Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: Una experiencia de enfoque investigativo

Carlos de Castro Hernández y Beatriz Escorial González
CSEU La Salle, Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

La resolución de problemas puede constituir el motor de la construcción del conocimiento numérico en los primeros años. Describimos un taller de resolución de problemas aritméticos para último curso de Educación Infantil, diseñado para una clase que sigue un método de aprendizaje por proyectos. Dentro de un ambiente de plena libertad para elegir materiales y procedimientos de resolución, los niños inventan sus propias estrategias, las discuten dentro del grupo, y deciden cuál será la estrategia «oficial» del grupo.

Palabras clave

Educación Infantil, métodos de proyectos, resolución de problemas.

Abstract

Problem solving can constitute the motor for the construction of numerical knowledge in the early years. We describe an arithmetical problem solving workshop in kindergarten, designed for a group that follows a project approach. Within an atmosphere of total freedom to choose manipulatives and procedures of resolution, children invent their own strategies, discuss them within the group, and decide which strategy will be the «official» one for the group.

Key words

Early Childhood Education, Project Approach, Problem Solving.

Introducción

La experiencia de investigación que describimos en este trabajo, se desarrolla en un grupo de 14 niños y niñas de 5 y 6 años, en el último curso de Educación Infantil, en la que se sigue una metodología de proyectos. En este contexto se inscribe el relato de la implementación de un taller de resolución de problemas, que permitirá al lector presenciar la evolución del pensamiento matemático de los niños a lo largo de tres meses del curso. Nosotros, como profesores-investigadores, partimos de la premisa teórica de que, en el aprendizaje de las matemáticas, es importante encontrar un equilibrio entre distintos tipos de experiencias. Por una parte, los proyectos suponen situaciones en las que suele producirse un aprendizaje significativo. Dado que son los niños los que, de forma autónoma, tratan de abordar un problema, las estrategias que utilizan suelen estar basadas en sus conocimientos previos. En esta situación, es fácil pensar que los nuevos conocimientos se integrarán en las estructuras cognoscitivas que poseen los alumnos y que el aprendizaje será significativo. Por otra parte, el aprendizaje en los proyectos es también funcional, pues es un aprendizaje que surge de la necesidad de resolver problemas prácticos, y por tanto, cabe pensar que será un aprendizaje aplicable a un contexto extraescolar. Sin embargo, en matemáticas también ocupa un lugar primordial el aprendizaje de destrezas. El conteo, la comparación de números, la lectura y escritura de números, la suma y la resta, son todas destrezas numéricas. El aprendizaje de destrezas requiere de cierta sistematicidad. Para aprender a sumar, no basta con hacer una o dos sumas; para aprender a leer o a escribir números, es necesario algo más que escribir algún número ocasionalmente en el desarrollo de un proyecto. El aprendizaje matemático que se produce en los proyectos es incidental, no sistemático. Dado que en los proyectos no se sabe de antemano los contenidos que se van a aprender, podría suceder que los niños hicieran una suma, o escribieran varios números, pero también puede ocurrir que no se pongan en juego ninguno de estos conocimientos. En todo caso, el salto que hay de la realización de una suma o la escritura de varios números al aprendizaje de la suma o de la lectura y escritura de números, es muy grande. Aún siendo cierto que el aprendizaje de destrezas numéricas requiera de un trabajo sistemático, no implica que las tareas que realizan los alumnos, para hacer este aprendizaje, deban ser repetitivas, mecánicas o carentes de significado para los niños. La comprensión debe ser un objetivo educativo irrenunciable y los procesos de enseñanza deben tener siempre en cuenta el interés de los niños y las niñas.

En este trabajo describimos el desarrollo de un taller de resolución de problemas aritméticos verbales llevado a cabo en un aula de Educación Infantil, con niños y niñas de 5 y 6 años. Este trabajo con problemas aritméticos ha sido propuesto como una alternativa a la enseñanza tradicional de la aritmética, en la que el aprendizaje de las operaciones aritméticas suele preceder siempre a la resolución de problemas. Inspirados en trabajos en los que este enfoque se invierte, y se trabaja a través de la resolución de problemas con niños que todavía no han aprendido a realizar operaciones aritméticas (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999; Fosnot y Dolk, 2001; Warfield y Yttri, 1999) elaboramos una propuesta de taller de resolución de problemas.

Esta propuesta se enmarca dentro del enfoque investigativo que asumimos como modelo teórico para abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil (Baroody, 2003; Fosnot y Dolk, 2001). En el enfoque investigativo, las matemáticas se consideran simultáneamente como una red de conceptos y procedimientos y como una forma de pensar o un proceso de investigación. De acuerdo con este planteamiento, el aprendizaje de reglas, procedimientos y fórmulas debe realizarse con comprensión y procurando que el aprendizaje sea significativo. A su vez, se concede gran importancia al desarrollo del pensamiento matemático a través del razonamiento y la resolución de problemas. Los niños son considerados como capaces de construir activamente su conocimiento (construcción que es mediada y guiada por el profesor a través de propuestas de actividades previamente planificadas) aunque también a través de experiencias de investigación que surgen durante el proceso de aprendizaje (como los proyectos). El objetivo del enfoque investigativo es el aprendizaje de reglas, procedimientos y fórmulas de un modo significativo, pero también deben adquirirse competencias de razonamiento, representación, comunicación y resolución de problemas (Baroody, 2003).

Consideramos el taller de problemas un tipo de actividad complementaria y compatible con el enfoque de proyectos. Es complementaria porque aporta la sistematicidad necesaria para favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas y, a medio plazo, el aprendizaje de la aritmética. Es compatible, porque comparte con los proyectos el corazón de sus presupuestos educativos: está basada en el interés de los niños y las niñas, sus acciones están orientadas hacia una meta que les da sentido, se favorece el desarrollo de la autonomía intelectual de los pequeños, y el aprendizaje es el resultado de la construcción social de conocimiento dentro del grupo.

La planificación del taller: la búsqueda de un contexto para la resolución de problemas

Antes de comenzar a describir la experiencia, será útil hacer una breve reflexión sobre el tipo de problemas empleados en la misma. Los problemas aritméticos verbales que se suelen plantear, del tipo: «María tenía 10 caramelos y se comió 6…», corren a menudo el riesgo de convertirse en problemas excesivamente «escolares». En algunas ocasiones extremas, estos problemas degeneran en meros pretextos para la aplicación de alguna operación aritmética recién aprendida. En experiencias previas sobre resolución de problemas con enunciados de este tipo, los pequeños nos decían al terminar un problema: «Dinos otra adivinanza.» Este comentario evidencia que los niños no toman el problema como real. Algunos niños aceptan bien este tipo de problemas «hipotéticos», aunque no respondan a la demanda de una situación real. Por el contrario, en otras ocasiones, los problemas sí son auténticos problemas reales. Por ejemplo, cuando los pequeños juegan a disfrazarse de piratas, se plantean problemas del tipo: ¿Cuántos pañuelos nos faltan, si tenemos 6 y somos 9 piratas? En este caso, los niños no toman los problemas como «adivinanzas», sino como un verdadero problema para ellos. Aunque sabemos que el trabajo con los dos tipos de problemas puede dar resultados satisfactorios, pensamos que los problemas que los niños asumen como propios (reales) suponen un modelo más adecuado de situación para el trabajo en resolución de problemas. Es más probable que una mayoría de alumnos se implique en el trabajo con problemas reales que con problemas hipotéticos. Los niños que etiquetamos como «buenos alumnos» progresan en su aprendizaje a través de casi cualquier situación de enseñanza. Sin embargo, los alumnos con dificultades de aprendizaje son más sensibles a la necesidad de dar sentido a la actividad que realizan. En la Educación Infantil debemos estar especialmente atentos a los factores afectivos. En esta etapa educativa asumimos como principio pedagógico que las actividades que planteamos a los niños deben contar siempre con el interés de los pequeños (Copley, 2000). Si no somos capaces de implicar a la mayoría de los niños en el trabajo, algunos pueden perder el interés y convertirse en un obstáculo para la dinámica de la clase, al no aceptar las normas del funcionamiento del taller.

La dificultad que afrontamos los profesores relativas al carácter de los problemas es que los problemas reales aparecen sólo de vez en cuando. Resulta muy difícil provocar la aparición de un problema real, y casi imposible que las variables implicadas en el mismo, como el tamaño de los números, se ajusten a la planificación del profesor y a las necesidades de aprendizaje del grupo. En esta situación, el reto a asumir es encontrar una situación que resulte real para los niños, o que estos tomen como tal, y que constituya un contexto rico que permita el planteamiento de problemas de todo tipo.

En nuestra experiencia, esta situación vino dada por la realización de una visita que los alumnos realizan una vez al año. Todos los años, los niños y niñas del Colegio van a una Granja Escuela a pasar varios días. Los pequeños conocen en la granja a un personaje, el duende Pitutín, encargado del cuidado de los animales y las plantas. Todas las noches les deja caramelos a los niños mientras duermen. Los pequeños se acuerdan de él durante todo el curso con discusiones tales como si existe o no, si le han visto, o si es el único duende del mundo que existe.

Esta situación supondrá el punto de inicio para el taller de resolución de problemas. Un día, los niños reciben una carta de Pitutín. El duende les pide ayuda para resolver algunos problemas que se le plantean en el cuidado de los animales de la granja. Para los niños, ayudar al duende en sus tareas es una gran responsabilidad y, sobre todo, un gran honor. Además, Pitutín les pide a los niños una respuesta por carta, lo que obligará a los pequeños a iniciarse en la escritura matemática. Este añadido se revelará fundamental en el proceso, pues hará que tratemos las matemáticas y el lenguaje en un contexto globalizador, lo que parece muy adecuado para estas edades. Poco a poco, los niños irán teniendo que explicarle a Pitutín cómo resolver el problema (no bastará con darle el resultado) y se irán iniciando en la escritura de sentencias numéricas. Las sesiones de trabajo duran una hora aproximadamente. En cada una de ellas se resuelven uno o dos problemas. El contexto de la granja y las propuestas de problemas de Pitutín, que los niños toman desde el principio como reales, acompañan a los niños durante toda la experiencia.

La maestra interviene lo menos posible, y siempre de forma indirecta. No da la solución correcta, ni propone un procedimiento como idóneo. Cuando un niño da una respuesta que no tiene sentido dentro del contexto del problema, intenta hacérselo ver a través de una pregunta: «¿Es posible que si Pitutín tiene 15 bellotas, y las reparte entre cinco cerdos, les toquen 15 bellotas a cada uno? ¿Quince a uno, quince al otro,…?» Por el contrario, cuando un procedimiento le parece digno de ser resaltado, pide al alumno que lo ha propuesto que lo explique otra vez y pregunta a todos si han entendido cómo lo ha resuelto su compañero. La maestra también interviene para valorar la validez de las explicaciones que dan los pequeños de los procedimientos empleados. Sin embargo, aunque es la maestra la que decide sobre la validez de una explicación, expone los criterios de su valoración a los alumnos: «Hay que explicarlo bien para que los demás entiendan cómo lo hemos hecho, para que puedan decir si están de acuerdo o no», etc. De acuerdo con estos criterios, no se darán como válidas explicaciones del tipo: «Son seis porque lo he pensado». Las explicaciones que dan los niños tienen un doble valor didáctico. Por una parte, ayudan a sus autores a articular su pensamiento para producir la explicación, aumentando la comprensión sobre el proceso. Por otra parte, constituyen una enseñanza para los oyentes, que sustituye en cierta medida la enseñanza de la maestra.

La selección de los problemas

Un punto clave en el diseño del taller de resolución de problemas, ha sido la elección de los problemas que se plantearían a los pequeños. En este trabajo, por tipos de problemas nos referimos a las categorías semánticas de los problemas. En este punto, hemos seguido la clasificación de Carpenter y otros (1999). Así, contemplamos, dentro de los problemas de estructura aditiva, las categorías de cambio creciente y decreciente, combinación y comparación. Dentro de los problemas de estructura multiplicativa, planteamos problemas de multiplicación, división reparto y división agrupamiento. Dada la edad de los participantes, no nos ha parecido oportuno incluir otras categorías más complejas, como los problemas de comparación multiplicativa. En la tabla 1 sintetizamos los tipos de problemas y las estrategias más comunes para su resolución.

Para la selección de los tipos de problemas, es necesaria una referencia teórica clara para que la dificultad de los problemas sea adecuada. Hemos tomado esta referencia del trabajo de Clements (2004). En él se sintetizan resultados de múltiples investigaciones en Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas y en Didáctica de la Matemática, con el objetivo de establecer un marco curricular para fundamentar la práctica educativa en la Educación Infantil. Resumimos las principales aportaciones de este trabajo relativas al aprendizaje de los números, operaciones y resolución de problemas, para niños de 5 y 6 años (último curso de Educación Infantil) en los párrafos siguientes de la presente sección.

En cuanto a las destrezas de conteo oral, los niños de esta edad deberían: contar verbalmente hasta cien (aunque muchos niños no alcanzan este objetivo hasta el primer curso de Educación Primaria), contar hacia atrás desde diez, contar a saltos de diez en diez hasta cien y contar hacia adelante a partir de un número pequeño (menor o igual que 5) sin contar los anteriores (sin empezar desde el uno). En el conteo de objetos, deben ser capaces de producir, contando los objetos, una colección de hasta 20 objetos. También deben ser capaces de leer y escribir números de un dígito[1]. En la resolución de problemas, comienza el proceso de traducción de problemas verbales y sus soluciones a sentencias numéricas y al revés, la dotación de significado a las sentencias numéricas, creando para ellas un enunciado verbal. Los problemas adecuados para estas edades son: Problemas de cambio creciente y decreciente con incógnita en la cantidad final, problemas de combinación con incógnita en el total, y algunos problemas de comparación sencillos y de cambio con la cantidad de cambio desconocida. Por el contrario, algunos problemas de combinación con una de

[1] En nuestro trabajo, los niños estaban aprendiendo a leer y a escribir números de dos cifras hasta el 20 cuando comenzó el taller de problemas. Cada 15 días aproximadamente, los pequeños jugaban una partida de bingo. Al «cantar» el número, utilizaban una recta numérica para hacer la correspondencia entre los símbolos escritos y las palabras de la secuencia numérica recitada. Los demás niños buscaban también en la recta numérica la forma escrita correspondiente a la palabra-número pronunciada por el compañero.

Problemas de suma y resta	
Problema	*Descripción de la estrategia*
Cambio creciente (cantidad final desconocida) Elena tenía 3 caramelos y se compró 5 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora?	*Juntar todos* Se forma un montón con 3 objetos y otro con 5. Se juntan los dos montones y se cuenta el total de los objetos.
Cambio creciente (cantidad de cambio desconocida) Jesús tenía 3 cacahuetes. Clara le dio algunos cacahuetes más. Ahora Jesús tiene 8 cacahuetes. ¿Cuántos cacahuetes le dio Clara?	*Añadir hasta* Se forma un conjunto con 3 objetos. Se van añadiendo objetos a este conjunto hasta que hay un total de 8 objetos. La respuesta se halla contando el número de objetos añadidos.
Cambio decreciente (cantidad final desconocida) Había 8 focas jugando en la nieve. Tres de ellas se fueron a nadar. ¿Cuántas focas quedan jugando?	*Quitar* Se forma un conjunto con 8 objetos. Se quitan tres de ellos. La respuesta es el número de objetos que quedan.
Cambio decreciente (cantidad de cambio desconocida) Había 8 personas en el autobús. Algunas de ellas se bajaron en la parada. Ahora quedan tres personas en el autobús. ¿Cuántas se bajaron en la parada?	*Quitar hasta* Se forma un conjunto con 8 objetos. Se van quitando objetos hasta que queden tres. La respuesta es el número de objetos que hemos quitado.
Comparación (diferencia desconocida) Merche tiene 3 pegatinas. Raúl tiene 8 pegatinas. ¿Cuántas pegatinas tiene Raúl más que Merche?	*Correspondencia uno a uno* Se forman un conjunto de tres objetos y otro de ocho objetos. Emparejamos cada elemento de un conjunto con un elemento del otro hasta que se acaban los elementos en alguno de los dos conjuntos. La solución es el número de objetos que han quedado sin emparejar en el conjunto mayor.
Cambio creciente (cantidad inicial desconocida) Bárbara tenía algunos libros en su casa. Fue a la biblioteca y tomó prestados tres libros más. Ahora tiene en total 8 libros en su casa. ¿Cuántos libros tenía Bárbara al principio?	*Ensayo y error* Se forma un conjunto con varios objetos. Se añade un conjunto de tres objetos al conjunto inicial y se cuentan los elementos del conjunto resultante. Si la cuenta final es de 8, entonces la respuesta es el número de objetos del conjunto inicial. Si no es 8, se prueba con otro conjunto inicial.
Problemas de multiplicación y división	
Problema	*Descripción de la estrategia*
Multiplicación Pablo tiene 4 cajas de lápices. Hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántos lápices tiene Pablo en total?	*Agrupamiento* Se forman 4 grupos con 6 objetos en cada grupo. La solución se obtiene contando el número total de contadores que hay.
División agrupamiento (medida) Pablo tiene 24 lápices. Los lápices están guardados en cajas y hay 6 lápices en cada caja. ¿Cuántas cajas de lápices tiene Pablo?	*Medida* Se forman, con 24 objetos, grupos de 6 objetos. La solución se obtiene contando el número de grupos.
División reparto Benjamín tiene 6 cajas de lápices con el mismo número de lápices en cada caja. En total tiene 24 lápices. ¿Cuántos lápices hay en cada caja?	*Reparto* Se reparten 24 objetos en 6 grupos poniendo el mismo número de objetos en cada grupo. Se cuenta el número de objetos en uno de los grupos para hallar la solución.

Tabla 1: Tipos de problemas y estrategias de resolución mediante modelización directa

las partes desconocida y algunos problemas de comparación más avanzados, pueden ser demasiado complicados para la Educación Infantil y será necesario tener cuidado con ellos. Se espera que los niños resuelvan todos estos problemas mediante la modelización directa con materiales concretos (como objetos o dedos), o empleando estrategias de conteo, como el conteo a partir del primer número.

En lo concerniente al aprendizaje de los primeros hechos numéricos, los niños comienzan a buscar y utilizar patrones y relaciones para desarrollar estrategias de razonamiento numérico. Por ejemplo, aprenden que sumar uno a un número equivale a decir la siguiente palabra de la secuencia de conteo. Este aprendizaje resulta favorecido por el hecho de que, en torno a los 4 años, los niños comienzan a indicar directamente (sin repetir la secuencia de conteo hasta dicho número) cuál es el número siguiente de un número entre 2 y 9. También comienzan los niños a dominar las descomposiciones aditivas de los 10 primeros números. Este aprendizaje se ve reforzado por la capacidad de representar, sin contarlas, pequeñas cantidades con los dedos.

En cuanto a los problemas de estructura multiplicativa, los niños podrán resolver problemas de multiplicación, división reparto (repartiendo hasta 20 objetos entre 2 a 5 personas), división agrupamiento (hasta 20 objetos en grupos de 2 a 5 objetos). Para resolver todos estos problemas, los niños utilizarán estrategias informales de modelización directa. Los problemas de multiplicación y división agrupamiento podrán emplearse más adelante, en primer curso de Educación Primaria, para fundamentar los conceptos relativos al valor posicional (utilizando grupos de diez objetos).

Para terminar, como orientación general relativa al tamaño de los números, las cantidades que aparecen en los enunciados nunca deben ser superiores a los 20 objetos, pero deberían situarse preferiblemente en torno a los 10 objetos.

El desarrollo de la experiencia: Las sesiones de trabajo

La primera sesión de trabajo comienza al advertir Beatriz (la maestra) a los alumnos que guarda para ellos una sorpresa muy grande. La emoción es máxima: ¿Qué será? Los niños se sientan en la alfombra y Beatriz les ofrece un pequeño sobre verde. Beatriz explica a los pequeños que ha llegado un sobre a nombre de «los Caballos» (el nombre que los niños han puesto al grupo) al Colegio Las Naciones de Madrid. Entonces Irene se pone en pié para leer el nombre del remitente. Al terminar de pronunciar las sílabas de «Pi-tu-tín», la emoción se desborda: «¡Pitutín nos ha escrito a nosotros!», «¡Nos ha escrito una carta!» Todos los niños comienzan a cantar a coro la canción del duende: «Pitutín es el mejor duende del lugar. Cada día Pitutín sale a trabajar con su amigo Gusanito; luego a descansar…»

Figura 1. Los pequeños reciben la carta con gran emoción.

Después, en medio de un ambiente de exaltación (figura 1), Beatriz lee la carta. Pitutín cuenta en ella a los niños que tiene muchos problemas en la granja y que necesita su ayuda. En esta situación, los pequeños comienzan el taller de problemas resolviendo los primeros encargos de Pitutín. Beatriz lee el primer problema:

Beatriz: Antes teníamos tres cerditos vietnamitas.
Nacho: ¿Qué son cerditos vietnamitas? (Nacho es el niño que aparece en el centro de la figura 1, el único que no parece emocionado por la carta).
Beatriz: ¡Ah! Claro que tú no estuviste en la granja (el año pasado).
Nacho: No. Me puse malo. (Dos años antes tampoco había podido ir porque todavía no estaba en el colegio, de modo que Nacho no había estado nunca en la granja. Todos los demás han ido ya dos años).
Beatriz: Los cerditos vietnamitas son más pequeños que los cerditos normales y son de color negro.
Diego: ¡Yo entré, yo entré! ¡Había muchos cerdos!
Beatriz: (Sigue leyendo) En la granja escuela teníamos tres cerditos antes y han nacido cuatro más. ¿Cuántos tenemos en total?

Este pequeño diálogo ilustra la diferencia entre problemas reales e hipotéticos que señalábamos en los párrafos iniciales. Para Nacho, Pitutín es un desconocido y sus problemas son situaciones extrañas y ajenas a él. Es comprensible que al inicio no muestre un grado de implicación tan grande como el de sus compañeros. En cambio, para Diego, la situación es totalmente contextualizada, relevante y afectiva, y responde con mucha emoción: «¡Yo entré, yo entré! ¡Había muchos cerdos!»

Entre expresiones de admiración, por el sorprendente nacimiento de los cuatro cerditos, algún niño dice que son cuatro, otro ocho, y otro cincuenta. La primera reacción de los pequeños es la de intentar adivinar el resultado. Es una estimación inicial que nos da idea del conocimiento infantil acerca del tamaño de los números. Para los pequeños, adivinar el resultado se convertirá en una especie de juego durante el taller.

Beatriz: Un momento. Ahora lo vamos a pensar. Pitutín, debe ser que no sabe solucionarlo. Por eso nos ha pedido a nosotros ayuda. Ahora nos vamos a tener que poner a pensar todos para ayudar a Pitutín.
María: Y no podemos buscarle porque es tan diminuto…

El primer problema propuesto para el taller es un problema de cambio creciente en el que la incógnita es la cantidad final. Este tipo de problemas es de los más sencillos entre los problemas aritméticos verbales. En la primera sesión estamos más interesados en que los niños conozcan el funcionamiento del taller de resolución de problemas que en el propio problema en sí. Los niños van comprendiendo a lo largo del taller que pueden utilizar cualquier material y que hay que razonar las respuestas que dan. También van desarrollando su autonomía intelectual y su autoconcepto como «pequeños matemáticos» al comprobar que tienen una gran capacidad matemática para resolver problemas. Al no estar precedida la resolución de problemas por explicaciones magistrales, toda la actividad matemática desarrollada por los pequeños estará basada en sus propias estrategias informales. Poco a poco Pitutín les irá mandando otro tipo de problemas, de distinta dificultad, cuando se hayan familiarizado con todo.

Sentados cada uno en su sitio, los niños van pidiendo a Beatriz lo que piensan que van a necesitar para la resolución del problema. Algunos piden papel, otros la tabla 100, otros la recta numérica y algunos… los pies. Así comienza la resolución del primer problema. Muchos han pedido material, pero no saben que tienen que hacer. Varios de los que han pedido un papel, cuentan con los dedos y luego apuntan el resultado. Los que habían pedido la tabla 100, usan también los dedos. Algunas de las que tenían papel, preguntan qué tienen que escribir. Los que han pedido la recta numérica, después piden papel. Poco a poco, los niños seleccionarán ellos mismos los materiales que les resultan útiles, y dejarán de usar unos y repetirán con otros.

Diego pone tres rayitas pequeñas y luego cuatro. Lo borra y escribe el número siete, pero luego explicará que lo ha hecho con los dedos. Las que habían dicho que necesitaban los pies, preguntan a Beatriz que para qué y utilizan también los dedos (de las manos). Al principio, cuesta mucho entrar en la dinámica de la resolución de problemas pero, poco a poco, van diciendo que ya saben la solución y entonces, cuando todos dicen que han acabado, se lleva a cabo la puesta en común.

Beatriz: Vamos a explicar todos lo que nosotros creemos, la conclusión a la que hemos llegado, y todo el mundo va a escuchar. Decimos qué número creemos y porqué creemos que es ese número.
Julieta: El siete. Porque he contado.
Beatriz: ¿Cómo lo has contado?
Julieta: Hay tres y hay cuatro. Y entonces he contado: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. (Lo ha hecho poniendo 3 dedos en una mano y 4 dedos en la otra.)
Nacho: Ocho. Mira: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. (Pone 4 dedos en una mano y 4 dedos en la otra.) ¿Por qué pones cuatro en esta mano? Porque han nacido cuatro.
Beatriz: Vale. Y ¿Cuántos tenía?
Nacho: Tres.
Beatriz: ¿Tres o cuatro?
Nacho: Tres. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis y siete. Siete (figura 2).

Figura 2. Nacho modeliza el problema con los dedos.

Beatriz sabe que el procedimiento que ha empleado Nacho es correcto. Por eso le pregunta sobre la parte en la que se localiza el fallo (la memoria de los datos) para que Nacho rectifique su respuesta por sí mismo. Es importante distinguir entre un error matemático y un simple fallo para darle el tratamiento adecuado en el aula.

Illya: Siete. Porque he contado (Señala en la tabla 100): uno, dos, tres,… siete.
Beatriz: ¿Por qué has contado hasta siete?
Illya: Porque creía que eran esos.
Beatriz: Tienes que explicar porqué hasta 7, porque puedes contar hasta 7 o puedes contar hasta 200. ¿Por qué cuando has llegado a 7 te has parado ahí?
Illya: Porque, porque… Porque luego me he parado ahí, para pensar a ver si era ése. (…)
Beatriz: (Nicolás, da una respuesta parecida a la de Illya.) Nico. Es que no nos lo estás explicando. «Por que pensábamos que era eso», no es una respuesta, ¿entiendes? Es que así nosotros no podemos aprender de cómo lo habéis hecho. Es que os tenéis que esforzar un poco más en explicarlo.

Durante la discusión de los problemas con los niños, Beatriz trata de alcanzar dos objetivos: en primer lugar, los pequeños deben entrar en la dinámica del taller y comprender qué sentido tienen las explicaciones que deben dar. Son descripciones del procedimiento para ayudar a los demás a aprender, para poder justificar la respuesta y para poder debatir con ellos y convencerles.

Figura 3. Nicolás e Illya usando los dedos y la tabla 100.

Otro aspecto curioso, que se ve reflejado en las transcripciones, es que los niños suelen primero resolver el problema con los dedos, pero luego acuden a la tabla 100 (figura 3). En este caso, no utilizan la tabla para obtener un resultado que ya conocen. Sin embargo, da la sensación de que, para los niños, tiene más valor el uso de la tabla que el de los dedos. Quizá por los números que tiene escritos, o por lo útil que ha resultado la tabla para leer y escribir números en otros momentos del curso (como, por ejemplo, cuando los niños jugaban al bingo).

A continuación, vemos cómo Cristina está haciendo la transición entre dos estrategias distintas: «contar todos», que es la estrategia básica de modelización para este tipo de problemas (ver tabla 1) y «contar a partir del primero». Esta última estrategia consiste en comenzar diciendo el primer número (el tres) e iniciar el conteo a partir del mismo, avanzando tantos pasos en la secuencia de conteo como objetos hay que añadir (cuatro): «cuatro, cinco, seis y siete». La destreza de comenzar a contar verbalmente a partir de un número distinto de uno (como el tres), sin contar los números anteriores, es compleja en Educación Infantil. Muchos niños no logran hacerlo hasta la Educación Primaria. También observamos en la transcripción cómo Paula L. utiliza la misma estrategia de juntar todos, con la variante de representar las cantidades con líneas en el papel en lugar de emplear los dedos. Esta opción se revelará interesante cuando afrontemos un problema del mismo tipo cuyas cantidades no puedan ser representadas con los dedos.

Cristina: Porque lo he hecho así: 1, 2, 3. Luego he ido hasta cuatro con los dedos 1, 2, 3, 4 y luego he visto que es 7.
Beatriz: ¿Has puesto 3 en una mano y 4 en otra?
Cristina: No. He puesto 3 en una mano y luego he contado: 4, 5, 6 y 7.
Paula L.: He contado. Me ha salido 7. En el papel he puesto líneas. En un lado 4, y en el otro 3, y me han salido 7.

Todavía dentro de la primera sesión de trabajo, Beatriz plantea el segundo problema de Pitutín: «En la granja escuela hay cuatro patos y cinco patitas. ¿Cuántos patos y patas hay en total?» Los niños lo van pensando y lo solucionan bastante rápido aplicando las mismas estrategias que para el problema anterior. Vemos otra vez que los alumnos son capaces de corregir sus fallos (como en el caso de Diego), y que a veces tienen dificultad en recordar los datos del problema.

Diego: Lo había pensado mal, porque te había escuchado cinco y cinco. (Al leerles Beatriz el problema, Diego había respondido inmediatamente que había 10.)

Nacho: Nueve. He contado: 1, 2, 3, 4 y me he parado en el cuatro (señala del 1-4 en la tabla 100) y después he contado 1, 2, 3, 4 y 5 (señalando del 1-5 de nuevo en la tabla) ¿Y cómo sabes que son 9? Porque si estos son solo tres y estos se incluyen, pues… son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Beatriz: Es que no lo entiendo lo que dices.

Nacho: Me he equivocado. Lo he hecho con los dedos.

En el caso de Nacho, volvemos a presenciar a un alumno resolviendo el problema e intentando reinterpretar el procedimiento empleado trasladándolo a la tabla 100. La técnica para resolver el problema con la tabla 100 consiste en contar primero cuatro casillas, deteniéndose en el cuatro, y luego avanzar cinco casillas más, a partir del cuatro, para llegar al nueve. El uso de la tabla 100 es un procedimiento intermedio entre el de *juntar todos* y el de *contar a partir del primero*. Dado que Nacho conoce la respuesta correcta, pero su explicación del procedimiento en la tabla es incorrecta, lo más probable es que haya utilizado la estrategia de *juntar todos*.

Figura 4. Intento de explicación utilizando la tabla 100.

Inés: Diez. Porque he ido contando. Con los dedos he puesto cinco y cuatro. 1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 8, 9. Huy, me ha salido 9. Sin querer puse un poco de cinco (Puso dos cincos; uno en cada mano)

Beatriz: ¿Qué número crees que es?

Inés: Nueve, pero me ha salido diez. (Quiere decir que ha escrito 10 en el papel como solución. En la figura 6 aparece tachado y escrito como «01»).

Beatriz: Vale. ¿Qué puedes hacer con el 10?

Inés: Borrarlo o tacharlo.

Varios niños ponen cinco dedos en cada mano y después quitan uno de ellos. A algunos niños, como Inés, se les olvida quitar el dedo que sobra; otros sí se acuerdan de quitarlo. Parece que les resulta más cómodo poner diez dedos que nueve, dejando el dedo meñique bajado. Esta estrategia puede considerarse una estrategia de «compensación», que podríamos describir como: 5 + 4 = 5 + 5 – 1.

Figura 5. Ejemplo de escritura de los resultados y de sentencias numéricas.

En la figura 5 vemos una iniciación a la escritura de los resultados del problema: el 7 y el 9. También comprobamos las dificultades que supone para niños de infantil la escritura de números en nuestro sistema de numeración: vemos escrito 01 en lugar de 10. Por último, aparecen las primeras sentencias numéricas, aunque no respeten completamente las convenciones sintácticas de la escritura aritmética: Inés escribe «5 = + 4» en lugar de «5 + 4 =». Con todo, la escritura de sentencias numéricas y números de dos cifras son contenidos más propios de la Educación Primaria que de Infantil. La situación de tener que enviar la respuesta por escrito a Pitutín, alienta a los pequeños a escribir en una situación significativa (para comunicar la respuesta). Fieles a nuestra inspiración en el constructivismo, pensamos que el sentido de la escritura debe preponderar, en estas edades, sobre la ortografía o la sintaxis de la misma.

La sesión finaliza con una brevísima puesta en común en que los resultados encontrados por la mayoría de los niños (7 y 9 respectivamente) ganan por aclamación.

Segunda sesión

En la primera sesión, los pequeños utilizan mayoritariamente la estrategia de «juntar todos». Esta es una estrategia de modelización directa que consiste en representar las dos cantidades, para después contar el total de los objetos que forman las dos cantidades juntas. Dado que las cantidades que había que juntar eran de 3 y 4 cerdos, en un problema, y de 4 y 5 patos, en el otro, los niños pudieron resolver ambos problemas empleando sus manos, y representando cada cantidad con los dedos de una de las manos. La idea que guió la selección del problema para la segunda sesión fue la de «obligar» a modificar esta estrategia inicial, manteniendo el tipo de problema, pero empleando dos números mayores que cinco (que no pudieran ser representados con las manos). Así, el problema planteado es de cambio creciente, con incógnita en la cantidad final: «Antes, Pitutín tenía en el corral 6 gallinas y a Pitutín le han regalado 7 más ¿cuántas gallinas tiene ahora?»

Es la segunda vez que los niños van a trabajar en resolución de problemas. Han recibido la segunda carta de Pitutín en la que les daba las gracias por los problemas anteriores y les mandaba dos más. Se entabla una conversación sobre duendes. Irene les hace saber que «Pitutín, aunque sea tan diminuto, puede llevar los huevos de Pascua hasta el jardín». En lo referente a los problemas, no les dará tiempo para resolver dos en una sesión, así Beatriz los distribuye en dos sesiones. Es la primera vez que los niños y niñas van a usar los «Multilink» (cubos encajables) en este curso. Cuando se presenta el material, los pequeños dicen conocerlo; durante el curso anterior, lo usaban en momentos de juego libre para hacer construcciones (algún niño lo llama «body milk»). También se introducen las cuentas de los collares como nuevo material. Se hace hincapié en que, a pesar de tener Multilink, cuentas, papel y lápiz, dedos, recta numérica, o la tabla 100, se puede usar todo el material que se desee.

Como en la sesión anterior, los niños trabajan individualmente para después proceder a la puesta en común. Primero tendrán que decir el número de la solución y luego la explicación. Será una sesión en la que habrá que insistir mucho en el tipo de razonamiento que no es válido. Por último, se votará la solución que se le dará a Pitutín.

Julieta: Ocho. Porque he pensado que es así. He puesto seis más siete y he contado. Ocho; cinco en una mano, porque son seis (y no le caben en una mano), y uno en otra: cinco más uno (repite). He contado de nuevo en esta mano y salen ocho.

Julieta ha levantado cinco dedos en su mano izquierda y uno en la derecha para representar seis gallinas. A continuación, tiene que añadir siete gallinas más. Para ello, utiliza primero los cuatro dedos que tiene libres de la mano derecha. Una vez se le acaban los dedos, sigue contando hasta siete con la maño izquierda (en la que tenía puestos cinco dedos). Así, al final del procedimiento, a Julieta le quedan tres dedos en la mano izquierda y cinco en la derecha, para un total de ocho dedos, que es la solución que da. Se olvida de que ha tenido que quitar los cinco dedos iniciales de la mano izquierda para poder concluir el procedimiento de conteo con las manos. En este procedimiento, vemos la dificultad que origina la modificación de los datos numéricos, conservando la misma estructura del problema de la sesión anterior. La misma estrategia, de *juntar todos*, ya no puede aplicarse fácilmente con los dedos. Por otra parte, como se ve en la figura 6, todos los niños tienden a escribir los datos y el resultado cuando resuelven el problema.

Figura 6. El problema es difícil de resolver con los dedos.

Casi todos los alumnos adaptan correctamente la estrategia de juntar todos, pasando de implementarla con los dedos a realizarla con los cubos encajables. Dado que los pequeños están comenzando a leer, la maestra les lee el enunciado. Algunas veces, los niños no recuerdan los datos. Esto le ocurre a Sandra, que es capaz de rectificar para dar la respuesta correcta.

Sandra: Catorce. He puesto ocho aquí y uno, dos… seis; seis aquí. (Sandra forma dos filas: una con 6 cubos y otra con 8. La de 6, son las gallinas de antes y la de 8, las de después. Luego lo junta. Entonces se da cuenta de que eran 7 gallinas y quita un cubito y lo guarda).

Beatriz: ¿Cuántos tienes que quitar?

Sandra: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. (Mira la barra de ocho, cuenta hasta siete y comprueba que le sobra uno.) Me sobra uno. Uno, dos… seis; y uno, dos… seis, siete. (A continuación, junta las dos filas y cuenta hasta trece.)

Paula V.: Uno, dos… doce y trece. No porque mi cabeza me lo ha dicho, sino porque yo lo sabía. Había 6 en un lado y 7 en el otro. Es que yo ya lo sabía porque hago sumas en mi casa y me acuerdo de las sumas siempre que estoy aquí. He puesto 6 en un lado y 7 en el otro, porque lo sabía, porque me acordaba que la suma era así y es así.

Figura 7. Paula utiliza la modelización directa con cubos.

Paula demuestra haber aprendido lo que no vale como explicación de un procedimiento al decir: «No porque mi cabeza me lo haya dicho…» La explicación verbal no es demasiado buena, pero el procedimiento (*juntar todos*) se adivina perfectamente en sus manipulaciones físicas (figura 7).

Varios niños y niñas escriben el trece en sus hojas, gracias al trabajo que han realizado previamente. Por un lado, todos los días hay un encargado que escribe la fecha; por otro, aproximadamente cada 15 días, los niños juegan una partida al bingo. En ella tienen que aprender a leer y a escribir números empleando como instrumento la tabla 100. Antes de realizar la votación, Beatriz explica a los pequeños:

Tenéis que pensar en las explicaciones de los demás y en la vuestras; no en quien quiere tener razón. A Pitutín hay que decirle el número de verdad, no el que he dicho yo porque yo lo he hecho y creo que es verdad. No. Hay que escuchar a los demás. Si los demás han hecho una cosa mejor que la nuestra, y tienen razón, habría que decir que nos parece bien, aunque sea algo distinto a lo nuestro.

Tras la votación gana 13 por amplia mayoría. Todos menos Irene, que sigue pensando en 11. Algunas de las explicaciones de los niños, resultan de lo más curiosas. Por ejemplo, Inés argumenta: «No porque mi cabeza me lo diga (explicación considerada oficialmente como no válida), sino porque tengo unas sumas en un cuaderno que me llevé un día a la 'pisci', cuando estaba malita, y no podía y las 'hací' las sumas con mi mamá.» Como vemos, el proceso de comprender las características y las funciones de una explicación, es lento y llevará todavía mucho tiempo su desarrollo.

Tercera sesión

El problema a resolver en la tercera sesión es el siguiente: «Pitutín tiene 6 gallinas y cada gallina pone 2 huevos. ¿Cuántos huevos tiene Pitutín?» Afrontamos un problema «de multiplicación» en Educación Infantil. Esperamos que los niños utilicen una estrategia de modelización de *agrupamiento* (tabla 1). Hay una pequeña ruptura con respecto a los problemas anteriores, que eran de estructura aditiva. Las estrategias previamente utilizadas en el taller, dejan de ser válidas en esta situación. La adaptación de los procedimientos en este caso, no está en el material empleado, sino en la propia estrategia de modelización. Es imposible para los niños y las niñas afrontar este problema de forma mecánica; será necesario exhibir un pensamiento flexible para seleccionar una técnica de resolución adecuada.

Figura 8. Aspecto general del grupo durante el taller.

La actividad se desarrolla según el patrón de los días anteriores e incorporando a los materiales empleados el primer día, los de la sesión anterior. Algún niño pregunta: «¿Y la pizarra? ¿La podemos usar?» Desde ese momento, usarán la pizarra en todas las sesiones. Como siempre, antes de intentar resolver el problema, los niños intentan adivinar (estimar o hacer alguna valoración sobre) el resultado. Nacho dice: «Bea, ¿a que no pueden ser cuatro?» Algunos empiezan con un material y luego cambian a otro con total libertad.

Nicolás: Siete. He ponido (sic) en cada y luego he estado contando porque

pensaba que era así. He estado contando las piezas que había. Separé así uno, dos, tres, cuatro, cinco. Me falta uno. Puse seis y luego dos y conté. Y salen 8. Ahora me salen 8.
Beatriz: ¿Por qué 6?
Nicolás: Porque eran 6 gallinas.
Beatriz: ¿Y 2?
Nicolás: Porque cada vez ponían 2 huevos.

Como indicábamos en la introducción a esta sección, los niños muestran siempre tendencia a emplear su conocimiento anterior. En este caso, Nicolás selecciona mal el conocimiento anterior que debe utilizar. En lugar de tratar de modelizar, lo más fielmente posible, el enunciado verbal del problema, aplica mecánicamente el procedimiento de *juntar todos*, que no se ajusta bien a la situación presente. En la figura 10 vemos como Aínvar resuelve el problema por modelización directa empleando la estrategia de agrupamiento. Previamente, puede verse en la transcripción cómo había reinterpretado el problema asemejándolo a los problemas de combinación planteados en sesiones anteriores.

Aínvar: Ocho, porque he cogido piezas. Las he hecho así de una en una y después he ido contando uno, dos,... y las he juntado.
Beatriz: ¿Por qué 8?
Aínvar: Porque las gallinas eran 6 y le dan unas nuevas, ¿no?
Beatriz: No, ese es el problema del otro día. Hoy era que ponían huevos. No le regalaron gallinas.
Aínvar: Como cada una pone dos... (Aínvar forma grupitos de dos y resuelve el problema inmediatamente).
Carmen: Doce. He hecho lo de siempre: he utilizado papel para escribir el resultado, Multilink para ver cuántos hay, y la recta numérica para saber qué número era (cómo se escribe el resultado). Uno, dos,..., diez, once, doce. Doce.

Figura 9. Estrategia de agrupamiento.

El trabajo de Carmen es extraordinariamente sistemático. Además, ella tiene una gran capacidad para sacar el máximo provecho de cada material y para describir su procedimiento. Beatriz advierte que algunos niños están distraídos y no desea que se desperdicie la ocasión de que Carmen haga de maestra para sus compañeros. Su procedimiento es igual al empleado por los demás niños y niñas que han conseguido resolver el problema, pero incorpora detalles que lo hacen óptimo para constituirse en procedimiento «oficial» del grupo.

Figura 10. Uso del agrupamiento con cubos y la recta numérica para escribir el resultado.

Beatriz: ¿Alguien más tiene 12? ¿Julieta y Nacho? Pues escuchad todos los que tienen 12 y los que no. A ver si Carmen lo ha pensado igual que vosotros para que salga 12.

Carmen: He puesto los huevos; 6 huevos en cada gallina, y me ha salido 12.

Beatriz: ¿Seis huevos en cada gallina?

Carmen: No. Dos huevos en cada gallina. En esta gallina dos, en esta dos, en esta dos, en esta dos, en esta dos y en esta dos.

Diego: Yo no lo he entendido. (Algunos alumnos representan por separado las gallinas y los huevos pero Carmen ha representado solamente los huevos.)

Carmen: He puesto dos huevos en cada gallina. (Ha hecho grupitos de 2.) Estos son los huevos de cada gallina (señalando uno de los grupos).

Diego: ¡Ah, ya! ¡Ya!

Cristina: Bea. Creo que me he equivocado.

Beatriz: ¿Te has equivocado? No pasa nada. Para eso venimos al colegio: a aprender. Porque si lo supiéramos todo, no vendríamos. ¿Por qué crees que te has equivocado?

Cristina: Porque me parece bien lo que ha hecho Carmen.

Beatriz: ¿A que como ella lo ha explicado, tú lo has entendido?

Con esta última frase, Beatriz enfatiza la importancia de que se intente explicar lo mejor posible cómo se ha realizado el problema. A su vez, observamos la efectividad de la intervención indirecta de la maestra al llamar la atención de la clase sobre la explicación de Carmen. En una etapa en la que imperan el egocentrismo y el deseo de imponer el criterio propio, que los alumnos entren en el razonamiento matemático renunciando al propio a favor del ajeno, constituye todo un logro.

Diego: Uno, dos, tres,…, veintitrés, veinticuatro. Veinticuatro. Porque he cogido una (fila) larga. He hecho el mismo trabajo que antes y lo que he hecho es poner dos en cada gallina y entonces lo que me salió era esto.

Beatriz: ¿Por qué una tan larga? ¿Hasta qué número?

Diego: Hasta lo que aprendimos (en la sesión de problemas anterior). Hasta lo de las gallinas. Así que lo coloqué ahí. Y era lo mismo.

Beatriz: Pero, ¿cuántas gallinas tenemos ahora?

Diego: Seis.

Beatriz: ¿Con cuántas lo has hecho? ¿Con la cantidad de gallinas del otro día?

Diego: Uno, dos… cinco, seis. Seis. Y éstas también sobran (separando las demás).

Beatriz: ¿Qué número te sale?

Diego: Uno, dos… once, doce. Doce.

En la sesión anterior, el grupo había abordado el enunciado: «Pitutín tenía en el corral 6 gallinas y a Pitutín le han regalado 7 más ¿cuántas gallinas tiene ahora?» Diego, que conserva en su memoria el problema y su resultado, ha reinterpretado el enunciado ajustando el número de gallinas al «número real

Figura 11. Distintos momentos del procedimiento de Diego.

de gallinas» (trece) que actualmente hay en la granja (según el resultado del problema del día anterior). El procedimiento empleado es correcto y Diego, sin ninguna dificultad, corrige los datos para dar inmediatamente la respuesta correcta de 12.

Irene: Cinco. Porque yo estaba contando con mis manos: uno, dos, tres, cuatro, cinco... Porque... Yo... No... No me acuerdo.
Beatriz: ¿Sigues pensando que es 5?
Irene: Sí... (Dudosa).
Beatriz: A veces nos puede pasar lo que a Cristina (que nos damos cuenta de nuestro error cuando nos convence la solución que ha dado otro compañero).
Irene: Creo que es 12, como Diego y Carmen.

Los alumnos que no han alcanzado una solución correcta, tampoco son capaces de justificar y defender su propuesta de solución. En esta situación, Beatriz les alienta a comparar su procedimiento con otros. Así, muchos alumnos van reconociendo que otros procedimientos realizados por compañeros parecen tener más sentido que los suyos propios. Poco a poco, como vemos en la respuesta final de Irene, la solución de Diego y Carmen va adquiriendo un estatus distinto, al pasar de ser una propuesta individual al procedimiento mayoritariamente apoyado por el grupo.

Inés: Cuatro.
Beatriz: Después de todo, (lo discutido por los compañeros) ¿sigues pensando que está bien?
Inés: Sí... Ya no me acuerdo (de cómo lo he hecho).
Beatriz: No nos vale. Esfuérzate y cuéntanos cómo lo has hecho.
Diego: Sí, (como) una campeona. No te rindas. Yo no me rindo.

Como vemos en la intervención de Diego, los niños comienzan a entrar en la dinámica del trabajo al comprender que el esfuerzo por explicar el procedimiento es parte de la tarea, tan importante o más que la solución ofrecida. El aliento de los niños, a los compañeros que tienen que esforzarse en dar una explicación, es continuo. En estas circunstancias, el ámbito de lo afectivo juega un papel primordial:

Julieta: Doce, porque lo he ido separando. He ido contando con las manos uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis... Y después... No me acuerdo tanto.
Beatriz: Vale pero queremos escucharte (tu explicación).
Alguno: ¡Sí, venga!
Diego: ¡No te rindas, Juli!

Como hemos visto en la narración de la sesión de resolución de problemas, hubo interferencias entre esta sesión y la anterior, bien por la temática (ambos problemas eran «de gallinas») o por el tipo de problema (los niños abordaban un problema «de hacer grupos iguales» después de haber resuelto tres de «juntar dos cantidades»). Varios niños y niñas reinterpretaron el enunciado para asemejarlo al que habían resuelto en las dos sesiones anteriores.

Cuarta sesión

En esta sesión, se plantea el siguiente problema: «Pitutín tenía 14 pavos en la granja y se le han perdido 5. ¿Cuántos tiene al final?»

Durante el trabajo sobre el problema, alguno escribe 14 –5 en la pizarra pero luego no hace referencia a ello en su explicación. Como siempre, alguno utiliza el papel para no olvidarse de la solución. Aparece, ocasionalmente, el trabajo por parejas. Discuten las soluciones y ponen en común lo que cada una ha pensado. Algunos niños utilizan varios materiales. Por ejemplo, Sandra utiliza los cubos encajables para determinar la solución, la recta numérica para saber cómo se escribe, y el papel para apuntar la solución y que no se le olvide. En la puesta en común, como siempre, los niños tienen que decir primero el número de patos que creen que le quedan a Pitutín, y después explican el porqué.

Inés da el diez como respuesta, pero no sabe explicar cómo lo ha hecho. No obstante, demuestra comprender qué es una explicación válida al hacer referencia a parte del repertorio de explicaciones que no lo son: «No porque me lo haya dicho mi cabeza. No porque me lo haya dicho un compañero». Finalmente, sólo puede añadir: «No me acuerdo.»

Diego: Nueve (Se ha equivocado al contar, pero él mismo se va a corregir). He cogido los Multilink. Como los tenía todos sueltos, he hecho una torre de catorce: Uno, dos,…, trece, catorce. Los iba uniendo cada vez. Así digo: uno, dos,…, once, doce. Me faltan dos. Uno, dos,…, trece, catorce. Y quito cinco: uno, dos, tres, cuatro, cinco. Y quito esto, y queda: uno, dos,…, nueve. Nueve. Entonces digo: «Esta es la solución.»

La solución de Diego es la mayoritaria dentro del grupo. No obstante, algunos niños emplean la estrategia de «juntar todos», formando un grupo de 14 cubos y otro de 5, uniendo todos los contadores, y contando el total de los mismos. Beatriz ayuda a los niños a comprender la situación descrita en el problema para que vean que la respuesta no tiene sentido.

Beatriz: A ver. Pitutín tiene 14 patos, se le pierden 5, ¿y tiene 19?
Alguno: «Jopé.» (Dándose cuenta de la contradicción).
Beatriz: ¿Tiene más patos.
Cristina: Sí.
Beatriz: ¿Se le pierden los patos y ahora tiene más? Cuando a ti se te pierde algo, ¿tienes más o menos?
Cristina: Menos.
Beatriz: Entonces, Pitutín además de duende es mago porque cuando se le pierde algo, en vez de tener menos, tiene más.
Cristina: Me he equivocado.

Por último, la solución propuesta por Nacho es, con diferencia, la más sofisticada de todas. Al final de la sesión, en la votación, será la estrategia elegida por abrumadora mayoría para enviar a Pitutín. Todo ello a pesar de que muchos niños ¡no la comprendan!

Nacho: Nueve. (Lo he hecho) en la pizarra (figura 12). Le he quitado 5 y he contado, y son 9. (Lo repite para que los demás lo entiendan.) He puesto hasta 14 y le he quitado 5 números y quedan 9.

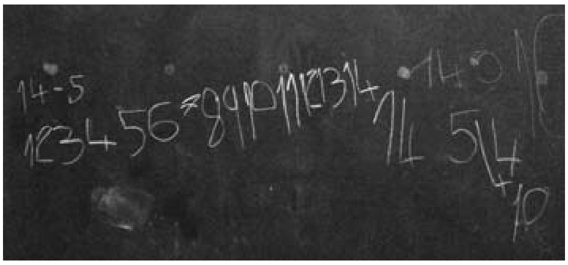

Figura 12. Utilizando la recta numérica escrita.

El procedimiento, al realizarse con numerales escritos, en lugar de emplear cubos encajables, resulta bastante más abstracto para la mayoría de los compañeros. Varios niños dicen: «Yo no lo he entendido»; Aínvar añade: «¡Lo explica tan deprisa!» La estrategia de «poner 14 cubos, quitar 5, y contar los que quedan» es la más fácil de comprender, la más cercana. Llama la atención, por otro lado, la necesidad de reproducir la recta numérica, en lugar de utilizar la que ya está expuesta en el aula.

Quinta sesión

En la quinta sesión, se plantea el siguiente problema: Pitutín tiene 15 bellotas mágicas y quiere repartirlas entre 5 cerdos. ¿Cuántas bellotas le tocan a cada cerdo para que todos tengan las mismas?

Se trata de un problema de división reparto. La sesión transcurre igual que las sesiones anteriores y se emplean los mismos materiales. Los niños piden varias veces que se repita el enunciado. Surgen comentarios como: «Chupao» (Carmen) o «Vale, vale» (Diego) que dan la sensación de que los pequeños van comprendiendo las normas del funcionamiento de las sesiones de problemas. Necesitan saber bien los datos y qué tienen que hacer.

No todos los niños resuelven el problema. Algunos dan respuestas absurdas (como 30 o 15) sin advertir que las mismas no tienen sentido en el contexto del problema. Otros indican que no se les ha ocurrido nada. Algunos, como Illya, dan la solución correcta pero no son capaces de explicar cómo han obtenido la misma. Finalmente, algunos dan la respuesta correcta acompañada de una explicación satisfactoria.

Nicolás: Tres. Porque si no, a los otros cerdos no les tocaría. Todos estos son la comida de los cerdos (separando para distinguir los cubos correspondientes a cada cerdo). En total, hay uno, dos, tres (…) catorce y quince. Quince bellotas.

Beatriz: (Pidiendo aclaraciones para asegurarse de que entiende la estrategia) Hay 15 bellotas y… ¿Las has puesto en grupitos de 3 para cada cerdo? ¿Esto es lo que le toca a un cerdo, esto a otro, esto a otro,... uno, dos, tres, cuatro y cinco cerdos?

Nicolás: Sí.

Beatriz: (A los demás) Él dice que 5 cerdos y 3 bellotas a cada cerdo. Salen en total 15 bellotas y no sobran ni faltan.

Figura 13. Estrategia basada en el ensayo y error.

Cristina: Tres. Lo he escrito en la pizarra y lo he hecho en la recta numérica. He buscado primero el 15 y he contado tres (agrupa en la recta numérica 1, 2 y 3 con la mano), tres (agrupa 4, 5 y 6), tres (agrupa 7, 8 y 9), tres (agrupa 10, 11 y 12) y tres (agrupa 13, 14 y 15) y así no me sobra ninguno.

Figura 14. Ensayo y error con la recta numérica.

Carmen: Tres. También en la recta numérica. Como siempre como tenía que pensar cómo se escribe, eso lo he hecho con Julieta. Luego lo he pasado aquí y luego he ido otra vez aquí y he ido pensando (coge Multilink). Y he ido contando. Primero cuatro en cada, pero bueno, me sobraba uno porque me salía 16 y nada más 4. Luego he intentado poner 3, no 2, 2, 2,... y me sobraban. He puesto 3, 3 y me ha salido. (Carmen tiene separados los cerdos y las bellotas con Multilink, arriba los cerdos y debajo las bellotas que le toca a cada uno. Contando los Multilink de arriba le salen 5 cerdos y contando los de abajo salen 3 bellotas para cada cerdo y en total 15 bellotas) luego lo he apuntado aquí (en papel) para que no se me olvide.

Figura 15. Carmen representa las bellotas, y también los cerdos.

Diego: He hecho 5 cerdos aquí. Aquí tengo 15, pues 3 para cada uno.

Beatriz: Pero, ¿cómo lo has hecho? ¿Uno, uno, uno o a ver si 3, 4, 2,...?

Diego: No, no. Lo he hecho... Los Multilink son cerdos. Mira. Primero tenía menos. Me faltaban 3. No. Tres. Sí. Me faltaban 3 y entonces vi... Puse 4 para cada cerdo y algunos se quedaban sin comida. Claro, algunos con menos o con ninguna y entonces me ocurrió esto:

Diego resuelve el problema por ensayo y error. Al principio, reparte sólo 12 bellotas entre los 5 cerdos dándoles, respectivamente: tres, tres, tres, dos y una bellotas (figura 16, a la izquierda). La fila de cinco cubos que aparecen arriba, ligeramente separados, representa los cerdos. Después, modifica el reparto dando a los cerdos, respectivamente: cuatro, tres, tres, dos y ninguna bellotas. En ese momento se da cuenta de que está repartiendo sólo 12 bellotas en lugar de 15 y añade las tres que faltan. A continuación, inicia otro tipo de reparto más sistemático: da primero una bellota a cada cerdo y ve que le sobran bellotas. Sigue repartiendo una más, y le siguen sobrando. Finalmente, da tres a cada cerdo y comprueba que no le sobra ninguna (figura 16, a la derecha). Diego ha resuelto el problema por modelización directa: primero por ensayo y error y después empleando una estrategia de reparto más sistemática.

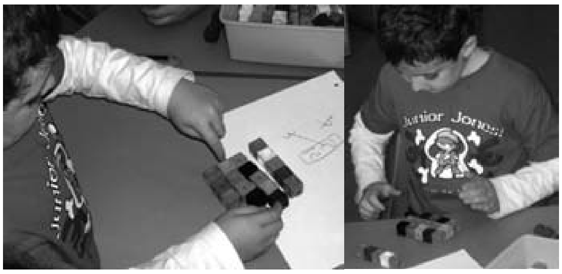

Figura 16. Otro ejemplo de ensayo y error en el reparto.

Nacho: Tres para 5 cerdos. A cada cerdo 3 porque así no sobran, porque si poniéramos (sic) 5 en cada cerdo, nos faltarían. Antes yo creía que tenían que tener cada cerdo 2 ó 5 y he pensado en 3.

Beatriz: Pero no vale. Mira Diego, Carmen, Nico y Cris han llegado a la misma solución y lo han hecho de maneras distintas y además lo han sabido explicar.

Nacho: Es que no lo sé. Es que me daba un poco de «stress».

María: ¿Qué es eso?
Nacho: Que me ponía un poco nervioso.

Los niños votan que se deben dar tres bellotas para cada cerdo. Dado que deben elegir una explicación para darle a Pitutín, votan también para elegir la que más les satisface. Las explicaciones que más les gustan son la de Cristina con 4 votos, la de Carmen con 3, la de Diego con 2 y la de Nico, con 1 voto.

Sexta sesión

En la sexta sesión de trabajo se plantea el siguiente problema: Pitutín tenía 8 patos en la granja y un día llegaron unos cuantos más. Desde entonces hay 14 patos en la granja. ¿Cuántos patos vinieron más? Se trata de un problema de cambio creciente que tiene por incógnita la cantidad de cambio. Su dificultad estriba en que no se puede modelizar fácilmente, pues tras representar la cantidad inicial, no se puede añadir a esta la cantidad de cambio (como ocurre cuando la incógnita es la cantidad final) pues ésta es precisamente la incógnita.

Cristina: Seis. Y he usado la recta numérica. Estaba en catorce. ¿Eran catorce, no, Bea?
Beatriz: Pitutín tiene ocho y luego catorce.
Cristina: Estaba en catorce (Lo señala con el dedo). No, perdona. Estaba en ocho (señala el ocho y cuenta desde allí hasta catorce) y he hecho: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. Y así tiene catorce.
Beatriz: (A alguno que no estaba escuchando) ¿Os habéis enterado lo que ha hecho Cristina?
Éstos: No.
Beatriz: A ver Cristina, repítelo por favor. Estamos muy atentos. (Cristina lo repite.) ¿Lo entendéis? (Algunos niños dicen que sí y otros que no.)
Carmen: No le he entendido nada. (Cristina lo repite, otra vez más.)

Figura 17. Uso de la recta numérica para resolver el problema.

María utiliza una técnica especial para distinguir los dos tipos de patos: los que ya estaban, de los que vinieron volando (figura 18). Para los que vinieron volando, utiliza sólo un cubito de Multilink para cada pato; para los que ya estaban, utiliza dos cubitos unidos. Así, sólo tiene que añadir desde ocho hasta catorce, distinguiendo los que había antes de los que han llegado para contar los que han venido (seis). Para distinguir los que había de los que han venido en este tipo de problemas, algunos niños utilizan colores distintos para unos y otros o, simplemente, mantienen separados los dos grupos de objetos (Carpenter y otros, 1999).

Beatriz: ¿Cuántos tenía Pitutín?
María: Ocho. He cogido más y los he puesto encima de uno (de cada uno, se refiere. Pone un pato recién llegado sobre otro que ya estaba). De éste, de éste, de éste, de éste, de éste y de éste.
Beatriz: ¿Y por qué te has parado en seis?
María: Porque así me salían catorce (cuenta el conjunto total de patos que tiene y le da catorce).

Figura 18. Los pájaros que estaban y los que vinieron volando.

Nacho ha estado intentando utilizar el bingo y no ha obtenido ninguna respuesta satisfactoria. Durante toda la sesión, ha estado muy pendiente de las explicaciones de sus compañeros y se ha ido enterando de todo lo que iban haciendo, interviniendo e incluso corrigiéndoles en algunos casos. Durante todas las sesiones de resolución de problemas, fue el único en utilizar el bingo. Dado que había una libertad plena para utilizar unos materiales u otros, se le permitió intentarlo con este «material» sin comentarle nada. Da la impresión de que comprende el problema pero que sólo le motiva probar a resolverlo con un material novedoso. La mayoría de los niños han repetido con materiales que les han resultado útiles a lo largo de las sesiones. En cambio, Nacho ha probado distintos materiales: los dedos, la tabla 100, los cubos encajables, la pizarra, la recta numérica, el bingo... Daba la sensación de que los problemas propuestos se le quedan pequeños y que Nacho procuraba para sí nuevos retos intelectuales como estrategia de auto-motivación.

Discusión y conclusiones

Comenzamos este apartado con algunos comentarios provocados por las actuaciones de los pequeños. Aunque la teoría nos permite prever de forma bastante ajustada cuáles van a ser sus comportamientos, siempre queda una puerta abierta a la sorpresa. Para empezar, es importante reseñar la significación de introducción en el proceso de resolución de los problemas de algunas modificaciones de gran calado con respecto a los enfoques tradicionales. La necesidad de dar una respuesta y una explicación del procedimiento, primero oralmente y después por escrito, o el uso de la votación para seleccionar el procedimiento «oficial» dentro del grupo, han dado lugar a cambios sustanciales y profundos en la actividad infantil. Esta variante se introduce para intentar sacar a los niños del egocentrismo que todavía caracteriza algunas de sus actuaciones. Si los niños no hubieran estado «obligados» a dar una respuesta común, no habrían escuchado tan atentamente la explicaciones de los demás. Seguramente, se hubieran limitado a intentar resolver el problema y a dar una respuesta, fuese esta correcta o no. Esto se nota en las primeras sesiones, en que los niños intentan dar más respuestas de compromiso, como para «salir del paso». A medida que van comprendiendo la dinámica del taller, se esfuerzan más en emitir respuestas correctas; cuando no las consiguen, están más atentos a las explicaciones de los demás, para poder votar correctamente. La atención a las explicaciones de los compañeros requiere gran esfuerzo para los niños de esta edad. El contenido de la discusión es lo suficientemente abstracto para obligarles a mantener una atención constante, mucho mayor que cuando conversan en la asamblea sobre dónde han ido de vacaciones. Generalmente, en estas asambleas, cada uno cuenta «su historia» y puede, si quiere, dejar de prestar atención a lo que cuentan los demás. Aunque a los cinco años los niños mantienen más la atención, y son capaces de enfrascarse en largas discusiones, el contenido tan complejo de las «conversaciones matemáticas» que mantenían en esta ocasión les obligaba a un sobreesfuerzo considerable. Los niños terminaban la discusión contentos, pero cansados. Era un gran esfuerzo que suponemos que Pitutín merecía.

Figura 19. Sonia utiliza el dibujo para modelizar el problema.

Algo que nos ha llamado la atención, en el desarrollo de la experiencia, es que ningún niño ha utilizado el dibujo para modelizar los problemas. Los pequeños de estas edades suelen dedicar mucho tiempo al dibujo y éste constituye para ellos un tipo de representación muy cercana. Una posible explicación es que no consideraran el dibujo como una estrategia admisible. Aunque durante todo el proceso se insistió en que podían utilizar el material que quisieran, hubiera sido conveniente animarles explícitamente a resolver algún problema «dibujándolo». Para ilustrar este comentario, proponemos el ejemplo de Sonia, una alumna de cinco años, resolviendo (en una experiencia anterior) un problema de división-reparto: «Tengo 15 caramelos y los quiero repartir entre mis 3 hermanos. ¿Cuántos puedo dar a cada uno?»

Vemos como Sonia utiliza la estrategia de modelización directa de «reparto». Para ello, dibuja los 15 caramelos y a «sus tres hermanos». Después, va tachando los caramelos a medida que los cambia de posición para adjudicarlos a alguno de los hermanos. Finalmente, cuenta el número de caramelos de cada hermano para dar la solución (figura 19). Ciertamente, el uso del dibujo es un poderoso heurístico[2] para la resolución de problemas. Es importante que los pequeños se acostumbren desde pequeños a este uso del dibujo y que, poco a poco, los dibujos empleados para resolver problemas vayan progresivamente esquematizándose. Así, los niños irán aprendiendo que no es necesario dibujar «todos los detalles», sino que basta representar dos o tres características relevantes de la situación a fin de resolver el problema.

También resulta sorprendente con qué flexibilidad son capaces los niños de reinterpretar un problema de cambio, con la cantidad de cambio desconocida, como problema de combinación con una parte desconocida, y cómo son capaces de resolver estos problemas aplicando la estrategia de «quitar». De acuerdo con nuestras referencias teóricas, esperamos que esta destreza surja más adelante. Sin embargo, algunos alumnos la desarrollan antes y, todavía en la Educación Infantil, ofrecen muestras llamativas de su capacidad de abstracción.

Otro de los puntos que merece la pena resaltar es el uso de la recta numérica

---

2 Los heurísticos son estrategias generales de resolución de problemas, independientes del contenido del problema. En general, hacer un dibujo de un problema es algo que ayuda en la búsqueda de soluciones.

(que tienen los alumnos expuesta en la clase o que elaboran escribiendo en papel o en la pizarra) para resolver problemas. Se sabe que el paso de las estrategias de modelización directa a las de conteo supone un gran dominio del conteo, obligando a veces a los niños a un doble conteo (Carpenter y otros, 1999), muy difícil a los cinco años. Por ejemplo, en los problemas de cambio creciente con la cantidad de cambio desconocida (por ejemplo: «Tengo 3 caramelos, me dan algunos más y ahora tengo 8. ¿Cuántos me han dado?»), algunos niños cuentan desde el 3 hasta el 8 a medida que van levantando dedos. Después, cuentan los dedos que han levantado y dicen: «cinco». La ejecución de esta estrategia supone que los niños sepan contar a partir de 3, sin empezar el conteo desde el uno, y que sean capaces de un doble conteo. En efecto, al efectuar el procedimiento, parece como si se dijera: «Tengo 3. Añado 1 y tengo 4; añado 2 y tengo 5; añado 3 y tengo 6; añado 4 y tengo 7; añado 5 y tengo 8». Un conteo se hace verbalmente: 3. 4, 5, 6, 7 y 8; otro conteo se hace con los dedos (en silencio): añado 1, 2, 3, 4 y 5. El uso de la recta numérica evita este doble conteo. Podemos situarnos en el número tres y, simplemente, contar los números (cinco) que hay hasta el ocho. La recta numérica puede así considerarse como un auxiliar de gran valor en estas edades, hasta que los niños son capaces de construir la recta numérica mental y alcanzar el dominio de las estrategias de conteo más sofisticadas.

Finalmente, en cuanto a la organización y el funcionamiento del taller, dos elementos han sido los que han supuesto un añadido de valor fundamental en la experiencia: la necesidad de elaborar una respuesta por escrito, y el hecho de que la respuesta debiera ser grupal, no individual. Más allá de los efectos positivos de que los niños se iniciasen en la escritura de números y sentencias numéricas, o de que presentasen sus soluciones a los compañeros, debemos señalar una idea fundamental: Todo el taller estuvo orientado a promover la construcción social del conocimiento, dentro de la pequeña sociedad del grupo. Los aspectos individuales y grupales del aprendizaje se han articulado en una propuesta en la que, una comunidad de pequeños matemáticos, ha desarrollado una genuina actividad matemática. Pensamos que esta experiencia, que se ofrece para la reflexión de las personas responsables de la Educación de niños y niñas de Educación Infantil, posee el valor de integrar adecuadamente las ideas de los métodos de proyectos con la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas pueda ser sistemático, a la vez que significativo, y responda a las necesidades matemáticas de la vida diaria de los pequeños.

Dirección de contacto:

Carlos de Castro Hernández y Beatriz Escorial González
Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle
C/ La Salle, 10
28023 MADRID
E-mail: c.castro@eulasalle.com y bescorial@hotmail.com

Referencias

BAROODY, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 1-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., FRANKE, M. L., LEVI, L., & EMPSON, S. B. (1999). *Children´s mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

CLEMENTS, D. H. (2004). Major themes and recommendations. En D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

COPLEY, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. Washington-Reston: NAEYC-NCTM.

FOSNOT, C. T., & DOLK, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth: Heinemann.

WARFIELD, J., & YTTRI, M. J. (1999). Cognitively guided instruction in one kindergarten classroom. En J. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 103-111). Reston-Washington: NCTM-NAEYC.