, 1993), pero nos interesa saber hasta qué punto la predicción se desvía de los valores obtenidos con datos sobre la zona.

Antes de proceder a ningún estudio sobre los geoides estimados, haremos mención a una peculiaridad que puede reducir su precisión que es que los datos utilizados no se distribuían adaptándose a una normal como sería lo más deseable, e incluso, no eran totalmente simétricos, requisito alternativo, sino que son cantidades bastante centradas pero con una cierta tendencia a ser positivas. Esto puede señalar que pese a la calidad que parecen tener las reducciones tanto de modelo de geopotencial como de topografía para la zona, puede no haberse considerado algún tipo de efecto en la reducción total de los datos produciendo algún discreto sistemismo.

En la tabla 3.1. se muestran las estadísticas de la parte de geode predicha por colocación más la contribución del modelo de geopotencial. La parte correspondiente a las cortas frecuencias, es decir, a la topografía (N_t en (3.3)), se estudiará más adelante.

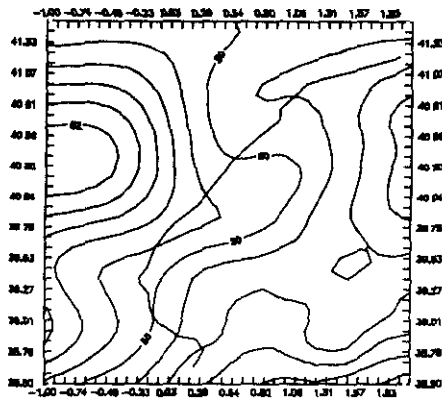
Se puede ver el rango de variación no excesivamente grande que presentan todas las predicciones (en ningún caso llega a alcanzar los 5 metros), por lo que en general, el geode es muy suave en la zona, sobre todo, y a la vista de la figura 3.1., en el mar. Las estadísticas de todas las predicciones son bastante similares entre sí.

Las variaciones de los parámetros entre los dos geoides con datos mixtos son pequeñas: un centímetro de media, lo mismo que aparece en las diferencias entre los valores máximos alcanzados.

	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO	RANGO
Geode mar	49.983 m	0.906	47.71 m	52.32 m	4.610
Geode tierra1 (5')	49.953 m	0.970	47.66 m	52.22 m	4.560
Geode tierra2 (5')	49.951 m	0.972	47.71 m	52.23 m	4.520
Geode tierra3 (5'5)	49.953 m	0.967	47.73 m	52.20 m	4.470
Geode todo1	49.986 m	0.920	47.73 m	52.15 m	4.420
Geode todo2	49.978 m	0.921	47.72 m	52.15 m	4.430

TABLA 3.1: Estadística de las estimaciones de geode estudiadas.

GEOIDE CON DATOS MARINOS



En cuanto a las diferencias entre los geoides calculados con datos terrestres, vemos que no hay variaciones prácticamente en media ni en desviación, y sí varían los máximos valores alcanzados siempre por debajo de los 5 centímetros.

Por último, al comparar las estadísticas de todos ellos, se ve que el comportamiento es bastante similar si bien la media de los geoides con datos sólo terrestres es unos 3 centímetros más baja que en los otros casos, tiene mayor desviación típica y el geode con datos marinos alcanza máximos 10 centímetros por encima de los otros. Estos valores sirvieron como referencia de los rangos de diferencias a considerar para estudiar diferencias puntuales entre los geoides y no sólo en media.

A continuación se presenta un estudio de los geoides calculados y las comparaciones entre ellos así como las conclusiones que pueden deducirse para establecer una metodología para el problema de mezcla de geoides terrestres y marinos.

3.3. SENSIBILIDAD DE UN GEOIDE GRAVIMETRICO CALCULADO POR COLOCACION A LA MUESTRA Y A LA FUNCION COVARIANZA

La función covarianza caracteriza al campo de la gravedad en la zona y es capaz de reproducir cantidades relacionadas con éste. Teóricamente, no debe depender de la muestra extraída para construir la covarianza empírica ni de las cantidades tomadas como observaciones. Esto se conseguía con la descorrelación hecha a los datos al reducirlos. Aún así, puede haber efectos no tenidos en cuenta en tales reducciones o bien, el método puede no funcionar en la práctica tal y como se espera. Para determinar si es así y hasta qué punto se pueden cometer errores, se compararon los geoides elaborados con distintas selecciones de datos terrestres y mixtos a un mismo espaciamiento. En ambos casos, las diferencias alcanzadas fueron pequeñas, mostrando que en efecto, los resultados obtenidos por el método de colocación son en gran medida independientes de la muestra (ver tablas 3.2 y 3.3). En ellas se incluye la comparación de geoides con datos terrestres sólo en tierra (717 puntos) con valores menores como muestran su media, ligeramente inferior, desviación típica bastante más pequeña y menos diferencias grandes.

	Media	Desviación	Mínimo	Máximo
Tierra (1369)	0,2 cm	4,1 cm	-14 cm	11 cm
Tierra (717)	0,1 cm	2,6 cm	-12 cm	9 cm
Todo (1369)	0,7 cm	3,3 cm	-14 cm	19 cm

TABLA 3.2: Estadística de las diferencias obtenidas.

	Difs. mayores 20 cm	Difs. mayores 10 cm	Difs. mayores 5 cm
TIERRA (1369)	0	35	259
TIERRA (717)	0	1	25
TODO (1369)	0	31	131

TABLA 3.3: Cuantificación de las diferencias obtenidas.

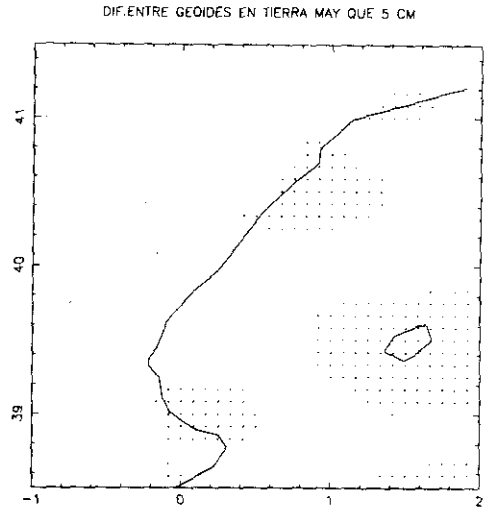
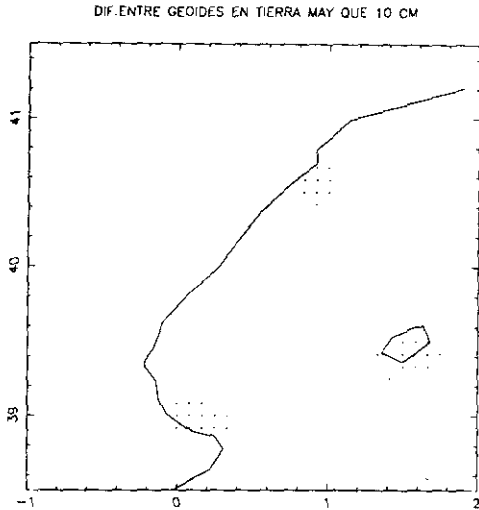


FIGURA 3.2. Diferencias obtenidas al comparar geoides terrestres.

Diferencias mayores que 10 cms.

Diferencias mayores que 5 cms.

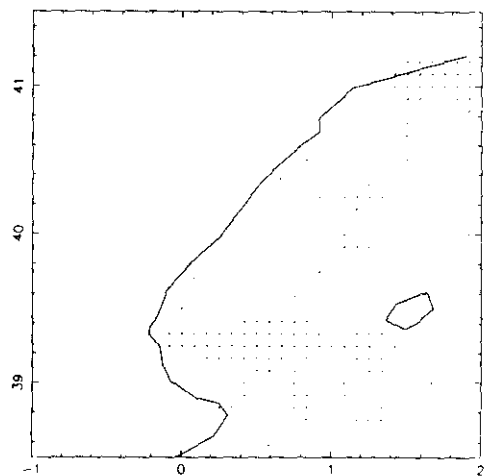
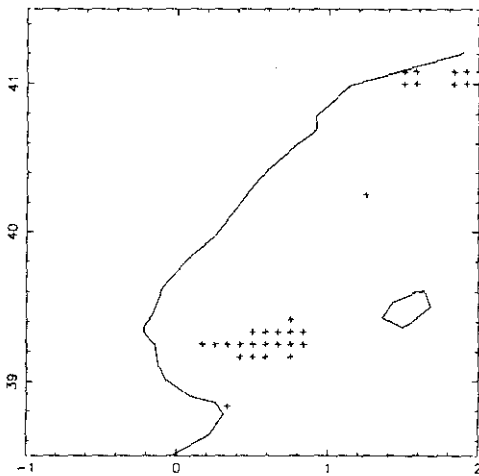


FIGURA 3.3: Diferencias obtenidas al comparar geoides mixtos.

La disminución de diferencias grandes al tomar sólo tierra indica que posiblemente éstas correspondan a errores de extrapolación. Están más localizadas que las obtenidas al comparar los geoides que venimos a llamar mixtos. Los problemas aparecen alrededor de la isla que hay en la zona y también en algunas regiones puntuales sobre la costa. Las diferencias entre geoides mixtos están en el mar, pero no agrupadas tan localmente.

En general, las predicciones son muy parecidas, lo que corrobora el hecho de que la muestra no determina fuertemente a las estimaciones, cuya precisión, dada la repetitividad de los resultados, fijaremos por debajo de los 5 centímetros. Al tomar sólo la zona terrestre este límite resulta incluso excesivo ya que lo superan únicamente el 3% de los datos.

3.4. SENSIBILIDAD DEL GEOIDE GRAVIMETRICO CALCULADO POR COLOCACION AL ESPACIAMIENTO DE LA MUESTRA

Al aplicar la colocación se ha de resolver un sistema de tantas ecuaciones como observaciones se tiene. El problema de esto es que pueda ser demasiado grande con lo que se pierde aplicabilidad del método. Así, es conveniente seleccionar sólo las necesarias reduciendo así las dimensiones del sistema. Aquí surge la cuestión de cuántas son las vnecesarias. Una forma de reducir su número es, como ya se vió en el capítulo anterior, aplicar técnicas que suavicen el campo para que pueda representarse usando menos datos. Sobre la cuestión de cuál es la distancia óptima a la que éstos deben seleccionarse, existen algunas reglas (Tscherning, 1985) en las que la densidad necesaria de datos para lograr una cierta precisión en las predicciones es función de la longitud de correlación de la covarianza.

Para evaluar los efectos sobre la predicción de geoides de este factor en la zona de estudio, se compararon los dos geoides con datos terrestres con muestras seleccionadas a intervalos, pequeñas variaciones de la distancia teóricamente óptima (5' y 5'5). Como antes, damos mayor importancia a las diferencias obtenidas sobre tierra puesto que a ella pertenecen los puntos de la muestra y la función covarianza con la que se efectuaron las predicciones. De nuevo, la magnitud de las diferencias obtenidas es pequeña, teniendo un máximo de 16 centímetros en una única ocasión. El signo de tales diferencias es aleatorio, lo que indica la no existencia de sesgos dependientes del espaciamiento de la muestra. Las zonas en las que aparecen las diferencias coinciden en gran medida con las obtenidas en las comparaciones del apartado anterior. En la figura 3.4. se muestran los puntos en los que se obtienen diferencias mayores que 10 cms. En la segunda comparación son sólo 3, situados sobre el borde de la zona, por lo que no son significativos mientras que en la figura 3.5 aparecen las diferencias sólo en la parte terrestre y se marcan con círculos las diferencias mayores que 5 centímetros y con un cuadrado la única diferencia superior a los diez.

	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO
Comparación 1 (todo)	0,1 cm	4 cm	-16 cm	11 cm
Comparación 2 (todo)	-0,1 cm	2,5 cm	-7 cm	13 cm
Comparación 1 (tierra)	0,2 cm	2,6 cm	-14 cm	9 cm
Comparación 2 (tierra)	0,1 cm	2,1 cm	-5,9 cm	7 cm

TABLA 3.4: Estadística de las diferencias obtenidas en la comparación.

TOTAL COMP. 1369	Dif. mayores 15	Dif. mayores 10	Dif. mayores 5
Comparación 1 (todo)	1	51	213
Comparación (todo)	0	3	46
Comparación 1 (tierra)	1	0	20
Comparación 2 (tierra)	0	0	10

TABLA 3.5: Diferencias obtenidas.

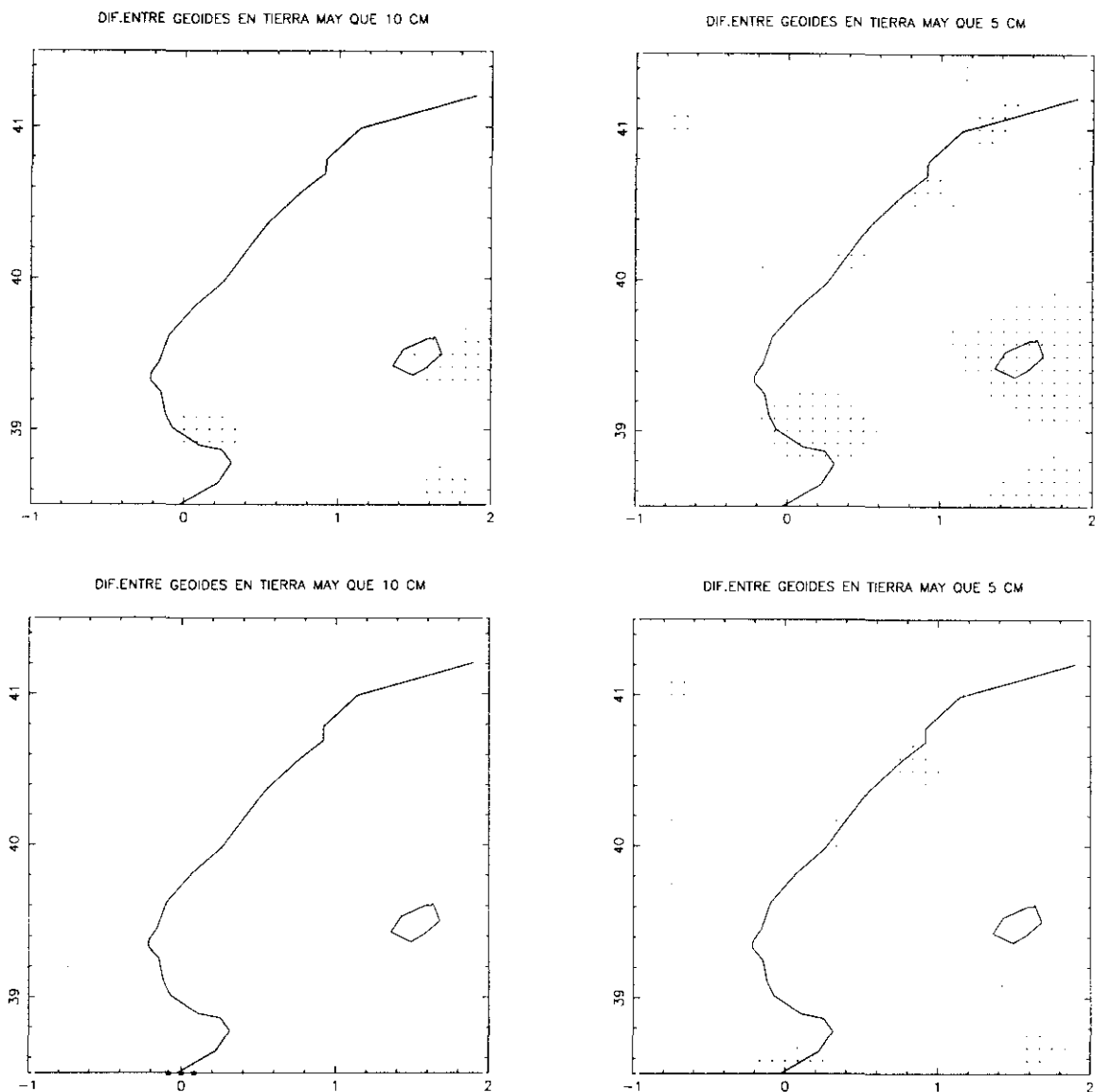


FIGURA 3.4: Localización de las mayores diferencias en la comparación.

Su reducido número y distribución aleatoria nos hace concluir que las dos predicciones casi no difieren y que variaciones pequeñas del espaciamiento de los datos, no modifican la precisión del método.

3.5. SENSIBILIDAD DEL GEOIDE GRAVIMETRICO POR COLOCACION A LA NATURALEZA DE LOS DATOS

En este apartado se prosigue el estudio comenzado en el capítulo anterior sobre la variación de los resultados obtenidos por colocación según la naturaleza de los datos empleados. En este caso, la cantidad estudiada es la ondulación del geode. Previo a cualquier análisis, podemos esperar una menor influencia al ser una cantidad dominada por las largas longitudes de onda, luego la mayor contribución a la estimación la va a aportar el modelo de geopotencial. Se presenta una cuantificación concreta de las diferencias obtenidas.

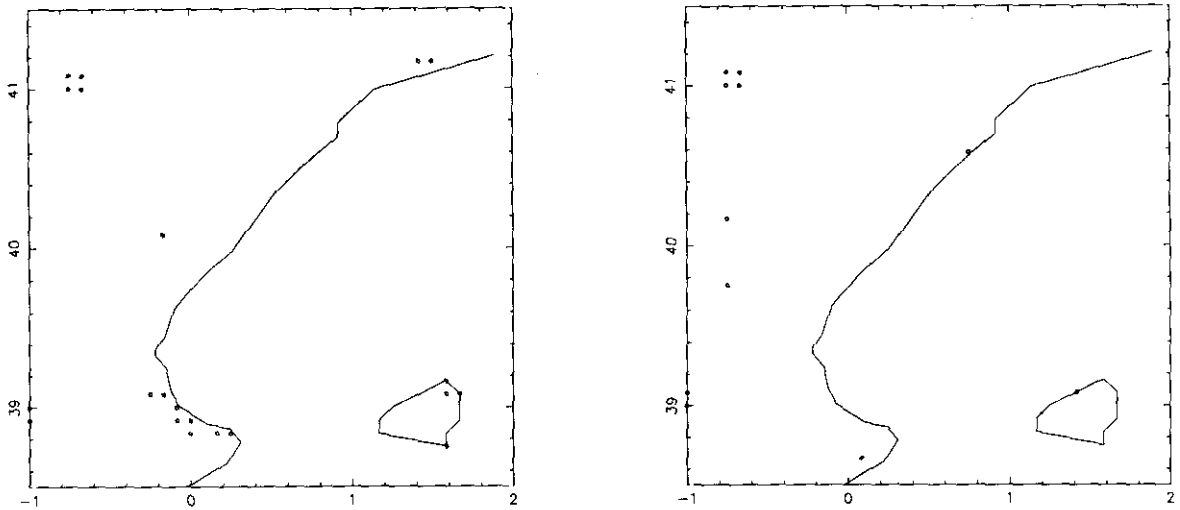


FIGURA 3.5: Diferencias mayores que 5 centímetros sobre la zona terrestre.

3.5.1. Comparación entre geoides con datos mezclados y sin mezclar

Al separar como en el capítulo anterior por un lado los datos terrestres y por otro los marinos, se producen efectos de borde en las predicciones. Si se opta por mezclarlos la covarianza resultante tiene características distintas a las que proporcionan datos de diferentes tipos de zona por separado, por lo que puede predecir cantidades distintas en ambos casos.

En este apartado se pretende analizar la cuantía de las diferencias, su correspondencia tal y como se espera, en zonas costeras, y la amplitud de la zona en la que se extienden. Para ello, se construyen geoides con las partes terrestre y marina predichas a partir de datos del mismo tipo, supuestos con efectos de borde en la zona. Se compararon con los dos obtenidos con distintas muestras de datos mezclados y sus correspondientes funciones covarianza.

En la figura 3.6 se tienen los geoides comparados y en la figura 3.7 las curvas de nivel de las diferencias obtenidas contorneadas a intervalos de 5 centímetros. En ellas se aprecia que las diferencias se encuentran distribuidas alrededor de la costa y de las islas de Ibiza y Formentera. De hecho, las curvas representadas reproducen el perfil del litoral en la zona, y que éste también aparece como irregularidad en los geoides de la figura 3.6. Las diferencias obtenidas son muy similares de tomar un geode mixto u otro, lo que resulta normal dada la similitud entre ambos probada en el apartado 3.3. Son mayores en la parte terrestre que en la marina, como se puede ver en la exposición de las tablas 3.6. y 3.7.

	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO
G.Todo 1 - G.Mar (652)	-0,7 cm	5 cm	-21 cm	18 cm
G.Todo 2 - G. Mar (652)	-1,9 cm	6,2 cm	-26 cm	13 cm

TABLA 3.6: Estadística de las diferencias entre resultados con datos mezclados y con sólo marinos.

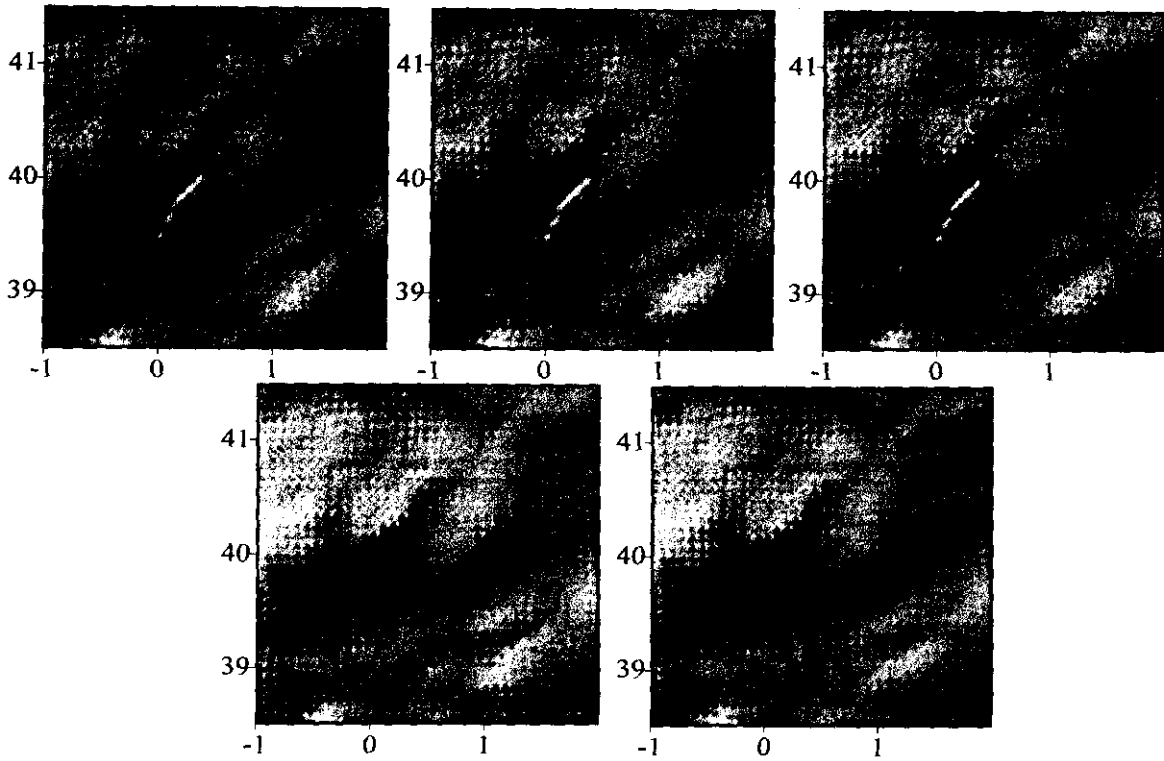


FIGURA 3.6: Geoides comparados. Las figuras superiores son de un único tipo de datos y las inferiores son los calculados a partir de mezcla de datos.

	MEDIA	D. TIPICA	MINIMO	MAXIMO
G.todo1-G.tierra1	-4,1 cm	6,6 cm	-27 cm	27 cm
G.todo1-G.tierra2	-4 cm	7,2 cm	-30 cm	29 cm
G.todo1-G.tierra3	-3,9 cm	7 cm	-31 cm	29 cm
G.todo2-G.tierra1	-4,4 cm	6,5 cm	-30 cm	29 cm
G.todo2-G.tierra2	-4,3 cm	7,2 cm	-33 cm	32 cm
G.todo2-G.tierra3	-4,2 cm	7 cm	-34 cm	27 cm

TABLA 3.7: Estadística de las diferencias obtenidas sólo en tierra.

	Dif.20 cms	Dif. de 10 cms			Dif. de 5 cms		
	NEGAT	TOTAL	POSIT	NEGAT	TOTAL	POSIT	NEGA
G1-Gmar	1	26	9	17	95	37	58
G2-Gmar	10	40	10	30	127	32	95

TABLA 3.8: Clasificación de las diferencias según su cuantía y signo sólo en la parte marina.

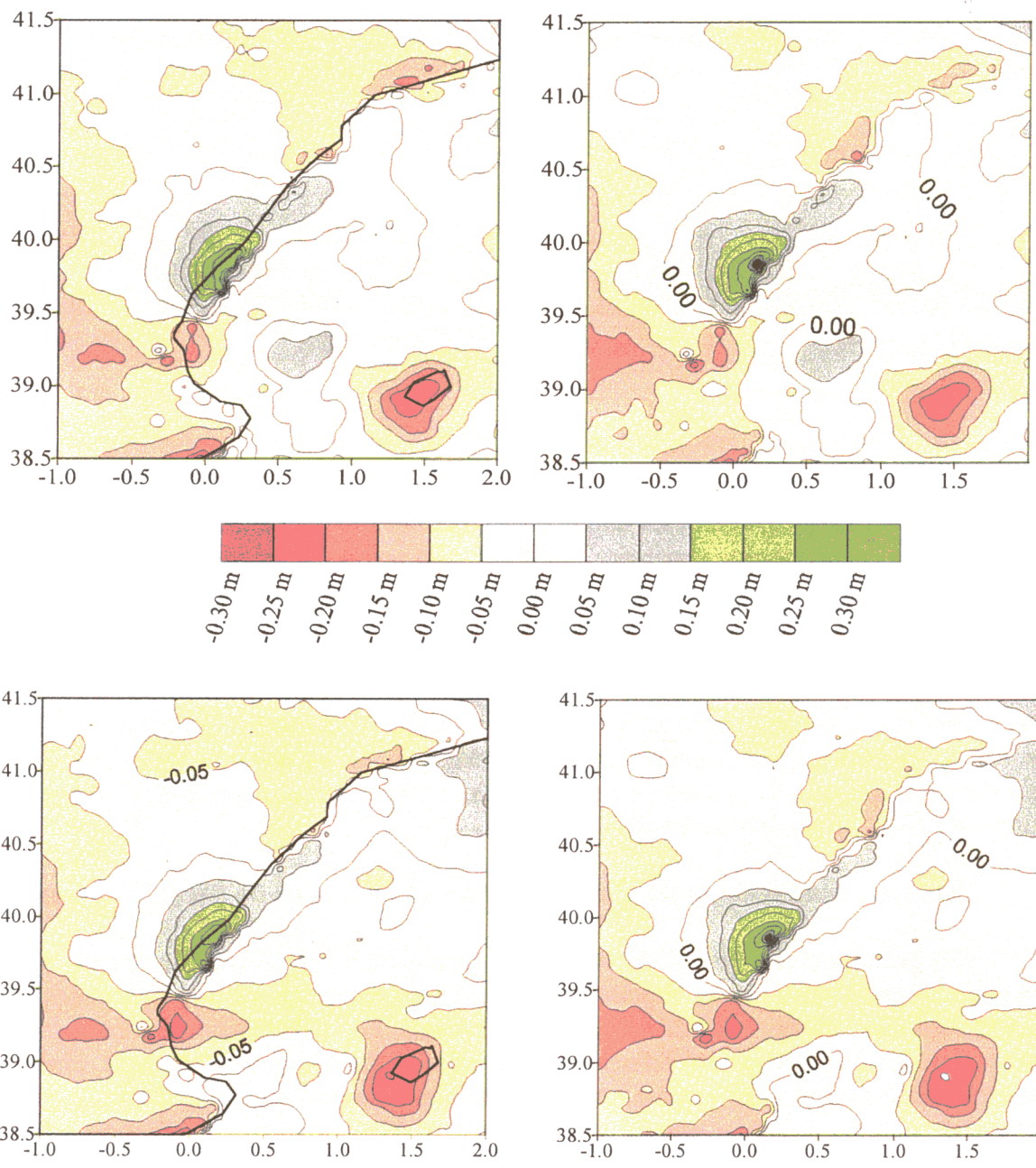


FIGURA 3.7: Diferencias obtenidas en la comparación.

En general se puede decir que las diferencias son pequeñas y mayormente de signo negativo, aunque las positivas alcanzan valores más altos, luego se tienen valores de geoide menores si se calculan con datos mezclados que si sólo se utilizan los del tipo de zona correspondiente. La cuantificación detallada del signo y valía de las diferencias se muestra en las tablas 3.8 y 3.9. Las diferencias grandes se reproducen en la misma zona y los mismos puntos de una comparación a otra.

Al considerar la zona marina las diferencias son menores que en la terrestre. Las mayores de signo negativo se encuentran agrupadas en las mismas zonas en todas las comparaciones. Aparecen en la costa, asociados sus mayores valores a Delta del Ebro y Golfo

	DIFS. MAY. QUE 20 CMS			DIFS. MAY. QUE 10 CMS		
	TOTAL	POSIT	NEGAT	TOTAL	POSIT	NEGAT
G.todo1-G.tierra1	7	3	4	105	24	81
G.todo1-G.tierra2	14	9	5	110	29	81
G.todo1-G.tierra3	8	5	3	121	29	92
G.todo2-G.tierra1	7	4	3	107	22	85
G.todo2-G.tierra2	15	11	4	110	23	87
G.todo2-G.tierra3	13	8	5	116	21	95

TABLA 3.9: Diferencias en las comparaciones entre geoides con datos mezclados y geoides con datos sólo terrestres en tierra.

de Valencia, y en la zona entre las islas de Ibiza y Formentera (posiblemente parte del territorio de la isla entró en la comparación y en cualquier caso, una zona tan poco exterior no es significativa). Las diferencias positivas son menos numerosas, pero como se mencionó de valor importante, también agrupadas localmente de nuevo en zona de costa. Se podía apreciar en las figuras 2.3 y 2.12 la existencia en la zona de una mayor concentración de las curvas de nivel de las anomalías dato.

3.5.2. Comparación entre geoides calculados con datos de tierra y de mar

En principio, el objetivo de esta comparación va a ser distinto de la que ocupó el apartado anterior, así como su importancia. En el caso precedente, un banco de datos, el que llamabamos de datos mezclados, incluía al otro. La importancia operativa de las comparaciones era estimar las diferencias obtenidas a fin de fijar un nivel de precisión a alcanzar cuando se plantea el problema de determinar geoides en zonas costeras: es decir, hasta qué punto se difiere si usamos datos sólo de la zona -produciendo efectos de borde al acabarse los datos- o bien evitar tales efectos incluyendo puntos exteriores pese a que éstos son de distinta naturaleza y pueden modificar las características del campo.

En este otro caso lo que se plantea es, aceptando que el método de colocación no da una buena solución al problema de extrapolar geoides (Rodríguez y Sevilla, 1993), estimar hasta qué nivel se puede diferir en los resultados. Es decir, determinar los errores que se

	MEDIA	D.TÍPICA	MÍNIMO	MÁXIMO
G.tierra 1 - G.mar	-3 cm	0.280	-79 cm	92 cm
G.tierra 2 - G.mar	-3 cm	0.284	-78 cm	93 cm
G.tierra 3 - G.mar	-3 cm	0.280	-78 cm	93 cm

TABLA 3.10: Estadística de las diferencias obtenidas en la comparación.

	Difs. 1 m	Difs. 50 cm	Difs.10 cm
Geoide1 - Geoide mar	0	109	969
Geoide2 - Geoide mar	0	124	982
Geoide3 - Geoide mar	0	108	994

TABLA 3.11: Diferencias obtenidas entre geoides con datos terrestres y marinos

pueden producir cuando se hacen predicciones sin contar con datos en toda la zona.

En la tabla 3.10 se muestra la estadística de las diferencias obtenidas. Se puede ver que sobre todo, los máximos y mínimos obtenidos son bastante superiores a los de comparaciones anteriores y la desviación típica es mayor también indicando que existen valores más extremos. Al alcanzar valores grandes de ambos signos la media resulta ser engañosamente baja para las cantidades de que se dispone.

Los resultados de las diferencias se presentan en la tabla 3.11. Aparecen diferencias de 50 centímetros en muchos más de la mitad de los 1369 puntos comparados, por lo que diferencias inferiores las consideramos por debajo de la precisión de la comparación. En los tres casos las diferencias se distribuyen de forma muy similar (ver figura 3.8 y 3.9). De hecho, aparecen sobre todo en los mismos puntos como se verá más adelante.

Como se ve en la figura 3.8, las diferencias mayores de 50 cms se agrupan claramente (en los tres casos), en dos zonas bien diferenciadas: una en zona terrestre y otra en el mar. Como antes, se intentó ver algún criterio de diferenciación común a los tres casos. Tal criterio fue de nuevo el signo de las diferencias obtenidas: las positivas, es decir, valores más altos de geoide calculado con datos de tierra que con datos de mar, se obtuvieron en los tres casos en tierra. El número de tales diferencias es menor que el de las negativas pero su cuantía es mayor, llegando en algunos casos- cuatro puntos en concreto- a alcanzar los 90 centímetros. Estos cuatro puntos aparecen en las tres comparaciones. Se encuentran muy próximos al borde de la zona, por lo que la predicción puede ser aún menos fiable, y en el centro de una zona con diferencias grandes (ver figura 3.9). En cuanto a las diferencias negativas, valor de geoide con puntos del mar mayor que el valor calculado con terrestres, se obtuvieron en más puntos, aproximadamente el doble, pero su cuantía es menor. Todos estos puntos están localizados en el mar.

A la vista de esto, se puede apreciar que en los tres casos, se obtienen diferencias más grandes en tierra, pero en menor cantidad de puntos. Las diferencias negativas se alcanzan

	DIFS.MAYORES QUE 50 CM			DIFS.MAYORES QUE 10 CM		
	TOTAL	POSITIV	NEGAT	TOTAL	POSITIVA	NEGAT
Geoide1-mar	109	34	75	969	446	523
Geoide2-mar	124	37	87	982	456	526
Geoide3-mar	108	35	73	994	453	541

TABLA 3.12: Clasificación de las diferencias obtenidas atendiendo a su signo.

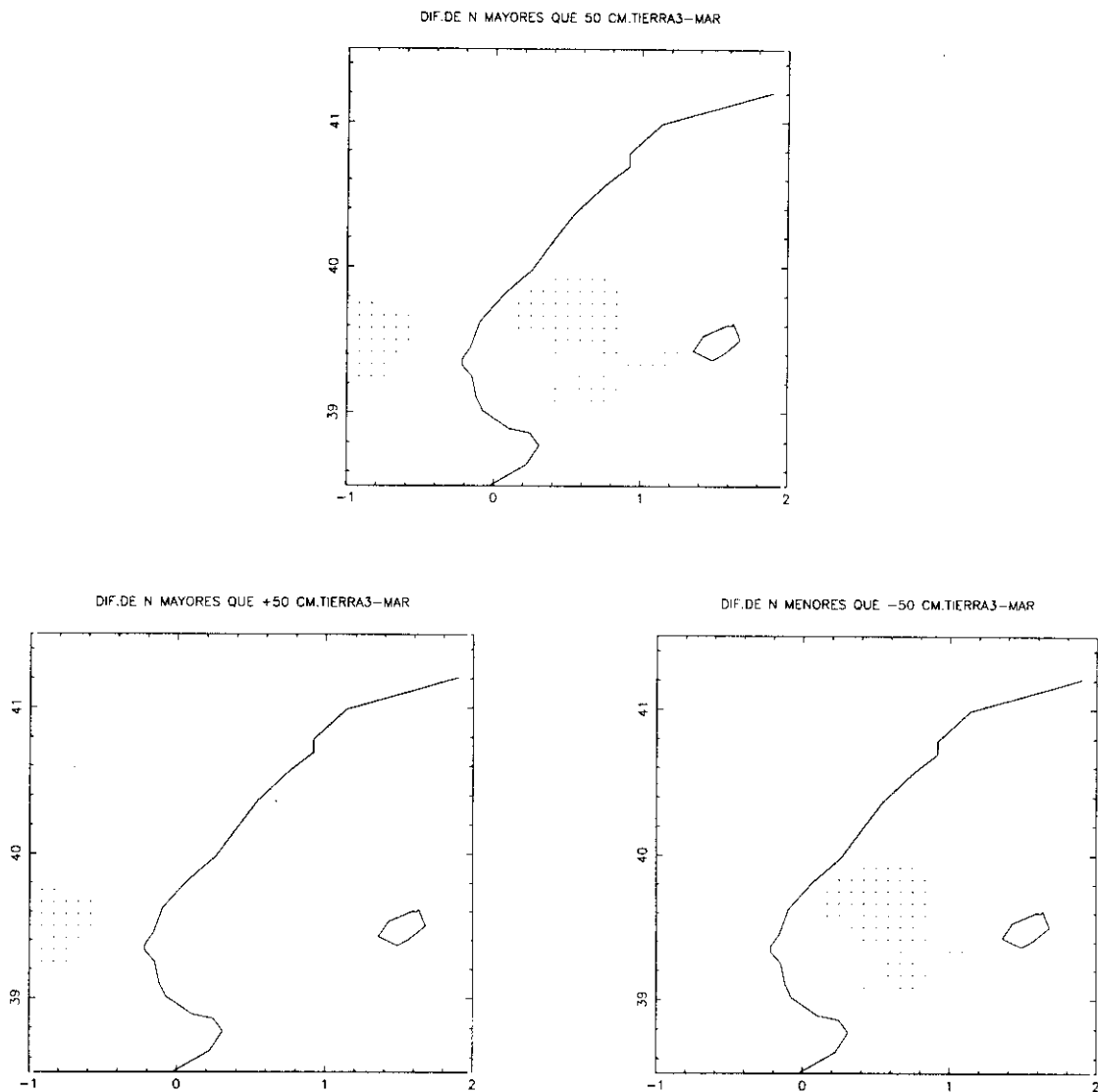


FIGURA 3.8: Distribución de diferencias mayores que 50 cms.

en el mar, luego con datos marinos se obtienen ondulaciones de geode mayores en el mar y más pequeños en tierra.

Las diferencias por encima de 10 centímetros ocupan prácticamente toda la zona aunque sí que parecen agruparse localmente en áreas más extensas que en el caso anterior. Se siguió un estudio paralelo al efectuado con las diferencias grandes atendiendo a su signo. Las diferencias positivas se obtuvieron en un poco menor cantidad que las negativas. Son medianas- en torno a 20 centímetros-, y aparecen agrupadas principalmente en dos zonas, una al norte y otra al sur, totalmente en tierra, mientras que la del norte se extiende por los dos tipos de zona. Aparecen más diferencias negativas (aproximadamente en un 20% más) y también agrupadas sobre todo en dos regiones además de algunas diferencias puntuales próximas a los bordes y por lo tanto no totalmente fiables. Una está en el norte dentro de tierra y otra en el mar.

Se procedió tras esto a comparar los puntos en los que se obtuvieron diferencias grandes para ver hasta qué punto coinciden de uno a otro estudio.

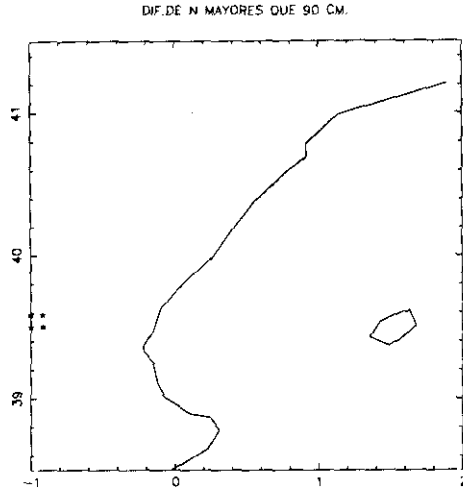
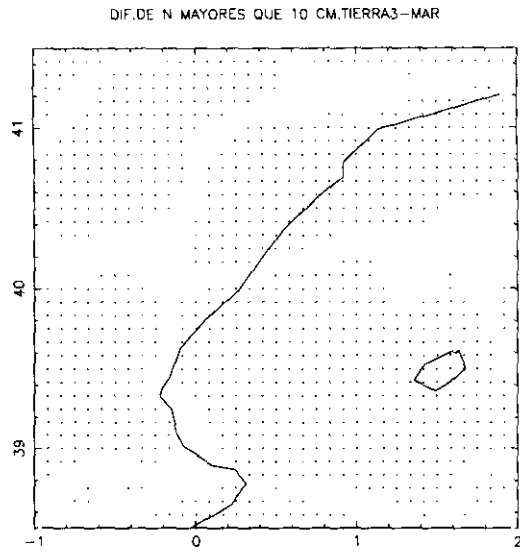
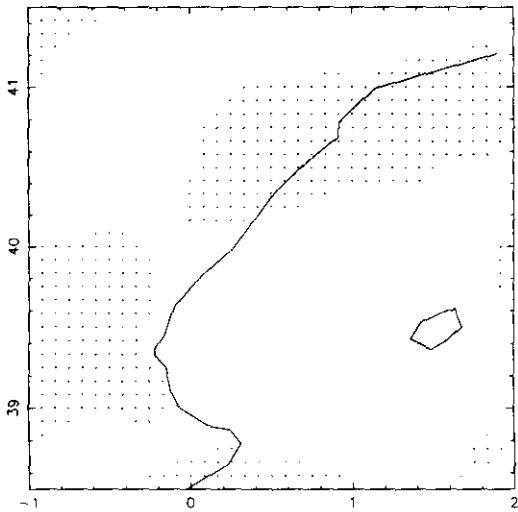


FIGURA 3.9: *Diferencias grandes, mayores que 90 cms.*



DIF.ENTRE GEÓIDES MAYOR QUE 10 CM



DIF.ENTRE GEÓIDES MENOR QUE -10 CM

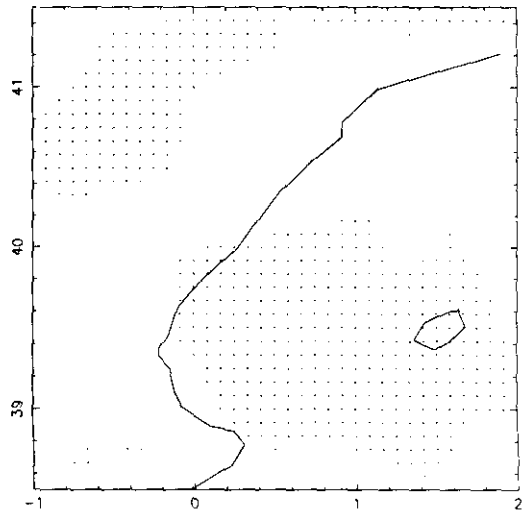


FIGURA 3.10: *Distribución de las diferencias mayores que 10 centímetros.*

Los resultados fueron:

*Diferencias mayores que 50 cms.- 97 puntos comunes entre las 3 zonas:
34 positivas y 63 negativas*

*Diferencias mayores que 10 cms.- 917 puntos comunes entre las 3 zonas:
427 positivas y 490 negativas*

Prácticamente, las diferencias se obtienen sobre los mismos puntos. Además, lo que es más de destacar, en los puntos sobre los que se obtienen las diferencias entre geoides con datos terrestres y marinos, los calculados con el primer tipo de datos son muy similares entre sí (difieren bastante por debajo de 10 centímetros).

Los resultados obtenidos en las diferencias menores que 10 cms nos indican, como puede apreciarse a la vista de la figura 3.10, que si bien parece que como se apuntaba a la vista de las diferencias mayores que 50 cms obtenidas, sí existe una cierta tendencia a que con datos marinos se obtengan ondulaciones de geoides más grandes en el mar y quizá algo más pequeñas en tierra. Tal tendencia no es constante y ni siquiera continua sobre la zona. Es por esto que a partir de estos resultados se estudió la relación (si existe) entre la localización de las diferencias y el valor de éstas.

Diferencias negativas: en todos los casos se encuentran agrupadas en dos zonas principalmente: la zona norte, con diferencias no muy grandes, entre 10 y 30 centímetros y sólo ocasionalmente se alcanzan los 40 cms, parecida a una zona de diferencias negativas que resultaba en 3.5.1 (figura 3.7), y la zona sur, en el mar, con diferencias de mayor cuantía superando en muchos casos el medio metro. Dentro del orden de valores, las mayores diferencias se distribuyen en el centro de cada una de las zonas (ver figura 3.11) en la que los puntos señalan diferencias en predicción entre 10 y 30 cms, los asteriscos, las que están entre 30 y 50 cms y los círculos, diferencias superiores a 50 cms, muy similar a la zona que ya aparecía en la sección anterior.

Diferencias positivas: también se agrupan en todos los ejemplos en dos zonas diferenciadas y algunos pequeños grupos. Estudiamos las dos zonas más centradas puesto que las demás son demasiado próximas a los bordes y pueden ser menos representativas. Una de las dos zonas, en el este, cuenta con diferencias no muy grandes. Sólo en ocasiones se llegan

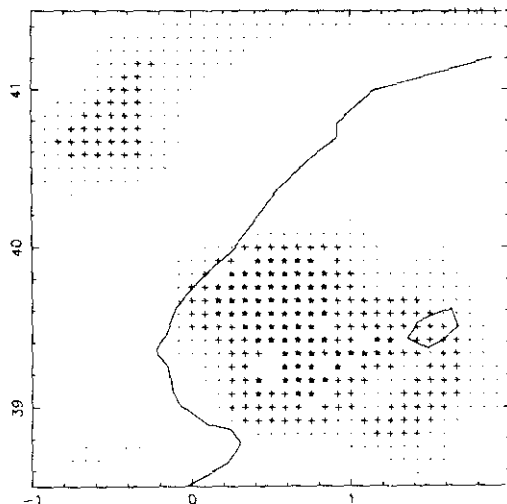


FIGURA 3.11: Diferencias de cuantía negativa.

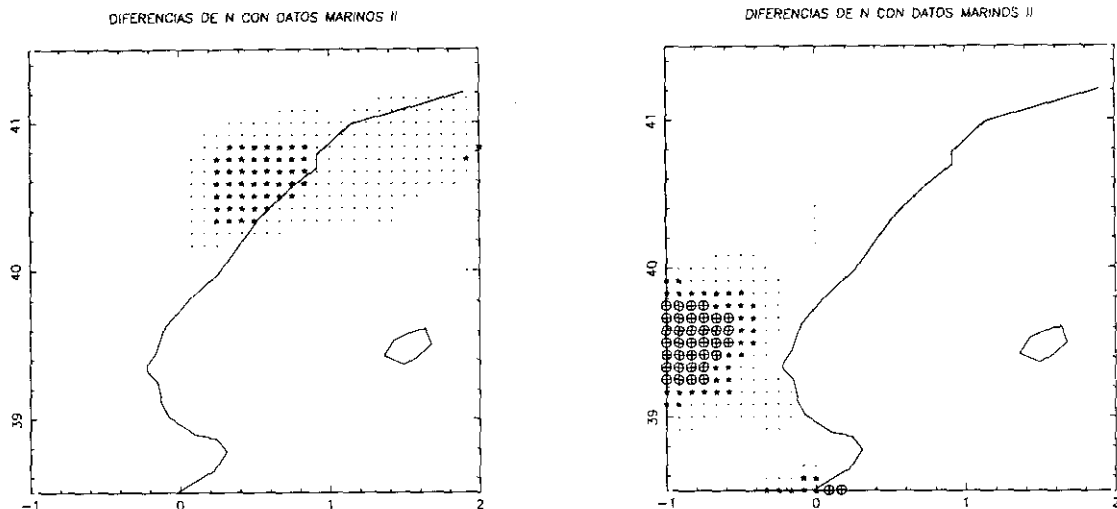


FIGURA 3.12: Diferencias de cuantía positiva.

a alcanzar 40 cms. La otra, en tierra, tiene diferencias considerablemente mayores (se supera el medio metro en más de una treintena de ocasiones). Se siguen agrupando en el centro de las zonas las diferencias mayores, como se aprecia en la figura 3.12, con la misma simbología que la anterior. Esta zona coincide con otra en la que aparecían diferencias positivas (geoide mixto mayor que geoide mar) en 3.5.1. (ver figuras 3.12 y 3.7).

En general, no parece que el mal comportamiento de las predicciones se produzca a partir de una distancia específica de la costa. Lo que sí se ha podido con estos ejemplos es cuantificar el error a cometer al efectuar extrapolaciones con el método de colocación.

3.6. CONTRIBUCION DE LAS MASAS TOPOGRAFICAS A LAS ONDULACIONES DEL GEOIDE

Los geoides presentados en este capítulo se elaboraron aplicando el método de eliminación-restitución. En este apartado vamos a centrarnos en la contribución al geoide de la topografía local, señalada como N_t . Ha sido calculada del mismo modo que fue descrito en el apartado 2.4. Así, queda debidamente restituida la aportación previamente eliminada.

La ondulación del geoide es una cantidad dominada por las largas y medias longitudes de onda. Es por tanto lógico esperar una contribución pequeña de las masas, esto es, de las altas frecuencias.

En el caso que nos ocupa, en la tabla 3.13 aparece la estadística de tal aportación, que como se ve, en media es del orden de centímetros, no llegando a alcanzar los 2 metros su rango de variación a lo largo de los 3° estudiados.

MEDIA	D.TÍFICA	MINIMO	MAXIMO	RANGO
9 cm	0,256	-0,55 m	1,12 m	1,670 m

TABLA 3.13: Estadística de la contribución de la topografía al geoide.

	MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAX	RANGO
Geoide mar	49.92 m	1.012	47.71 m	52.98 m	5.27
Geoide tierra1	49.96 m	1.086	47.66 m	53.01 m	5.35
Geoide tierra2	49.96 m	1.088	47.71 m	53.03 m	5.32
Geoide tierra3	49.96 m	1.083	47.73 m	52.99 m	5.26
Geoide todo1	49.99 m	1.042	47.73 m	52.95 m	5.22
Geoide todo2	49.99 m	1.043	47.72 m	52.95 m	5.23

TABLA 3.14: Estadística de los geoides con contribución de las masas.

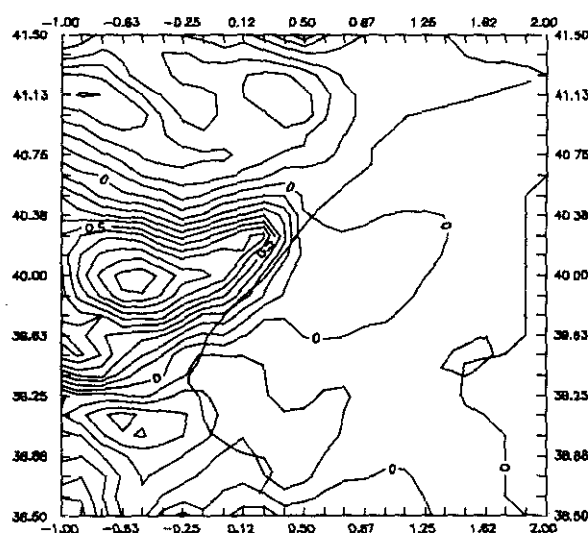


FIGURA 3.13: Contribución de las masas al geoides.

A la vista de la figura 3.13 en la que se muestran las curvas de la cantidad estudiada, se aprecia que tal y como se podía esperar, tanto las mayores contribuciones como la mayor variación de éstas, se distribuyen en la zona terrestre, donde las densidades de las masas son mucho más grandes que en el mar.

Así podemos decir que en general la aportación de las longitudes de onda corta al geoides es muy pequeña dada la naturaleza de la señal, y que dentro de esta tendencia, se alcanzan las mayores contribuciones en la zona terrestre.

La tabla 3.14 muestra la estadística de los geoides completos, es decir, considerando también la contribución de la topografía. Si se compara con la tabla 3.1 en la que no se consideraba tal efecto, se puede apreciar que dada la pequeña cuantía del mismo, en media varía poco, del orden de centímetros, pero su inclusión hace aumentar la desviación típica.

Los mínimos se mantienen y los máximos aumentan haciéndolo así también los rangos de variación. De todas formas, se siguen teniendo unos geoides muy suaves.

Del mismo modo, si se comparan las figuras 3.1, en donde los geoides representados no cuentan con la información de la topografía, y la figura 3.14 en la que sí lo hacen, se ve

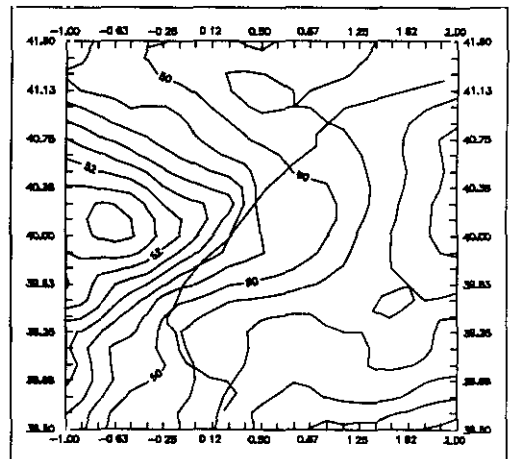
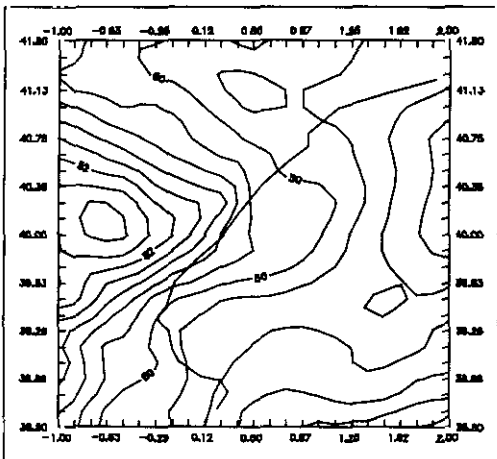
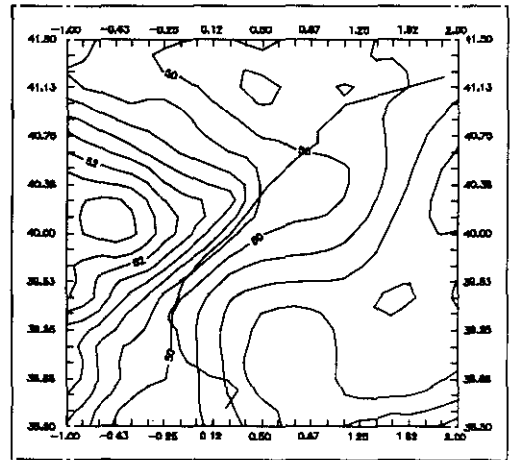
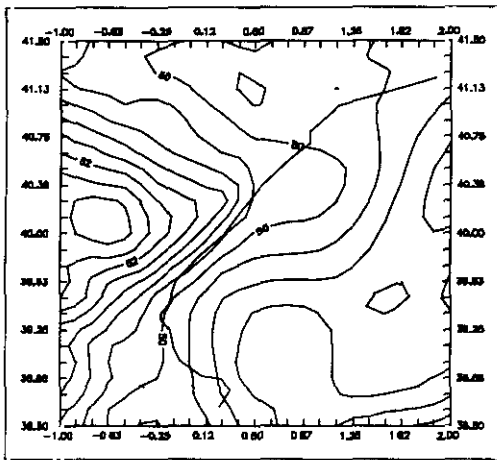
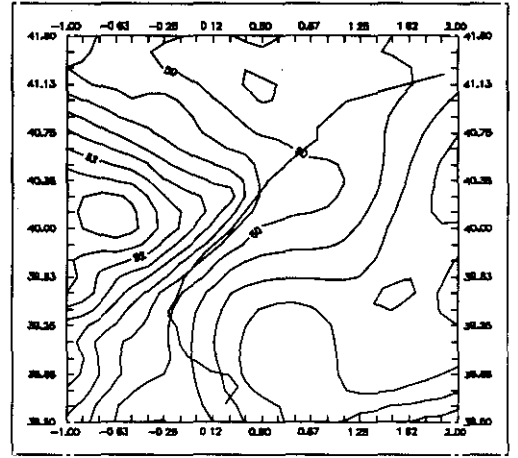
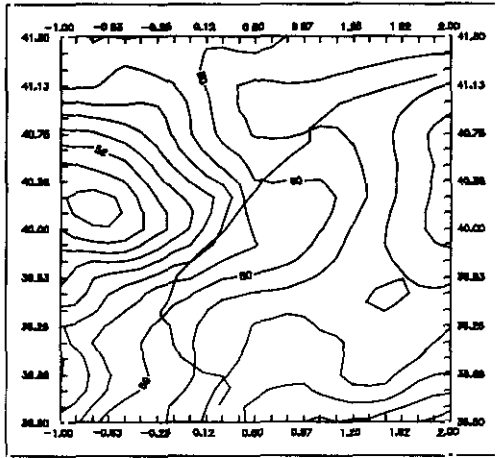


FIGURA 3.14: Curvas de nivel de los geoides con aportación de la topografía.

que no se producen grandes variaciones: prácticamente ninguna en el mar y sí varían ligeramente las formas de las curvas de nivel en el interior.

3.7. TRANSFORMACION DE GEOIDES ELABORADOS CON DATOS DE DISTINTA NATURALEZA

En muchos textos ha aparecido con anterioridad el problema de mezcla de geoides locales y ajuste de los mismos. Esto tiene especial interés cuando se pretende relacionar geoides de distintos países para formar un geoide común. Se han hecho algunos intentos (Tscherning et al, 1986) que consisten básicamente en utilizar como datos geoides previamente determinados para calcular un geoide común en una zona más amplia por colocación mínimos cuadrados. Este procedimiento, por su característica de reproducir las observaciones, permite mantener la validez de cada uno de los geoides independientes utilizados. Como inconveniente tiene, que si se pretende extender los cálculos sobre zonas grandes, el volumen de los mismos puede llegar a ser enorme. Existen varias posibilidades que lo reducen. Por un lado, si los datos usados son altitudes de geoide, normalmente vendrán distribuidos sobre una malla de puntos equidistantes entre sí. Este tipo de datos, da lugar a matrices de covarianza que tienen estructura de submatrices que resultan ser de Toeplitz, lo que permite la aplicación de algoritmos más rápidos para la evaluación de las fórmulas, lo que se viene a llamar colocación rápida ("*Fast Collocation*") (Bottoni y Barzaghi, 1993).

Otra forma de reducir el tiempo de evaluación de las fórmulas que aparecen es utilizar funciones covarianza finitas que se hagan cero a partir de una distancia dada. También se han propuesto expresiones generales de la colocación pero reformuladas sustituyendo las sumas por integrales, a fin de poderse evaluar mediante técnicas espectrales que son más rápidas. De nuevo esto es posible ya que los datos, si vienen dispuestos sobre cuadrículas de puntos equidistantes, verifican las condiciones generales de aplicación tales técnicas (ver capítulo 4).

Pero lo que nos ocupa aquí es un problema distinto: no queremos generar un nuevo geoide sino ver si es posible establecer una metodología para transformar un resultado en otro localmente, dentro del problema de compatibilizar geoides terrestres/marinos. Esto es, ajustar los valores de uno de los geoides generados con datos mixtos en el que no se han producido efectos de borde a otro que represente mejor a la zona a considerar por no mezclar datos.

3.7.1. Caso terrestre

En este punto tratamos de ver posibles formas de relacionar los geoides determinados a partir de datos mezclados con geoides en cuyo cálculo se usaron sólo datos de tierra para esta parte de la zona (que es en la que la última predicción es más fiable). Las curvas de nivel de las diferencias obtenidas en las comparaciones aparecen en la figura 3.15, contorneadas a intervalos de 5 centímetros. Se ve claramente una mayor concentración de diferencias en una zona a latitud 40° y en general, en la proximidad de la costa.

Como se vió anteriormente, las diferencias obtenidas al comparar los geoides con los que trabajamos ahora, tendían a tener el mismo signo. Las diferencias positivas mayores que 10 centímetros sólo aparecen en una región. Así, nos queda la duda de si existe alguna tendencia en realidad sobre el signo de las diferencias, o si la precisión está por debajo de estos niveles. Probamos si existe algún tipo de sesgo entre las predicciones, lo que constituiría la transformación más sencilla. Para ello, así como para estimar el valor posible de tal sesgo, reproducimos los perfiles de geoides de uno y otro tipo para los puntos de predicción a lo largo de tres paralelos de latitudes 39° , 40° y 41° respectivamente. Los resultados se muestran en la figura 3.16. La línea vertical señala la longitud a la que se encuentra la costa para cada una de las latitudes tratadas. Tomamos sólo la parte izquierda de la gráfica por no considerar la predicción en el mar. Con línea de trazo continuo señalamos al geoide generado con datos

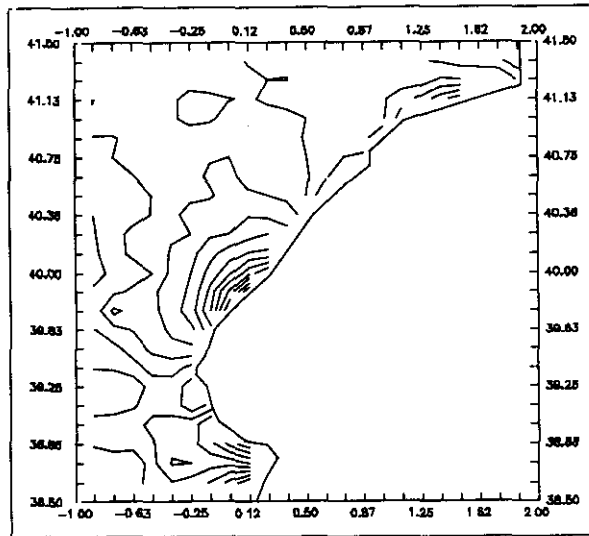


FIGURA 3.15: Diferencias entre geoides contorneadas con un intervalo de 5 centímetros.

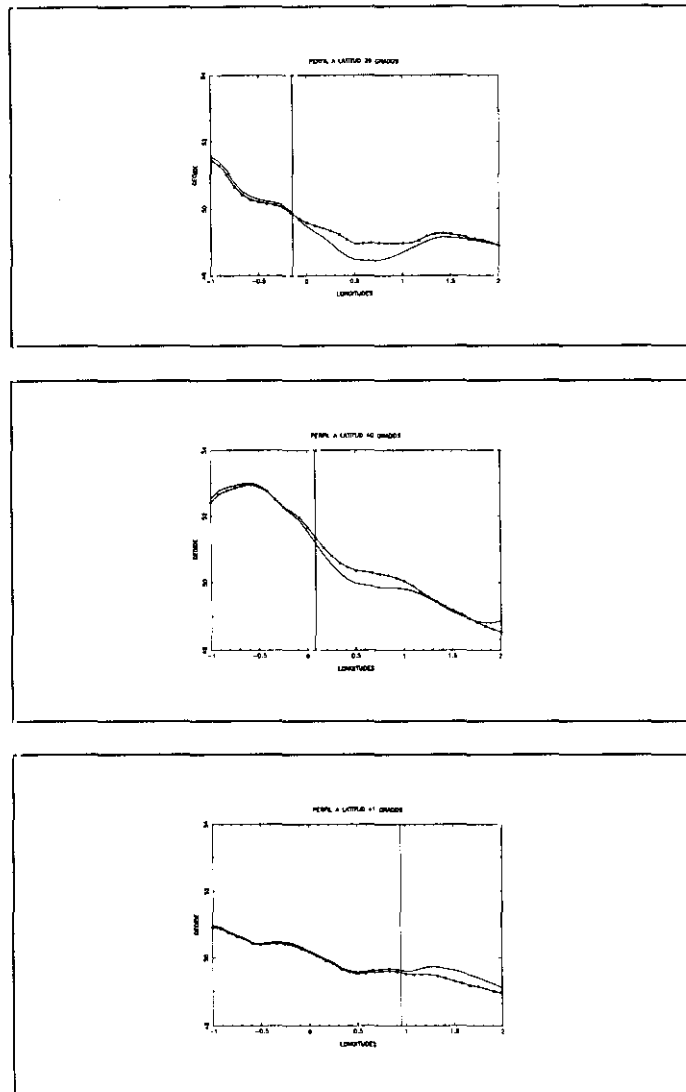


FIGURA 3.16: Perfiles de las diferencias entre geoides para distintas latitudes.

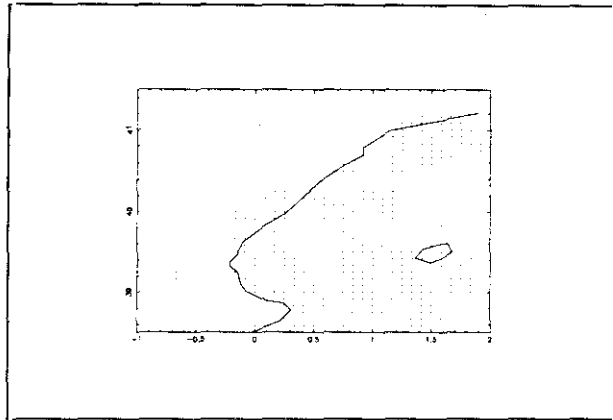


FIGURA 3.17: Localización de las diferencias mayores que 10 centímetros tras sesgar una de las predicciones.

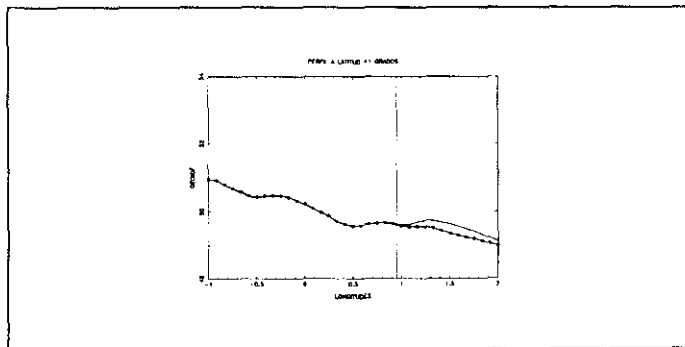
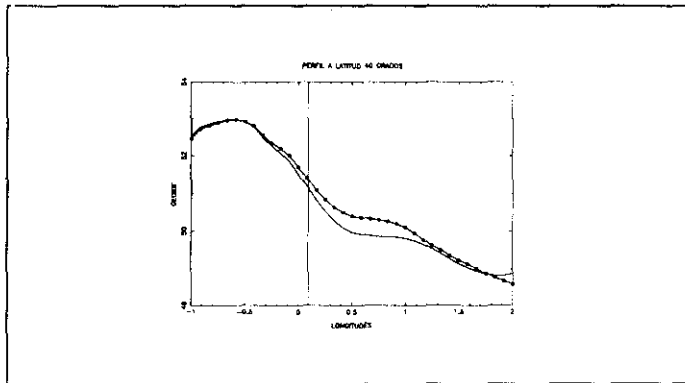
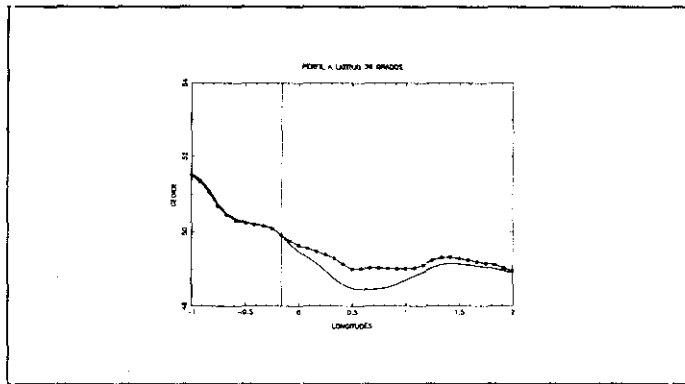


FIGURA 3.18: Perfiles de geoides tras el ajuste.

terrestres. En dos de estos perfiles parece que sí existe tal sesgo entre predicciones, algo mayor en latitudes bajas, no siendo tan claro en el caso del paralelo central.

Probamos a transformar el geode que venimos a llamar mixto, en tierra, añadiéndole un sesgo constante de 5 centímetros a la vista lo concluído de los perfiles. Tras repetir la comparación con el geode terrestre, obtenemos de nuevo diferencias en tierra de 10 centímetros, pero en número mucho menor que en la comparación de geodes originales (ver figura 3.17 y comparar con figura 3.9). Los nuevos perfiles aparecen en la figura 3.18. y se ve que ciertamente mejora el ajuste de un geode sobre el otro en la zona terrestre.

3.7.2. Caso marino

En este caso no es tan aparente la existencia de algún tipo de sesgo entre las predicciones. Se ensayaron varios modelos que pudieran corregir las diferencias (tabla 3.15) cuyos coeficientes se ajustaron por mínimos cuadrados considerando a todas ellas de igual peso.

Estos modelos determinan las diferencias como función de la posición geográfica, distancia a a costa y al borde de la zona de predicción y sus potencias.

Si se trata de transformaciones continuas, la superficie resultante no es necesariamente equipotencial, y por lo tanto no puede ser considerada como una estimación de geode. Al hacerlo de forma discreta sí es posible hacerlo.

Los modelos ensayados se exponen a continuación. Tras la aplicación de todos ellos las zonas de diferencias más abruptas (alrededor de la isla, Golfo de Valencia y Delta del Ebro) permanecen reduciéndose las diferencias en el resto.

MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO
-1,85 cm	6 cm	-26 cm	18 cm
-3,13 cm	7 cm	-28 cm	13 cm

TABLA 3.15: Estadística de las diferencias entre G.MIXTO-G.MAR.

$$a) N'_T = N_T + x_1 \cos \phi + x_2 d \quad (d \text{ distancia a la costa en aproximación esférica})$$

$x1_{estimada} = 0.46396659941437561$	$\epsilon_{x1} = 0.1522851800059162$
$x2_{estimada} = -3.848239319177393 \cdot 10^{-2}$	$\epsilon_{x2} = 1.121727951283096 \cdot 10^{-5}$

TABLA 3.16: Parámetros estimados.

MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO
-0,6 cm	6 cm	-20,9 cm	17,6 cm
-0,62 cm	6 cm	-25,5 cm	14,9 cm

TABLA 3.17: Estadística de las diferencias entre G.MIXTO'-G.MAR.

Puesto que las diferencias no aparecen siempre a la misma distancia de la costa, se prueban otros modelos no lineales respecto a d.

$$b) N'_T = N_T + x_1 \cos \phi + x_2 d + x_3 d^2$$

$x1_{estimada} = 0.9431473160040014$	$\epsilon_{x1} = 0.2903646632866289$
$x2_{estimada} = -5.256740415774119 \cdot 10^{-2}$	$\epsilon_{x2} = 1.305792846184573 \cdot 10^{-4}$
$x3_{estimada} = 8.458562013264823 \cdot 10^{-5}$	$\epsilon_{x3} = 4.30492327634744 \cdot 10^{-9}$

TABLA 3.18: Parámetros estimados.

MEDIA	D.TÍPICA	MINIMO	MAXIMO
-0,67 cm	6 cm	-20,9 cm	17,3 cm
-0,62 cm	6 cm	-25,6 cm	15,5 cm

TABLA 3.19: Estadística de las diferencias entre G.MIXTO'-G.MAR.

$$c) N'_T = N_T + x_1 + x_2 d + x_3 d^2 + x_4 d^3$$

$x1_{estimada} = 1.012213071313838$	$\epsilon_{x1} = 2.90882359896735 \cdot 10^{-1}$
$x2_{estimada} = -5.666043505079992 \cdot 10^{-2}$	$\epsilon_{x2} = 1.329284668472716 \cdot 10^{-4}$
$x3_{estimada} = 1.443865674016855 \cdot 10^{-4}$	$\epsilon_{x3} = 4.894390702642894 \cdot 10^{-9}$
$x4_{estimada} = -4.523833643484091 \cdot 10^{-7}$	$\epsilon_{x4} = 3.465296918136182 \cdot 10^{-14}$

TABLA 3.20: Parámetros estimados.

MEDIA	D.TÍPICA	MINIMO	MAXIMO
-0,66 cm	6 cm	-20,7 cm	17 cm
-0,62 cm	6 cm	-25,9 cm	15 cm

TABLA 3.21: Estadística de las diferencias entre G.MIXTO'-G.MAR.

$$d) N'_T = N_T + x_1 \cos \phi + x_2 d + x_3 db$$

(db distancia al borde de la zona de predicción en aproximación esférica.)

$x1_{estimada} = -6.325473197197020$	$\epsilon_{x1} = 0.8678975238229099$
$x2_{estimada} = -4.267180202426791 \cdot 10^{-5}$	$\epsilon_{x2} = 1.047713253057509 \cdot 10^{-11}$
$x3_{estimada} = 2.04482826408948 \cdot 10^{-5}$	$\epsilon_{x3} = 6.13710610759867 \cdot 10^{-12}$

TABLA 3.22: Parámetros estimados.

MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO
0 cm	5 cm	-21,3 cm	16,9 cm
-1,28 cm	6 cm	-25 cm	11,9 cm

TABLA 3.23: Estadística de las diferencias entre G.MIXTO'-G.MAR.

$$e) N'_T = N_T + x_1 \cos \phi + x_2 d + x_3 d^2 + x_4 db + x_5 db^2$$

$x1_{estimada} = -0.632838668723727$	$\epsilon_{x1} = 0.28621522939864$
$x2_{estimada} = -2.607152713882515 \cdot 10^{-2}$	$\epsilon_{x2} = 1.111593832178384 \cdot 10^{-4}$
$x3_{estimada} = -5.794405223636067 \cdot 10^{-5}$	$\epsilon_{x3} = 3.646031614439493 \cdot 10^{-9}$
$x4_{estimada} = -1.551306813295827 \cdot 10^{-2}$	$\epsilon_{x4} = 1.838487644484048 \cdot 10^{-5}$
$x5_{estimada} = 5.035825309425760 \cdot 10^{-5}$	$\epsilon_{x5} = 1.521092619960697 \cdot 10^{-10}$

TABLA 3.24: Parámetros estimados.

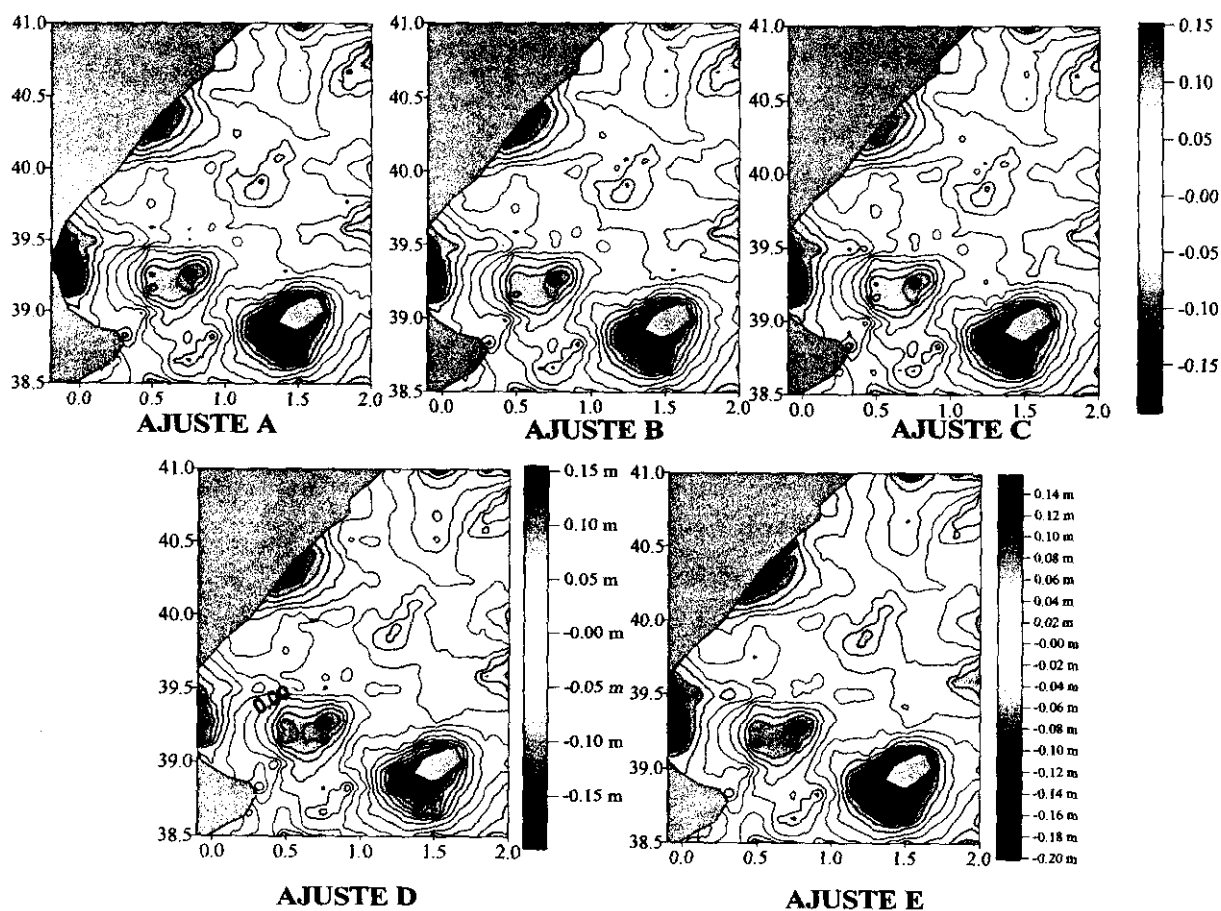


FIGURA 3.19: Curvas de nivel de las diferencias entre geoides mixtos "ajustados" y marinos.

MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO
-0,05 cm	5 cm	-21,6 cm	17,8 cm
-1,34 cm	6 cm	-25,3 cm	12,8 cm

TABLA 3.25: Estadística de las diferencias entre G.MIXTO'-G.MAR.

Se pueden hacer algunas consideraciones generales sobre los modelos. Los coeficientes son pequeños así como su error. El tercer modelo no parece muy realista en el sentido de que ajusta las diferencias como un polinomio de grado 3 de la distancia, sin depender de la latitud a la que se encuentran cuando parece que este factor puede ser significativo (los coeficientes en los modelos que lo incluyen no son nulos).

Al repetir la comparación con los geoides "ajustados" según los modelos propuestos, se obtienen unos resultados un tanto decepcionantes. Los modelos elegidos sirvieron para disminuir las diferencias en media entre los geoides, pero la desviación típica, valores extremos y por lo tanto, el rango de variaciones, sólo tiene disminuciones del orden del centímetro. De este modo, los parámetros del ajuste, al haber sido determinados por mínimos cuadrados, hacen disminuir las medias de las diferencias pero no son útiles para modelizar las mayores que pueden ser debidas a otros tipos de causas. Las nuevas diferencias aparecen dibujadas a intervalos de 2 centímetros en la figura 3.19.

3.8. CONCLUSIONES

En este capítulo se han presentado:

1. Seis geoides gravimétricos calculados aplicando la metodología de eliminación restitución y colocación mínimos cuadrados sobre la zona de estudio. Los geoides son todos ellos suaves, con poco rango de variación. No se apreciaron grandes diferencias en la estadística general de los geoides según el tipo de datos que ha intervenido en el cálculo.

2. Un estudio de la sensibilidad de los geoides (y por lo tanto de la precisión interna) a distintos factores:

A.- a la muestra de los datos extraída para su cálculo. En este caso se obtuvieron diferencias muy pequeñas en tierra, por debajo de cinco centímetros, y algo mayores en los geoides generados con datos mezclados aunque prácticamente del mismo orden. Se prueba con ello que tal y como se espera en teoría, la colocación da resultados independientes de la muestra extraída.

B.- al espaciamiento de la muestra. El orden de las diferencias obtenidas es muy pequeña y las zonas sobre las que se distribuyen coincide con aquellas de las que no se seleccionaron datos por lo que no se garantiza la calidad de la predicción. Por lo tanto, el método no es sensible a pequeñas variaciones en el espaciamiento de los datos de la muestra.

C.- a la naturaleza de los datos. Este estudio se hizo por dos motivos. De una parte, para ver el límite de compatibilidad de los geoides cuando son elaborados en las proximidades de la costa al usar datos sólo de la zona (teniéndolo así efectos de final de la zona), o bien completar añadiendo datos de otra naturaleza. A la vista de los resultados, el límite de la precisión podría fijarse alrededor de 10 centímetros. Usando mezcla de datos se obtiene geoides más pequeños en el mar y más grandes en la tierra que si se usan sólo datos de la zona. De otra, para ver la calidad del método para extrapolar geoides a otras zonas. En este caso, la calidad baja considerablemente y las diferencias son superiores a los 10 centímetros anteriores.

3. Una evaluación de la contribución de la topografía local a la ondulación del geoide. Se mantiene en valores muy pequeños, prácticamente en el orden de centímetros, y alcanza su máximo en la zona terrestre.

4. Transformación de geoides para unificar resultados entre geoides calculados con datos de un único tipo y por lo tanto afectados de efectos de borde en las costas debidos al truncamiento de los datos, y geoides mixtos. Estas transformaciones no actúan igual en áreas terrestres, donde se consiguen buenos ajustes al usar sesgos en uno de los geoides, que en marinas, con transformaciones más complicadas que no ajustan bien las zonas de diferencias irregulares.

DETERMINACION DEL GEOIDE POR TECNICAS ESPECTRALES

En los capítulos anteriores se ha usado el método de colocación. Pero en la determinación gravimétrica del geode conviene tratar también los métodos espectrales, que usan la similitud de la fórmula de Stokes bajo algunas modificaciones, con una convolución integral, lo que hace que sea más sencilla su evaluación en el dominio espectral.

4.1. TRANSFORMADAS DE FOURIER. CONVOLUCION INTEGRAL

En este capítulo vamos a tratar la aplicación de métodos que utilizan transformadas lineales para la resolución del problema de la Geodesia Física que nos ocupa: la determinación del geode.

Las transformadas lineales se utilizan como instrumentos matemáticos para lograr una resolución más sencilla de ecuaciones o sistemas. En particular, la transformada de Fourier tiene mucha importancia en distintas ramas de la Ciencia en las que, además de como mero funcional, adquiere un sentido físico. Por ejemplo, un frente de ondas y su espectro son entidades medibles y se corresponden con una pareja de transformadas.

Se define a la transformada de Fourier de una función $h(x,y)$ como la integral:

$$H(u,v) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} h(x,y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy = F(h(x,y)) \quad (4.1)$$

y su inversa:

$$h(x,y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} H(u,v) e^{2\pi i(ux+vy)} du dv = F^{-1}(H(u,v)) \quad (4.2)$$

con u,v frecuencias espaciales en ciclos por unidad de distancia en las direcciones x e y respectivamente.

Según esta definición nos encontramos con el problema de que hay funciones que no

tienen transformada al no ser convergente la expresión (4.1). En principio, las condiciones para tener transformada son que esté definida la integral de $h(x,y)$ en el dominio de los reales, esto es, que sea absolutamente convergente la integral impropia, y que $h(x,y)$ sea continua o con discontinuidades finitas. En los casos en que estas condiciones no se verifican hay otros criterios que hacen posible transformar otro buen número de funciones. Uno de ellos es que si la función que nos ocupa se corresponde totalmente con un fenómeno físico, se acepta la existencia de transformada.

El problema surge pues cuando se trabaja con funciones por las que aproximamos una cantidad física pero que no se ajustan del todo a su comportamiento salvo con unos parámetros adecuados. Éste es el caso de la función seno o la coseno para representar a funciones armónicas simples. Estas dos funciones estrictamente no tienen transformada de Fourier ya que si bien son continuas, por su periodicidad no verifican que su integral en el dominio de los reales sea absolutamente convergente. Como tampoco corresponden totalmente a un fenómeno físico no se puede obviar su existencia (por ejemplo seno representa a una onda que no varía con el tiempo). Entonces se usa el concepto de transformada en el límite. Para utilizarlo se modifica un poco la función multiplicándola por un factor exponencial de la forma $e^{-\alpha x}$ eligiendo α positivo lo suficientemente pequeño como para que exista la transformada de las nuevas funciones. Si hacemos tender α a cero el factor exponencial tenderá a su vez a la unidad, es decir, las funciones modificadas según se vaya haciendo α menor, tienden a la función periódica original. Cada función modificada tiene transformada puesto que se elegía α para que así ocurriera. Estas transformadas no tienen porqué ser convergentes para todas las frecuencias. Así se genera el concepto de función generalizada, que consiste en tomar todas las transformadas como una entidad. En el límite, la función periódica y ésta forman un par de transformadas de Fourier.

También aparecen problemas con las funciones con un número infinito de máximos o mínimos en un intervalo finito, como puede ser $\sin(1/x)$ en un intervalo alrededor de cero. Estas funciones tienen transformada por una condición adicional más sencilla que es variación acotada. Así se posibilita también el cálculo de transformadas de funciones Lipschitzianas (variación acotada en función de la variación de los orígenes) (Bracewell, 1978).

4.1.1. Transformada par e impar

En la teoría de las transformadas de Fourier las propiedades de simetría son muy importantes, ya que sabemos que ciertas integrales se anulan sin necesidad de evaluarlas. Por su simetría clasificamos las funciones en pares (simétricas respecto del eje de ordenadas):

$$P(x) / P(x)=P(-x) \quad (4.3)$$

e impares o cuasisimétricas (simetría respecto del origen):

$$I(x) / I(-x)=-I(x) \quad (4.4)$$

La suma de función par con impar en general no es de ninguno de los dos tipos. Así, cualquier función, aunque no tenga ningún tipo de simetría, se puede separar en parte par e impar de forma unívoca, puesto que:

$$f(x)=P_1(x)+I_1(x)=I_2(x)+P_2(x) \Rightarrow P_1-P_2=I_2-I_1$$

luego tienen que ser cero puesto que $P_1 - P_2$ ha de ser función par e $I_2 - I_1$ impar. La forma de obtener estas partes par e impar es por medias de la función y su valor para abscisa opuesta, con su propio signo para el caso de obtener la parte par y cambiándolo para las impares.

$$P(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad I(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \quad (4.5)$$

Como se están utilizando abscisas agrupadas por pares de opuestas, la disociación en partes par e impar cambia si se modifica el origen. Por ejemplo, la función coseno es par, pero si se mueve el origen se puede convertir en impar.

La transformada de Fourier incluye un producto por exponencial con exponente imaginario, esto es, un desarrollo en seno y coseno. Si una función es impar, la integral de su producto con coseno se anula y si es par ocurre lo mismo con el seno por la ortogonalidad entre ambos tipos de funciones. Así, si una función es par, su transformada también será par y si es impar, la transformada es impar. En ocasiones lo que se hará es no utilizar toda la transformada de Fourier sino las transformadas coseno y seno de Fourier, definidas como:

$$F_s(u,v) = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x,y) \operatorname{sen} 2\pi(ux+vy) dx dy \quad \text{tr.seno} \quad (4.6)$$

$$F_c(u,v) = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x,y) \operatorname{cos} 2\pi(ux+vy) dx dy \quad \text{tr.coseno}$$

que coinciden con la transformada de Fourier en senos y cosenos para las funciones que sean impares y pares respectivamente. En ellas se modifican los límites de integración y se añade el 2 por simetrías. Puesto que una función puede separarse de forma unívoca en parte par e impar su transformada puede obtenerse como suma de transformadas seno y coseno:

$$f(X) = P(X) + I(X)$$

$$F(u,v) = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(x,y) \operatorname{cos} 2\pi(ux+vy) dx dy - 2i \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} I(x,y) \operatorname{sen} 2\pi(ux+vy) dx dy \quad (4.7)$$

o bien:

$$F(f(X)) = F_c P(X) + i F_s I(X) \quad (4.8)$$

pero al usar esta notación hay que tener claro que lo que se señalan, pese a llevar i , son la parte par e impar de la transformada de Fourier y no la real e imaginaria.

4.1.2. Espectro de potencia

Dada una función y su transformada de Fourier, llamamos espectro de energía o espectro de potencia a la norma respecto del producto interno utilizado de la transformada: $|H(u,v)|^2$, o lo que es lo mismo: $\langle H(u,v), H(u,v) \rangle$. No hay una relación inyectiva entre una función y su espectro, es decir, a partir de $|H(u,v)|^2$ no es posible reconstruir $h(x,y)$ aunque sí da cierta información sobre el tamaño en general de los coeficientes de la transformada.

Si $h(x,y)$ es una función real, el espectro de potencia es una función par y por lo tanto estará determinada si se conoce para los valores positivos (por las simetrías de las funciones pares).

4.1.3. Convolución

Se define la convolución de dos funciones f y g como el resultado de la expresión:

$$x(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}') g(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' = f(\vec{r}) * g(\vec{r}), \quad \vec{r} = (x,y) \quad (4.9)$$

y la idea que representa es un producto de sus ondas. Podemos decir que x es un funcional de f . Verifica las propiedades:

conmutativa:	$f * g = g * f$
asociativa:	$f * (g * h) = (f * g) * h$
distributiva respecto a la adición:	$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

La idea es que al hacer convolución de dos funciones, el resultado es una función más suave con características mezcladas de las funciones que han intervenido.

4.2. USO DE TECNICAS ESPECTRALES PARA LA DETERMINACION DE GEOIDES GRAVIMETRICOS

La determinación gravimétrica del geoide, salvo al usar métodos estadísticos como en el capítulo anterior, consiste en resolver el problema de contorno mencionado en la introducción: determinamos N a partir de T , potencial anómalo que verificará la ecuación de Laplace (4.10), con la condición de contorno en aproximación esférica (4.11)

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r} T + \Delta g = 0 \quad (4.11)$$

donde Δg son las anomalías de la gravedad. La solución en las hipótesis de Δg conocida sobre el geoide y no presencia de masas fuera del mismo, viene dada por la integral de Stokes:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (4.12)$$

y por la fórmula de Bruns obtenemos la ondulación del geoide (Heiskanen y Moritz, 1967)

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (4.13)$$

La resolución de esta integral justifica el uso de la técnica de eliminación-restitución, tal y como lo hacíamos también, aunque por motivos distintos, al aplicar colocación. Entonces, se pretendía contar con un campo homogéneo e isótropo en el que fuera fácil interpolar y representar por una función covarianza construída con pocos datos. En este caso, la integración en la práctica sólo puede hacerse sobre un área limitada, con lo que la contribución de las largas longitudes de onda no intervendría ni tampoco estaría presente en los resultados. Debe calcularse de forma independiente - como se vió, por medio de un modelo de geopotencial-.

Por otro lado, para evaluar la integral con datos reales de observación, se usan muestras finitas de datos. Puesto que la densidad de éstas es limitada, las cortas longitudes de onda no aparecerán. La aportación de tales longitudes de nuevo puede calcularse por medio de la información topográfica. Además, conviene usar reducciones de la topografía puesto que como se verá más adelante, se necesitan datos equidistantes para poder evaluar las fórmulas que aparecen. No siempre los datos están distribuídos de tal forma y se necesita hacer interpolaciones. El suavizamiento de la señal facilita tal interpolación.

El proceso de cálculo consiste entonces de nuevo en una primera fase que elimina de los datos la contribución de la topografía y del modelo de geopotencial, la parte de cálculo que consiste en resolver la integral, y finalmente, restituir los efectos en N del modelo del terreno y del modelo de geopotencial.

La evaluación de la integral que nos ocupa, lleva varios problemas añadidos. El más importante a efectos prácticos es el largo tiempo y la cantidad de memoria necesarios para hacerlo usando integración numérica. Históricamente, una forma propuesta para solucionar este problema, es reducir el área de aplicación modificando la función de Stokes (Jekeli, 1982). El tipo de métodos a los que esta idea dió lugar, hace demasiado grande el número de requisitos a verificar para usarse. Se ha probado que no dan una precisión superior que las técnicas de eliminación- restitución (Sideris, 1994).

Otra alternativa, más comúnmente extendida para conseguir una evaluación rápida de la integral, es usar el hecho de que, con ciertas transformaciones, tiene la forma de convolución integral (4.9). El teorema de convolución indica que, dadas las transformada de Fourier o cualquier otro tipo de transformada lineal de un par de funciones, la transformada de una convolución es el producto de las transformadas:

$$F(g*h) = F(g).F(h) \quad (4.14)$$

Así se tiene que:

$$X(\vec{u})=G(\vec{u}).H(\vec{u}) \Rightarrow x(t)=F^{-1}(H(\vec{u}))=F^{-1}[F(g(t))F(h(t))] \quad (4.15)$$

Se puede utilizar para hallar transformadas inversas de funciones sin tener que descomponerlas linealmente, y sobre todo, en este caso que nos ocupa: cualquier fórmula que pueda ponerse en la forma de convolución se evalúa más fácilmente en el dominio de las frecuencias (por las propiedades que hacen esto posible, no se consume tiempo en sumas y se reemplazan por productos). Las transformadas (4.1) y (4.2), son transformadas separables, es decir, consisten en aplicaciones sucesivas de transformadas unidimensionales, una para

cada dimensión.

Las técnicas espectrales están especialmente recomendadas si se quieren geoides grandes (regionales o continentales) como el Geoide Ibérico (Sevilla, 1994 a y b y 1995).

4.3. EVALUACION PRACTICA DE TRANSFORMADAS

Cuando usamos la transformada de Fourier (o cualquier otra de las mismas características) en la práctica, deben hacerse algunas aproximaciones que introducen errores en los cálculos.

Si se quiere obtener la transformada de una función dada puede que ésta esté definida en términos de variables independientes continuas y basta aplicar la fórmula (4.1). Pero si sólo se tiene información sobre la función para valores discretos de las variables como en el caso de medidas físicas sobre intervalos regulares, al evaluar la transformada por integración numérica los resultados se tienen también para intervalos discretos. Así, a partir de un conjunto finito de valores se obtiene un conjunto también finito de valores de la transformada. Ambos conjuntos se supone que corresponden a la discretización de dos funciones continuas a las que aproximan, y así, la teoría de transformadas discretas se intenta relacionar con la de las continuas enunciada en la sección 4.1.

En principio la formulación permanece invariante sustituyéndose la integral por sumas discretas. La función a transformar se debe entonces organizar con unos ciertos intervalos en el dominio espacial Δx y Δy . Es por esto un requisito en general, para aplicaciones de transformadas, que los datos estén dispuestos equidistantes entre sí, lo que posibilita la evaluación de las fórmulas en forma discreta. Los resultados se dan sobre la misma cuadrícula de entrada, con lo que se tiene un recubrimiento completo y homogéneo. Además, los límites infinitos se sustituyen por otros finitos. Las dos aproximaciones, digitalización y truncamiento, introducen errores que pueden ser más o menos significativos dependiendo de las propiedades de la función a transformar.

Los intervalos Δx y Δy puede ser que sean tan finos que no se den problemas sobre interpolaciones de valores medios, pero aún así, los datos no contienen información sobre las componentes de periodos menores que $2\Delta x$ y $2\Delta y$. Con esto se producen suavizados en la representación de la función (problema de "aliasing"). Para minimizar su efecto, se debe discretizar la función lo más densamente posible, es decir, se han de elegir Δx y Δy tales que $1/2\Delta x$ y $1/2\Delta y$ sean las frecuencias más altas que aparecen en los datos. El problema es que los intervalos se identifican con el espaciamiento entre datos y no se suelen poder elegir. Ante tal situación, se puede reducir el efecto del suavizado eliminando la contribución de las altas frecuencias que no pueden ser registradas en los datos (en nuestra metodología, aplicando la reducción de terreno a los datos).

Otro problema asociado a la evaluación de la transformada es que las sumas de su expresión discreta se extienden sólo en una zona de tamaño finito. Para representar a una función continua de dominio todos los reales con los valores de la muestra, se asume que es periódica y como tal se puede describir por una secuencia de coeficientes en un dominio finito. Esta suposición de periodicidad introduce otra distorsión en el espectro de los datos (fuga de frecuencias "leakage"), que puede hacer aparecer frecuencias que no estaban contenidas en los datos originales. El problema aparece pues al elegir un límite finito para la evaluación de estas sumas.

Seleccionar valores de una función sólo para una región de su dominio, se corresponde matemáticamente con multiplicarla por una función cuyo efecto sea ése: mostrar los valores

sólo en una zona. A este tipo de funciones se las llama funciones ventana o "windowing". En el caso que se ha expuesto, estaría asociado a haber usado como función ventana la rectángulo $\Pi(x)\Pi(y)$ que de base unidad y de altura la unidad tiene la forma:

$$\Pi(x)\Pi(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1/2, |y| < 1/2 \\ 1/2, & \text{si } |x| = 1/2 \text{ ó } |y| = 1/2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (4.16)$$

Si se quiere cambiar la extensión de los datos al dominio de discretización, se modifica ligeramente la longitud de la base de la función rectángulo de modo que se seleccionen los valores de la función $h(x,y)$ tal y como son pero sólo sobre un rango $T_x \times T_y$ y se reduce el resto a cero.

$$\Pi(x/T_x)\Pi(y/T_y) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < T_x/2, |y| < T_y/2 \\ 1/2, & \text{si } |x| = T_x/2 \text{ ó } |y| = T_y/2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (4.16')$$

La función rectángulo forma un par de transformadas de Fourier con $\text{senc } x$ que aparecerá más adelante, y el producto de una función con ella crea distorsiones.

$$\Pi(x)\Pi(y) \leftrightarrow \text{senc}(u) \text{senc}(v), \quad \text{senc}(u) = \frac{\text{sen}\pi u}{\pi u} \quad (4.17)$$

Para reducir el efecto "leakage", se puede usar alguna función ventana distinta de la rectángulo. Esto es, se multiplica por alguna función que actúe como filtro llevando la función suavemente a cero en los bordes de la zona. Con esto se eliminan las discontinuidades y

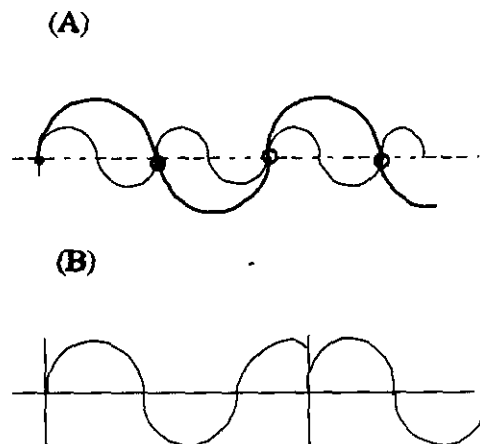


FIGURA 4.1: (A) Efecto de suavizado en la señal debida al discretizado de la misma. Las tres funciones tienen igual representación discretizada, por lo que las tres se interpretarían como correspondientes a la recta.

(B) Efecto de truncamiento al quedar frecuencias interrumpidas.

eligiendo bien la función, se consigue que el espectro resultante sea lo más parecido posible al real. La aplicación de este tipo de funciones hace que se produzca una cierta pérdida de potencia (Tziavos, 1993). La elección de la función ventana depende de los datos, lo que se quiera calcular y la experiencia. En aplicaciones geodésicas es bastante frecuente utilizar la función:

$$W(n)=W(M+1-n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n=N+1,\dots,M-2N \\ 0,5(1-\cos(\pi(n-1)/N)) & \text{si } n=1,\dots,N \end{cases} \quad (4.18)$$

donde N es el número de puntos dato que se quieren suavizar al final de los datos y M el total de datos. También se reduce el efecto si se hace la longitud de registro de la muestra tan larga como sea necesario para que pueda registrarse la longitud de onda mayor de los datos, o lo que es lo mismo, que no queden frecuencias interrumpidas. Además, en el caso de aplicaciones en el campo de la gravedad, se puede minimizar la información de frecuencia corta de los datos- en nuestro caso, lo hacemos eliminando la contribución de un modelo de geopotencial de las anomalías de gravedad-. Esto hace que desaparezcan de los datos las longitudes de onda por encima de 180/grado máximo del modelo.

Así, en general, al hacer la transformada discreta de una función $h(x,y)$ dada en $M \times N$ valores discretos en una cuadrícula de coordenadas x e y las longitudes de onda se expresan como:

$$x=k\Delta x \quad k=0,1,\dots,M-1 \quad (4.19)$$

$$y=l\Delta y \quad l=0,1,\dots,N-1 \quad (4.20)$$

donde Δx y Δy son los intervalos de espaciamento de la cuadrícula a lo largo de las direcciones x e y . Para periodos T_x y T_y , los intervalos son:

$$\Delta x = \frac{T_x}{M}, \quad \Delta y = \frac{T_y}{N} \quad (4.21)$$

con lo que se verifica la condición de equidistancia.

Del mismo modo, las frecuencias espaciales asociadas u y v son:

$$u=m\Delta u, \quad m = 0,1,\dots,M-1 \quad v=n\Delta v, \quad n = 0,1,\dots,N-1 \quad (4.22)$$

pero se representan por las frecuencias enteras m y n relacionadas con ellas aunque no sea exactamente el mismo concepto. Se verifican las relaciones:

$$\Delta u = \frac{1}{T_x}, \quad \Delta v = \frac{1}{T_y} \quad (4.23)$$

$$\Delta x \Delta y = \frac{T_x T_y}{MN} \quad (4.24)$$

De (4.21) y (4.23) se puede deducir:

$$\Delta u \Delta x = \frac{T_x}{T_x M} = \frac{1}{M}, \quad \Delta v \Delta y = \frac{T_y}{T_y N} = \frac{1}{N} \quad (4.25)$$

El argumento de la exponencial que aparece en la transformada, será:

$$\begin{aligned} -2\pi i(ux+vy) &= && \text{por (4.19,20 y 22):} \\ &= -2\pi i(km\Delta x\Delta u + nl\Delta y\Delta v) = && \text{por (4.25):} \\ &= -2\pi i\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right) \end{aligned}$$

Así, la expresión discreta de la transformada en dos dimensiones es:

$$H(m,n) = F(h(k,l)) = \Delta x \Delta y \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k,l) e^{-2\pi i\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)} \quad (4.26)$$

y la transformada inversa:

$$h(k,l) = F^{-1}(H(m,n)) = \frac{1}{T_x T_y} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} H(m,n) e^{2\pi i\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)} \quad (4.27)$$

Ambas se van a caracterizar por los números de onda k, l y m, n . Como antes, también existen desarrollos en serie sólo de senos o sólo de cosenos de argumentos $(\pi km)/M$ y $(\pi nl)/N$, con los coeficientes de las series multiplicados por dos por razones de simetrías, como ocurría al tomar los desarrollos de (4.6) respecto de (4.1). Estos desarrollos sólo coincidirán con (4.26) para el caso de funciones pares o impares.

En general, la transformada discreta es más rápida de evaluar si M y N se eligen potencias de 2 (Tziavos, 1993) como se justificará más tarde.

Con una muestra discreta de datos, está claro que habrá frecuencias que no se puedan recoger debido a los efectos de "leakage" y "aliasing" y que por lo tanto tampoco aparecerán en los resultados de la transformada. Las frecuencias más altas que se pueden registrar en los datos se llaman las frecuencias de Nyquist y según (4.21) y (4.23) son:

$$\begin{aligned} u_N &= \pm \frac{M}{2} \Delta u = \pm \frac{1}{2\Delta x} \\ v_N &= \pm \frac{N}{2} \Delta v = \pm \frac{1}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Las frecuencias menores que se pueden recoger son función de T_x y T_y , y las mayores que estos valores causan efectos de "leakage". M y N deben elegirse de modo que se recojan las frecuencias más altas requeridas. En la práctica estos valores son más fáciles de controlar que Δx y Δy pero en cualquier caso, siempre que se trabaja con cantidades finitas, aunque no queden frecuencias en los datos sin representar, aparecerán efectos de truncamiento y las consecuentes distorsiones en el espectro. Por la equivalencia existente entre la elección de un muestreo finito y la multiplicación por la función ventana rectángulo, la transformada de la muestra se obtiene como el resultado de multiplicar por senc, pareja de transformada de la función rectángulo, lo que hace aparecer la alteración del espectro.

Además si los datos se corresponden con medidas de cantidades físicas, se asume que

contienen errores que establecerán un límite en la precisión de los cálculos de transformadas. Este límite se expresa en forma teórica como el espectro de potencia de la componente error. Pero el problema práctico es más complejo ya que en ocasiones sólo se conoce la magnitud del error y no su espectro, y en otras, se sabe de la existencia de error, pero no es posible separar sus componentes ni por lo tanto su magnitud. En estos casos se trabaja ignorando la presencia de errores pero se sabe que los valores obtenidos en los cálculos de las transformadas tienen un límite en cuanto a los decimales físicamente significativos.

El número de factores que debe tomarse en los sumatorios, hemos visto que depende del número de datos, pero existen también otros problemas asociados que surgen en funciones con discontinuidades y cambios de forma en la función periódica a representar. Estos fenómenos se denominan de Gibbs. Es claro que al omitir términos de los sumatorios se está sometiendo a la función a un filtro de paso bajo. Si tomamos una frecuencia fundamental Δu , por ejemplo, y se retienen frecuencias hasta $n\Delta u$, es como si se multiplicase por una función rectángulo $\Pi(u/2u_c)$, con u_c la frecuencia de corte entre $n\Delta u$ y $(n+1)\Delta u$. No se producen cambios significativos según donde se tome exactamente u_c , así que se suele tomar en $(n+1/2)\Delta u$ (Bracewell, 1978). Seleccionar valores de la función transformada equivale a multiplicar el espectro por la función rectángulo $\Pi(u/(2n+1)\Delta u)$. Por ser su transformada (4.17) y por el teorema de la similitud

$$\Pi\left(\frac{u}{a}\right) \leftrightarrow a \operatorname{senc}(ax) \quad (4.29)$$

esto se corresponde con la convolución de la función original con $(2n+1)\Delta u \operatorname{senc}[(2n+1)\Delta u x]$. Así, cuando las series se suman para términos hasta la frecuencia $n\Delta u$, la suma será:

$$p(x) * (2n+1)\Delta u \operatorname{senc}[(2n+1)\Delta u x] \quad (4.30)$$

con $p(x)$ la función que se quiere transformar. En los sitios en los que p varía poco, el resultado de (4.30) está bastante en concordancia con $p(x)$. Los problemas aparecen cuando p varía de forma brusca, principalmente asociados con las discontinuidades. Para verlo se pueden tomar ejemplos de funciones periódicas pero discontinuas. Por ejemplo una función periódica que sea igual a la función signo (-1 en la parte negativa, 0 en $x=0$ y 1 en valores positivos), hasta una cierta distancia de cero. Lo que ocurra fuera de este rango nos da lo mismo mientras la función siga siendo periódica, ya que lo que importa es la discontinuidad, cerca de $x=0$. El resultado será aproximadamente:

$$(2n+1)\Delta u \operatorname{senc}[(2n+1)\Delta u x] * \operatorname{sign} x \quad (4.31)$$

La convolución de la función senc con la función signo (Bracewell, 1978) da lugar a una función que oscila alrededor de -1 en los valores negativos de x , con oscilaciones que van aumentando de amplitud según nos vamos acercando al origen. En $x=0$ vale cero, y luego sube hasta alcanzar un valor máximo mayor que 1 para a partir de él tener oscilaciones que van disminuyendo alrededor de 1.

Si se cambian los factores de escala de la función senc (lo que sería equivalente a cambiar el último término que se considera en el sumatorio), comprimiéndolo por un factor $N=(2n+1)\Delta u$ y estirándola por un factor N también para que siga manteniéndose el valor 1, la convolución con la función signo dará lugar a oscilaciones alrededor de los mismos valores, 1 y -1, que serán más rápidas aunque alcanzando los mismos valores. Es decir, se siguen

obteniendo el mismo máximo y el mismo mínimo, pero más cerca de la discontinuidad.

Otro ejemplo puede ser una función de la forma: 0 desde $-t$ a 0 y t de 0 a t , periódica de periodo $2t$, y con una discontinuidad en 0. En los extremos $-t$, 0 y t ya se verá como se definen, pero siempre que sea un valor finito para que sea casi continua y acepte transformada. Esta función representa a una onda cuadrada y nos planteamos cómo es su transformada y para qué valores converge. Los valores de los coeficientes de la serie de Fourier serán:

. el término independiente (resultado del producto con coseno para $n=0$) es t .

$$a_0 = \frac{1}{t} \int_0^t t \cos\left(\frac{0\pi x}{t}\right) dx = \left. \frac{t}{t} x \right|_0^t = t$$

. los coeficientes de los $\cos(m\pi x/l)$ son cero para $m > 0$.

$$a_m = \frac{1}{t} \int_0^t t \cos\left(\frac{m\pi x}{t}\right) dx = \left[\frac{t}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{t}\right) \right]_0^t = \frac{t}{m\pi} (\operatorname{sen}(m\pi) - \operatorname{sen} 0) = 0$$

. los coeficientes de los $\operatorname{sen}(m\pi x/l)$ son $1/m\pi(1 - \cos m\pi)$:

$$b_m = \frac{1}{t} \int_0^t t \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{t}\right) dx = -\frac{t}{m\pi} (\cos(m\pi) - 1) \Big|_0^t = \frac{t}{m\pi} (1 - \cos(m\pi))$$

por lo que vale cero si m es par y $2t/m\pi$ si m es impar. En los puntos $x=0$ y los de la forma nt , donde f no es continua, el sumatorio sólo tiene un término, ya que los demás van multiplicados por seno de $n\pi$. La suma es sólo $t/2$, valor medio de los límites de la función por la izquierda, cero, y por la derecha, t , o viceversa. Se puede definir a f en los puntos de discontinuidad como $t/2$, con lo que la suma de Fourier coincidiría con el valor de la función. Si se define de otra forma, el resultado de la serie sería el mismo, ya que en las integrales no afecta el valor de f en los extremos sino en el intervalo en el que se integra, pero entonces no se tiene la convergencia puntual de la serie a la función.

En general, el fenómeno de Gibbs consiste en que las sumas parciales de una serie de Fourier tienden a la función, pero en la proximidad de los puntos de discontinuidad, la convergencia no es suave sino que se pasan del valor que deben alcanzar (un 9% de la discontinuidad). Cuando una serie se trunca, se producen estos excesos a uno y otro lado del punto de discontinuidad y el número de ellos y su valor no varía si se toman más o menos términos, pero sí decrecen indefinidamente en amplitud si aumenta el número de términos considerados. Así el límite de la suma es el valor de la función y en el punto de la discontinuidad la suma aproxima al punto medio del salto (Boyce y Diprima, 1987).

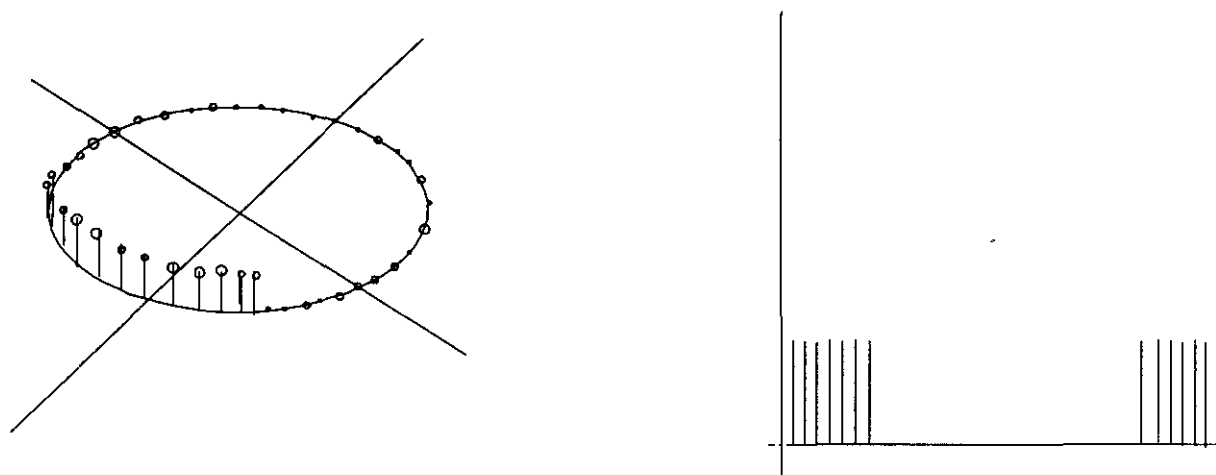
Todo esto eran problemas en cuanto a la transformada discreta de una función se refiere. Pero en nuestro caso, lo que nos ocupa es una convolución. Si se evalúa usando técnicas numéricas, el resultado es exacto y corresponde a convolución lineal. Pero si usamos las transformadas discretas de las funciones que aparecen, éstas se van a considerar periódicas. Entonces, la convolución de ambas también va a resultar una función periódica. Es decir, al contar con una longitud finita para evaluar las funciones que aparecen, se supone

la prolongación periódica de las mismas. Los resultados pueden diferir de cómo sería la secuencia infinita real. A este efecto le llamamos convolución cíclica, que matemáticamente se puede considerar como una convolución lineal discretizada, y por lo tanto, afectada de un cierto suavizado o "*aliasing*". Para un punto cerca del borde, los puntos próximos a los bordes opuestos tendrán una influencia errónea debido a la supuesta periodicidad.

Para verlo más en detalle supongamos que convolucionamos dos secuencias, una con M elementos y otra con N . La convolución tendrá $M+N-1$ elementos. En particular, si tenemos secuencias de N elementos, la convolución no tendrá también N elementos. Como se vió en la primera sección, el resultado de convolucionar dos funciones tiene características un poco mezcladas de las dos funciones independientes. Así, para ilustrar el efecto de la convolución cíclica, vamos a tomar funciones de la forma rectángulo con un valor constante, es decir, N valores de modo que unos cuantos no sean cero, por ejemplo la cuarta parte y el resto completo con ceros. Cuando se toma una secuencia finita, hemos supuesto que representa a una función definida en el dominio de los reales y que se completa repitiendo la secuencia indefinidamente. De aquí viene la justificación de la palabra cíclica, ya que se podría representar sobre un círculo en vez de en forma lineal para indicar esta reiteración. Si se convolucionan dos funciones de tipo rectángulo una suaviza a la otra y se obtiene una función no nula en más puntos y que va tomando valores menores en los extremos (Figura 4.2 y 4.3).

Supongamos que N , número de puntos muestrales, se mantiene constante mientras que aumenta el número de valores no nulos de las funciones rectángulo, por ejemplo extendiéndose a más de la mitad del círculo que representa al periodo de la función. Al hacer la convolución, los valores no nulos también se extienden más, pudiendo hacer que los extremos se solapen modificando los valores resultantes, puesto que N permanece constante. El resultado entonces es erróneo aunque la operación bien definida dé este resultado.

Este fenómeno aparece en la transformada discreta y su origen está en tomar a las funciones como periódicas. De este modo, en transformadas continuas de funciones periódicas también aparece convolución cíclica cuantificable para dos funciones f y g de periodo 2π por la expresión:



*Discretización en forma circular
(representación de periodicidad)*

Representación lineal

FIGURA 4.2. *Discretizado de una función con $3/4 N$ ceros*

$$h(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta') g(\theta - \theta') d\theta' \quad (4.32)$$

La convolución cíclica de dos secuencias de N elementos se define como:

$$h(n) = \sum_{n'=0}^{N-1} f(n') g(n - n' + NH(n' - n)) \quad (4.33)$$

con H función de Heaviside:

$$H = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como $n - n'$ puede variar entre $-(N-1)$ y $(N-1)$ se tiene que añadir un término N a $n - n'$ cuando $n' > n$ para que $n - n'$ vaya de cero a $N-1$. Para esto es para lo que vale el término $NH(n' - n)$ que se necesita en los cálculos. Sin embargo, tomar $g(n)$ en sentido cíclico nos permite omitir este término de las expresiones (Bracewell, 1978).

A efectos prácticos, una forma de evitar los efectos de convolución cíclica es tomar las funciones rodeadas de ceros para así no tener efectos perturbadores en los bordes. Es decir, en vez de usar la función g original en la convolución, se usa g' definida como:

$$g'(k) = \begin{cases} g(k), & \text{si } 0 \leq k < N \\ 0, & \text{si } N \leq k < 2N \end{cases} \quad (4.34)$$

con n normalmente 2, es decir, se duplican las dimensiones del área usada. No se puede utilizar al mismo tiempo que una función ventana (Tziavos, 1993), pero los resultados con su uso son superiores en precisión, por lo que es más conveniente.

Si las funciones discretas que se convolucionan son de dos dimensiones, tenemos una mayor zona de borde en donde se manifiestan los efectos cíclicos.

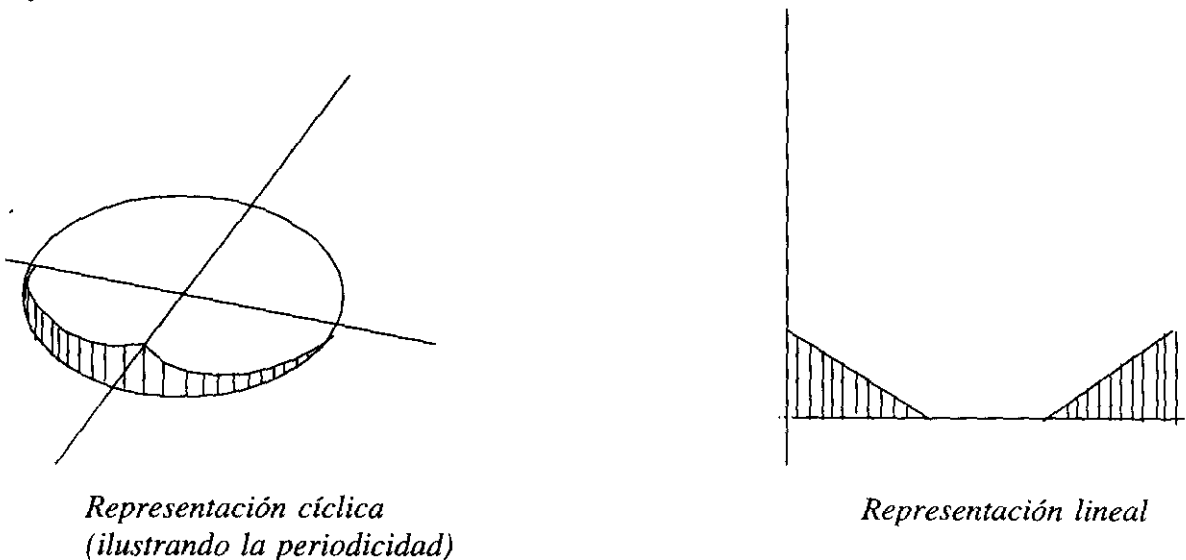


FIGURA 4.3: Efecto de la convolución como las de la figura 4.2.

4.4. APLICACION DE METODOS ESPECTRALES AL CASO DE LA FORMULA DE STOKES. APROXIMACION PLANA

Para evaluar la fórmula de Stokes con las expresiones precedentes, en primer lugar hay que aproximar la esfera localmente por un plano tangente y expresar la integral de Stokes en términos de coordenadas planas. La función de Stokes tiene entonces la forma:

$$S(\Psi) \sim \frac{1}{\frac{\Psi}{\sin \frac{\Psi}{2}}} \sim \frac{2}{\Psi} \quad (4.35)$$

En coordenadas polares se verifica $\Psi = s/R$, y aproximando $\sin \Psi$ por Ψ , la expresión (4.35) tiene la forma:

$$S(\Psi) = \frac{2R}{s} \quad (4.36)$$

sustituyendo (4.36) en (4.13) y por la relación $R^2 d\sigma = s ds d\alpha$, la fórmula de Stokes es:

$$N = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g R^2}{s} d\sigma = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g}{s} s ds d\alpha \quad (4.37)$$

con σ el área de integración que comprende $s \in [0, s_{\max}]$ y $\alpha \in [0, 2\pi]$. Si se usan coordenadas cartesianas se tiene:

$$s ds d\alpha = dx dy \quad (4.38)$$

$$s = [(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{1/2} \quad (4.39)$$

con lo que (4.37) toma la forma de una integral de convolución:

$$N = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\sigma} \frac{\Delta g}{\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}} dx dy = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x_p, y_p) * l_N(x_p, y_p) \quad (4.40)$$

denotamos l_N a la aproximación plana de la función núcleo de Stokes.

Por el teorema de la convolución, se puede evaluar usando las transformadas directa y la inversa:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}(F(\Delta g)F(l_N)) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}(\Delta G L_N) \quad (4.41)$$

(denotamos con mayúsculas a las transformadas).

ΔG , por construirse a partir de muestras finitas de datos, ha de calcularse usando la transformada discreta, con lo que aparecerán, en mayor o menor medida, los problemas mencionados en el apartado anterior:

$$\Delta G(u_m, v_n) = F\{\Delta g(x_k, y_l)\} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta g(x_k, y_l) e^{-2\pi i (\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \Delta x \Delta y \quad (4.42)$$

con M y N el número de puntos en cada dirección con los que cuenta la muestra.

En cuanto a l_N , lo que usamos en realidad no es la propia l_N sino otra función:

$$l_N = \begin{cases} [(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{-1/2} & \text{si } x_p \neq x, y_p \neq y \\ 0 & \text{si } x_p = x \text{ e } y_p = y \end{cases} \quad (4.43)$$

puesto que sino sería una función singular en el origen. Se salva tal singularidad al considerar la integración de la zona interna de forma separada. Como tal zona interna se elige un círculo tan pequeño que Δg se pueda considerar constante en él. De este modo, la contribución de la parte interna a la ondulación del geode se puede tomar como (Heiskanen y Moritz, 1967):

$$\delta N(x_p, y_p) = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\gamma \sqrt{\pi}} \Delta g(x_p, y_p) \quad (4.44)$$

para datos cuadrículados a intervalos Δx y Δy .

Aunque ésta es la forma más usual de considerar tal singularidad, también hay métodos que lo que hacen es modificar la función de Stokes para evitar la singularidad (Zhao, 1989).

La transformada de l_N puede evaluarse tanto de forma continua como discreta. Si se usa la primera, se tiene la expresión:

$$L_N = \iint_{-\infty}^{\infty} l_n(x, y) e^{-2\pi i (ux + vy)} dx dy = \frac{1}{(u^2 + v^2)^{1/2}} = \frac{1}{q} \quad (4.45)$$

con q frecuencia radial (Sideris, 1994). Al resultado de esta expresión lo llamamos espectro analíticamente definido. A la vista de la expresión de la fórmula de Stokes, analíticamente definida, se puede ver que la convolución tiene el efecto de un filtrado: la función de Stokes se puede considerar en cierto modo como un filtro de paso bajo, puesto que el espectro de Δg , al usar (4.41), se va a dividir por $(u^2 + v^2)^{1/2}$, con lo que se van a atenuar sus altas frecuencias. Como resultado N va a estar, como ya hemos citado en alguna ocasión, influido sobre todo por las frecuencias bajas y medias del campo.

Si en lugar del espectro analíticamente definido se utiliza también la transformada discreta tenemos:

$$L_N(u_m, v_n) = F\{l_N(x_k, y_l)\} = \Delta x \Delta y \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} l_N(x_k, y_l) e^{-2\pi i (\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad (4.46)$$

Hay diferencias en las expresiones anteriores entre usar anomalías puntuales o anomalías medias para evaluarlas. Para construir las medias interviene la función rectángulo. Su transformada, la función senc en dos dimensiones, nos sirve para relacionar el espectro generado a partir de datos tomados como puntuales con el que usa datos como promedios de la zona donde están. Se define a tal función como:

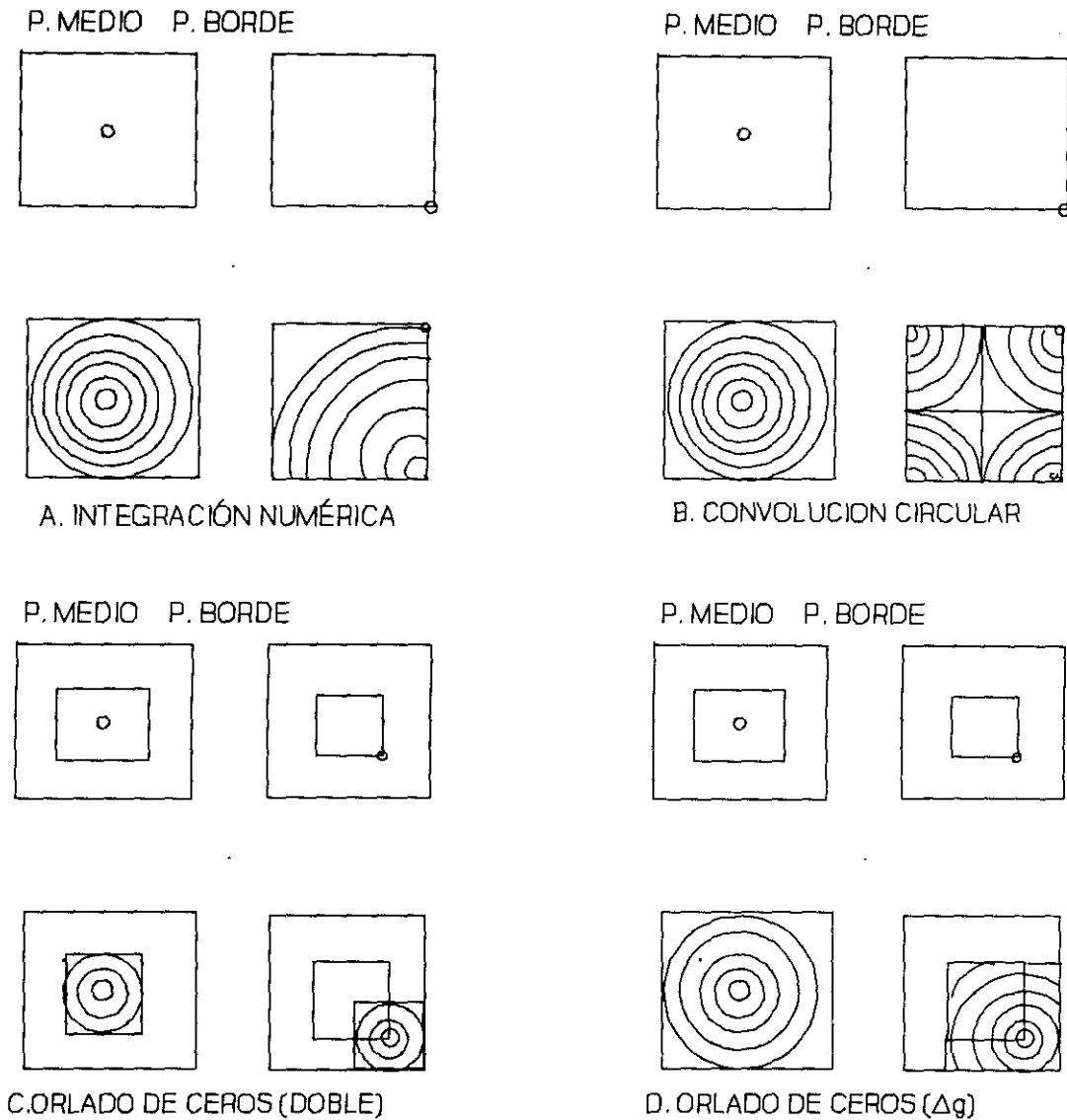


FIGURA 4.4: Convolución circular y formas de evitarla con orlado de ceros en las dos o en una de las funciones

$$senc(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \quad (4.47)$$

que verifica las propiedades:

$$senc(0) = 1, \quad senc(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} senc(x) dx = 1$$

y que también se conoce como función filtro o interpolador. Si se suponen los datos como medias sobre los intervalos $\Delta x \Delta y$ se multiplica según (4.17) y (4.29) por:

$$\Delta x \Delta y \text{ senc}(u \Delta x) \text{ senc}(v \Delta y) \quad (4.48)$$

por (4.22):

$$\Delta x \Delta y \operatorname{senc}(m \Delta u \Delta x) \operatorname{senc}(n \Delta v \Delta y) \quad (4.49)$$

por (4.24):

$$\Delta x \Delta y \operatorname{senc}\left(\frac{m}{M}\right) \operatorname{senc}\left(\frac{n}{N}\right) \quad (4.50)$$

Así, la ondulación del geode si las anomalías usadas son anomalías medias se puede expresar como:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}\left\{\operatorname{senc}\left(\frac{m}{M}\right) \operatorname{senc}\left(\frac{n}{N}\right) \Delta \bar{G}(u_m, v_n) \cdot L_N(u_m, v_n)\right\} \quad (4.51)$$

con $\Delta \bar{G}$ espectro de las anomalías medias.

En cuanto a la decisión de qué es más conveniente: usar (4.45) o (4.46), nos encontramos con problemas. Teóricamente, si se usa el espectro definido analíticamente, (4.45), los problemas asociados a la transformada discreta del apartado anterior no van a aparecer. Sin embargo, si se usan transformadas discretas de ambas funciones en las condiciones óptimas -intervalos de cuadrícula lo suficientemente pequeños-, los resultados son superiores en precisión que al usar los definidos analíticamente, que pueden dar lugar a errores de incluso unos cuantos centímetros (Sideris y Li, 1993). Para explicar esto, si se usa el espectro definido analíticamente tenemos que N viene dado por la expresión:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}\{\Delta G(u_m, v_n) L_N^1(u_m, v_n)\} + \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}\{\Delta G(u_m, v_n) L_N^2(u_m, v_n)\} \quad (4.52)$$

donde por la linealidad de (4.40) y (4.41):

$$L_N^1 = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} l_N(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4.53)$$

y por la simetría de la función de Stokes tenemos que:

$$L_N^2 = 2 \int_{T/2}^{\infty} \int_{T/2}^{\infty} l_N(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (4.54)$$

Si los intervalos de muestreo son lo suficientemente pequeños como para que el efecto de alisado de la función o "aliasing" sea despreciable, el primer término, (4.52) corresponde a la convolución discreta y el segundo será entonces el error debido al espectro definido analíticamente. Así, el espectro discreto da en la práctica resultados tan superiores a los del espectro definido analíticamente que en trabajos de comparación de geoides generados por distintos métodos sobre un área, predicciones con este último tipo de espectro, se han desestimado (Arabelos y Tziavos, 1994). Al usar los espectros definidos de forma discreta, como se vió en el apartado anterior, la convolución va a ser circular en lugar de lineal. Esto da lugar a distorsiones en los resultados, puesto que se introducen problemas en los bordes por la supuesta periodicidad de las funciones al discretizar. Ya se dijo que la forma de evitar

esto es usando orlas de ceros alrededor de las funciones que intervienen en la convolución. En el caso de la fórmula de Stokes, en la práctica se ve que los mejores resultados se obtienen si se orla sólo a las anomalías de la gravedad y se usa como zona de cálculo toda completa (incluso la parte de ceros), con lo que en la práctica se van a obtener resultados análogos a los de integración numérica (Sideris y Li, 1993, Tziavos, 1993). Si se aplica el método del orlado de ceros en su forma convencional, es decir, a las dos funciones, los resultados no serán del todo correctos en los bordes, ya que sólo se usan parte de los datos en la evaluación. Los efectos de uno y otro caso se ilustran en la figura 4.4 en donde las partes superiores corresponden a Δg y las inferiores a la función de Stokes (Sideris, 1994).

4.5. APROXIMACION ESFERICA EN LA FORMULA DE STOKES

Anteriormente hemos visto la aproximación plana de la fórmula de Stokes. Por lo tanto, sólo será válido si nos mantenemos en las cercanías del punto de cálculo.

Algunos autores han descrito metodología y formulación sobre términos correctores del efecto de tomar tal aproximación. Los errores de larga longitud de onda aparecen si nos extendemos a varios cientos de kilómetros en cada dirección. Si se ha eliminado la influencia de las largas longitudes de onda de los datos, la contribución de estas zonas puede despreciarse y el término correctivo es prácticamente cero. De este modo, se justifica el que en aplicaciones sobre zonas no demasiado extensas actuando bajo la metodología general de eliminación-restitución, no se tenga en cuenta. El término corrector para el potencial perturbador, aplicable por lo tanto para ondulaciones del geoide y para anomalías de la gravedad, es función de la distancia esférica al centro del área local de aplicación, y viene dado por la expresión:

$$\epsilon_T = \left(\frac{\psi/2}{\text{sen}(\psi/2)} \right)^k \quad (4.55)$$

con $k=1$ ó 3 , siendo la elección más correcta $k=3$ (Sideris, 1994). Luego el potencial corregido será:

$$T_c(\psi, \alpha) = \epsilon_T T(x, y) \quad (4.56)$$

con α acimut esférico.

Sin embargo, si la zona se extiende más, la aproximación plana sí puede dar lugar a errores grandes. Así, resulta más conveniente utilizar la fórmula de Stokes en aproximación esférica. De tal forma por la equivalencia entre elementos diferenciales $d\sigma = \cos\varphi d\varphi d\lambda$ tendremos:

$$N(\varphi_p, \lambda_p) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g(\varphi, \lambda) S(\varphi_p, \lambda_p, \varphi, \lambda) \cos\varphi d\varphi d\lambda \quad (4.57)$$

que al utilizar anomalías dadas sobre una cuadrícula se discretiza como:

$$N(\varphi_p, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_l) \cos\varphi_j S(\varphi_p, \lambda_k, \varphi_j, \lambda_l) \Delta\varphi \Delta\lambda \quad (4.58)$$

Esta expresión, de momento no tiene la forma de convolución. Para que así sea hace falta suponer algunas aproximaciones con las que la ondulación del geode se puede evaluar por transformadas de Fourier en una o dos dimensiones. Por ejemplo, una propuesta es tomar $\cos\varphi_p \cos\varphi = \cos^2\varphi_m$, o incluso la más precisa $\cos\varphi_p \cos\varphi = \cos^2\varphi_m \sin(\varphi_p - \varphi)/2$, donde el subíndice m indica media en el área de cálculo. Con esto sí que toma la forma de una convolución y se puede evaluar usando las transformadas habituales en dos dimensiones. En el centro del área, esta formulación da buenos resultados, pero según nos aproximemos a los bordes de la zona, aumentan los errores producidos. Así, no es posible evaluar N sobre áreas grandes (propósito de la transformada esférica) con precisión y además, es necesario mucho tiempo de ejecución si se utiliza el orlado de ceros en toda la zona. Para minimizar el error de la aproximación, Fosberg y Sideris (1993) proponen subdividir el área en zonas más pequeñas equidistantes en latitud que se solapan entre sí (transformada esférica multibanda) y en cada una de ellas se toma latitud constante e igual a la del paralelo medio de la banda. La base de este método es que la aproximación esférica da lugar a resultados exactos a lo largo del paralelo de latitud media (es decir, donde la aproximación no es tal). La solución se obtiene por interpolación lineal de las soluciones obtenidas por cada una de las bandas solapadas en las que se encuentra el punto de cálculo. El número de paralelos para subdividir la zona se selecciona según la precisión que se quiera. Aproximar con varias bandas es numéricamente ventajoso sólo si la zona es grande. Si no lo es, no se aumenta la precisión (Arabelos y Tziavos, 1994).

Esta aproximación tiene limitaciones al no poder dar el resultado exacto en los puntos que no se encuentren sobre el paralelo medio de la zona o de la banda. Haagmans et al (1993) proponen un método de solución exacta por medio de evaluaciones de transformadas de Fourier en una dimensión basado en el hecho de que la aproximación anterior da resultados correctos para algunos de los puntos de cálculo. Se evalúa la integral de Stokes esférica discreta paralelo a paralelo. Para ello, se toma un paralelo de latitud φ_l . En él, la distancia esférica ψ cambia sólo en función de la diferencia de longitudes, $\lambda_k - \lambda_l$ y Δg sólo en función de λ_j . La integral discreta de Stokes, si se toman todos los paralelos, queda:

$$N(\varphi_p, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0}^{M-1} \Delta g(\varphi_j, \lambda_l) \cos\varphi_j S(\varphi_p - \varphi_j, \lambda_k - \lambda_l) \Delta\lambda \right] \Delta\varphi \quad \varphi_l = \varphi_1, \dots, \varphi_N \quad (4.59)$$

Los corchetes contienen una expresión que se corresponde con una convolución discreta de una dimensión con respecto a λ y por lo tanto puede evaluarse por transformadas de una dimensión a lo largo de cada paralelo. La mejor ventaja de este método es que da exactamente el mismo resultado que el obtenido por integración numérica. Además, sólo necesita manejar cantidades unidimensionales ahorrando así mucho tiempo comparado con el método en dos dimensiones.

4.6. IMPLEMENTACION PRACTICA DE METODOS ESPECTRALES EN ORDENADORES

La forma de utilizar usualmente este tipo de métodos en ordenadores da lugar a algunos problemas. En la mayor parte de los programas que versan sobre la materia, se

definen las transformadas discretas directa e inversa por su número de onda, por ejemplo k en vez de x_k , longitud de onda. Se toman $\Delta x \Delta y = 1$ y $\Delta u = \Delta v = 1$. Así, los resultados deben reescalarsse multiplicándolos por $MN \Delta x \Delta y = T_x T_y$.

También hay problemas según donde se defina el origen de coordenadas. La forma normal suele suponerlo en la esquina inferior izquierda de los datos en ambos dominios. En caso de que se definiera en el centro se debe modificar el resultado si el programa usado no lo considera así. Para hacer esto, se usan propiedades de desplazamientos de transformadas de Fourier con lo que se determinan factores tales que al multiplicar los resultados obtenidos por ellos se corrigen.

En la ejecución de subrutinas relacionadas con las transformadas discretas de Fourier, para evitar errores de "aliasing" no debe tomarse el último punto de los datos de la secuencia. Se sustituye, dado el carácter periódico, por el valor primero de la secuencia en el que comenzará el siguiente periodo.

Por último, aunque no está realmente vinculado a un fenómeno encontrado al programar el método en ordenadores, como es la forma en que normalmente se hace, mencionamos la transformada rápida de Fourier. Es un algoritmo que sirve para evaluar transformadas discretas de forma rápida utilizado desde 1965. La simplificación en que se basa se puede ver desde dos puntos de vista.

Por un lado, a partir de la definición de la transformada discreta, la relación entre el muestreo de valores de una función y sus transformadas puede escribirse de forma matricial. Es posible hacer una factorialización de tal matriz dando lugar a simplificaciones. En las matrices de la factorialización aparecen una serie de ceros, en concreto cada una de ellas sólo tendrá dos elementos no nulos por fila (Bracewell, 1978), que reducen el número de multiplicaciones y sumas a evaluar. Será necesario hacer entonces $2N$ productos por factor mientras que con la matriz original sin factorializar eran N^2 . El número de factores K viene dado por la relación $2^K = N$. Así se puede cuantificar la reducción del tiempo empleado para evaluar las transformadas con este algoritmo: por ejemplo, en una dimensión de un número de multiplicaciones proporcional a N^2 , se pasa a necesitar un número es proporcional a $N \log_2 N$ (Sideris, 1994), y además, algunas multiplicaciones son triviales por los unos que aparecen en las matrices. La posibilidad de aplicar estas reducciones justifica que las secuencias deban contar con un número de elementos preferiblemente potencia de dos.

Otra forma de ver la transformada rápida de Fourier se basa en que una secuencia de N elementos se puede separar en dos secuencias más cortas de $N/2$ elementos cada una, metiendo los elementos de posición par en la primera y los de impar en la segunda. Cada una de ellas posee una transformada y a partir de cada una se puede obtener una secuencia completando con ceros intercalados. La transformada que se desea originariamente se puede obtener de la suma de las dos transformaciones aplicando teoremas de la transformada discreta de Fourier (extensión y traslación al origen conveniente). Así, la transformación de una secuencia de N elementos se divide dando lugar a dos transformaciones de la mitad de elementos cada una lo que supone una reducción del tiempo a la mitad.

Además de estas dos reducciones existen otras para cantidades que no sean potencias de dos, pero no son tan rápidas, por ejemplo para secuencias con N divisible entre tres (Bracewell, 1978). Así, siempre se tiende a trabajar con potencias de dos, y cuando la disposición de datos o lo hace posible, se suelen completar las secuencias con ceros, pero al hacerlo, no se afecta al espectro de potencia, pero sí se producen diferencias en fase.

En realidad, las subrutinas estandar disponibles sobre transformadas de Fourier, lo que usan es esta transformada rápida. Al trabajar con ella, aparece el problema de convolución circular, ya que se basa en expresiones discretas.

4.7. TRANSFORMADA DE HARTLEY

En los últimos años, la transformada de Fourier ha sido muy utilizada en la resolución de problemas de la geodesia física y en particular, en el que nos ocupa de determinación de geoide, puesto que es rápida y da resultados sobre la misma cuadrícula que los datos empleados, lo que es ventajoso para muchas aplicaciones posteriores. Aún así, no es la solución perfecta en cuanto a ahorro de tiempo se refiere. Las señales con las que se trabaja son reales, mientras que la transformada es compleja. Esto no crea problemas operativos, ya que es posible calcular transformadas discretas de Fourier incluso de funciones reales. Lo que sí ocurre es que al tratarse de una transformada compleja, las operaciones en las que interviene, necesitan el doble de tiempo y de memoria que si se trata de operaciones con reales.

De este modo, con las señales con las que se viene trabajando, resulta más práctico utilizar una transformada real. Según esta idea, se comienza a usar la transformada de Hartley, real, que además expresa de una forma más simétrica la relación entre una función real y su transformada. También admite formularse por algoritmos que hacen más rápida su evaluación, ya que sus propiedades, tanto de la transformada individualmente como de su comportamiento en convoluciones, son análogas a las de la transformada de Fourier (Bracewell, 1978). Es útil para aplicarse en la resolución de los mismos problemas que hemos visto para la transformada de Fourier.

En dos dimensiones, la transformada de Hartley viene dada por la expresión:

$$H(u,v) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} h(x,y) \text{cas} u x \cdot \text{cas} v y dx dy = H\{h(x,y)\} \quad (4.60)$$

y su inversa:

$$h(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} H(u,v) \text{cas} u x \cdot \text{cas} v y du dv = H^{-1}\{H(u,v)\} \quad (4.61)$$

donde $\text{cas } A = \cos A + \text{sen } A$.

Sus expresiones discretas son:

$$H(m\Delta u, n\Delta v) = \Delta x \Delta y \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k\Delta x, l\Delta y) \text{cas} \frac{2\pi mk}{M} \text{cas} \frac{2\pi nl}{N} \quad (4.62)$$

$$h(k\Delta x, l\Delta y) = \frac{1}{T_x T_y} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} H(m\Delta u, n\Delta v) \text{cas} \frac{2\pi mk}{M} \text{cas} \frac{2\pi nl}{N} \quad (4.63)$$

Estas transformadas son separables: permiten la flexibilidad de conseguir la transformada de dos dimensiones aplicando dos veces la transformada en una dimensión. También aparece a menudo en aplicaciones prácticas la versión no separable, en la que el producto $\text{cas}(2\pi mk/M) \cdot \text{cas}(2\pi nl/N)$ se reemplaza por $\text{cas}(2\pi mk/M) + \text{cas}(2\pi nl/N)$.

Al usar esta transformada, que como hemos dicho es real, y por lo tanto tiene un espectro real, se ahorra mucho tiempo o bien se pueden usar muchos más datos en el mismo tiempo. La reducción del tiempo de ejecución al pasar de complejo a real, en teoría es del 50%, pero en la práctica varía del 20% al 30% (Tziavos, 1993, Sideris, 1994).

La transformada de Hartley puede utilizarse, como hemos dicho antes, para evaluar la fórmula de Stokes, tanto con espectros discretos como con espectros analíticamente definidos. Es posible utilizarla con orlado de ceros, lo que resulta necesario ya que en versiones discretas de convoluciones, también aparecen los problemas asociados a las convoluciones circulares por interpretarse como tales.

Para que se pueda utilizar, la muestra de datos debe tener una longitud potencia entera de 2 (Tziavos, 1993).

4.8. GEOIDE EN LA PENINSULA IBERICA

El geoide determinado en el capítulo 3 se comparó con un geoide elaborado mediante el uso de las técnicas espectrales descritas, más concretamente, la transformada de Hartley, en la Península Ibérica (Sevilla, 1994 a y b, 1995, Sevilla y Rodríguez-Velasco, 1995). Con estas comparaciones, se pretendió, por un lado, estimar las diferencias atendiendo a los métodos usados, y por otro, los asociados a cálculo local (como en el capítulo anterior) o regional (como el geoide que nos ocupa).

El geoide utilizado se elaboró bajo la metodología general de eliminación-restitución, utilizando el modelo de geopotencial OSU91A. Los efectos topográficos se estimaron usando la segunda reducción de Helmert, es decir, las masas se condensaron en una capa inmediatamente sobre el geoide, ya que las anomalías resultantes son las que, en teoría verifican más requisitos del problema de contorno de Stokes. Para ello se usó un modelo discretizado a 1000 x 1000 metros, elaborado a partir del modelo descrito en el primer capítulo, y ETOPO5U para completar las zonas no cubiertas por éste. Se utilizaron como datos gravimétricos, 215.241 anomalías aire libre de la península y alrededores (76114 terrestres y 139127 marinas), todas ellas transformadas al sistema GRS80 y previamente validadas, que cubren una zona de límites -10,5 y 5,5 en longitud y 35 y 45 en latitud.

En los cálculos se usó un espacio discreto y se añadieron ceros (según la técnica descrita) alrededor de la señal para evitar los efectos de convolución circular.

La predicción se hizo en 80384 puntos. Estas predicciones se han controlado con estaciones GPS en la Península, teniendo una estimación de su precisión de 1 ppm (M.J. Sevilla, 1995).

4.9. COMPARACION ENTRE GEOIDE LOCAL POR COLOCACION Y GEOIDE REGIONAL POR METODOS ESPECTRALES

En este apartado se presenta la comparación entre el geoide referido en la sección anterior y uno de los geoides locales del capítulo anterior, en concreto el generado a partir de datos terrestres y marinos, es decir, en condiciones más análogas. La comparación se hizo sobre los puntos de predicción del geoide local. Para ello se interpolaron los resultados del geoide regional sobre la zona de comparación usando spline bicúbico. Con esta comparación se pretendió estudiar la diferencia de resultados al utilizar distintos métodos y además, de hacer predicciones locales a regionales. Ya sólo por este último motivo, esperamos unas diferencias de larga longitud de onda.

Las diferencias entre geoides son en media muy pequeñas (Tabla 4.1) y las curvas de nivel de los geoides (Figura 4.5) reproducen perfiles bastantes similares con diferencias en zona de montaña (Sierra de Jabalambre) y en la esquina inferior derecha de la zona, que

corresponde con la isla de Ibiza (sin contorno en la figura), por lo que constituye una región conflictiva. Se ve con más detalle en la figura 4.6. que las mayores diferencias entre los geoides se encuentran en la zona montañosa referida. La localización sobre la zona más montañosa lleva a pensar que las diferencias pueden deberse sobre todo al tratamiento de las masas topográficas. En un caso, efecto de las desviaciones de la topografía real respecto de una topografía media y en el otro segunda reducción de Helmert. Además, el discretizado de los modelos considerados ha sido distinto, y un accidente geográfico como sobre el que se localizan las diferencias, de amplitud no muy grande, puede no ser registrado totalmente. Recuérdese que la contribución de la topografía en algunos puntos de esta zona llega a alcanzar máximos de 1 metro -valor de las diferencias mayores- (ver sección 3.6). En otras zonas los geoides difieren muy poco, luego las discrepancias debidas al método, al carácter local/global, datos empleados o a que en un caso se trate de geoides y en otro en realidad de cuasigeoides, parecen estar por debajo de los 20-30 centímetros. Al ver la localización de las diferencias obtenidas se ve que mientras en general, a la vista del histograma de las mismas (figura 4.8), parecen estar distribuidas de forma bastante similar, en la parte montañosa son

	MEDIA	D.T.	MIN	MAX	RG.
G.LOCAL MIXTO	49.995 m	1.042 m	47.73 m	52.96 m	5.23 m
G.REGIONAL	49.981 m	0.876 m	47.90 m	52.24 m	4.34 m
DIFS (COL-FHT)	1.4 cm	36.3 cm	-64 cm	1.54 m	2.18 m

TABLA 4.1: Estadística de los geoides y de las diferencias sobre la zona.

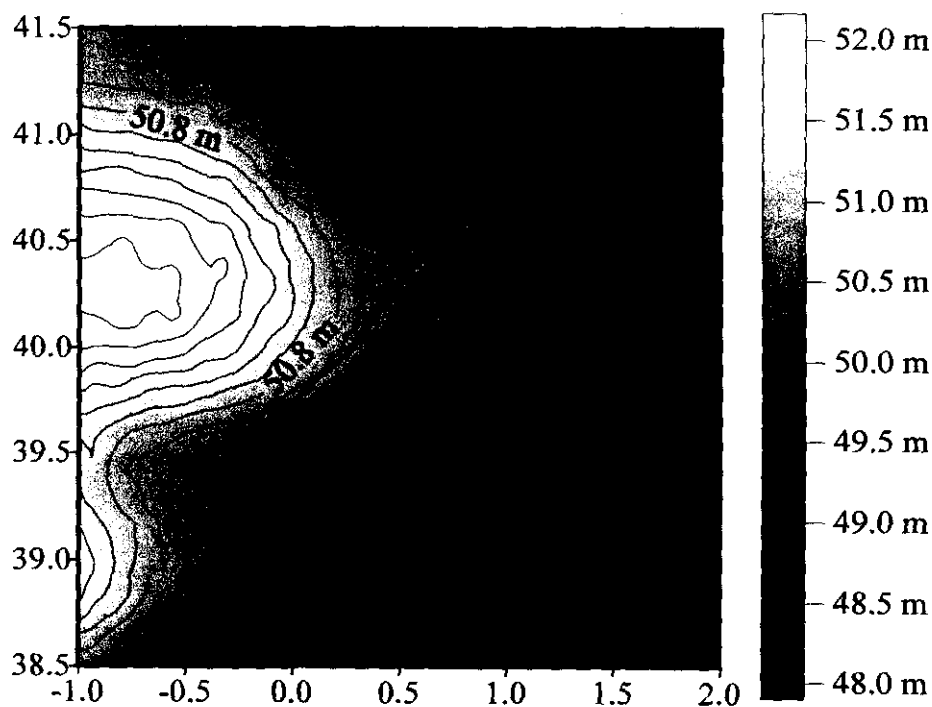


FIGURA 4.5: Curvas de nivel del geode calculado por métodos espectrales en la zona de comparación.

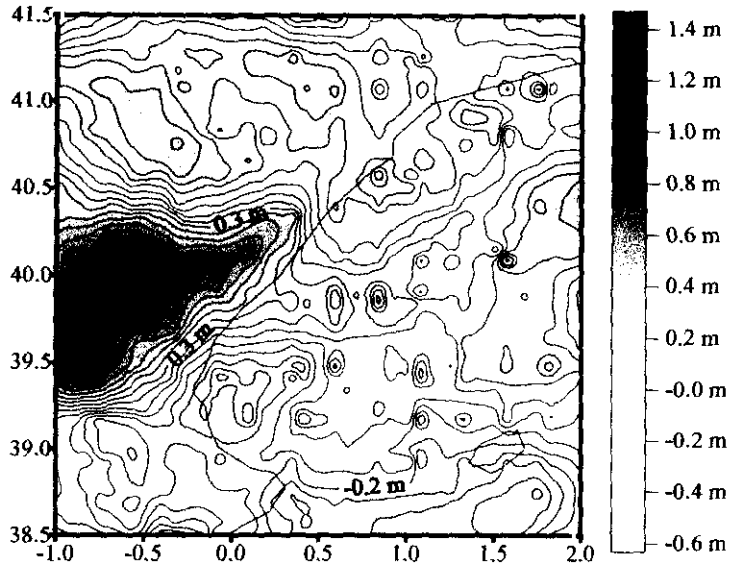


FIGURA 4.6: Curvas de nivel de las diferencias contorneadas a 20 cms.

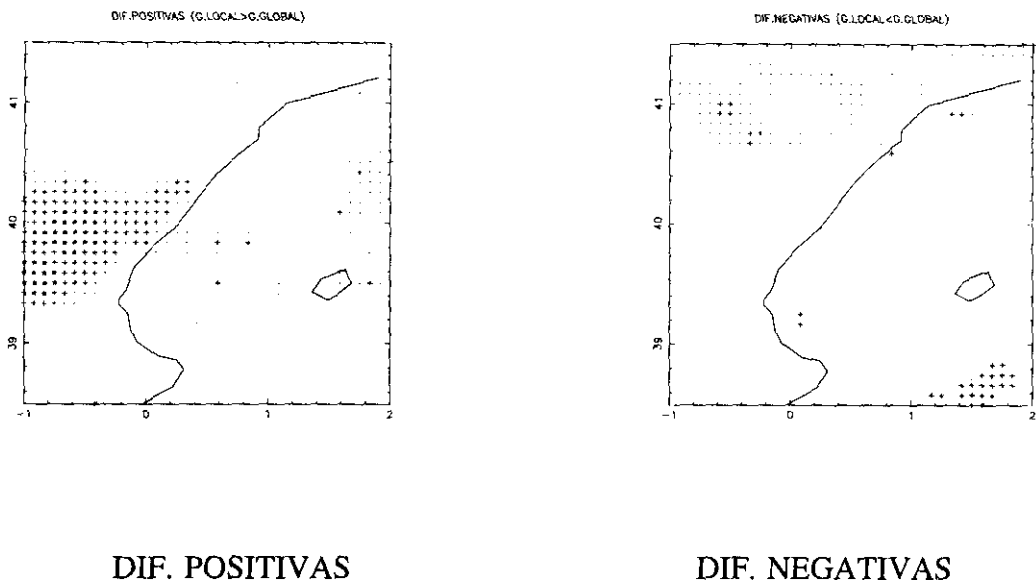


FIGURA 4.7: Localización de las diferencias según su signo y cuantía:

- * mayores que 50 cms
- + entre 30 y 50 cms
- . entre 10 y 30 cms

sobre todo positivas, esto es, el geode calculado usando la corrección de un modelo de topografía residual, es algo más alto que el geode regional del apartado anterior (ver figura 4.7). En esta misma figura se pueden apreciar algunas diferencias puntuales en el mar. Sobre este respecto, cabe añadir la gran diferencia existente entre los datos empleados en uno y otro caso (más del doble de datos de la zona en el geode regional, al incluir más trayectorias de barcos gravimétricos).

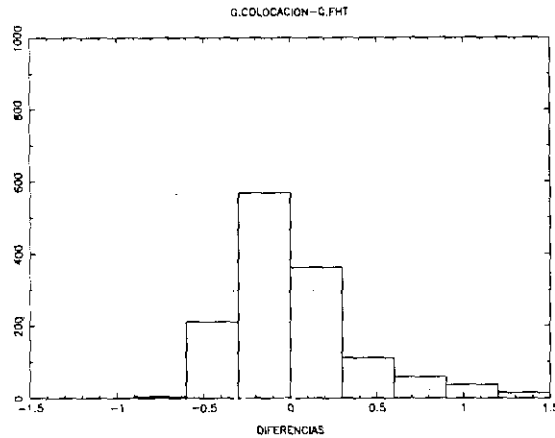


FIGURA 4.8: Histograma de las diferencias *g.colocación* - *g.Hartley*.

Como parte de las diferencias se piensa que pueden atribuirse a los distintos métodos y modelos empleados para el cálculo de la contribución de la topografía, se procedió a una segunda comparación, esta vez eliminando la parte de *N* de colocación correspondiente a las masas topográficas. Esto lleva a asegurar la hipótesis si las diferencias disminuyen, aunque la comparación no tiene sentido físico en sí misma. Como se podía pensar a la vista de la figura 4.7, se reduce el número de diferencias positivas, que eran las situadas en la zona montañosa. La estadística de las nuevas diferencias aparece en la tabla 4.2, y sus curvas de nivel en la figura 4.9.

MEDIA	D.TIPICA	MINIMO	MAXIMO
0,5 cm	22 cm	-64 cm	81 cm

TABLA 4.2: Estadística de las diferencias sin N_{topog} .

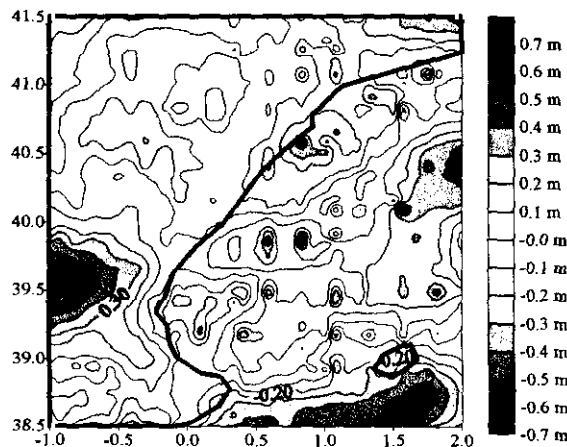


FIGURA 4.9: Diferencias obtenidas en la nueva comparación.

4.10. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se ha comparado un geoide gravimétrico determinado por aplicación de métodos espectrales con los resultados anteriores obtenidos por colocación. Las diferencias obtenidas parecen deberse a haber tenido en cuenta la topografía de forma distinta y con distinta densidad de puntos.

CAPITULO 5

ALTIMETRIA POR SATELITES

La altimetría por satélites es una técnica de medida que produjo un cambio importante a partir de los años 70 en la provisión, entre otros, de datos geodésicos, al proporcionar datos marinos de forma global y continua. La superficie oceánica está casi en equilibrio y su desviación respecto de una superficie de nivel debe ser, en principio, del orden de 1-2 metros, producida sobre todo por las corrientes, por lo que las medidas de altimetría dan una superficie equipotencial del campo de gravedad con esta precisión.

En este capítulo se habla del método de altimetría por satélites para elaborar geoides o bien para mejorar otros ya existentes, y los problemas teóricos que se encuentran en su manejo. Por último se estudia la posibilidad de la inversión de datos de altimetría produciendo gravedades.

5.1. PRINCIPIOS DE ALTIMETRIA

En la actualidad los datos de altimetría por satélites son ampliamente utilizados en distintos campos de la geodesia y de otras ciencias afines, en particular para el fin que nos ocupa en este trabajo de determinación de la parte de larga y media longitud de onda del campo de la gravedad y del geoide marino. La gran ventaja de los datos de este método es su distribución global aunque no todos los datos disponibles serán útiles como se verá más adelante. Esta distribución global puede ser útil para correlacionar datos referidos a distintos sistemas locales (Groten y Müller, 1991) aunque en esta aplicación nos encontramos con el problema de que las zonas de conexión entre sistemas, las costeras, son las que presentan más problemas de distorsiones y sistematismos- la puesta a punto del altímetro tarda en ocasiones unos 15 kilómetros tras pasar al mar-, lo que produce un alto nivel de ruido en la medida. Los mareógrafos suelen usarse como apoyo para esta conexión de sistemas de referencia.

El observable en altimetría es el resultado de medir con un reloj el tiempo transcurrido desde que el radar emite un pulso, generalmente de radiación microondas, hasta que vuelve al receptor tras ser reflejado por la superficie oceánica para determinar la distancia entre el satélite y la superficie reflectora (Shum et al, 1987). Se necesita un reloj de resolución de 3 ps ($1\text{ps}=10^{-12}$ s) para alcanzar una precisión centimétrica (Rummel, 1992). En realidad, lo que se tienen son medias de varios pulsos consecutivos, ya que las señales de retorno o ecos de puntos individuales tienen cada uno sus propias características. Al tomar medias de varios pulsos se reducen incertidumbres. Por ejemplo para SEASAT se hacía la media de 50 pulsos y para el ERS-1, de los recibidos durante un segundo, para después ajustar la forma de una curva suave ya que no se espera que sea rugosa. La medida obtenida, por lo tanto, es la altitud instantánea del satélite sobre el mar, y también se utiliza la información que proporciona la intensidad y estructura de los pulsos reflejados. El observable no es entonces un funcional puro de T, puesto que involucra a otras cantidades como la superficie topográfica estacionaria del mar y la corrección orbital. Cuenta con la parte de altitud del mar sobre el elipsoide, tanto estática como variable con el tiempo. La parte estática o de largo periodo consiste en lo que llamamos superficie media del mar, y la parte dinámica de la superficie oceánica son las variaciones de alta frecuencia debidas a corrientes, mareas y otros fenómenos. Las observaciones útiles son las que se han corregido de todos los efectos para los que se disponga de un modelo adecuado. Así se tiene:

$$h=h_s+h_c+h_a+h_{stm}+h_m+s+r \quad (5.1)$$

En esta fórmula llamamos h a la altitud real a la que se encuentra el satélite, h_s a la medida instantánea. Denotamos por h_c a la corrección por posición del centro de masas del satélite, necesaria ya que la altitud se determina según un sistema definido por la posición de tal punto. Para que el satélite esté operativo, se deben verificar ciertas condiciones en cuanto a la posición de sus elementos se refiere (Catalán y Catalán, 1996a): por un lado, la antena del radar debe estar orientada en la dirección de la normal al océano, el panel solar tiene que estar en la perpendicular al vector que une Sol y satélite, y también es conveniente que el módulo de propulsión esté iluminado durante el mayor tiempo posible para minimizar la cantidad de calor interno necesario para evitar que se congele el combustible. Todas las maniobras necesarias para que se den estas condiciones provocan variaciones en la posición del centro de masas tanto geocéntrica como respecto al Sol. A esto se le añade el hecho de que el consumo de combustible durante las maniobras hace variar la distribución de masas en el satélite y por lo tanto la posición de su centro de masas.

La corrección por retraso en la propagación de la señal debido a la atmósfera es h_a , que incluye tanto el producido al pasar por la ionosfera como por la troposfera, así como las condiciones meteorológicas. En el vacío la altitud sería:

$$h=\frac{1}{2}ct \quad (5.2)$$

c: velocidad de la luz

t: tiempo

pero aparecen otros problemas. En la ionosfera, la presencia de electrones no es despreciable, (Bomford, 1980) y además no es constante y varía considerablemente de la noche al día y de invierno a verano descendiendo por la noche, en verano y durante los ciclos de actividad solar mínima. El número de electrones libres produce variaciones en el índice de refracción

proporcionales al cuadrado de la frecuencia del radar (que viene a influir de 0,2 a 20 centímetros). Es por ello aconsejable, en vez de usar correcciones, emplear altímetros que emitan en dos frecuencias para cancelar los efectos por compensación de términos. La troposfera, por otro lado, tanto seca como húmeda, también afecta a la propagación de la señal. El índice de retraso producido es proporcional a la densidad de la atmósfera. En una primera aproximación, podemos decir que esta densidad desciende exponencialmente con la altitud, pero esto no es lo suficientemente preciso. La densidad de la atmósfera viene de la presencia en ella de gases secos y de vapor de agua. Mientras que la contribución de los primeros es prácticamente constante y se puede guiar por la aproximación anterior, produciendo errores de 2,3 metros en la medida, la cantidad de vapor de agua es bastante variable e impredecible. Produce un error de 6 a 40 centímetros. Para calcular el valor de las correcciones se necesitan registros precisos de presión y temperatura. Normalmente, la mayor parte de las correcciones vienen de modelos adoptados o bien, son provistas por organismos, como por ejemplo, en el caso del SEASAT, el JPL, para los ERS, la ESA y para el TOPEX-Poseidón, la NASA y el CNES.

Los fenómenos atmosféricos como por ejemplo la lluvia, suponen también un obstáculo para la propagación de la señal. Incluso, pueden provocar una completa pérdida de datos. La lluvia en particular, afecta atenuando los pulsos así como reduciendo y dispersando su reflexión sobre la superficie del océano.

Otro efecto atmosférico que provoca alteraciones en la medida es la variación de la presión atmosférica que deforma la superficie oceánica hasta llevarla a un nuevo equilibrio hidrostático. Las alteraciones del nivel pueden alcanzar 1 centímetro por 1 milibar. Si no se tiene un registro de presión se obtiene indirectamente de la corrección de troposfera seca. A la corrección de este efecto se la llama de barómetro invertido. Los últimos estudios muestran que esta corrección es apropiada en latitudes mayores que 20° y que en menores no funciona bien. Se puede omitir la distinción ya que en latitudes pequeñas la variación de presión es débil luego la corrección no tiene un valor muy grande (Gaspar et al., 1994). Una parte de la variación de la superficie por la presión del aire se debe a las mareas atmosféricas, tanto por fuerzas de marea en sí mismas como, sobre todo, por las oscilaciones térmicas producidas con las frecuencias de marea solar. Al ser una amplificación de los armónicos solares, esta parte de la corrección se suele incluir en la corrección de marea oceánica. Hay estudios sobre la cuantificación de estos efectos para campañas reales en Visser et al, 1993.

En la expresión (5.1) con h_{stm} se indica una altitud de la superficie topográfica marina modelo o a priori, que tomamos como cero si no se dispone de ningún modelo. Normalmente se dispone de modelos globales numéricos desarrollados hasta un cierto orden y grado, como en nuestro caso OSU91, completo hasta orden y grado 10 (Rapp et al, 1991), formado a partir de datos de altimetría recopilados durante un año, de gravimetría y coeficientes de modelos previos de geopotencial.

$$h_{stm} = \sum_{l=1}^{10} \sum_{m=0}^l (\bar{C}'_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}'_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\sin\phi) + C'_{oo} \quad (5.3)$$

Tiene desviación típica 26 centímetros con precisión inferior en las zonas costeras.

h_m es la contribución a la medida de los efectos de marea tanto terrestre como oceánica que por un lado hacen variar el nivel del mar, y por otro, el fondo marino produciendo las consiguientes alteraciones. El potencial de marea es un fenómeno diferencial en el sentido de que se puede expresar como diferencia entre el potencial sobre un punto y

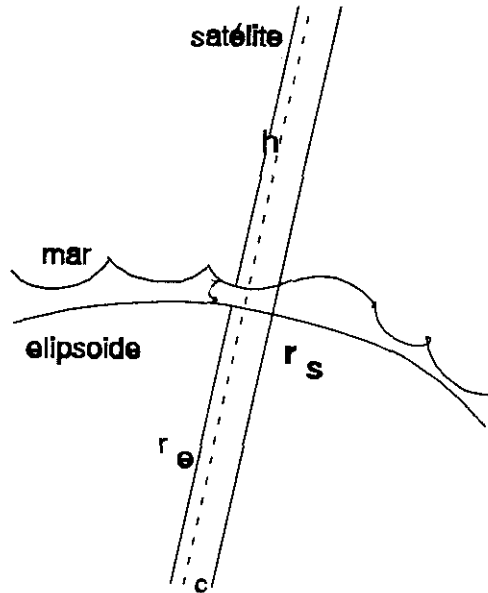


FIGURA 5.1: Esquema de la determinación geométrica de la altitud del mar a partir de satélites.

el centro de la Tierra creado por las masas de Sol y Luna. La expresión de este potencial admite un desarrollo en armónicos esféricos en el que unos factores dependen de las coordenadas del punto donde se pretende calcular el efecto y constantes, lo que se llaman los coeficientes geodésicos, y otros que son función de las coordenadas ecuatoriales del astro perturbador y por lo tanto del tiempo. Cualquier coeficiente función del tiempo puede representarse por un desarrollo en serie de funciones trigonométricas:

$$\sum_j H_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \quad (5.4)$$

donde para cada j se tiene un constituyente armónico. H_j son las amplitudes, los argumentos constan de ω_j , velocidad del constituyente, y φ_j , fases iniciales.

El nivel del mar cambia por la inercia con la que responde el agua a las fuerzas de marea. En este cambio se pueden distinguir dos partes: un desplazamiento constante o marea de equilibrio, y un desplazamiento provocado por la parte periódica del potencial de marea, que se evalúa con modelos generalmente globales, de los que se hablará a continuación, que estiman las perturbaciones con un orden de precisión de 10 a 20 centímetros, siendo este desplazamiento:

$$h = \frac{1}{g} \sum_j H_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) = \frac{1}{g} \sum_j H_j \cos(\omega_j t + \varphi_{je}^G - G_j) \quad (5.5)$$

con amplitud y velocidad angular como en (5.4.), φ_{je}^G , fase inicial de marea en Greenwich y G_j , desfase de la marea oceánica respecto de la marea de equilibrio en Greenwich. Si no se dispone de modelos se utiliza parte del proceso de datos para eliminar el efecto. Aunque ésta es la parte principal del desplazamiento producido por marea, también el fondo marino sufre deformaciones por marea terrestre con amplitud y desfase dependiente de las constantes elásticas del medio. Su valor se calcula en función de parámetros por ejemplo del modelo de Wahr y puede alcanzar 20-30 centímetros (de Toro et al, 1994). A su vez, los desplazamientos

de agua dan lugar a fenómenos de carga sobre el fondo que producen deformaciones en sentido contrario a las inducidas por la marea. Su efecto se calcula con modelos de corteza (0,4 - 4,2 cms). La marea atmosférica, mencionada anteriormente, también tiene un efecto deformador de signo contrario a la terrestre y oceánica. Lo ideal sería eliminar estos efectos de los datos con los que se construyen los modelos.

Se construye el modelo al determinar los valores de las amplitudes y desfases de las principales ondas de marea. La precisión del mismo depende de los algoritmos utilizados en su construcción, de lo que se adapten las observaciones al modelo, y del número de constituyentes armónicos modelizados.

La mayor parte de los modelos globales que se utilizan actualmente son modelos mixtos, es decir, son teóricos ya que consisten en resolver las ecuaciones hidrodinámicas que tratan de representar el comportamiento de las masas oceánicas bajo la acción de las fuerzas de marea y Coriolis por la rotación, pero también son empíricos porque los constituyentes armónicos se obtienen por análisis en los que intervienen observaciones de mareógrafo. Así, se parte de las ecuaciones hidrodinámicas de Laplace y se introducen términos que representan al régimen de marea y fricción del fondo oceánico. Se obtiene un sistema de ecuaciones en diferencias finitas (ecuaciones discretas de marea oceánica) que se integra tomando como condiciones de contorno los valores observados en mareógrafos. Pero este tipo de modelos no funciona bien en mares cerrados (Arabelos y Tziavos, 1994). Otros modelos (de Toro et al, 1994) construidos para el Mar Mediterráneo en particular, lo que hacen es considerar datos de mareógrafo añadiendo la respuesta hidrodinámica como condición para determinar los argumentos y los desfases en toda la zona y no sólo en las costas. Trata de considerar los problemas añadidos en este tipo de mares, como la presencia de costas de forma irregular, cadenas de islas y estrechos que afectan a la propagación de las ondas de marea y amplifica algunas de ellas. Otra amplificación viene de la existencia de cuencas poco profundas por lo que una parte de la onda de marea se refleja en el fondo marino siendo necesario un conocimiento de la batimetría así como de los factores de amplificación. Para tenerlo en cuenta, se dividió la zona en subzonas según las barreras naturales. Para este modelo citado no se dispuso de datos no costeros, por lo que se validaron las fuentes de datos y después se ajustaron mediante un proceso iterativo a una superficie suavizada en la que se tengan en cuenta la continuidad de las ondas y que la distribución espacial de los parámetros de marea en mar abierto debe ser uniforme en unos 100-150 kilómetros en ausencia de estrechos.

El movimiento del polo produce perturbaciones de menor cuantía en la medida. La rotación del eje de giro de la Tierra tiene un periodo de 12 a 14 meses y origina una fuerza centrífuga adicional que como las de marea, afecta a la superficie terrestre y marina. El efecto no se puede distinguir de las mareas, pero el periodo es suficientemente largo como para considerar que se dan condiciones de equilibrio. Aún así hay modelos para corregir sus efectos debidos a Wahr.

Llamamos s en (5.1) a la suma de los distintos sesgos que aparecen en las medidas: sesgo electromagnético, sesgo de la rugosidad y sesgo del seguimiento. En el primero de ellos se puede incluir todo s dado que los otros dos son mucho más pequeños. El sesgo electromagnético, también llamado efecto de las olas, es un fenómeno motivado porque al incidir la señal del altímetro sobre la superficie del océano (que no es plana) parte se refleja sobre la parte superior de la ola y parte sobre su concavidad. Así, por la forma geométrica de la ola, se produce una reflexión como la de un espejo cóncavo que focaliza sobre el satélite un mayor número de fotones reflejados y traslada el centro de reflexión por debajo de la altura media de la ola falseando la medida. La cuantía de su efecto se puede conocer

por fórmulas empíricas que tienen en cuenta la velocidad del viento y la altura significativa de la ola, basadas en distintos modelos: con los dos factores o sólo uno (Molines et al, 1994, Chelton, 1994), el algoritmo de Fu y Glazman (AVISO, 1996), o bien se determina a partir de diferencias *crossover* por regresión lineal o con modelos que relacionan altura de la ola y otros parámetros (Gaspar et al, 1994).

r es la contribución de los errores del modelo matemático y de las observaciones.

Una vez corregida la medida del altímetro, hace falta disponer de las efemérides del satélite lo más precisas posible. Así, se calcula r_s (ver fig.5.1), distancia radial del centro de la Tierra al satélite. Elegido un elipsoide de referencia sobre el que se definen los puntos subsatélite, se determinan las distancias radiales de estos puntos, r_e . Con todos estos elementos se tiene la ecuación básica de la altimetría por satélite:

$$\zeta = r_s - h - r_e \quad (5.6)$$

con ζ altitud geométrica de la superficie oceánica sobre el elipsoide de referencia (fig 5.1).

En realidad r_s , h y $r_e + \zeta$ forman un triángulo en lugar de estar alineadas (figura 5.2). En el caso de que el ángulo que forman sea muy grande ($>0^\circ.45$), el dato no es bueno y normalmente viene con una marca. Si no es tan grande, se necesita aplicar un término correctivo (Rummel, 1992):

$$C = \frac{r_e}{8} \left(1 - \frac{r_e}{r_s}\right) e^4 \sin^2 2\phi \quad (5.7)$$

entonces:

$$\zeta = r_s - h - r_e - C \quad (5.8)$$

con e , excentricidad y ϕ , latitud geocéntrica. C está entre 0 y 5 metros pero la fórmula va perdiendo precisión para valores del ángulo entre r_s y $r_e > 0^\circ.3$.

En principio es posible separar las componentes que dependen del tiempo de las que no lo hacen o parte estática. Si no se dispone de un modelo de geoide que sirva como primera aproximación para esa parte estática, se puede recurrir a varios procedimientos para eliminarla. Además todos ellos eliminan parte del factor que introduce casi todo el error en este método, que es la incertidumbre en la determinación de la órbita incluso contando con unas efemérides precisas: el error orbital radial, que vemos en la sección siguiente.

5.2. ERROR ORBITAL

En el uso de datos altimétricos el principal problema con el que nos encontramos es que la órbita no está determinada con la precisión que sería deseable, en particular su componente radial. El error orbital radial es la mayor fuente de errores que limita la precisión de los resultados altimétricos. No se puede determinar a priori un valor fijo de su cuantía ni su estimación es trivial. Para cuantificar un poco podemos decir que incluso con un seguimiento preciso y con el uso de un buen modelo de geopotencial, puede llegar a valer de 30 centímetros a 2 metros (Rummel, 1992), con lo que se supera con mucho el nivel de precisión esperado de los resultados. Su valor no es constante con el tiempo ni tampoco según sea el movimiento del satélite, de norte a sur o al revés.

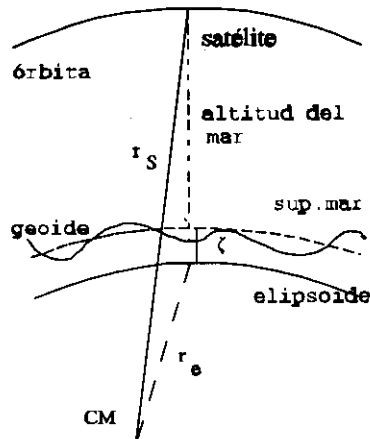


FIGURA 5.2: Esquema de la disposición real de los radios vectores a satélite y a punto.

En general podemos decir que se trata de un error sistemático de naturaleza sinusoidal. Para tramos de órbita no demasiado largos, es de larga longitud de onda, afectando a la parte de 0 a 1 y un poco de 2 ciclos por revolución (Feron et al, 1992, Marsh y Martin, 1982), mientras que su contribución a la parte de mayores frecuencias es prácticamente despreciable (Rummel, 1992). Por esto, se puede modelar por cualquier función de larga longitud de onda. Incluso, como veremos más adelante, para un trazo corto (ajustes en áreas locales) se puede modelar por ajuste de un sesgo y una inclinación para cada arco de satélite, siendo éste el modelo más simple y más ampliamente usado (Berry et al, 1988, Groten y Müller, 1991). A partir de este modelo, se han desarrollado otros más complicados normalmente de acuerdo con el tamaño de la zona considerada para el ajuste, por ejemplo, una curva cuadrática para cada arco (Sharma y Ali, 1993), o modelo como el descrito, de sesgo e inclinación más un tercer parámetro, curvatura, representada por un polinomio de Legendre que en algunas pruebas (Vermeer, 1993) mejora mucho el ajuste, lo que verifica la existencia de una señal de marea oceánica no lineal en los datos, luego este modelo de error orbital resulta particularmente adecuado si no se dispone de un modelo de marea para corregir los datos. También hay autores que usan otras técnicas para evitar la influencia de los errores orbitales sin tener que modelarlo, como usando dobles diferencias de valores medios (Knudsen, 1993).

Existen algunas técnicas aplicables para eliminar el error orbital radial así como la parte estática de los observables que se presentan en las siguientes secciones.

5.3. AJUSTE COLINEAL DE DATOS ALTIMÉTRICOS

En satélites altimétricos hay dos tipos principales de órbitas: polares y geoestacionarias. Se utiliza una u otra según la aplicación del satélite. Algunos satélites observan toda la Tierra en un periodo de varios días mientras que otros cubren una sola parte varias veces al día. Si lo que se quiere, como en el caso de satélites altimétricos, es lo primero, se suelen elegir órbitas polares, para ofrecer recubrimientos globales. Los satélites con este tipo de órbitas están en alturas aproximadas de 500-1000 Kms. El satélite va moviéndose de sur a norte y al revés. Al combinar su movimiento orbital con la rotación de la Tierra, el satélite va cubriendo cada vez una zona distinta a su paso. El tiempo que tarda en recorrer toda la Tierra es a lo que se llama el periodo de repetición, que suele durar días.

En realidad el satélite no pasa exactamente por los polos porque su órbita tiene una pequeña inclinación, por lo que no es posible observar puntos en latitudes extremas. Lo normal es que esta inclinación se tome en el diseño de la órbita de modo que esté sincronizada con el Sol, es decir, que cada vez que el satélite pase por un punto de la Tierra, sea siempre la misma hora local. Esto se consigue fijando la hora solar media del paso por el ecuador.

La órbita se diseña de modo que el periodo de repetición sea tal que con la rotación de la Tierra proyecte sobre su superficie una cuadrícula regular (datos repetidos a un intervalo fijo así como trazas también equidistantes).

El método de ajuste colineal consiste básicamente en tomar datos de varios ciclos que produzcan el mismo trazo sobre la superficie, tomando como el mismo también los que están muy próximos entre sí; por ejemplo en el proceso de datos SEASAT, se tomaron como el mismo arco aquellos que disten menos de 3 kilómetros entre sí (Berry et al, 1988), en el caso de ERS-1 no se adopta un valor fijo, ya que depende del análisis de factores independientes en cada caso (valor de repetición de la órbita, oleaje, velocidad del viento), y en principio tiene un periodo de repetición exacto, a cada 501 trazos traza el mismo arco subsatélite.

Hay dos versiones del método. Se elige un arco de referencia, o bien formado como medias de los que intervienen o bien uno seleccionado que tenga bastantes datos y sea representativo. En este caso hay que tener especial cuidado en la elección ya que si no es la adecuada pueden aparecer accidentes y variaciones de la superficie del mar que no existen en realidad. Los datos del arco referencia se restan a todos los demás de modo que ahora se tienen variaciones residuales respecto de este arco. La sustracción del arco medio o de referencia reduce mucho la contribución a la medida de la parte de larga longitud de onda sobre los datos (Barzaghi et al, 1993). Con los valores residuales se hace un ajuste de un posible modelo de error, por ejemplo de una senoide $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ con ω : 1 ciclo por revolución (Molines et al, 1994) y otros que se justificarán en el siguiente apartado.

Incluso si no se utiliza ninguna función para modelar el error, la sustracción de arcos colineales elimina la parte estática de las observaciones. Al tener el error orbital larga longitud de onda, para una zona pequeña, con este proceso ya se elimina una parte de su contribución. Así, los residuales están en parte libres de errores orbitales radiales. También se habrá eliminado de este modo la parte del error dependiente de la posición geográfica. Sin embargo, al haberse sustraído junto con la parte estática de la observación, no se determina ninguna aproximación de su valor puesto que aparece de forma conjunta a la parte no determinada de STM y de geoides por los modelos utilizados.

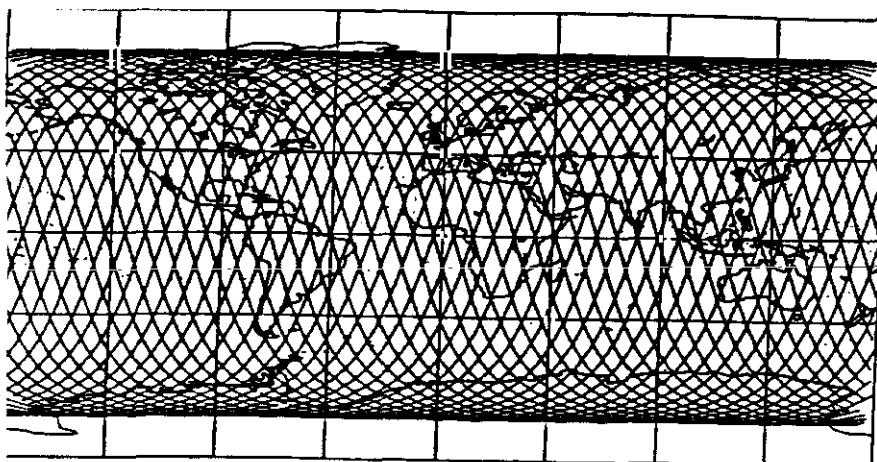


FIGURA 5.3: Distribución geográfica de trazos subsatélite de satélite con órbita polar.

5.4. AJUSTE *CROSSOVER* DE DATOS DE ALTIMETRIA

Como se dijo anteriormente, la órbita del satélite proyecta una cuadrícula sobre la superficie terrestre. Llamamos trazos ascendentes a los producidos cuando el satélite se mueve de sur a norte y descendentes en los que lo hace al revés. Así, cada revolución completa describe un trazo ascendente y otro descendente. Por el tipo de movimiento del satélite y la rotación de la Tierra, los puntos de cruce entre unos y otros, lo que se conoce por puntos *crossover*, describen también una estructura muy regular: en el ecuador son equidistantes y en el resto de la superficie se distribuyen en paralelos (figura 5.3).

El ajuste *crossover* es una técnica que pretende eliminar el error orbital a partir de las diferencias entre las medidas obtenidas en puntos en los que se cruzan arcos ascendentes y descendentes del satélite. Se elimina en esa diferencia la parte estática de las medidas que intervienen y como en el método anterior, la parte de larga longitud de onda no constante de la superficie marina.

Hay distintas formas de aplicar un ajuste *crossover* atendiendo a la extensión de la zona sobre la que se haga.

5.4.1. Ajuste local

Es el tipo de ajuste más frecuente. En este caso se selecciona una región con forma de rombo que tenga por bordes dos arcos ascendentes y dos descendentes (figura 5.4). Esta elección presenta la ventaja de que los arcos de uno y otro tipo tienen aproximadamente la misma longitud por lo que hay un mayor número de puntos de cruce entre ellos.

Para construir el modelo del ajuste se parte de la ecuación (5.6). ζ , altitud geométrica de la superficie del mar sobre el elipsoide de referencia se descompone en:

$$\zeta = N + H \quad (5.9)$$

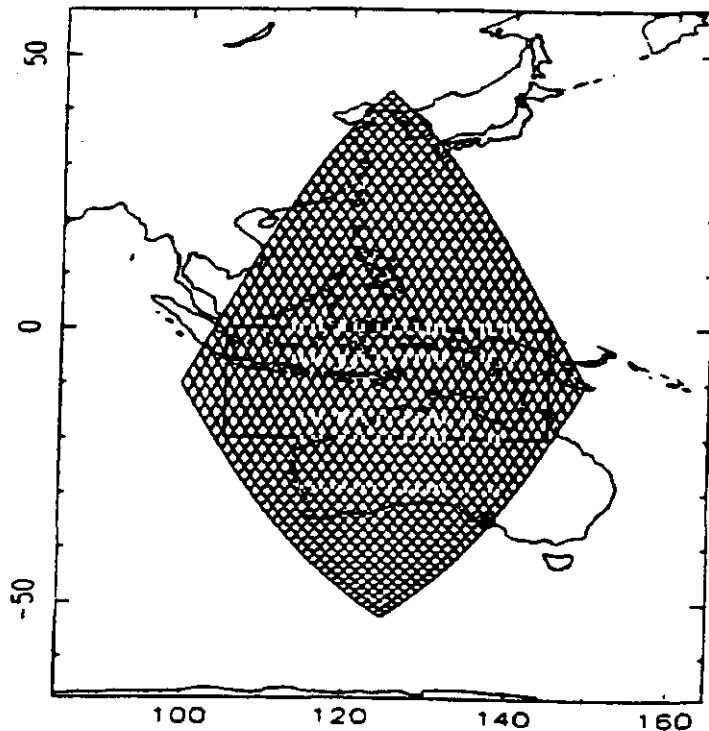


FIGURA 5.4: Zona de aplicación de un ajuste local.

con N ondulación de geoide y H altitud de la superficie topográfica del mar. Así, combinando (5.6) y (5.9) tenemos:

$$N+H=\zeta=r_s-h-r_e \quad (5.10)$$

También H admite una descomposición en una parte estacionaria (STM) y otra variable con el tiempo:

$$H=H_0+\eta \quad (5.11)$$

De este modo, la diferencia de medidas sobre el mismo punto en dos instantes distintos es la diferencia entre las partes de altitud variable con el tiempo correspondientes:

$$\Delta\eta=\eta(t_2)-\eta(t_1) \quad (5.12)$$

que por (5.11) y (5.10) se transforma en:

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= \eta(t_2) - \eta(t_1) = H(t_2) - H(t_1) = \zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \\ &= r_s(t_2) - r_s(t_1) - (h(t_2) - h(t_1)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Si en vez de dos instantes t_1 y t_2 cualesquiera se toman los correspondientes a un paso ascendente y otro descendente se tiene:

$$\Delta\eta = \Delta r_d - \Delta r_a + \Delta h_{ad} + v_h \quad (5.14)$$

de donde:

$$\Delta h_{ad} = -(\Delta r_d - \Delta r_a + v_h) + \Delta\eta \quad (5.15)$$

donde Δh_{ad} es la diferencia de observaciones,

Δr_a , Δr_d son los errores orbitales correspondientes al arco ascendente y descendente respectivamente,

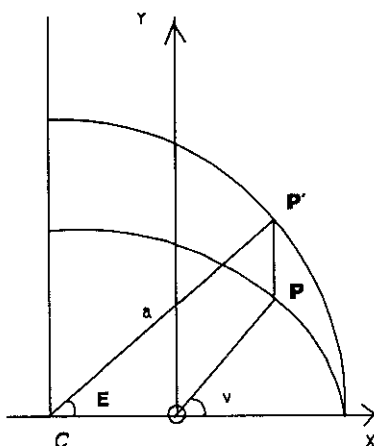


FIGURA 5.5: Anomalías verdadera y excéntrica.

$\Delta\eta$ es la variación de la altitud del mar entre los dos instantes de medida,
 v_s es la suma de los errores en las medidas del altímetro.

Para justificar el modelo de error orbital utilizado suponemos que al menos localmente, o lo que es igual, para intervalos cortos, la órbita del satélite se puede tomar como kepleriana. Así, la distancia radial de un punto P sobre ella al centro de la órbita es (Sevilla, 1989):

$$r_s = a (1 - e \cos E) \quad (5.16)$$

a: semieje mayor de la órbita,

e: excentricidad,

E: anomalía excéntrica, o ángulo que forman en el centro de la elipse las direcciones del perigeo y del punto P', asociado a P sobre la circunferencia principal circunscrita a la elipse.

Si consideramos el movimiento medio n dado por las leyes de Kepler, que verifica, al recorrer la órbita elíptica con velocidad areolar constante:

$$na^2 = (ka)^{1/2} \quad (5.17)$$

con $k=G(m_1+m_2)$, luego tal velocidad media es:

$$n = \sqrt{\frac{k}{a^3}} \quad (5.18)$$

Llamamos T_0 al instante de paso del satélite por el perigeo de su órbita. M, anomalía media, viene dada por la relación:

$$M = n(t - T_0) \quad (5.19)$$

y representa al valor de la anomalía verdadera v (figura 5.5) de un satélite ficticio que partiera a la vez que el real del perigeo y cuya velocidad fuera constante e igual a n. Se verifica:

$$E - e \operatorname{sen} E = M = n(t - T_0) \quad (5.20)$$

ecuación de Kepler, que relaciona anomalía media, determinable en función del tiempo, con anomalía excéntrica, a partir de la cual se puede obtener r_s por (5.16). Por eso, con esta ecuación se determina el radio vector del satélite en su órbita en función del tiempo.

Si diferenciamos la expresión (5.16) para obtener la corrección radial y se tiene en cuenta que las órbitas de satélites altimétricos tienen excentricidades prácticamente cero (son casi circulares), según (5.20), E se puede aproximar por M y:

$$\Delta r = \Delta a + e \Delta M a \operatorname{sen} M - \Delta e a \cos M \quad (5.21)$$

Se puede tomar:

$$\begin{aligned} M &= n(t - T_0) = n(t - t_0 + t_0 - T_0) = \\ &= n(t_0 - T_0) + n(t - t_0) = M_0 + n(t - t_0) \end{aligned} \quad (5.22)$$

con:

$$M_0 = n(t_0 - T_0) - n - \frac{2\pi}{T} \quad (5.23)$$

M_0 es la anomalía media en el instante de referencia t_0 . Sustituyendo esto en (5.21) llegamos a una expresión de Δr que hace ver su carácter periódico:

$$\begin{aligned} \Delta r \sim & \Delta a + e\Delta M a \operatorname{sen}\left(M_0 + \frac{2\pi(t-t_0)}{T}\right) \\ & - \Delta e a \cos\left(M_0 + \frac{2\pi(t-t_0)}{T}\right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Al trabajar con intervalos de más de una revolución, $\Delta a, \Delta M$ y Δe se pueden tomar constantes (Rummel, 1992), con lo que si definimos:

$$\mu = \frac{2\pi}{T}(t-t_0) \quad (5.25)$$

con t_0 instante de referencia, tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta r = & \Delta a + e\Delta M a \operatorname{sen}(M_0 + \mu) - \Delta e a \cos(M_0 + \mu) = \\ & \Delta a + e\Delta M a \operatorname{sen}M_0 \cos\mu + e\Delta M a \cos M_0 \operatorname{sen}\mu \\ & - \Delta e a \cos M_0 \cos\mu + \Delta e a \operatorname{sen}M_0 \operatorname{sen}\mu = \\ & \Delta a + [e\Delta M a \cos M_0 + \Delta e a \operatorname{sen}M_0] \operatorname{sen}\mu + \\ & + [e\Delta M a \operatorname{sen}M_0 - \Delta e a \cos M_0] \cos\mu = x_0 + x_1 \operatorname{sen}\mu + x_2 \cos\mu \end{aligned} \quad (5.26)$$

que será la expresión a utilizar al trabajar con segmentos largos. Si usamos segmentos más cortos se utilizan las simplificaciones:

$$\operatorname{sen}\mu \sim \mu, \quad \cos\mu \sim 1 \quad (5.27)$$

con lo que el modelo del error orbital queda:

$$\Delta r = x_0' + x_1 \mu \quad (5.28)$$

modelo lineal ya descrito anteriormente. Si suponemos segmentos muy cortos:

$$\Delta r = x_0 \quad (5.29)$$

El instante de referencia t_0 y por lo tanto μ se eligen, en el caso local, de forma que μ sea cero cuando el arco entra en la zona de ajuste. Luego t_0 es el instante en el que cada arco interseca con el que forma límite del área.

Al trabajar en áreas locales los arcos son de longitudes parecidas y se puede hacer aproximación plana con lo que la configuración se puede suponer rectangular (figura 5.6).

Se verifica por esta estructura rectangular que;

$$\mu_{1j} = \mu_{2j} = \dots = \mu_{aj} \quad \mu_{1i} = \mu_{2i} = \dots = \mu_{di}$$

Con todo esto, se puede plantear el ajuste mínimos cuadrados de modelo lineal:

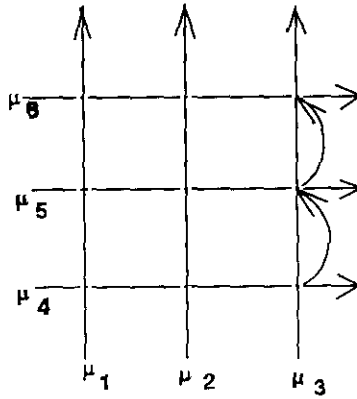


FIGURA 5.6: Esquema de trazos en aproximación plana

$$Ax - t = v \quad (5.30)$$

que verifica las hipótesis:

$$E(v) = 0, \quad \sum_{ii} = \sigma_0^2 I \quad (5.31)$$

con: t , vector de observaciones que en este caso serán las diferencias *crossover*,

A , matriz de diseño del sistema,

x , vector de parámetros del modelo elegido, bien sea de los tres planteados u otros incluyendo parámetros distintos, como los mencionados en la sección anterior

σ_0^2 , varianza a priori de peso unidad.

En cuanto a las dimensiones de los elementos que aparecen en el problema, vamos a suponer una distribución regular y sin interrupciones de a arcos ascendentes y d descendentes, que si se toma con la forma adecuada serán números parecidos. La dimensión del vector de observaciones, $m \times 1$, será el número de cruces producidos, es decir, $(ad) \times 1$. La matriz de coeficientes se divide en dos partes: la referente a los parámetros que describen el error orbital en los arcos ascendentes y en los descendentes. El número de parámetros por arco es p . Con esto, x será de dimensión $n \times 1 = (a+d)p \times 1$ y A , $m \times n$.

La matriz A tiene distintas configuraciones según se utilice el modelo de uno, dos o tres parámetros para el error orbital (5.26, 5.28 o 5.29). En el primero de los casos la ecuación de observación, con (5.15) y (5.26), para las diferencias de error orbital es:

$$\Delta r_a - \Delta r_d = x_0^a + x_1^a \text{sen} \mu_{ai} + x_2^a \text{cos} \mu_{ai} - x_0^d - x_1^d \text{sen} \mu_{dj} - x_2^d \text{cos} \mu_{dj} \quad (A)$$

La matriz A queda organizada en dos bloques: el primero, con $3a$ columnas, es la parte correspondiente a los parámetros que describen el error orbital en tramos ascendentes, y el segundo con $3d$ columnas, para los parámetros de los arcos descendentes. El número de filas es ad , número de cruces entre puntos subsatélites. La configuración de elementos en la matriz según el modelo (A) se muestra en la tabla 5.1.

Si se usan tramos más cortos y por lo tanto el modelo de dos parámetros (5.28), la expresión de diferencias de errores es:

$$\Delta r_a - \Delta r_d = x_0^a + x_1^a \mu_{ai} - x_0^d - x_1^d \mu_{dj} \quad (B)$$

Los dos bloques de la matriz A tienen ahora $2a$ y $2d$ columnas respectivamente y el número de filas sigue siendo el mismo. Su estructura se muestra en la tabla 5.2.

	3a columnas	3d columnas
subbloque 1 (d filas)	$1 \quad \text{sen } \mu_1^a \quad \text{cos } \mu_1^a$ $1 \quad \text{sen } \mu_a^a \quad \text{cos } \mu_a^a$	$-1 \quad -\text{sen } \mu_1^d \quad -\text{cos } \mu_1^d$ $-1 \quad -\text{sen } \mu_1^d \quad -\text{cos } \mu_1^d$
.....
subbloque a (d filas)	$1 \quad \text{sen } \mu_1^a \quad \text{cos } \mu_1^a$ $1 \quad \text{sen } \mu_a^a \quad \text{cos } \mu_a^a$	$-1 \quad -\text{sen } \mu_d^d \quad -\text{cos } \mu_d^d$ $-1 \quad -\text{sen } \mu_d^d \quad -\text{cos } \mu_d^d$

TABLA 5.1: Configuración de la matriz de coeficientes A para el modelo de tres parámetros.

	2a columnas	2d columnas
subbloque 1 (d filas)	$1 \quad \mu_1^a$ $1 \quad \mu_a^a$	$-1 \quad -\mu_1^d$ $-1 \quad -\mu_1^d \quad \dots\dots\dots$ $-1 \quad -\mu_1^d$
subbloque 2 (d filas)	$1 \quad \mu_1^a$ $1 \quad \mu_a^a$	$-1 \quad -\mu_2^d$ $-1 \quad -\mu_2^d \quad \dots\dots\dots$ $-1 \quad -\mu_2^d$
.....
subbloque a (d filas)	$1 \quad \mu_1^a$ $1 \quad \mu_a^a$	$-1 \quad -\mu_d^d$ $-1 \quad -\mu_d^d \quad \dots\dots\dots$ $-1 \quad -\mu_d^d$

TABLA 5.2: Configuración de la matriz de coeficientes A para el modelo de dos parámetros.

Finalmente, en caso de utilizar el modelo de un sólo parámetro, (5.29), el modelo a tratar es:

$$\Delta r_a - \Delta r_d = x_o^a - x_o^d \quad (C)$$

La matriz reduce su dimension a a+d columnas con igual número de filas (tabla 5.3)

Tomamos peso unidad de las observaciones al suponerlas de igual precisión. La solución de (5.30) viene dada por:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T t \quad (5.32)$$

y la matriz de covarianzas a posteriori de los parámetros es:

$$\sum_{xx} = \sigma_o^2 Q_{xx}, \quad Q_{xx} = (A^T A)^{-1} \quad (5.33)$$

El ajuste tendrá mayor redundancia si se toma un número de diferencias que verifique:

	a columnas	d columnas
subbloque 1 (d filas)	1 ... 1	-1 -1 -1
subbloque 2 (d filas)	1 ... 1	-1 -1 -1
.....
subbloque a (d filas)	1 ... 1	-1 -1 -1

TABLA 5.3: Configuración de la matriz de coeficientes A para el modelo de un parámetro.
 $m = ad > n = (a+d)p$ (5.34)

es decir, más observaciones que parámetros a determinar.

5.4.1.1. Deficiencia de rango

Conviene detenernos en el análisis de r , rango de A, por lo que de interés tienen frente a la no posibilidad de determinar completamente el error orbital. r verifica $r < n$, es decir, A es deficiente de rango, lógico al ser observaciones relativas las que intervienen (diferencias de alturas), luego invariantes respecto de algunas transformaciones. Para el modelo de un parámetro (5.29) queda sin determinar h salvo al fijar la altura de un punto al no ser las diferencias sensibles a traslaciones. Si se utiliza un modelo más complejo con mayor número de parámetros, siguen siendo observaciones relativas. Hace falta imponer constreñimientos para fijar el datum.

En general, en un ajuste *crossover* de p parámetros por arco, se tiene una deficiencia de rango de p^2 , (Rummel, 1992). En este estudio vamos a demostrarlo para el caso de modelo de uno ($p=1$) o dos parámetros ($p=2$), puesto que nuestras aplicaciones son locales.

5.4.1.1.1. Modelo de un solo parámetro ($p=1$): $n-r=p^2=1$

El número de parámetros del ajuste, n , es aquí $a+d$. Según la expresión (5.34), existe redundancia si a y $d > 2$. Además, para los casos en que $m < n$, A no es deficiente de rango. Sin embargo, en todos los casos en que m es mayor o igual a n , se verifica que A no es de rango completo y además su deficiencia de rango es 1, es decir, p^2 , como se demuestra a continuación.

i) $a=2, d=2$:

Éste sería el primer caso en el que la matriz sigue la regla en cuanto a su deficiencia de rango, aunque el ajuste en el que interviene no sería redundante ($m=n$). Para a ó d menores que 2 no se verifica. Según la tabla 5.3., A tendría la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la deficiencia de rango es exactamente 1 (la cuarta fila es la primera menos las otras dos).

Vamos a demostrar el resultado de forma genérica siguiendo un proceso de inducción completa sobre el número de arcos ascendentes.

ii) $a=2, d \geq 2$:

Siguiendo de nuevo la forma general de la tabla 5.5, la matriz tendría la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -I_d \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -I_d \\ 0 & 1 & \cdot \end{pmatrix}$$

con I_d , la matriz identidad $d \times d$.

Las transformaciones lineales de filas y columnas mantienen el rango, luego el de la matriz anterior será igual al de una matriz resultante de restar las d últimas filas a las d primeras, que llamamos B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -I_d \\ 0 & 1 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$|-I_d| = (-1)^d \neq 0$$

La matriz B , y por lo tanto A , sería de rango completo si $r=a+d$, El menor $d \times d$ del extremo inferior tiene rango no nulo, luego el rango de la matriz será mayor o igual que d .

Si se añade una fila y una columna al menor anterior, vemos que su determinante no es nulo, de forma independiente a qué fila y columna se añada. Vamos a analizar las dos

posibilidades:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & -I_d & & \\ \cdot & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = -(-1)^d = (-1)^{d+1} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & -I_d & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = (-1)^d \neq 0$$

Como conclusión, el rango será mayor o igual a $d+1$. Pero al añadir cualquier otra fila y columna para obtener un menor de orden $d+2$, el determinante queda siempre cero. Incluso sin calcular nada, se ve que tiene dos filas iguales.

Concluimos entonces que en este caso, el rango de la matriz es $d+1$, y por lo tanto, B y también A, no son de rango completo, con deficiencia 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & -I_d & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{d+1} + (-1)^d = 0 \quad \forall d$$

iii) Para finalizar la inducción, vamos a suponer que se verifica que dados a arcos ascendentes, la deficiencia de rango de la matriz correspondiente, que llamamos A, es 1 para cualquier valor de d . Bajo esta premisa, analizamos qué ocurre si se añade un arco ascendente al ajuste con la matriz que en este caso denotamos como A^* .

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} - a \text{ columnas} & - d \text{ columnas} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -I_d \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -I_d \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -I_d \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cdot \end{array} \right) \end{array}$$

$\text{Rg } A = a+d-1$. Si se aumenta en uno el número de arcos ascendentes, la modificación en la matriz A para obtener A^* es añadir una columna y d filas si seguimos el modelo de la tabla 5.3. Así, el nuevo número de filas es $ad+d=(a+1)d$, y el de columnas $a+1+d$. Si suponemos redundancia, hay más filas que columnas, luego sería de rango completo si el rango fuese el número de columnas.

En el caso de A^* , por lo menos hay $a+d-1$ columnas independientes, las que había en la matriz A . Como se ha añadido una más, si es linealmente dependiente de las otras, el rango no varía y no se verifica la regla que intentamos probar. Si, como es el caso, la columna que se añade es linealmente independiente de las otras, el rango aumenta en uno y sí se verifica la regla: $\text{rg } A^* = a+d = (a+1)+d-1$. También puede verse con la forma de la matriz A^* y sumando a la primera columna las a columnas siguientes y a la $(a+2)$ -ésima las $d-1$ restantes.

$$A^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} - a+1 \text{ columnas} & - d \text{ columnas} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -I_d \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -I_d \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -I_d \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cdot \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{- } a+1 \text{ columnas-} \quad \text{- } d \text{ columnas-} \\
 \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & 0 \\
 1 & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\
 1 & 1 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & \dots & \dots & \dots & -1 & -1 & \dots & 0 \\
 1 & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 1 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & 0 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\
 1 & \dots & \dots & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & \dots & -1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Hay dos columnas proporcionales, la primera y la $(a+2)$ -ésima, y todas las demás son linealmente independientes al tener los elementos no nulos en posiciones distintas. Por lo tanto, el rango de A^* es $(a+1)+d-1$ (número de columnas totales menos una), y queda completa la demostración por inducción.

5.4.1.1.2. Modelo de dos parámetros ($p=2$): $n-r=p^2=4$

Para demostrar el otro caso de interés en este trabajo, el de dos parámetros por arco, también se puede emplear un procedimiento de inducción sobre el número de arcos ascendentes usados, pero no puede empezar en $a=2$, ya que para este valor ningún d verifica la condición (5.34). $2d > 2(d+2) \Rightarrow d > 2+d$, absurdo. Si $a=3$, $3d > 2(3+d)$ se verifica si $d > 6$.

i) $a=3, d \geq 6$ (Con la igualdad no hay redundancia pero es válido para el procedimiento de la demostración). En este caso según la tabla 5.2, la matriz del ajuste es de la forma:

$$A = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & A & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 1 & 2A & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & -D & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & dA & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -D \\
 0 & 0 & 1 & A & 0 & 0 & -1 & -2D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 1 & dA & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -2D \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & A & -1 & -3D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & dA & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -3D
 \end{array} \right) \tag{5.35}$$

6 columnas
2d columnas

donde A es μ_{kj} y D , μ_{ki} de la figura 5.6., que por la estructura local tomamos siempre proporcionales. Al sumar la tercera y quinta columna a la primera el resultado es proporcional a la suma de las columnas $(2j+1)$ -ésimas desde $j=3$ hasta j igual a $2+d$, por lo que el rango es igual al de una matriz en donde se suprime una de estas columnas. Por ejemplo quitamos la primera.

$$\begin{pmatrix} 1 & A & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2A & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 & -D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & dA & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -D \\ 1 & 0 & 1 & A & 0 & 0 & -1 & -2D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & -2D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & dA & 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -2D \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & A & -1 & -3D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2A & -1 & \dots & -1 & -3D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & dA & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -3D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -D & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 2A & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & -D & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ dA & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -D \\ 0 & 1 & A & 0 & 0 & -1 & -2D & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -2D & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & dA & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -2D \\ \dots & \dots & \dots & 1 & A & -1 & -3D & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 2A & 0 & \dots & -1 & -3D & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & dA & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -3D \end{pmatrix}$$

A la primera columna de esta nueva matriz se la puede sumar 2 por la tercera y 3 por la quinta. El resultado es una columna proporcional a la que se obtiene al sumar a la séptima columna las columnas $(2j+1)$ -ésimas multiplicadas por $(j-2)$ correspondiente, desde $j=4$ hasta $j=d+2$.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 2A & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -2D & -1 & -D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ dA & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -dD & \dots & \dots & \dots & -1 & -D \\ 2A & 1 & A & 0 & 0 & -1 & -2D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 4A & 1 & 2a & 0 & 0 & 0 & -4D & -1 & -2D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2dA & 1 & dA & 0 & 0 & 0 & -2dD & \dots & \dots & \dots & -1 & -2D \\ 3A & \dots & \dots & 1 & A & -1 & -3D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 6A & \dots & \dots & 1 & 2A & 0 & -6D & -1 & -3D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3dA & \dots & \dots & 1 & dA & 0 & -3dD & \dots & \dots & \dots & -1 & -3D \end{pmatrix}$$

Al existir esta dependencia entre columnas, el rango de la matriz coincide con el de otra en la que se suprime la primera columna (5.35a).

La matriz resultante se puede modificar por combinaciones lineales, y por lo tanto, manteniendo el rango, de la siguiente forma: primero multiplicamos a todas las columnas de posición impar de la matriz (5.35a) por D con lo que llegamos a la matriz (5.35b). El rango no varía al cambiar la quinta columna de ésta por el resultado de sumar todas las columnas desde $j=5$ hasta $j=2d+4$ multiplicadas por $(-1)^j$. Esta columna es igual que la columna resultante de sumar a la primera dos veces la tercera (5.35c), luego una de ellas se puede suprimir y el rango no varía.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & -D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -D \\ 1 & A & 0 & 0 & -1 & -2D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -2D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & dA & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -2D \\ \dots & \dots & 1 & A & -1 & -3D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & 2A & 0 & \dots & -1 & -3D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & dA & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -3D \end{pmatrix} \quad (5.35a)$$

$$\begin{pmatrix}
 0 & \dots & \dots & 0 & -D & -D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -D & -D & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -D & -D \\
 D & A & 0 & 0 & -D & -2D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 D & dA & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -D & -2D \\
 \dots & \dots & D & A & -D & -3D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & D & 2A & 0 & \dots & -D & -3D & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & D & dA & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -D & -3D
 \end{pmatrix}
 \tag{5.35b}$$

$$\begin{pmatrix}
 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -D & -D & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -D & -D \\
 D & A & 0 & 0 & D & -2D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 D & dA & 0 & 0 & D & \dots & \dots & \dots & \dots & -D & -2D \\
 2D & \dots & D & A & 2D & -3D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 2D & \dots & D & 2A & 2D & \dots & -D & -3D & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 2D & \dots & D & dA & 2D & \dots & \dots & \dots & \dots & -D & -3D
 \end{pmatrix}
 \tag{5.35c}$$

Cambiamos la cuarta columna por una combinación lineal de la forma: las columnas (2j)-ésimas desde j=2 a j=d+1 multiplicadas cada una de ellas por el correspondiente valor (j-1) menos las columnas (2j+1)-ésimas multiplicadas también por j-1 con límites de j entre los mismos valores. La columna resultante es proporcional, con factor de proporcionalidad A/D (relación entre los lados de la cuadrícula que forman los puntos *crossover*) a la que se obtiene al sumar a la primera columna la tercera columna multiplicada por dos.

Al tener dos columnas proporcionales se podría suprimir una de ellas, y las restantes ya sí son independientes y no es posible encontrar combinaciones lineales entre ellas. De este modo, podemos afirmar que la matriz última tiene de rango 2d+2, número de sus columnas independientes. Pero como se ha obtenido a partir de A por transformaciones que conservan el rango, también A es de rango 2d+2. Como el número inicial de columnas era 2d+6 supuesto menor o igual que el de filas (3d) al tomar d mayor igual que 6, la deficiencia de rango es 4=p², número de parámetros al cuadrado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & A & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & -D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2A & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & dA & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -D \\ 0 & 0 & 1 & A & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -2D & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2A & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & -2D & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dA & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & -2D \\ & & & \dots & \dots & & & & & & & & \dots & \dots & \\ & & & \dots & \dots & & & & & & & & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & A & -1 & -(a+1)D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & dA & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & -(a+1)D \end{pmatrix}$$

ii) Suponemos que se verifica que la deficiencia de rango es p^2 para un cierto valor a de arcos ascendentes y para todo d . Si se aumenta en uno el número de arcos ascendentes al ajuste, en realidad lo que añade a la matriz son dos columnas y d filas. Seguimos en el caso de suponer que el número de columnas es igual o menor que el de filas. El rango es el número de columnas (o de filas) linealmente independientes. Antes de añadir un arco más al ajuste, se tiene una matriz con $2(a+d)$ columnas de las cuales, al dar por supuesto que la deficiencia de rango es 4, $2(a+d)-4$ son independientes. Por esto, el rango de la matriz actual será como poco este valor. Pero como se puede apreciar a la vista de la forma general de la matriz, las dos columnas añadidas, no tienen ningún tipo de dependencia con las otras (las $2a$ siguientes tienen ceros en las posiciones en que están los elementos no nulos de las nuevas, y las $2d$ últimas tienen elementos no nulos e independientes en las últimas filas, donde las columnas nuevas llevan ceros). Al ser independientes, tendremos que el rango es el de la anterior más dos unidades, es decir, $2(a+d)-4+2 = 2(a+d)-2 = 2[(a+1)+d]-4$, luego queda completa la inducción.

A representa una aplicación lineal con un espacio origen V de dimensión $(a+d)p$, número de columnas. El núcleo de una aplicación representada por una matriz deficiente de rango es un subespacio cuya dimensión se obtiene como la del espacio V al que pertenece menos el número de ecuaciones cartesianas independientes que lo describen. El número de éstas será el de filas linealmente independientes de la matriz A , es decir, el rango, y por propia definición coincidente con el número de columnas independientes. Así:

$$\begin{aligned} \dim \text{Núcleo} &= \dim V - (\text{n}^\circ \text{ de ecuaciones que describen el núcleo}) = \\ &= \dim V - (\text{n}^\circ \text{ de columnas} - \text{deficiencia de rango}) = \\ &= (a+d)p - ((a+d)p - p^2) = p^2 \end{aligned}$$

Luego el núcleo de la matriz A no es nulo, sino que es un subespacio de dimensión p^2 . Por lo tanto, existen p^2 vectores x_i no nulos e independientes entre sí tales que $Ax_i=0$. Así, si a la estimación obtenida se le añade una combinación lineal de vectores de este subespacio,

las diferencias *crossover* no varían.

$$\begin{aligned}
 A(v + \sum_{i=1}^{p^2} \lambda_i X_i) &= (\text{por ser lineal respecto a la suma}) = Av + A \sum_{i=1}^{p^2} \lambda_i x_i = \\
 Av + \sum_{i=1}^{p^2} A \lambda_i x_i &= (\text{por ser lineal respecto del producto por escalares}) = \\
 = Av + \sum_{i=1}^{p^2} \lambda_i A x_i &= (\text{por ser } x_i \text{ del núcleo de } A) = Av + 0 = Av
 \end{aligned}$$

Así, al no ser A de rango completo, no se determina una parte del error orbital. Entonces el método expuesto reduce significativamente las diferencias, pero no puede determinar completamente el efecto de este error. Además, el descrito es el modelo en el caso más simple. En la realidad se interrumpen los datos por la presencia de costas, islas, ... hay un número distinto de datos por arco y las dimensiones no siguen un esquema tan regular. El análisis de la deficiencia de rango es entonces más complicado.

Por su importancia, se emplean distintos métodos y estrategias de cálculo que hacen que se obtenga solución única. Algunos de los más importantes se exponen a continuación.

Una forma de eliminar el efecto de la deficiencia de rango es determinar el valor de los p parámetros de p arcos que no se intersequen entre sí. En la práctica esto puede hacerse eliminando las columnas de A referidas a estos p parámetros de los arcos correspondientes o bien, añadiendo al sistema constreñimientos que nos den su valor, de la forma $Bx=c$. Se eligen p arcos que aunque en principio son arbitrarios, deben ser largos y no muy curvos para una mejor determinación del datum. Con el modelo más ampliamente utilizado, el de dos parámetros, (deficiencia de rango 4), se suelen fijar dos ascendentes y dos descendentes. Al hacer esto se impone un comportamiento y se obtienen soluciones en función de los trazos elegidos. Es decir, la calidad de los resultados depende de la calidad de los trazos fijados. Si no se conoce el posicionamiento exacto, con esta imposición se fija un datum pero la solución puede no tener sentido físico.

Se puede usar también como constreñimiento que la suma de las altitudes en cada serie temporal sea cero (Feron et al, 1992), es decir, imponer una condición interna más que dar un valor arbitrario a los parámetros que en principio no conocemos, pero en este caso lo que no se tiene en cuenta es la variación de la superficie dinámica del mar, $\Delta\eta$.

También se elige una sola de las infinitas soluciones obtenidas con un ajuste *crossover* deficiente de rango al tomar la que tiene norma mínima, solución particular que verifica:

$$\sum_p (x_0^p)^2 + (x_1^p)^2 = \text{mínimo} \quad (5.36)$$

con x_0 y x_1 coeficientes del modelo (5.28). Se incluyen ambas fórmulas en el ajuste, al construir un modelo con la ecuación de las diferencias, (5.15), representadas por (5.26, 28 ó 29), a la que se añade la condición de norma mínima (5.36) multiplicada por un factor de peso ω . Si este valor se toma pequeño, la solución particular se obtiene pero no tiene un sentido físico.

Usando el modelo (5.28) de sesgo e inclinación, la deficiencia de rango es 4. Esto viene a decir que por la existencia de núcleo de A, subespacio de dimensión 4, existe una superficie definida por cuatro parámetros que es invariante luego no se puede determinar por compensación de las diferencias *crossover*. Esto da lugar a métodos de eliminación de la deficiencia que actúan de forma parecida al precedente. La ecuación básica es la suma de la

expresión a minimizar de las diferencias más la diferencia entre superficie observada y otra establecida multiplicada por un factor de escala (un modelo de regresión lineal entre la observada y la fijada sustituye entonces a la expresión (5.36)). Luego se toma como solución única la que resulta de ajustar los valores de los parámetros minimizando las diferencias *crossover* y las desviaciones respecto a una superficie de referencia. Como tal superficie, se puede elegir por ejemplo, el geode del modelo de geopotencial usado. Se hace entonces una regresión ponderada trazo a trazo a tal geode. El problema de esta elección es el mismo que el del primer método mencionado: la precisión de la solución obtenida viene determinada por la calidad del modelo. Para evitar esto, también se pueden elegir otras superficies de referencia, por ejemplo, la media de la reproducida por los propios datos en las distintas revoluciones del satélite, que es la que usaremos en este trabajo. En cuanto al factor de peso ω , su efecto vuelve a ser controlar la estabilidad de la solución. Si se toma pequeño, se consigue minimizar sobre todo las diferencias *crossover*. Si se toma demasiado grande, se minimiza la desviación respecto de la superficie elegida pero pueden permanecer tras el ajuste diferencias en los puntos subsatélites demasiado grandes. Se recomiendan valores entre 10^{-6} y 10^{-3} y advierten de la ineficacia en ocasiones al emplear el método en zonas de poca extensión. De cualquier modo, en este tipo de zonas la deficiencia de rango puede ser menor al poder no verificarse la redundancia.

5.4.2. Ajuste global de arcos independientes

En el método anterior, por trabajar localmente (tramos cortos), no se ha tenido en cuenta la variación de la órbita con el tiempo. Para hacerlo se desarrollan ajustes *crossover* globales que en la práctica son algo menos usados, que surgen a partir de los problemas de las aplicaciones locales (Rummel, 1992). Los cambios de la órbita a lo largo del tiempo, provocan también variaciones en el error orbital de carácter periódico. Estos ajustes pese a ser de carácter global siguen tratando a cada arco independientemente. Suponen una distribución global y homogénea de intersecciones de arcos. El modelo es el planteado en la ecuación (5.26) con μ en este caso como referida a los cruces por el ecuador como instante de referencia, por lo que varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$.

$$\mu_{ij} = \frac{2\Pi}{T} (t_j - t_{iec}) \quad (5.37)$$

Se seleccionan pares de arcos ascendentes y descendentes que forman un triángulo simétrico con el ecuador (Figura 5.7) y por esa simetría se verifica que $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$. Así:

$$\Delta h_{ij} = \Delta r_i - \Delta r_j + \varepsilon \quad (5.38)$$

que por la definición de Δr por (5.26) se convierte en:

$$\Delta h_{ij} = x_{i0} + x_{i1} \text{sen}\mu_{ij} + x_{i2} \text{cos}\mu_{ij} - x_{j0} - x_{j1} \text{sen}\mu_{ji} - x_{j2} \text{cos}\mu_{ji} + \varepsilon \quad (5.39)$$

y dada la igualdad $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$, se verifica:

$$\text{sen}\mu_{ij} = -\text{sen}\mu_{ji} \quad \text{cos}\mu_{ij} = \text{cos}\mu_{ji} \quad (5.40)$$

con lo que (5.39) queda:

$$\Delta h_{ij} = (x_{i0} - x_{j0}) + (x_{i1} + x_{j1}) \text{sen} \mu_{ij} + (x_{i2} - x_{j2}) \text{cos} \mu_{ij} + \epsilon \quad (5.41)$$

Por esta expresión, la matriz de coeficientes suele quedar con estructura en submatrices de Töplitz, que hace que la solución del sistema de ecuaciones normales sea sencilla.

También en este caso queda deficiente de rango. La deficiencia de rango es igual al número de parámetros de un arco, es decir, a p , y se puede eliminar fijando un arco (Rummel, 1992). Se reduce entonces la deficiencia de rango y por lo tanto la parte del error orbital que queda sin determinar por el método. Esto se debe a que la aplicación local del ajuste hacía aproximación plana, y los puntos *crossover* se suponen equidistantes en tiempo y en espacio (5.35). Al tomar la superficie real de la Tierra (curva) se produce el descenso de la deficiencia de rango de p^2 a p al no verificarse tal equidistancia (los elementos de la matriz no serían todos proporcionales a A y D). De todos modos, de nuevo llega a ser justo p sólo en el caso de disponer de una retícula completa de puntos de cruce, por lo que este análisis de rango corresponde al modelo teórico y en la realidad es bastante más complejo.

Además, se plantea el problema de que al considerar los trazos independientemente se producen discontinuidades en el cómputo de μ al alcanzar las latitudes extremas, con las consiguientes discontinuidades en el modelo. Esto lleva a plantear otros tipos de ajustes también globales.

5.4.3. Ajuste global continuo

El análisis de diferencias *crossover* global continuo trata de eliminar el efecto del error orbital, en este caso estudiando sus causas: principalmente el conocimiento insuficiente del campo de la gravedad. Así, se consideran no los arcos independientemente sino toda la longitud de la órbita y se expresa el error orbital en términos de correcciones ΔC_{lm} y ΔS_{lm} a los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos del potencial, usando de este modo las diferencias *crossover* como datos para mejorar el campo. Así se está suponiendo, para construir la relación entre diferencias *crossover* y variaciones en los coeficientes del modelo, que las medidas están adecuadamente corregidas de todos los efectos: instrumentales, de marea y atmosféricos relacionados en 5.1., por lo que el error en las medidas del altímetro es función únicamente del error en la altitud estimada del satélite, r_s . Con esta relación se consigue paliar el defecto del modelo anterior: el error orbital se expresará como función continua del tiempo sobre la longitud completa de la órbita.

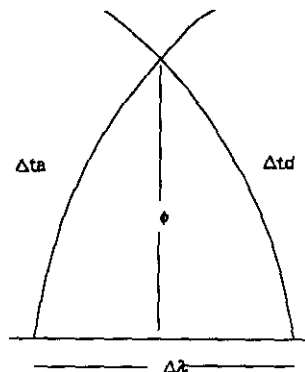


FIGURA 5.7: Cortes de trazos ascendentes y descendentes relativos al Ecuador.

Se pretende modelar el error orbital para un periodo completo de repetición. En altimetría se suelen usar órbitas casi polares cuyos trazos subsatélite se repiten exactamente. Para que esto último se verifique han de darse algunas condiciones. Si llamamos T al periodo de repetición de la órbita y T_e a la longitud del día nodal, es decir, periodo de rotación de la Tierra con respecto al plano orbital del satélite, para que la órbita sea fija y se repitan los trazos, ambos valores están relacionados:

$$\exists N_R, N_D \in \mathbb{Z} \quad / \quad N_R T = N_D T_e \quad (5.42)$$

Es decir, el satélite completa N_R órbitas en N_D días nodales.

Para definir la relación entre el error orbital y el campo de gravedad, tomamos:

i : inclinación de la órbita del satélite sobre el ecuador.

ω : argumento del perigeo, ángulo sobre el plano de la órbita del nodo al perigeo.

Ω : ascensión recta del nodo ascendente.

θ : tiempo sidéreo.

M : anomalía media $= n(t - T_0)$

Llamamos $\omega_0 = \omega + M$, a un valor que nos sirve para posicionar el satélite (o satélite "medio") en su órbita. Derivando se obtiene la velocidad angular media con la que recorre el satélite su órbita, $n = \dot{\omega}_0$ ($2\pi/T$). Por otro lado definimos $\omega_e = \Omega - \theta$, ángulo horario del nodo. Su derivada, $\dot{\omega}_e$, da la velocidad con que cambia el ángulo horario del nodo o con que transcurren los días nodales ($2\pi/T_e$). Ambas tienen los signos cambiados. Por (5.42) se tiene:

$$\frac{\dot{\omega}_e}{\dot{\omega}_0} = -\frac{2\pi/T_e}{2\pi/T} = -\frac{T}{T_e} = -\frac{N_D}{N_R} \quad (5.43)$$

El error orbital radial se descompone en varias partes y no se debe sólo a errores en el modelo de gravedad, aunque sí son la causa mayor (Mazzega y Houry, 1989, Rosborough y Kelecy, 1991). Así, hay una parte no correlada con la gravedad, Δr_{ng} , que es función de la incertidumbre en las condiciones iniciales. Se describe por distintos modelos, como por (5.21), con Δa , Δe y $e\Delta M$, errores en los elementos Keplerianos medios, o bien otros más complejos teniendo en cuenta muchos factores (Moore y Rothwell, 1990). Sin perder generalidad se puede escribir como:

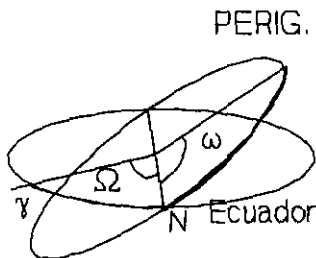


FIGURA 5.8

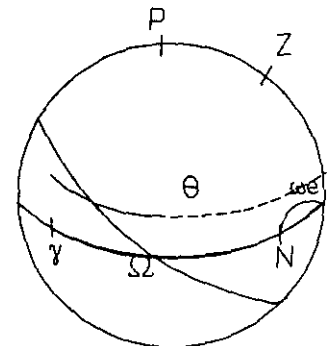


FIGURA 5.9.

$$\Delta r_{ng} = D_1(t-t_0) + D_2(t-t_0)\text{sen}M + D_3(t-t_0)\text{cos}M + D_4(t-t_0)\text{sen}2M + D_5(t-t_0)\text{cos}2M \quad (5.44)$$

con D_i , coeficientes en los que se incluirá la mayor o menor complejidad del modelo empleado, y t y t_0 tiempo e instante de referencia respectivamente (H.van Gysen y Coleman, 1994). Llamamos Δr_g a la parte del error orbital que sí es función de la gravedad, de la que nos ocuparemos un poco más adelante. En total diremos que:

$$\Delta r = \Delta r_{ng} + \Delta r_g \quad (5.45)$$

Δr_g en órbitas casi circulares, se expresa por un desarrollo en armónicos esféricos (H.van Gysen y Coleman, 1994):

$$\Delta r_g(t) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n (A_{nmp} \text{cos}\Psi_{nmp} + B_{nmp} \text{sen}\Psi_{nmp}) \right) \quad (5.46)$$

con A_{nmp} , B_{nmp} funciones de elementos Keplerianos, a , e e i y de errores en los coeficientes del modelo de geopotencial, que se toman como constantes en análisis de largo periodo. Los argumentos, para órbitas de repetición, son función de $\dot{\omega}_o$ y de $\dot{\omega}_e$. Los términos Ψ'_{nmp} son las frecuencias gravitacionales por estar en los términos del desarrollo de la parte relacionada con la gravedad.

$$\Psi_{nmp} = (n-2p)\dot{\omega}_o + m\dot{\omega}_e \Rightarrow \Psi_{nmp} t = (n-2p)\dot{\omega}_o t + m\dot{\omega}_e t \quad (5.47)$$

Utilizando la relación (5.43) por la que $\dot{\omega}_e$ se puede escribir en función de $\dot{\omega}_o$, tenemos que:

$$\dot{\Psi}_{nmp} = (n-2p - mN_D/N_R)\dot{\omega}_o \quad (5.48)$$

Luego la frecuencia fundamental es $\dot{\omega}_o$.

Llamamos Δt al intervalo de tiempo representado por (5.42). Si tomamos el valor de ψ transcurrido este tiempo, teniendo en cuenta la definición de los periodos tendremos:

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\dot{\omega}_o}, \quad T_e = \frac{2\pi}{\dot{\omega}_e} &\Rightarrow N_R \frac{2\pi}{\dot{\omega}_o} = N_D \frac{2\pi}{\dot{\omega}_e} \\ \dot{\Psi}_{nmp}[t+\Delta t] &= (n-2p)\dot{\omega}_o \left(t + N_R \frac{2\pi}{\dot{\omega}_o}\right) + m\dot{\omega}_e \left(t + N_D \frac{2\pi}{\dot{\omega}_e}\right) = \\ &= \dot{\Psi}_{nmp}(t) + 2\pi[(n-2p)N_R + mN_D] \end{aligned} \quad (5.49)$$

Según esta expresión, al repetir los trazos, las perturbaciones gravitatorias de la órbita prácticamente se cancelan, ya que el término $2\pi[(n-2p)N_R + mN_D]$ es una constante por un número entero de periodos. En la práctica, resulta ser un modelo más complejo al tener en cuenta la excentricidad de la órbita y queda un término de largo periodo (Moore y Rothwell, 1990) (por eso conviene tomar n como un valor no muy grande).

Los elementos del desarrollo (5.46) se pueden relacionar numéricamente con los armónicos de superficie por las relaciones de transformación de Kaula (1966):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_{nm}^c \\ r_{nm}^s \end{pmatrix} &= (\text{por definición de desarrollo en armónicos esféricos}) = \\
&= \begin{pmatrix} a_{nm} P_{nm}(\text{sen}\phi) \text{cos}m\lambda \\ b_{nm} P_{nm}(\text{sen}\phi) \text{sen}m\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{nm} R_{nm} \\ b_{nm} S_{nm} \end{pmatrix} = (\text{por fórmula de Kaula}) = (5.50) \\
&= \begin{pmatrix} a_{nm} \sum_{p=0}^n F_{nmp} \text{cos}\psi_{nmp} & \text{si } n-m \text{ es par} \\ a_{nm} \sum_{p=0}^n F_{nmp} \text{sen}\psi_{nmp} & \text{si } n-m \text{ es impar} \\ b_{nm} \sum_{p=0}^n F_{nmp} \text{cos}\psi_{nmp} & \text{si } n-m \text{ es par} \\ b_{nm} \sum_{p=0}^n F_{nmp} \text{sen}\psi_{nmp} & \text{si } n-m \text{ es impar} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

con:

ϕ , latitud geocéntrica.

λ , longitud.

P_{nm} , funciones asociadas de Legendre de primera clase,

F_{nmp} , funciones de inclinación dadas por Kaula.

Con esta transformación cada armónico esférico con $n < n_{\max}$ se puede escribir como combinación lineal de n frecuencias orbitales. En este estudio vamos a calcular las expresiones desarrolladas para el caso $n_{\max} = 2$. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
r_{00}^c &= a_{00} \sum_{p=0}^0 F_{00p} \text{cos}(\psi_{00p}) \Rightarrow (\psi_{000} = 0) \\
&\Rightarrow \underline{\underline{r_{00}^c = a_{00} F_{000} = a_{00} P_{00}(\text{sen}\phi)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{10}^c &= a_{10} \sum_{p=0}^1 (F_{10p} \text{sen}(\psi_{10p})) = (n=1, m=0) \quad \psi_{100} = \omega_o, \psi_{101} = -\omega_o \\
&\Rightarrow \underline{\underline{r_{10}^c = a_{10} (F_{100} - F_{101}) \text{sen}\omega_o = a_{10} P_{10}(\text{sen}\phi)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{11}^c &= a_{11} \sum_{p=0}^1 (F_{11p} \text{cos}(\psi_{11p})) = (n=1, m=1) \quad \psi_{110} = \omega_o + \omega_e, \psi_{111} = -\omega_o + \omega_e \\
&\Rightarrow \underline{\underline{r_{11}^c = a_{11} (F_{110} \text{cos}(\omega_o + \omega_e) + F_{111} \text{cos}(\omega_o - \omega_e)) = a_{11} P_{11}(\text{sen}\phi) \text{cos}\lambda}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{11}^s &= b_{11} \sum_{p=0}^1 (F_{11p} \text{sen}(\psi_{11p})) = (n=1, m=1) \quad \psi_{110} = \omega_o + \omega_e, \psi_{111} = -\omega_o + \omega_e \\
&\Rightarrow \underline{\underline{r_{11}^s = b_{11} (F_{110} \text{sen}(\omega_o + \omega_e) - F_{111} \text{sen}(\omega_o - \omega_e)) = b_{11} P_{11}(\text{sen}\phi) \text{sen}\lambda}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{20}^c &= a_{20} \sum_{p=0}^2 (F_{20p} \text{cos}(\psi_{20p})) = \\
&(n=2, m=0) \quad \psi_{200} = 2\omega_o, \psi_{201} = 0, \psi_{202} = -2\omega_o \\
&\Rightarrow \underline{\underline{r_{20}^c = a_{20} ((F_{200} + F_{202}) \text{cos}(2\omega_o) + F_{201}) = a_{20} P_{20}(\text{sen}\phi)}}
\end{aligned}$$

$$r_{21}^c = a_{21} \sum_{p=0}^2 (F_{21p} \text{sen}(\psi_{21p})) =$$

$$(n=2, m=1) \quad \psi_{210} = 2\omega_o + \omega_e, \quad \psi_{211} = \omega_e, \quad \psi_{212} = -2\omega_o + 2\omega_e$$

$$\Rightarrow \underline{r_{21}^c = a_{21} ((F_{210} \text{sen}(2\omega_o + \omega_e)) + F_{211} \text{sen}(\omega_e) - F_{212} \text{sen}(2\omega_o - 2\omega_e)) = a_{21} P_{21}(\text{sen}\phi) \cos\lambda}$$

$$r_{21}^s = b_{21} \sum_{p=0}^2 F_{21p} - \cos(\psi_{21p}) =$$

$$(n=2, m=1) \quad \psi_{210} = 2\omega_o + \omega_e, \quad \psi_{211} = \omega_e, \quad \psi_{212} = -2\omega_o + 2\omega_e$$

$$\Rightarrow \underline{r_{21}^s = b_{21} ((F_{210} \cos(2\omega_o + \omega_e)) - F_{211} \cos(\omega_e) - F_{212} \cos(2\omega_o - \omega_e)) = b_{21} P_{21}(\text{sen}\phi) \text{sen}\lambda}$$

$$r_{22}^c = a_{22} \sum_{p=0}^2 F_{22p} \cos(\psi_{22p}) =$$

$$(n=2, m=2)$$

$$\psi_{220} = 2\omega_o + 2\omega_e$$

$$\psi_{221} = 2\omega_e$$

$$\psi_{222} = -2\omega_o + 2\omega_e$$

$$\underline{= a_{22} [F_{220} \cos(2\omega_o + 2\omega_e) + F_{221} \cos(2\omega_e) + F_{222} \cos(2\omega_o - 2\omega_e)] = a_{22} P_{22}(\text{sen}\phi) \cos 2\lambda}$$

$$r_{22}^s = b_{22} \sum_{p=0}^2 F_{22p} \text{sen}(\psi_{22p}) =$$

$$\underline{= b_{22} [F_{222} \text{sen}(2\omega_o + 2\omega_e) + F_{221} \text{sen}(2\omega_e) - F_{222} \text{sen}(2\omega_o - 2\omega_e)] = b_{22} P_{22}(\text{sen}\phi) \text{sen} 2\lambda}$$

Volvemos a llamar A a la matriz que multiplica a los parámetros que describen el error orbital. En este tipo de modelo, tales parámetros son: los D_i de la parte no relacionada con el campo de la gravedad, (5.44), y los a_{nm} , b_{nm} de las expresiones anteriores. Se simplifica algo al tener en cuenta la relación existente entre los ψ_{nmp} . En el caso desarrollado en este trabajo, habrá cinco parámetros para modelar Δr_{ng} y veintiuno para Δr_g , ya que se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \psi_{201} = \psi_{000} &\Rightarrow \text{sen}\psi_{201} = \text{sen}\psi_{000} = 0 \\ \psi_{101} = -\psi_{100} &\Rightarrow \cos\psi_{101} = \cos\psi_{100}, \quad \text{sen}\psi_{101} = -\text{sen}\psi_{100} \\ \psi_{202} = -\psi_{200} &\Rightarrow \cos\psi_{202} = \cos\psi_{200}, \quad \text{sen}\psi_{202} = -\text{sen}\psi_{200} \end{aligned}$$

De nuevo existe una deficiencia de rango en la matriz, en este caso de $(n_{\max} + 1)^2$, luego si se elige $n_{\max} = 2$, la deficiencia es 9. Esto quiere decir que la parte de error orbital que queda sin determinar tras el ajuste será mayor (subespacio de mayor dimensión), si se toma n_{\max} más grande. Δr_{ng} no afecta a la deficiencia de rango.

Queda aún sin determinar la parte del error orbital que se puede expresar como

función sólo de la posición (Rummel, 1992, Visser et al, 1993), ya que es invariante respecto a las diferencias *crossover*. Es a lo que se llama error orbital correlado geográficamente.

Los procesos expuestos en esta sección y en la anterior tienen el inconveniente de que eliminan también la parte de larga longitud de onda no constante de la superficie del mar. En buenas condiciones de aplicación, los resultados obtenidos son similares (Feron et al, 1992). Se van a tratar posteriormente en el desarrollo de esta memoria. Por un lado, se va a presentar una nueva versión de ajuste colineal promediando arcos con igual peso que resultará adecuado para zonas pequeñas de aplicación. Por otro, se va a evaluar el error que introduce la aplicación de ajustes *crossover* no adecuada según los modelos de deficiencia de rango desarrollados en este trabajo para contrastar la validez práctica y no sólo teórica de estas demostraciones.

5.5. CARACTERÍSTICAS DE SATÉLITES ALTIMÉTRICOS

5.5.1. Satélite altimétrico ERS-1

El ERS-1 fue lanzado por la ESA el 17 de julio de 1991. Utiliza técnicas de microondas avanzadas que en principio posibilitan la adquisición de imágenes y medidas en cualquier condición de nubosidad. Estas técnicas fueron usadas anteriormente con carácter experimental durante un breve periodo de tiempo de la campaña del SEASAT. Este satélite también está preparado para medir parámetros relacionados con el estado del mar, vientos en la superficie del mismo, circulación oceánica, temperatura superficial, etc. Puede efectuar medidas en hielo, contribuyendo al estudio de cambios climáticos.

El satélite ha pasado por distintas fases operativas que se distinguen entre sí por el periodo de repetición que varía en cada una de ellas dependiendo de los objetivos de la misma. Por ejemplo, las dos que se utilizan en este trabajo: la fase multidisciplinar, con un

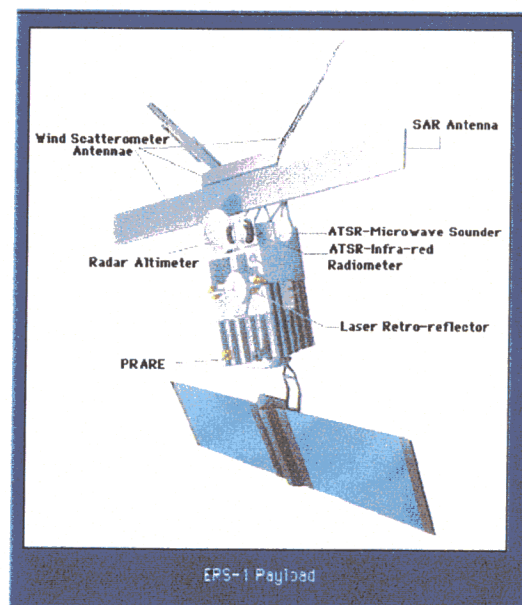


FIGURA 5.10: esquema del satélite ERS-1.

periodo de repetición de 35 días, y la fase geodésica, que comenzó en abril de 1994, con un periodo de repetición mayor lo que permite la adquisición de medidas del altímetro de gran densidad.

El diseño de la órbita, como en otros satélites altimétricos, y su instrumentación, permiten que la campaña proporcione datos con un recubrimiento de carácter global y con una repetitividad periódica. La órbita del ERS-1 es casi polar, con una altura media de unos 780000 metros. Sus parámetros cambian dependiendo de la fase de adquisición de datos en la que se encuentre el satélite. Los correspondientes a la época de la que hemos utilizado los datos se muestran en la tabla 5.4. A todos los datos adquiridos, el propio satélite les aplica un preproceso y control de calidad previo. Así, se hace una calibración interna o cálculo de las las funciones y parámetros relativos al instrumento y se determina un factor de corrección para compensar errores. La duración del ciclo de calibración interna es 150 ms. Se complementará con una calibración externa o determinación de factores de corrección a partir de la comparación con otras medidas. Esto ya constituye una validación. Además de la de cada usuario de los datos, un control de calidad ya lo da el satélite por un lado y por otro el Earth Act ERS-1 Central Facility (EECF) en Italia.

Su peso antes del lanzamiento era de 2400 kilogramos y sus dimensiones 12m x 12m x 2,5m. Sus partes o unidades fundamentales son:

Φ límite: 82°	NODO: 20°96 E
a: 7159,496 Km	Hora solar media en el
i: 98°543	nodo descendente: 10 ^h 30
h: 782 Km	Periodo: 100 minutos

TABLA 5.4: Elementos orbitales del ERS-1

- 1.- El módulo de servicio con la instrumentación principal del satélite.
- 2.- El módulo de propulsión o motores.
- 3.- Los paneles solares, dos alas de 5,8m x 2,4m con 22260 células solares que proporcionan más de 2000 W de energía eléctrica.

En cuanto a la instrumentación que lleva, consiste en un núcleo de sensores microondas activos suplementados por otros aparatos adicionales:

- 1.- INSTRUMENTO MICROONDAS: Tiene dos radares y opera en los modos:
 - modo imagen: para obtener imágenes de alta resolución en la dirección del movimiento del satélite es necesario una antena muy grande que sería complicado llevar en el satélite. Por eso el ERS-1 utiliza una técnica conocida como radar de apertura sintética (SAR), cuyo principio es utilizar el movimiento del satélite para combinar las señales recibidas y transmitidas por una antena no muy grande obteniendo el efecto de una mucho mayor en un periodo de tiempo dado.
 - modo onda: se obtienen representaciones de 5 km x 5 km a intervalos de 200 kms.
 - modo viento: no produce imágenes sino que usa el radar que no lleva apertura sintética para determinar la velocidad del viento y su dirección en la superficie.

El SAR opera en modo imagen o en modo onda. La emisión, en una frecuencia de 5,3 GHz, pasa las nubes de forma que éstas no interfieran. Utiliza cuatro antenas, tres de ellas de tamaños 10m x 1m y 2,5m x 3,6m, para el dispersómetro y otra para el SAR.

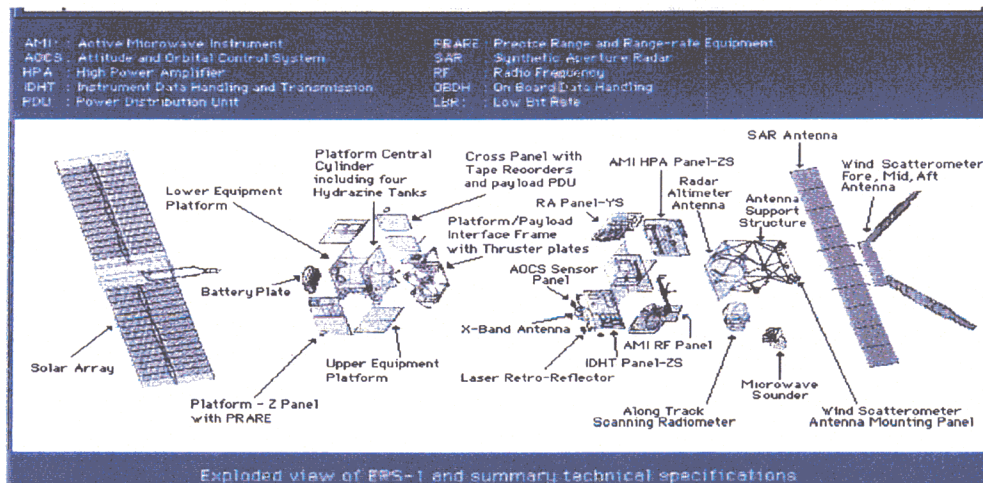


FIGURA 5.11: Especificaciones técnicas del satélite (CDguide to ERS-1)

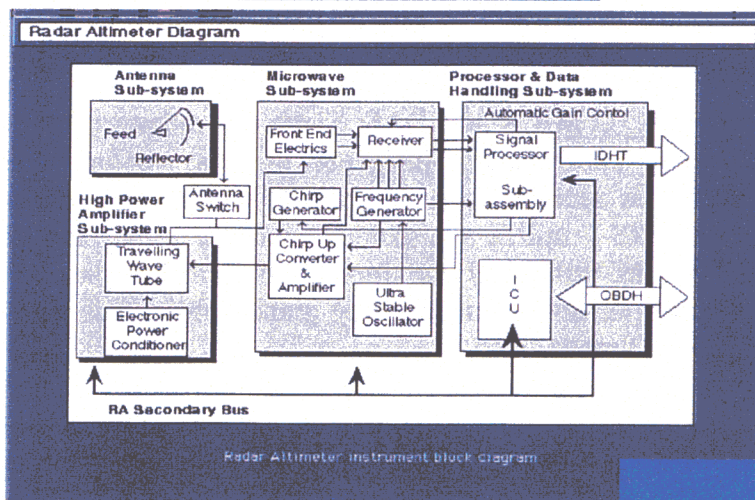
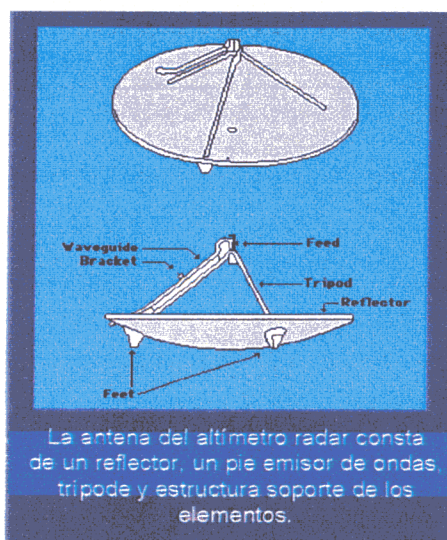


FIGURA 5.12: Esquema de la antena del altímetro y de su mecanismo (CDguide to ERS-1)

2.- ALTÍMETRO: proporciona medidas precisas de la elevación de la superficie del mar así como de algunos parámetros relacionados con la climatología. Lo hace transmitiendo pulsos de corta duración verticalmente hacia abajo y midiendo el tiempo que su eco tarda en volver con un sensor microondas.

3.- RADIÓMETRO: su principal cometido es medir la temperatura de la superficie del mar, de la superficie superior de la nube y el contenido de agua de ésta (vapor o líquido) con una precisión absoluta de más de $0,5^{\circ}\text{K}$ hasta con una nubosidad del 80%. Estas medidas son necesarias al calcular el efecto atmosférico aproximado de retardo de la señal. Para obtenerlas, el aparato está provisto de cuatro canales de infrarrojo. También obtiene imágenes de las temperaturas superficiales con un kilómetro de resolución.



FIGURA 5.13: Retro relectores laser del satélite (CDguide to ERS-1)

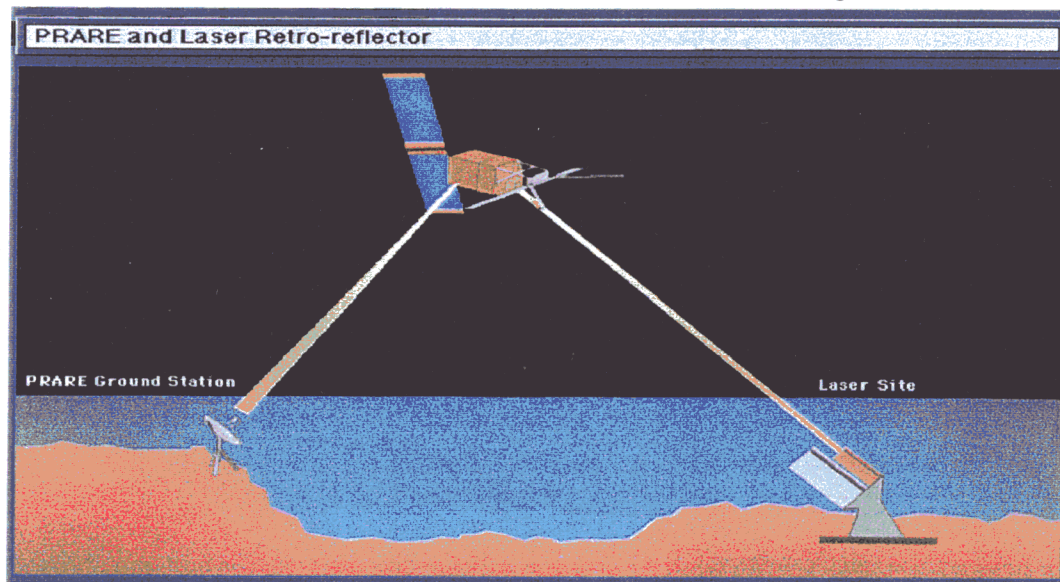


FIGURA 5.14: Esquema de las medidas para seguimiento del ERS-1 (CDguide to ERS-1)

Además incluye instrumentos que determinan de forma precisa la órbita para referenciar las medidas del altímetro. Originariamente se tenían dos instrumentos. El primero, un retroreflector laser (LPR), aparato que consta de un sistema de prismas cúbicos construídos independientemente para compensar el movimiento del satélite, y que determina la órbita intercambiando señales con bases de seguimiento terrestre que miden el tiempo que tardan los pulsos laser en ser reflejados por los reflectores del aparato. Con estas medidas se calibran los datos del altímetro con precisión de 10 cms y mejora la determinación de la órbita y se producen efemérides precisas (se pretenden mejor que 0,5 metros en su componente radial). El diámetro del aparato es menor que 20 centímetros y la longitud de onda operativa es de 350 nm a 800 nm, optimizado para 532 nm. Se tenía otro instrumento, el PRARE, *Precise Range and Range-Rate Equipment*, desarrollado también para determinar las características de su órbita y transmitir las a estaciones de seguimiento. En el caso de este satélite está inactivo desde el lanzamiento por un daño debido a radiación.

Aparte de la instrumentación que lleva el satélite, la misión planeó un seguimiento exhaustivo desde la Tierra. La órbita, casi polar y sincronizada con el Sol, hace necesario que

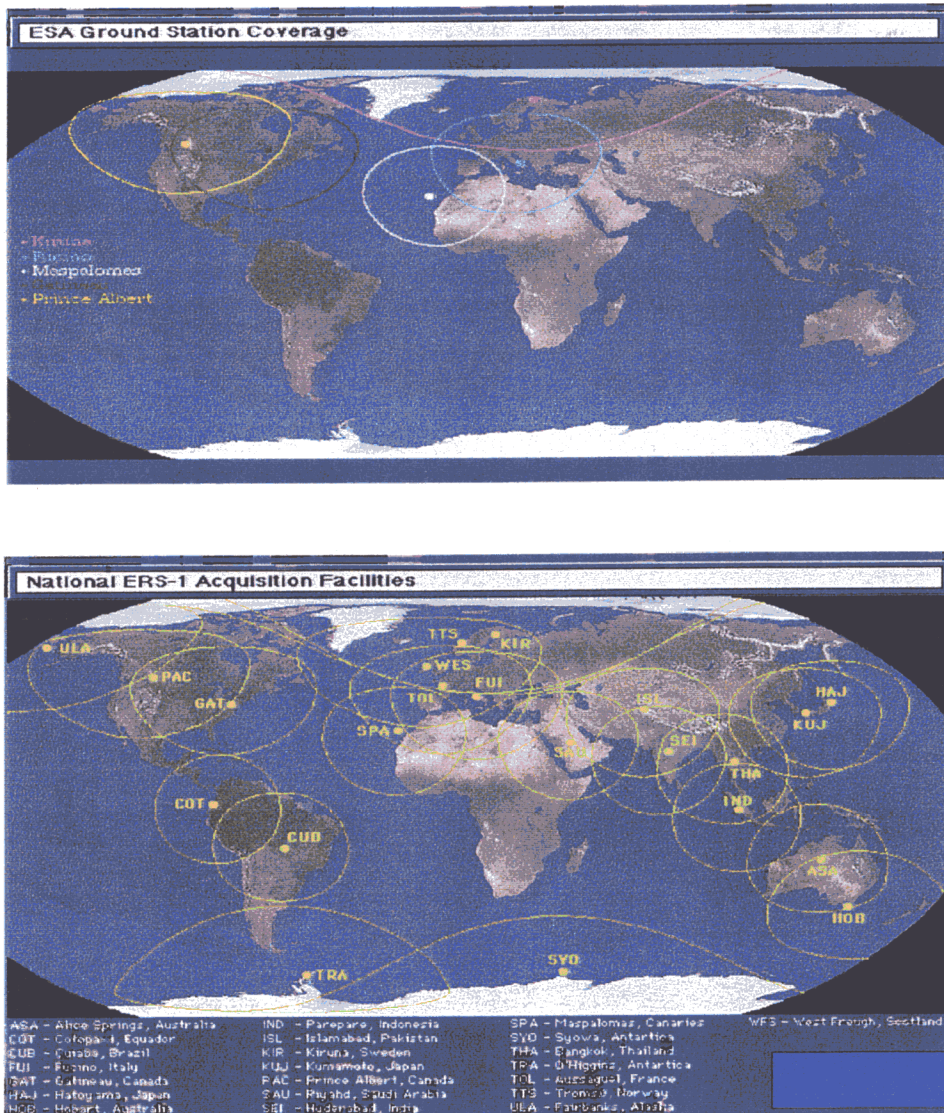


FIGURA 5.15: Esquema de la localización de las estaciones de seguimiento y de distribución del satélite (CDguide to ERS-1)

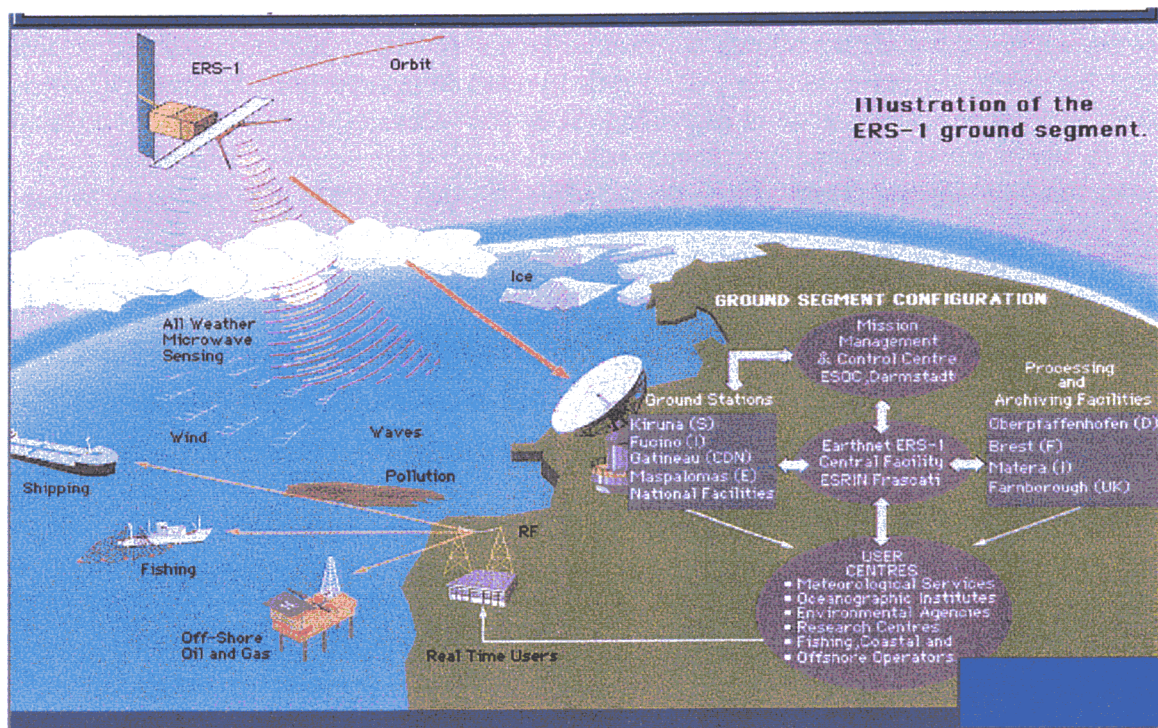


FIGURA 5.16: Configuración de la parte terrestre de la campaña del ERS-1 (CDguide to ERS-1)

este seguimiento se haga desde estaciones en puntos en distintos lugares del mundo y con esto se permite la adquisición de datos en tiempo real cuando el satélite es visible. Las estaciones que intervienen se clasifican en dos categorías: las incluídas en la ESA y las colaboradoras. En las primeras están Kiruna (Suecia), destinada sólo al ERS, Fucino (Italia), Maspalomas (España), Gatineau y Prince Albert (Canada) que son multimisiones. Las estaciones colaboradoras suelen ser estaciones que pertenecen a países que sí participan en el proyecto. El monitorizado y control del satélite se hace, como para el resto de los lanzados por ESA, en el ESOC (European Space Operations Centre) en Darmstadt (Alemania). La distribución de los datos de la misión se hace a partir de las estaciones.

El principio de la medida se basa en que el pulso se refleja en una superficie en principio lisa. Al avanzar el área iluminada crece rápidamente desde un punto hasta formar un disco. Si nada disturba la propagación de las ondas, a partir de ese disco se forma un anillo. Como regla geométrica se verifica que el área del anillo es constante según va aumentando el diámetro (es decir, se va haciendo más fino) (Figura 5.17.). La señal que se refleja y vuelve al satélite, depende del área reflectante y así aumenta rápidamente hasta que se forma el anillo, pero luego, según la regla anterior, permanece constante hasta que el anillo alcanza el borde del radar, a partir de donde la señal reflejada que se detecta en el satélite disminuye. Así, según la cantidad de señal que vuelva al radar se crea lo que se llama la curva de fuerza de la señal (Fig 5.17 y 18). Además de este modelo básico, las irregularidades en la superficie causan distorsiones en la señal reflejada (AVISO,1996).

El análisis del pulso reflejado consta de varias partes: de su retardo, con lo que se determina la distancia, y de la forma de la curva de fuerza de la señal, para obtener las

condiciones en las que se hace la observación. La inclinación de la curva de fuerza depende de la desviación típica de las alturas de caras reflectantes (olas), que en superficie oceánica se espera gaussiana o casigaussiana y de la reflectividad de la superficie. El nivel de potencia de la señal reflejada depende de la rugosidad. Si es muy elevada, por las leyes de reflexión, el eco de vuelta no se propaga únicamente sobre la vertical perdiéndose una parte. Además, la curva también cambia según el tipo de superficie, lo que afectará a la precisión de las

MASA: 96 KGS	DIAMETRO ANTENA : 1,2 M
FRECUENCIA GENERADOR: 13,6 GHz	(banda ku) optimizado 450 MHz
BANDA FRECUENCIA:	MODO OCEANO: 330 MHz - 165 MHz
	MODO HIELO: 82,5 MHz - 4,25 MHz
FRECUENCIA PULSO REPETICION:	1020 Hz
LONGITUD PULSO: 20 μ s	ANCHURA HAZ: 1,3°
PIE (zona iluminada): 16-20 KM	(depende del estado del mar)

TABLA 5.5: Características técnicas del altímetro del ERS-1

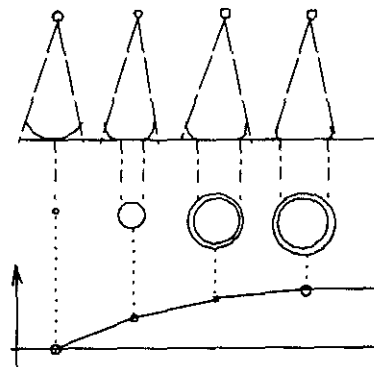
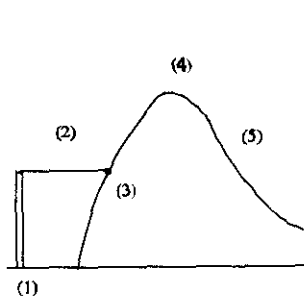


FIGURA 5.17: Principio de medida del altímetro; propagación de la señal en el océano.



- (1) Pulso transmitido
- (2) Retraso (relacionado con la altura del satélite)
- (3) Inclinación del borde principal (relacionado con la altura de las olas)
- (4) Potencia recibida (relacionada con la rugosidad)
- (5) Inclinación del borde de salida (relacionado con donde apunta el instrumento)

FIGURA 5.18: Principales elementos de la curva de fuerza de la señal de retorno.

predicciones del altímetro. Para que se adapte mejor a los cambios, el altímetro del ERS-1 opera en dos modos: océano y hielo en los que cambia la frecuencia. Por esto, existe un modo previo o modo adquisición en el que encuentra la distancia aproximada a la superficie y luego elige uno de los dos modos. En la medida en hielo, el pulso de retorno tiene una forma más picuda al tratarse de una superficie más lisa que disipa menos el pulso de retorno. Si se trata de hielo en el mar se puede seguir utilizando el modo océano sabiendo que se trata de hielo por las características de la curva junto con la latitud en la que se obtiene. Si es continental, la variación de la superficie es mayor y se necesita una ventana de observación más grande.

Las características instrumentales del altímetro se muestran en la tabla 5.5.

5.5.2. Satélite altimétrico TOPEX/Poseidon

Otro satélite usado en este trabajo es el TOPEX/Poseidon, lanzado el 10 de agosto de 1992, que lleva a bordo dos altímetros. El primero de ellos, el TOPEX, de la NASA, funciona con dos frecuencias, en las bandas Ku y C, con una metodología que se ya apareció de forma experimental en instrumentación del Geosat. Utiliza la doble frecuencia para medir y reducir el efecto de la ionosfera. El otro es el Poseidon, del CNES, que trabaja en la banda Ku. Los dos comparten la misma antena, por lo que no están nunca los dos operativos al mismo tiempo. Existe un sesgo de unos 20 centímetros entre ellos, siendo el Poseidon el que mide más largo (AVISO, 1996), aunque las diferencias dependen mucho del algoritmo que se use para determinar el sesgo electromagnético (Gaspar et al, 1994) y existen distintas calibraciones. El propio satélite es el que proporciona el valor de algunas de las correcciones a la lectura, en ocasiones calculadas por distintas opciones. Por ejemplo, la corrección atmosférica relativa a la ionosfera no se calcula igual en cada altímetro: el TOPEX, reduce el efecto utilizando doble frecuencia, aunque en la reunión de verificación de febrero de 1993 se determinó que existía un sesgo en la frecuencia, y obtiene una precisión de 2,2 centímetros. El Poseidon calcula la corrección del efecto de la ionosfera con el sistema Doris, del que se hablará en el seguimiento, con una precisión de 2 centímetros (AVISO, 1996). Para las correcciones de marea también se dispone de dos posibilidades. El satélite lleva los modelos de Cartwright y Ray y de Schwiderski. Como el primero se basa en datos altimétricos y el segundo en datos de mareógrafo, son muy distintos en su concepción y hay diferencias instantáneas grandes entre ellos que hacen que ambos se incluyan entre los factores de corrección que porta el satélite (Molines et al, 1994).

Su órbita se seleccionó, como en otros satélites altimétricos, para tener un buen recubrimiento tanto temporal (10 días), como espacial (315 km de separación en el ecuador), aunque bastante inferior al del ERS-1. Pero además se pretendió que tuviera una inclinación tal que las componentes diurnas y semidiurnas de la marea no se atenuaran para frecuencias bajas. Esto hace que no sea una órbita sincronizada con el Sol y que sean necesarias más maniobras de las normales para mantener la órbita, aunque su frecuencia depende del flujo solar; se esperan cada 40-200 días y se viene a tardar unos 20-60 minutos. El satélite no hace un preproceso de los datos pero sí que incluye una serie de señales o indicadores de medida en condiciones anómalas que se hayan detectado por el radiómetro microondas del TOPEX, como lluvias fuertes, o bien por corresponder a un instante en el que se efectuaba alguna maniobra del satélite.

El Poseidon utiliza el sistema Doris de seguimiento de dos frecuencias Doppler, con receptores en el satélite para detectar las señales de una red de 40-50 estaciones. El procesado de los datos y la determinación de la órbita se lleva a cabo en el CNES. El seguimiento del TOPEX es similar al del ERS-1: lleva también un retroreflector laser que refleja señales de

10-15 estaciones de seguimiento que calibran la posición y determinan su órbita con precisión. Además, el TOPEX incluye un receptor y antena GPS situados 4,3 metros sobre él, como apoyo a su posicionamiento. La ventaja frente a los otros dos sistemas es que se tiene información en tres dimensiones y sin lapsos en el recubrimiento. Es lo que se llama seguimiento cinemático. Con estos sistemas se consigue una precisión en la determinación de la componente radial de las efemérides de unos 10 centímetros. El proceso de los datos y el cálculo y calibración de la órbita se hace en paralelo por distintos organismos: JPL (Jet Propulsion Laboratory), CSR (Center for Space Research) y GSFC (Goddard Space Flight Center) (Bertiger et al, 1994).

5.6. COLOCACION MINIMOS CUADRADOS APLICADA A LOS DATOS DE ALTIMETRIA POR SATELITES

Como se vió en la sección 5.4., modelar el error orbital, dada su naturaleza de larga longitud de onda, por un sesgo y una inclinación constantes para cada arco, o bien por cualquier otro modelo similar, tiene inconvenientes. Por un lado, la pérdida de información

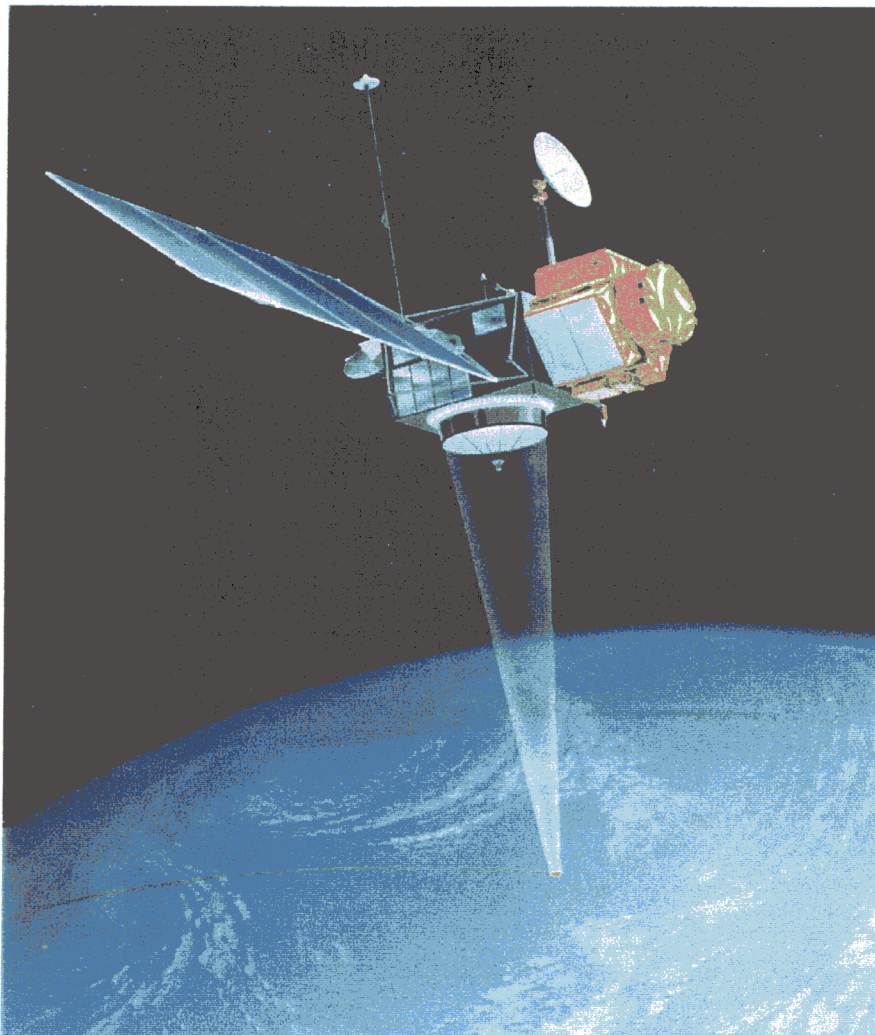


FIGURA 5.19: *Satélite TOPEX/Poseidon (CNES)*

sobre los fenómenos de larga longitud de onda eliminados en las diferencias; por otro, la parte de error orbital que queda sin determinar por la deficiencia de rango de la matriz empleada en el ajuste.

Según algunos autores (Knudsen, 1987b, Imawaki et al, 1992, Mazzega y Houry, 1989), puede resultar más útil obtener la superficie media del mar, es decir, eliminar de los datos la parte de error orbital y de topografía dinámica, por colocación mínimos cuadrados.

Al utilizar este método, se alcanza una estimación lineal y óptima a partir de datos que incluyen errores suponiendo que se conocen a priori algunas propiedades de la señal y del ruido que intervienen. Se necesita tener un modelo con el que construir las funciones covarianzas de ambas partes, ya que este tipo de funciones vimos que aseguran la estabilidad de los cálculos y la unicidad de solución. La elección de este modelo es el principal problema en la aplicación del método. En los esquemas más sencillos (Knudsen, 1987b), se considera que una vez eliminados de los datos de altimetría los efectos instrumentales y atmosféricos, la superficie resultante se desvía poco del geode, por lo que se pueden utilizar los modelos para esta magnitud vistos en capítulos anteriores. Así se tiene que las alturas instantáneas son la altura media que se quiere determinar más una parte variable con el tiempo:

$$h(t) = h_m(t) + \Delta h(t) \quad (5.51)$$

Las cantidades que se utilizan como dato son las diferencias *crossover*, que son diferencias entre las partes que varían con el tiempo:

$$d_{ij}(t) = h(t_i) - h(t_j) = h_m + \Delta h(t_i) - h_m - \Delta h(t_j) = \Delta h(t_i) - \Delta h(t_j) \quad (5.52)$$

Por colocación (2.33), pero usando en este caso como observación las diferencias, se determina Δh . A partir de su estimación se obtienen las diferencias *crossover* estimadas:

$$\hat{d}_{ij} = \Delta \hat{h}(t_i) - \Delta \hat{h}(t_j) \quad (5.53)$$

Pero si se tiene en cuenta que ni los datos ni las cantidades a estimar son exactamente valores de N , los modelos construidos a partir de la función covarianza del potencial no son válidos. La superficie media del mar que se quiere obtener incluye errores de geode y orbitales (correlados o no geográficamente) luego no es una cantidad periódica. Así, como modelo de función covarianza se puede elegir una exponencial negativa o bien modelos utilizados en ciencias atmosféricas que combinan funciones exponenciales con trigonométricas (Imawaki et al, 1992, Mazzega y Houry, 1989) con carácter periódico pero de muy larga longitud de onda. Luego el principal problema viene de la elección de la función covarianza que represente bien al error orbital, sobre todo porque al ser de tan larga longitud de onda no se puede hacer una estimación local. Pero es la única forma en la que merece la pena la aplicación del método expuesto, ya que el número de incógnitas es igual al número de puntos de cruce en donde se tienen diferencias. Las matrices son muy grandes y además los elementos no nulos están distribuidos en ellas de una forma complicada y por toda la matriz puesto que las medidas en un mismo punto, por la repetitividad de la órbita, se vuelven a obtener tras un tiempo. Así, los elementos no nulos asociados a dos puntos dados se localizan lejos de la diagonal de la matriz (Imawaki et al, 1992). Esto constituye también un problema teórico, puesto que si sólo se trabaja localmente no se puede usar una estimación de la función covarianza adecuada.

En este trabajo no se ha usado este método, porque en zonas costeras es donde mayor

error se comete al identificar medidas de altimetría con cantidades relacionadas con el campo de la gravedad, lo que no lo hace adecuado para nuestro estudio.

5.7. OTROS USOS DE ALTIMETRIA EN GEODESIA

5.7.1. Uso de la altimetría por satélites para la mejora de geoides determinados por otras técnicas

A partir de altimetría se obtiene altitud geométrica del mar (5.9), suma de ondulación de geoide y altitud de la superficie del mar sobre él salvo una serie de correcciones e incertidumbres principalmente a causa del error orbital. La parte de éste que no puede corregirse consta de la parte sistemática o correlado con la posición $\epsilon(r)$ y de otra aleatoria a la que también se pueden añadir los errores de medida del altímetro no corregidos $\epsilon(t)$. Así:

$$\zeta = N+H+\epsilon(r)+\epsilon(t) \quad (5.54)$$

Dada esta relación entre el resultado de las observaciones y N así como el hecho de que la superficie del mar prácticamente coincide con el geoide marino salvo por sus perturbaciones dinámicas, las medidas se pueden usar para mejorar geoides ya existentes sobre la zona. La existencia de datos de altimetría de forma casi continua resulta provechoso para este fin. Consideramos:

$$\hat{N}(r)=N(r)+\epsilon_g(r) \quad (5.55)$$

con N, ondulación de geoide disponible y $\epsilon_g(r)$ error del mismo.

La altitud de la superficie marina, hemos visto que puede descomponerse (5.11) en una parte estacionaria H_o y las fluctuaciones variables con el tiempo η . Por (5.9), (5.11) y (5.55) tenemos:

$$\zeta=N(r)+\epsilon_g(r)+H_o(r)+\eta(r,t)+\epsilon(r)+\epsilon(t) \quad (5.56)$$

Llamamos R a la diferencia entre ζ determinado y el geoide disponible. Al igual que las cantidades que la constituyen admite una separación entre aquellas de sus componentes que son función sólo de la posición y las que son variables con el tiempo.

$$R(r,t)=\zeta-N=H(r)+E(r,t) \quad (5.57)$$

con parte dependiente de la posición:

$$H(r)=\epsilon_g(r)+H_o(r)+\epsilon(r) \quad (5.58)$$

$$E(r,t)=\eta(r,t)+\epsilon(t) \quad (5.59)$$

y de la posición y del instante de observación:

Con todos estos elementos, se puede construir un modelo de ajuste, por ejemplo por mínimos cuadrados o por colocación, para determinar mejoras en los geoides (Imawaki et al,

1992, Mazzega y Houry, 1989). La aplicación práctica de este método se deja para futuras investigaciones.

5.7.2. Determinación de anomalías de gravedad Δg

Llamamos problema inverso de la altimetría por satélites a la estimación de las anomalías de la gravedad utilizando para ello datos de altimetría y la relación entre ellos que sale de suponer que las medidas de altímetro corregidas y promediadas convenientemente nos dan la ondulación del geoide.

Este problema puede resolverse, por ejemplo por colocación como se expuso en capítulos previos. Para su aplicación, como se hizo entonces, se usa un conjunto de coeficientes de potencial como primera aproximación con lo que se elimina la parte de larga longitud de onda de los datos.

Como un primer problema aparece que el número de incógnitas es igual al número de datos usado por lo que la aplicación del método no sería viable y se hace necesaria una discretización (Knudsen, 1987b, Arabelos et al, 1992) con algunos puntos a tener en cuenta. Se tiene que Δg es una cantidad dominada por las frecuencias cortas. Así, un muestreo pobre de datos o una resolución escasa de los mismos, afectará mucho a la precisión de los resultados (Mazzega y Houry, 1989). Dentro de esto, en algunos trabajos hechos anteriormente, se prueba que si se densifican demasiado los datos de altimetría tampoco mejora el resultado a partir de un cierto intervalo (Arabelos et al, 1993), dado que la altimetría no da información sobre longitudes de onda muy cortas. Esta es la principal limitación del método y a lo que se deben la mayor parte de las diferencias obtenidas al comparar con los resultados valores de gravedad observados (Mazzega y Houry, 1989).

Los valores de covarianza obtenidos empíricamente a partir de valores medios de productos de datos de altimetría a una misma distancia se ajustan bien a los modelos de funciones presentadas en el capítulo 2 siempre que se disponga de un recubrimiento suficientemente denso.

Usando la colocación mínimos cuadrados es posible predecir tanto anomalías puntuales como medias. En la práctica, los resultados suelen ser bastante superiores si lo que se predicen son anomalías medias (Tscherning, 1993). Una explicación para esto es que se pierde información al extraer la muestra que no puede recogerse de nuevo.

Si el modelo sustraído a las observaciones (y al que por tanto estarán también referidas las Δg resultantes) incluye información sobre la parte del campo de gravedad de corta longitud de onda, la estimación no mejorará considerablemente de incluir batimetría a no hacerlo según se ve en experiencias previas del método (Arabelos et al, 1993).

Este método es una forma eficaz de mezclar y relacionar datos de distinta naturaleza por la posibilidad que ofrece el uso de correlación y de covarianzas cruzadas, como por ejemplo, puede ser útil usar datos de mareógrafo, aunque esto no está aún ampliamente estudiado. También se puede hacer una localización del datum usando un análisis combinado de datos de altimetría, mareógrafo y GPS, utilizándose éste también para calibrar el altímetro (Hein et al, 1990).

La principal aplicación de este método es la obtención de Δg en zonas marinas donde no se dispone de observaciones de gravedad.

5.7.3. Determinación de batimetría utilizando datos de altimetría

Puesto que existe una fuerte correlación entre la figura del geoide y la batimetría, (las

variaciones de alta frecuencia de uno están producidas por la segunda) los datos de altimetría se utilizan para la detección de accidentes geográficos del fondo marino. Para hacer esto, existen métodos como modelar tales accidentes como formas cónicas y determinar su efecto sobre la señal (Basu et al, 1991) de modo que se obtiene información sobre la posición de los posibles accidentes así como su tamaño, aunque éste es un problema indeterminado (no tiene solución única) ya que la altitud del geoide y de la superficie topográfica marina, no están relacionadas sólo con la profundidad del fondo, sino también con los cambios de densidad de la corteza. Así, accidentes del mismo tamaño pero con distinta densidad provocan distinta perturbación en el geoide. Por esto, se suele trabajar con modelos que consideran la densidad constante en capas (Barzaghi et al, 1992), complicándolo de forma que pueden existir distintas capas con distintos contrastes de densidades (Tscherning et al, 1994a y b).

A veces se trabaja con las perturbaciones de las anomalías en vez de las de geoide. Se ha visto que a partir de datos de altimetría se puede obtener Δg con un error razonablemente pequeño. La relación entre campo de gravedad o de geoide y la batimetría se suele analizar por funciones de transferencia, es decir, funciones que en general produzcan la batimetría a partir de información del geoide o de gravedad que se pueden calcular en el dominio espectral o en el espacial. En el dominio espectral esto se hace construyendo los espectros de las cantidades a relacionar en una zona donde ambas son conocidas y determinar la relación entre ellos o razón entre las transformadas de Fourier de las dos cantidades (Basu y Sakena, 1993). En el dominio espacial se calculan los coeficientes de la regresión entre los dos campos (Sramek, 1992) o las funciones covarianza (Tscherning et al., 1994a y b), - en este último caso, teniendo en cuenta las leyes físicas de forma que se imponga a las funciones covarianza ser realistas y consistentes-. El modelo de función de transferencia tanto en uno como en otro dominio va a variar según el modelo de compensación isostática que se tome.

Esto ocupará investigaciones posteriores a este trabajo puesto que la zona de aplicación no es adecuada al no disponer de un buen modelo de superficie topográfica del mar que sirva para separar geoide del resultado de altimetría.

5.8. CONCLUSIONES Y RESULTADOS

En este capítulo se han presentado:

1. Un análisis desarrollado del modelo de ajuste del error orbital que se utilizará en el trabajo, así como otros relacionados y no aplicables a la extensión de la zona.

2. Una justificación teórica de la metodología usada en los capítulos posteriores respecto al ajuste *crossover* y a la deficiencia de rango de la matriz utilizada en el mismo. El desarrollo se ha llevado a cabo para los casos susceptibles de uso en este trabajo. En estudios posteriores, se ampliará a los demás tipos de modelos de ajuste.

3. Una descripción de los satélites altimétricos operativos en la actualidad y que son los que han proporcionado los datos para la elaboración de este estudio.

4. Breve enumeración de otros usos de los datos altimétricos en geodesia así como otros métodos para corregir el error orbital basados en metodologías descritas previamente en esta memoria.

ABRIR CAPÍTULO 6

