

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT09

Mecánica cuántica en espacio de fases sobre geometrías de agujero negro

Quantum mechanics in phase space on black hole geometries

Supervisor/es: José Alberto Ruiz Cembranos

David García García

Grado en Física

Curso académico 2023-24

Convocatoria junio 2024

Calificación: 9,5

Resumen:

En este trabajo se presenta el formalismo de la mecánica cuántica en el espacio de fases. En especial, se ha estudiado el formalismo de Wigner, ya que en él existe una teoría de perturbaciones equivalente a la de la mecánica cuántica en el espacio de Hilbert. Posteriormente, se introduce la métrica de Schwarzschild con la que puede describirse el espacio-tiempo cercano a los agujeros negros. A partir de esta métrica es posible derivar un potencial efectivo que, junto a la teoría de perturbaciones antes mencionada, permite obtener resultados para la primera corrección de la energía de un electrón y un agujero negro ligados.

Abstract:

This work will present the formalism of quantum mechanics in phase space. In particular, the Wigner formalism will be studied, as it provides a perturbation theory equivalent to that of Hilbert space quantum mechanics. The Schwarzschild metric, which describes the space-time near black holes, will then be introduced. From this metric, it is possible to derive an effective potential that, together with the perturbation theory, will allow us to obtain results for the first correction to the energy of a bounded state of an electron and a black hole.

Índice

1. Introducción	2
2. Formalismo simpléctico	3
3. Formalismo de Wigner-Weyl	4
3.1. Ecuación de autovalores	5
3.2. Teoría de perturbaciones en formalismo de espacio de fases	5
4. Agujero Negros y la métrica de Schwarzschild	6
4.1. Potencial efectivo	7
5. Función de onda para el potencial de Schwarzschild	8
5.1. Masa máxima del problema	8
5.2. Cálculo de la función de onda de un electrón para el potencial newtoniano	9
6. Cálculo de la función de Wigner del potencial newtoniano	10
6.1. Función de Wigner en la base de autoestados de la energía	10
6.2. Función de Wigner, en la base de autoestados de L_3 y H	11
7. Cálculo de Magnitudes	14
7.1. Estado fundamental	14
7.2. Primer excitado	15
8. Conclusiones	16
Apéndice A. Transformación de Kustaanheimo-Stiefel	18
Apéndice B. Cálculo en el formalismo de Schrödinger	19

Objetivos y metodología

Este trabajo tiene dos objetivos principales, por un lado, familiarizarse y comprender el formalismo simpléctico de la mecánica cuántica, y por otro, aplicar estos conceptos a un problema concreto. Para ello, se ha buscado la manera de entremezclar el formalismo con la métrica de Schwarzschild. En general, este procedimiento no será fácil, por lo que se usará la teoría de perturbaciones para encontrar las correcciones a la energía de un sistema ligado formado por un electrón y un agujero negro descrito por esta métrica. Para este trabajo de fin de grado, se ha seguido una metodología de trabajo en grupo. Mediante reuniones semanales, desde principios de curso con el supervisor y el resto de sus alumnos se han sentado las bases del formalismo simpléctico para, posteriormente resolver un problema haciendo uso de las herramientas adquiridas.

1. Introducción

El formalismo simpléctico se remonta a principios del siglo XX. Este formalismo trata en pie de igualdad la posición y el momento, y es completamente equivalente al del espacio de Hilbert. El desarrollo del mismo fue realizado principalmente por cuatro autores: Weyl, Wigner, Moyal y Groenewold. En el año 1927, Weyl [1] publicó un artículo en el que introdujo la transformada que lleva su nombre, que describe como pueden relacionarse funciones en el espacio de fases con operadores en el espacio de Hilbert. Unos años más tarde, en 1932 Wigner utilizó estos resultados para lograr formular la mecánica cuántica en el espacio de fases [2]. Finalmente, Moyal [3] y Groenewold [4], de manera independiente, extendieron el formalismo de Wigner, introduciendo la manera en la que se multiplican funciones según las reglas de la mecánica cuántica. Posteriormente, mediante el trabajo de otros autores se comprobó que esta no era la única manera de definir la mecánica cuántica en el espacio de fases, y que hay otros formalismos equivalentes que difieren en la regla de asociación entre variables y operadores.

El objeto fundamental de estos formalismos son las funciones de pseudoprobabilidad, que son equivalentes a las funciones de probabilidad de la mecánica clásica, pero relajando algunos de los axiomas de Kolmogorov para así, respetar el principio de incertidumbre. A pesar de que se introducirán varias de estas funciones (Sec. 2), la mayor parte del trabajo estará centrada en la teoría desarrollada por Weyl y Wigner (Sec. 3). Durante la realización de este trabajo, se ha podido estudiar también la formulación de Husimi [5] y su relación con el espacio de Segal-Bargmann, no obstante, solo se hará una breve mención a ella en la sección 2. Esto se debe a que los principales cálculos del trabajo se realizan en el formalismo de Wigner y, por tanto, se ha optado por explicar este en profundidad. La principal ventaja que tiene el formalismo de Wigner sobre el de Husimi es que la teoría de perturbaciones está desarrollada y solo con esta será posible obtener la energía a primer orden de los primeros estados de un electrón y un agujero negro ligados.

Para realizar este cálculo se necesitará, además, describir el espacio-tiempo del exterior de los agujeros negros, para lo que se usará la métrica de Schwarzschild. Con esta métrica es posible obtener una ecuación radial en analogía al caso newtoniano. Esto permitirá deducir un potencial efectivo que servirá para definir el hamiltoniano del electrón y así, introducirlo en la ecuación de Schrödinger (Sec. 5.2). Por último, es importante destacar que el término relativista de este potencial será tratado como una perturbación. Por este motivo, se ha incluido una estimación del orden de magnitud de la masa del agujero negro, a partir de la cual la corrección relativista puede considerarse como una perturbación al potencial newtoniano.

Una vez obtenido este límite, se resolverá la ecuación de Schrödinger para el potencial newto-

niano conectando este con el potencial armónico (Sec. 5.2). Posteriormente, usando la transformada de Weyl se ha logrado obtener las funciones de Wigner para estas funciones de onda. Además, se ha resuelto nuevamente el mismo problema sin necesidad de emplear la ecuación de Schrödinger, utilizando únicamente herramientas del formalismo simpléctico. Una vez obtenidas las funciones de Wigner se han calculado algunas magnitudes y posteriormente, se han comparado con los resultados de la mecánica cuántica usual.

2. Formalismo simpléctico

El trabajo comienza, por tanto, definiendo las funciones de pseudoprobabilidad. Como ya se ha comentado en la introducción, existe una gran variedad de estas. Esto se debe a que al ser la mecánica cuántica una teoría no conmutativa es necesario definir una relación entre operadores y variables, y esta puede definirse de distintas formas. No obstante, todas las funciones de pseudoprobabilidad permiten calcular los valores esperados de los observables cuánticos de la siguiente manera:

$$Tr \left[\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p}, t) \hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) \right] = \iint dqdp A(q, p, t) F(q, p, t), \quad (2.1)$$

donde A es una función escalar que se obtiene sustituyendo en la expresión de \hat{A} los operadores \hat{p} y \hat{q} por variables escalares p y q con una regla de asociación determinada. Sin embargo, no existe una única manera de definir la función F debido a la no conmutatividad de los operadores. Para comprender de manera más intuitiva este hecho, se puede recurrir a un ejemplo. Si, por un lado, se calcula el valor esperado del operador $e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}}$:

$$Tr \left[\hat{\rho} e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} \right] = \iint dqdp e^{i\xi q+i\eta p} F(q, p, t), \quad (2.2)$$

y por otro se hace lo mismo para el operador $e^{i\xi\hat{q}} e^{i\eta\hat{p}}$:

$$Tr \left[\hat{\rho} e^{i\xi\hat{q}} e^{i\eta\hat{p}} \right] = \iint dqdp e^{i\xi q+i\eta p} F(q, p, t), \quad (2.3)$$

se puede comprobar que la función F de la ecuación (2.2) es necesariamente diferente a la función F de la ecuación (2.3). En consecuencia, se observa claramente que según la regla de asociación entre operadores y variables que se escoja la función de pseudoprobabilidad será distinta. No obstante, es posible, según Cohen [6], definir una clase general de funciones de pseudoprobabilidad de la siguiente forma:

$$Tr \left[\hat{\rho} f(\xi, \eta) e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} \right] = \iint dqdp e^{i\xi q+i\eta p} F(q, p, t), \quad (2.4)$$

que es equivalente a:

$$F^f = \frac{1}{4\pi^2} \iint d\xi d\eta Tr \{ \hat{\rho} f(\xi, \eta) e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} \} e^{-i\xi q - i\eta p}, \quad (2.5)$$

donde cada elección de $f(\xi, \eta)$ corresponde a una regla de asociación diferente y por tanto a una función distinta. Con esta expresión, además, es posible obtener la función de pseudoprobabilidad de un estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$:

$$F^f(q, p, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\xi d\eta dq' \psi^*(q' + \frac{\hbar}{2}\eta, t) \psi(q' - \frac{\hbar}{2}\eta, t) e^{-i\eta p} f(\xi, \eta) e^{i\eta(q'-q)} e^{-i\eta p}. \quad (2.6)$$

De esta manera, queda claro que dependiendo de la regla de asociación que se elija entre variable y operadores se obtendrán distintas funciones de pseudoprobabilidad. Las más usadas en física quedan recogidas en la tabla 1.

Función	Regla	f
Wigner	$e^{i\xi q+i\eta p} \leftrightarrow e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}}$	1
Standard-ordered	$e^{i\xi q+i\eta p} \leftrightarrow e^{i\xi\hat{q}+e^{i\eta\hat{p}}}$	$e^{-i\hbar\xi\eta/2}$
Kirkwood	$e^{i\xi q+i\eta p} \leftrightarrow e^{i\eta\hat{p}}e^{i\xi\hat{q}}$	$e^{-i\hbar\xi\eta/2}$
Husimi	$e^{i\xi q+i\eta p} = e^{v\beta^*-v^*\beta} \leftrightarrow e^{-v^*\hat{b}}e^{-v\hat{b}^\dagger}$	$e^{- v ^2/2}$

Tabla 1: Reglas de asociación para las funciones de pseudoprobabilidad más usadas en física [7].

3. Formalismo de Wigner-Weyl

Según lo visto en la sección anterior, dependiendo de la definición de la función $f(\xi, \eta)$ se pueden obtener distintas funciones de distribución; no obstante, este trabajo está centrado en la elección más sencilla, $f(\xi, \eta)=1$, que es equivalente a la regla de asociación de Weyl [1]:

$$e^{i\xi q+i\eta p} \leftrightarrow e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}}. \quad (3.1)$$

Con esta elección la ecuación (2.5) se puede escribir como:

$$W(q, p, t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint d\xi d\eta \text{Tr} \left[\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p}, t) e^{i\xi\hat{q}+i\eta\hat{p}} \right] e^{-i\xi q-i\eta p}, \quad (3.2)$$

siendo esta la función introducida por Wigner [2]. Para estados puros:

$$W(q, p, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\eta \psi^*(q + \frac{\hbar}{2}\eta, t) \psi(q - \frac{\hbar}{2}\eta, t) e^{-i\eta p}. \quad (3.3)$$

Con esta función es posible calcular el valor esperado de un operador como:

$$\langle \hat{A} \rangle = \iint dq dp W(q, p, t) A(q, p, t). \quad (3.4)$$

Sin embargo, para utilizar esta expresión es necesario encontrar la transformada de Weyl de dicho operador. El caso más sencillo es el de un operador que dependa únicamente de \hat{x} :

$$\hat{A}(\hat{x}) = \int dy e^{-\frac{iy p}{\hbar}} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{A} | x - \frac{y}{2} \rangle = \int dy e^{-\frac{iy p}{\hbar}} A(x - \frac{y}{2}) \delta(y) = A(x). \quad (3.5)$$

Es decir, la transformada de Weyl para un operador así, tendrá la misma expresión cambiando únicamente el operador \hat{x} por la variable x . Para un operador que dependa únicamente de \hat{p} se puede realizar el mismo cálculo, pues es posible definir la transformada de Weyl también en la representación de momentos [8]. Por tanto, otra de las ventajas de este formalismo sobre el resto de las formulaciones en el espacio de fases es que la expresión de los operadores hamiltonianos del tipo $\hat{H} = \hat{T}(\hat{p}) + \hat{U}(\hat{x})$ en este espacio es simplemente $H = T(p) + U(x)$. Por último, la expresión para un operador general de la transformada de Weyl es:

$$\hat{A} = \Phi[A] = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iiint d\xi d\eta dq dp A(q, p) e^{i(\xi(\hat{q}-q)+\eta(\hat{p}-p))}. \quad (3.6)$$

Además, al tratarse de una función inyectiva, admite inversa, por lo que la transformada inversa de Weyl se define como:

$$A(q, p) = \Phi^{-1}[\hat{A}] = \int d\eta e^{-i\eta p} \langle q + \frac{\hbar}{2}\eta | \hat{A} | q - \frac{\hbar}{2}\eta \rangle. \quad (3.7)$$

No obstante, con esta expresión será difícil obtener la transformada de Weyl de operadores que dependan de \hat{q} y \hat{p} , por tanto, en la práctica será más útil emplear la expresión introducida en [9]:

$$q^n p^m = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \hat{q}^{n-l} \hat{p}^m \hat{q}^l. \quad (3.8)$$

3.1. Ecuación de autovalores

Una vez introducida la función de Wigner y la transformada de Weyl, con las que se puede encontrar los valores esperados de los observables, queda por explicar si para un hamiltoniano dado es posible obtener directamente la función de Wigner sin necesidad de resolver primero la ecuación de Schrödinger. Esto se puede realizar y, de hecho, la dinámica del sistema queda completamente definida mediante la ecuación de Moyal, que es una extensión del teorema de Liouville de la mecánica clásica [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{H \star f - f \star H}{i\hbar} = \{\{H, f\}\}, \quad (3.9)$$

donde se ha introducido el producto estrella [4]:

$$\star = e^{\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q \right)}. \quad (3.10)$$

En la parte derecha de la ecuación (3.9), además, se ha introducido el corchete de Moyal, cuyo correspondiente operador sería el conmutador de la mecánica cuántica. Además, es posible ver mediante una expansión en serie en \hbar que se puede recuperar el corchete de Poisson cuando $\hbar \rightarrow 0$. En la práctica se puede evaluar el producto estrella mediante los Bopp shifts:

$$A(q, p) \star B(q, p) = A\left(q + \frac{1}{2}i\hbar\overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{1}{2}i\hbar\overrightarrow{\partial}_q\right) \cdot B(q, p). \quad (3.11)$$

Con esta expresión se puede relacionar la ecuación de Moyal con la energía, obteniendo una ecuación de autovalores semejante a la de Schrödinger que se puede resolver para encontrar la función de Wigner:

$$H(x, p) \star W(x, p) = W(x, p) \star H(x, p) = H\left(x + \frac{1}{2}i\hbar\overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{1}{2}i\hbar\overrightarrow{\partial}_q\right)W(x, p) = EW(x, p). \quad (3.12)$$

3.2. Teoría de perturbaciones en formalismo de espacio de fases

En el formalismo de Wigner existe, además, una teoría de perturbaciones como en el caso de la mecánica cuántica convencional. Una de las características de mayor importancia de la teoría de perturbaciones en el formalismo de Wigner es el ser autocontenida y, por tanto, no necesita hacer referencia al formalismo de Hilbert [11].

Partiendo de un hamiltoniano separado entre su parte libre y perturbada:

$$H = H_0 + \lambda H_1, \quad (3.13)$$

siendo la ecuación de autovalores:

$$H(x, p) \star W(x, p) = W(x, p) \star H(x, p) = E_n(\lambda)W_n(x, p), \quad (3.14)$$

es posible realizar una expansión de E y W en potencias de λ de la siguiente manera:

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots \quad (3.15)$$

$$W_n = W_n^0 + \lambda W_n^1 + \lambda^2 W_n^2 + \dots \quad (3.16)$$

Con lo que se obtienen las siguientes ecuaciones para los dos primeros órdenes que son los que tienen interés para este trabajo:

$$H_0 \star W_n^0 = E_n^0 W_n^0, \quad (3.17)$$

$$H_0 \star W_n^1 + H_1 \star W_n^0 = E_n^0 W_n^1 + E_n^1 W_n^0. \quad (3.18)$$

Ahora, multiplicando (3.18) por $W_n^0 \star$ por la izquierda,

$$W_n^0 \star H_0 \star W_n^1 + W_n^0 \star H_1 \star W_n^0 = E_n^1 W_n^0 \star W_n^0 W_n^0 + E_n^0 W_n^0 \star W_n^0, \quad (3.19)$$

y simplificándola utilizando (3.17) la ecuación se puede escribir como:

$$W_n^0 \star H_1 \star W_n^0 = E_n^1 W_n^0 \star W_n^0. \quad (3.20)$$

Sin embargo, para resolver esta ecuación, es necesario introducir primero algunas propiedades del producto estrella y las funciones de Wigner [11]:

$$W_m \star W_n = \frac{1}{2\pi\hbar} \delta_{nm} W_n, \quad (3.21)$$

$$\int dx dp W_m(x, p) W_n^*(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \delta_{mn}. \quad (3.22)$$

También se necesitará la siguiente relación entre dos funciones f y g del espacio de fases:

$$\int dx dp f \star g = \int dx dp g \star f = \int dx dp fg. \quad (3.23)$$

Por tanto, si ahora se escribe la ecuación (3.20) como:

$$\int dx dp E_n^1 W_n^0 \star W_n^0 = \int dx dp W_n^0 \star H_1 \star W_n^0, \quad (3.24)$$

es posible utilizar las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23) para obtener la expresión de la corrección de la energía a primer orden:

$$E_n^1 = \int dx dp H_1 W_n^0. \quad (3.25)$$

4. Agujero Negros y la métrica de Schwarzschild

Tras haber presentado las principales herramientas del formalismo del espacio de fases, se introduce en esta sección la métrica que se va a utilizar para describir el agujero negro, la métrica de Schwarzschild. La métrica de Schwarzschild es una de la primeras para las que se encontró solución a las ecuaciones de Einstein [12]. Esta, no solo describe el campo gravitatorio de una estrella esférica, sino que, también, permite describir agujeros negros estáticos, es decir, aquellos que no tienen carga eléctrica o momento angular. En general, el único parámetro que distinguirá este tipo de agujeros negros será la masa. Esta geometría se puede describir con el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} (dr)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

Y tiene las siguientes propiedades [13]:

- Es independiente del tiempo, luego existe un vector de Killing asociado con la simetría bajo desplazamientos en el tiempo.
- Tiene simetría esférica, por lo que también tiene vectores de Killing asociados a esta simetría, en concreto, el más importante está asociado a la variable ϕ . Esto hace que la variable r tenga una interpretación muy directa, no es simplemente la distancia al centro, sino que está relacionada con el área de la dos-esfera con r y t fijados.
- En $r = 2GM/c^2$ existe una singularidad coordenada que puede ser solucionada con un cambio de coordenadas, por ejemplo, a las de Eddington-Finkelstein. No obstante, para este trabajo no será necesario.

4.1. Potencial efectivo

Como la métrica de Schwarzschild es independiente del tiempo y tiene simetría esférica, se pueden utilizar las leyes de conservación de la energía y del momento angular para facilitar la derivación del potencial efectivo [13]. Para ello, se pueden usar los vectores de Killing ξ y η para obtener las cantidades conservadas aprovechando que la métrica es independiente del tiempo y del ángulo ϕ . Además, durante este cálculo se usarán unidades naturales que se reintroducirán al final del mismo. Las expresiones explícitas de las cantidades conservadas son:

$$e = -\xi \cdot u = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (4.2)$$

$$l = \eta \cdot u = r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\theta}{d\tau}, \quad (4.3)$$

donde e y l son la energía y el momento angular conservados por unidad de masa en reposo y u es la cuadrivelocidad. La conservación del momento angular implica que la órbita de la partícula ocurrirá en un plano de la misma manera que en el caso newtoniano. Por tanto, para el resto de la discusión podemos elegir un ángulo θ en concreto sin que cambie la física, por lo que escogeremos $\theta = \pi/2$ y por tanto $u^\theta = 0$. Por último, existe una cantidad conservada más, que se deduce de la normalización de la cuadrivelocidad:

$$u \cdot u = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1. \quad (4.4)$$

Particularizando (4.4) para el caso de la geometría de Schwarzschild se obtiene:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\phi)^2 = -1. \quad (4.5)$$

Que usando (4.2) y (4.3) puede reescribirse como:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} = -1. \quad (4.6)$$

Desarrollando nuevamente la ecuación:

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right). \quad (4.7)$$

Si ahora, definimos la constante $E = \frac{e^2-1}{2}$ y el potencial V_{eff} como:

$$V_{\text{eff}} = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}, \quad (4.8)$$

y en este último, se reintroducen las constantes sustituyendo t y τ por ct y $c\tau$ y M por GM/c^2 :

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{c^2} \left(-\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \right), \quad (4.9)$$

es posible definir una energía $E_N = mc^2 E$ para poder tener una ecuación análoga a la radial del tipo newtoniano, si además, se introduce $L = l \cdot m$, la ecuación radial se puede escribir entonces como:

$$E_N = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(-\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{c^2 mr^3} \right). \quad (4.10)$$

Con lo que finalmente el potencial queda:

$$V_{\text{eff}} = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{c^2 mr^3}. \quad (4.11)$$

Siendo este el potencial que se va a emplear en las secciones posteriores para resolver la ecuación de Schrödinger de una partícula moviéndose en esta métrica.

5. Función de onda para el potencial de Schwarzschild

En esta sección se calculará la función de onda de un electrón bajo la acción del potencial de Schwarzschild para obtener posteriormente la función de Wigner. A pesar de que hay artículos que resuelven el problema de manera exacta [14] y otros en los que se trata el problema usando la ecuación de Klein Gordon [15], en este trabajo se optará por un tratamiento perturbativo [11], debido a la dificultad para obtener la función de Wigner para el problema completo.

5.1. Masa máxima del problema

En primer lugar, en analogía con el átomo de hidrógeno, definiremos un 'radio de Bohr' gravitatorio:

$$a_g = \frac{\hbar^2}{G \cdot m_e^2 \cdot M} = \frac{\hbar^2}{\kappa m_e}. \quad (5.1)$$

Ahora, para que tenga sentido el tratamiento perturbativo se calculará el orden de magnitud de la masa a partir de la que es posible tratar el término relativista como una corrección. Esta condición se puede expresar como:

$$\frac{GMm_e}{\langle r \rangle} \gg \frac{GM \langle L^2 \rangle}{c^2 m \langle r^3 \rangle}, \quad (5.2)$$

Esta estimación se hará para el primer excitado $n = 2$ con $l = 1$, pues es el estado para el que se calculará la corrección:

$$\frac{\langle r^3 \rangle}{\langle r \rangle} \gg \frac{2\hbar^2}{c^2 m_e^2}. \quad (5.3)$$

Utilizando los valores de la tabla 2:

$$\frac{210a_g^3}{5a_g} \gg \frac{2\hbar^2}{c^2 m_e^2}. \quad (5.4)$$

Como consecuencia la masa tiene como límite superior:

$$M \ll \frac{\sqrt{24}c\hbar}{Gm_e} \rightarrow M \ll 1,6 \cdot 10^{16} \text{ kg}. \quad (5.5)$$

Para próximas secciones se han calculado los valores para una masa de $M = 10^{14}$ kg, pero es muy fácil generalizarlo para cualquier valor de M' que cumpla la condición para el límite superior. Utilizando de nuevo los valores de la tabla 2 el radio será entonces:

$$\langle r \rangle = 3,97 \cdot 10^{-10} \cdot \left(\frac{10^{14} \text{ kg}}{M'} \right) \text{ m}. \quad (5.6)$$

Se comprueba además que el radio de Schwarzschild de esta masa es menor que el promedio de la posición:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} = 1,48 \cdot 10^{-13} \cdot \left(\frac{M'}{10^{14} \text{ kg}} \right) \text{ m}. \quad (5.7)$$

La masa que se ha obtenido es muy pequeña, por lo que no existe ninguna opción de que el cálculo sea válido para agujeros negros estelares. No obstante, según [16] podrían existir agujeros negros primordiales como solución al problema de la materia oscura en un rango de masas entre:

$$6,65 \cdot 10^{13} \text{ kg} < m < 7,6 \cdot 10^{18} \text{ kg}. \quad (5.8)$$

Por tanto, la corrección sería válida en este caso. El cálculo entonces se realizará para el caso de un electrón y un agujero negro primordial ligados en el rango de masas $6,65 \cdot 10^{13} \text{ kg} < M' \ll 1,6 \cdot 10^{16} \text{ kg}$.

5.2. Cálculo de la función de onda de un electrón para el potencial newtoniano

Para calcular la función de onda del electrón se parte del potencial efectivo de Schwarzschild descrito por la ecuación (4.11), y despreciando la corrección relativista se obtiene el potencial newtoniano que es el que se utiliza para resolver la ecuación de Schrödinger:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{Gm_e M}{r} - E \right] \cdot \psi = 0. \quad (5.9)$$

Para resolver esta ecuación, se multiplica por $4r$ y se realiza la transformación de Kustaanheimo-Stiefel que se explicará más detalladamente en el anexo A. Con esta transformación la ecuación (5.9) queda [17]:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_4^2 - 4Es^2 - 4GMm_e \right] \cdot \psi = 0, \quad (5.10)$$

con:

$$\nabla_4^2 = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2}. \quad (5.11)$$

Una vez obtenida esta ecuación se puede hacer una equivalencia entre $-4E$ y $\frac{m_e w^2}{2}$, $4GMm$ y $N\hbar w$, donde $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2$, con lo que se obtiene:

$$E_N = \frac{-2G^2 M^2 m_e^3}{N^2 \hbar^2}. \quad (5.12)$$

Por otro lado, se puede resolver la ecuación de Schrödinger de manera semejante a como se resuelve el átomo de hidrógeno [18]. Con ello se obtiene que el espectro de la energía es $E_n = \frac{-G^2 M^2 m_e^3}{2n^2 \hbar^2}$, así el espectro de este oscilador es equivalente a la energía del potencial de Newton con $2n = N$. Ahora, resolviendo (5.10) se obtiene que las funciones de onda son:

$$\psi_{n_1 n_2 n_3 n_4} = \prod_{j=1}^4 c_{n_j} \cdot e^{-(\alpha^2/2) \cdot \xi_j^2} H_{n_j}(\alpha \xi_j), \quad (5.13)$$

con $c_n = (\alpha/\sqrt{\pi} 2^n n!)^{1/2}$ una constante de normalización, $H_n(\alpha \xi)$ los polinomios de Hermite de orden n y $\alpha = (m_e w/\hbar)^{1/2} = (4/a_g N)^{1/2}$. Sin embargo, en [17], no se tiene en cuenta que estas funciones de onda todavía no tienen la degeneración correcta. Esto se debe a que no se ha utilizado la condición de ligadura $p_w = 0$ en la transformación de los momentos A.7. Por tanto, para que las funciones de onda sean las correctas se debe tener en cuenta explícitamente la condición de ligadura que usando A.7 con $p_w = 0$ quedará como:

$$L_{12} = \xi_1 P_2 - \xi_2 P_1 = \xi_3 P_4 - \xi_4 P_3 = L_{34}. \quad (5.14)$$

Esta relación puede ser explotada utilizando el formalismo del espacio de fases, y como se verá en la sección 6.2 esta condición es equivalente a $m_1 = m_2$. Esta condición implica que el átomo de hidrógeno es equivalente a dos osciladores armónicos isótropos con el mismo momento angular m . Con esta condición la degeneración es la correcta, habiendo n^2 estados para cada energía. No obstante, al no estar bien definido en esta base el número cuántico m , en general será difícil obtener que estados son los físicos. Para encontrarlos, habría que expresar las funciones de onda ψ_{nlm} como combinación lineal de las funciones de onda de la ecuación (5.13). Este procedimiento ha sido generalizado por Chen [19]. Sin embargo, para este trabajo solo se emplearán los dos primeros estados:

$$\psi_{1,0,0} \propto \psi_{0,0,0,0} \quad (5.15)$$

$$\psi_{2,1,\pm 1} \propto (\psi_{1,0,1,0} - \psi_{0,1,0,1} \pm i\psi_{0,1,1,0} \pm i\psi_{1,0,0,1}) \quad (5.16)$$

Se puede comprobar facilmente que, en caso de no utilizar la ligadura, por un lado existirían estados con energías distintas al átomo de hidrógeno, que serían las soluciones con N impar y, por otro lado, la degeneración de los estados con la energía correcta sería la de un oscilador armónico de 4 dimensiones, $\frac{(n-3)!}{n!3!} 1$.

6. Cálculo de la función de Wigner del potencial newtoniano

6.1. Función de Wigner en la base de autoestados de la energía

Una vez obtenidas las funciones de onda, es posible obtener su función de Wigner, que en el caso 4-dimensional se puede escribir como [20]:

$$W(\xi_1, \dots, \xi_4, p_1, \dots, p_4) = \frac{1}{\pi^4 \hbar^4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots dy_4 e^{2i(q_1 y_1 + \dots + q_4 y_4)/\hbar} \psi^*(\xi_1 + y_1, \dots, \xi_4 + y_4) \psi(\xi_1 - y_1, \dots, \xi_4 - y_4), \quad (6.1)$$

donde p_1, \dots, p_4 son los momentos conjugados de ξ_1, \dots, ξ_4 , es decir, aquellos que satisfacen las reglas de conmutación canónicas $\{\xi_j, p_k\} = \delta_{jk}$. Sustituyendo (5.13):

$$W(\xi_1, \dots, \xi_4, p_1, \dots, p_4) = \frac{1}{\pi^4 \hbar^4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots dy_4 \prod_{j=1}^4 |c_j|^2 \cdot e^{-\alpha^2 \cdot (\xi_j^2 - y_j^2)} e^{2iq_j y_j/\hbar} H_{n_j}^*(\alpha(\xi_j + y_j)) H_{n_j}(\alpha(\xi_j - y_j)). \quad (6.2)$$

Ahora, se ha de trabajar esta expresión. En primer lugar se tratan los polinomios de Hermite, y tras sumarles y restarles $\beta = iq/\alpha\hbar$, definir $z_j = \alpha(y - iq/\alpha^2\hbar^2)$ y utilizar $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$, se pueden reescribir como:

$$H_{n_j}^*(\alpha(\xi_j + y_j)) H_{n_j}(\alpha(\xi_j - y_j)) = (-1)^{n_j} H_{n_j}^*(z_j + \beta_j + \alpha\xi_j) H_{n_j}(z_j - \beta_j - \alpha\xi_j). \quad (6.3)$$

Por otro lado, si se multiplica la expresión (6.2) por $e^{\beta_j^2} e^{-\beta_j^2}$, se opera y se sustituye la variable de integración por la z que se ha definido anteriormente, la función de Wigner queda como:

$$W(\xi_1, \dots, \xi_4, p_1, \dots, p_4) = \frac{1}{\pi^6 \hbar^4} \prod_{j=1}^4 \frac{(-1)^{n_j}}{2^{n_j} n_j!} e^{-\alpha^2 \xi_j^2 + \beta_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_j e^{-z_j^2} H_{n_j}^*(z_j + \beta_j + \alpha\xi_j) H_{n_j}(z_j - \beta_j - \alpha\xi_j), \quad (6.4)$$

que usando la expresión definida en [20]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_n^*(z + \beta + \alpha\xi) H_n(z - \beta - \alpha\xi) = \sqrt{\pi} 2^n n! L_n(2(\alpha^2 \xi^2 - \beta^2)), \quad (6.5)$$

permite escribir finalmente la función de Wigner como:

$$W_{n_1, n_2, n_3, n_4}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \frac{1}{\pi^4 \hbar^4} \prod_{j=1}^4 (-1)^{n_j} e^{-\rho_j^2/2} L_{n_j}(\rho_j^2), \quad (6.6)$$

¹Esta fórmula se deduce del caso general del número de formas de distribuir n objetos indistinguibles en k cajas $\binom{n+k-1}{k-1}$.

donde se ha definido $\rho = [2(\alpha^2\xi^2 + q^2/(\alpha^2\hbar^2))]^{1/2}$. Además, como en el caso de las funciones de onda de las funciones de Wigner tienen la misma ligadura $m_1 = m_2$. El estado fundamental es entonces:

$$W_{0,0,0,0} = \frac{1}{\pi^4\hbar^4} e^{-(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+\rho_4^2)/2}. \quad (6.7)$$

Mientras que, para el primer excitado $\psi_{2,1,1}$, es posible definir la función de Wigner a partir de la ecuación (5.16):

$$W_{2,1,1} \propto (W_{1,0,1,0} - W_{0,1,0,1} + iW_{0,1,1,0} + iW_{1,0,0,1}), \quad (6.8)$$

que utilizando los valores de la ecuación (6.6) es igual a:

$$W_{2,1,1} = \frac{-i}{2\pi^4\hbar^4} e^{-(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+\rho_4^2)/2} (L_1(\rho_1^2)L_1(\rho_3^2) - L_1(\rho_2^2)L_1(\rho_4^2) + iL_1(\rho_2^2)L_1(\rho_3^2) + iL_1(\rho_1^2)L_1(\rho_4^2)), \quad (6.9)$$

con el polinomio de Laguerre para $n = 1$:

$$L_1(x) = -x + 1. \quad (6.10)$$

6.2. Función de Wigner, en la base de autoestados de L_3 y H .

Por último, se ha calculado la función de Wigner en la base de autoestados de L_3 y H . Con ello quedará justificada la condición de ligadura que se utilizó en las dos secciones anteriores. Además, estas funciones de Wigner sí que cumplen explícitamente esta condición y, por tanto, son funciones de Wigner válidas. Para encontrarlas, se parte desde la ecuación de autovalores en el espacio de fases [21]:

$$H(x, p) \star W(x, p) = E \cdot W(x, p), \quad (6.11)$$

donde el hamiltoniano general del problema será:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_e} - \frac{\kappa}{r} - \frac{\lambda}{r^3}. \quad (6.12)$$

Siendo $\kappa = GMm_e$ y $\lambda = \frac{GML^2}{c^2mr^3}$. Calcular las soluciones de la ecuación (6.11) para este hamiltoniano es demasiado difícil. Por ello, se llevará a cabo el mismo procedimiento que en la sección 5.2 transformando las coordenadas del problema:

$$H = \frac{1}{8rm_e} \sum_{i=1}^4 P_i^2 - \frac{\kappa}{r} - \frac{\lambda}{r^3}. \quad (6.13)$$

Pero, de nuevo hay que tener en cuenta la restricción $p_w = 0$, descrita por la ecuación (5.14). Además, utilizando la hipersuperficie del espacio de fases $H = E$ se puede escribir:

$$\frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^4 P_i^2 - 4\kappa + 4\frac{\lambda}{r^2} = 4rE, \quad (6.14)$$

que despreciando el término perturbativo queda:

$$\frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^4 P_i^2 - 4\kappa = 4s^2E. \quad (6.15)$$

Con esta ecuación ya es posible utilizar el mismo procedimiento que en la sección 5.2, hacer de nuevo la equivalencia entre $-4E$ y $\frac{m_e\omega^2}{2}$, 4κ y $N\hbar\omega$, dónde $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2$, y trabajar con el hamiltoniano efectivo de un oscilador armónico en 4 dimensiones:

$$H = \frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^4 P_i^2 + s^2 \left(\frac{m_e\omega^2}{2} \right). \quad (6.16)$$

Por tanto, la ecuación de autovalores queda como:

$$\left(\frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^4 P_i^2 + s^2 \frac{m_e\omega^2}{2} \right) \star W(x, p) = (\hbar\omega N)W(x, p), \quad (6.17)$$

y además, la ligadura del momento angular genera una ecuación más:

$$(L_{12} \pm L_{34}) \star W = 0. \quad (6.18)$$

A partir de esta ecuación ya se puede deducir la condición de ligadura en función de los números cuánticos m , ya que esta ecuación es equivalente a:

$$m_{12} = m_{34}, \quad (6.19)$$

donde según Bayen, Flato y Fronsdal [22], m es un número cuántico que en el caso de un oscilador armónico bidimensional puede tomar los siguientes valores: $m_{ij} = n_i + n_j, n_i + n_j - 2, \dots, -n_i - n_j$, luego la condición anterior se puede reescribir finalmente en función de los números cuánticos n_1, n_2, n_3, n_4 [21] como:

$$n_1 + n_2 = n_3 + n_4. \quad (6.20)$$

Además, se puede resolver el sistema de ecuaciones formado por (6.17) y (6.18) en esta base suponiendo que la función de Wigner es separable:

$$W = f_{12}(\xi_1, \xi_2, p_1, p_2) \cdot f_{34}(\xi_3, \xi_4, p_3, p_4). \quad (6.21)$$

De esta manera quedan dos sistemas de ecuaciones:

$$\frac{1}{2m_e} \sum_{j=1}^2 P_j^2 + \sum_{j=1}^2 \xi_j^2 \frac{m_e\omega^2}{2} \star f_{12} = C_{12}f, \quad (6.22)$$

$$L_{12} \star f = M_{12} \cdot f. \quad (6.23)$$

Y:

$$\frac{1}{2m_e} \sum_{j=3}^4 P_j^2 + \sum_{j=3}^4 \xi_j^2 \frac{m_e\omega^2}{2} \star f_{34} = C_{34}f, \quad (6.24)$$

$$L_{34} \star f = M_{34} \cdot f, \quad (6.25)$$

donde $C_{12} + C_{34} = N\hbar\omega$. Estas ecuaciones son completamente análogas y se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\left(H_{ij} \pm L_{ij} - \left(\frac{C_{ij}}{\omega} \pm M_{ij} \right) \right) \star f_{ij} = 0, \quad (6.26)$$

donde el hamiltoniano usando la nomenclatura de la sección 6.1, se puede escribir como:

$$H_{ij} = \frac{1}{2} ((\alpha^2\hbar)^{-1} \sum_{k=i}^j P_k^2 + \alpha^2\hbar \sum_{k=i}^j \xi_k^2). \quad (6.27)$$

Para resolver esta ecuación, en primer lugar, haremos uso de los Bopp shifts $\xi \rightarrow \xi + \frac{i\hbar}{2}\partial p$ y $p \rightarrow p - \frac{i\hbar}{2}\partial\xi$, con lo que se obtendrán dos ecuaciones, una para la parte real y otra para la parte compleja. La segunda puede escribirse como:

$$\left(\frac{\pm\partial\xi_i}{\sqrt{\omega m_e}} + \partial p_j \sqrt{\omega m_e}\right)(\sqrt{\omega m_e}\xi_j \mp \frac{p_i}{\sqrt{\omega m_e}}) - \left(\frac{\partial\xi_j}{\sqrt{\omega m_e}} \mp \partial p_i \sqrt{\omega m_e}\right)(\sqrt{\omega m_e}\xi_i \pm \frac{p_j}{\sqrt{\omega m_e}})f_{ij} = 0, \quad (6.28)$$

y restringe, por tanto, la función f_{ij} a depender de una sola variable $z = \frac{2}{\hbar}(H_{ij} \pm L_{ij})$. Por lo que la parte real se reduce a una ecuación diferencial ordinaria:

$$\left[\frac{1}{4}z - z\partial_z^2 - \partial_z - \frac{1}{2\hbar}\left(\frac{C_{12}}{\omega} \pm M_{ij}\right)\right]f(z) = 0, \quad (6.29)$$

usando el cambio $f(z) = e^{-z/2}L(z)$ se consigue la ecuación de Laguerre:

$$\left[z\partial_z^2 + (1-z)\partial_z + \left(\frac{C_{12}}{2\omega\hbar} \pm \frac{M_{ij}}{2\hbar} - \frac{1}{2}\right)\right]L(z) = 0. \quad (6.30)$$

donde C_{ij} es la constante de un oscilador armónico bidimensional y $M_{ij} = \hbar \cdot m_{ij}$. La solución de esta ecuación son los polinomios de Laguerre $L_n(z)$ con $n=(n_{ij} \pm m_{ij})/2$. Por tanto, una vez realizado este cálculo se obtienen las funciones de Wigner:

$$W_{n_{12},n_{34},m_{12},m_{34}} = \frac{1}{\pi^4\hbar^4}e^{-\frac{2}{\hbar}(H_{12}+H_{34})} \times L_{(n_{12}+m_{12})/2}\left(\frac{2}{\hbar}(H_{12}+L_{12})\right) \times L_{(n_{12}-m_{12})/2}\left(\frac{2}{\hbar}(H_{12}-L_{12})\right) \times L_{(n_{34}+m_{34})/2}\left(\frac{2}{\hbar}(H_{34}+L_{34})\right) \times L_{(n_{34}-m_{34})/2}\left(\frac{2}{\hbar}(H_{34}-L_{34})\right), \quad (6.31)$$

con $m_{ij} = n_{ij}, n_{ij} - 2, \dots, -n_{ij}$, y cumpliéndose que $n_{12} = n_{34}$. La función de Wigner del estado fundamental es, por tanto:

$$W_{0,0,0,0} = \frac{1}{\pi^4\hbar^4}e^{-\frac{2}{\hbar}(H_{12}+H_{34})}, \quad (6.32)$$

que, si se escribe haciendo uso de $\rho = [2(\alpha^2\xi^2 + q^2/(\alpha^2\hbar^2))]^{1/2}$, es el mismo estado que el que se obtuvo en la sección 6.1 como era de esperar:

$$W_{0,0,0,0} = \frac{1}{\pi^4\hbar^4}e^{-(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+\rho_4^2)/2}. \quad (6.33)$$

Además, de nuevo habrá cuatro excitados $W_{1,1,1,1}$, $W_{1,1,-1,-1}$, $W_{1,1,1,-1}$ y $W_{1,1,-1,1}$. Escribiendo explícitamente uno de ellos:

$$W_{1,1,1,1} = \frac{1}{\pi^4\hbar^4}\left[1 - \frac{1}{\alpha^2\hbar^2}(P_1^2 + P_2^2) - \alpha^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{2}{\hbar}(\xi_1P_2 - \xi_2P_1)\right] \times \left[1 - \frac{1}{\alpha^2\hbar^2}(P_3^2 + P_4^2) - \alpha^2(\xi_3^2 + \xi_4^2) + \frac{2}{\hbar}(\xi_3P_4 - \xi_4P_3)\right] \times e^{-(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+\rho_4^2)/2}. \quad (6.34)$$

7. Cálculo de Magnitudes

En esta sección, se calculan algunos valores esperados para el estado fundamental y el primer excitado. Para hacer esto, como consecuencia de haber multiplicado por $4r$ en la ecuación de Schrödinger se debe normalizar la función de Wigner con $dV = s^5 ds$, en lugar de con $dV = s^3 ds$ [23] como se ha hecho en las secciones anteriores², para que la correspondencia sea exacta.

7.1. Estado fundamental

En primer lugar, se van a hallar el valor esperado de la posición, la incertidumbre y la energía. Los valores esperados se pueden comparar con los de la tabla 2 y evidenciar que se obtienen los mismo resultados que con el formalismo en el espacio de Hilbert. Comenzando entonces con el estado fundamental:

$$W_{0,0,0,0} \propto e^{-(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2)/2}, \quad (7.1)$$

que normalizado quedará como:

$$W_{0,0,0,0} = \frac{8\alpha^2}{\hbar^4 \pi^2} e^{-(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2)/2}, \quad (7.2)$$

siendo posible calcular los siguientes valores esperados como:

$$\langle r^n \rangle = \int_0^\infty s^{5+2n} ds \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2\delta)}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_\beta^{\beta-2\pi} d\gamma \int_{-\infty}^\infty dp_1 \dots dp_4 W_{0,0,0,0}. \quad (7.3)$$

Con lo que se ha obtenido:

$$\langle r \rangle \frac{3}{\alpha^2} = \frac{3a_g}{2}, \quad (7.4)$$

y:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{12}{\alpha^4} = 3a_g^2. \quad (7.5)$$

De esta manera, la posición del estado fundamental es:

$$\langle r \rangle = 1,19 \cdot 10^{-10} \left(\frac{10^{14}}{M'} \right) \text{ m}, \quad \Delta r = 6,89 \cdot 10^{-11} \left(\frac{10^{14}}{M'} \right)^2 \text{ m}, \quad (7.6)$$

donde $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$. Por último, para este estado se ha calculado también la corrección a primer orden de la energía. La corrección de la relatividad general al estado fundamental será 0, pues este estado tiene $l = 0$. No obstante, existe una corrección cuántica al potencial newtoniano [24], que para los estados con $l \neq 0$ será menor que la de la relatividad general, pero que, en el caso del estado fundamental, se convierte en la corrección dominante. La corrección es por tanto:

$$\lambda H_1 = \frac{127G^2 M m_e \hbar}{30\pi^2 r^3 c^3}, \quad (7.7)$$

y utilizando este hamiltoniano en la expresión (3.25) la corrección queda como:

$$E_2^{(1)} = \int d\xi_1 \dots d\xi_4 \int dp_1 \dots dp_4 \frac{W_{0,0,0,0}(\xi_1, \dots, \xi_4, p_1, \dots, p_4)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^6}. \quad (7.8)$$

²Nótese que el factor 4 al ser una constante no afecta.

Esta integral es divergente, por lo que se impone un límite inferior ϵ en la variable s , haciendo de nuevo un cambio de variable queda:

$$E_2^{(1)} = \frac{8\alpha^2}{\hbar^4\pi^2} \int_{\epsilon}^{\infty} ds \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2\delta)}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{\beta}^{\beta-2\pi} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \dots dp_4 \frac{e^{-\alpha^2 s^2}}{s} \\ \times e^{\frac{-1}{\alpha^2 \hbar^2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2)} = \frac{\alpha^6}{2} \Gamma[0, \alpha^2 \epsilon] = \frac{4}{a_g^3} \Gamma[0, 2\epsilon/a_g]. \quad (7.9)$$

La función $\Gamma[0, x]$ ³, con x tendiendo a 0, es divergente, por lo que se puede estudiar como es su divergencia. Para observar como tiende a 0 esta función es posible hacer un desarrollo en serie obteniendo:

$$\Gamma[0, x] = -\log(x) - \gamma + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (7.10)$$

con lo que se puede ver que la divergencia para esta corrección es logarítmica. De esta manera es posible expresar energía a primer orden como:

$$E_2 = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2\hbar^2} + \frac{127G^2 M m_e \hbar}{30\pi^2 c^3} \frac{1}{4a_g^3} \log(2\epsilon/a_g). \quad (7.11)$$

7.2. Primer excitado

En esta sección se repetirán los cálculos de la sección anterior para la función de Wigner $W_{2,1,1}$ que se obtuvo en la sección 6.1. De nuevo se debe normalizar esta función con $s^5 ds$ para replicar los resultados de la teoría cuántica clásica. Por tanto, partiendo de:

$$W_{2,1,1} \propto e^{-(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2)/2} (L_1(\rho_1^2)L_1(\rho_3^2) - L_1(\rho_2^2)L_1(\rho_4^2) + iL_1(\rho_2^2)L_1(\rho_3^2) + iL_1(\rho_1^2)L_1(\rho_4^2)), \quad (7.12)$$

la condición de normalización será:

$$1 = C \int_0^{\infty} s^5 ds \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2\delta)}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{\beta}^{\beta-2\pi} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \dots dp_4 W_{2,1,1}. \quad (7.13)$$

Obteniendo, por tanto, que la función de Wigner será:

$$W_{2,1,1} = \frac{-i\alpha^2}{8\pi^4 \hbar^4} \left(e^{-(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2)/2} (L_1(\rho_1^2)L_1(\rho_3^2) - L_1(\rho_2^2)L_1(\rho_4^2) + iL_1(\rho_2^2)L_1(\rho_3^2) + iL_1(\rho_1^2)L_1(\rho_4^2)) \right). \quad (7.14)$$

De nuevo se calculan la posición, y la incertidumbre. Para ello, son necesarios los valores esperados de r y r^2 :

$$\langle r^n \rangle = \int_0^{\infty} s^{5+2n} ds \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2\delta)}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{\beta}^{\beta-2\pi} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \dots dp_4 W_{2,1,1}, \quad (7.15)$$

con lo que se obtiene:

$$\langle r \rangle = 5a_g = 3,97 \cdot 10^{-10} \left(\frac{10^{14} \text{ kg}}{M'} \right) \text{ m}, \quad (7.16)$$

$$\Delta r = \sqrt{5}a_g^2 = 1,78 \cdot 10^{-10} \left(\frac{10^{14} \text{ kg}}{M'} \right) \text{ m}. \quad (7.17)$$

³Esta función es la la función gamma incompleta que se define como $\Gamma[a, x] = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

También se vuelve a calcular la corrección a la energía para este estado:

$$E_2^{(1)} = \int_0^\infty ds \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2\delta)}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_\beta^{\beta-2\pi} d\gamma \int_{-\infty}^\infty dp_1 \dots dp_4 \frac{W_{2,1,1}}{s}, \quad (7.18)$$

consiguiendo el siguiente resultado:

$$E_2^{(1)} = \frac{\alpha^6}{24} = \frac{1}{24a_g^3}. \quad (7.19)$$

En general, las funciones de Wigner obtenidas mediante la transformación de Kustaanheimo-Stiefel no tienen el número cuántico l bien definido. No obstante, se ha elegido una función de onda que sí cumple con este requisito, puesto que la corrección de la relatividad general depende de l . Es posible comprobar, observando la tabla 2 en el anexo B, que el valor obtenido para esta corrección es igual que el calculado mediante el formalismo de Schrödinger. Con ello, se evidencia que la función de Wigner, tal como la hemos definido, sí tiene el número cuántico bien definido. Esto, permite calcular exactamente la corrección de la relatividad general, usando que $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ con $l = 1$:

$$E_2 = -\frac{G^2 M^2 m^3}{8\hbar^2} - \frac{GM2\hbar^2}{c^2 m_e r^3} \frac{1}{24a_g^3}. \quad (7.20)$$

Numéricamente el valor del primer término de la energía será:

$$E_2^{(0)} - \frac{G^2 M^2 m^3}{8\hbar^2} = -9,53 \cdot 10^{-18} \left(\frac{M'}{10^{14} \text{ kg}} \right)^2 \text{ J}, \quad (7.21)$$

y el de la primera corrección:

$$E_2^{(1)} = -\frac{GM2\hbar^2}{c^2 m_e} \frac{1}{24a_g^3} = -5,91 \cdot 10^{-21} \left(\frac{M'}{10^{14} \text{ kg}} \right)^4 \text{ J}. \quad (7.22)$$

De hecho, si se observan los valores esperados, se puede comprobar que son iguales a los de la función radial R_{21} . Por tanto, se evidencia que utilizando el formalismo del espacio de fases es posible replicar los resultados de la teoría de perturbaciones usual. En consecuencia, será posible extender este procedimiento a otros excitados siempre que encontremos la relación entre las funciones de onda en la base de osciladores y las funciones de onda en la base n, l, m .

8. Conclusiones

En este trabajo se ha conseguido obtener varios resultados importantes. En primer lugar, se introdujeron las principales herramientas del formalismo del espacio de fases. La más importante de todas son las funciones de pseudoprobabilidad que serán el análogo de las funciones de onda en este formalismo y que guardan relación con las funciones de distribución de la mecánica clásica. A pesar de haber estudiado también la función de Husimi y el espacio de Segal-Bargmann se ha hecho especial énfasis en la función de Wigner y la transformada de Weyl. Con todas estas herramientas se ha comprobado que el formalismo simpléctico es equivalente al formalismo en el espacio de Hilbert; habiendo encontrado una ecuación de autovalores, el valor esperado de los observables cuánticos, además de una teoría de perturbaciones equivalente.

Una vez sentadas las bases de la mecánica cuántica en el espacio de fases se ha procedido a estudiar el estado ligado de un electrón y un agujero negro primordial. Para ello, se ha utilizado la

geometría de Schwarzschild, que es la métrica más simple que permite describir el espacio-tiempo de un agujero negro. Además, se han introducido las principales características de esta métrica, y utilizando las leyes de conservación de la energía y el momento angular se ha derivado, en analogía con la mecánica clásica, un potencial efectivo para un electrón en esta métrica. Por último, se ha calculado el orden de magnitud a partir del cual el término de la relatividad general se puede tratar como una corrección al potencial newtoniano. De esta manera, ha sido posible realizar un tratamiento perturbativo y resolver la ecuación de Schrödinger para el potencial newtoniano.

La resolución de esta ecuación es equivalente a la del átomo de hidrógeno; y utilizando coordenadas esféricas es posible obtener las funciones de onda ψ_{nlm} . No obstante, en este trabajo no se ha procedido de esta manera, sino que para resolver la ecuación se ha empleado la transformación de Kustaanheimo-Stiefel, que logra conectar el potencial armónico con un potencial que depende del inverso de la distancia, como es el columbiano o, en este caso particular, el newtoniano.

Una vez obtenidas estas funciones de onda se han reproducido los cálculos del artículo de Nouri [20], logrando obtener unas funciones de Wigner mediante la transformada de Weyl de las funciones de onda anteriores. No obstante, en este artículo no se tiene en cuenta la condición de ligadura, lo que hace que, por ejemplo, el primer excitado que se encuentra no sea el correcto. De esta manera, se ha logrado actualizar el artículo, obteniendo las funciones de Wigner correctas.

Posteriormente, se ha obtenido la función de Wigner en una base distinta. Para ello, se han reproducido los cálculos de Campos, Martins y Fernandes [21]. Demostrando, por un lado, que al igual que en el formalismo de Hilbert, se puede obtener las funciones de Wigner en dos bases distintas; y, por otro lado, que también es posible obtener unas funciones de Wigner sin necesidad de hacer referencia a la ecuación de Schrödinger, comprobando así que el formalismo es autocontenido. Es importante resaltar que se ha logrado encontrar y reproducir las dos formas principales de obtener funciones de Wigner, la primera mediante la transformada de Weyl, y la segunda planteando una ecuación de autovalores análoga a la mecánica cuántica usual.

No obstante, el principal aporte del trabajo se encuentra en la sección 7. En esta sección, mediante la teoría de perturbaciones del formalismo simpléctico, se ha calculado la posición y la incertidumbre de los dos primeros estados, y la corrección a primer orden de la energía de dichos estados. Además, con el fin de comprobar que es posible reproducir los valores de la teoría cuántica usual, se ha realizado el mismo cálculo utilizando el formalismo del espacio de Hilbert; resultados que quedan recogidos en la tabla 2. Es importante destacar que los valores obtenidos son iguales, y que es la primera vez que aparece en la literatura este cálculo en el espacio de fases.

Apéndice A. Transformación de Kustaanheimo-Stiefel

La transformación de Kustaanheimo-Stiefel ha sido utilizada para resolver la ecuación de Schröndinger, por lo que este anexo se dedicará a comprenderla en más detalle. Esta es una aplicación que se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \xi_3 & -\xi_4 & \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_4 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 \\ \xi_1 & \xi_2 & -\xi_3 & -\xi_4 \\ \xi_2 & -\xi_1 & -\xi_4 & \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Es decir:

$$\begin{aligned} x &= 2(\xi_1\xi_3 - \xi_2\xi_4), \\ y &= 2(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3), \\ z &= \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Otra forma posible de parametrizar esta transformación es:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= s \cdot \cos(\delta)\cos(\beta), \\ \xi_2 &= s \cdot \cos(\delta)\sen(\beta), \\ \xi_3 &= s \cdot \sen(\delta)\cos(\gamma), \\ \xi_4 &= s \cdot \sen(\delta)\sen(\gamma), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde:

$$s = r^{1/2}, \quad 2\delta = \theta, \quad \beta \pm \gamma = \phi. \quad (\text{A.4})$$

Con esta parametrización ya es posible comprender el significado de la transformación. Esta define un mapa sobreyectivo, en el que si un punto $\xi \in \mathbb{R}^{4*}$ tiene la imagen $q \in \mathbb{R}^{3*}$, entonces todos los puntos $\xi' \in \mathbb{R}^{4*}$ definidos como:

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \\ \xi'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sen(\phi) & 0 & 0 \\ -\sen(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & -\sen(\phi) \\ 0 & 0 & \sen(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

admiten la misma imagen $q \in \mathbb{R}^{3*}$. Además, el conjunto $\{R_\phi : \phi \in (0, 2\pi)\}$ genera un grupo de Lie isomorfo a $SO(2) \times SO(2)$. De esta manera, el momento angular asociado a esta rotación es el generador de un grupo de Lie $U(1)$. Usando ahora las ecuaciones (A.1) y (A.3) es posible obtener la aplicación diferencial:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dw \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \xi_3 & -\xi_4 & \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_4 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 \\ \xi_1 & \xi_2 & -\xi_3 & -\xi_4 \\ \xi_2 & -\xi_1 & -\xi_4 & \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

donde w es una coordenada ficticia tal que dw no es un diferencial total. A partir de esta ecuación es posible derivar la transformación de los momentos que se escribe [21]:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_w \end{pmatrix} = \frac{1}{2s^2} \begin{pmatrix} \xi_3 & -\xi_4 & \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_4 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 \\ \xi_1 & \xi_2 & -\xi_3 & -\xi_4 \\ \xi_2 & -\xi_1 & -\xi_4 & \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Para que las ecuaciones (A.1) y (A.7) definan una transformación canónica, los corchetes de Poisson deben ser independientes de las coordenadas escogidas. Si los evaluamos en el sistema de 4 coordenadas obtenemos:

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0, & \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}, & \{q_i, p_w\} &= 0, \\ \{p_i, p_j\} &= \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{q_k}{q^2} p_w, & \{p_i, p_w\} &= \frac{q_i}{q^2} p_w. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Con lo que es posible comprobar que la transformación es canónica, si y solo si, $p_w = 0$.

Apéndice B. Cálculo en el formalismo de Schrödinger

La corrección a primer orden de la energía en Hilbert será:

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | H_1 | \psi_n^{(0)} \rangle. \quad (\text{B.1})$$

Y los valores esperados:

$$\langle r \rangle = \langle \psi_n^{(0)} | r^n | \psi_n^{(0)} \rangle. \quad (\text{B.2})$$

Se recogen en la tabla 2 los principales valores esperados que se necesitarán con el fin de comprobar que los resultados obtenidos en el formalismo simpléctico coinciden con los resultados en el espacio de Hilbert.

Estado	Función radial	$\langle \tilde{r} \rangle$	$\langle \tilde{r}^2 \rangle$	$\langle \frac{1}{\tilde{r}^3} \rangle$	$\langle \tilde{r}^3 \rangle$
R_{10}	$2\left(\frac{1}{a_g}\right)^{3/2} e^{-\tilde{r}}$	$\frac{3}{2}$	3	$4\Gamma\left[0, \frac{2\epsilon}{a_g}\right]$	$\frac{15}{2}$
R_{21}	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a_g}\right)^{3/2} \tilde{r} \cdot e^{-\frac{\tilde{r}}{2}}$	5	30	$\frac{1}{24}$	210

Tabla 2: Funciones de onda y valores esperados en el espacio de Hilbert ($\tilde{r} = \frac{r}{a_g}$).

Referencias

- [1] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover, New York, 1950.
- [2] E. Wigner, «On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium,» *Phys. Rev.*, vol. 40, n.º 5, pp.749-759, jun. de 1932. DOI: 10.1103/PhysRev.40.749.
- [3] J. E. Moyal, «Quantum mechanics as a statistical theory,» *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 45, n.º 1, pp.99-124, enero de 1949.
- [4] H. J. Groenewold, «On the Principles of elementary quantum mechanics,» *Physica*, vol. 12, n.º 7, pp.405-460, oct. de 1946. DOI: 10.1016/S0031-8914(46)80059-4.
- [5] K. Husimi, «Some Formal Properties of the Density Matrix,» *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan.*, vol. 22, n.º 4, pp.264-314, 1940. DOI: 10.11429/ppmsj1919.22.4_264.
- [6] L. Cohen, «Generalized Phase-Space Distribution Functions,» vol. 7, n.º 5, pp.781-786, mayo de 1966. DOI: 10.1063/1.1931206.
- [7] H. W.Lee, «Theory and application of the quantum phase-space distribution functions,» vol. 259, n.º 3, pp.147-211, agosto de 1995. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(95\)00007-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(95)00007-4).

- [8] J. Brogaard, «Wigner function formalism in Quantum mechanics,» *Signature*, 2015.
- [9] N. H. McCoy, «On the Function in Quantum Mechanics Which Corresponds to a Given Function in Classical Mechanics,» *Proc. Nat. Acad. Sci.*, pp.674-676, nov. de 1932. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.18.11.674>.
- [10] T. Curtright, D. Fairlie y C. Zachos, *A Concise Treatise on Quantum Mechanics in Phase Space*. World Scientific, 2014. DOI: 10.1142/8870.
- [11] T. Curtright, T. Uematsu y C. Zachos, «Generating all Wigner functions,» *J. Math. Phys.*, vol. 42, n.º 6, pp.2396-2415, jun. de 2001. DOI: 10.1063/1.1366327.
- [12] K. Schwarzschild, «On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory,» 1999. arXiv: [physics/9905030](https://arxiv.org/abs/physics/9905030) [physics.hist-ph].
- [13] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2003.
- [14] I. S. Kohli, «Quantum Wavefunction for a Schwarzschild Black Hole,» 2012. arXiv: 1110.6204 [gr-qc].
- [15] E. Berti, V. Cardoso y A. Starinets, «Quasinormal modes of black holes and black branes,» *Class. Quantum Gravity*, vol. 25, n.º 16, jul. de 2009. DOI: 10.1088/0264-9381/26/16/163001.
- [16] P. Montero-Camacho, X. Fang, G. Vasquez et al., «Revisiting constraints on asteroid-mass primordial black holes as dark matter candidates,» *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, agosto de 2019. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/08/031.
- [17] A. C. Chen, «Hydrogen atom as a four-dimensional oscillator,» *Physical Rev. A*, vol. 22, n.º 2, pp.333-335, agosto de 1980. DOI: 10.1103/PhysRevA.22.333.
- [18] C. S. d. Río, *Física Cuántica*. Ediciones Piramide, 2017.
- [19] A. C. Chen, «Addendum to "Hydrogen Atom as a Four-dimensional Oscillator",» *Phys. Rev. A*, vol. 25, págs. 2409-2410, 4 abr. de 1982. DOI: 10.1103/PhysRevA.25.2409.
- [20] S. Nouri, «Wigner phase-space distribution function for the hydrogen atom,» *Physical Rev. A*, vol. 57, n.º 3, pp. 1526-1528, 1998. DOI: 10.1103/PhysRevA.57.1526.
- [21] P. Campos, M. Martins, M. Fernandes et al., «Quantum mechanics on phase space: The hydrogen atom and its Wigner functions,» *Ann. Phys.*, vol. 390, pp. 60-70, mar. de 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2018.01.002>.
- [22] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal et al., «Deformation theory and quantization. II. Physical applications,» *Ann. Phys.*, vol. 111, n.º 1, pp.111-151, feb. de 1978. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(78\)90225-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(78)90225-7).
- [23] A. C. Chen, «Theoretical basis for Coulomb matrix elements in the oscillator representation,» *J. Math. Phys.*, vol. 23, n.º 3, pp. 412-416, mar. de 1982. DOI: 10.1063/1.525360.
- [24] J. F. Donoghue, «General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections,» *Physical Rev. D*, vol. 50, n.º 6, pp. 3874-3888, sep. de 1994. DOI: 10.1103/physrevd.50.3874.